Министерство сельского хозяйства РФ

Иркутский государственный
аграрный университет им. А.А. Ежевского
Кафедра Математики

**А.И. Мартыненко**

# МАТЕМАТИКА

## Учебное пособие

Молодежный 2021

УДК 51(075.32)

М 294

Печатается по решению научно-методического совета Иркутского государственного аграрного университета им. А. А. Ежевского, (Протокол № 2 от 27 декабря 2021 г.)

Рецензенты: Голышева С.П., к.пед.н., доцент кафедры математики Иркутского ГАУ им. А.А. Ежевского;
Гусев Б.В. к.ф.-м.н., профессор кафедры «Информационные системы и защита информации» Иркутского государственного университета путей сообщения

Мартыненко, А. И.

Математика : учебное пособие для студентов колледжей очной и заочной форм обучения аграрного профиля / А. И. Мартыненко ; Иркут. гос. аграр. ун-т им. А. А. Ежевского. – Молодежный : Изд-во ИрГАУ, 2021. – 122 с. – Текст : электронный.

Учебное пособие включает разделы «Элементы линейной и векторной алгебры», «Аналитическая геометрия на плоскости», «Введение в математический анализ». В учебном пособии приведен обзор основных теоретических понятий и положений указанных разделов с иллюстрацией их на конкретных примерах. Учебное пособие предназначено для обучающихся колледжей очной и заочной форм обучения аграрного профиля.

## Введение

Математика – самая древняя наука, зарождалась она еще во втором тысячелетии до нашей эры, когда в торговле, землемерии, мореплавании возникла необходимость упорядочить приемы счета и измерения, корни которых уходят в еще более глубокую древность. Математические знания уже использовались египтянами при строительстве пирамид.

Математика — это один из самых мощных методов изучения окружающего мира, с ее помощью можно решать как теоретические, так и практические проблемы, возникающие в различных сферах деятельности людей. Для этого достаточно перевести экономическую, транспортную, управленческую и любую другую, задачу на математический язык, т.е. построить ее математическую модель. Безусловно, такая модель основана на некотором упрощении и не является точным описанием реального процесса, но математизация практической задачи позволяет находить неизвестные ранее закономерности, давать математический анализ условий, при которых возможно решение такой задачи, или строить средствами математики прогноз развития того или иного производственного или экономического процесса.

Современный специалист, грамотно применяющий математику, способен принести пользу в любой сфере деятельности, где роль математических методов год от года только возрастает.

Математику считают достаточно трудной наукой. Причина в том, что для нее характерны и серьезные логические построения, не допускающие ошибок, и громоздкие формулы. Поэтому распространено мнение, что среди учебных курсов самые непонятные — это курсы лекций по математике.

Настоящее пособие, которое предназначено для обучающихся по специальностям среднего профессионального образования, а также для всех, кто изучает данную дисциплину самостоятельно, включает теоретический компонент, необходимый для освоения курса математики, а также большое количество примеров с их решениями.

Содержание пособия включает следующие разделы математики: элементы линейной и векторной алгебры, аналитической геометрии, математический анализ, дифференциальные уравнения.

# Раздел 1. Элементы векторной и линейной алгебры

## 1.1. Векторы и их свойства

**Определение 1.1.** Любой упорядоченный набор из $n$ действительных чисел $a_1$, $a_2$ ,…,$a_n$ называется $n$-мерным вектором $\overline{a}$. Числа, составляющие набор называются координатами или компонентами вектора $\overline{a}$.

**Определение 1.2.** Совокупность всех $n$-мерных векторов называется $n$-мерным векторным пространством $R^n$ .

Координаты $n$- мерного вектора $\overline{a}$ можно записать вектор-строкой $\overline{a}=(a_1, a_2,\ldots, a_n)$ или вектор-столбцом $\overline{a}=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \ldots \\ a_n \end{pmatrix}$.

**Определение 1.3.** Два вектора с одним и тем же числом координат $\overline{a}=(a_1, a_2,\ldots, a_n)$ и $\overline{b}= (b_1, b_2,\ldots,b_n)$ называются равными, если равны их соответствующие координаты, т.е. $a_1=b_1$, $a_2=b_2,\ldots,a_n=b_n$.

**Определение 1.4.** Вектор, все координаты которого равны нулю, называется нулевым вектором $\overline{0}=(0, 0,\ldots,0)$.

## 1.2. Операции над векторами

Пусть $\overline{a}$ и $\overline{b}$ принадлежат $R^n$

**Определение 1.5.** Суммой векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называется вектор $\overline{c}$, координаты которого равны суммам соответствующих координат этих векторов, т.е. $\overline{c} = \overline{a} + \overline{b} = (\overline{a_1}+\overline{b}_1, \overline{a}_2+\overline{b}_2 ,\ldots,\overline{a}_n+\overline{b}_n )$.

**Определение 1.6.** Произведением вектора $\overline{a}$ на число $\lambda$ называется вектор, координаты которого получаются умножением соответствующих координат вектора $\overline{a}$ на это число, т.е. $\overline{c}=\lambda\overline{a}=\left(\lambda\overline{a}_1 , \lambda\overline{a}_2 ,\ldots, \lambda\overline{a}_n\right)$.

Перечислим свойства операций:

**1)** $\overline{a} + \overline{b} = \overline{b} + \overline{a}$ (переместительное);

**2)** $(\overline{a} + \overline{b}) + \overline{c} = \overline{a} + (\overline{b} + \overline{c})$ (сочетательное);

**3)** $\lambda(\overline{a} + \overline{b}) = \lambda\overline{a} + \lambda\overline{b}$, где $\lambda$ – действительное число;

**4)** $(\lambda + \mu)\overline{a} = \lambda\overline{a} + \mu\overline{a}$, где $\lambda, \mu$ - действительные числа;

**5)** $\lambda(\mu\overline{a}) = (\lambda\mu)\overline{a}$ , где $\lambda, \mu$ – действительные числа;

**6)** $\overline{a} + \overline{0} = \overline{a}$;

**7)** Для любого вектора $\overline{a}$ существует такой вектор $-\overline{a}$, что $-\overline{a} = (-1)\overline{a}$, $\overline{a} + (-\overline{a}) = \overline{0}$;

**8)** $0\overline{a} = \overline{0}$**.**

## 1.3. Скалярное произведение векторов

**Определение 1.7.** Скалярным произведением векторов называется число, равное сумме произведений соответствующих координат этих векторов, т.е.

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n$$

**Пример 1.1.** Вычислить скалярное произведение вектора $\overline{a} = (1,4,6,0)$ на вектор $\overline{b} = (-2,3,0,5)$.

*Решение*: $\overline{a} \cdot \overline{b} = 1 \cdot (-2) + 4 \cdot 3 + 6 \cdot 0 + 0 \cdot 5 = 10$.

*Ответ*: 10.

Перечислим свойства скалярного произведения:

1) $\overline{a} \cdot \overline{b} = \overline{b} \cdot \overline{a}$ (переместительное);

2) $(\lambda\overline{a}) \cdot \overline{b} = \overline{a} \cdot (\lambda\overline{b}) = \lambda(\overline{a} \cdot \overline{b})$, $\lambda$- действительное число;

3) $\overline{a} \cdot (\overline{b} + \overline{c}) = \overline{a \cdot b} + \overline{a} \cdot \overline{c}$;

4) $\overline{a} \cdot \overline{a} > 0$, если $\overline{a} \neq 0$ и $\overline{a} \cdot \overline{a} = 0$, если $\overline{a}$=0.

Модуль вектора находится по формуле:

$$|\overline{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}, \cos\varphi = \frac{\overline{a \cdot b}}{|\overline{a}| \cdot |\overline{b}|}.$$

Если скалярное произведение $\overline{a} \cdot \overline{b} = 0$, векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ ортогональные (Аналог условия перпендикулярности в двух- и трехмерном пространстве).

## 1.4. Матрицы

### 1.4.1. Основные понятия

**Определение 1.8.** Матрицей размерности $m \times n$ называют прямоугольную таблицу чисел, содержащую $m$ строк и $n$ столбцов.

Матрицы обозначаются заглавными буквами латинского алфавита, а их элементы - маленькими буквами с двумя индексами, первый индекс указывает номер строки, где расположен данный элемент, а второй индекс - номер столбца, например:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij}), \quad i = \overline{1,m}, \quad j = \overline{1,n} \tag{1.1}$$

где $a_{ij}, i = \overline{1,m}, \ j = \overline{1,n}$ элементы матрицы $A$, i - номер строки, j - номер столбца, на пересечении которых находится элемент $a_{ij}$.

Если $m$=$n$, матрицу называют *квадратной* (при этом $m$=$n$ называют порядком матрицы), в противном случае матрицу называют *прямоугольной.*

Если $m$=1, то матрицу размерности $1 \times n$ называют *вектором-строкой*; соответственно, матрицу размерности $m \times 1$ называют *вектором-столбцом.* В связи с этим матрицу $A$ можно рассматривать как упорядоченное множество векторов-строк или векторов-столбцов.

Если $A$ - квадратная матрица порядка $n$, то элементы $a_{ii}$, $i = \overline{1,n}$ образуют диагональ, называемую главной. Квадратная матрица, у которой все элементы, кроме элементов, стоящих на главной диагонали, равны нулю ($a_{ij}=0$, если $i \neq j$), называется *диагональной.*

Диагональная матрица, у которой все элементы, стоящие на главной диагонали, равны единице, называется единичной и обозначается буквой $E$, например $E=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Если в матрице $A$ строки поменять местами со столбцами, то матрица называется *транспонированной* матрицей и обозначается $A^T$ (т.е. каждая $i$-я строка матрицы $A$ является $i$-ым столбцом в $A^T$ и, наоборот, каждая $i$-ая строка $A^T$ есть $i$-ый столбец $A$).

### 1.4.2. Действия над матрицами

1. Две матрицы $A(m \times n) = (a_{ij})$ и $B(m \times n) = (b_{ij})$ равны, если они имеют одинаковую размерность и их соответствующие элементы равны: $a_{ij} = b_{ij}$, $i=\overline{1,m}, j=\overline{1,n}$

2. Чтобы умножить матрицу $A=(a_{ij})$ на число $\lambda$, надо каждый элемент матрицы умножить на это число

$\lambda A = A\lambda = (\lambda a_{ij})$.

3. Сумма (разность) двух матриц $A_{m\times n}$ и $B_{m\times n}$ есть матрица той же размерности, элементы которой получаются сложением (вычитанием) соответствующих элементов матриц и, т.е.

$A \pm B = (a_{ij} \pm b_{ij}),\ \ i=\overline{1,m},\ \ j=\overline{1,n}$.

4. Если число столбцов матрицы $A(m \times n)$ ровно числу строк матрицы $B(n \times k)$, то произведением матриц $A$ и $B$ называю матрицу $C(m \times k)$, у которой элемент $c_{ij}$ равен скалярному произведению $i$-ой строки матрицы $A$ на $j$-ый столбец матрицы $B$, т.е.

$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + ... + a_{in}b_{nk},\ i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,k}$.

**Пример 1.2.** Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Найти $A \cdot B$.

*Решение*:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+6+6 & 1+8+6 & 0+2+3 \\ 8+0+4 & 4+0+4 & 0+0+2 \\ 2+9+2 & 1+12+2 & 0+3+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 15 & 6 \\ 12 & 8 & 2 \\ 13 & 15 & 4 \end{pmatrix}.$$

*Ответ*: $\begin{pmatrix} 14 & 15 & 6 \\ 12 & 8 & 2 \\ 13 & 15 & 4 \end{pmatrix}$.

Для удобства определения размера матрицы-произведения нужно поделить друг на друга произведения размеров матриц-сомножителей, т.е. $\frac{m \times n}{n \times k} = \frac{m}{k}$. Размер матрицы $C$ равен произведению оставшихся чисел, т.е. $m \times k$.

Итак, правило умножения справедливо для прямоугольных матриц, у которых число столбцов матрицы-множимого равно числу строк матрицы-множителя, т.е. $A(m \times n) \cdot B(n \times k) = C(m \times k)$.

Перечислим свойства произведения матриц:

1) $AB \neq BA$ (переместительное);

2) $A(BC) = (AB)C$ (сочетательное);

3) $(A + B)C = AC + BC$ (распределительное);

4) $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$, где $\alpha$ – действительное число;

5) $AE = A, EA = A$, где $E$ – единичная матрица.

## 1.5. Определители

### 1.5.1. Определители второго порядка и их свойства

Пусть дана квадратная матрица второго порядка $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$.

**Определение 1.9.** Определителем (детерминантом) второго порядка называется число $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$ и обозначается символом $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$.

Числа $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ называют элементами определителя. Первый индекс указывает номер строки, второй – столбца.

Таким образом $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$. Например,

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-4) - 5 \cdot 3 = -23$$

Перечислим свойства определителей:

1) определитель не изменится, если его строки поменять местами с соответствующими столбцами, т.е. $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}$;
2) при перестановке двух строк (столбцов) определитель изменит знак на противоположный, сохраняя абсолютную величину, т.е. $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix}$;
3) определитель с двумя одинаковыми или пропорциональными строками (столбцами) равен нулю;
4) общий множитель элементов строки (столбца) можно выносить за знак определителя, т.е. $\begin{vmatrix} a_{11} & ka_{12} \\ a_{21} & ka_{22} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$;
5) если все элементы какой-либо строки (столбца) равны нулю, то определитель равен нулю;
6) если к элементам строки (столбца) определителя прибавить соответствующие элементы другой строки (столбца), умноженные на одно и то же число, то определитель не изменит своей величины, т.е. $\begin{vmatrix} a_{11} + ka_{12} & a_{12} \\ a_{21} + ka_{22} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$.

Все свойства определителя доказываются проверкой по формуле:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

### 1.5.2. Определители третьего порядка

Рассмотрим матрицу третьего порядка $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$.

**Определение 1.10.** Определителем третьего порядка называется число, получаемое следующим образом: $a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$ и обозначается символом $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$.

Таким образом, $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$.

Данная формула дает разложение определителя третьего порядка по элементам первой строки и сводит вычисление определителя третьего порядка к вычислению определителя второго порядка.

Пусть $a_{ij}$- элемент определителя, стоящий в i-той строке и j-том столбце.

**Определение 1.11.** Определитель второго порядка, полученный вычеркиванием i-ой строки и j-ого столбца, называется минором, соответствующим элементу $a_{ij}$ и обозначается $M_{ij}$. Например, минор $M_{12}$, соответствующий элементу $a_{12}$, есть определитель, полученный вычеркиванием строки и столбца, на пересечении которых находится элемент, т.е. $M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$.

**Определение 1.12.** Алгебраическим дополнением $A_{ij}$ элемента $a_{ij}$ определителя называется его минор, взятый с соответствующим знаком. Если сумма индексов $i+j$ четное число, то минор берется со знаком «+», если $i+j$ – нечетное, то со знаком «-».

Таким образом, $A_{ij} = (-1)^n M_{ij}$. Эта формула устанавливает связь минора с алгебраическим дополнением.

Можно получить разложение определителя по элементам любой строки или столбца.

Итак, определитель третьего порядка равен сумме попарных произведений элементов какой-либо строки (столбца) на их алгебраические дополнения.

**Пример 1.3.** Вычислить определитель $\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 4 & -2 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \end{vmatrix}$, разложив по элементам первого столбца.

*Решение*: $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 4 & -2 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} - 4 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} =$ $1(-4-5) - 4(6+10) + 3(3-4) = -76.$

*Ответ*: -76.

Определители третьего порядка можно вычислить другими способами:

1) правило добавления строк (столбцов) или «диагональный» способ.

Рассмотрим на примере добавления строк. В этом случае добавляем первые две строки снизу, затем перемножаем элементы, стоящие на диагоналях, параллельных главной диагонали и содержащих по три элемента. Эти произведения берем со знаком «+».

После этого перемножаем элементы, стоящие на диагоналях, параллельных побочной диагонали, содержащих по три элемента. Эти произведения берем со знаком «-», т.е.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{33}a_{12}a_{21}.$$

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{matrix}$$

2) правило треугольников (правило Саррюса).

Проводим главную диагональ, на которой стоят элементы $a_{11}a_{22}a_{33}$. Затем строим два треугольника с вершинами $a_{21,}a_{32,}a_{13}$ и $a_{12}, a_{23}, a_{31}$. Перемножаем эти тройки элементов и записываем произведения со знаком «+»: $a_{11}a_{22}a_{33}+a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31}$.

Аналогично получаем произведения с отрицательными знаками: $-a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{33}a_{12}a_{21}$. Складывая положительные и отрицательные члены, получим значения определителя.

Определители третьего порядка обладают теми же свойствами, что и определители второго порядка.

## 1.6. Ранг матрицы

Пусть дана матрица $A$ размерности $m$ на $n$.

Выберем в матрице $A$ какие-нибудь $k$ строк и $k$ столбцов. Из элементов, стоящих на их пересечении, образуем квадратную матрицу $k$-ого порядка, определитель которой является минором $M_k$ порядка $k$, при этом $k$ изменяется от 1 до $\min(m,n)$.

**Определение 1.13.** Наибольший порядок миноров матрицы $A$ отличных от нуля, называется рангом этой матрицы и обозначается rang $A$ ($r(A)$).

При вычислении ранга матрицы приходится вычислять большое число определителей. Чтобы облегчить вычисления, применяю элементарные преобразования. К числу элементарных преобразований относятся:

1) перемена местами двух строк или столбцов;

2) умножение строки (столбца) на произвольное число, отличное от нуля;

3) прибавление к одной строке (столбцу) другой строки (столбца), умноженной (умноженного) на некоторое число;

4) отбрасывание строк (столбцов), все элементы которых равны нулю.

С помощью указанных элементарных преобразований можно преобразовать матрицу к такой форме, что столбцами являются лишь единичные и нулевые векторы. Число различных единичных векторов, служащих столбцами указывает ранг исходной матрицы.

При помощи элементарных преобразований получают эквивалентные матрицы, ранги которых равны.

**Пример 1.4.** Найти ранг матрицы

$$C=\begin{pmatrix}2 & 3 & -1 & 4\\ 1 & -2 & 3 & -2\\ 3 & 1 & 2 & 2\end{pmatrix}$$

*Решение:* Поменяем первую и вторую строки

$$\begin{pmatrix}1 & -2 & 3 & -2\\ 2 & 3 & -1 & 4\\ 3 & 1 & 2 & 2\end{pmatrix}.$$

Первую строку, умноженную на -2, прибавим ко второй, а затем первую строку умножим на -3 и прибавим к третьей.

$$\begin{pmatrix}1 & -2 & 3 & -2\\ 0 & 7 & -7 & 8\\ 0 & 7 & -7 & 8\end{pmatrix}$$

Вторую строку, умноженную на -1, сложим с третьей. Первый столбец умножаем последовательно на 2, -3, 2 и складываем соответственно со вторым, третьим и четвертым столбцом

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 7 & -7 & 8\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Второй столбец разделим на 7, третий на - (-7), четвёртый - на 8. Прибавим второй столбец к третьему и вычтем из четвертого. Получаем

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\ r(C)=2.$$

*Ответ*: $r$(C)=2.

Любой не равный нулю, минор матрицы $A$, порядок которого совпадает с рангом матрицы, называется *базисным*.

### 1.7. Обратная матрица

Понятие обратной матрицы вводится только для квадратной матрицы. Пусть $A$- квадратная матрица порядка $n$.

**Определение 1.14.** Матрица порядка $n$ называется невырожденной, если определитель матрицы не равен нулю, т.е. $|A| \neq 0$.

**Определение 1.15.** Обратной матрицей называется матрица $A^{-1}$, удовлетворяющая условию $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$, где $E$ единичная матрица.

**Теорема 1.1.** Для того, чтобы квадратная матрица $A$ имела обратную матрицу, необходимо и достаточно, чтобы матрица $A$ была невырожденной, т.е. чтобы $|A| \neq 0$.

Рассмотрим схему нахождения обратной матрицы.

Пусть $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ – невырожденная, т.е. $|A| \neq 0$.

1. Найдем алгебраические дополнения:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, \dots, A_{33} = (-1)^n \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

2. Составим матрицу $B$, которая получается из матрицы $A$, если элемент $a_{ij}$ заменить алгебраическим дополнением $A_{ij}$, деленным на определитель $|A| \neq 0$, т.е.

$$B = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{|A|} & \frac{A_{12}}{|A|} & \frac{A_{13}}{|A|} \\ \frac{A_{21}}{|A|} & \frac{A_{22}}{|A|} & \frac{A_{23}}{|A|} \\ \frac{A_{31}}{|A|} & \frac{A_{32}}{|A|} & \frac{A_{33}}{|A|} \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}.$$

3. Транспонируя матрицу $B$, получим обратную матрицу $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$

Можно проверить правильность нахождения , если найти произведение полученной матрицы на исходную. В результате умножения должна получиться единичная матрица.

## 1.8. Системы линейных алгебраических уравнений

### 1.8.1. Основные понятия

Система $m$ линейных алгебраических уравнений с $n$ неизвестными имеет вид

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = c_{1,} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = c_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = c_m. \end{cases} \qquad (1.2)$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$ - матрица системы.

Если к матрице $A$ добавить столбец свободных членов, то получится матрица

$$(A_C) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & c_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & c_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & c_m \end{array}\right),$$

которая называется *расширенной* матрицей системы. Зная расширенную матрицу, можно однозначно записать систему.

**Определение 1.16.** Если все свободные члены $c_{ij}$, $i = \overline{1, m}$, равны нулю, то система называется *однородной*; в противном случае, *неоднородной*.

Совокупность чисел $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, которая при подстановке в систему обращает все ее уравнения в тождества, называется *решением* системы.

Система *совместна*, если она имеет хотя бы одно решение и *несовместна*, если она не имеет ни одного решения.

Совместная система называется *определенной*, если она имеет только одно решение, и *неопределенной*, если больше одного.

Исследуем совместность системы линейных алгебраических уравнений.

Ответим на вопрос, в каком случае система (1.2) имеет решения и когда не имеет? Ответ на этот вопрос дает теорема Кронеккера-Капелли.

Теорема Кронеккера-Капелли: Для того, чтобы система (1.2) была совместной, необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы $A$ был равен рангу расширенной матрицы $A_C$

$$rangA = rang(A_C) = r \,. \tag{1.3}$$

### 1.8.2. Матричная запись и матричное решение систем линейных равнений

В матричной форме она система линейных уравнений записывается в виде: $A \cdot X = B$, где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$ - матрица системы,

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$ - матрица-столбец неизвестных,

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$$ - матрица-столбец свободных членов.

### 1.8.3. Формулы Крамера

Рассмотрим систему 3 линейных уравнений первой степени с 3 неизвестными $x_1, x_2, x_3$: $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_{1,} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases}$

Составим определители $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$, $\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$,

$\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}$, $\Delta_{x_3} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$.

Определитель $\Delta$, составленный из коэффициентов при неизвестных, называют главным определителем системы. Определители $\Delta_{x_1}, \Delta_{x_2}, \Delta_{x_3}$ – вспомогательные. Они получаются из главного определителя заменой соответствующих столбцов коэффициентов при неизвестных на столбец свободных членов.

1). Если главный определитель системы $\Delta \neq 0$, то

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta}, x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta}, \ x_3 = \frac{\Delta_{x_3}}{\Delta}.$$

Эти формулы называются формулами Крамера по имени швейцарского математика Габриэля Крамера (1704-1725), ученика и друга Иоганна Бернулли, одного из создателей линейной алгебры. Габриэль Крамер с раннего возраста показал большие способности в области математики. В 18 лет защитил диссертацию. В 20-летнем возрасте Крамер выставил свою кандидатуру на вакантную должность преподавателя на кафедре философии Женевского университета.

Итак, если $\Delta \neq 0$, то система имеет единственное решение.

2). Если $\Delta = 0, \Delta_{x_1} = \Delta_{x_2} = \Delta_{x_3} = 0$, то система имеет бесчисленное множество решений.

3). Если $\Delta = 0$, а хотя бы один из вспомогательных определителей не равен нулю, то система не имеет решений.

### 1.8.3. Метод Гаусса

Метод Гаусса — это метод последовательного исключения переменных. Назван в честь немецкого математика Иоганна Карла Фридриха Гаусса (1777 - 1855), который по праву считается одним из самых великих математиков.

