МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ИРКУТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени А.А. ЕЖЕВСКОГО

Институт экономики, управления и прикладной информатики
Кафедра информатики и математического моделирования

Иваньо Я.М., Петрова С.А.

Учебное пособие

по математическому моделированию, численным методам
и комплексам программ для аспирантов специальности
1.2.2 Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

Молодежный, 2022

УДК 681.3

Печатается по решению научно-методического совета Иркутского ГАУ
Протокол №8 от 25 марта 2022

Иваньо Я.М. Учебное пособие по математическому моделированию, численным методам и комплексам программ для аспирантов специальности 1.2.2. Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ //Я.М. Иваньо, С.А. Петрова. – Молодежный: Изд-во Иркутский ГАУ, 2022. – 164 с.

Рецензент:

д.т.н., профессор Ю.М. Краковский,

д.т.н., профессор О.В. Репецкий

В учебном пособии определены общие принципы построения математических моделей и их классификация. Рассмотрены задачи линейного программирования, специальные задачи линейного программирования, нелинейные модели. Особое внимание уделено различным моделям с неопределенными параметрами, рассмотрены задачи линейного программирования с учетом рисков. Приведена многокритериальная задача математического программирования и методы ее решения. Даны основные понятия экспертного оценивания для решения задач математического программирования. Рассмотрены численные методы решения задач математического программирования и вопросы моделирования с помощью метода статистических испытаний. Описаны программные комплексы, позволяющие решать специальные прикладные задачи, связанные, прежде всего, с различными аспектами производства аграрной продукции.

Работа предназначена для аспирантов направления подготовки 09.06.01 Информатика и вычислительная техника. Кроме того, она может быть полезна аспирантам экономических и технических специальностей.

ОГЛАВЛЕНИЕ

I МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

1 ОБЩИЕ ПРИНЦИПЫ ПОСТРОЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ И ИХ КЛАССИФИКАЦИЯ

Социально-экономическая система – это сложная вероятностная динамическая система, охватывающая процессы производства, обмена, распределения и потребления материальных и других благ.

С системой тесно связано понятие «модель».

Модель – это образ реального объекта в материальной или идеальной форме, отражающий существенные свойства моделируемого объекта и замещающий его в ходе исследования и управления.

Моделирование - метод исследования явлений и процессов, основанный на замене конкретного объекта исследования другим, подобным ему.

К основным чертам моделирования относятся:

- выделение задачи;
- определение существенных особенностей объекта;
- идеализация системы;
- подмена действительности образцом;
- оценка адекватности и точности модели;
- получение новых знаний.

С моделями связано понятие «структура». Структура представляет собой определенные взаимосвязи элементов системы, ее строение. Что касается структуры системы, то это устойчивая пространственно-временная упорядоченность элементов и связей между ними.

Помимо структуры система выполняет некоторые функции. Функция системы с точки зрения кибернетики представляет собой способ преобразования входной информации в выходную. С функцией связано состояние системы как множество ее существенных свойств в определенный момент времени.

Математическую основу моделирования составляет системный анализ как совокупность методологических средств для подготовки и обоснования решений по сложным проблемам. При реализации методологии системного анализа необходимо руководствоваться определенными принципами: цели, внешнего дополнения, декомпозиции и целостности. Принцип – это основание, из которого надо исходить и которым нужно руководствоваться в деятельности для достижения цели.

Принцип цели предполагает объединение экономических объектов и разрозненных действий людей по их использованию в единую целенаправленную деятельность или в экономическую операцию.

В соответствии с *принципом декомпозиции* процесс исследования ситуации может быть расчленен на три взаимосвязанных уровня: концептуальный, операциональный и детальный (вертикальная декомпозиция). Некоторый процесс или *операция* (совокупность действий, объединенных общим замыслом и направленных на достижение цели) фиксируется на операциональном уровне. Концептуальный уровень формируется для вскрытия целей операции.

Объединение элементов операции является отражением *принципа целостности*, следование которому требует выделения эмерджентных свойств операций. Эмерджентность проявляется в том, что свойства операций не выступают простой суммой отдельных элементов операций.

В *принципе внешних дополнений* выявляется система проводимых операций, масштаб исследуемой операции с определением места в этой системе, подчиненность и взаимосвязи с другими операциями.

Выделяют следующие этапы моделирования:

- постановка экономической проблемы и ее анализ;
- построение математической модели;
- математический анализ модели;
- подготовка исходной информации;
- численное решение;
- анализ результатов и их применение.

Большое значение для описания реальной ситуации имеет моделирование различных его аспектов. Согласно одной из классификаций моделей[1] они подразделяются следующим образом:

- по агрегированию:
  а) микроэкономические,
  б) макроэкономические;
- по характеру взаимосвязи между переменными:
  а) линейные,
  б) нелинейные;
- по характеру изменения переменных:
  а) дискретные,
  б) непрерывные;
- по наличию информации о переменных:
  а) детерминированные,
  б) стохастические,
  в) интервальные;
- по влиянию на производственные процессы экстремальных природных явлений;
- с учетом фактора времени:
  а) статические,
  б) динамические.

[1]Экономико-математические методы и прикладные модели : учеб. пособие для вузов / В. В. Федосеев [и др.] ; под ред. В. В. Федосеева. – М. : ЮНИТИ, 1999. – 391 с.

Большое значение имеют модели, учитывающие риски получения результатов в различных сферах экономической деятельности человека. По одной из классификаций различают чистые и спекулятивные риски[1]. Первые из них включают в себя природные, транспортные, имущественные, торговые и производственные риски. Спекулятивные риски могут быть вызваны изменениями конъюнктуры рынка, инвестиций, курсов валют и другими факторами.

Особое место имеет исследования рисков в сельском хозяйстве. В работе[2] приведена классификация моделей математического программирования, учитывающая природные и техногенные риски при производстве сельскохозяйственной продукции. Между тем помимо ущербов, наносимых сельскому хозяйству, необходимо рассматривать условия проявления рисков при заготовке дикорастущей продукции[3], что имеет большое значение для больших территорий со значительной лесистостью.

Среди множества моделей определенное место занимают компьютерные модели. Компьютерное моделирование – это процесс исследования объекта с помощью его компьютерной модели.

Имитационное моделирование – это разновидность аналогового моделирования, реализуемого с помощью набора математических инструментальных средств, специальных имитирующих компьютерных программ и технологий программирования, позволяющих произвести целенаправленное исследование структуры и функций реального объекта[4].

В имитационном моделировании широко используется метод Монте-Карло. Это универсальный метод многократного повторения однотипных испытаний для решения различного класса задач. Сходным понятием метода Монте-Карло является метод статистических испытаний.

Большое значение для решения различных практических задач имеют методы математического моделирования, которые являются основными *методами исследования операций*, позволяющими получать количественные основания для принятия решений, связанных с организацией и осуществлением операций.

Математическую основу исследования операций составляют математический анализ, теория вероятностей и статистики, линейная алгебра и другие.

---

[1]Данов А.А. Классификация рисков /А.А. Данов //Вестник ТГУ. Гуманитарные науки. Экономика. – 2008. – Вып. 10 (66). – С. 350 – 354.

[2]Иваньо Я.М. Оптимизационные модели аграрного производства в решении задач оценки природных и техногенных рисков. Монография /Я.М. Иваньо, С.А. Петрова. – Иркутск: Изд-во Иркутского ГАУ, 2015. – 180 с.

[3]Бузина Т.С. Оптимизация взаимодействия участников кластера по получению пищевой дикорастущей продукции в регионе /Т.С. Бузина, Я.М. Иваньо, С.А. Петрова // Лесной вестник. Forestry Bulletin. - 2020. - Т. 24. - № 4. - С. 138-149.

[4]Карпов Ю. Имитационное моделирование систем. Введение в моделирование с AnyLogic /Ю. Карпов. – СПб: БХВ-Петербург, 2009. – 400 с.

Многие исследователи обращают внимание на глобальный кризис различных сферах общества, в том числе и в науке, указывая на междисциплинарность новых технологий XXI в. Они способны на основе знаний о человеке предоставлять конкретные прогнозы и методы проектирования с использованием формализованных моделей и требуют целостного описания объекта, его взаимосвязей с биосферой, техносферой, со сценариями технологического развития.

Одним из наиболее успешных междисциплинарных подходов является теория самоорганизации или синергетика[1]. По убеждениям ряда авторов синергетика включает в себя предметные знания, математическое моделирование и философии.

Синергетика рассматривает нелинейные и неустойчивые системы. Нелинейность означает получение нового качества в результате действия нескольких факторов (следствие не является механической суммой отдельных причин). Неустойчивость означает переход изучаемого объекта в новое состояние при наличии малых отклонений в системеК основным принципам синергетики относятся:

- гомеостатичность;
- иерархичность;
- нелинейность;
- незамкнутость;
- неустойчивость;
- динамическая иерархичность (эмерджентность);
- наблюдаемость;
- необратимость эволюционных процессов;
- бифуркационный характер эволюции;
- динамизм структуры саморазвивающихся систем;
- режимы с обострением;
- новое понимание будущего;
- принцип подчинения;
- фундаментальная роль случайностей;
- законы темпоритма процессов самоорганизации.

Согласно принципу гомеостатичности открытая система сохраняет постоянство своего внутреннего состояния посредством скоординированных реакций, направленных на поддержание динамического равновесия.

Иерархичность представляет собой структурные уровни материи, которые образованы из определенного множества объектов какого-либо класса и характеризуются особым типом взаимодействия между составляющими их элементами.

[1]Чернавский Д.С. Синергетика и информация. Динамическая теория информации /Д.С. Чернавский. Предис. и послесл. Г.Г. Малинецкого. Изд 5-е. – М. ЛЕНАНД, 2017. – 304 с.

Нелинейность характеризует нарушение принципа суперпозиции – результат суммы воздействий на систему не равен сумме результатов этих воздействий.

Незамкнутость (открытость) - это невозможность пренебрежения взаимодействием системы со своим окружением.

Неустойчивость означает, что состояние, траектории неустойчивы, если малые отклонения от них со временем увеличиваются.

Эмерджентность – обобщение принципа подчинения на процессы становления.

Наблюдаемость представляет собой понимание ограниченности и относительности представлений о системе и конечном эксперименте.

Необратимость эволюционных процессов предполагает, что необратимость может возникнуть лишь в системах, поведение которых подчиняется законам случайности.

Бифуркационный характер эволюции предполагает чередование периодов относительно монотонного самодвижения в режиме аттракции и зон бифуркации - катастрофического, скачкообразного изменения хода исторического процесса.

Динамика структуры саморазвивающихся систем означает, что структура системы является динамичной категорией, нуждаясь в регулярной корректировке и перестройке.

Режимы с обострением, или сверхбыстроразвивающиеся кризисы предполагают нелинейные положительные обратные связи.

Новое понимание будущего связано с зонами бифуркации, к которым примыкает виртуальное пространство альтернативных ветвей эволюции, будущее как бы предначертано. Другими словами, под будущим понимается выбор альтернативных вариантов.

Принцип подчинения рассматривают как переход системы к эволюции по новой сценарной траектории, что степень ее свободы становится минимальной и основную роль в ее самовыдвижении в соответствии с этим сценарием начинают играть именно те параметры, которые определяют эти оставшиеся степени свободы.

Фундаментальная роль случайностей означает, что в зоне бифуркации система теряет устойчивость, малые флуктуации нелинейных положительных связей могут приобретать решающее значение.

Законы темпоритма процессов самоорганизации основаны на показателе внутренней связи различных элементов системы – относительная скорость процессов диссипации. При этом хаос на микроуровне может приводить к организованности на макроуровне.

Контрольные вопросы и задания

1. Дайте определение понятиям «система» и «комплекс». Какие сходства и различия между ними?

2. Что такое модель и моделирование?

3. Каковы основные свойства социально-экономической системы?
4. Приведите классификацию моделей.
5. Моделирование с учетом рисков.
6. Какое место занимает понятие «аналогия» в моделировании?
7. Что такое имитационное моделирование и имитационная модель??
8. Что изучает дисциплина исследование операций?
9. Методы математического моделирования.
10. Связь системного анализа и математического моделирования.
11. Основные принципы системного анализа.
12. Признаки классификации математических моделей.
13. Синергетика.
14. Основные принципы синергетики.
15. Гомеостатичность и иерархичность самоорганизующейся системы.
16. Нелинейность и незамкнутость самоорганизующейся системы.
17. Неустойчивость и динамическая иерархичность (эмерджентность) самоорганизующейся системы.
18. Наблюдаемость и необратимость эволюционных процессов самоорганизующейся системы.
19. Бифуркационный характер эволюции и динамизм структуры саморазвивающихся систем.
20. Режимы с обострением и новое понимание будущего самоорганизующейся системы.
21. Принцип подчинения, фундаментальная роль случайностей и законы темпоритма процессов самоорганизации.

2 МЕТОДЫ ПОСТРОЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ НАУЧНЫХ ЗАДАЧ МЕЖДИСЦИПЛИНАРНОГО ХАРАКТЕРА

2.1ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

В математическом программировании как разделе прикладной математики рассматриваются экстремальные задачи и методы их решения. С помощью построения и решения таких задач возможно улучшение управления и организации производственных процессов. Экстремальные задачи представляют собой задачи условной оптимизации, в которые входят ограничения и целевые функции.

Задачи оптимального или математического программирования широко используются для планирования отраслей сельского хозяйства, рационального использования посевных площадей, моделирования кормовых рационов, оптимизации межхозяйственной кооперации и т.д.[1]

В литературе используется классификация задач математического программирования по типам переменных, их связям, учету времени, свойствам информации, количеству критериев оптимальности, проявлению экстремальных явлений.

В задачах математического программирования встречаются дискретные и непрерывные переменные. В частности, в целочисленных задачах неизвестные могут принимать только целые значения, а при оптимизации посевных площадей переменные соответствуют любым неотрицательным величинам. При этом в ограничениях или целевых функциях связи между переменными имеют линейный или нелинейный вид.

Если переменные задачи оптимального программирования зависят от времени, то их относят к динамическим в отличие от статических задач, где фактор времени не применяется.

Поскольку неизвестные могут принимать случайные или детерминированные значения, то рассматривают определенные и стохастические задачи математического программирования. В ряде случаев, когда неизвестны законы распределения вероятностей случайных величин, говорят о задачах математического программирования с неопределенными параметрами.

Во многих случаях приходится находить компромиссные решения, если в задачу входят участники с различными целями. В этом случае возникают многокритериальные задачи.

---

[1]Математические и цифровые технологии оптимизации производства продовольственной продукции. Монография /Я. М. Иваньо. [и др.]; под редакцией Я.М. Иваньо. – Молодежный: Изд-во Иркутский ГАУ, 2021. – 219 с.

И, наконец, производственные процессы в сельском хозяйстве связаны с внешними факторами. При учете экстремальных природных явлений, наводнений, засух, раннего снега, заморозков и др., причиняющих значительный ущерб сельскохозяйственным предприятиям, интерес вызывают задачи математического программирования с учетом природных событий.

Следует отметить, что многие территория страны относятся к зонам рискованного земледелия, где часто наблюдаются экстремальные природные явления, приносящие значительные ущербы сельскохозяйственным товаропроизводителям. Поэтому модели производственных процессов должны учитывать влияние на сельское хозяйство стихийных явлений.

2.1.1 Задачи линейного программирования

В общем виде задача линейного программирования записывается следующим образом[1]:

$$f = \sum_{j \in J} c_j x_j \to \max(\min), \tag{2.1}$$

$$\sum_{j \in J} a_{ij} x_j \le b_i, \; i \in I, \tag{2.2}$$

$$x_j \ge 0, \; j \in J, \tag{2.3}$$

где f - целевая функция или критерий эффективности задачи, x_j - переменная, a_{ij}, b_i, c_j - заданные постоянные величины, *i, j* – индексы.

Задачу (2.1) – (2.3) называют стандартной задачей линейного программирования. Совокупность чисел $X=(x_1, x_2,...,x_n)$, удовлетворяющих условиям (2.1)– (2.3), представляет собой допустимое решение или план. План $X^* = (x_1^*, x_2^*,..., x_m^*)$, при котором критерий оптимальности (2.1) принимает экстремальное значение, принято называть оптимальным. Очевидно, что, если целевая функция (2.1) стремится к максимуму, тогда $f(X) \le f(X^*)$, в противном случае, когда целевая функция достигает минимума, - $f(X) \ge f(X^*)$.

С помощью задачи линейного программирования определяется структура отраслей сельскохозяйственного производства предприятия, скотоводства и растениеводств, а также их сочетания. При этом линейные модели могут использоваться на разных уровнях агрегирования.

---

[1]Акулич И.Л. Математическое программирование в примерах и задачах. Учеб. пособие. – 2-е изд., испр. И доп. – М.: Высш. Шк., 1993. – 336 с.

Кроме того, на основе задач линейного программирования оценивается кормопроизводство и распределение посевных площадей на различном уровне иерархии, от предприятия до муниципального образования и региона, и структура стада. Для территорий с высокой лесистостью актуально решения задач оптимизации сочетания производства аграрной продукции и заготовки дикоросов[1].

Любая стандартная задача линейного программирования может быть приведена к каноническому виду. В этом случае неравенства (2.2) преобразуются в равенства вводом дополнительных переменных. Если связь левой и правой частей условия (2.2) определяется символом «≤», тогда в левую часть добавляют неотрицательную переменную. При другом виде неравенства «≥» из левой части вычитают дополнительную неотрицательную переменную. Таким образом, ограничение (2.2) преобразуется в равенство:

$$\sum_{j \in J} a_{ij} x_j = b_i \quad i \in I . \tag{2.4}$$

Кроме преобразования стандартной задачи к каноническому виду возникают задачи замены минимизации целевой функции ее максимизацией и наоборот. Для этого используют равенство $f_{max}=-f_{min}$ или $f_{min}=-f_{max}$.

При рассмотрении задачи с двумя переменными можно сформулировать геометрический смысл задачи линейного программирования.

Каждое ограничение задачи линейного программирования (3.1)-(3.3) представляет собой полуплоскость с граничными прямыми. Эти прямые разделяют плоскость на две части. При неравенстве «≥» рассматривают верхнюю полуплоскость, в противном случае – для условия «≤», неравенство характеризует нижнюю полуплоскость.

Совокупность совместных ограничений формирует выпуклое множество. При этом выпуклое множество может быть замкнутым и разомкнутым. Кроме того, встречаются случаи, когда система ограничений несовместна. Тогда отсутствует область допустимых решений (план). Выпуклое множество называют многоугольником или многогранником решения.

В многограннике решений находится точка, в которой целевая функция достигает экстремума. Эта точка существует тогда, когда целевая функция не ограничена сверху и многогранник решений не пуст (ограничения совместны).

Для нахождения оптимального плана или точки, в которой целевая функция достигнет экстремума, строят вектор $C=(c_1, c_2,...,c_j...,c_n)$.

---

[1]Модели кластеров заготовки, переработки и реализации пищевой дикорастущей продукции в Иркутской области: монография / Я.М. Иваньо [и др.]; под редакцией Я.М. Иваньо. – Иркутск: Изд-во Иркутский ГАУ, 2019. - 132 с.

Прямую, перпендикулярную к этому вектору (задача с двумя переменными), передвигают вдоль него через многогранник решений, находя точку, в которой целевая функция достигает экстремума или устанавливают неограниченность критерия оптимальности на множестве планов.

Оптимальное решение задачи линейного программирования, если оно существует, достигается в вершинах многогранника. Другими словами, при нахождении оптимального решения интерес вызывают не внутренние точки многогранника, а его вершины.

При приведении стандартной задачи линейного программирования к каноническому виду увеличивается число переменных для избавления от неравенств. В этой ситуации часть переменных n-m приравнивают к нулю и решают m уравнений с m числом неизвестных. Переменные, приравниваемые к нулю, называют свободными или небазисными, а остальные – базисными. Полученные таким образом решения являются базисными. Если же решения допустимые, то их называют базисными допустимыми решениями. На основе приведенных определений можно составить таблицу и найти базисные допустимые решения, из которых затем выбрать оптимальное решение.

Пример 2.1. Фирма занимается производством двух видов полок. Дано 100 м^3 досок для изготовления полок двух образцов A и B. Для изготовления 1 полки образца A требуется 1 м^3 досок, а для производства полок второго образца B – 2 м^3 материала. Для изготовления единицы первого образца полок используется 2 ч машинного времени. Одна полка второго образца производится за 3 ч. Общее количество времени для изготовления полок ограничено 180 ч. Согласно договоренности с потребителями фирме необходимо изготовлять не менее 20 изделий первого образца. Стоимость одной полки образца A составляет 5 денежных единиц, а одного изделия вида B – 8 д.е. Построить целевую функцию и ограничения задачи линейного программирования при условии получения максимального дохода.

Решение

Обозначим число полок A переменной x_1, а количество изделий B – x_2. Очевидно, что стоимость первой продукции равна $5x_1$, а второй – $8x_2$, поскольку 5 и 8 представляют собой стоимость одной полки разных образцов. Тогда целевая функция примет вид

$$f(X)=5x_1+8x_2\rightarrow max.$$

Ограничение по затратам материалов на изготовление полок определяется так

$$1x_1+2x_2\leq 100\ [м^3],$$

где $1x_1$ – затраты материала на изготовление полок первого образца, а $2x_2$ – объем досок для производства полок второго образца.

Условие не превышения заданного машинного времени записывается следующим образом

$$2x_1+3x_2\leq 180\ [ч],$$

где $2x_1$ – затраты времени на производство полок первого образца, а $3x_2$ – количество часов на изготовление полок В.

Ограничение, связанное с необходимостью производства не менее 20 полок образца А, имеет вид

$$x_1\geq 20.$$

Кроме того, должно соблюдаться условие неотрицательности переменных или $x_2\geq 0$.

Таким образом, задача включает в себя 2 переменные, состоит из 4 ограничений и целевой функции, которую максимизируют.

Пример 2.2. Найти максимум и минимум функции $f = x_1 + x_2$ при условиях

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \leq 16, \\ -4x_1 + 2x_2 \leq 8, \\ x_1 + 3x_2 \geq 9, \end{cases}$$
$$x_1, x_2 \geq 0.$$

Решение

Построим многоугольник решений. Для этого в неравенствах системы ограничений и условиях неотрицательности переменных знаки неравенств заменим на знаки точных равенств:

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 = 16, \\ -4x_1 + 2x_2 = 8, \\ x_1 + 3x_2 = 9, \end{cases}$$
$$x_1 = 0,$$
$$x_2 = 0.$$

Построив полученные прямые, найдем соответствующие полуплоскости их пересечение (рисунок 2.1).

Из рисунка 2.1 следует, что многоугольником решений задачи является треугольник АВС. Координаты точек этого треугольника удовлетворяют условию неотрицательности и неравенствам системы ограничений задачи. Следовательно, задача будет решена, если среди точек треугольника АВС найти такие, в которых функция принимает максимальное и минимальное значения. Для нахождения этих точек построим прямую (число 4 взято произвольно).

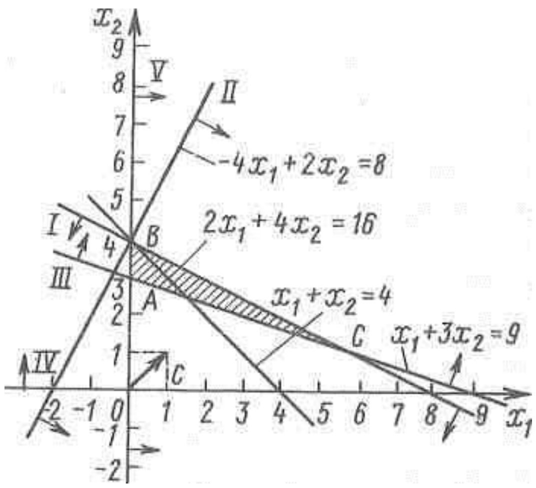


Рисунок 2.1 - **Графическая интерпретация решения задачи линейного программирования**[1]

Координаты вектор *C = (1,1)* получены как частные производные целевой функции:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 1,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = 1.$$

Передвигая данную прямую параллельно самой себе в направлении вектора *C*, определяем, что ее последней общей точкой с многоугольником решений является точка *C*. Следовательно, в этой точке функция *f* принимает максимальное значение. Так как *C* – точка пересечения прямых I и III, то ее координаты удовлетворяют уравнениям этих прямых:

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 = 16, \\ x_1 + 3x_2 = 9. \end{cases}$$

Решив эту систему уравнений, получим $x_1^* = 6,\ x_2^* = 1.$ Таким образом, максимальное значение функции $f_{\max} = 7.$

Для нахождения минимального значения целевой функции задачи передвигаем прямую $x_1 + x_2 = 4$ в направлении, противоположном направлению вектора *C = (1,1).* В этом случае последней точкой является точка *A*.

[1]Акулич И.Л. Математическое программирование в примерах и задачах. Учеб. пособие. – 2-е изд., испр. И доп. – М.: Высш. Шк., 1993. – 336 с.

Для определения координат решаем систему уравнений, откуда $x_1^* = 0$, $x_2^* = 3$, $f_{min}=3$

Пример 2.3. Привести задачу линейного программирования к основной (канонической) форме:

$$f=x_1+2x_2 \to max,$$

$$x_1+x_2 \le 6,$$

$$3x_1+10x_2 \le 26,$$

$$x_1+11x_2 \le 20,$$

$$x_1, x_2 \ge 0.$$

Определить количество базисных допустимых решений и найти оптимальный план.

Решение

Приведение задачи линейного программирования (ЗЛП) к каноническому виду осуществляется введением в левую часть соответствующего ограничения дополнительной переменной со знаком «-» в случае ограничения типа «≥» и знаком «+» в случае ограничения типа «≤».