Рассмотрим систему $m$ линейных уравнений с $n$ неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1k}x_k + \ldots + a_{1n}x_n = c_{1,} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2k}x_k + \ldots + a_{2n}x_n = c_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{ik}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{ik}x_k + \ldots + a_{in}x_n = c_i \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mk}x_k + \ldots + a_{mn}x_n = c_m. \end{cases} \qquad (1.4.)$$

Пусть $a_{11} \neq 0$. Исключим сначала неизвестное $x_1$ из всех уравнений, кроме первого. Для этого разделим обе части первого уравнения системы на коэффициент $a_{11} \neq 0$, тогда получим новую систему, равносильную данной:

$$\begin{cases} x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \ldots + \frac{a_{1k}}{a_{11}}x_k + \ldots + \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n = \frac{c_1}{a_{11}} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2k}x_k + \ldots + a_{2n}x_n = c_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{ik}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{ik}x_k + \ldots + a_{in}x_n = c_i \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mk}x_k + \ldots + a_{mn}x_n = c_m. \end{cases} \qquad (1.5)$$

Умножим первое уравнение системы (1.5) на $a_{21}$ и вычтем из второго уравнения. Затем умножим первое уравнение на $a_{31}$ и вычтем из третьего и т.д. В результате получим новую систему, равносильную данной:

$$\begin{cases} x_1 + a_{12}^1 x_2 + \ldots + a_{1к}^1 x_k + \ldots + a_{1n}^1 x_n = c^1{}_1 \\ \ldots\ldots\ldots a_{22}^1 x_2 + \ldots + a_{2к}^1 x_k + \ldots + a_{2n}^1 x_n = c^1{}_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots a_{m2}^1 x_2 + \ldots + a_{mк}^1 x_k + \ldots + a_{mn}^1 x_n = c^1{}_m. \end{cases} \tag{1.6}$$

где $a_{1k}^1 = \frac{a_{1k}}{a_{11}}$ , $a_{ik}^1 = a_{ik} - \frac{a_{1k}}{a_{11}}, i = 2,3, \ldots, m,\ k = 2,3, \ldots, n.$

$$c_1 = \frac{b_1}{a_{11}},\ \ c_i = b_i - \frac{b_1}{a_{11}} a_{i1}, \qquad i = 2,3, \ldots, m.$$

Разделим теперь второе уравнение (3) на $a_{22}^1 \neq 0$, затем умножим второе уравнение последовательно на $a_{32}^1$, …, $a_{i2}^1, \ldots, a_{m2}^1$ и вычтем поочередно из соответствующих уравнений системы, кроме первого и второго.

Продолжая процесс, получим систему с нулевыми коэффициентами в левой части и отличными от нуля свободными членами, которая несовместна. Если система совместна, то получим систему

$$\begin{cases} x_1 + в_{12} x_2 + \ldots + в_{1к} x_k + \ldots + в_{1n} x_n = B_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots x_2 + \ldots + в_{2к} x_k + \ldots + в_{2n} x_n = B_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots x_p + \ldots + в_{pn} x_n = B_p. \end{cases} \tag{1.7}$$

или

$$\begin{cases} x_1 + в_{12} x_2 + \ldots + в_{1к} x_k + \ldots + в_{1n} x_n = B_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots x_2 + \ldots + в_{2к} x_k + \ldots + в_{2n} x_n = B_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots x_к + \ldots + в_{pn} x_n = B_p \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots x_n = B_n. \end{cases} \tag{1.8}$$

Система (1.7) называется ступенчатой, а система (1.8) – треугольной.

В случае треугольной системы найдем из последовательного уравнения неизвестное $x_n=B_n.$ Затем, подставляя найденное неизвестное в предыдущее уравнение, найдем $x_{n-1}$ и т.д.

Таким образом, если данная система в результате элементарных преобразований приводится к треугольной системе, то система (1.4) является совместной и определенной. Если же данная система после выполнения элементарных преобразований приводится к ступенчатой, то система (1.4) совместна и неопределенна. Если перенести в каждом из уравнений системы (1.7) члены с неизвестными в правую часть, получим систему следующего вида

$$\begin{cases} x_1 + в_{12}x_2 + \ldots + в_{1p}x_p = B_1 - в_{1,p+1}x_p - \ldots - в_{1n}x_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots x_2 + \ldots + в_{2p}x_p = B_2 - в_{2,p+1}x_{p+1} - \ldots - в_{2n}x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots x_p = B_p - в_{p,p+1}x_{p+1} - \ldots - в_{pn}x_n. \end{cases}$$

Придавая неизвестным $x_{p+1}$ ,…, $x_n$ , которые называются свободными переменными, произвольные значения , получим треугольную систему, из которой последовательно находятся все остальные переменные $x_p$, $x_{p-1}$ ,…, $x_1$. В этом случае система имеет бесчисленное множество решений.

**Пример 1.5.** Проверить, что линейная система уравнений совместна и найти ее решение:

а) по формулам Крамера;

б) с помощью обратной матрицы (матричным методом);

в) методом исключения Гаусса.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 14 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 + x_2 = 3 \end{cases}$$

*Решение:* Установим совместность данной системы. Матрица коэффициентов системы невырожденная:

$$|A| = \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0+2+3-3-0-1 = 1 \neq 0 \text{ т.е.}$$

определитель $\Delta \neq 0$. Поэтому система имеет единственное решение.

а) Решим систему по формулам Крамера

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 14 & 2 & 3 \\ 6 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 14 & 3 \\ 1 & 6 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 2, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 14 \\ 1 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 3,$$

$$\Rightarrow \; x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{1}{1} = 1; \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{2}{1} = 2; \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{3}{1} = 3.$$

б) Решим систему с помощью обратной матрицы. Имеем:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 14 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \Rightarrow$$

система в матричной форме $A \cdot X = B$ имеет решение

$$X = A^{-1} \cdot B$$

где $A^{-1}$ - обратная матрица.

Вычислим матрицу $A^{-1}$.

$A_{ij}$ - алгебраические дополнения каждого элемента - таковы:

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1; \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1; \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0;$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 3; \qquad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -3; \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1;$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1; \qquad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 2; \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1.$$

Следовательно,

$$\mathrm{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathrm{A}|}\begin{pmatrix} \mathrm{A}_{11} & \mathrm{A}_{21} & \mathrm{A}_{31} \\ \mathrm{A}_{12} & \mathrm{A}_{22} & \mathrm{A}_{32} \\ \mathrm{A}_{13} & \mathrm{A}_{23} & \mathrm{A}_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Теперь находим искомое решение:

$$X = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 14 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14+18-3 \\ 14-18+6 \\ 0+6-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix},$$

т.е. $x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ x_3 = 3,$ что совпадает, естественно, с решением полученным выше.

в) Применим метод исключения Гаусса. Для этого составляем расширенную матрицу системы и, пользуясь элементарными строчными преобразованиями, получаем:

$$\overline{A}=\left(A|B\right)=\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&3&14\\1&1&1&6\\1&1&0&3\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&3&14\\0&0&1&3\\1&1&0&3\end{array}\right)_{(\text{из 2-ой строк вычлит третьь })}$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&0&5\\0&0&1&3\\1&1&0&3\end{array}\right)_{(\text{из 1-ой строки вычли утроенную вторую})}\to$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc|c}0&1&0&2\\0&0&1&3\\1&1&0&3\end{array}\right)_{(\text{из 1-ой строки вычлит треть }).}$$

Преобразованная матрица $\overline{\text{A}}$ соответствует простейшей системе

$$\begin{cases} \quad\;\; x_2 \qquad\;\; = 2 \\ \qquad\qquad x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 \qquad = 3 \end{cases}$$

Из нее очевидным образом получаем решение $X=(1;2;3)$.

*Ответ:* $X$=(1; 2; 3).

**Пример 1.6.** Решить систему уравнений.

$$\begin{cases} x_1+5x_2+4x_3+3x_4=1 \\ 2x_1-\;\;x_2+2x_3-\;\;x_4=1 \\ 5x_1+3x_2+8x_3+\;\;x_4=1 \end{cases}$$

*Решение:* Имеем

$$A=\begin{pmatrix}1&5&4&3\\2&-1&2&-1\\3&3&8&1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}.$$

Проверку условия совместности $r(A)=r(A_C)$ удобно проводить параллельно с решением системы методом Гаусса. Для этого составляем расширенную матрицу системы $A_C$ и осуществляем с ней строчные элементарные преобразования, соответствующие методу исключения:

$$A_C = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & 8 & 1 & 1 \end{array}\right) \to$$

1-ую строку умножили на (-2) и прибавим ко 2-ой , 1-ую строку умножим на (-5) и прибавим к 3-ей.

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & -12 & -6 & -7 & -1 \\ 0 & -22 & -12 & -14 & -4 \end{array}\right) \to$$

3-ую строку разделим на (-2)

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & -12 & -6 & -7 & -1 \\ 0 & 11 & 6 & 7 & 2 \end{array}\right) \to$$

к 3-уй строке прибавим 2-ую строку.

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & -12 & -6 & -7 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Из вида преобразованной матрицы $A_C$ следует, что $\mathrm{r}(\mathrm{A}) = 3$, так как минор 3-го порядка (стоящий на месте А)

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 0 & -12 & -6 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 12 \neq 0.$$

и является базисным. Поскольку $r(A) = 3$ - число уравнений системы, то данная система обязательно совместна. Преобразованной матрице $A_C$ соответствует система:

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 1 \\ \quad -12x_2 - 6x_3 - 7x_4 = -1 \\ \quad\quad -x_2 \quad\quad\quad\quad = 1 \end{cases}$$

Отсюда сразу получаем, что $x_2=-1$, так что система еще более упрощается:

$$\begin{cases} x_1 + 4x_3 + 3x_4 = 1 \\ \quad\quad 6x_3 + 7x_4 = -13 \end{cases}$$

Так как базисными являются переменные $x_1$, $x_2$, $x_3$ (столбцы с номерами 1, 2, 3 вошли в $\Delta_3$), то для нахождения общего решения осталось выразить переменные $x_1$, $x_3$ через свободную переменную $x_4$ ($x_2=-1$ уже найдена):

$$6x_3 + 7x_4 = 13 \;\Rightarrow\; \underline{x_3 = -\frac{13}{6} - \frac{7}{6}x_4}$$

следовательно, первое уравнение последней системы преобразуется к виду

$$x_1 - \frac{2}{3}x_4 = -\frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad \underline{x_1 = -7\frac{2}{3}x_4 - \frac{1}{3}}.$$

Выражения для $x_1$, $x_3$ вместе со значением $x_2=-1$ описывают все множество решений данной системы через свободную переменную $x_4$, т.е. задают общее решение системы.

*Ответ*: $(-7\frac{2}{3}+1\frac{2}{3}x_4;-1;\frac{13}{6}-\frac{7}{6}x_4;x_4)$

## Раздел 2. Элементы аналитической геометрии на плоскости

### 2.1. Прямоугольная декартова система координат (ПДСК)

Положение точки на плоскости определяется двумя числами. Пусть на плоскости заданы две взаимно перпендикулярные числовые оси *Ox* и *Oy*, имеющие общее начало *O*, совпадающее с точкой пересечения осей, и общую единицу масштаба. Плоскость, в которой расположены оси *Ox* и *Oy* называют координатной плоскостью.

Выберем произвольную точку *M* в плоскости *xOy* (рис.1). Пусть $M_1$ – проекция точки *M* на ось *Ox*, а $M_2$ – на ось *Oy*. Координата $x$ точки $M_1$ называется абсциссой точки *M*, а координата *y* точки $M_2$ – ординатой точки *M*. Совместно числа *x* и *y* называются прямоугольными координатами или декартовыми (по имени Декарта Рене (1596-1650) французского философа и математика, который ввел новые современные алгебраические обозначения, высказал закон сохранения количества движения, дал понятие импульса силы, пытался доказать существование бога, как источник объективной значимости человеческого мышления) координатами точки записываются так: $M(x;y)$.

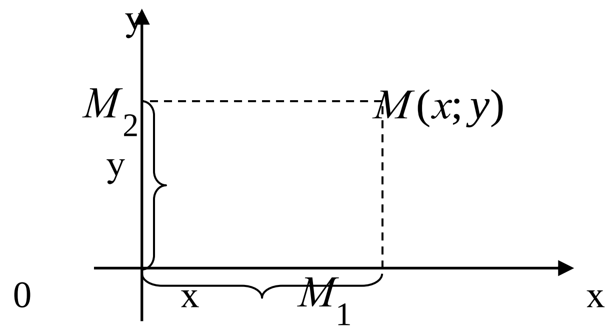


Рис. 2.1

Ось *Ox* называют осью абсцисс, ось *Oy* – ординат, а обе оси вместе - осями координат. Общее начало осей называют началом координат. Оси *Ox* и *Oy* делят координатную плоскость на четыре части, называемые четвертями (квадрантами). Нумерация производится в направлении против часовой стрелки. Знаки координат приведены в таблице

| | I | II | III | IV |
|---|---|---|---|---|
| *x* | + | - | - | + |
| *y* | + | + | - | - |

Итак, положение точки на плоскости определяются координатами этой точки. Этот способ называют методом координат. С помощью метода координат можно решать многие геометрические задачи. Рассмотрим некоторые из них.

### 2.2.1. Расстояние между двумя точками

Пусть на плоскости *xOy* даны две точки $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$. Тогда расстояние *d* между ними определяется по формуле:

$$d = AB = \sqrt{\left(x_2 - x_1\right)^2 + \left(y_2 - y_1\right)^2}\,. \qquad (2.1)$$

В частности, расстояние от точки $M(x;y)$ до начала координат находится по формуле:

$$d = \sqrt{x^2 + y^2}\,. \qquad (2.2)$$

### 2.2.2. Деление отрезка в данном отношении

Пусть в ПДСК даны точки $A(x_1;y_1)$, $B(x_2;y_2)$ и $C(x;y)$, делящая отрезок *AB* в отношении $\lambda$, т.е. $\dfrac{|AC|}{|CB|} = \lambda$ (рис. 2.2). Тогда координаты точки *C* будут определяться по формуле:

$$x_C = \frac{x_A + \lambda x_B}{1+\lambda}; \;\; y_C = \frac{y_A + \lambda y_B}{1+\lambda}\,. \qquad (2.3)$$

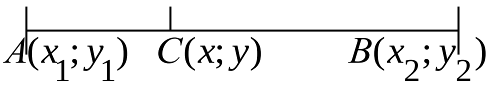


Рис. 2.2

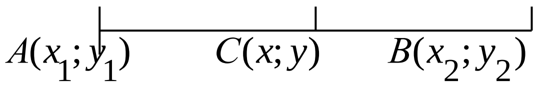


Рис. 2.3

В частности, если $C$ лежит посередине отрезка $AB$ (рис. 2.3), то ее координаты будут равны:

$$x_C = \frac{x_A + x_B}{2}; \quad y_C = \frac{y_A + y_B}{2}. \tag{2.4}$$

## 2.2. Прямая линия на плоскости

Всякая линия на плоскости определяется уравнением вида $F(x;y)=0$, где $x$ и $y$ – текущие координаты.

Рассмотрим некоторые уравнения прямых.

### 2.2.1. Уравнение прямой с угловым коэффициентом

Уравнение прямой с угловым коэффициентом k имеет вид:

$$y = kx + b. \tag{2.5}$$

Угловой коэффициент $k$ равен тангенсу угла наклона прямой с положительным направлением оси $Ox$ (т.е. движение совершается против часовой стрелки). Итак, $k = tg\alpha$. Параметр $b$ называют начальной ординатой, который равен отрезку, отсекаемому данной прямой на оси $Oy$ (рис.2.4).

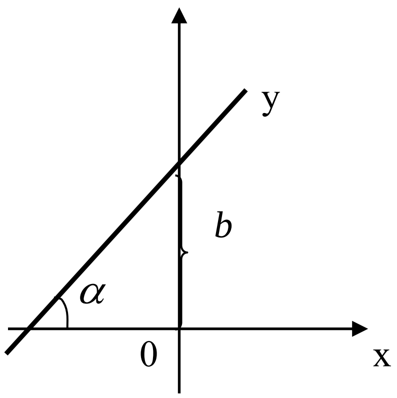


Рис. 2.4

При $b$=0 прямая проходит через начало координат и имеет вид $y = kx$. Если $k$=0, то имеем уравнение $y = b$ прямой, параллельной оси $Ox$ и проходящей через точку $B(0,b)$. Если $\varphi = \frac{\pi}{2}$, то прямая перпендикулярна оси $Ox$, ее уравнение $x$=$a$, где $a$ абсцисса точки пересечения с осью $Ox$. При $b$=0 и $a$=0 получаем уравнения координатных осей $Ox$ и $Oy$ соответственно. Все полученные уравнения прямой являются уравнениями первой степени относительно текущих координат.

### 2.2.2. Общее уравнение прямой

Теперь покажем обратное: любое уравнение первой степени $Ax + By + C = 0$ (2.6) относительно координат x и y есть уравнение некоторой прямой, лежащей в плоскости $xOy$:

1) Пусть $B \neq 0$, тогда $y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$ - это уравнение прямой с угловым коэффициентом $k = -\frac{A}{B}$, $b = -\frac{C}{B}$.

2) Пусть $B = 0$. Имеем $Ax + C = 0$ или $x = -\frac{C}{A}$ – это уравнение прямой, параллельной ос $Oy$ и отсекающей на оси $Ox$ отрезок $-\frac{C}{A}$.

3) Пусть C=0, тогда $Ax + By = 0$, $Ax = By$, $y = \frac{A}{B}x$ – это уравнение прямой, проходящей через начало координат.

4) Пусть $A$=$C$=0, тогда $By$=0, $y$=0 – ось $Ox$; $B$=$C$=0, тогда $Ax$=0, $x$=0 – ось $Oy$.

Все возможные случаи исчерпаны. Уравнение (2.6) называют общим уравнением прямой.

### 2.2.3. Уравнение прямой, проходящей через данную точку в данном направлении

Пусть прямая *PM* образует угол $\varphi$ с положительным направлением оси *Ox* и проходит через заданную точку $P(x_1,x_2)$. Выведем уравнение этой прямой, предполагая, что прямая не параллельна оси *Oy*, тогда уравнение этой прямой можно записать в виде уравнения прямой с угловым коэффициентом, т.е. $y = kx + b.$ Так как точка $P(x_1,x_2)$ лежит на прямой, то ее координаты удовлетворяют последнему уравнению, т.е. $y_1=kx_1+ b$. Вычтем из уравнения $y=kx+b$ уравнение $y_1=kx_1+ b$, получим

$y-y_1=kx+b-(kx_1+b),$

$y-y_1=kx+b-kx_1-b,$

$y-y_1=kx-kx_1,$

$$y-y_1=k(x-x_1). \qquad (2.7)$$

Это и есть уравнение искомой прямой.

Если пряма параллельна оси *Oy*, то ее уравнение будет $x=x_1$ . Если k заданное число, то уравнение представляет вполне определенную прямую. Если же k переменный параметр, то это уравнение определит пучок прямых, проходящих через точку $P(x_1,x_2)$.

### 2.2.4. Уравнение прямой, проходящей через две данные точки

Известно, что через две не совпадающие между собой точки можно провести прямую, и притом только одну.

Уравнение прямой, проходящей через две точки $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$, причем, $x_1 \neq x_2$ , определяется формулой:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1}. \qquad (2.8)$$

Если $x_1 = x_2$, т.е. прямая параллельна оси *Oy*, то уравнение будет $x_1 = x_2$.

Пример. Написать уравнение прямой, проходящей через точки $A$(4;-2) и $B$(3;-1).

Решение. Подставляем в уравнение (2.8) координаты данных точек

$$\frac{x-4}{3-4}=\frac{y-(-2)}{-1-(-2)}\Rightarrow\frac{x-4}{-1}=\frac{y+2}{1}\Rightarrow x-4=-y-2\Rightarrow y=-x+2.$$

## 2.3. Угол между двумя прямыми

**Определение 2.1.** Углом между двумя прямыми $l_1$ и $l_2$, заданными уравнениями $y=k_1x+b_1$ и $y=k_2+b_2$, называется наименьший угол, на который надо повернуть первую прямую $l_1$ вокруг точки пересечения против часовой стрелки до совпадения ее со второй прямой $l_2$ $(0<\varphi<\pi)$.

**Угол** $\varphi$, образованный между двумя прямыми $l_1$ и $l_2$ определяется формулой:

$$tg\varphi=\frac{k_2-k_1}{1+k_1\cdot k_2}. \qquad (2.9)$$

**Условием параллельности** двух прямых является равенство их угловых коэффициентов, т.е. $k_1=k_2$;

**Условием перпендикулярности** двух прямых является то, что их угловые коэффициенты обратно-пропорциональны по абсолютной величине и противоположны по знаку, т.е. $k_2=-\frac{1}{k_1}$.

## 2.4. Точка пересечения прямых

Пусть даны две прямые $Ax+By+C=0$ и $A_1x+B_1y+C_1=0$, требуется найти их точку пересечения.

Так как точка принадлежит каждой из двух данных прямых, то ее уравнение удовлетворяет как уравнению первой прямой $Ax+By+C=0$, так и уравнению второй прямой $A_1x+B_1y+C_1=0$.

Таким образом, для того, чтобы найти координаты точки пересечения прямых, необходимо решить систему уравнений:

$$\begin{cases} \mathrm{A}x + By + C = 0 \\ A_1 x + \mathrm{B}y_1 + C = 0 \end{cases}$$

Решение систем линейных уравнений было рассмотрено выше.

## 2.5. Окружность

Окружность является кривой второго порядка. Кривые второго порядка определяется уравнением второй степени относительно прямоугольных координат. В общем случае это уравнение имеет вид:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \qquad (2.10)$$

где $A, B, C, D, E, F$ – действительные коэффициенты, причем, хотя бы одно из чисел $A, B,$ или $C$ отлично от нуля.

**Определение 2.2.** Окружностью называется геометрическое место точек плоскости, равноудаленных от данной точки, называемой центром окружности.

Уравнение окружности имеет вид:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2, \text{ где} \qquad (2.11)$$

$x$ и $y$ – текущие координаты,

$x_0, y_0$ – координаты центра окружности,

$R$ – радиус окружности.

В частности, пологая $x_0$=0 и $y_0$=0. Получим уравнение окружности с центром в начале координат $\mathrm{x}^2 + \mathrm{y}^2 = R^2$

Раскрыв скобки в уравнении (2.11), преобразовав, получим общее уравнение окружности:

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

**Пример 2.1.** Даны вершины треугольника *ABC*: $A(-2;3)$, $B(1;12)$, $C(11;6)$. Составить уравнение: 1) сторон *AB* и *BC*; 2) высоты *CH*, опущенной из вершины *C* на сторону *AB*; 3) медианы *AE*; 4) окружности, для которой медиана *AE* служит диаметром; 5) найти $\angle B$.

*Решение.* Сделаем чертеж (рис. 2.5).