Таким образом, данная задача примет вид:

$$F=x_1 + 2x_2 \to max,$$
$$x_1 + x_2 + x_3 = 6,$$
$$3x_1+10x_2 + x_4 = 26,$$
$$x_1+11x_2 + x_5 = 20,$$
$$x_1 , x_2 \ge 0.$$

Решить задачу можно путем последовательного приравнивания части переменных n-m к 0. Поскольку число переменных $n=5$, а число ограничений, исключая последнее условие, $m=3$, тогда к нулю приравниваются две переменные, которые по определению называются небазисными. Остальные рассчитываемые неизвестные – базисные.

1) Пусть $x_1 = 0, x_2 = 0$, тогда подставляя эти значения в соответствующее уравнение, получим

$$0+0+x_3 = 6, x_3 = 6,$$

$$0+0+x_4 = 26, x_4 = 26,$$

$$0+0+x_5 = 20, x_5 = 20,$$

$$f = 0+0 = 0.$$

2) Пусть $x_1=0$, $x_3=0$, тогда

$$0 + x_2 + 0 = 6, x_2 = 6,$$
$$0 + 10 \cdot 6 + x_4 = 26, x_4 = 26 - 60, x_4 = -34,$$
$$0 + 11 \cdot 6 + x_5 = 20, x_5 = 20 - 66, x_5 = -46.$$

Поскольку полученные переменные принимают отрицательные значения, задача не имеет допустимого базисного решения.

Аналогично путем перебора небазисных переменных находятся значения остальных неизвестных. Полученные результаты занесены в таблицу 2.1.

Таблица 2.1 – **Решения задачи линейного программирования на выпуклом множестве**

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	F
1	0	0	6	26	20	0
2	0	6	0	-34	-46	-
3	0	2.6	3.4	0	-8,6	-
4	0	1,8	4,2	8	0	3,6
5	6	0	0	8	14	6
6	8,7	0	-2,7	0	11,3	-
7	20	0	-14	-34	0	-
8	4,9	1,1	0	0	3	7,1
9	4,6	1,4	0	-1,8	0	-
10	3,7	1,5	0,8	0	0	6,7

Таким образом, из таблицы видно, что количество допустимых решений в данной задаче равно *5*.

Оптимальным будет являться решение $x_1 = 4{,}9, x_2 = 1{,}1$, при котором целевая функция достигает максимума - $f_{\max} = 7{,}1$.

2.1.2 Симплекс-метод решения задачи линейного программирования

Задача линейного программирования заключается в нахождении оптимального решения из допустимой области. В предыдущем разделе приведены два метода решения задачи линейного программирования. Один из них графический, а второй - основан на поиске базисных допустимых решений. Оба метода имеют ограничения. Графический метод применим для числа неизвестных, не превышающих $n \leq 3$. Что касается второго метода, то его рационально использовать при небольшом числе переменных, хотя возможностей у этого метода больше, чем у предыдущего.

Широкое распространение для решения задач линейного программирования нашел симплекс-метод, разработанный Дж. Данцигом. Этот метод позволяет решать задачи в 3 этапа:

1) определение исходного решения и построение симплекс-таблицы;
2) получение или определение допустимого решения;
3) определение оптимального решения путем последовательного улучшения исходного варианта за определенное число операций.

Симплекс-метод применим при следующих условиях: локальный экстремум не отличается от глобального; множество решений представляет собой выпуклый многогранник; целевая функция достигает экстремума в вершине многогранника; угловым точкам многогранника отвечает опорный план задачи.

При использовании симплекс-метода в начале стандартная задача линейного программирования приводится к каноническому виду. Затем строится симплекс-таблица. Первоначально может быть получено базисное допустимое решение. Вместе с тем не исключена ситуация недопустимого решения. Тогда переходят к преобразованию исходной таблицы для получения базисного допустимого решения. При переходе от одного опорного плана к другому осуществляется проверка достижения оптимальности целевой функцией. При проверке оптимальности используются следующие теоремы.

Первая из них гласит, что если для некоторого вектора, не входящего в базис, выполняется условие

$$\Delta_j = z_j - c_j , \tag{2.5}$$

где $z_j = \sum_{i=1}^{m} c_j a_{ij}$, $j = \overline{1,n}$, то можно получить новый опорный план, для которого значение целевой функции увеличится (максимизация критерия оптимальности). При этом рассматриваются два случая:

- если все координаты вектора, подлежащего вводу в базис, неотрицательны, то задача не имеет решения;

- если имеется хотя бы одна положительная координата у вектора, вводимого в базис, то можно получить новый опорный план.

По второй теореме, если для всех векторов выполняется условие $\Delta_j = z_j - c_j \geq 0$, то полученный план является оптимальным.

При преобразовании симплекс-таблиц вводятся следующие понятия: разрешающий элемент, разрешающая строка и столбец и другие элементы. Разрешающий элемент находится в столбце с отрицательными коэффициентами c_j. Он определяется как минимальное соотношение правых частей ограничений b_i и коэффициентов при переменных левых частей условий a_{ji}:

$$a_0 = \min \frac{b_i}{a_{ji}} . \tag{2.6}$$

После определения разрешающего элемента выполняются следующие операции по заполнению новой симплекс таблицы.

Осуществляется замена свободной переменной базисной на пересечении разрешающего столбца и строки.

Ячейка разрешающего элемента заполняется числом, обратным разрешающему элементу:

$$a_{0н} = a_0^{-1} \tag{2.7}$$

Элементы разрешающей строки $a_{сн}$ и столбца $a_{кн}$ в новой таблице вычисляются по формулам:

$$a_{сн} = \frac{a_{сс}}{a_0}, \tag{2.8}$$

$$a_{кн} = -\frac{a_{кс}}{a_0}, \tag{2.9}$$

где $a_{сс}$ и $a_{кс}$ – предыдущие значения элементов разрешающей строки и столбца.

Остальные элементы $a_{онk}$ рассчитываются по выражению

$$a_{онk} = a_{ос} - \frac{a_{ссk} a_{кс k}}{a_0}, \tag{2.10}$$

где $a_{онk}$ – остальные элементы предыдущей таблицы, $a_{ссk}$ и $a_{кck}$ – элементы разрешающей строки и столбца, k – индекс остальных элементов из множества K.

В результате определенного числа итераций достигается оптимальное решение задачи.

Пример 2.4. Пусть требуется произвести 2 вида продукции *A* и *B*. Суммарное количество сырья на производство продукции не превышает 100 кг. Затраты на изготовление единицы продукции *A* составляют 1 кг, а затраты на еденицу. продукции *B* – 2 кг сырья. На изготовление продукции *A* требуется 2 ч времени, а изделий *B* – 3 ч. Максимальное количество времени на производство продукции в течение недели не превышает 180 ч. Причем количество 1–й продукции должно быть не менее 20. Себестоимость продукции *A* составляет 5 денежных единиц, а *B* – 8. Решить задачу симплекс-методом.

Решение

Симплекс-метод позволяет решать задачи в 3 этапа:

В начале определяется исходное решения и строится исходная симплекс-таблица. При получении недопустимого решения находится допустимый план. Затем методом последующих приближений по правила преобразования симплекс-таблицы определяют оптимального решение.

В этой задаче x_1 – количество продукции *A*, а x_2 – количество продукции *B*.

Целевая функция и ограничения имеют вид:

$$F=5x1+8\ x2 \rightarrow max,$$
$$x1+2\ x2 \leq 100,$$
$$2\ x1+3\ x2 \leq 180,$$
$$x1 \geq 20,$$
$$x2 \geq 0.$$

Приведем неравенства и целевую функцию к каноническому виду:

$$F=5x_1+8\ x_2,$$
$$x_1+2\ x_2+\ x_3\ =100,$$
$$2\ x_1+3\ x_2+\ x_4=180,$$
$$x_1 -\ x_5=20$$

$$x_2 \geq 0.$$

В качестве базисных переменных примем дополнительные переменные – x_3, x_4, x_5, а другие неизвестные (небазисные переменные), приравниваем к нулю,

Преобразуем уравнения относительно базисных переменных, т.е.

$$x_3=100 - (x_1+2\ x_2)$$
$$x_4=180 - (2\ x_1+3\ x_2)$$
$$x_5=-20 - (-x_1)$$
$$F=0 - (-5\ x_1 - 8\ x_2)$$

Составим исходную симплекс-таблицу (таблица 2.2).

Исходное решение задачи: $x_1=0;\ x_2=0;\ x_3=100;\ x_4=180;\ x_5=-20.$ Решение недопустимо, т.к. среди значений переменных одно x_5 является отрицательным. Следовательно, необходимо найти допустимое решение. Для расчета параметров следующей таблицы определяется разрешающий элемент.

Разрешающий элемент находится по правилу определения минимального соотношения между свободным членом и коэффициентом при свободных переменных. Разрешающий элемент $a_0=-20\ /\ -1=20$

Таблица 2.2 – **Исходная симплекс-таблица**

разрешающий столбец

Базисные переменные	Свободные члены	Свободные переменные	
		x_1	x_2
x_3	100	1	2
x_4	180	2	3
x_5	-20	-1	0
f	0	-5	-8

разрешающая строка

На основании элемента a_0 выделяется разрешающая строка и разрешающий столбец. Таким образом, таблица делится на 3 вида элементов:

– данные разрешающего столбца;
– данные разрешающей строки;
– остальные данные.

Каждое симплексное преобразование системы сводится к переходу от одной симплексной таблицы к другой. Перед заполнением новой симплекс-таблицы осуществляется замена базисной переменной x_5 небазисной неизвестной x_1 на пересечении разрешающего столбца и строки. Таким образом, переменная x_1 становится базисной, а x_5 – свободной или небазисной неизвестной.

Переход ко второй симплексной таблице выполняется согласно следующему правилам (2.6)-(2.10):

- ячейка последующего разрешающего элемента

$$a_{0н}=1/-1=-1;$$

- элементы разрешающей строки:

$$a_{сн}=-20/-1=20 \text{ и } a_{сн}=0/-1=0;$$

- элементы разрешающего столбца:

$$a_{кн}=-(1/-1)=1,\ a_{кн}=-(2/-1)=2 \text{ и } a_{кн}=-(-5/-1)=-5;$$

- остальные элементы симплекс-таблицы:

$$a_{он}=100-\frac{1\cdot(-20)}{-1}=80,$$

$$a_{он}=180-\frac{2\cdot(-20)}{-1}=140,$$

$$a_{\text{îí}}=0-\frac{-5\times-20}{-1}=100,$$

$$a_{\text{îí}}=2-\frac{-1\times0}{-1}=2,$$

$$a_{\text{îí}}=3-\frac{2\times0}{-1}=3,$$

$$a_{\text{îí}}=-8-\frac{1\times0}{-1}=-8.$$

На основе вычислений сформирована новая симплекс-таблица.

Итак, получено допустимое решение, $x_1=20;$ $x_2=0;$ $x_3=0;$ $x_4=80;$ $x_5=140$. Вместе с тем полученное решение при $f=100$ не является оптимальным, поскольку возможно увеличение целевой функции ввиду отрицательности свободных переменных в строке f.

Таблица 2.3 – **Симплекс-таблица первой итерации**

Базисные переменные	Свободные члены	Свободные переменные	
		x_5	x_2
x_3	80	1	**2**
x_4	140	2	3
x_1	20	-1	0
f	100	-5	-8

Поэтому на основе правил преобразования элементов симплекс-таблицы находится следующая вершина многогранника или допустимое решение.

Разрешающий элемент находится в столбце с отрицательными коэффициентами при переменных целевой функции. В данном случае разрешающим элементом является число *2* (таблица 2.3), выделенное полужирным шрифтом.

Согласно правилам преобразования разрешающего элемента, разрешающей строки, разрешающего столбца и остальных элементов получены таблицы 2.4 и 2.5.

Таблица 2.4 –**Симплекс-таблица второй итерации**

Базисные переменные	Свободные члены	Свободные переменные	
		x_5	x_3
x_2	40	0,5	0,5
x_4	20	**0,5**	-1,5
x_1	20	-1	0
f	120	-1	4

Таблица 2.5 –**Симплекс-таблица третьей итерации**

Базисные переменные	Свободные члены	Свободные переменные	
		x_4	x_4
x_2	20	-1	2
x_5	40	2	-3
x_1	60	2	-3
f	460	2	1

Оптимальное решение достигнуто в случае, когда переменные примут следующие значения: $x_1=60;$ $x_2=20;$ $x_3=40;$ $x_4=0;$ $x_5=0$. При этом $f_{max}=460$ денежных единиц. Максимум прибыли достигается при производстве 60 изделий A и 20 - продукции B.

2.1.3 Двойственная задача линейного программирования

Каждой исходной задаче линейного программирования (2.1)–(2.3) ставится в соответствие двойственная задача:

$$g(Y) = \sum_{i \in I} b_i y_i \to \min(\max) , \tag{2.11}$$

$$\sum_{i \in I} a_{ij}^T y_i \geq c_j , \; j \in J \tag{2.12}$$

$$y_i \geq 0 , \; i \in I . \tag{2.13}$$

При построении двойственной задачи вводятся новые переменные y_i, которые называются двойственными или объективно обусловленными оценками.

Если целевая функция исходной задачи максимизируют, то критерий оптимальности двойственной задачи должен достигать минимума. Неравенства вида «≤» задачи (2.1)-(2.3) заменяют символом «≥» двойственной задачи.

Исходная матрица коэффициентов при неизвестных в левых частях ограничений исходной задачи A преобразуют в транспонированную матрицу A^T:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \tag{2.14}$$

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}. \tag{2.15}$$

Число переменных в двойственной задаче соответствует количеству ограничений исходной задачи, а число ограничений (2.12) равно количеству неизвестных исходной задачи. Коэффициентами при неизвестных в целевой функции двойственной задачи являются правые части ограничений исходной задачи. Правые же части условий двойственной задачи представляют собой коэффициенты при неизвестных целевой функции исходной задачи.

Каждому ограничению одной задачи соответствует одна переменная другой задачи. При этом номер переменной совпадает с номером ограничения. Неравенству, характеризуемому символом «≤», соответствует переменная, связанная с условием неотрицательности. Для равенств в ограничениях исходной задачи переменная двойственной задачи может принимать как положительные, так и отрицательные значения.

Пары двойственных задач могут быть симметричными и несимметричными. В симметричных задачах системы ограничений представляют собой неравенства. Кроме того, на двойственные переменные налагается условие неотрицательности. В несимметричных задачах ограничения исходной задачи имеют вид равенств, а условия двойственной задачи задаются неравенствами. При этом переменные двойственной задачи могут принимать положительные и отрицательные значения.

Между решениями исходной (2.1)-(2.3) и двойственной задачи (2.11)-(2.13) имеют место зависимости. Одна из лемм гласит, если X – некоторый план исходной задачи, а Y – произвольный план двойственной задачи, то справедливо неравенство $f(X)\leq g(Y)$. При этом в исходной задаче определяется максимум целевой функции, а в двойственной – минимальное значение критерия оптимальности. Согласно второй лемме при $f(X^*)=g(Y^*)$ X^* и Y^* являются оптимальными планами исходной и двойственной задач.

Кроме приведенных лемм справедливы две теоремы. По первой из них, если одна из задач имеет оптимальный план, то и другая имеет оптимальный план, а значения целевых функций при оптимальных планах исходной и двойственной задачи равны. Причем, если целевая функция одной из пары двойственных задач не ограничена сверху, то другая задача не имеет планов.

Вторая теорема гласит, что планы X^* и Y^* являются оптимальными тогда и только тогда, когда для любых $j=\overline{1,n}$ выполняется равенство

$$\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* - c_j\right) x_j^* = 0 . \qquad (2.16)$$

Переменные y_i представляют собой оценки влияния правых частей ограничений исходной задачи b_i на оптимальный план двойственной задачи. При экономической интерпретации двойственной задачи эти оценки должны быть такими, чтобы общая оценка сырья, используемого на производство единицы продукции каждого вида, была не меньше цены единицы продукции данного вида c_j. Здесь следует иметь в виду пару двойственных задач, в которой целевая функция исходной задачи определяется на максимум, а критерий оптимальности двойственной задачи достигает минимума.

Пример 2.5. Для задачи, состоящей в максимизации функции $f=4x_1+x_2-4x_3$ при условиях

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 4x_3 \leq 12 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 13 \\ 2x_1 + 5x_2 - 6x_3 \leq 11 \end{cases}$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

сформулировать двойственную задачу.

Решение

В начале преобразуем матрицу коэффициентов при неизвестных левой части ограничений исходной задачи:

$$A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & 5 & -6 \end{vmatrix}, \quad A^T = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 5 \\ 4 & -2 & -6 \end{vmatrix}.$$

Тогда ограничения двойственной задачи примут вид

$$\begin{cases} 2y_1 + y_2 + 2y_3 \geq 4 \\ -y_1 + 3y_2 + 5y_3 \geq 1 \\ 4y_1 - 2y_2 - 6y_3 \geq -4 \end{cases}$$

$$y_1, y_3 \geq 0$$

Используя правые части ограничений исходной задачи нетрудно определить целевую функцию $g(Y)=12y_1+13y_2+11y_3$, которая должна достигнуть минимума.

2.1.4 Решение задачи линейного программирования с использованием программного продукта MS Excel

Постановку и решение задачи линейного программирования с помощью MS Excel рассмотрим на следующем примере.

Хозяйство специализируется в полеводстве на производстве зерна, овощей и картофеля. Сельскохозяйственное предприятие располагает 3200 га пашни, трудовыми ресурсами - 7000 чел.-дней и минеральными удобрениями - 15000 ц.д.в. Требуется найти такое сочетание посевных площадей, которое обеспечило бы получение максимума прибыли.

Следует учесть, что

– площадь посева овощей и картофеля не должна превышать 25% общей площади пашни;

– хозяйством заключен договор на продажу зерна в объеме 65000 ц.

Для разработки экономико-математической модели необходима подготовка входной информации (таблица 2.6).

Таблица 2.6– **Данные для построения модели размещения посевов**

Показатели	Сельскохозяйственные культуры		
	зерновые	овощи	картофель
Урожайность, ц/га	26	200	180
Цена реализации 1 ц продукции, руб./ц.	980	2500	2000
Стоимость товарной продукции с 1 га, руб.	25480	500000	360000
Затраты на 1 га: МДС, тыс. руб.	2,7	12,7	3,1
труда, чел.-дней.	1,5	4,5	1,5
минеральных удобрений, ц.д.в.	2	15	2,3
Прибыль с 1 га, руб.	2,89	7,93	3,63

За неизвестные примем площади посева сельскохозяйственных культур по видам:

x_1 - зерновых культур;

x_2 – овощи;

x_3 – картофель.

Для построения экономико-математической модели задачи необходимо учесть все условия. В данном случае, по этим условиям можно составить пять ограничений.

Сумма площадей посева сельскохозяйственных культур не должна превышать площади, имеющейся в хозяйстве (3200 га). Коэффициентами при неизвестных в этом ограничении характеризуют расход пашни на 1 га каждой сельскохозяйственной культуры. В данном случае технико-экономические коэффициенты по неизвестным будут равняться единице. В правой части записывается общая площадь пашни

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 3200.$$

1. Сумма площадей посева овощей и картофеля не должна превышать площади, которая может быть отведена для этой цели (3200×0,25=800 га). Коэффициентами при неизвестных в этом ограничении характеризуют расход пашни, отведенной под посевы овощей и картофеля на 1 га. В данном случае технико-экономические коэффициенты по неизвестным x_2 и x_3 будут равняться единице, а по зерновым культурам (x_3) - нулю. В правой части записывается максимальная площадь пашни, которая может быть отведена под посевы овощей и картофеля

$$x_2 + x_3 \leq 800.$$

2. Третье и четвертое ограничения гарантируют, что использование трудовых ресурсов и минеральных удобрений не превысит их наличие в хозяйстве. Другими словами, сумма произведений норм затрат ресурсов на 1 га на площади посева соответствующих сельскохозяйственных культур не должна превышать объемов ресурсов, имеющихся в сельскохозяйственном предприятии. Коэффициентами при неизвестных в этих ограничениях будут являться нормы расхода ресурсов (в третьем ограничении – трудовых ресурсов, в четвертом – минеральных удобрений) на 1 га площади посева сельскохозяйственных культур. В данном случае технико-экономические коэффициенты взяты из таблицы 1. В правой части записывается наличие этих ресурсов в хозяйстве:

$$1{,}5x_1 + 4{,}5x_2 + 1{,}5x_3 \leq 7000,$$
$$2x_1 + 15x_2 + 2{,}3x_3 \leq 15000.$$

3. Пятое ограничение гарантирует производство запланированного объема зерна. В качестве коэффициентов при переменных выступает выход зерна с 1 га площади посева сельскохозяйственных культур. При неизвестной x_1 это урожайность зерновых (таблица 2.6). При переменных x_2 и x_3 этот

коэффициент равен нулю. В правой части записывается план производства зерна

$$26x_1 \geq 65000.$$

В результате получена система пяти линейных неравенств с тремя неизвестными. Требуется найти такие неотрицательные значения этих неизвестных x_1>=0; x_2>=0; x_3>=0, которые бы удовлетворяли данной системе неравенств и обеспечивали получение максимума прибыли от отрасли растениеводства в целом:

$$f = 2{,}89x_1 + 7{,}93x_2 + 3{,}53x_3 \to \max.$$

В качестве коэффициентов при неизвестных в целевой функции выступает прибыль, получаемая с 1 га площади посева сельскохозяйственных культур. Эти коэффициенты рассчитаны на основании данных таблицы 2.6.

Поскольку данная задача решается с помощью MS Excel, то и подготовку всей входной информации для построения экономико-математической модели целесообразно осуществлять также с использованием этого табличного процессора. Это облегчает не только расчеты технико-экономических коэффициентов и других данных, но и дает в дальнейшем возможность автоматического обновления информации в экономико-математической модели.

Вся разработанная информация сводится в развернутую экономико-математическую модель и заносится в рабочий лист MS Excel (рис. 2.2).

В столбцы **A** («№»), **B** («Ограничения»), **C** («Единицы измерения») и **H** («Тип ограничений») вводятся соответствующие данные непосредственно в модель (рисунок 2.2). Они не используются в расчетах и служат для информативности и облегчения понимания содержания модели. В столбец **I** («Размер ограничений») вводятся ссылки на ячейки, содержащие соответствующую названию столбца информацию (значения правых частей построенных ранее неравенств).

Для значений переменных x_1, x_2, x_3 были оставлены пустые ячейки - соответственно **D11**, **E11**, **F11**. Изначально пустые ячейки программа MS Excel воспринимает как ячейки, значение которых равно нулю. Столбец **G**, названный «**Формула**», предназначен для определения суммы произведений значений искомых неизвестных (ячейки **D11**, **E11**, **F11**) и технико-экономических коэффициентов по соответствующим ограничениям (строки 5-9) и целевой функции (строка 10).

Q9

Табличная запись числовой модели задачи оптимизации структуры посевных площадей

		Ед. измерения	Зерновые	Сахарная свекла	Подсолнечни	Формула	Тип ограничения	Размер и вид ограничений
			x_1	x_2	x_3			
1	Площадь посевов	га	1	1	1	0,00	<=	3200
2	Площадь технических культур	га		1	1	0,00	<=	800
3	Затраты труда	ч-дни	1,5	4,5	1,5	0,00	<=	7000
4	Мин удобрения	ц.д.в.	2	15	2,3	0,00	<=	15000
5	Валовое производство зерна	ц	26			0,00	>=	65000
	Прибыль	руб.	2,89	7,93	3,53	0,00		max
	Результаты решения задачи							

Рисунок 2.2 – **Табличная запись задачи оптимизации структуры посевных площадей**

Таким образом, в столбце **G** определяется:

– количество используемых ресурсов (ячейка **G5** – общей площади посевов; **G6** – пашни, которая может быть использована под посевы технических культур; **G7** – трудовых ресурсов; **G8** – минеральных удобрений);

– количество произведенного зерна (ячейка **G9**);

– величина прибыли (ячейка **G10**).

G5 =СУММПРОИЗВ(D5:F5;$D$11:$F$11)

Табличная запись числовой модели задачи оптимизации структуры посевных площадей

		Ед. измерения	Зерновые	Сахарная свекла	Подсолнечни	Формула	Тип ограничения	Размер и вид ограничений
			x_1	x_2	x_3			
1	Площадь посевов	га	1	1	1	0,00	<=	3200
2	Площадь технических культур	га		1	1	0,00	<=	800
3	Затраты труда	ч-дни	1,5	4,5	1,5	0,00	<=	7000
4	Мин удобрения	ц.д.в.	2	15	2,3	0,00	<=	15000
5	Валовое производство зерна	ц	26			0,00	>=	65000
	Прибыль	руб.	2,89	7,93	3,53	0,00		max
	Результаты решения задачи							

Рисунок 2.3 – **Фрагмент табличной записи для задачи оптимизации структуры посевных площадей**

На рисунке 2.3 показано, как в ячейке **G5** реализуется запись суммы произведений значений переменных (площадей посева с.-х. культур - ячейки **D11**, **E11**, **F11**) на соответствующие коэффициенты (ячейки **D5**, **E5**, **F5**) с помощью функции MS Excel «**СУММПРОИЗВ**». Так как при написании данной формулы использованы абсолютные адресации на ячейки от **D11** до **F11**, эта формула может быть скопирована в другие ячейки от **G6** до **G10**.

Таким образом, построен опорный план (рис. 2.3) и получено первое допустимое решение. Значения неизвестных x_1, x_2, x_3 равны нулю (ячейки **D11**, **E11**, **F11 -** пустые ячейки), ячейки столбца **G** «Сумма произведений» по всем ограничениям (строкам 5-9) и целевой строке (строка 10) также имеют нулевые значения.

Экономическая интерпретация первого опорного плана звучит следующим образом: в хозяйстве имеются ресурсы, рассчитаны все технико-экономические коэффициенты, но процесс производства еще не начат; ресурсы не использовались, и, соответственно, прибыли нет.

Для оптимизации имеющегося плана воспользуемся инструментом **Поиск решения,** который находится в меню **«Данные»**. Если нет такой команды в меню **Данные,** необходимо в меню **Файл – Параметры - Надстройка** поставить галочку напротив «**Поиск решения**». После этого данная процедура станет доступной в меню **«Данные»**.