1) Подставляя в формулу (2.8) координаты точек *A* и *B*, найдем уравнение прямой *AB*:

$$\frac{x-(-2)}{1-(-2)} = \frac{y-3}{12-3} \;\Rightarrow\; \frac{x+2}{3} = \frac{y-3}{9} \;\Rightarrow\; 3(y-3) = 9(x+2),$$

$$y-3 = 3(x+2) \;\Rightarrow\; y_{AB} = 3x+9, \;\; k_{AB} = 3.$$

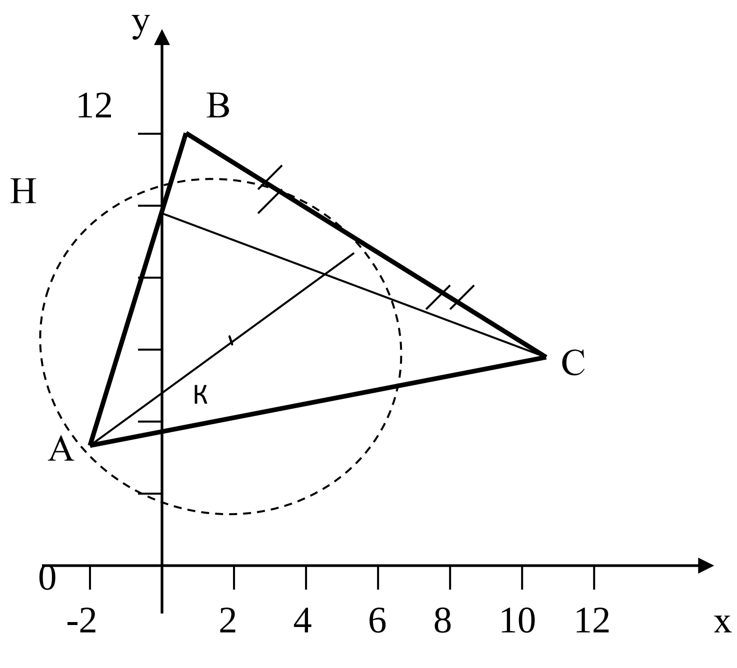


Рис. 2.5

Аналогичным образом находим уравнение стороны $BC$.

$$\frac{x-1}{11-1}=\frac{y-12}{6-12} \Rightarrow \frac{x-1}{10}=\frac{y-12}{-6} \Rightarrow 10(y-12)=-6(x-1);$$

$$y-12=-\frac{6}{10}(x-1) \Rightarrow y=-\frac{3}{5}x+\frac{3}{5}+12 \Rightarrow y_{BC}=-\frac{3}{5}x+\frac{63}{5},$$

$$k_{BC}=-\frac{3}{5}.$$

2) Так как высота *CH* перпендикулярна стороне *AB*, то по условию перпендикулярности прямых, угловой коэффициент прямой *CH* будет равен:

$$k_{CH}=-\frac{1}{3}.$$

Подставив в (2.7) координаты точки *C* и угловой коэффициент $k_{CH}=-\frac{1}{3}$, получим искомое уравнение высоты *CH*:

$$y-6=-\frac{1}{3}(x-11) \Rightarrow y=-\frac{1}{3}x+\frac{11}{3}+6 \Rightarrow y_{CH}=-\frac{1}{3}x+\frac{29}{3}.$$

3) Так как точка *E* лежит посередине отрезка *BC*, то по формуле (4) ее координаты будут равны:

$$x_E=\frac{x_B+x_C}{2}=\frac{1+11}{2}=6; \quad y_E=\frac{y_B+y_C}{2}=\frac{12+6}{2}=9 \Rightarrow E(6;9).$$

Далее воспользуемся вновь формулой (2.8) и составим уравнение медианы *AE* в общем виде:

$$\frac{x-(-2)}{6-(-2)}=\frac{y-3}{9-3}\Rightarrow\frac{x+2}{8}=\frac{y-3}{6}\ \Rightarrow\ 6(x+2)=8(y-3)\ \Rightarrow\ 3x-4y+18=0$$
.

4) Уравнение окружности радиуса *R* с центром в точке $K(a;в)$, имеет вид:

$$(x-a)^2+(y-в)^2=R^2.$$

По условию *AE* является диаметром искомой окружности, тогда центр ее находится в точке *K*, которая делит *AE* пополам. Тогда по формуле (2.4) координаты точки *K*, как середины отрезка *AE*, будут равны:

$$x_K=\frac{x_A+x_E}{2}=\frac{-2+6}{2}=2;\quad y_K=\frac{y_A+y_E}{2}=\frac{3+9}{2}=6\ \Rightarrow\ K(2;6).$$

Чтобы найти радиус данной окружности $R=AK$, воспользуемся формулой (2.1), как расстояния между двумя точками *A* и *K*:

$$d=|AK|=\sqrt{(2-(-2))^2+(6-3)^2}=\sqrt{16+9}=\sqrt{25}=5.$$

И тогда по формуле (10) искомое уравнение окружности будет иметь вид:

$$(x-2)^2+(y-6)^2=25.$$

5) $\angle B$ заключен между сторонами треугольника *AB* и *BC*. Поэтому его значение найдем как угол между прямыми *AB* и *BC*, применив формулу (2.9), где $k_{AB}=3,\ k_{BC}=-\frac{3}{5}$:

$$tg\angle B=\frac{k_{BC}-k_{AB}}{1+k_{AB}\cdot k_{BC}}=\frac{-\frac{3}{5}-3}{1+3\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)}=\frac{-\frac{18}{5}}{1-\frac{9}{5}}=-\frac{18}{5}:\left(-\frac{4}{5}\right)=4{,}5.$$

$$tg\angle B=4{,}5.$$

Отсюда

$$\angle B=arctg\,4{,}5\approx 77^{\circ}35'.$$

## Раздел 3. Введение в математический анализ

### 3.1. Вещественные числа

Множество вещественных чисел бесконечно. Оно состоит из рациональных и иррациональных чисел. Рациональным называют число вида $\frac{p}{q}$, где $p$ и $q$- целые числа. Число, не являющееся рациональным, называют иррациональным. Рациональное число либо является целым, либо представляет собой конечную или периодическую бесконечную десятичную дробь. Например, рациональное число $\frac{1}{3}$ можно представить в виде 0,3333… Иррациональное число представляет собой бесконечную непериодическую десятичную дробь. Например, $\sqrt{2}$=1,41421356…, $\pi$=3,14159265…

Перечислим свойства вещественных чисел.

1) Сложение и умножение.

Пусть $a+b$ – сумма, $a\cdot b$ – произведение, где $a$ и $b$ – вещественные числа.

1.1 $a+b=b+a$, $a\cdot b=b\cdot a$ (переместительное или коммутативное).

1.2 $a+(b+c)=(a+b)+c$, $a(bc)=(ab)c$ (сочетательное).

1.3 $(a+b)c=ac+bc$ (распределительное).

1.4 Существует единственное число 0, такое, что $a+0=a$, $a \cdot 0 = 0$, для любого $a$.

1.5 Для любого $a$ существует такое число ($-a$), что $a+(-a)=0$.

1.6 Существует единственное число $1 \neq 0$, такое, что для любого а $a \cdot 1 = a$.

1.7 Для любого $a \neq 0$ существует такое число $a^{-1}$, что $a \cdot a^{-1} = 1, a^{-1} = \frac{1}{a}$

2) Сравнение вещественных чисел.

Для любых двух вещественных чисел установлено одно из трех соотношений: $a = b, a > b$ или $a < b$.

Отношение равенства обладает свойством транзитивности: если $a=b$ и $b=c$, то $a=c$.

Отношение «больше» обладает для любых a,b,c следующими свойствами:

2.1 Если $a > b$ и $b > c$, то $a > c$.

2.2 Если $a > b$, то $a + c > b + c$.

2.3 Если $a > 0$ и $b > 0$, то $ab > 0$.

Вместо соотношения $a > b$, применяют также соотношение $b < a$. Соотношение $a \geq b$ означает либо $a = b$, либо $a > b$.

Соотношения со знаками $>, <, \geq, \leq$ называют неравенствами, причем неравенства со знаками $>, <$ - строгие неравенства.

2.4 Любое вещественное число можно приблизить рациональными числами с произвольной точностью.

Свойства 1)-2) называют аксиомами вещественных чисел.

### 3.2. Числовые последовательности

**Определение 3.1.** Если каждому числу $n$ из натурального ряда чисел 1,2,3,…, $n$,…поставлено в соответствие вещественное число $x_n$ , то множество вещественных чисел $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ называется числовой последовательностью или просто последовательностью.

$x_1, x_2, \dots, x_n$ – элементы последовательности, $x_n$ – общий член последовательности, $n$ – его номер.

Например, $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$

**Определение 3.2.** Число $a$ называется пределом последовательности $\{x_n\}$ , если для любого положительного числа $\varepsilon$ существует такой номер $N$ , что при всех $n > N$ выполняется неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$.

Последовательность, имеющая предел, называется сходящейся; в противном случае – расходящейся. Записывают так

$\lim_{n\to\infty} x_n = a$.

**Определение 3.3.** Последовательность $\{\alpha_n\}$, имеющая своим пределом нуль ($a$=0), называется бесконечно малой последовательностью.

Перечислим свойства сходящихся последовательностей.

1. Если все элементы бесконечно малой последовательности $\{x_n\}$ равны одному и тому же числу $c$, то $c$=0.
2. Сходящаяся последовательность имеет только один предел.
3. Сходящаяся последовательность ограничена.
4. Сумма (разность) сходящихся последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ есть сходящаяся последовательность, предел которой равен сумме (разности) пределов последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$.
5. Произведение сходящихся последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ есть сходящаяся последовательность, предел которой равен произведению пределов последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$.
6. Частное двух сходящихся последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ при условии, что предел $\{y_n\}$ не равен нулю, есть сходящаяся

последовательность, предел которой равен частному пределов последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$.

7. Если элементы сходящейся последовательности $\{x_n\}$ удовлетворяют неравенству $x_n \geq b \ (x_n \leq b)$, начиная с некоторого номера, то предел этой последовательности удовлетворяет неравенству $a \geq b \ (a \leq b)$.
8. Произведение бесконечно малой последовательности и ограниченной последовательности или числа есть бесконечно малая последовательность.
9. Произведение конечного числа бесконечно малых последовательностей есть бесконечно малая последовательность.

## 3.3. Число $e$ (второй замечательный предел)

Рассмотрим последовательность $\{x_n\}$, общий член которой выражается формулой $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n}$.

Можно доказать, что эта последовательность монотонно возрастает, ограничена ($x_n < 3$) и имеет предел. Этот предел называют числом $e$. Следовательно

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n}, \ e=2.718281828\ldots$$

Показательная функция $e^{\propto x}$ называется экспонентой, логарифм с основанием $e$ называется натуральным.

## 3.4. Понятие функции

При изучении природных и технических процессов исследователи сталкиваются с величинами, одни из которых сохраняют одно и то же численное значение и называются постоянными, а другие могут принимать различные численные значение и носят название переменных. Примерами постоянных величин могут служить: температура кипения воды при нормальном давлении; скорость тела, движущегося равномерно и прямолинейно. Например, высота стебля пшеницы в период вегетации или вес животного в период откорма меняются, изменяются и соответствующие им числа. Их можно считать переменными величинами.

Постоянные величины принято обозначать первыми буквами латинского алфавита $a$,$b$,$c$, $d$…, а переменные последними – $x$,$y$,$z$,$t$…

К понятию функции приводит изучение различных явлений в окружающем нас мире. Например, каждому значению радиуса окружности соответствует её длина и площадь круга или некоторой дозе внесенных удобрений соответствует прирост урожайности. В этих примерах общим является то, что каждому числовому значению одной величины сопоставляется определенное числовое значение другой.

**Определение 3.4.** Если каждому значению, которое может принять переменная $x$, по некоторому закону (правилу) ставится в соответствие одно определенное значение переменной $y$, то говорят, что $y$ есть функция от $x$, и обозначается $y = f(x), y = \varphi(x), y = y(x)$.

Переменная $x$ называется независимой переменной или аргументом. Совокупность всех значений аргумента, при которых функция $y = f(x)$ определена, называют областью определения этой функции. Совокупность всех значений, принимаемых переменной у, называют областью значений функции $y = f(x)$.

**Пример 3.1.** Найти область определения $y = \sqrt{4 - x^2}$.

*Решение:* Эта функция имеет смысл, если $4 - x^2 \geq 0 \Longrightarrow x^2 \leq 4$ или $|x| \leq 2$. Следовательно, областью определения данной функции есть отрезок $[-2; 2]$.

*Ответ:* $[-2; 2]$.

## 3.5. Способы задания функции

Наиболее часто встречаются три способа задания функции.

Аналитический способ – это задание функции при помощи формул. Например, $y = 2x + 1, y = \ln x,\ y = \sin 2x,\ y = x^3$.

Если уравнение не разрешено относительно у, то говорят, что функция задана неявно, ее уравнение имеет вид $F(x, y) = 0$. Когда такое решение возможно, неявная функция может быть приведена к явной, т.е. к виду $y = f(x)$.

При аналитическом способе функция может выражаться несколькими формулами, например, $y = \begin{cases} x^2, \text{если } x \leq 0, \\ -x, \text{если } x > 0. \end{cases}$

Табличный способ – это способ задания функции при помощи таблиц. Примерами такого задания могут служить таблицы тригонометрических функций, логарифмов и т.д. табличный способ широко используется в экспериментах и наблюдениях. Недостатком является то, что функция задается не для всех значений аргумента.

При графическом способе задается график функции, а ее значения, соответствующие тем или иным значениям аргумента, непосредственно находятся из этого графика. Преимуществом графического способа является его наглядность.

### 3.6. Предел функции.

Пусть функция $f(x)$ определена на некотором множестве *X*. Возьмем из этого множества бесконечную последовательность точек $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$, сходящуюся к точке *a*, причем $a \in X$ или $a \notin X$. Соответствующие значения функции в точках этой последовательности также образуют числовую последовательность $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n), \dots$

**Определение 3.5.** Число *A* называется пределом функции $f(x)$ в точке *a* (или пределом при $x \to a$), если для любой сходящейся к *a* последовательности $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ аргумента *x*, отличных от *a*, соответствующая последовательность значений функций $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n), \dots$ сходится к числу *A*.

Обозначают так $\lim_{x\to a} f(x) = A$.

Сформулируем теоремы, на которых основывается вычисление пределов функций:

1. Предел постоянной равен самой постоянной:

$$\lim_{x\to a} C = C, \ (C = const).$$

2. Постоянный множитель можно выносить за знак предела:

$$\lim_{x\to a} C\cdot f(x) = C\cdot \lim_{x\to a} f(x).$$

3. Предел от алгебраической суммы нескольких функций равен алгебраической сумме пределов этих же функций:

$$\lim_{x\to a}\left[f(x)\pm\varphi(x)\right] = \lim_{x\to a} f(x)\pm \lim_{x\to a}\varphi(x).$$

4. Предел произведения нескольких функций равен произведению пределов этих же функций:

$$\lim_{x\to a}\left[f(x)\cdot\varphi(x)\right] = \lim_{x\to a} f(x)\cdot \lim_{x\to a}\varphi(x).$$

5. Предел частного функций равен частному пределов, при условии, что предел знаменателя не равен нулю:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)}, \ \lim_{x\to a}\varphi(x)\neq 0.$$

6. Для элементарных функций имеет место равенство:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f\left(\lim_{x \to a} x\right).$$

### 3.7. Бесконечно малые и бесконечно большие функции

**Определение 3.6.** Функция $y = f(x)$ называется *бесконечно малой* (б.м.), если ее предел при $x \to a$, равен нулю, т.е.

$$\lim_{x \to a} f(x) = 0.$$

**Пример 3.2.** Функция $y = \frac{1}{x^2}$ является бесконечно малой при $x \to \infty$, так как $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x^2} = 0$ 0 .

Для бесконечно малых функций справедливы следующие свойства:

1) алгебраическая сумма любого конечного числа бесконечно малых функций есть бесконечно малая функция;
2) произведение конечного числа бесконечно малых функций есть бесконечно малая функция;
3) произведение бесконечно малой функции на число есть бесконечно малая функция;
4) произведение бесконечно малой функции на ограниченную функцию есть функция бесконечно малая;
5) частное от деления бесконечно малой функции на функцию, предел которой отличен от нуля, является функцией бесконечно малой.

**Определение 3.7.** Функция $y = f(x)$ называется *бесконечно большой* (б.б.), если ее предел при $x \to a$, равен бесконечности, т.е.

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$.

**Пример 3.3.** Функция $y = x^2$ бесконечно большая, так как $\lim_{x\to\infty} x^2 = \infty$.

Бесконечно большие функции находятся в тесной связи с бесконечно малыми функциями. Если функция *f(x)* является бесконечно большой при $x \to a$, то функция $\propto(x) = \frac{1}{f(x)}$ является бесконечно малой при $x \to a$.

Символически это можно обозначить так: $\frac{1}{\infty} = 0$ и $\frac{1}{0} = \infty$.

**Определение 3.8.** Две функции $\alpha_1(x)$ и $\alpha_2(x)$, бесконечно малые при $x \to a$, называются эквивалентными, если предел их отношения при $x \to a$ равен единице.

Приведем таблицу эквивалентных функций

1. $\sin\alpha(x) \sim \alpha(x)$;
2. $tg\alpha(x) \sim \alpha(x)$;
3. $arcsin\alpha(x) \sim \alpha(x)$;
4. $arctg\alpha(x) \sim \alpha(x)$;
5. $1 - cos\alpha(x) \sim \frac{1}{2}\alpha^2(x)$;
6. $\left(1+\alpha(x)\right)^p - 1 \sim p\alpha(x)$;
7. $\sqrt[n]{1+\alpha(x)} - 1 \sim \frac{1}{n}\alpha(x)$;
8. $a^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x) lna$;
9. $e^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x)$;
10. $ln\left(1+\alpha(x)\right) \sim \alpha(x)$;
11. $lg(1+\alpha(x)) \sim 0.4343\alpha(x)$.

Таблица применяется при вычислении пределов функций.

**Пример 3.4.** Найти $\lim_{x\to 3} \frac{\sin(x-3)}{x^2-4x+3}$.

*Решение:* При $x \to 3$ функция $x$-3 бесконечно малая и, следовательно

$\sin(x-3) \sim x-3$. Так как при замене бесконечно малой функции $\sin(x-3)$ эквивалентной ей функцией $x-3$ предел не изменится, то

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sin(x-3)}{x^2-4x+3} = \lim_{x\to 3}\frac{x-3}{(x-3)(x-1)} = \lim_{x\to 3}\frac{1}{x-1} = \frac{1}{2}.$$

*Ответ:* $\frac{1}{2}$.

## 3.8. Неопределенности вида $\left(\frac{0}{0}\right)$ и $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$.

Если при отыскании предела дроби $\frac{f(x)}{g(x)}$ числитель и знаменатель дроби стремятся одновременно к нулю или бесконечности, то говорят, что дробь представляет неопределенность вида $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$ соответственно. Нахождение предела такой дроби будем называть раскрытием неопределенности вида $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$.

**Чтобы раскрыть неопределенность $\left(\frac{0}{0}\right)$, необходимо числитель и знаменатель разложить на линейные множители и сократить на множитель, дающий 0.**

**Пример 3.5.** $\lim\limits_{x\to 2}\frac{2x^2+x-10}{x^2+x-6}$

*Решение:* Непосредственная подстановка вместо $x$ значения 2 в данную дробь приводит к неопределенности вида $\left(\frac{0}{0}\right)$. Разложим числитель и знаменатель на линейные множители и сократим на множитель, дающий 0.

$$\lim_{x\to 2}\frac{2x^2+x-10}{x^2+x-6}=\left(\frac{0}{0}\right)=\left\{\begin{array}{l}2x^2+x-10=a(x-x_1)(x-x_2)=2(x-2)(x+\frac{5}{2}).\\ D=в^2-4ac=1-4\cdot 2\cdot(-10)=81.\\ x_{1;2}=\frac{-в\pm\sqrt{D}}{2a}=\frac{-1\pm 9}{4}=2;-\frac{5}{2}.\\ \textit{Аналогично, } x^2+x-6=(x-2)(x+3).\\ D=1-4\cdot 1\cdot(-6)=25.\\ x_{1;2}=\frac{-1\pm 5}{2}=2;-3.\end{array}\right\}=$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{2\cancel{(x-2)}(x+\frac{5}{2})}{\cancel{(x-2)}(x+3)}=\left\{\begin{array}{c}\textit{т.к. } x\to 2 \ (\textit{но не равен } 2), \textit{ сократим на } (x-2);\\ (x-2)-\textit{критический множитель.}\end{array}\right\}=$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{2x+5}{x+3}=\frac{2\cdot 2+5}{2+3}=\frac{9}{5}=1{,}8.$$

*Ответ:* 1,8.

**Пример 3.6.** Вычислить $\lim_{x\to 0}\frac{sin5x}{tg3x}$.

*Решение:* Воспользуемся таблицей эквивалентных функций. Так как

$$sin5x \sim 5x, \quad tg3x \sim 3x \ \text{ при } x\to 0, \text{то}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{sin5x}{tg3x}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{5x}{3x}=\frac{5}{3}.$$

*Ответ:* $\frac{5}{3}$.

**Чтобы раскрыть неопределенность $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ необходимо каждый член числителя и знаменателя разделить на переменную в наивысшей степени.**

**Пример 3.7.** $\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2-3x+1}{2x^2+x-5}$

*Решение.*

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2-3x+1}{2x^2+x-5}=\frac{4\cdot\infty^2-3\cdot\infty+1}{2\cdot\infty^2+\infty-5}=\{\text{по свойствам б.б. величин}\}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2-3x+1}{2x^2+x-5}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{4x^2}{x^2}-\frac{3\cancel{x}}{x^{\cancel{2}}}+\frac{1}{x^2}}{\frac{2x^2}{x^2}+\frac{\cancel{x}}{x^{\cancel{2}}}-\frac{5}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{4-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}{2+\frac{1}{x}-\frac{5}{x^2}}=$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4-\frac{3}{\infty}+\frac{1}{\infty}}{2+\frac{1}{\infty}-\frac{5}{\infty}}=\frac{4-0+0}{2+0-0}=\frac{4}{2}=2.$$

*Ответ:* 2.

**Пример 3.8.** $\lim\limits_{x\to2}\frac{2x^2+3x-9}{6x^3+x-5}$

*Решение.*

$$\lim_{x\to2}\frac{2x^2+3x-9}{6x^3+x-5}=\lim_{x\to2}\frac{\frac{2x^2}{x^3}+\frac{3x}{x^3}-\frac{9}{x^3}}{\frac{6x^3}{x^3}+\frac{x}{x^3}-\frac{5}{x^3}}=\lim_{x\to2}\frac{\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}-\frac{9}{x^3}}{6+\frac{1}{x^2}-\frac{5}{x^3}}=\frac{\frac{2}{\infty}+\frac{3}{\infty^2}-\frac{9}{\infty^3}}{6+\frac{1}{\infty^2}-\frac{5}{\infty^3}}=\frac{0+0+0}{6+0+0}=\frac{0}{6}=0$$

*Ответ:* 0.

**Пример 3.9.** $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^4-x+1}{x^2+3x-8}$

*Решение.*

$$\lim_{x\to2}\frac{2x^4-x+1}{x^2+3x-8}=\frac{\infty}{\infty}\lim_{x\to2}\frac{\frac{2x^4}{x^4}-\frac{x}{x^4}+\frac{1}{x^4}}{\frac{x^2}{x^4}+\frac{3x}{x^4}-\frac{8}{x^4}}=\lim_{x\to2}\frac{2-\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^4}}{\frac{1}{x^2}+\frac{3x}{x^3}-\frac{8}{x^4}}=\frac{2-\frac{1}{\infty^3}+\frac{1}{\infty^4}}{\frac{1}{\infty^2}+\frac{1}{\infty^3}-\frac{5}{\infty^4}}=\frac{2-0+0}{0+0+0}=\frac{2}{0}=\infty$$

При раскрытии неопределенности удобно пользоваться следующей обобщающей формулой:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_0} = \begin{cases} \frac{a_0}{b_0}, n = m \\ \infty, n > m \\ 0, n < m \end{cases}$$

## 3.9. Первый замечательный предел

Первый замечательный предел часто применяется для вычисления пределов содержащих синус, арксинус, тангенс, арктангенс и получающихся при них неопределенностей ноль делить на ноль.

Формула первого замечательного предела имеет вид: $\lim_{x\to 0}\frac{sinx}{x} = 1.$

Для применения формулы необходимо, чтобы были соблюдены два условия:

1) выражения, содержащиеся в синусе и знаменателе дроби совпадают;

2) выражения, стоящие в синусе и знаменателе дроби стремятся к нулю.

Достаточно редко в заданиях можно увидеть «чистый» первый замечательный предел, в котором можно сразу было бы записать ответ. На практике всё немного сложнее выглядит, но для таких случаев будет полезно знать следствия первого замечательного предела. Благодаря им можно быстро вычислить нужные пределы.

**Следствия.**

1. $\lim_{x\to 0}\frac{tgx}{x} = 1;$ 2. $\lim_{x\to 0}\frac{arcsinx}{x} = 1;$ 3. $\lim_{x\to 0}\frac{arctgx}{x} = 1;$

4. $\lim_{x\to 0}\frac{1-cosx}{\frac{x^2}{2}} = 1.$

**Пример 3.10.** Вычислить $lim_{x\to 0}\frac{sin2x}{4x}$.

*Решение.* Рассмотрим предел и заметим, что в нем есть синус. Далее подставим $x$=0 в числитель и знаменатель, получим неопределенность ноль делить на ноль: $\lim_{x\to 0}\frac{sin2x}{4x} = \frac{0}{0}$.

Уже два признака того, что нужно применять замечательный предел, но есть небольшой нюанс: сразу применить формулу мы не сможем, так как выражение под знаком синуса отличается от выражения стоящего в знаменателе. А нам нужно, чтобы они были равны. Поэтому с помощью элементарных преобразований числителя мы превратим его в $2x$.

Для этого мы вынесем двойку из знаменателя дроби отдельным множителем. Выглядит это так:

$$\lim_{x\to 0}\frac{sin2x}{2*2x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{sin2x}{2x}=\frac{1}{2}*1=\frac{1}{2}.$$

*Ответ:* $\frac{1}{2}$.

**Пример 3.11.** Вычислить $\lim_{x\to {}^1/_2}\frac{\arcsin(1-2x)}{4x^2-1}$

*Решение:*

$\lim_{x\to {}^1/_2}\frac{\arcsin(1-2x)}{(4x^2-1)}=\frac{0}{0}=$

$\lim_{x\to {}^1/_2}\frac{\arcsin(1-2x)}{-(1-2x)(1+2x)}=-\lim_{x\to {}^1/_2}\frac{\arcsin(1-2x)}{(1-2x)}.\frac{1}{(1+2x)}=-1*\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}.$

*Ответ:* $-\frac{1}{2}$.

## Раздел 4. Дифференциальное исчисление функций одной переменной

### 4.1. Понятие производной

Пусть задана функция $y=f(x)$, определенная на некотором множестве $X$.

Выполним следующие действия:

1). Придадим аргументу $x$ приращение $\Delta x$, получим новое значение аргумента $x + \Delta x$ и подставим его в функцию. В результате получим новое значение функции $\text{y} + \Delta\text{y} = f(x + \Delta x)$.

2). Вычислим приращение и функции $\Delta\text{y}$. Для этого из нового значения функции вычтем ее первоначальное значение: $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$.

3). Составим отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ , которое определяет среднюю скорость изменения функции.

4). Найдем $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$.

**Определение 4.1.** Производной данной функции $f(x)$ в точке $x$ называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда последнее стремится к нулю т.е.

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \tag{4.1}$$

Операция нахождения производной называется *дифференцированием*.

**Пример 4.1.** Найти производную функции $y = x^2$ , пользуясь определением производной.

*Решение.* 1). Придадим приращение $\Delta x \neq 0$ .

2). Новое значение функции будет $y + \Delta y = (x + \Delta x)^2$.

3). Приращение функции $\Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2 = x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - x^2 = 2x\Delta x + (\Delta x)^2 = (2x + \Delta x)\Delta x$.

4). $y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(2x+\Delta x)\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}(2x + \Delta\, x) = \lim_{\Delta x \to 0} 2x + \lim_{\Delta x \to 0} \Delta\, x = 2x$.

$$(x^2)' = 2x.$$

*Ответ: 2x*.

## 4.2. Геометрический смысл производной

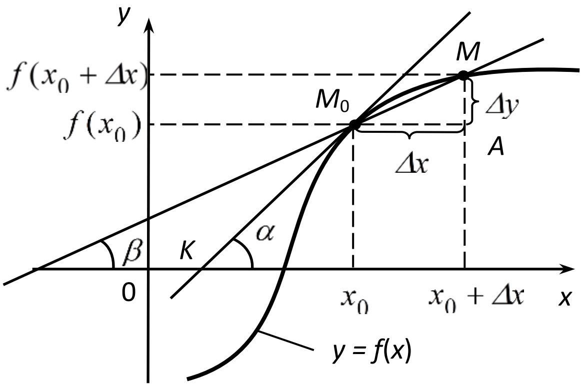


Рисунок 4.1.

В прямоугольной системе координат возьмем произвольную кривую, заданную уравнением $y = f(x)$. В произвольной точке кривой $M_0$ проведем касательную $M_0T$ под углом $\alpha$ и секущую $M_0M$ под углом $\beta$ с осью $Ox$. Точка $M_0$ на кривой имеет абсциссу $x_0$ , а точка $M$ - $x_0 +\Delta x$ (рисунок 4.1).

Угловой коэффициент секущей $k_{\text{сек}} = tg\beta = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ . При $\Delta x \to 0$ точка $M$ приближается в точке $M_0$. При этом секущая неограниченно приближается к касательной, т.е. $\lim_{\Delta x\to 0}\beta = \alpha$ и $\lim_{\Delta x\to 0} tg\beta = tg\alpha.$ Поэтому угловой коэффициент касательной $k_{\text{кас}} = tg\alpha = \lim_{\Delta x\to 0} tg\beta = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$.

Итак, угловой коэффициент касательной к графику функции в точке с абсциссой $x_0$ равен значению производной этой функции в точке $x_0$, т.е.

$$k_{\text{кас}} = f'(x_0).$$

## 4.3. Физический смысл производной

Пусть материальная точка движется по прямой в одном направлении по закону $S = f(t)$, где t – время, а S – путь, пройденный за время t.

Зафиксируем последовательно два момента времени $t_0$ и t и обозначим приращение $\Delta\, t = t - t_0$.

Тогда за промежуток $\Delta\, t$ точка прошла путь $\Delta\, s = f(t_0 +\Delta\, t) - f(t_0)$, а отношение $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ есть средняя скорость за время $\Delta\, t$.

Тогда предел $\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = f'(t_0) = V_0$ определяет мгновенную скорость точки в момент времени $t_0$ как производную пути по времени.

### 4.4 Правила дифференцирования

Вычисление производной по определению приводит к громоздким преобразованиям. При помощи следующих правил можно значительно упростить нахождение производных.

1). Производная постоянной равна самой постоянной, т.е.

$\mathrm{c}' = 0,\ \mathrm{c} - const.$

*Доказательство.* Пусть *f(x)=c* тогда $f(x + \Delta\, x) = c$. По определению производной

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta\, x) - f(x)}{\Delta\, x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{c - c}{\Delta\, x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0}{\Delta\, x} = 0 \text{ ,ч. т. д.}$$

2). Производная аргумента равна единице, т.е. $x' = 1$.

*Доказательство.* Пусть *f(x)=x,* тогда $\Delta\, y = \Delta\, x$. По определению производной

$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1$, ч. т. д.

3). Если функции *u=u(x)* и *v=v(x)* дифференцируемы в данной точке, то их сумма также дифференцируема в этой точке и производная суммы равна сумме производных, т.е.

$$(u \pm v)' = u' \pm v' \tag{4.2}$$

*Доказательство.* Рассмотрим функцию *y=f(x)=u(x)+v(x).* Приращению $\Delta x$ аргумента х соответствуют приращения

$\Delta u = u(x + \Delta x)$-*u(x)* и $\Delta v = v(x + \Delta x)$-*v(x)* функций $u$ и $v$. Тогда функция у получит приращение $\Delta \mathrm{y} = f(x + \Delta x) - f(x) = \big(u(x + \Delta x) + v(x + \Delta x)\big) - \big(u(x) + v(x)\big) = \big(u(x + \Delta x) - u(x)\big) + \big(v(x + \Delta x) - v(x)\big)$ $=\Delta u + \Delta v$ .

Следовательно, $$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u + \Delta v}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x}.$$

Так как по предположению функции $u$ и $v$ дифференцируемы, то

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = u', \ \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = v'$$

И, следовательно, $y' = u' + v'$.

Итак, $(u+v)' = u' + v'$.

**Замечание 4.1.** Формула (4.2) легко обобщается на случай конечного числа слагаемых:

$$(u + v + ... + e)' = u' + v' + ... + e'.$$

2. Если функции $u=u(x)$ и $v=v(x)$ дифференцируемы в данной точке, то их произведение также дифференцируемо в этой точке и производная произведения находится по формуле:

$$(uv)^{\text{Если функции } u=u(x) \text{ и } v=v(x) \text{ дифференцируемы в данной точке}\prime} = u'v + uv'.$$

*Следствие.* Постоянный множитель можно вынести за знак производной: $(cu)' = cu'$.

3. Если функции $u=u(x)$ и $v=v(x)$ дифференцируемы в данной точке и $v \neq 0$, то в этой точке дифференцируемо и их частное, причем

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}. \qquad (4.3)$$

**Пример 4.2.** Найти производную функции $y = x^3 + sinx + lnx$.

*Решение.* $y' = (x^3 + sinx + lnx)' = (x^3)' + (sinx)' + (lnx)' = 3x^2 + cosx + \frac{1}{x}$.

**Пример 4.3.** Найти производную функции $y = tgx$.

*Решение.* Представим данную функцию в виде частного $y = \frac{sinx}{cosx}$, тогда по формуле (4.3), получим:

$$y' = \frac{(sinx)'cosx - sinx(cosx)'}{cos^2x} = \frac{cosxcosx - sinx(-sinx)}{cos^2x}$$

$= \frac{cos^2x + sin^2x}{cos^2x} = \frac{1}{cos^2x}$.

Таким образом, $(tgx)' = \frac{1}{cos^2x}$.

## 4.5. Производная сложной функции

Пусть $y = f(u)$, а $u = \varphi(x)$. Тогда $y = f[\varphi(x)]$ - есть сложная функция аргумента $x$, где $x$ – независимая переменная, $y$- функция, $u$ – промежуточный аргумент.

Выведем правило дифференцирования сложных функций.

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = y'_u \cdot u'_x$$

*Производная сложной функции равна произведению производной данной функции по промежуточному аргументу на производную промежуточного аргумента по независимой переменной x*:

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x \text{ или } \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}. \qquad (4.5)$$

**Пример 4.4**. Найти производную функции $y = \sin x^3$.

*Решение.* Данная функция – сложная. Обозначим $x^3 = u$, тогда $y = \sin u$.

Найдем производную

$$y'_x = (\sin u)'_u \cdot \left(x^3\right)' = \cos u \cdot 3x^2 = \cos x^3 \cdot 3x^2.$$

В дальнейшем для обозначения промежуточного аргумента, $u$ вводить не будем.

$$\left(\sin x^3\right)' = \cos x^3 \cdot \left(x^3\right)' = 3x^2 \cdot \cos x^3.$$

**Пример 4.5.** Найти производную функции $y = \ln \sin 3x$.

*Решение.*

$$y' = \frac{1}{\sin 3x} \cdot (\sin 3x)' = \frac{1}{\sin 3x} \cdot \cos 3x \cdot (3x)' = 3ctg3x.$$

### 4.6. Понятие производной *n*-го порядка

Производная $f'(x)$ функции *f(x)* сама является функцией аргумента *x*, и по отношению к ней также можно ставить вопрос о нахождении производной. Производная от первой производной некоторой функции *y* = *f(x)* называется второй производной, или производной второго порядка, этой функции. Производная от второй производной называется третьей производной, или производной третьего порядка. Производные, начиная со второй, называются производными высших порядков. Для обозначения используются символы: $y', y'', ..., y^{(n)}, f'(x), f''(x), ..., f^{(n)}(x)$. Производной *n*-го порядка называется производная от производной (*n*-1)-го порядка: $y^{(n)} = \left(y^{(n-1)}\right)'$.

**Пример 4.6**. Найти производную второго порядка от функции $y=x^3+2x$.

*Решение.* Последовательно находим первую производную, а затем производную от неё:

$$y' = 3x^2 + 2, \quad y'' = 6.$$

**Пример 4.7**. Найти производную второго порядка от функции $y = e^{-x^2}$.

*Решение*. Сначала находим первую производную $y' = e^{-x^2}(-2x) = -2x \cdot e^{-x^2}$. Дифференцируя полученное произведение функций, находим производную второго порядка: $y'' = -2\left(e^{-x^2} + xe^{-x^2}(-2x)\right) = -2e^{-x^2}\left(1 - 2x^2\right)$.

**Пример 4.8**. Найти производную третьего порядка от функции $y = x \ln x$.

*Решение.* $y' = \ln x + x\frac{1}{x} = \ln x + 1, \quad y'' = \frac{1}{x}, \quad y''' = -\frac{1}{x^2}.$

**Пример 4.9**. Найти производную n-го порядка от функции $y=e^{2x}$.

*Решение.* $y' = 2e^{2x}, \quad y'' = 2 \cdot 2e^{2x}, \quad y''' = 2 \cdot 2 \cdot 2e^{2x}$, т.е. каждое дифференцирование прибавляет к исходной функции сомножитель 2, отсюда получаем: $y^{(n)} = 2^n e^{2x}$

## 4.7. Дифференцирование неявной функции

Если зависимость между переменными $x$ и $y$ задана уравнением $F(x,y)=0$ (4.6), которое не разрешено относительно $y$, то $y$ называется неявной функцией от аргумента $x$.

Чтобы найти производную $y'$ неявной функции $y$, определяемой уравнением (4.6), надо продифференцировать по переменной $x$ обе части этого равенства, считая $y$ функцией от $x$, затем полученное уравнение решить относительно производной $y'$.

При дифференцировании неявной функции надо помнить, что *x* – независимая переменная, ее производная равна 1, а *y* – функция от *x*, ее производная равна $y'$.

Рассмотрим на примере, как можно найти производную неявной функции.

**Пример 4.10**. Найти $y', y''$, если $x^2 y - y^2 = 5x$.

*Решение.* Если две функции равны, то их производные тоже равны. Дифференцируем обе части равенства по *x*.

$$2xy + x^2 y' - 2y \cdot y' = 5 \tag{4.7}$$

Разрешая уравнение относительно $y'$, получим

$$y' = \frac{5 - 2xy}{x^2 - 2y}.$$

Для нахождения $y''$ обе части равенства (4.7) продифференцируем по *x*, получим

$$2y + 2x \cdot y' + 2x \cdot y' + x^2 \cdot y'' - 2(y')^2 - 2y \cdot y'' = 0.$$

Отсюда

$$y'' \cdot \left(x^2 - 2y\right) = 2(y')^2 - 2y - 4x \cdot y'$$

или

$$y'' = \frac{2(y')^2 - 2y - 4x \cdot y'}{x^2 - 2y}$$

Подставив $y'$, получим

$$y'' = \frac{2(5 - 2xy)^2}{(x - 2y)^3} - \frac{2y}{x^2 - 2y} - \frac{4x \cdot (5 - 2xy)}{\left(x^2 - 2y\right)^2}$$

или

$$y'' = \frac{6x^4 y - 20x^3 - 8y^3 + 50}{(x-2y)^3}.$$

Можно заметить, что производная неявной функции выражается зависимостью не только от аргумента $x$, но и от функции $y$.

## 4.8. Логарифмическое дифференцирование

Прежде чем находить производную от заданного выражения, иногда бывает целесообразно предварительно преобразовать его с таким расчетом, чтобы процесс дифференцирования упростился.

При нахождении производной от выражений, удобных для логарифмирования, например, произведения нескольких функций и дроби, числитель и знаменатель которой содержат произведения степени, целесообразно обе части данного выражения прологарифмировать по основанию $e$, а потом продифференцировать.

Производная от натурального логарифма функции $y$, т.е. $(ln y)' = \frac{1}{y} y'$ называется логарифмической производной функции $y$.

Дифференцирование, основанное на предварительном нахождении логарифмической производной и затем искомой производной $y'$, называется *логарифмическим дифференцированием*. Им пользуются при дифференцировании выражений, содержащих корни из дробей, а также при нахождении производной показательно-степенной функции $y = u(x)^{v(x)}$, где $u$ и $v$ есть функции от аргумента $x$.

**Пример 4.11**. Найти производные функций:

а) $y = ln 4\sqrt{\frac{x^2}{(x+3)^3}}$; б) $y = (sin\, x)^x$.

*Решение.* а) Преобразуем данную функцию, воспользовавшись свойствами логарифма

$$y=\ln\left(\frac{x^2}{(x+3)^3}\right)^{1/4}=\frac{1}{4}[\ln x^2-\ln(x+3)^3]=\frac{1}{4}[2\ln x-$$

$$-3\ln(x+3)]=\frac{1}{2}\ln x-\frac{3}{4}\ln(x+3)$$

Найдем производную

$$y'=\frac{1}{2x}-\frac{1}{4(x+3)}=\frac{2x+6-3x}{4x(x+3)}=\frac{6-x}{4x(x+3)}.$$

б) Прологарифмируем обе части уравнения

$$\ln y=\ln(\sin x)^x=x\cdot\ln(\sin x)$$

Дифференцируем неявную функцию по переменной $x$

$$\frac{1}{y}\cdot y'=\ln(\sin x)+x\cdot\frac{\cos x}{\sin x}$$

$$y'=y\left(\ln(\sin x)+x\cdot\frac{\cos x}{\sin x}\right)$$

$$y'=(\sin x)^x\cdot\left(\ln(\sin x)+x\cdot\frac{\cos x}{\sin x}\right).$$

## 4.9. Определение дифференциала функции

Пусть функция $y=f(x)$ имеет производную в точке $x$. По определению производной имеем:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=y'.$$

Так как переменная величина отличается от своего предела на величину бесконечно малую, то $\frac{\Delta y}{\Delta x} = y' + \alpha$, где $\alpha \to 0$ при $\Delta x \to 0$. Следовательно,

$$\Delta y = y' \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x. \qquad (4.8)$$

Из равенства (4.8) видно, что приращение функции состоит из двух слагаемых, первое из которых является главной частью приращения функции, которая пропорциональна приращению аргумента и линейна относительно него.

***Определение.*** Дифференциалом функции $y = f(x)$ в точке $x$ называется главная часть приращения функции $y' \cdot \Delta x$, линейная относительно $\Delta x$, т.е. $dy = y' \cdot \Delta x$. По определению дифференциал независимой переменной равен её приращению, т.е. $dx = \Delta x$, тогда получим

$$dy = y' \cdot dx = f'(x) \cdot dx. \qquad (4.9)$$

Итак, дифференциал функции в точке x равен произведению производной функции в этой точке на дифференциал аргумента.

Из равенства (4.9) имеем $y' = \frac{dy}{dx}$.

Следовательно, производная функции равна отношению ее дифференциала к дифференциалу независимой переменной. Часто это отношение рассматривается просто как символ, обозначающий производную функции.

Если функции $u=u(x)$ и $v=v(x)$ дифференцируемые функции аргумента $x$, тогда имеют место следующие формулы:

1. $d(u+v)=du+dv$;
2. $d(uv)=udv+vdu$;
3. $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu-udv}{v^2}$, при условии $v \neq 0$.

**Пример 4.12**. Найти дифференциал функции а) $y = e^{x^2+1}$; б) $x \cdot \sin y + y^2 \cos x - 1$.

*Решение*. а) Исходя из определения дифференциала, имеем:

$$dy = y' \cdot dx = \left(e^{x^2+1}\right)' \cdot dx = e^{x^2+1} \cdot 2x \cdot dx.$$

б) Найдём производную $y'$. Для этого дифференцируем обе части уравнения по *x*, считая при этом *y* функцией от аргумента *x*: $\sin e + x \cdot \cos y \cdot y' + 2y \cdot y' \cdot \cos x - y^2 \cdot \sin x = 0.$ Из полученного равенства определяем $y'$: $y'(x\cos y + 2y\cos x) = y^2 \sin x - \sin y$; $y' = \dfrac{y^2 \sin x - \sin y}{x\cos y + 2y\cos x}.$

Следовательно, дифференциал $dy = \dfrac{y^2 \sin x - \sin y}{x\cos y + 2y\cos x}dx.$

## 4.10. Дифференцирование функций, заданных параметрически

Предположим, что функция *y* от *x* задана параметрическими уравнениями:

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi(t) \\ y &= \psi(t) \end{aligned}\right\}, \tag{4.10}$$

причем в некоторой области изменения параметра *t* функции $\varphi(t)$ *и* $\psi(t)$ и $\varphi'(t)$ не равны нулю. Производные 1-го и 2-го порядков параметрически заданной функции находятся по формулам:

$$\begin{gathered} y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} \\ y''_{xx} = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\psi''(t)\cdot\varphi'(t) - \psi'(t)\cdot\varphi''(t)}{[\varphi'(t)]^3} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} \end{gathered} \tag{4.11}$$

**Пример 4.13**. Найти $y'_x$ и $y''_{xx}$ функции $\begin{cases} x = t^2 \\ y = \sin 2t \end{cases}.$

*Решение.*

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{2\cos 2t}{2t}=\frac{\cos 2t}{t}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{(y'_x)'_t}{x'_t}=\frac{\frac{-2\sin 2t\cdot t-\cos 2t}{t^2}}{2t}=\frac{-2\sin 2t\cdot t-\cos 2t}{2t^3}.$$

Для справок приводим таблицу основных формул и правил дифференцирования.

**Таблица основных формул производных**

1. $c'=0$, $c=const$

2. $x'=1$.

3. $(c\cdot u)'=c\cdot u'$.

4. $(u+v-w)'=u'+v'-w'$.

5. $(u\cdot v)'=u'\cdot v+uv'$.

6. $(u\cdot v\cdot w)'=u'\cdot v\cdot w+u\cdot v'\cdot w+u\cdot v\cdot w'$.

7. $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'\cdot v-u\cdot v'}{v^2}$.

8. $(u^n)'=n\cdot u^{n-1}\cdot u'$.

а) $\left(\sqrt{u}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{u}}\cdot u'$.

б) $\left(\frac{1}{u}\right)'=-\frac{1}{u^2}\cdot u'$.

в) $\left(\sqrt[n]{u^m}\right)'=\left(u^{\frac{m}{n}}\right)'=\frac{m}{n}\cdot u^{\frac{m}{n}-1}$.

9. $(a^u)'=a^u\cdot lna\cdot u'$

12. $(sinu)'=cosu\cdot u'$

13. $(cosu)'=-sinu\cdot u'$.

14. $(tgu)'=\frac{1}{cos^2u}\cdot u'$.

15. $(ctgu)'=-\frac{1}{sin^2u}\cdot u'$.

16. $(arcsinu)'=\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u'$.

10. $(e^u)' = e^u \cdot u'$.

11. $(\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u'$.

17. $(\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$.

18. $(\mathrm{arctg}\, u)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'$.

19. $(\mathrm{arcctg}\, u)' = -\frac{1}{1+u^2} \cdot u'$.

**Пример 4.14.** Найти производные следующих функций:

а) $y = 2x^4 - \frac{5}{x^3} - 9\sqrt[3]{x^2}$; б) $y = \left(x^3+1\right) \cdot \sin x$; в) $y = \frac{\arccos 5x}{\ln(x^2-3x)}$.

*Решение***.** а) Вводя дробные и отрицательные показатели: $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$ и $\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$, получим:

$$y = 2x^4 - 5x^{-3} - 9x^{\frac{2}{3}}.$$

Применяя правило дифференцирования суммы и формулу дифференцирования степенной, будем иметь:

$$y' = 2 \cdot 4x^{4-1} - 5 \cdot (-3)x^{-3-1} - 9 \cdot \frac{2}{3} x^{\frac{2}{3}-1} = 8x^3 + 15x^{-4} - 6x^{-\frac{1}{3}} = 8x^3 + \frac{15}{x^4} - \frac{6}{\sqrt[3]{x}}.$$

б) Применим правило дифференцирования произведения двух функций . Тогда

$$y' = \left(x^3+1\right)' \cdot \sin x + \left(x^3+1\right) \cdot (\sin x)' = 3x^2 \cdot \sin x + \left(x^3+1\right) \cdot \cos x.$$

в) Здесь необходимо воспользоваться правилом дифференцирования частного:

$$y' = \frac{(\arccos 5x)' \cdot \ln(x^2-3x) - \arccos 5x \cdot (\ln(x^2-3x))'}{\ln^2(x^2-3x)} =$$

$$=\frac{-\frac{1}{\sqrt{1-25x^2}}\cdot(5x)'\cdot ln(x^2-3x)-arccos5x\cdot\frac{1}{x^2-3x}(x^2-3x)'}{ln^2(x^2-3x)}=$$

$$=\frac{-\frac{5}{\sqrt{1-25x^2}}\cdot ln(x^2-3x)-arccos5x\cdot\frac{1}{x^2-3x}(2x-3)}{ln^2(x^2-3x)}.$$

**Пример 4.15.** Найти дифференциалы следующих функций:

а) $y=e^{sinx}$; б) $y=2x^3-tg(cos2x)$.