После выбора данной команды появится диалоговое окно (рис. 2.4).

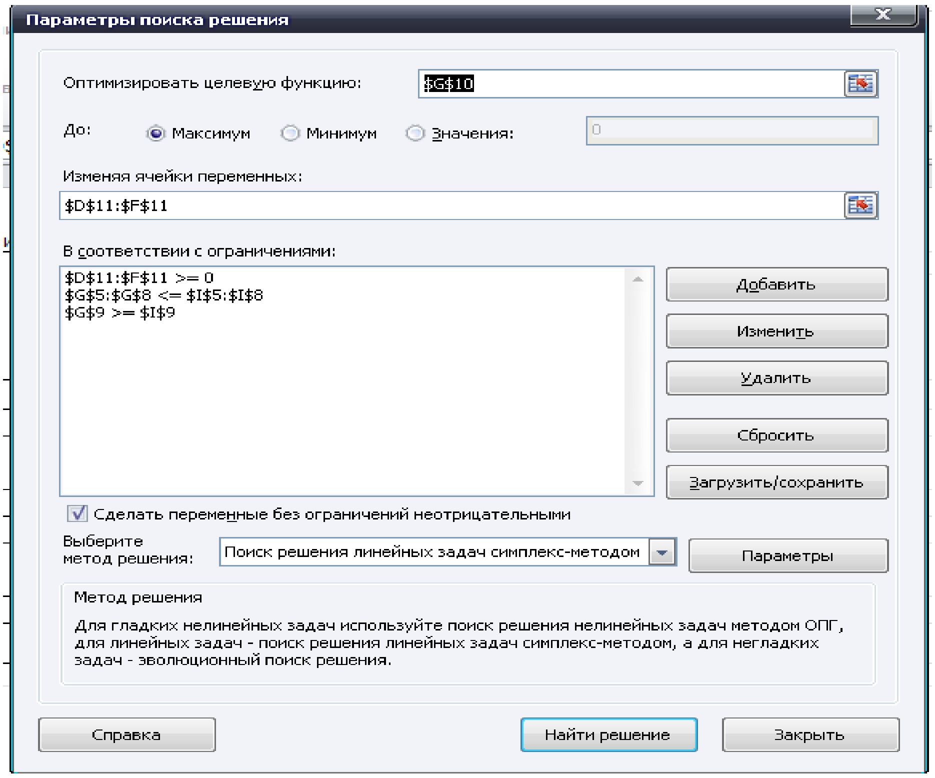


Рисунок 2.4 – **Диалоговое окно надстройки «Поиск решения» в MS Excel**

Поскольку в качестве критерия оптимизации нами выбрана максимизация прибыли, в поле «**Установить целевую ячейку**

(оптимизировать целевую функцию)» введите ссылку на ячейку, содержащую формулу расчета прибыли. В нашем случае это ячейка **$G$10**. Чтобы максимизировать значение конечной ячейки путем изменения значений влияющих ячеек (влияющими, в данном случае это и изменяемые ячейки, являются ячейки, которые предназначены для хранения значений искомых неизвестных), переключатель установите в положение **максимальному значению**.

В поле «**Изменяя ячейки переменных»** введите ссылки на изменяемые ячейки, разделяя их запятыми; либо, если ячейки находятся рядом, указывая первую и последнюю ячейку, разделяя их двоеточием (**$D$11:$F$11**).

В поле «**В соответствии с ограничениями»** введите все ограничения, накладываемые на поиск решения. Добавление ограничения рассмотрим на примере добавления первого ограничения по общей площади пашни.

В разделе «**В соответствии с ограничениями»** диалогового окна «**Поиск решения»** нажмите кнопку **Добавить**. Появится следующее диалоговое окно (рис. 2.5)

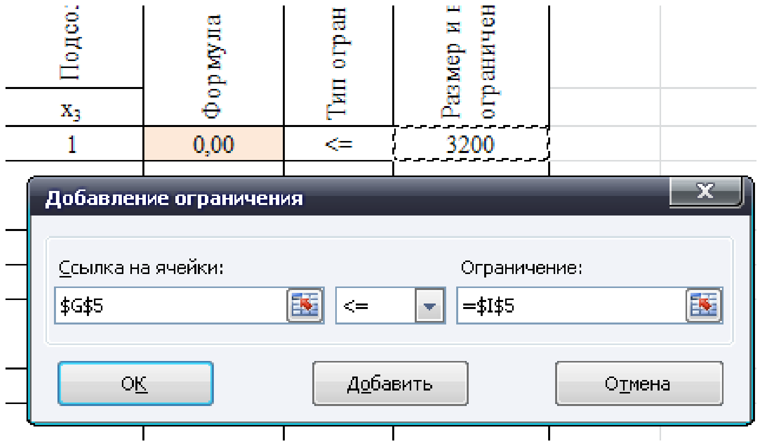


Рисунок 2.5 – **Фрагмент решения задачи линейного программирования в надстройке MS Excel «Поиск решения»**

В поле **Ссылка на ячейку** введите адрес ячейки, на значение которой накладываются ограничения. В нашем случае, это ячейка **$G$5**, где находится формула расчета используемой пашни в текущем плане.

Выберите из раскрывающегося списка условный оператор **<=**, который должен располагаться между ссылкой и ограничением.

В поле **Ограничение** введите ссылку на ячейку, в которой находится значение наличия площади посевов в хозяйстве, либо ссылка на это значение. В нашем случае, это ячейка **$I$5**

В результате диалоговое окно примет вид как на рисунке 2.5

Чтобы принять ограничение и приступить к вводу нового, нажмите кнопку **Добавить**. Аналогично вводятся и другие ограничения. Чтобы вернуться в диалоговое окно **Поиск решения**, нажмите кнопку **ОК**.

После выполнения вышеперечисленных инструкций диалоговое окно **Поиск решения** будет иметь следующий вид (рис. 2.4).

Для изменения и удаления ограничений в списке **Ограничения** диалогового окна **Поиск решения** укажите ограничение, которое требуется изменить или удалить. Выберите команду **Изменить** и внесите изменения либо нажмите кнопку **Удалить**.

Поставьте флажок **Линейная модель** в диалоговом окне **Параметры Поиска решения** или выберите метод решения **«Поиск решения линейных задач симплекс-методом»**. Флажок **«Сделать переменные без ограничений неотрицательными»** позволит соблюсти условие неотрицательности переменных (при решении нашей задачи – поставить обязательно). Остальные параметры можно оставить без изменений, либо установить нужные для вас параметры, при необходимости используя справку.

Для запуска задачи на решение нажмите кнопку **Выполнить** (**Найти решение**) и выполните одно из следующих действий:

– чтобы сохранить найденное решение на листе, выберите в диалоговом окне **Результаты поиска** решения вариант **Сохранить найденное решение** (рис. 2.6);

– чтобы восстановить исходные данные, выберите вариант **Восстановить исходные значения**.

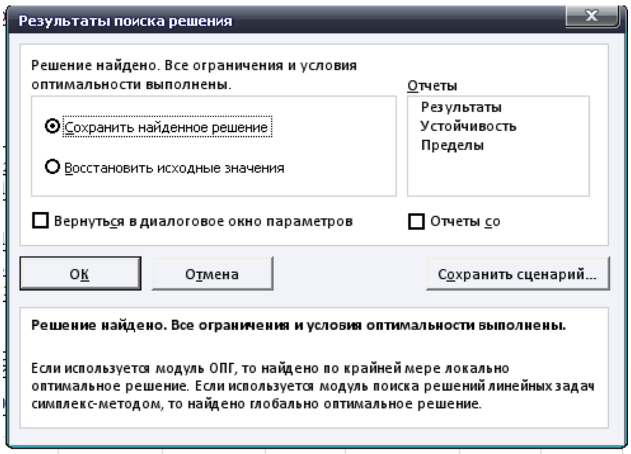
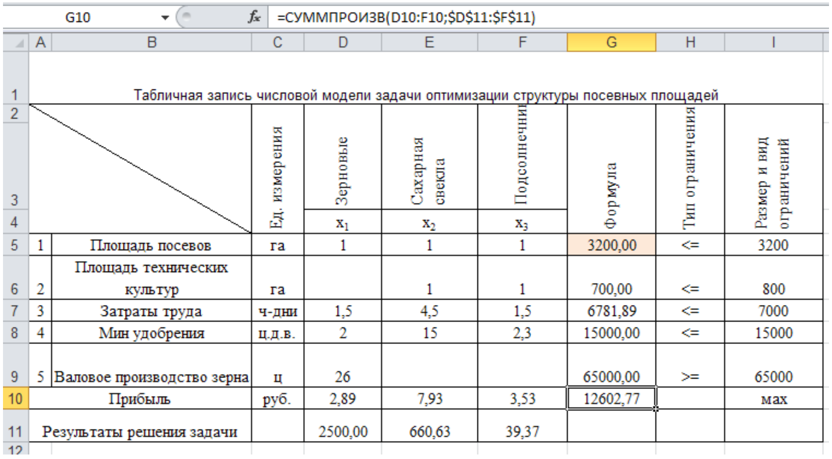


Рисунок 2.6 – **Результаты поиска решения задачи линейного программирования**

Для того чтобы прервать поиск решения, нажмите клавишу **ESC**.

Лист Microsoft Excel будет пересчитан с учетом найденных значений влияющих ячеек. В результате решения и сохранения результатов поиска на листе модель примет следующий вид (рис. 2.7).

В ячейках **D11-F11** получены значения искомых неизвестных (площади посева равны: зерновых - 2500 га, сахарной свеклы - 661 га, подсолнечника – 39 га), в ячейках **G5-G8** определены объемы используемых ресурсов (общей площади пашни – 3200 га; площади пашни, которая может быть использована под посевы технических культур – 700 га; трудовых – 6781,9 чел.-дней; минеральных удобрений – 15000 ц.д.в.), в ячейке **G9** установлено количество произведенного зерна (65000 ц.). При всех этих значениях величина прибыли достигает 12602,77 тыс. руб. (ячейка **G10**).



G10 =СУММПРОИЗВ(D10:F10;$D$11:$F$11)

Табличная запись числовой модели задачи оптимизации структуры посевных площадей

		Ед. измерения	Зерновые x_1	Сахарная свекла x_2	Подсолнечник x_3	Формула	Тип ограничения	Размер и вид ограничений
1	Площадь посевов	га	1	1	1	3200,00	<=	3200
2	Площадь технических культур	га		1	1	700,00	<=	800
3	Затраты труда	ч-дни	1,5	4,5	1,5	6781,89	<=	7000
4	Мин удобрения	ц.д.в.	2	15	2,3	15000,00	<=	15000
5	Валовое производство зерна	ц	26			65000,00	>=	65000
	Прибыль	руб.	2,89	7,93	3,53	12602,77		мах
	Результаты решения задачи		2500,00	660,63	39,37			

Рисунок 2.7 – **Табличная запись решенной задачи линейного программирования**

В случае если в результате поиска не было найдено решение, удовлетворяющее заданным условиям, в диалоговом окне **Результаты поиска решения** появится соответствующее сообщение (рис. 2.8).

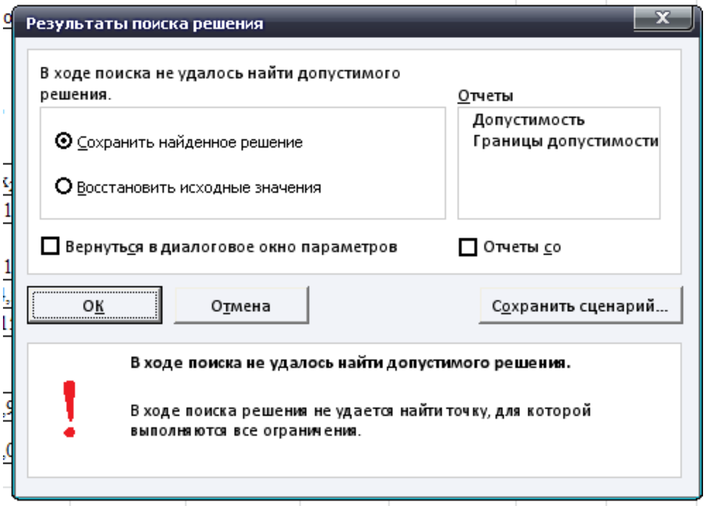


Рисунок 2.8 – **Окно вывода результатов поиска решения в MS Excel**

Одной из наиболее часто встречающихся причин невозможности найти оптимальное решение является такая ситуация, когда в результате решения задачи выясняется, что имеются ограничения, которые не выполняются. Сохранив найденное решение на листе, требуется построчно сравнить полученные значения столбцов «Сумма произведений» и «Объем ограничений» и проверить, удовлетворяет ли отношение между ними ограничению, стоящему в столбце «Тип ограничений». Найдя, таким образом, невыполняемые ограничения необходимо найти и ликвидировать причины, обуславливающие невозможность соблюдения данного конкретного условия (это может быть, например, слишком большие или, наоборот, очень маленькие запланированные объемы ограничений и т.п.).