*Решение.* Для нахождения дифференциала применим формулу (4.9), предварительно найдя производные:

а) $y'=\left(e^{sinx}\right)'=e^{sinx}\cdot(sinx)'=e^{sinx}\cdot cosx;\quad dy=e^{sinx}\cdot cosxdx;$

б) $y'=(2x^3-tg(cos2x))'=6x^2-\frac{1}{cos^2(cos2x)}\cdot(cos2x)'=$

$$=6x^2-\frac{1}{cos^2(cos2x)}\cdot(-sin2x\cdot(2x)')=6x^2+\frac{2sin2x}{cos^2(cos2x)};$$

тогда

$$dy=\left[6x^2+\frac{2sin2x}{cos^2(cos2x)}\right]dx.$$

## Раздел 5. Приложения производной

### 5.1. Правило Лопиталя

#### 5.1.1.Раскрытие неопределённостей $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$

Правило Лопиталя является эффективным средством нахождения предела функции в тех случаях, когда аргумент неограниченно возрастает или стремится к значению, которое не входит в область определения функции.

Пусть функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ дифференцируемы при $0 < |x-a| < h$, причём производная одной из них не обращается в ноль. Если $f(x)$ и $g(x)$ - обе бесконечно малые или бесконечно большие при $x \to a$ т.е., частное $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ представляет в точке $x = a$ неопределённость вида $\dfrac{0}{0}$ или $\dfrac{\infty}{\infty}$, то:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \ldots = \lim_{x\to a}\frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)} \qquad (5.1)$$

при условии, что предел отношения существует.

Последняя формула выражает правило Лопиталя: ***предел отношения двух бесконечно малых или двух бесконечно больших величин равен пределу отношения их производных.***

Это правило применимо в случае, когда $a = \infty$. Если частное $\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ в точке $x = a$ вновь дает неопределенность одного из указанных видов, $f'(x)$ и $g'(x)$ удовлетворяют требованиям, ранее сформулированным, то необходимо в пределе перейти к отношению вторых производных и т.д.

**Замечание 5.1.** Отметим, что формула (5.1) справедлива только в том случае, если предел, стоящий справа, существует. Может случиться, что предел, стоящий слева существует, в то время как предел, стоящий в правой части равенства, не существует.

**Пример 5.1**. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x \sin x - 5x}{4x^2 + 7x}$.

*Решение*. При $x \to 0$ числитель и знаменатель дроби обращаются в нуль, получаем неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Применяя правило Лопиталя, находим

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x \sin x - 5x}{4x^2 + 7x} = \lim_{x\to 0} \frac{\left(e^x \sin x - 5x\right)'}{\left(4x^2 + 7x\right)'} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{e^x \sin x + e^x \cos x - 5}{8x + 7} = -\frac{4}{7}.$$

### 5.1.2. Раскрытие неопределённостей вида

$$0 \cdot \infty,\ \infty - \infty,\ 1^\infty,\ 0^0,\ \infty^0$$

1. Для раскрытия неопределенности $0 \cdot \infty$ необходимо преобразовать произведение $f(x)g(x)$, где $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$, частное вида $\dfrac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$ или $\dfrac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$.
2. В случае неопределенности $\infty - \infty$ необходимо преобразовать соответствующую разность $f(x) - g(x)$, где $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$, в произведение $g(x)\left(1 - \dfrac{g(x)}{f(x)}\right)$ и раскрыть сначала неопределенность $\dfrac{g(x)}{f(x)}$. Если $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{g(x)}{f(x)} = 1$, то следует привести выражение к виду $\dfrac{1 - \frac{g(x)}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)}}$.
3. Неопределенности видов $1^\infty$, $0^0$, $\infty^0$ раскрываются с помощью предварительного логарифмирования.

Пусть $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)\right]^{g(x)}=A$. Так как логарифмическая функция непрерывна, то $\lim\limits_{x\to a}\ln y=\ln\lim\limits_{x\to a} y$.

Тогда $\ln A=\lim\limits_{x\to a}\left[g(x)\ln f(x)\right]$ и неопределенности трех рассматриваемых видов сводятся к неопределенности вида $0\cdot\infty$.

**Пример 5.2**. Вычислить пределы

а). $\lim\limits_{x\to 0} x\cdot ctg3x$

б). $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right)$

в). $\lim\limits_{x\to 0}\left(e^x+x\right)^{\frac{1}{x}}$

*Решение.*

а). $$\lim_{x\to 0} x\cdot ctg3x=0\cdot\infty=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\frac{1}{ctg3x}}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{tg3x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(x)'}{(tg3x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{3}{\cos^2 3x}}=\frac{1}{3}.$$

б). $$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right)=\infty-\infty=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x\sin x}=\frac{0}{0}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(\sin x-x)'}{(x\sin x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{\sin x+x\cos x}=\frac{0}{0}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(\cos x-1)'}{(\sin x+x\cos)'}=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{\cos x+\cos x-x\sin x}=0$$

в). $$\lim_{x\to 0}\left(e^x+x\right)^{\frac{1}{x}}=1^{\infty}$$

Обозначим искомый предел через А. Тогда

$$\ln A = \lim_{x \to 0} \left[ \frac{1}{x} \ln\left(e^x + x\right) \right] = \lim_{x \to 0} \frac{\ln\left(e^x + x\right)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\left(\ln\left(e^x + x\right)\right)'}{x'} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\frac{e^x + 1}{e^x + x}}{1} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x + 1}{e^x + x} = 2$$

$$\ln A = 2, \; A = e^2$$

## 5.2. Касательная и нормаль к плоской кривой. Скорость и уравнение

**Определение 5.1.** Касательной к кривой $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0; y_0)$ называется предельное положение $M_0T$ секущей $MM_0$, когда точка $M$ стремится к точке $M_0$ вдоль данной кривой (рис. 5.1)

Уравнение касательной к кривой $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0; y_0)$ запишется:

$$y - y_0 = f(x_0)(x - x_0) \tag{5.1}$$

**Определение 5.2.** *Нормалью* к кривой в точке $M_0(x_0; y_0)$ называется прямая, проходящая через эту точку и перпендикулярная к касательной в данной точке ($M_0K$ –нормаль)(рис. 5.2)

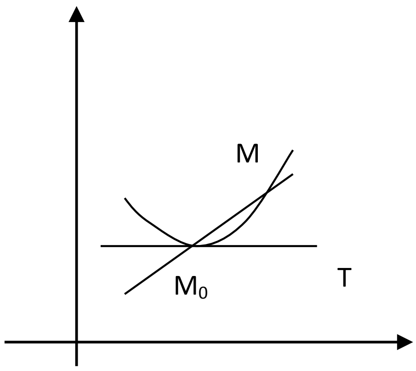


**Рисунок 5.1 – Секущая и касательная**

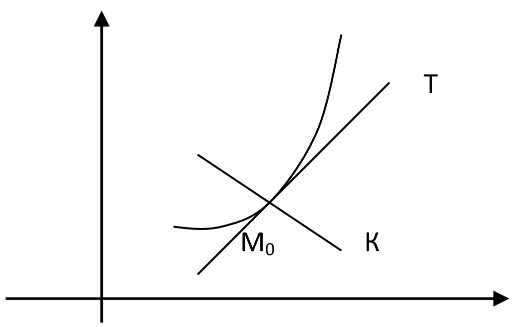


**Рисунок 5.2- Нормаль и касательная**

Уравнение нормали к кривой $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0; y_0)$ имеет вид:

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) \qquad (5.2)$$

Пусть точка движения по оси $ox$ и в момент времени $t$ имеет координату $x = f(t)$. Тогда в момент $t$ ***скорость*** определится

$$V = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}, \qquad (5.3)$$

а ***ускорение***

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{d^2 x}{dt^2}. \qquad (5.4)$$

**Пример 5.3.** Записать уравнение касательной и нормали к кривой $y = x^2 - 9x - 4$ в точке с абсциссой $x_0 = -1$.

*Решение.* Ордината точки касания определяется $y(-1) = 1 + 9 - 4 = 6$. Находим производную от функции $y$: $y' = 2x - 9$. В точке касания $y'(x_0) = y'(-1) = -11$. Подставим найденные значения в уравнение касательной (5.1): $y - 6 = -11(x + 1)$.

Аналогично подставляем значения $x_0 = -1$, $y_0 = 6$, $y'(x_0) = -11$ в уравнение нормали (5.2):

$$y - 6 = \frac{1}{11}(x + 1), \quad y = \frac{1}{11}x + \frac{1}{11} + 6 \Rightarrow \; y = \frac{1}{11}x + 6\frac{1}{11}.$$

После упрощения получим

$y = -11x - 5$ - уравнение касательной,

$x - 11y + 67 = 0$ - уравнение нормали.

**Пример 5.4.** Составить уравнение касательной и нормали к эллипсу $\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{8} = 1$ в точке $M_0(3;2)$.

*Решение.* Находим производную неявной функции

$$\frac{2x}{18}+\frac{2yy'}{8}=0,\quad \frac{yy'}{4}=-\frac{x}{9},\quad y'=-\frac{4x}{9y},$$

$$y'(x_0;y_0)=y'(3;2)=-\frac{4\cdot 3}{9\cdot 2}=-\frac{2}{3}.$$

Подставляя значения $M_0(3;2)$, $y'(x_0;y_0)=-\frac{2}{3}$ в уравнения касательной и нормали, получим соответственно:

$y-2=-\frac{2}{3}(x-3)$ или $2x+3y-12=0$ - уравнение касательной

$y-2=-\frac{3}{2}(x-3)$ или $3x-2y-13=0$ - уравнение нормали.

**Пример 5.5.** Тело движется вдоль прямой $ox$ по закону $x=t-\sin t$. Определить скорость и ускорение движения при $t=\frac{\pi}{2}$.

*Решение*: В силу физического смысла первой и второй производной функции одной переменной для любого момента времени $t$ скорость и ускорение определяется по формулам (5.3) и (5.4):

$$V=\frac{dx}{dt}=1-\cos t,\quad a=\frac{d^2x}{dt^2}=\sin t.$$

При $t=\frac{\pi}{2}$ получим $V=1,\ a=1.$

*Ответ.* $V=1\,{}^{м}\!/_{сек},\quad a=1\,{}^{м}\!/_{сек^2}.$

### 5.3. Применение производной к исследованию функций

**Определение 5.3.** Функция $y=f(x)$ называется *возрастающей* (*убывающей*) в интервале $(a;в)$, если в этом интервале большему значению аргумента соответствует большее (меньшее) значение функции, т.е. для любой пары значений $x_1$ и $x_2$, принадлежащих интервалу $(a;в)$ и удовлетворяющих неравенству $x_2 > x_1$, имеет место неравенство: $f(x_2) > f(x_1)$ $\left[f(x_2) < f(x_1)\right]$.

### *Достаточный признак возрастания (убывания) функции*

Если функция в каждой точке интервала имеет положительную (отрицательную) производную $y'$, то сама функция в этом интервале возрастает (убывает).

Говорят, что функция имеет *максимум* (*минимум*) в точке $x_0$, если значение функции в этой точке больше (меньше), чем ее значение во всех точках окрестности точки $x_0$.

*Экстремум функции* – это *максимум* или *минимум* функции ($y_{min}$ и $y_{max}$).

*Точками экстремума* или экстремальными точками называются точки, в которых функция имеет экстремум – это $\left(x_{min}; y_{min}\right)$ и $(x_{max}; y_{max})$.

Исследовать функцию на *монотонность* – это значит найти ее промежутки возрастания и убывания.

### *Необходимое условие существования экстремум*

Если функция имеет экстремум в точке $x_0$, то ее производная в этой точке равна нулю или не существует.

Точки, в которых первая производная $y'$ равна нулю или не существует, называются *критическими точками I рода*.

Точки, в которых вторая производная $y''$ равна нулю или не существует, называются *критическими точками II рода*.

Точки, в которых производная равна нулю, называются *стационарными*.

### *Первый достаточный признак существования экстремума*

Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в окрестности критической точки $x_0$ и при переходе через нее меняет знак с «+» на «–», то в точке $x_0$ функция имеет максимум – $y_{max}$, при этом сама точка $x_0$ является точкой максимума, т.е. $x_0 = x_{max}$. Если производная $y'$ меняет знак с «–» на «+», то в точке $x_0$ функция имеет минимум – $y_{min}$, при этом сама точка $x_0$ является точкой минимума, т.е. $x_0 = x_{min}$. Если знак производной не изменяется, то функция в точке $x_0$ экстремума не имеет.

### *Второй достаточный признак существования экстремума*

Если в точке $x_0$ первая производная $f'(x_0)$ обращается в нуль, а вторая производная $f''(x_0) \neq 0$, то функция $f(x)$ в точке $x_0$ имеет максимум, если $f''(x_0) < 0$, и минимум, если $f''(x_0) > 0$.

**Определение 5.4.** Кривая $y = f(x)$ называется *выпуклой* (*вогнутой*) на интервале $(a; в)$, если дуга кривой расположена ниже (выше) касательных, проведенных в любой точке из этого интервала.

**Определение 5.5.** Точки, отделяющие выпуклую часть кривой от вогнутой, называются *точками перегиба* данной кривой.

### *Достаточный признак выпуклости (вогнутости) кривой*

Если во всех точках $x$ интервала $(a; в)$ вторая производная $f''(x) > 0$ ($f''(x) < 0$), то на этом интервале кривая вогнута (выпукла).

***Достаточный признак существования точки перегиба***

Если при переходе через критическую точку II рода – $x_0$ вторая производная $f''(x)$ меняет знак (безразлично как), то точка $\left(x_0; f(x_0)\right)$ является точкой перегиба графика функции $y = f(x)$.

***Общая схема исследования функции и построения графика***

1. Найти область определения функции $D_f$.
2. Исследовать функцию на четность, нечетность.
3. Исследовать функцию на монотонность и экстремум.
4. Найти интервалы выпуклости, вогнутости и точки перегиба графика функции.
5. Найти дополнительные точки графика функции (по необходимости).
6. Построить график функции.

**Пример 5.6 .** Исследовать функцию $y = \frac{1}{12}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 3x + 10$ и построить ее график.

*Решение.* Исследование предусматривает нахождение точек экстремума, интервалов возрастания и убывания, выпуклости и вогнутости, а также точек перегиба графика заданной функции. Далее по результатам проведенного исследования необходимо построить график.

Опираясь на выше указанную схему, находим:

1. $D_f : x \in (-\infty; +\infty)$.

2. Функция $y = f(x)$ называется четной, если $f(-x) = f(x)$, нечетной, если $f(-x) = -f(x)$. В нашем случае,

$$f(-x) = \frac{1}{12}(-x)^3 - \frac{1}{2}(-x)^2 - 3(-x) + 10 =$$

$= -\frac{1}{12}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 3x + 10$ – ни четная, ни нечетная, или иначе, функция общего вида.

3. Для исследования функции на монотонность и экстремум, необходимо найти первую производную $y'$, приравнять ее к нулю и найти критические точки I рода.

$$y' = \frac{1}{4}x^2 - x - 3; \ \frac{1}{4}x^2 - x - 3 = 0 \Rightarrow x^2 - 4x - 12 = 0.$$

Корни этого уравнения: $x_{1,2} = -2; 6$ – критические точки I рода. Точки –2 и 6 разбивают числовую ось на три интервала: $(-\infty; -2)$, $(-2; 6)$, $(6; +\infty)$ (рис. 5. 3).

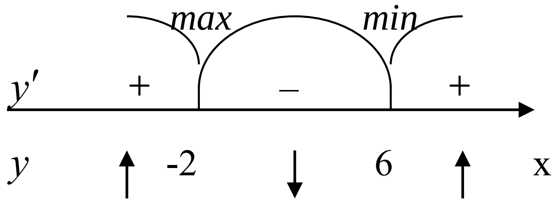


Рис. 5. 3

На интервалах $(-\infty; -2) \cup (6; +\infty)$ $y' > 0$, поэтому (по достаточному признаку возрастания (убывания) функции) на данных интервалах функция возрастает, а на промежутке $(-2; 6)$ $y' < 0$, следовательно, на нем функция убывает. Так как при переходе через критическую точку $x_0 = -2$ производная $y'$ меняет знак с «+» на «–», то (по I достаточному признаку существования экстремума) в точке $x_0 = -2$ функция имеет максимум – $y_{max}$, а точка –2 является точкой максимума, т.е. $x_{max} = -2$,

$$y_{max} = f(x_{max}) = f(-2) = -\frac{8}{12} - 2 + 10 = 13\frac{1}{3}.$$

При переходе через критическую точку $x_0 = 6$ производная $y'$ меняет знак с «–» на «+», следовательно, в точке $x_0 = 6$ функция имеет минимум – $y_{min}$, а точка 6 является точкой минимума, т.е. $x_{min} = 6$, тогда

$$y_{min} = f(x_{min}) = f(6) = 18 - 18 - 18 + 10 = -8.$$

Итак, $A(-2; 13\frac{1}{3})$ – точка максимума, $B(6; -8)$ – точка минимума графика функции.

4. Чтобы найти интервалы выпуклости, вогнутости и точки перегиба графика данной функции, необходимо найти вторую производную $y''$, приравнять ее к нулю, найти критические точки II рода и исследовать знак $y''$ слева и справа от критических точек.

Итак,

$$y'' = \frac{1}{2}x - 1; \ \frac{1}{2}x - 1 = 0 \Rightarrow x = 2.$$

Точка $x_0 = 2$ является критической точкой II рода. Отметим ее на числовой оси (рис. 5.4).

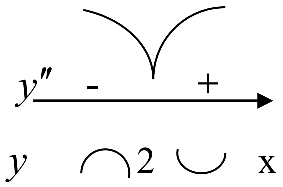


Рис. 5. 4

На интервале $(-\infty; 2)$ $y''<0$, а на $(2;+\infty)$ $y''>0$, следовательно, (по достаточному признаку выпуклости (вогнутости) кривой) на правом интервале кривая выпукла, на левом – вогнута. Производная $y''$ при переходе через $x_0=2$ меняет знак, тогда (по достаточному признаку существования точки перегиба) точка М$\left(2; 2\frac{2}{3}\right)$ является точкой перегиба, где $f(2)=\frac{8}{12}-2-6+10=2\frac{2}{3}$.

5. Необходимо найти дополнительные точки графика данной функции:

$f(0)=10$,

$f(-4)=\frac{1}{12}\cdot(-4)^3-\frac{1}{2}\cdot 16+3\cdot 4+10\approx 8{,}6$,

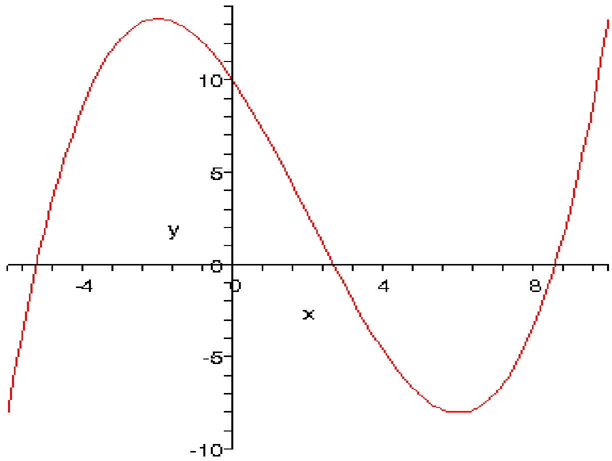


Рис.5. 5

$$f(8)=\frac{1}{12}\cdot 8^3-\frac{1}{2}\cdot 32+3\cdot 8+10\approx -3{,}3.$$

6. Построим график данной функции (рис. 5. 5).

### 5.4. Экономические приложения

Для исследования экономических процессов и решения других прикладных задач часто используется понятие эластичности функции.

**Определение 5.6.** *Эластичностью функции* $E_x(y)$ называется предел отношения относительного приращения функции y к относительному приращению переменной x при $\Delta x \to 0$:

$$E_x(y)=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta y}{y}:\frac{\Delta x}{x}\right)=\frac{x}{y}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{x}{y}\cdot y'. \qquad (5.5)$$

Эластичность функции показывает приближенно, на сколько процентов изменится функция *y* при изменении независимой переменной *x* на 1%.

**Пример 5.7.** Опытным путем установлены функции спроса $g=\dfrac{p+8}{p+2}$ и

предложения $s = p + 0.5$, где $g$ и s- количество товара, соответственно покупаемого и предлагаемого на продажу в единицу времени, р - цена товара. Найти: а) равновесную цену, т.е. цену, при которой спрос и предложение уравновешиваются; б) эластичность спроса и предложения для этой цены;
в) изменение дохода при увеличении цены на 5% от равновесной.

*Решение*: а) Равновесная цена определяется из условия $g = s$

$\frac{p+8}{p+2} = p + 0.5$, откуда р = 2, т.е. равновесная цена равна 2 ден. ед.

б) Найдем эластичности по спросу и предложению:

$$E_p(g) = -\frac{6p}{(p+2)(p+8)}: \quad E_p(s) = \frac{2p}{2p+1}$$

Для равновесной цены р= 2 имеем $E_{p=2}(g) = -0.3; \quad E_{p=2}(s) = 0.8$

Так как полученные значения эластичностей по абсолютной величине меньше 1, то и спрос и предложение данного товара при равновесной (рыночной) цене неэластичны относительно цены. Это означает, что изменение цены не приведет к резкому изменению спроса и предложения. Так, при увеличении цены р на 1% спрос уменьшается на 0,3%, а предложение увеличивается на 0,8%.

в) При увеличении цены р на 5% от равновесной спрос уменьшается на $5 \cdot 0{,}3 = 1{,}5\%$ следовательно, доход возрастает на 3,5%

**Пример 5.8.** Функция совокупных издержек C(q) описывает зависимость общих издержек фирмы от объема произведенной продукции (q). Для заданной функции C(q) найти предельные издержки фирмы следующих объемах выпуска продукции:

а) 5 ед., б) 10 ед., в) 15 ед, г) 20 ед.

Дайте экономическую интерпретацию полученным результатам.

*Решение:*

$$C(g)=\frac{1}{2}g^3+2g^2-4g-8\Rightarrow$$

$$C'(g)=\frac{3}{2}g^2+4g-4\Rightarrow \qquad C'(15)=393.5 \qquad C'(20)=676$$

$$C'(5)=\frac{3}{2}\cdot 25+4\cdot 5-4=53.5$$

$$C'(10)=186.$$

Полученные расчеты показывают, что с ростом объема производимой продукции предельные издержки возрастают.

**Пример 5.9.** Для данной функции y = f(x) найти:

а) мгновенный прирост;

б) мгновенный темп прироста;

в) точечную эластичность.

Вычислить эти показатели в указанных точках

$$y=3x^{\frac{3}{2}},\, x_0=2,\, x_1=4.$$

*Решение:*

а) мгновенный прирост равен: $y'=\frac{9}{2}x^{\frac{1}{2}}\Rightarrow y'(2)=\frac{9}{2}\cdot 2^{\frac{1}{2}}\approx 6.364$

$$y'(4)=\frac{9}{2}\cdot 4^{\frac{1}{2}}=9$$

б) мгновенный темп прироста определяется:

$$\frac{y'}{y}=\frac{\frac{9}{2}x^{\frac{1}{2}}}{3x^{\frac{3}{2}}}=\frac{3}{2x}, \qquad \left.\frac{y'}{y}\right|_{x_0=2}=\frac{3}{4}$$

$$\left.\frac{y'}{y}\right|_{x_1=4}=\frac{3}{8}$$

в) $E_x(y)$ (точечная эластичность) $= x\cdot\frac{y'}{y} \Rightarrow$

$$E_x(y) = x \cdot \frac{\frac{9}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}}}{3x^{\frac{1}{2}}} = \frac{3}{2}; E_x(2) = \frac{3}{2}; E_x(4) = \frac{3}{2}.$$

## Раздел 6. Интегральное исчисление функций одной переменной

### 6.1. Понятие первообразной и неопределенного интеграла

**Определение 6.1.** Функция $F(x)$ называется *первообразной* для функции $y = f(x)$ на интервале $X \in D_f$, если для каждой точки из этого интервала выполняется равенство:

$$F'(x) = f(x). \tag{6.1}$$

**Определение 6.2.** Совокупность всех первообразных функции $y = f(x)$ на промежутке $X \in D_f$ называется *неопределенным интегралом* от данной функции и обозначается:

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \tag{6.2}$$

где $\int$ – знак неопределенного интеграла;

$f(x)$ – подынтегральная функция;

$f(x)dx$ – подынтегральное выражение.

### 6.2. Основные свойства неопределенного интеграла

1. В неопределенном интеграле постоянный множитель можно выносить за знак интеграла:

$$\int k \cdot f(x)dx = k \cdot \int f(x)dx, \tag{6.3}$$

где $k = const$.

2. Неопределенный интеграл от алгебраической суммы нескольких функций равен алгебраической сумме неопределенных интегралов от каждой функции :

$$\int [f(x) \pm \varphi(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int \varphi(x)dx. \tag{6.4}$$

3. Дифференциал неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению:

$$d\left[\int f(x)dx\right]=f(x)dx. \qquad (6.5)$$

4. Неопределенный интеграл от дифференциала некоторой функции равен этой же функции с точностью до постоянной *C*:

$$\int d\left[f(x)\right]=f(x)+C. \qquad (6.6)$$

**Правило интегрирования**: если $F(x)$ – первообразная для функции $f(x)$, то $\frac{1}{a}\cdot F(ax+в)$ является первообразной для функции $f(ax+в)$, где $\frac{1}{a}$ - компенсирующий множитель.

Для справок приведем таблицу основных интегралов.

**Таблица основных интегралов**

1. $\int dx=x+C$, $\int dt=t+C$,

$\int du=u+C$, $\int dv=v+C$.

2. $\int 0dx=C$.

3. $\int x^n dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C,\ n\neq-1, n\in R.$

4. $\int \sqrt{x}dx=\frac{2x^{3/2}}{3}+C.$

5. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}}=2\sqrt{x}+C.$

6. $\int \frac{dx}{x^n}=\int x^{-n}dx=\frac{x^{-n+1}}{-n+1}+C=$

$=\frac{1}{(1-n)x^{-n+1}}+C,\ n\neq 1$

13. $\int cosxdx=sinx+C.$

7. $\int \sqrt[n]{x^m}dx=\int x^{\frac{m}{n}}dx=\frac{x^{\frac{m}{n}+1}}{\frac{m}{n}+1}+C,\ \frac{m}{n}\neq-1,$

$\frac{m}{n}\in R.$

8. $\int \frac{dx}{x}=ln|x|+C.$

9. $\int \frac{dx}{ax+в}=\frac{1}{a}ln|ax+в|+C.$

10. $\int e^x dx=e^x+C.$

11. $\int a^x dx=\frac{a^x}{lna}+C.$

12. $\int sinxdx=-cosx+C.$

14. $\int tgx dx = -ln|cosx| + C$.

15. $\int ctgx dx = ln|sinx| + C$.

16. $\int \dfrac{dx}{cos^2 x} = tgx + C$.

17. $\int \dfrac{dx}{sin^2 x} = -ctgx + C$.

18. $\int \dfrac{dx}{x^2 - a^2} = \dfrac{1}{2a} \cdot ln\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right| + C$.

19. $\int \dfrac{dx}{x^2 + a^2} = \dfrac{1}{a} \cdot arctg\dfrac{x}{a} + C = -\dfrac{1}{a} \cdot arcctg\dfrac{x}{a} + C$.

20. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a}} = ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a}\right| + C$.

21. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = arcsin\dfrac{x}{a} + C = -arccos\dfrac{x}{a} + C$.

## 6.3. Методы интегрирования в неопределенном интеграле

### 6.3.1. Непосредственное интегрирование

Интегрирование, основанное на применении таблицы основных интегралов, свойств неопределенного интеграла, а также простейших тождественных преобразований подынтегральной функции, принято называть *непосредственным интегрированием*.

**Пример 6.1.** Вычислить интегралы: а) $\int \left(4x^3 - \sqrt{x} + \dfrac{6}{x^2}\right)dx$; б) $\int \dfrac{dx}{25x^2 - 4}$;

в) $\int \left(\dfrac{1}{\sqrt{16 - 9x^2}} + \dfrac{5}{cos^2(6x-7)} - e^{-\frac{6}{7}x - 8}\right)dx$.

*Решение:* а) Вводя дробные и отрицательные показатели и применяя формулу интегрирования для степенной функции (1), а также св-во (2) неопределенного интеграла, получим:

$$\int \left(4x^3 - \sqrt{x} + \frac{6}{x^2}\right)dx = \int 4x^2 dx - \int \sqrt{x} dx + \int \frac{6}{x^2} dx =$$

$$=4\int x^2dx-\int\sqrt{x}dx+6\int x^{-2}dx=\frac{4x^3}{3}-\frac{2x^{3/2}}{3}+\frac{6x^{-1}}{-1}+C=\frac{4x^3}{3}-\frac{2x^{3/2}}{3}-\frac{6}{x}+C.$$

б) Преобразуем выражение в знаменателе, применив формулу (9) и, введенное выше, правило интегрирования:

$$\int\frac{dx}{25x^2-4}=\int\frac{dx}{(5x)^2-2^2}=\frac{1}{2\cdot 2}\cdot\frac{1}{5}ln\left|\frac{5x-2}{5x+2}\right|+C=\frac{1}{20}ln\left|\frac{5x-2}{5x+2}\right|+C,$$

где $\frac{1}{5}$ - компенсирующий множитель – это число, взаимно-обратное к коэффициенту при *x,* т.е. 5.

в) Применив к слагаемым подынтегральной функции формулы (12), (7) и (3) соответственно, получим:

$$\int\left(\frac{1}{\sqrt{16-9x^2}}+\frac{5}{cos^2(6x-7)}-e^{-\frac{6}{7}x-8}\right)dx=\int\frac{1}{\sqrt{16-9x^2}}dx+\int\frac{5}{cos^2(6x-7)}dx-$$

$$-\int e^{-\frac{6}{7}x-8}dx=\frac{1}{3}arcsin\frac{3x}{4}+\frac{5}{6}tg(6x-7)+\frac{7}{6}e^{-\frac{6}{7}x-8}+C.$$

### 6.3.2. Метод подстановки (замены переменной) в неопределенном интеграле

Если данный интеграл $\int f(x)dx$ не является табличным и не может быть найден методом непосредственного интегрирования, то введение новой переменной интегрирования позволяет свести данный интеграл к табличному.

Положим $x=\varphi(t)$, где $\varphi(t)$ непрерывная и дифференцируемая функция на некотором промежутке. Если на указанном промежутке изменения переменной *x* функция $f(x)$ интегрируема, то имеет место формула замены переменной в неопределенном интеграле:

$$\int f(x)dx=\int f[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t)dt. \qquad (6.7)$$

После того, как интеграл вычислен с помощью подстановки $x=\varphi(t)$, следует вернуться к старой переменой х.

Иногда вместо указанной подстановки применяют подстановку $t=\varphi(x)$.

Вычисление интегралов методом подстановки значительно упрощается, если пользоваться следующими формулами:

а) $$\int \frac{f'(x)dx}{f(x)} = \left\{\begin{array}{l} f(x)=t \\ f'(x)dx=dt \end{array}\right\} = \int \frac{dt}{t} = ln|t| + C = ln|f(x)| + C.$$

б)
$$\int [f(x)]^n \cdot f'(x)dx = \left\{\begin{array}{l} f(x)=t \\ f'(x)dx=dt \end{array}\right\} = \int t^n dt = \frac{t^{n+1}}{n+1} + C = \frac{f^{n+1}(x)}{n+1} + C,$$
$n \in R,\ n \neq -1.$

в) $$\int \frac{f'(x)dx}{[f(x)]^n} = \left\{\begin{array}{l} f(x)=t \\ f'(x)dx=dt \end{array}\right\} = \int \frac{dt}{t^n} = \frac{1}{(1-n)\cdot t^{n-1}} + C =$$
$$= \frac{1}{(1-n)\cdot [f(x)]^{n-1}} + C,\ n \in R,\ n \neq 1.$$

г) $$\int \frac{f'(x)dx}{\sqrt{f(x)}} = \left\{\begin{array}{l} f(x)=t \\ f'(x)dx=dt \end{array}\right\} = \int \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2\sqrt{t} + C = 2\sqrt{f(x)} + C.$$

д) $$\int e^{f(x)} \cdot f'(x)dx = \left\{\begin{array}{l} f(x)=t \\ f'(x)dx=dt \end{array}\right\} = \int e^t dt = e^t + C = e^{f(x)} + C.$$

е) $$\int a^{f(x)} \cdot f'(x)dx = \left\{\begin{array}{l} f(x)=t \\ f'(x)dx=dt \end{array}\right\} = \int a^t dt = \frac{a^t}{lna} + C = \frac{a^{f(x)}}{lna} + C.$$

**Пример 6.2.** Вычислить интегралы методом подстановки:

а) $\int \frac{dx}{5x+1}$; б) $\int e^{x^2+1} \cdot x dx$; в) $\int (tg2x+1)^3 \cdot \frac{dx}{cos2x}$; г) $\int \sqrt[5]{4x+7}dx$.

***Решение:***

а) *первый способ*:

$$\int\frac{dx}{5x+1}=\left\{\begin{matrix}5x+1=t\\5dx=dt\\dx=\dfrac{dt}{5}\end{matrix}\right\}=\int\frac{dt}{5t}=\frac{1}{5}\int\frac{dt}{t}=\frac{1}{5}\cdot ln|t|+C=\frac{1}{5}ln|5x+1|+C.$$

*второй способ*: применим формулу (в), в которой $f(x)=\dfrac{1}{5x+1}$; $F(x)=\dfrac{1}{5}ln|5x+1|$; $\dfrac{1}{5}$ – компенсирующий множитель. Итак, $\displaystyle\int\frac{dx}{5x+1}=\frac{1}{5}ln|5x+1|+C$.

б) $$\int e^{x^2+1}\cdot xdx=\left\{\begin{matrix}x^2+1=t\\2xdx=dt\\xdx=\dfrac{dt}{2}\end{matrix}\right\}=\int e^t dt=e^t+C=e^{x^2+1}+C.$$

в) Здесь также применим формулу (в), где $f(x)=tg2x+1;\ n=3$:

$$\int(tg2x+1)^3\cdot\frac{dx}{cos2x}=\frac{1}{2}\cdot\frac{(tg2x+1)^4}{4}+C=\frac{(tg2x+1)^3}{8}+C.$$

г) Аналогично, применяя формулу (в), где $f(x)=4x+7;\ n=\dfrac{1}{5}$:

$$\int\sqrt[5]{4x+7}dx=\int(4x+7)^{1/5}dx=\frac{1}{4}\cdot\frac{5(4x+7)^{6/5}}{6}+C=\frac{5(4x+7)^{6/5}}{24}+C.$$

### 6.3.3. Интегрирование выражений, содержащих квадратный трехчлен в знаменателе

Пусть даны интегралы четырех видов:

$$\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}\quad(1)\qquad\qquad\int\frac{(Mx+N)dx}{ax^2+bx+c}\quad(2)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} \quad (3) \qquad\qquad \int \frac{(Mx+N)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} \quad (4)$$

Рассмотрим схемы их интегрирования.

1) $\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$

В знаменателе выделим полный квадрат:

$ax^2+bx+c = a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right) = a\left[\left(x^2+2\cdot\frac{b}{2a}x+\frac{b^2}{4a^2}\right)-\frac{b^2}{4f^2}+\frac{c}{a}\right] =$ $a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]$.

Если $D = b^2-4ac < 0$, то данный интеграл сводится к табличному интегралу $\int \frac{du}{u^2+a^2} = \frac{1}{a}arctg\frac{u}{a}+c$.

Если $D > 0$, то данный интеграл сводится к табличному интегралу

$$\int \frac{du}{u^2-a^2} = \frac{1}{2a}ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right|+c.$$

Если $D = 0$, то данный интеграл сводится к табличному интегралу

$$\int \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{u}+c.$$

**Пример 6.3.** Найти интеграл $\int \frac{dx}{x^2+2x+5}$.

*Решение.* $x^2+2x+5 = (x^2+2\cdot 1\cdot x+1)-1+5 = (x+1)^2+4$.

$$\int \frac{dx}{x^2+2x+5} = \int \frac{dx}{(x+1)^2+2^2} = \int \frac{d(x+1)}{(x+1)^2+2^2} = \frac{1}{2}arctg\frac{x+1}{2}+c.$$

2) $\int \frac{(Mx+N)dx}{ax^2+bx+c}$

Если выражение $Mx+N$ является производной от знаменателя, то интеграл находится по формуле

$$\int \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{u}+c.$$

В противном случае в числителе нужно выделить производную знаменателя по формуле

$$\int \frac{(Mx+N)dx}{ax^2+bx+c} = \int \frac{\frac{M}{2a}(2ax+b)+\left(N-\frac{Mb}{2a}\right)}{ax^2+bx+c}\,dx =$$
$$= \frac{M}{2a}\int \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}$$
$$+\left(N-\frac{Mb}{2a}\right)\int \frac{dx}{ax^2+bx+c} = \frac{M}{2a}ln|ax^2+bx+c|$$
$$+\left(N-\frac{Mb}{2a}\right)\int \frac{dx}{ax^2+bx+c} \quad .$$

Вычисление последнего интеграла было рассмотрено выше.

**Пример 6.4.** Найти интеграл $\int \frac{(3x-2)dx}{3x^2-2x+7}$.

*Решение.* $\int \frac{(3x-2)dx}{3x^2-2x+7} = \int \frac{\frac{1}{2}(6x-2)-2+1}{3x^2-2x+7}dx = \frac{1}{2}\int \frac{6x-2}{3x^2-2x+7}dx - \int \frac{dx}{3x^2-2x+7} = \frac{1}{2}ln|3x^2-2x+7| - \int \frac{dx}{3x^2-2x+7} = \Big\{3x^2+2x+7 = 3\left(x^2-\frac{2}{3}x+\frac{7}{3}\right) = 3\left[\left(x^2-2\cdot\frac{1}{3}x+\frac{1}{9}\right)-\frac{1}{9}+\frac{7}{3}\right] = 3\left[\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{20}{9}\right]\Big\} = \frac{1}{2}ln|3x^2-2x+7| - \frac{1}{3}\int \frac{dx}{(x-\frac{1}{3})^2+\frac{20}{9}} = \frac{1}{2}ln|3x^2-2x+7| - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\frac{2}{3}\sqrt{5}}arctg\frac{x-\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}\sqrt{5}} + c = \frac{1}{2}ln|3x^2-2x+7| - \frac{1}{2\sqrt{5}}arctg\frac{x-1}{2\sqrt{5}} + c.$

3) $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$

После преобразования квадратного трехчлена (выделение полного квадрата) данный интеграл сводится к табличному

$\int \frac{du}{\sqrt{A^2-u^2}} = \arcsin\frac{u}{A} + c$, если $a<0$ и $\int \frac{du}{\sqrt{u^2\pm A^2}} + c$ , если $a<0$.

4) $\int \frac{(Mx+N)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$

Если выражение $Mx+N$ является производной от знаменателя, то интеграл находится по формуле
$$\int \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{u} + c.$$

Если числитель не является производной от покоренного выражения, то его следует преобразовать
$$\int \frac{(Mx+N)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \int \frac{\frac{M}{2a}(2ax+b)+(N-\frac{Mb}{2a})}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$$
$$= \frac{M}{2a}\int \frac{2ax+b}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$$
$$+\left(N-\frac{Mb}{2a}\right)\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} \, .$$

Последний интеграл рассмотрен выше.

**Пример 6.5.** Найти интеграл $\int \frac{(5x+3)dx}{\sqrt{x^2+4x+10}}$

*Решение.*

$\int \frac{(5x+3)dx}{\sqrt{x^2+4x+10}} = \int \frac{\frac{5}{2}(2ч+4)+3-\frac{20}{2}}{\sqrt{x^2+4x+10}}dx = \frac{5}{2}\int \frac{2x+4}{\sqrt{x^2+4x+10}}dx - 7\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+10}} = \frac{5}{2}\cdot 2\sqrt{x^2+4x+10} - 7\int \frac{dx}{\sqrt{(x+2)^2+6}} = 5\sqrt{x^2+4x+10} - 7ln\left|x+2+\sqrt{x^2+4x+10}\right| + c.$

## 6.3.4. Интегрирование рациональных дробей

### 6.3.4.1 Рациональные дроби

**Определение 6.6.** Дробной рациональной функцией или просто рациональной дробью называется функция равная частному от деления двух многочленов, т.е.

$R(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$, где $P_m(x)$ – многочлен степени $m$, $Q_n(x)$ – многочлен степени $n$.

Например, $R(x) = \frac{x^3+3x^2+x-1}{x^2-2x+5}$

Рациональная дробь называется правильной, если степень числителя меньше степени знаменателя. В противном случае дробь называется неправильной. Всякую неправильную рациональную дробь можно представить в виде суммы многочлена и правильной рациональной дроби, разделив числитель на знаменатель.

**Пример 6.7.** $R(x) = \frac{x^3+3x^2-x+1}{x^2-4x+5} = (x+7) + \frac{22x-34}{x^2-4x+5}$.

Итак, $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = L(x) + \frac{r(x)}{Q(x)}$, где $L(x)$ – многочлен, *r(x)* остаток, $\frac{r(x)}{Q(x)}$ – правильная рациональная дробь.

### 6.3.4.2 Интегрирование простейших (элементарных) рациональных дробей

К простейшим рациональным дробям относятся следующие дроби:

$\frac{A}{x-a}$ $(I)$ $\frac{A}{(x-a)^n}$ $(II)$ $\frac{Mx+N}{x^2+px+q}$ $(III)$, где $n$ =2,3,4,…, а квадратный трехчлен $x^2+px+q$ не имеет действительных корней.

Интегрирование элементарных дробей первых двух типов производится непосредственно:

1) $\int \frac{A}{x-a}dx = A\int \frac{d(x-a)}{x-a} = Aln|x-a| + c;$

2) $\int \frac{A}{(x-a)^n}dx =$

$A\int (x-a)^{-n}d(x-a) = A\frac{(x-a)^{-n+1}}{-n+1} + c = \frac{A}{(1-n)(x-a)^{n-1}} + c;$

3) $\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx.$

Вычисление данного интеграла было рассмотрено в предыдущей лекции.

### 6.3.4.3 Схема интегрирования рациональных дробей

Для интегрирования рациональных дробей последовательно выполняют три шага:

*Первый шаг.* Если дробь неправильная, выделяют целую часть, деля числитель на знаменатель. После этого рациональная дробь может быть записана в виде суммы многочлена и правильной остаточной дроби.

*Второй шаг.* Знаменатель правильной дроби разлагают множители (линейные и квадратичные).

*Третий шаг.* Правильную рациональную дробь разлагают на простейшие. Этим самым интегрирование правильной дроби сводят к интегрированию простейших дробей.

Рассмотрим три случая разложения дроби на простейшие.

***Случай, когда знаменатель разлагается на неповторяющиеся линейные множители*.**

Пусть дана дробь $\frac{P(x)}{Q(x)}$ – правильная. Знаменатель разлагается на линейные множители, т.е. $Q(x) = (x-a)(x-b)\dots(x-c)$.

В этом случае рациональную дробь можно разложить на сумму простейших следующим образом:

$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{x-b} + \dots + \frac{A_n}{x-c}$, где $A_1, A_2, \dots A_n$ - действительные числа, которые находят методом неопределенных коэффициентов. Из равенства видно, что линейным множителям соответствуют простейшие дроби первого типа. При этом число дробей равно числу линейных множителей.

**Пример 6.8**. Найти интеграл $\int \frac{5x^3+9x^2-22x-8}{x^3-4x}dx$.

*Решение.* 1) данная дробь неправильная, поделим числитель на знаменатель

$$\frac{5x^3+9x^2-22x-8}{x^3-4x}=5+\frac{9x^2-2x-8}{x^3-4x}.$$

2) Разложим знаменатель на множители

$$x^3-4x=x(x^2-4)=x(x-2)(x+2).$$

3) Остаточную правильную дробь разложим на простейшие дроби по формуле $\frac{9x^2-2x-8}{x^3-4x}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x+2}$.

Приведем правую часть к общему знаменателю и приравняем числители

$$\frac{9x^2-2x-8}{x^3-4x}=\frac{A(x-2)(x+2)+Bx(x+2)+Cx(x-2)}{x(x-2)(x+2)};$$

$$9x^2-2x-8= A(x-2)(x+2)+B2x-4A+B(x+2)+Cx(x-2);$$

$$9x^2-2x-8=Ax^2-4A+Bx^2+2Bx+Cx^2-2Cx.$$

Приравняв коэффициенты при одинаковых степенях $x$, получим систему линейных уравнений относительно неизвестных $A$, $B$,$C$:

$$\begin{cases}9=A+B+C\\-2=2B-2C\\-8=-4A\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=2\\B+C=7\\B-C=-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=2\\B=7-C\\7-C-C=-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=2\\B=7-C\\2C=8\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}A=2\\B=3\\C=4\end{cases}$$

Такой способ нахождения коэффициентов называется *способом сравнения коэффициентов*.

Часто бывает удобнее применять способ частных значений, при котором аргументу $x$ придают значения корней знаменателя.

В нашем случае, если $x=0,\quad -8=-4A,\quad A=2;$

если $x=2,\quad 24=8B,\quad B=3;$

если $x=-2,\quad 32=8C,\quad C=4.$

Таким образом, те же значения коэффициентов получены проще. Можно оба метода комбинировать.

Заменив остаточную дробь ее разложением на простейшие, получим

$$\int\frac{5x^3+9x^2-22x-8}{x^3-4x}dx=$$

$$=\int\left(5+\frac{2}{x}+\frac{3}{x-2}+\frac{4}{x+2}\right)dx$$

$$=5x+2ln|x|+3ln|x-2|+4ln|x+2|+C$$

***Случай, когда знаменатель разлагается на линейные множители, среди которых есть повторяющиеся***

Пусть знаменатель разлагается на множители

$Q(x) = (x-a) \dots (x-b)^k$, где *(x-a)* - простой множитель, $(x-b)^k$ – линейный множитель кратности $k$, т.е. встречается в разложении $k$ раз. Тогда $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B_1}{x-b} + \frac{B_2}{(x-b)^2} + \dots + \frac{B_k}{(x-b)^k}$, причем множителю *(x-b)* соответствует $k$ дробей.

**Пример 6.9.** Найти интеграл $\int \frac{3x+2}{x(x+1)^3} dx$.

*Решение.* $\frac{3x+2}{x(x+1)^3} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2} + \frac{D}{(x+1)^3}$;

$3x + 2 = A(x+1)^3 + Bx(x+1)^2 + Cx(x+1) + Dx.$

$$\begin{array}{lll} x = 0 & 2 = A & \\ x = -1 & -1 = D & \Rightarrow A = 2, B = -2, C = -2, D - 1 \\ x^3 & 0 = A + B & \\ x^2 & 0 = 3A + 2B + C & \end{array}$$

$\int \frac{3x+2}{x(x+1)^3} dx = \int \left(\frac{2}{x} - \frac{2}{x+1} - \frac{2}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x+1)^3}\right) dx = 2\ln|x| - 2\ln|x+1| - \frac{2}{x+1} - \frac{1}{2(x+1)^2} + C.$

***Случай, когда знаменатель разлагается на простые квадратичные и, возможно линейные множители***

Если $Q(x) = (x-a)(x^2 + px + q)(x^2 + p_1 x + q_1)$, тогда

$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{x-a} + \frac{Mx+N}{x^2+px+q} + \frac{M_1 x + N_1}{x^2 + p_1 x + q_1}$, *где* $A, M, N, M_{1,} N_1$ – коэффициенты.