Варианты заданий

1. Хозяйство производит 2 вида продукции. за единицу производства культуры А оно получает прибыль 5.д.е, а культуры В – 4 д.е. Площадь посевов составляет 100 га. Ограничение трудовых ресурсов соответствует 110. чел.-дней. Для обработки единицы площади культуры А необходимо 2.. чел.-дней, а культуры В - …1..чел.- дней. Кроме того, нужно поставить на рынок не менее 30. т. продукции культуры В при урожайности 2 т/га. Требуется разделить площадь таким образом, чтобы получить максимальную прибыль.
2. Хозяйство производит 2 вида продукции. за единицу производства культуры А оно получает прибыль 3..д.е, а культуры В – 2 д.е. Площадь посевов составляет 50. га. Ограничение трудовых ресурсов соответствует 168.. чел.-дней. Для обработки единицы площади культуры А необходимо 4.. чел.-дней, а культуры В - …3..чел.- дней. Кроме того, необходимо поставить на рынок не менее …20. т. продукции культуры В при урожайности 2 т/га. Требуется разделить площадь таким образом, чтобы получить максимальную прибыль.
3. Хозяйство производит 2 вида продукции. за единицу производства культуры А оно получает прибыль 2..д.е, а культуры В – 3 д.е. Площадь посевов составляет 25. га. Ограничение трудовых ресурсов соответствует 105.. чел.-дней. Для обработки единицы площади культуры А необходимо 3.. чел.-дней, а культуры В - 4..чел.- дней. Кроме того, необходимо поставить на рынок не менее 25. т. продукции культуры А при урожайности 2,5…т/га. Требуется разделить площадь таким образом, чтобы получить максимальную прибыль.
4. Хозяйство производит 2 вида продукции. за единицу производства культуры А оно получает прибыль…3..д.е, а культуры В – 5 д.е. Площадь посевов составляет …60. га. Ограничение трудовых ресурсов соответствует …150.. чел.-дней. Для обработки единицы площади культуры А необходимо …2.. чел.-дней, а культуры В - …3..чел.-дней. Кроме того, необходимо поставить на рынок не менее 30 т. продукции культуры А при урожайности 2…т/га. Требуется разделить площадь таким образом, чтобы получить максимальную прибыль.
5. Хозяйство производит 2 вида продукции. за единицу производства культуры А оно получает прибыль 5…..д.е, а культуры В – 2 д.е. Площадь посевов составляет 90. га. Ограничение трудовых ресурсов соответствует 210. чел.-дней. Для обработки единицы площади культуры А необходимо …3.. чел.-дней, а культуры В - …2..чел.-дней. Кроме того, необходимо поставить на рынок не менее 40…. т. продукции культуры А при урожайности 2…т/га. Требуется разделить площадь таким образом, чтобы получить максимальную прибыль.
6. Хозяйство производит 2 вида продукции. за единицу производства культуры А оно получает прибыль 4…..д.е, а культуры В – 3 д.е. Площадь посевов составляет 50…. га. Ограничение трудовых ресурсов соответствует 135. чел.-дней. Для обработки единицы площади культуры А необходимо 3.. чел.-дней, а культуры В - …2..чел.- дней. Кроме того необходимо поставить на рынок не менее 35 т. продукции культуры В при урожайности …2 т/га. Требуется разделить площадь таким образом, чтобы получить максимальную прибыль.
7. Хозяйство производит 2 вида продукции. за единицу производства культуры А оно получает прибыль …3..д.е, а культуры В – 7 д.е. Площадь посевов составляет 75. га. Ограничение трудовых ресурсов соответствует 180.. чел.-дней. Для обработки единицы площади культуры А необходимо 2.. чел.-дней, а культуры В - 5..чел.-

дней. Кроме того необходимо поставить на рынок не менее …40. т. продукции культуры А при урожайности 2т/га. Требуется разделить площадь таким образом, чтобы получить максимальную прибыль.

8. Хозяйство производит 2 вида продукции за единицу производства культуры А оно получает прибыль …4..д.е, а культуры В – 3 д.е. Площадь посевов составляет 65. га. Ограничение трудовых ресурсов соответствует 165.. чел.-дней. Для обработки единицы площади культуры А необходимо …3.. чел.-дней, а культуры В - …2..чел.-дней. Кроме того, необходимо поставить на рынок не менее 30. т. продукции культуры В при урожайности 1,5…т/га. Требуется разделить площадь таким образом, чтобы получить максимальную прибыль.

9. Хозяйство производит 2 вида продукции за единицу производства культуры А оно получает прибыль 3.д.е, а культуры В – 5 д.е. Площадь посевов составляет 50 га. Ограничение трудовых ресурсов соответствует 180 чел.-дней. Для обработки единицы площади культуры А необходимо 3.. чел.-дней, а культуры В - 4..чел.- дней. Кроме того, нужно поставить на рынок не менее 45. т. продукции культуры А при урожайности 2 т/га. Требуется разделить площадь таким образом, чтобы получить максимальную прибыль.

10. Хозяйство производит 2 вида продукции. За единицу производства культуры А оно получает прибыль 5.д.е, а культуры В – 6 д.е. Площадь посевов составляет 35 га. Ограничение трудовых ресурсов соответствует 135 чел.-дней. Для обработки единицы площади культуры А необходимо 3.. чел.-дней, а культуры В - 5..чел.-дней. Кроме того, нужно поставить на рынок не менее 42. т. продукции культуры А при урожайности 2 т/га. Требуется разделить площадь таким образом, чтобы получить максимальную прибыль.

11. Хозяйство производит 2 вида продукции. За единицу производства культуры А оно получает прибыль 5.д.е, а культуры В – 3 д.е. Площадь посевов составляет 55 га. Ограничение трудовых ресурсов соответствует 132. чел.-дней. Для обработки единицы площади культуры А необходимо 3.. чел.-дней, а культуры В - 2..чел.-дней. Кроме того, нужно поставить на рынок не менее 30. т. продукции культуры В при урожайности 2 т/га. Требуется разделить площадь таким образом, чтобы получить максимальную прибыль.

12. Хозяйство производит 2 вида продукции. За единицу производства культуры А оно получает прибыль 4.д.е, а культуры В – 7 д.е. Площадь посевов составляет 40 га. Ограничение трудовых ресурсов соответствует 132. чел.-дней. Для обработки единицы площади культуры А необходимо 3.. чел.-дней, а культуры В - …4..чел.- дней. Кроме того, нужно поставить на рынок не менее 36. т. продукции культуры А при урожайности 2 т/га. Требуется разделить площадь таким образом, чтобы получить максимальную прибыль.

13. Хозяйство производит 2 вида продукции. За единицу производства культуры А оно получает прибыль 2 .д.е, а культуры В – 4 д.е. Площадь посевов составляет 38 га. Ограничение трудовых ресурсов соответствует 90. чел.-дней. Для обработки единицы площади культуры А необходимо 2. чел.-дней, а культуры А - 3..чел.-дней. Кроме того, нужно поставить на рынок не менее 60 т. продукции культуры А при урожайности 2 т/га. Требуется разделить площадь таким образом, чтобы получить максимальную прибыль.

14. Хозяйство производит 2 вида продукции. За единицу производства культуры А оно получает прибыль 6.д.е, а культуры В – 3 д.е. Площадь посевов составляет 50 га. Ограничение трудовых ресурсов соответствует 132. чел.-дней. Для обработки единицы площади культуры А необходимо 4.. чел.-дней, а культуры В - 2..чел.-дней. Кроме того, нужно поставить на рынок не менее 40. т. продукции культуры В при урожайности 2 т/га. Требуется разделить площадь таким образом, чтобы получить максимальную прибыль.

15. Хозяйство производит 2 вида продукции. За единицу производства культуры А оно получает прибыль 5.д.е, а культуры В – 7 д.е. Площадь посевов составляет 40 га. Ограничение трудовых ресурсов соответствует 156. чел.-дней. Для обработки единицы площади культуры А необходимо 3.. чел.-дней, а культуры В - …4..чел.- дней. Кроме того, нужно поставить на рынок не менее 46. т. продукции культуры А при урожайности 2 т/га. Требуется разделить площадь таким образом, чтобы получить максимальную прибыль.

16. Хозяйство производит 2 вида продукции. За единицу производства культуры А оно получает прибыль 3 .д.е, а культуры В – 5 д.е. Площадь посевов составляет 52 га. Ограничение трудовых ресурсов соответствует 126. чел.-дней. Для обработки единицы площади культуры А необходимо 2. чел.-дней, а культуры А - 3..чел.-дней. Кроме того, нужно поставить на рынок не менее 35 т. продукции культуры А при урожайности 2 т/га. Требуется разделить площадь таким образом, чтобы получить максимальную прибыль.

2.2 СПЕЦИАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

В рамках задач линейного программирования выделяют задачи, отличающиеся некоторыми особенностями. Так, в ряде случаев приходится решать задачи, когда переменные могут принимать только целые неотрицательные значения. Такие задачи называют задачами целочисленного программирования. Их особенность заключается в поиске таких целочисленных неизвестных, значения которых позволяли бы получать экстремум целевой функции. Проблема при решении такой задачи заключается в том, что при стандартных методах поиска оптимального плана с округлением полученных значений можно получить неправильный результат. В этом случае применяются другие подходы для описания дискретных величин.

К специальным задачам линейного программирования относят задачу параметрического программирования, в которой коэффициенты при переменных целевой функции, правые части ограничений и множители возле неизвестных левых частей условий зависят от некоторого параметра или параметров. В качестве таковых используют время, предшествующие значения последовательностей и некоторые факторы, влияющие на перечисленные характеристики. В задаче параметрического программирования в отличие от обычной задачи линейного программирования коэффициенты при неизвестных и свободные члены (правые части ограничений) не являются постоянными величинами. Следовательно, в этом случае имеет место множество оптимальных планов, которое зависит от параметров.

В отдельную группу задач выделяют задачи дробно-линейного программирования. В целевую функцию этой задачи входят в качестве числителя и знаменателя два выражения. При несложных операциях эта задача может быть преобразована к задаче линейного программирования.

2.2. 1 Транспортная задача

Среди специальных задач линейного программирования выделяется транспортная задача. Остановимся подробнее на формулировке этой задачи.

В транспортной задаче рассматриваются пункты отправления $A_1, A_2,..., A_m$ и назначения $B_1, B_2,..., B_n$. Задача состоит в нахождении оптимального плана перевозки груза x_{ij} из пунктов отправления в пункты назначения. Если тариф перевозки единицы груза обозначить c_{ij} и целевая функция представляет собой минимальную стоимость перевозки, то транспортная задача записывается в следующем виде:

$$f = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}, \tag{2.17}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad (i = \overline{1,m}), \tag{2.18}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad (j = \overline{1,n}), \tag{2.19}$$

$$x_{ij} \geq 0, \tag{2.20}$$

a_i – объемы товара в пунктах отправления; b_j – потребности в грузе в пунктах назначения.

Неотрицательное решение уравнений (2,18) и (2,19), определенное матрицей $X=(x_{ij})$, является планом транспортной задачи. План $X^* = (x_{ij}^*)$ $(i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n})$, при котором функция (2,17) достигает минимума, называется оптимальным планом.

Если объем груза поставщиков соответствует его потребности, т.е.

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j, \tag{2.21}$$

то задача считается закрытой. В противном случае, если равенство (2,21) представляет собой неравенство, транспортная задача называется открытой. При преобладании левой части над правой вводится дополнительный пункт назначения $n+1$. Потребность в этом случае для дополнительного пункта равна $\sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$ с тарифом перевозки, равным нулю. Если же имеет место дефицит груза (правая часть равенства (2,21) преобладает на левой), тогда вводят дополнительный пункт поставки $m+1$ с запасом груза $\sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i$. Как и в предыдущем случае тариф приравнивают к нулю.

При решении транспортной задачи можно использовать симплекс-метод. Вместе с тем он не всегда является эффективным. Поэтому применяются другие методы, учитывающие особенности транспортных задач.

Рассмотрим метод потенциалов, который состоит из нескольких этапов. В начале составляется опорный план перевозок. На этом этапе можно использовать следующие методы: наименьших стоимостей, северо-западного угла и аппроксимации Фогеля. На втором этапе применимы методы потенциалов и дифференциальных рент. Здесь осуществляется проверка оптимальности оперного плана. Если опорный план не оптимален, то выполняется корректировка плана (третий этап). Итерации второго и третьего этапов завершаются при получении оптимального решения.

В учебном пособии рассмотрено определение оптимального плана на примере. При этом использованы методы наименьших стоимостей и потенциалов. Предложенные методы применены для закрытой транспортной задачи, когда суммы поставляемых и потребляемых товаров равны. Следует подчеркнуть, что число базисных ячеек равно $m+n-1$, где m, n – число потребителей и поставщиков. Поскольку задача является закрытой, то количество отличных от нуля неизвестных (базисные переменные) на единицу меньше суммы $m+n$.

Пример 2.6. На двух полях A_1 и A_2 собран урожай картофеля 1800 и 2400 т. Полученную продукцию необходимо поставить в три склада B_1, B_2 и B_3. В первом из них может храниться 1200 т картофеля, во втором – 2000 т и в третьем – 1000 т. Известна стоимость перевозки, приведенная в таблице 28. Требуется сформулировать транспортную задачу, в которой целевая функция характеризует минимальные затраты на перевозку продукции.