**Пример 6.10.** Найти интеграл $\int \frac{2x^2-3x+1}{x^3+1} dx$.

*Решение.* $\frac{2x^2-3x+1}{x^3+1} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1}$;

$2x^2 - 3x + 1 = A(x^2 - x + 1) + (x+1)(Bx + C)$;

$$\begin{array}{ll} x = -1 & 6 = 3A \\ x^2 & 2 = A + B \Rightarrow A = 2, B = 0, C = -1. \\ x^0 & A + C \end{array}$$

$\int \left(\frac{2}{x+1} - \frac{1}{x^2-x+1}\right) dx = \int \frac{2}{x+1} dx - \int \frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} dx = 2\ln|x+1| - \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2(x-\frac{1}{2})}{\sqrt{3}} + C.$

## 6.4. Определенный интеграл

### 6.4.1. Понятие интегральной суммы и определенного интеграла

Пусть функция $f(x)$ определена на отрезке $[a,b]$ оси $Ox$. Разобьем произвольным образом отрезок $[a,b]$ на $n$ частей точками $x_0=a, x_1, x_2,\ldots,x_{n-1}, x_n=b$, где $x_0<x_1<x_2<\ldots<x_{n-1}<x_n$. Полученные в результате разбиения отрезки $[x_0, x_1]$, $[x_1,x_2]$,…,$[x_{n-1},x_n]$ назовем элементарными и обозначим их длины соответственно через $\Delta x_1 = x_1 - x_0, \Delta x_2 = x_2 - x_1, \ldots, \Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \ldots, \Delta x_n = x_n - x_{n-1}$.

В каждом из отрезков выберем произвольную точку $\xi_i$ и вычислим соответствующие значения функции $f(x)$ в этих точках, т.е. найдем $f(\xi_1), f(\xi_2), \ldots, f(\xi_n)$. Составим сумму попарных произведений найденных значений функций на длины соответствующих отрезков:

$$f(\xi_1)\cdot\Delta x_1, f(\xi_2)\cdot\Delta x_2, \ldots, f(\xi_n)\cdot\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\cdot\Delta x_i. \qquad (6.8)$$

Сумма (6.8) называется ***интегральной суммой*** для функции f(x) на отрезке $[a,b]$.

Интегральная сумма (6.8) зависит от способа разбиения данного отрезка $[a,b]$ на элементарные отрезки и от выбора точек $\xi_i$ на каждом из полученных элементарных отрезков. А это значит, что для данной функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ можно составить бесчисленное множество интегральных сумм.

Обозначим через $max\Delta x_i = \lambda$ наибольшую из длин элементарных отрезков $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_i, \ldots, \Delta x_n$.

Если интегральная сумма (6.8) при $\lambda \to 0$ имеет конечный предел, не зависящий от способа разбиения отрезка [a,b] на элементарные отрезки и от выбора точек $\xi_i$ на каждом из полученных элементарных отрезков, то этот предел называется ***определенным интегралом*** функции $f(x)$ на отрезке [a,b] и обозначается символом $\int_a^b f(x)dx$.

Итак, по определению имеем:

$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\cdot\Delta x_i$. (6.9)

В равенстве (6.9) числа $a$ и $b$ называются соответственно нижним и верхним пределами интегрирования, а отрезок $[a,b]$ - отрезком интегрирования; функция *f(x)* – подынтегральной функцией; *f(x)dx* – подынтегральным выражением; x – переменной интегрирования.

Функция *f(x)*, для которой на отрезке $[a,b]$ существует определенный интеграл, называется интегрируемой на этом отрезке.

### 6.4.2. Свойства определенного интеграла.

1. Значение определенного интеграла не зависит от обозначения переменной, т.е.
$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt.$$
2. При перестановке пределов интегрирования определенный интеграл меняет знак на противоположный, т.е.
$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$
3. Постоянный множитель можно выносить за знак определенного интеграла, т.е.
$$\int_a^b Af(x)dx = A\int_a^b f(x)dx.$$
4. Определенный интеграл от алгебраической суммы нескольких функций равен алгебраической сумме интегралов от каждой функции, т.е.
$$\int_a^b \big(f(x)+\varphi(x)-g(x)\big)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b \varphi(x)dx - \int_a^b g(x)dx\,.$$
5. Если отрезок интегрирования $[a,b]$ разделен точкой $c \in [a,b]$, то
$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$
6. Определенный интеграл от функции *f(x)*, непрерывной на отрезке $[a,b]$, равен произведению длины отрезка интегрирования на значение подынтегральной функции в некоторой точке $c \in [a,b]$, т. е.

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)\cdot f(c).$$

Свойство 6 называют теоремой о среднем значении. Число $f(c) = \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$ называют ***средним значением*** функции f(x) на отрезке $[a, b]$.

### 6.4.3. Формула Ньютона-Лейбница

Известно, что для всякой функции *f(x)*, непрерывной на отрезке $[a, b]$, существует на этом отрезке неопределенный интеграл $\int f(x)dx = F(x) + C$ , где $F(x)$ есть первообразная функция для функции *f(x)*.
Имеет место следующая ***теорема***: определенный интеграл от непрерывной функции *f(x)* на отрезке $[a, b]$ равен разности значений любой первообразной от этой функции, взятой при верхнем и нижнем пределах интегрирования, т.е.
$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$. (6.10)
Формула (5.3), выражает определенный интеграл от непрерывной функции через неопределенный и называется ***формулой Ньютона-Лейбница.***

### 6.4.4. Замена переменной в определенном интеграле

Пусть требуется вычислить определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$, где функция *f(x)* непрерывна на отрезке $[a, b]$. Предположим, что $x$ есть некоторая функция от переменной $t$, т.е. $x = \varphi(t)$ и выполняются следующие условия:

1) Функция $\varphi(t)$ определена и непрерывна на отрезке $[\alpha, \beta]$ и имеет на этом отрезке непрерывную производную $\varphi'(t)$;
2) Значение функции $x = \varphi(t)$ при изменении переменной t от α до β не выходят за пределы отрезка $[a, b]$ ;
3) $\varphi(\alpha) = a$ и $\varphi(\beta) = b$.

Тогда справедлива формула замены переменной в определенном интеграле

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt.$$

**Пример 6.11.** Вычислить $\int_0^2 \sqrt{4-x^2}dx$ .

*Решение*. Пусть $x = 2sint,$ тогда $dx = 2costdt$. Определим для новой переменной t пределы интегрирования. При *x*=0 получаем 0=2$sint$, откуда *t*=0 (нижний предел). При *x*=2 получим 2=2$sint$, откуда *t*= $\frac{\pi}{2}$ (верхний предел).

Следовательно,

$$\int_0^2 \sqrt{4-x^2}\,dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4-4sin^2t}2costdt =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4cos^2tdt = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+cos2t)dt = [2t+sin2t]_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi.$$

**Замечание 6.1.** При вычислении определенных интегралов способом подстановки нет необходимости возвращаться к старой переменной, как это требовалось для неопределенного интеграла.

Часто при вычислении определенного интеграла применяют подстановку *t=g(x).* В этом случае пределы для новой переменной *t* определяются непосредственно по формулам $\alpha = g(a), \beta = g(b)$.

**Пример 6.12.** Вычислить интеграл $\int_0^{ln2} \sqrt{e^x-1}dx$

*Решение.* Положим

$t = \sqrt{e^x-1}$, тогда $t^2 = e^x - 1;\ e^x = t^2+1;\ \ x = \ln(t^2+1),\ \ dx = \frac{2tdt}{t^2+1}$.

Определим новые пределы интегрирования. При *x=0* $t = \sqrt{e^0-1} = 0$ (нижний предел).

При $x = ln2, t = \sqrt{e^{ln2}-1} = 1$ (верхний предел).

Итак,

$\int_0^{ln2} \sqrt{e^x-1}d = \int_0^1 t\cdot\frac{2t}{t^2+1}dt == 2\int_0^1 \frac{t^2+1-1}{t^2+1}dt = [2(t-arctgt)]_0^1 = 2(1-arctg1) = 2(1-\frac{\pi}{4})$.

### 6.4.5. Формула интегрирования по частям в определенном интеграле

Если функции *u(x)* и *v(x)* непрерывны вместе со своими производными на отрезке $[a,b]$. То имеет место формула

$\int_a^b u\cdot dv = [u\cdot v]_a^b - \int_a^b v\cdot dx$, которая называется ***формулой интегрирования по частям*** для определенного интеграла.

**Пример 6.9.** Вычислить интеграл $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cdot sinxdx$.

*Решение.* Положим $u = x, dv = sinxdx,$ тогда $du = dx, v = -cosx$.

Применяя формулу интегрирования по частям, будем иметь

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cdot sinxdx = [-1-cosx]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} cosxdx = 0 + [sinx]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1.$$

### 6.4.6. Вычисление площадей плоских фигур

Площадь криволинейной трапеции, ограниченной сверху графиком функции $y=f(x)$, слева и справа – соответственно прямыми $x=a$, $x=b$, снизу – осью $Ox$, вычисляется по формуле

$$S=\int_a^b f(x)dx. \qquad (6.11)$$

Формула (6.11) применима только в том случае, если криволинейная трапеция расположена над осью $Ox$, т.е. когда $f(x)\geq 0$ на отрезке $[a,b]$. Если же криволинейная трапеция расположена ниже оси $Ox$, т.е. $f(x)\leq 0$ на отрезке $[a,b]$, то площадь ее равна модулю интеграла (5.4), т.е. в этом случае

$$S=\left|\int_a^b f(x)dx\right|. \qquad (6.12)$$

Площадь криволинейной трапеции, ограниченной сверху непрерывной кривой $y=f(x)$, снизу – непрерывной кривой $y=g(x)$, слева и справа – соответственно прямыми $x=a$, $x=b$, определяется формулой

$$S=\int_a^b [f(x)-g(x)]dx \qquad (6.13)$$

## Раздел 7. Функция двух переменных.

### 7.1. Понятие функции двух переменных, область определения

До сих пор нами рассматривалась простейшая функциональная модель, в которой функция зависит от единственного аргумента. Но при изучении различных явлений окружающего мира мы часто сталкиваемся с одновременным изменением более чем двух величин, и многие процессы можно эффективно формализовать функцией нескольких переменных $u=f(x_1,x_{2,}\dots,x_n)$, где $x_1,x_2,\dots,x_n$ – независимые переменные или аргументы. Рассмотрим наиболее распространенную на практике функцию двух переменных $z=f(x,y)$.

**Определение 7.1.** Функцией двух переменных называется закон, по которому каждой паре значений независимых переменных $(x,y)$

(аргументов) из области определения соответствует значение зависимой переменной $z$ (функции).

Данную функцию обозначают следующим образом: или $z=z(x,y)$, или же другой стандартной буквой: $u=f(x,y)$ или $u=u(x,y)$. В неявном виде функция двух переменных задается уравнением $F(x,y,z)=0$.

Поскольку упорядоченная пара значений $(x,y)$ определяет точку на плоскости $xOy$, то функцию также записывают как $z=f(M)$, где $M(x,y)$ – точка плоскости $xOy$, с координатами $x,y$. Такое обозначение широко используется в некоторых практических заданиях.

Примером функции двух переменных может служить площадь прямоугольника со сторонами $x$ и $y$, т.е. $z=xy$ . Если $x=a$, $y=b$, то $z=f(a,b)$ называется частным значением функции z при этих значениях аргументов.

**Определение 7.2.** Областью определения функции двух переменных называется совокупность всех точек плоскости $xOy$, в которых $z$ принимает действительные значения.

Для функции $z=f(x,y)$ областью определения может служить либо вся плоскость $xOy$, либо некоторая ее часть, ограниченная одной или несколькими непрерывными линиями. Эти линии называют *границами* области. Область называют *замкнутой*, если она содержит все точки границы области.

## 7.2. Способы задания функции двух переменных

Как и в случае функции одной переменной, способы задания функции двух переменных могут быть различными.

Функция может быть задана с помощью таблицы с двойным входом.

Например:

| $y$ \ $x$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 100 | 81 | 63 | 45 | 28 |
| 1 | 100 | 83 | 65 | 48 | 32 |
| 2 | 100 | 84 | 68 | 51 | 35 |
| 3 | 100 | 84 | 39 | 54 | 39 |
| 4 | 100 | 85 | 70 | 56 | 42 |

Значение $z$ находится на пересечении строки и столбца, содержащие нужные значения, например $z$=(3,2)=51.

Важнейший способ задания – аналитический, когда функция задается с помощью формулы. Например, $z = \frac{2xy}{x^2+y^2}$, $z = \frac{x^2+3y^2}{x-y}$.

В первом случае функция определена всегда, во втором - на всей плоскости, за исключением прямой $x$-$y$=0.

## 7.3. Частные производные, полный дифференциал функции двух переменных

Рассмотрим функцию двух переменных $z=f(x,y)$. Зафиксируем значение одного из ее аргументов, например $y$, т.е. пусть $y = y_0$. Тогда функция $f(x, y_0)$ есть функция одной переменной $x$. Пусть она имеет производную в точке $x_0$:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x, y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}.$$

Эта производная называется частной производной первого порядка или просто частной производной функции $z=f(x,y)$ по переменной $x$ в точке и обозначается символом $f'_x(x_0, y_0)$ или $\frac{\partial z}{\partial x}$.

Разность $f(x_0+\Delta x, y_0)-f(x_0,y_0)$ называется частным приращением по переменной $x$ функции $z=f(x,y)$ в точке $P_0(x_0, y_0)$ и обозначается символом $\Delta_x z$, т.е. $\Delta_x z$ = $(x_0+\Delta x, y_0)-f(x_0,y_0)$

Учитывая эти обозначения можно записать $f'_x(x_0, y_0)$=$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x}$.

Аналогично определяется частное приращение функции $z=f(x,y)$ по переменной $y$ и частное и частная производная по $y$ в точке $P_0(x_0, y_0)$:

$\Delta_y z$= $f(x_0, y_0+\Delta y\,)-f(x_0,y_0)$,

$f'_y(x_0, y_0)$=$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta_y z}{\Delta y}$.

Таким образом, частная производная функции двух переменных по одному из ее аргументов равна пределу отношения частного приращения к вызвавшему его приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю.

Значение частной производной зависит от точки *P(x,y)*, в которой она вычисляется. Поэтому частная производная функции двух переменных также является функцией двух переменных $x$ и $y$ и обозначается следующим образом:

$$f'_x(x,y),\ f'_y(x,y),\ z'_x,\ z'_y,\ \frac{\partial z}{\partial x},\ \frac{\partial z}{\partial y}.$$

**Замечание 7.1.** Выражение $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ нельзя рассматривать как дроби. Эти выражения являются символом, обозначающими частные производные.

## 7.4. Частные производные высших порядков

Частные производные функций нескольких переменных являются функциями тех же переменных. Эти функции могут иметь частные производные, которые называются частными производными второго порядка или вторыми частными производными.

Функция двух переменных имеет четыре частные производные второго порядка:

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)}{\partial x}=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2};\ \frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)}{\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y};\ \frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)}{\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2};\ \frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)}{\partial x}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}.$$

Аналогично определяются и обозначаются частные производные третьего и более высокого порядка.

**Определение 7.3.** Частной производной n – ого порядка функции двух переменных называется частная производная первого порядка от производной (n -1)– ого порядка той же функции.

Например, частная производная третьего порядка $\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}$ есть производная первого порядка по $y$ от частной производной $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$, т.е.

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = \frac{\partial\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)}{\partial y}.$$

**Определение 7.4.** Частная производная второго и более высокого порядка, взятая по нескольким различным переменным, называется смешанной частной производной.

Например, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}, \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}$.

**Пример 7.1.** Для функции $z= x^2y^3$ найти частные производные второго порядка.

*Решение.* При нахождении производной по $x$, переменную $y$ считаем постоянной величиной, а при нахождении производной по $y$, переменную $x$ считаем постоянной величиной:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy^3;\ \frac{\partial z}{\partial y} = x^2 3y^2 = 3x^2y^2;\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)}{\partial x} = 2y^3;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)}{\partial y} = 2x3y^2 = 6xy^2;\ \ \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)}{\partial x} = 3y^2 2x = 6xy^2;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)}{\partial y} = 3x^2 2y = 6x^2y.$$

Смешанные производные данной функции равны, хотя и отличаются порядком дифференцирования. Можно доказать, что две смешанные частные производные одно и той же функции, отличающиеся лишь порядком дифференцирования равны между собой. В частности для функции двух переменных $z=f(x,y)$ справедливо равенство: $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

## 7.5. Экстремум функции двух переменных

### 7.5.1. Необходимые и достаточные условия существования экстремума

Понятие максимума и минимума для функции двух переменных вводится так же, как и для функции одной переменной.

**Определение 7.5.** Функция $z=f(x,y)$ имеет максимум (минимум) в точке $P(x_0, y_0)$, если существует такая окрестность этой точки, в которой имеет место равенство:

$$f(x_0, y_0) > f(x, y) \quad [f(x_0, y_0) < f(x, y)] \qquad (7.1)$$

Точки максимума и минимума называют точками экстремума, а значения функции в этих точках называют экстремальными.

Сформулируем необходимые условия существования экстремума:

Если дифференцируемая функция $z=f(x,y)$ имеет экстремум в точке $P_0(x_0, y_0)$, то ее частные производные в этой точке равны нулю, т.е.

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{P_0} = 0 \text{ и } \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{P_0} = 0,$$

при условии, что они существую в точке $P_0(x_0, y_0)$. Заметим, что функция может иметь экстремум также в тех точках, где хотя бы одна из частных производных не существует.

**Определение 7.6.** Точки, в которых частные производные $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ и $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ равны нулю или не существуют, называются критическими точками.

Не все критические точки являются точками экстремума.

Сформулируем достаточные условия существования экстремума:

Пусть $P_0(x_0, y_0)$ – критическая точка функции $z=f(x,y)$, имеющей непрерывные частные производные первого и второго порядков в этой точке. Значения производных обозначим следующим образом:

$$\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)_{P_0} = A\,, \ \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)_{P_0} = B, \quad \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)_{P_0} = C$$

Составим определитель $\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2$.

1) Если $\Delta < 0$, то в точке $P_0(x_0, y_0)$ нет экстремума.
2) Если $\Delta > 0$, $A<0$, то в точке $P_0(x_0, y_0)$ функция имеет максимум.
3) Если $\Delta > 0$, $A>0$, то в точке $P_0(x_0, y_0)$ функция имеет минимум.
4) Если $\Delta = 0$, то требуются дополнительные исследования. В этом случае используют неравенства (7.1).

**Пример 7.2**. Исследовать на экстремум функцию.

$$z = -4 + 6x - x^2 - xy - y^2.$$

*Решение*: Чтобы исследовать данную дважды дифференцируемую функцию *z =f(x, y)* на экстремум, необходимо:

1. Найти частные производные первого порядка $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, приравнять их к нулю и решить систему уравнений $\frac{\partial z}{\partial x} = 0; \frac{\partial z}{\partial y} = 0$

2. Найти частные производные второго порядка $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}; \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}; \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ и вычислить их значения в каждой стационарной точке

Положим, что $A = \left[\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right]_{P_0}; B = \left[\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right]_{P_0}; C = \left[\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right]_{P_0}$.

3. Составить и вычислить определитель второго порядка

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2$$

Находим стационарные точки заданной функции:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 6 - 2x - y; \frac{\partial z}{\partial y} = -x - 2y.$$

Решение системы $\begin{cases} 6 - 2x - y = 0 \\ -x - 2y = 0 \end{cases}$ дает $x_0 = 4, y_0 = -2$.

Следовательно, данная функция имеет только одну стационарную точку $Po(4;-2)$.

Находим частные производные второго порядка и их значения в найденной стационарной точке:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -2; \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -1; \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -2$$

Как видно, частные производные второго порядка не содержат x, они постоянны в любой точке и, в частности, в точке *Ро*(4;-2). Имеем *А* = -2, *В* = -1 и *С* = -2.

$$\Delta = \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3 > 0$$

Так как $\Delta > 0$ и А<0, то в точке *Ро*(4;-2) данная функция имеет максимум:

$$z_{\max} = z(4;2) = -4 + 2 - 16 + 8 - 4 = 8.$$

# Раздел 8. Дифференциальные уравнения

## 8.1. Общие сведения

Дифференциальные уравнения занимают особое место в математике и имеют многочисленные приложения. Многочисленные задачи естествознания, техники, механики, биологии, медицины, экономики и других отраслей знаний сводятся к тому, что по заданным свойствам некоторого процесса или явления необходимо найти математическую модель самого процесса в виде формулы, т.е. в виде функциональной зависимости.

При изучении таких задач используется уравнение, связывающее независимую переменную, искомую функцию и ее производные. Такое уравнение называют *дифференциальным*. Если искомая функция зависит от одной переменной, то дифференциальное уравнение называется обыкновенным. В общем виде оно имеет вид:

$$F\left(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}\right) = 0.$$

Например, $y'+2y=0$, $y'' + y'cosx = lnx$, $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + xy\frac{dy}{dx} + y^2 = 0$.

При изучении интегрирования было рассмотрено простейшее дифференциальное уравнение, когда по заданной производной находилась первообразная функция. Действительно, если $y = F(x)$ есть первообразная для функции $f(x)$, то по определению первообразной $y'=f(x)$.

Дифференциальные уравнения могут содержать первую, вторую и производные более высокого порядка.

**Определение 8.1.** Порядком дифференциального уравнения называется порядок наивысшей производной, входящей в уравнении.

Например, $y'+2xy^2+5=0$- уравнение первого порядка, $y'' + 5xy' + 6y = 0$ – уравнение второго порядка, $y^{IV} + y''lnx = 1$ – уравнение четвертого порядка.

**Определение 8.2.** Решением дифференциального уравнения называется всякая функция $y = \varphi(x)$, которая при подстановке в уравнение обращает его в тождество.

Например, Функция $y=sinx$ является решением уравнения

$y' + yctgx - 2cosx = 0, y' = cosx,\ \ cosx + sinx \cdot \frac{cosx}{sinx}$-$2cosx=0$,

$2cosx$-$2cosx=0$, 0=0.

## 8.2 Дифференциальные уравнения первого порядка

**Определение 8.3.** Уравнение вида $F(x, y,y') = 0$, где x – независимая переменная, y – неизвестная функция, $y'$ – ее производная, называется дифференциальным уравнением первого порядка.

В случае, когда из уравнения можно выразить $y'$,оно имеет вид

$y' = f(x, y)$     (8.1)

Уравнение (8.1) называется уравнением первого порядка, разрешенным относительно производной.

Для уравнения (8.1) справедлива теорема Коши о существовании и единственности решения:

Если в уравнении $y' = f(x, y)$ функция $f(x, y)$ и ее частная производная по $y$ определены и непрерывны в некоторой области $D$ на плоскости $xOy$, содержащей некоторую точку $(x_0,y_0)$, то существует единственное решение этого уравнения $y = \varphi(x)$, удовлетворяющее условию $y=y_0$ при $x=x_0$ , т.е.

Условия, которые задают значение функции $y_0$ в фиксированной точке $x_0$, называют начальными условиями и записывают. Геометрический смысл теоремы заключается в том, что существует и притом единственная функция $= \varphi(x)$, график которой проходит через точку $(x_0,y_0)$.

**Определение 8.4.** Функция зависящая и от аргумента $x$ и постоянной $c$, называется общим решением уравнения (8.1), если она удовлетворяет условиям:

1) При любых с функция $y = \varphi(x, \text{c})$ является решением уравнения (8.1);
2) Каково бы ни было начальное условие $y(x_0)=y_0$, можно найти такое значение $c=c_0$, что функция $y = \varphi(x, \text{c}_0)$ удовлетворяет данному начальному условию.

Значение $c=c_0$ можно найти из условия $y_0 = \varphi(x_0, c_0)$.

Если общее решение найдено в виде, не разрешенном относительно у, т.е. в виде $\Phi(x, y, c) = 0$, то она называется *общим интегралом*.

**Определение 8.5.** Частным решением называется любая функция $y = \varphi(x, \text{c}_0)$, которая получается из общего решения $y = \varphi(x, \text{c})$, если в последнем постоянной с придать определенное значение $c=c_0$.

Соотношение $\Phi(x, y, \text{c}_0) = 0$ называется в этом случае *частным интегралом.*

С геометрической точки зрения общий интеграл – это семейство кривых на координатной плоскости, зависящее от одной произвольной постоянной с. Эти кривые называют *интегральными кривыми* данного уравнения. Частному интегралу соответствует одна кривая этого семейства, проходящая через точку $(x_0, y_0)$.

Итак, решить или проинтегрировать уравнение, значит:

1) Найти общее решение или общий интеграл;
2) Найти частное решение, которое удовлетворяет заданным начальным условиям (если таковые имеются).

### 8.2.1 Уравнения с разделяющимися переменными

**Определение 8.6.** Дифференциальное уравнение вида $y' = f(x)\varphi(y)$ (8.2), где *f(x)* и $\varphi(x)$ непрерывные функции, называется уравнением с разделяющимися переменными.

Правая часть есть произведение функции, зависящей только от $x$, на функцию, зависящую только от $y$.

Метод решения такого вида уравнений носит название *разделения переменных*.

Запишем $y'$ в ее эквивалентной форме как отношение дифференциала функции к дифференциалу независимой переменной $y' = \frac{dy}{dx}$.

$\frac{dy}{dx} = f(x)\varphi(y)$. Умножим обе части равенства на $dx$, получим $dy = f(x)\varphi(y)dx$. Поделим обе части последнего равенства на функцию $\varphi(y) \neq 0$, получим $\frac{dy}{\varphi(y)} = f(x)dx$.

В последнем уравнении переменная у входит в левую часть, х – только в правую, т.е. разделены переменные. При этом два дифференциала равны друг другу, только в правой части дифференциал выражен через переменную х. а в левой части - через функцию у. Следовательно, их неопределенные интегралы различаются на постоянную величину, т.е.

$\int \frac{dy}{\varphi(y)} = \int f(x)dx + c$, где с – const.

**Пример 8.1.** Найти общее решение уравнения $xy' + y = 0$

*Решение.* Поделим обе части уравнения на х, получим $y' = -\frac{y}{x}$,

$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x},\ dy = -\frac{y}{x}dx,\ \frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}, \int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{x},\ lny = -lnx + lnc.$

Постоянную интегрирования для удобства преобразования записали в виде $lnc$. Применяя свойства логарифмов, получим

$$lny = ln\frac{c}{x}, \qquad y = \frac{c}{x}.$$

*Замечание.* Уравнения вида $f_1(x)\varphi_1(y) + f_2(x)\varphi_2(y)y' = 0$ и

$f_1(x)\varphi_1(y)dx + f_2(x)\varphi_2(y)dy = 0$ также являются уравнениями с разделяющимися переменными, которые можно решить, разделив обе части на произведение $\varphi_1(y)f_2(x)$.

### 8.2.2 Линейные уравнения

**Определение 8.7.** Линейным уравнением первого порядка называется уравнение вида

$$y' + P(x)y = Q(x), \tag{8.3}$$

где *P(x)* и *Q(x)* – заданные функции от x или постоянные.

В частности, если *Q(x)*=0 уравнение $y' + P(x)y = 0$ называется *однородным линейным* уравнением.

Будем искать решение уравнения (8.3) в виде *y=u(x)v(x)* (8.4). Одну из функций можно взять произвольно, другую определим из уравнения (8.3).

Дифференцируем уравнение (8.4), получим:

$y' = uv' + vu'$ или $\frac{dy}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$, подставим в уравнение (8.3)

$$u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx} + P(x)uv = Q(x), \quad u\left(\frac{dv}{dx} + Pv\right) + v\frac{du}{dx} = Q(x).$$

1) Функцию $v$ найдем, приравняв выражение в скобках к нулю:

$$\frac{dv}{dx} + Pv = 0, \qquad dv = -Pvdx, \qquad \frac{dv}{v} = -Pdx,$$

$$\int \frac{dv}{v} = -\int Pdx, \ \ lnv = -\int Pdx, \ \ v = e^{-\int Pdx},$$

постоянную c можно взять равной нулю, т.к. функцию выбираем произвольно.

2) $v\frac{du}{dx} = Q,\ vdu = Qdx,\ du = \frac{Q}{v}dx,\ u = \int \frac{Q(x)}{v(x)}dx + c.$

Тогда $y = e^{-\int P(x)dx}\left[\int Q(x)e^{\int P(x)dx} + c\right].$

Некоторые нелинейные уравнения приводятся к линейным соответствующими заменами неизвестной функции *y(x)*. К таковым относится *уравнение Бернулли*

$y' + P(x)y = Q(x)y^n$ (8.5).

Разделим все члены уравнения (7.5) на $y^n$

$$\frac{y'}{y^n} + P(x)\frac{y}{y^n} = Q(x),\ \ y'y^{-n} + P(x)y^{1-n} = Q(x) \quad (8.6).$$

Сделаем замену переменной $z = y^{1-n}$, тогда $z' = (1-n)y^{1-n-1}y'$,

$$z' = (1-n)y^{-n}y', \qquad y^{-n}y' = \frac{z'}{1-n}.$$

Подставив в уравнение (6), получим $\frac{z'}{1-n} + P(x)z = (1-n)Q(x)$ или

$$z' + (1-n)P(x)z = (1-n)Q(x).$$

Найдя его общий интеграл и подставив вместо $z$ выражение $y^{1-n}$, получим общий интеграл уравнения Бернулли.

*Замечание.* Уравнение можно решить подстановкой *y=uv*

**Пример 8.2**. Проинтегрировать уравнение:

$(xy^2 + y^2)dx + (x^2 - x^2y)dy = 0$

*Решение*: преобразуем левую часть уравнения

$y^2(x+1)dx + x^2(1-y)dx = 0$

Разделим переменные, поделив на $y^2x^2$:

$\frac{x+1}{x^2}dx + \frac{1-y}{y^2}dy = 0$

Интегрируя, получим общий интеграл уравнения:

$\int \frac{x+1}{x^2}dx + \int \frac{1-y}{y^2}dy = C;$

$\int \frac{dx}{x} + \int \frac{dx}{x^2} + \int \frac{dy}{y^2} - \int \frac{dy}{y} = C;$

$1nx - \frac{1}{x} - \frac{1}{y} - 1ny = C \quad 1n\frac{x}{y} - \frac{x+y}{xy} = C.$

*Замечание*. Непосредственной проверкой можно убедиться, что x=0 и y=0 являются решениями данного дифференциального уравнения, однако, они не получаются из общего интеграла ни при каком значении С. Следовательно, в ходе решения были потеряны интегральные кривые x=0 и y=0 (оси координат). Эта потеря произошла в том месте, где мы разделили на произведение $x^2y^2$ равное нулю вдоль этих интегральных кривых.

**Пример 8.3**. Найти общее решение уравнения $y'$*-ytgx=2xsecx*.

*Решение*. Данное уравнение является линейным, так как оно содержит искомую функцию y и ее производную $y'$ в первой степени и не содержит их произведений.

Применяем подстановку $y = uv,$ где $u$ и $v-$некоторые неизвестные функции аргумента x. Если $y = uv,$ т $y = (uv)' = u'v + uv'$ и данное уравнение примет вид:

$u'v + uv' – uvtgx = 2x\sec x$

или

$$v(u' – utgx) + uv' = 2x\sec x \qquad (8.7)$$

Так как искомая функция y представлена в виде произведения двух других неизвестных функций, то одну из них можно выбрать произвольно. Выберем функцию u так чтобы выражение, стоящее в круглых скобках левой часть равенства (8.7), обращалось в нуль, т.е. выберем функцию u так, чтобы имело место равенство.

$$u' - utgx = 0. \qquad (8.8)$$

При таком выборе функции и уравнение (18) примет вид

$$uv' = 2x\sec x. \qquad (8.9)$$

Уравнение (8.8) есть уравнение с разделяющимися переменными относительно u и x. Решим это уравнение:

$$\frac{du}{dx} - utgx = 0; \quad \frac{du}{dx} = utgx; \quad \frac{du}{u} = tgxdx;$$

$$\int \frac{du}{u} = \int tgxdx; \quad 1nu = -1n\cos x, \quad u = \frac{1}{\cos x} = \sec x.$$

Чтобы равенство (8.8) имело место, достаточно найти одно какое-либо частное решение, удовлетворяющее этому уравнению. Поэтому для простоты при интегрировании этого уравнения находим то частное решение, которое соответствует значению произвольной постоянной С=0. Подставив в (8.9) найденное выражение для u, получим:

$$\sec x u' = 2x\sec x; \quad u' = 2x; \quad \frac{du}{dx} = 2x; \quad du = 2xdx.$$

Интегрируя, получаем $u = x^2 + c$. Тогда $y = \sec x(x^2 + c)$ - общее решение данного уравнения.

## 8.3 Дифференциальные уравнения второго порядка

**Определение 8.8.** Дифференциальным уравнением второго порядка называется уравнение вида $F(x, y, y', y'') = 0$, где x – независимая переменная, y – неизвестная функция, $y', y''$ – ее первая и вторая производные.

Рассмотрим уравнения, которые можно записать в виде, разрешенном относительно второй производной, т.е. $y'' = f(x, y, y')$ (8.10)

В частных случаях в уравнении могут отсутствовать $x, y, y'$, но обязательно содержится $y''$.

**Определение 8.9.** Функция $y = \varphi(x, c_1, c_2)$ называется общим решением уравнения (8.10), если она удовлетворяет условиям:

1) при любых значениях $c_1$ и $c_2$ функция $y = \varphi(x, c_1, c_2)$ является решением уравнения (8.10);

2) каковы бы ни были начальные условия $y(x_0) = y_0$ и $y'(x_0) = y_0'$ существуют единственные значения постоянных $c_1$ и $c_2$,такие что функция $y = \varphi(x, c_1, c_2)$ является решением уравнения (8.10) и удовлетворяет начальным условиям.

**Определение 8.10.** Всякая функция, получающаяся из общего решения при конкретных значениях постоянных $c_1$ и $c_2$, называется частным решением.

### 8.3.1. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Многие задачи математики, механики, электротехники и других наук сводятся к решению линейных уравнений.

**Определение 8.11.** Равнение вида $y'' + py' + qy = 0$ (8.11) ,
где $p$ и $q$- вещественные числа, называется линейным однородным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами.

Оно может иметь множество решений. Будем искать его в виде

$y = e^{kx}$, где k – некоторое число. Подставляя эту величину в уравнение (8.11), получаем уравнение $k^2e^{kx} + pke^{kx} + qe^{kx} = 0$.

Сокращая на $e^{kx}$, получаем квадратное уравнение относительно $k^2 + pk + q = 0$ относительно $k$, которое называется характеристическим уравнением для уравнения (8.11).

Вид общего решения зависит от корней характеристического уравнения, которые обозначают через $k_1$ и $k_2$.(Таблица 1)

Таблица 1

| Характер корней уравнения | Вид общего решения |
|---|---|
| Корни $k_1$ и $k_2$ - действительные и различные: $k_1 \neq k_2$, (D>0). | $y = C_1e^{k_1x} + C_2e^{k_2x}$ |

| | |
|---|---|
| Корни $k_1$ и $k_2$ - действительные и равные: $k_1 = k_2 = k$, (D=0). | $y = e^{kx}(C_1 + C_2 x)$ |
| Корни $k_1$ и $k_2$ - комплексные: $k_1 = \alpha + \beta i$, $k_2 = \alpha - \beta i$, (D<0). | $y = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$ |

**Пример 8.4.** Найти общее решение уравнения $y'' + 5y' + 6y = 0$.

*Решение:* Составляем характеристическое уравнение, соответствующее нашему уравнению $k^2 + 5k + 6 = 0$. Теореме Виета сумма корней равна -5, произведение равно 6. Следовательно, $k_1$= -2, $k_2$= -3, действительные и различные. Тогда общее решение уравнения запишется в виде

$$y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-3x}.$$

### 8.3.2. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

**Определение 8.12.** Уравнение вида

$$y'' + py' + qy = f(x), \qquad (8.12)$$

где $p$ и $q$ – некоторые числа, $f(x)$ – известная функция, называется линейным неоднородным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами.

Общее решение уравнения (8.12) будем находить в виде суммы общего решения соответствующего однородного уравнения $y'' + py' + qy = 0$ и частного решения неоднородного уравнения (8.12), т.е. в виде $y = y_0 + y_ч$. Решение $y_0$ находится по таблице 1. Вид частного решения зависит от правой части *f(x)* и находится ***методом подбора частного решения***. В этом случае частное решение находится без интегрирования, частные случаи указаны в таблице 2.

Таблица 2

| № | Вид правой части $f(x)$ уравнения (8.12) | Случаи | Вид частного решения $y_ч$ |
|---|---|---|---|

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | $f(x)=a$ | 1. $k_1 \neq k_2 \neq 0$<br>2. $k_1=0$ или $k_2=0$ | 1. $y_ч = A$<br>2. $y_ч = Ax$ |
| 2 | $f(x)=ax+b$ | 1. $k_1 \neq k_2 \neq 0$<br>2. $k_1=0$ или $k_2=0$ | 1. $y_ч = Ax+B$<br>2. $y_ч = (Ax+B)x$ |
| 3 | $f(x)=ax^2+bx+c$ | 1. $k_1 \neq k_2 \neq 0$<br>2. $k_1=0$ или $k_2=0$ | 1. $y_ч = Ax^2+Bx+C$<br>2. $y_ч = (Ax^2+Bx+C)x$ |
| 4 | $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ | 1. $k_1 \neq k_2 \neq 0$<br>2. $k_1=0$ или $k_2=0$ | 1. $y_ч = Ax^3+Bx^2+Cx+D$<br>2. $y_ч = (Ax^3+Bx^2+Cx+D)x$ |
| 5 | $f(x)=P_n(x)$, где $P_n(x)$ - многочлен степени $n$ | 1. $k_1 \neq k_2 \neq 0$<br>2. $k_1=0$ или $k_2=0$ | 1. $y_ч = Q_n(x)$<br>2. $y_ч = x\cdot Q_n(x)$ |
| 6 | $f(x)=ae^{\alpha x}$,<br>где $a$ и $\propto$ $-const$ | 1. $k_1 \neq k_2 \neq \alpha$<br>2. $k_1=\alpha$ или $k_2=\alpha$<br>3. $k_1=k_2=\alpha$ | 1. $y_ч = Ae^{\alpha x}$<br>2. $y_ч = Axe^{\alpha x}$<br>3. $y_ч = Ax^2e^{\alpha x}$ |
| 7 | $f(x)=P_n(x)e^{\alpha x}$,<br>где $a$ и $\propto$ $-const$ | 1. $k_1 \neq k_2 \neq \alpha$<br>2. $k_1=\alpha$ или $k_2=\alpha$<br>3. $k_1=k_2=\alpha$ | 1. $y_ч = Q_n(x)e^{\alpha x}$<br>2. $y_ч = xQ_n(x)e^{\alpha x}$<br>3. $y_ч = x^2Q_n(x)e^{\alpha x}$ |
| 8 | $f(x)=M\cos bx+N\sin bx$,<br>где $M$, $N$ и $b$ - заданные числа | 1. $k_{1,2} \neq \pm bi$<br>2. $k_{1,2} = \pm bi$ | 1. $y_ч = A\cos bx+B\sin bx$<br>2. $y_ч = x(A\cos bx+B\sin bx)$ |
| 9 | $f(x)=e^{ax}(M\cos bx+N\sin bx)$,<br>где $M$, $N$ и $b$ - заданные числа | 1. $k_{1,2} \neq a\pm bi$<br>2. $k_{1,2} = a\pm bi$ | 1. $y_ч = e^{ax}(A\cos bx+B\sin bx)$<br>2. $y_ч = xe^{ax}(A\cos bx+B\sin bx)$ |
| 10 | $f(x)=e^{ax}[P_1(x)\cos bx+P_2(x)\sin bx]$,<br>где $P_1(x)$ и $P_2(x)$ - многочлены | 1. $k_{1,2} \neq a\pm bi$<br>2. $k_{1,2} = a\pm bi$ | 1. $y_ч = e^{ax}[R_1(x)\cos bx+R_2(x)\sin bx]$<br>2. $y_ч = xe^{ax}[R_1(x)\cos bx+R_2(x)\sin bx]$ |

В таблице 2 $Q_n(x)$ - многочлен т ой же степени, что и многочлен

$P_n(x)$, но с неизвестными коэффициентами; $R_1(x)$ и $R_2(x)$ - многочлены с неизвестными коэффициентами степени, равной высшей из степеней многочленов $P_1(x)$ и $P_2(x)$), $A, B, C, D$ - неизвестные коэффициенты, которые находятся из системы линейных уравнений, получаемых после подстановки частного решения $y_ч$ в уравнение (8.12). Метод нахождения частного решения таким способом называется ***методом неопределенных коэффициентов***.

Реализацию этого метода рассмотрим на примере.

**Пример 8.5.** Найти частной решение уравнения $y'' + 4y = 4\sin 2x - 8\cos 2x,$ удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$.

*Решение:* Общее решение y данного уравнения равно сумме общего решения $y_o$ однородного уравнения и какого-либо частного решения $y_ч$ данного уравнения, т.е. $y = y_o + y_ч$.

Для нахождения $y_o$ составим характеристическое уравнение $k^2 + 4 = 0$, имеющее комплексные корни $k_1 = 2i$, $k_2 = -2i$. В этом случае общее решение однородного уравнения ищем в виде:

$$y_o = e^{\alpha x}\left(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x\right). \qquad (8.13)$$

где $\alpha \pm \beta i$ - комплексные корни характеристического уравнения. Подставив в (8.13) $\alpha = 0, \ \beta = 0$ имеем:

$$y_o = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x.$$

Для нахождения частного решения $y_ч$ неоднородного дифференциального уравнения воспользуемся следующей теоремой: *если правая часть неоднородного уравнения есть функция* $f(x) = e^{\alpha x}\left(A\cos \beta x + B\sin \beta x\right)$ *и числа* $\alpha \pm \beta i$ *не являются корнями характеристического уравнения, то существует частное решение* $y_ч = e^{\alpha x}\left(A\cos \beta x + B\sin \beta x\right)$. *Если же числа* $\alpha \pm \beta i$ *являются корнями* *характеристического уравнения, то существует частное решение* $y_ч = x \cdot e^{\alpha x}(A\cos\beta x + B\sin\beta x)$.

Применяя эту теорему при $\alpha = 0,\ \beta = 0$, имеем:

$$y_ч = x(A\cos 2x + B\sin 2x).$$

Дважды дифференцируя последнее равенство, находим $y_ч''$:

$y_ч'' = (4B - 4Ax)\cos 2x + (-4A - 4Bx)\sin 2x$.

Подставив в данное уравнение $y_ч$ и $y_ч''$, получим:

$$4B\cos 2x - 4A\sin 2x = 4\sin 2x - 8\cos 2x,$$

откуда $A = -1,\ B = -2$.

Следовательно, $y_ч = -x(\cos 2x + 2\sin 2x)$ и

$$y = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x - x(\cos 2x + 2\sin 2x).$$

Найдем $y_ч$:

$y' = -2C_1\sin 2x + 2C_2\cos 2x - \cos 2x - 2\sin 2x - x(-2\sin 2x + 4\cos 2x)$.

Используя начальные условия, получим систему:

$$\begin{cases} C_1 = 0 \\ 2C_2 - 1 = 0, \quad \text{откуда } C_1 = 0,\ C_2 = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Следовательно, $y = \frac{1}{2}\sin 2x - x(\cos 2x + 2\sin 2x)$ есть искомое частное решение данного дифференциального уравнения.

## РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА


1. Антонов В.И., Лагунова М.В., Лобкова Н.И., Максимов Ю.Д., Семёнов В.М., Хватов Ю.А. Линейная алгебра и аналитическая геометрия. Опорный конспект: [учеб. пособие] / — М. : Проспект, 2015 .— 139 с.
2. Ахметгалиева В.Р., Галяутдинова Л. Р., Галяутдинов М. И. Математика. Линейная алгебра: учебное пособие / Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования "Российский государственный университет правосудия"— М.: Российский государственный университет правосудия, 2017 .— 60 с.
3. Ащеулова А.С., Карнадуд О.С., Саблинский А.И. Высшая математика: линейная алгебра и аналитическая геометрия: конспект лекций / Кемерово: КемГУКИ, 2011.— 71 с.
4. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры: учебник – 12-е изд., испр. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009. – 312 с.
5. Бортаковский А.С. Линейная алгебра в примерах и задачах: учебное пособие: рекомендовано УМО вузов РФ / А. С. Бортаковский, А. В. Пантелеев. - 3-е изд., стер. - Москва : ИНФРА-М, 2017. - 592 с.
6. Бортаковский, Александр Сергеевич. Линейная алгебра и аналитическая геометрия. Практикум: учебное пособие : рекомендовано УМО вузов РФ / А. С. Бортаковский, А. В. Пантелеев. - 2-е изд., стер. - Москва: ИНФРА-М, 2017. - 352 с.
7. Гордеев Ю.Н., Сандаков Е.Б. Векторная алгебра: учеб. - метод. пособие / — М.: НИЯУ МИФИ, 2012 .— 36 с.
8. Гусак А. А. Справочное пособие к решению задач: аналитическая геометрия и линейная алгебра. – Минск: ТетраСистемс, 2013. – 132 с.
9. Лобкова Н. И. Высшая математика: учеб. пособие [для студентов вузов]. Т. 2 [отв. ред. В. И.Антонов, Ю. Д. Максимов]; С.-Петерб. гос. политех. ун-т. - М.: Проспект, 2015
10. Панов Т.Е. Линейная алгебра и геометрия: курс лекций / Т.Е. Панов. – М.: МГУ, 2016. – 96 с.
11. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: полный курс / – 12-е изд. – М.: АЙРИС-пресс, 2014. – 608 с.
12. Понарин Я.П. Алгебра комплексных чисел в геометрических задачах/ 2 изд., стер. – М.: МЦНМО, 2014. – 160 с.
13. Родина Т.В. Комплексные числа [Электронный ресурс] : учебное пособие /— Электрон. дан. — Санкт-Петербург: НИУ ИТМО, 2009. — 30 с.
14. Рябушко А.П. , Жур Т.А. Высшая математика: теория и задачи. В 5 ч. Ч. 2. Комплексные числа. Неопределенный и определенный интегралы. Функции нескольких переменных [Электронный ресурс]: учебное пособие / — Электрон. дан. — Минск : "Вышэйшая школа", 2016. — 271 с.
15. Умнов А.Е. Линейная алгебра и геометрия / А.Е Умнов. – М. : МФТИ, 2011. - 544 с.
16. Шипачев В. С. Высшая математика: учеб. пособие для вузов / В. С.

Шипачев ; под ред. А. Н. Тихонова. - 8-е изд., перераб. и доп. - М. : Юрайт, 2012. - 447 с.

17. Шипачев, В.С. Высшая математика: учебник и практикум для бакалавров / В.С. Шипачев; под ред. А.Н. Тихонова. – 8-е изд., перераб. и доп. – М.: Издательство Юрайт, 2015. – 447 с. – Серия: Бакалавр. Базовый курс.

18. Шумай Т.А., Голышева С.П. Математика : учеб. пособие : прогр., метод. указ. и контрольные задания для студентов 1 и 2 курсов заочн. формы обучения направления бакалавриата 35.03.06 "Агроинженерия" / 4-е изд., перераб. - Иркутск: Изд-во Иркутского ГАУ им. А. А. Ежевского, 2017. -143 с.

19. Allen G.D. Lectures on Linear Algebra and Matrices. Texas A&M University. — URL: http://www.math.tamu.edu/~dallen / m640_03c / readings.htm, 31.05.2012.

## Информационные ресурсы

20.Math.ru - Портал математического образования

21. Exponenta.ru - Образовательный математический сайт

22. Allmath.ru - Математический портал

23. http://windows.edu/ru - Единое окно доступа к образовательным ресурсам

24. http://window.edu.ru/resource/125/47125 - Векторная алгебра

25. http://window.edu.ru/resource/143/64143 - Линейная алгебра, аналитическая геометрия.

26. http://stellus http://znanium.com/go.php?id=476097- Электронные тестовые базы LAN-TESTING и STELLUS

27. http://www.intuit.ru/department/mathematics/intmath/ - Вводный курс в высшую математику.

28. http://mathelp.spb.ru - Лекции, учебники on-line, web-сервисы по высшей математике в помощь студентам.

**СОДЕРЖАНИЕ**

Учебное издание

Мартыненко Алла Ивановна

# Математика

***Учебное пособие***

Редактор Тесля В.И.

Подготовка оригинал-макета: Мартыненко А.И.

Лицензия ЛР № 070444 от 11.03.98 г.

Формат 60x84

Усл. печ. л. 14,0

Тираж 100 экз.

Отпечатано на ризографе ИрГСХА

664038 г. Иркутск, пос. Молодежный