Таблица 2.7 – **Тариф перевозки картофеля, д.е./т**

Поля	Склады			Запасы
	B_1	B_2	B_3	
A_1	11	9	12	1800
A_2	10	13	14	2400
Потребности	1200	2000	1000	4200

Целевая функция с учетом тарифов примет вид

$$f=11x_{11}+9x_{12}+12x_{13}+10x_{21}+13x_{22}+14x_{23}\rightarrow min.$$

Ограничения по перевозке продукции из полей в хранилища записываются так:

$$x_{11}+x_{12}+x_{13}=1800\ [m],$$
$$x_{21}+x_{22}+x_{23}=2400\ [m].$$

Условия, связанные с возможностями хранилищ имеют вид:

$$x_{11}+x_{21}=1200\ [m],$$

$$x_{12}+x_{21}=2000\ [т],$$
$$x_{13}+x_{23}=1000\ [т].$$

Задача является закрытой, поскольку объемы картофеля соответствуют емкостям хранилищ.

Пример 2.7. В таблице 2.7 приведены исходные данные транспортной задачи. Определить оптимальный план.

На первом этапе определяется опорный план. Для наименьшей стоимости (9 д.е.), которая находится на пересечении первой строки и второго столбца, присваиваем максимальное значение переменной x_{12}, равное 1800 (таблица 2.8).

Таблица 2.8 – **Определение опорного плана**

Поставщики, т	Потребители, т		
	1200	2000	1000
1800	11	9 1800	12
2400	10 1200	13 200	14 1000

Поскольку во втором столбце сумма должна соответствовать 2000, определяем значение x_{23} =200. Следующая наименьшая стоимость равна 10, поэтому x_{12} = 1200, что соответствует суммарному значению первого потребителя. Для того чтобы во второй строке сумма равнялась 2400, переменной x_{23} присвоено значение 1000.

В результате суммарные затраты составят

$$f(x) = c_{12} \times x_{12} + c_{21} \times x_{21} + c_{22} \times x_{22} + c_{23} \times x_{23} =$$
$$9 \times 1800 + 10 \times 1200 + 13 \times 200 + 14 \times 1000 = 48000 \text{ д.е.}$$

На втором этапе проверяется оптимальность полученного плана. Для этого вводятся переменные u_i и v_j , соответствующие строкам и столбцам (таблица 2.9). Эти переменные характеризуют потенциал или цены товаров в соответствующих пунктах поставщиков и потребителей. Потенциалы определяются по формуле

$$v_j = u_i + c_{ij}.$$

При этом одно из неизвестных, например, u_1 может быть равно 0.

Таблица 2.9 – **Нахождение потенциалов поставщиков и потребителей**

Поставщики, т	Потребители, т			u_i
	1200	2000	1000	
1800	11	9 / 1800	12	0
2400	10 / 1200	13 / 200	14 / 1000	-4
v_j	6	9	10	

В таблице 2.9 приведены значения u_i и v_j, полученные на основе базисных переменных. В начале значение потенциала стоит приравнять к 0 (u_1 = 0). Тогда согласно формуле потенциалов v_2 = 9. По тому же выражению нетрудно найти u_2=9 – 13 = -4.

Зная это значение, получаем v_1 = 10 – 4 =6 и v_3 = 14 – 4 =10.

Для оценки оптимальности плана используется формула

$$d_{ij} = (u_i + c_{ij}) - V_j .$$

Это выражение позволяет определить матрицу, размер которой соответствует числу строк и столбцов исходной таблицы $m \times n$. Исходя из этой формулы, матрица оценок оптимального плана имеет вид

$$d_{ij} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Поскольку все оценки неотрицательны, то полученный план не может быть улучшен. Следовательно, определено оптимальное решение. Третий этап, связанный с улучшением плана не понадобился.

Пример 2.8. Пусть задан опорный план (таблица 2.10). Требуется получить оптимальное решение, используя метод потенциала.

Используя формулу оценки оптимальности плана d_{ij}, получим следующую матрицу

$$d_{ij} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Целевая функция при этом

$$f(x) = 9 \times 800 + 12 \times 1000 + 10 \times 1200 + 13 \times 1200 = 46800$$

Приведенный план не является оптимальным ввиду наличия отрицательного элемента в матрице. Построим контур перераспределения значений x_{ij} в виде штриховой (таблица 2.11). Началом контура является ячейка с наименьшим потенциалом. При этом потенциалам, располагаемым по диагонали, присваивается символ + или - .

Таблица 2.10 – **Опорный план транспортной задачи**

Поставщики, т	Потребители, т		
	1200	2000	1000
1800	11	9 800	12 1000
2400	10 1200	13 1200	14

Таблица 2.11 – **Транспортная задача с потенциалами потребителей и поставщиков**

Поставщики, т	Потребители, т			u_i
	1200	2000	1000	
1800	11	9+ 800	12- 1000	0
2400	10 1200	13- 1200	14+	-4
v_j	6	9	12	

Перераспределение осуществляется с отрицательных в положительные ячейки. Тогда значение x_{13}=1000 перенесем в соседнюю клетку, увеличив величину x_{12} до 1800. В этом случае x_{13}=0. Что касается значения x_{22} =1200, то оно распределено так: x_{22} =200 и x_{23}=1000 (таблица 2.12).

Матрица оценок полученного плана примет вид

$$d_{ij} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Таблица 2.12 - **Итерация получения нового плана**

Поставщики, т	Потребители, т			u_i
	1200	2000	1000	
1800	11	9 / 1800	12	0
2400	10 / 1200	13 / 200	14 / 1000	-4
v_j	6	9	10	

Поскольку отрицательные элементы в матрице отсутствуют, определено оптимальное решение: $f(x) = 9 \times 1800 + 10 \times 1200 + 13 \times 200 + 14 \times 1000 = 44800$ д.е.

Таким образом, первая итерация позволила получить оптимальный результат.

Варианты заданий

1. На двух полях A_1 и A_2 собран урожай картофеля 1400 и 2000 т. Полученную продукцию необходимо поставить в три склада B_1, B_2 и B_3. В первом из них может храниться 1200 т картофеля, во втором – 1300 т и в третьем – 900 т. Известна стоимость перевозки, приведенная в таблице. Требуется сформулировать транспортную задачу, в которой целевая функция характеризует минимальные затраты на перевозку продукции.

Тариф перевозки картофеля, д.е./т

Поля	Склады			Запасы
	B_1	B_2	B_3	
A_1	10	9	12	1400
A_2	11	13	14	2000
Потребности	1200	1300	900	3400

2. На двух полях A_1 и A_2 собран урожай картофеля 2200 и 2000 т. Полученную продукцию необходимо поставить в три склада B_1, B_2 и B_3. В первом из них может храниться 1200 т картофеля, во втором – 1600 т и в третьем – 1400 т. Известна стоимость перевозки, приведенная в таблице. Требуется сформулировать транспортную задачу, в которой целевая функция характеризует минимальные затраты на перевозку продукции.

Тариф перевозки картофеля, д.е./т

Поля	Склады			Запасы
	B_1	B_2	B_3	
A_1	12	9	12	2200
A_2	10	15	14	2000
Потребности	1200	1600	1400	4200

3. На двух полях А1 и А2 собран урожай картофеля 1800 и 2000 т. Полученную продукцию необходимо поставить в три склада В1, В2 и В3. В первом из них может храниться 1000 т картофеля, во втором – 1600 т и в третьем – 1200 т. Известна стоимость перевозки, приведенная в таблице. Требуется сформулировать транспортную задачу, в которой целевая функция характеризует минимальные затраты на перевозку продукции.

Тариф перевозки картофеля, д.е./т

Поля	Склады			Запасы
	B_1	B_2	B_3	
A_1	11	9	14	1800
A_2	10	13	12	2000
Потребности	1000	1600	1200	3800

4. На двух полях A_1 и A_2 собран урожай картофеля 1900 и 2100 т. Полученную продукцию необходимо поставить в три склада B_1, B_2 и B_3. В первом из них может храниться 1100 т картофеля, во втором – 1600 т и в третьем – 1300 т. Известна стоимость перевозки, приведенная в таблице. Требуется сформулировать транспортную задачу, в которой целевая функция характеризует минимальные затраты на перевозку продукции.

Тариф перевозки картофеля, д.е./т

Поля	Склады			Запасы
	B_1	B_2	B_3	
A_1	12	9	13	1900
A_2	10	13	11	2100
Потребности	1100	1600	1300	4000

5. На двух полях A_1 и A_2 собран урожай картофеля 2500 и 2100 т. Полученную продукцию необходимо поставить в три склада B_1, B_2 и B_3. В первом из них может храниться 1500 т картофеля, во втором – 1700 т и в третьем – 1400 т. Известна стоимость перевозки, приведенная в таблице. Требуется сформулировать транспортную задачу, в которой целевая функция характеризует минимальные затраты на перевозку продукции.

Тариф перевозки картофеля, д.е./т

Поля	Склады			Запасы
	B_1	B_2	B_3	
A_1	13	10	15	2500
A_2	11	14	12	2100
Потребности	1500	1700	1400	4600

6. На двух полях A_1 и A_2 собран урожай картофеля 2400 и 2200 т. Полученную продукцию необходимо поставить в три склада B_1, B_2 и B_3. В первом из них может храниться 1500 т картофеля, во втором – 1800 т и в третьем – 1300 т. Известна стоимость перевозки, приведенная в таблице. Требуется сформулировать транспортную задачу, в которой целевая функция характеризует минимальные затраты на перевозку продукции.

Тариф перевозки картофеля, д.е./т

Поля	Склады			Запасы
	B_1	B_2	B_3	
A_1	14	11	15	2400
A_2	12	14	12	2200
Потребности	1500	1800	1300	4600

7. На двух полях A_1 и A_2 собран урожай картофеля 2600 и 2200 т. Полученную продукцию необходимо поставить в три склада B_1, B_2 и B_3. В первом из них может храниться 1400 т картофеля, во втором – 1900 т и в третьем – 1500 т. Известна стоимость перевозки, приведенная в таблице. Требуется сформулировать транспортную задачу, в которой целевая функция характеризует минимальные затраты на перевозку продукции.

Тариф перевозки картофеля, д.е./т

Поля	Склады			Запасы
	B_1	B_2	B_3	
A_1	13	11	15	2600
A_2	12	14	10	2200
Потребности	1400	1900	1500	4800

8. На двух полях A_1 и A_2 собран урожай картофеля 1500 и 2000 т. Полученную продукцию необходимо поставить в три склада B_1, B_2 и B_3. В первом из них может храниться 1200 т картофеля, во втором – 1300 т и в третьем – 1000 т. Известна стоимость перевозки, приведенная в таблице. Требуется сформулировать транспортную задачу, в которой целевая функция характеризует минимальные затраты на перевозку продукции.

Тариф перевозки картофеля, д.е./т

Поля	Склады			Запасы
	B_1	B_2	B_3	
A_1	13	12	15	1500
A_2	11	14	10	2000
Потребности	1200	1300	1000	3500

9. На двух полях A_1 и A_2 собран урожай картофеля 1900 и 2100 т. Полученную продукцию необходимо поставить в три склада B_1, B_2 и B_3. В первом из них может храниться 1300 т картофеля, во втором – 1200 т и в третьем – 1500 т. Известна стоимость перевозки, приведенная в таблице. Требуется сформулировать транспортную задачу, в которой целевая функция характеризует минимальные затраты на перевозку продукции.

Тариф перевозки картофеля, д.е./т

Поля	Склады			Запасы
	B_1	B_2	B_3	
A_1	12	13	14	1900
A_2	11	15	10	2100
Потребности	1300	1200	1500	4000

10. На двух полях A_1 и A_2 собран урожай картофеля 1600 и 2000 т. Полученную продукцию необходимо поставить в три склада B_1, B_2 и B_3. В первом из них может храниться 1000 т картофеля, во втором – 1200 т и в третьем – 1400 т. Известна стоимость перевозки, приведенная в таблице. Требуется сформулировать транспортную задачу, в которой целевая функция характеризует минимальные затраты на перевозку продукции.

Тариф перевозки картофеля, д.е./т

Поля	Склады			Запасы
	B_1	B_2	B_3	
A_1	13	12	14	1600
A_2	10	15	11	2000
Потребности	1000	1200	1400	3600

11. На двух полях A_1 и A_2 собран урожай картофеля 2600 и 2100 т. Полученную продукцию необходимо поставить в три склада B_1, B_2 и B_3. В первом из них может храниться 1800 т картофеля, во втором – 1700 т и в третьем – 1200 т. Известна стоимость перевозки, приведенная в таблице. Требуется сформулировать транспортную задачу, в которой целевая функция характеризует минимальные затраты на перевозку продукции.

Тариф перевозки картофеля, д.е./т

Поля	Склады			Запасы
	B_1	B_2	B_3	
A_1	13	13	14	2600
A_2	11	15	12	2100
Потребности	1800	1700	1200	4700

12. На двух полях A_1 и A_2 собран урожай картофеля 1800 и 2100 т. Полученную продукцию необходимо поставить в три склада B_1, B_2 и B_3. В первом из них может храниться 1300 т картофеля, во втором – 1200 т и в третьем – 1400 т. Известна стоимость перевозки, приведенная в таблице. Требуется сформулировать транспортную задачу, в которой целевая функция характеризует минимальные затраты на перевозку продукции.

Тариф перевозки картофеля, д.е./т

Поля	Склады			Запасы
	B_1	B_2	B_3	
A_1	13	11	15	1800
A_2	12	14	12	2100
Потребности	1300	1200	1400	3900

13. На двух полях A_1 и A_2 собран урожай картофеля 2000 и 2500 т. Полученную продукцию необходимо поставить в три склада B_1, B_2 и B_3. В первом из них может храниться 1400 т картофеля, во втором – 1200 т и в третьем – 1900 т. Известна стоимость перевозки, приведенная в таблице. Требуется сформулировать транспортную задачу, в которой целевая функция характеризует минимальные затраты на перевозку продукции.

Тариф перевозки картофеля, д.е./т

Поля	Склады			Запасы
	B_1	B_2	B_3	
A_1	13	11	12	2000
A_2	10	14	15	2500
Потребности	1400	1200	1900	4500

14. На двух полях A_1 и A_2 собран урожай картофеля 1400 и 1700 т. Полученную продукцию необходимо поставить в три склада B_1, B_2 и B_3. В первом из них может храниться 1400 т картофеля, во втором – 1200 т и в третьем – 1900 т. Известна стоимость перевозки, приведенная в таблице. Требуется сформулировать транспортную задачу, в которой целевая функция характеризует минимальные затраты на перевозку продукции.

Тариф перевозки картофеля, д.е./т

Поля	Склады			Запасы
	B_1	B_2	B_3	
A_1	12	10	12	1400
A_2	9	13	14	1700
Потребности	1000	1200	900	3100

15. На двух полях A_1 и A_2 собран урожай картофеля 1800 и 1700 т. Полученную продукцию необходимо поставить в три склада B_1, B_2 и B_3. В первом из них может храниться 1200 т картофеля, во втором – 1300 т и в третьем – 1000 т. Известна стоимость перевозки, приведенная в таблице. Требуется сформулировать транспортную задачу, в которой целевая функция характеризует минимальные затраты на перевозку продукции.

Тариф перевозки картофеля, д.е./т

Поля	Склады			Запасы
	B_1	B_2	B_3	
A_1	12	9	12	1800
A_2	10	13	14	1700
Потребности	1200	1300	1000	3500

16. На двух полях A_1 и A_2 собран урожай картофеля 1900 и 1800 т. Полученную продукцию необходимо поставить в три склада B_1, B_2 и B_3. В первом из них может храниться 1100 т картофеля, во втором – 1200 т и в третьем – 1400 т. Известна стоимость перевозки, приведенная в таблице. Требуется сформулировать транспортную задачу, в которой целевая функция характеризует минимальные затраты на перевозку продукции.

Тариф перевозки картофеля, д.е./т

Поля	Склады			Запасы
	B_1	B_2	B_3	
A_1	14	9	11	1900
A_2	10	13	14	1800
Потребности	1100	1200	1400	3700

2.2.2 Параметрическая задача

Отдельным классом задач линейного программирования являются ***параметрические задачи***, в которых исходные данные зависят от некоторого параметра или параметров.

В научной и учебной литературе многократно встречаются разделы, посвященные параметрическому программированию. Данное направление в линейном программировании достаточно изучено с теоретической точки зрения, но практическое их применение не имеет широкого распространения. При этом в сельском хозяйстве модели задач параметрического программирования почти не используются.

На практике выделяют следующие виды параметрической задачи:

1) задача, в которой коэффициенты целевой функции линейно зависят от параметра t

$$f = \sum_{j \in J} c_j(t) x_j , \tag{2.22}$$

при условиях

$$\sum_{j \in J} a_{ij} x_j = b_i , \; i \in I , \tag{2.23}$$

$$x_j \ge 0 , \; j \in J , \tag{2.24}$$

где f – целевая функция, x_j – переменная, t - параметр, c_j, a_{ij}, b_i – коэффициенты;

2) от параметра t линейно зависят свободные члены системы ограничений

$$F = \sum_{j \in J} c_j x_j , \tag{2.25}$$

при условиях

$$\sum_{j \in J} a_{ij} x_j = b_i(t), \; i \in I , \tag{2.26}$$

$$x_j \ge 0 , \; j \in J ; \tag{2.27}$$

3) от параметра t линейно зависят коэффициенты целевой функции и свободные члены системы ограничений

$$f = \sum_{j \in J} c_j(t) x_j , \tag{2.28}$$

при условиях

$$\sum_{j \in J} a_{ij} x_j = b_i(t), \; i \in I , \tag{2.29}$$

$$x_j \ge 0 , \; j \in J . \tag{2.30}$$

Обобщением этих задач является задача параметрического программирования, в которой от параметра t линейно зависят коэффициенты при неизвестных в целевой функции, коэффициенты при неизвестных в системе уравнений и свободные члены системы уравнений. Для каждого значения параметра t из некоторого промежутка его изменения $[\alpha,\beta]$ требуется найти максимальное значение функции:

$$f=\sum_{j\in J}c_j(t)x_j\,, \tag{2.31}$$

$$\sum_{j\in J}a_{ij}(t)x_j=b_i(t),\ i\in I\,, \tag{2.32}$$

$$x_j\ge 0,\ j\in J\,. \tag{2.33}$$

Вместе с тем возможно использование многопараметрических задач, в которых коэффициенты при неизвестных в целевой функции, коэффициенты при неизвестных в системе уравнений и свободные члены системы уравнений линейно зависят от нескольких параметров:

$$\sum_{j\in J}c_j(t_1,t_2,t_3,\ldots t_e)x_j\,,\ i\in I\,, \tag{2.34}$$

$$\sum_{j\in J}a_{ij}(t_1,t_2,t_3,\ldots t_e)x_j\le b_i(t_1,t_2,t_3,\ldots t_e),\ i\in I\,,\ e\in E\,, \tag{2.35}$$

$$x_j\ge 0,\ j\in J\,, \tag{2.36}$$

где параметр t_e изменяется в промежутке $[\alpha_e,\beta_e]$.

В задачах параметрического программирования коэффициенты при переменных в ограничениях и целевой функции зависят от некоторого параметра или параметров. В качестве таковых используется время, предшествующее значение и другие факторы, влияющие на характеристики модели[1 2].

Пример 2.9. Известно, что цена единицы продукции может изменяться для изделия А от 2 до 12 руб., а для изделия *B* - от 13 до 3 руб., причем эти изменения определяются соотношениями $c_1=2+t, c_2=13-t$, где *0≤t≤1/.*

Для каждого из возможных значений цены единицы продукции каждого из видов найти такой план их производства, при котором общая стоимость продукции является максимальной.

Решение

Предположим, что предприятие изготовит x_1 единиц продукции *A* и x_2 единиц продукции *B*. Тогда математическая постановка задачи состоит в определении для каждого значения параметра $t\,(0\le t\le 10)$.максимального значения функции

$$f=(2+t)\,x_1+(13-t)\,x_2$$

---

[1]Барсукова М.Н. Оптимизационные модели планирования производства стабильных сельскохозяйственных предприятий /М.Н. Барсукова, Я.М. Иваньо. – Иркутск: Изд-во ИрГСХА, 2011. –. -160 с.

[2]Развитие моделей планирования получения продовольственной продукции / М.Н. Барсукова, Н.В. Бендик, А.Ю. Белякова, Т.С. Бузина, Е.В. Вашукевич, Я.М. Иваньо //Информационные и математические технологии в науке и управлении, 2018. – №3 (11). - С. 96-107.

при условиях

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 \le 16 \\ 2x_1 + 2x_2 \le 22 \\ 6x_1 + 3x_2 \le 36 \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \ge 0.$$

Чтобы найти решение задачи, строим многоугольник решений, определяемый системой линейных неравенств и условием неотрицательности переменных (рисунок 2.9).

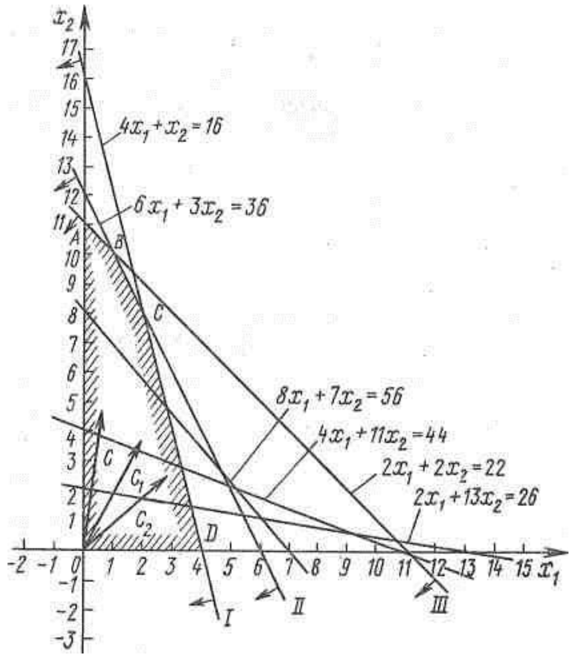


Рисунок 2.9 – Графическая интерпретация решения задачи параметрического программирования[1]

После этого, полагая, что $t = 0$, строим прямую $2x_1 + 13x_2 = 26$ (число 26 взято произвольно) и вектор $C = (2, 13)$. Передвигая построенную прямую в направлении вектора C, определяем, что последней общей точкой ее с многоугольником решений *OABCD* является точка *A* (0, 11). Следовательно, задача, полученная из исходной задачи при $t = 0$, имеет оптимальный план $X_0^* = (0{,}11)$. Это означает, что если цена единицы продукции *A* равна 2 + 0 = 2 руб., а цена единицы продукции *B* составляет 13 - 0 = 13 руб., то оптимальным планом производства является план, согласно которому производится 11 изделий *B* и не производятся изделия *A*.

При таком плане производства продукции ее стоимость максимальна и равна $f_{\max} = 143$.

Акулич И.Л. Математическое программирование в примерах и задачах. Учеб. пособие. – 2-е изд., испр. и доп. – М.: Высш. шк., 1993. – 336 с.

Положим теперь $t=2$ и построим прямую $(2+2)x_1+(13-2)x_2=4x_1+11x_2=44$ (число 44 взято произвольно) и вектор C_1 = (4, 11). В результате, задача, полученная из исходной задачи при $t = 2$, имеет оптимальный план $X_0^*=(0,11)$. Это означает, что если цена единицы продукции А равна 2 + 2 = 4 руб., а цена единицы продукции *В* составляет 13 - 2 = 11 руб., то предприятию также наиболее целесообразно производить 11 ед. продукции вида *В* и совсем не производить продукцию вида *А*.

При таком плане производства продукции ее общая стоимость является максимальной и составляет $f_{\max}=121$.

Как видно из рисунка 2.9, данный план производства продукции будет оставаться оптимальным для всякого значения *t*, пока прямая $(2+t)x_1+(13-t)x_2=h$ не станет параллельной прямой $2x_1+2x_2=22$. Это произойдет тогда, когда $(2+t)/2=(13-t)/2$, т. е. при t =5,5. При этом значении t координаты любой точки отрезка *АВ* дают оптимальный план задачи.

Таким образом, для всякого $0\le t\le 5{,}5$ задача имеет оптимальный план $X_0^*=(0,11)$, при котором значение целевой функции есть $f_{\max}=(2+t)0+(13-t)11=143-11t$.

Если $t\geq 5{,}5$, например, 6, то получим прямую $(2+6)x_1+(13-6)x_2=8x_1+7x_2=56$. Правая часть равенства взята произвольно. Вектор целевой функции имеет координаты $C_2(8, 7)$. Передвигая прямую в направлении этого вектора получим оптимальное решение задачи в точке *В(1, 10)* или $X^*(1, 10)$. В этом случае целевая функция достигнет максимума $f_{max}=8\cdot 1+7\cdot 10=78$. Нетрудно показать, что приведенная точка $X^*(1, 10)$ является оптимальным планом на отрезке $5{,}5\leq t\leq 8$. Тогда целевая функция примет вид $f_{max}=(2+t)\cdot 1+(13-t)\cdot 10=132-9t$. Для периода времени $8<t\leq 10$ оптимальным планом является $X^*(2, 8)$, а целевая функция соответствует $f_{max}=108-6t$ (Акулич, 1993).

Варианты заданий

Задача 1. Предприятие изготавливает x_1 единиц продукции *А* и x_2 единиц продукции *В*. Математическая постановка задачи состоит в определении для каждого значения параметра $(0\le t\le 14)$ максимального значения функции

$$f=(1+t)x_1+(15-t)x_2$$

при условиях

$$\begin{aligned}&4x_1+x_2\le 16\\&x_1+x_2\le 11\\&2x_1+x_2\le 12\\&x_1,x_2\ge 0\end{aligned}$$

1. Решается задача при $0\le t\le 2$.
2. Решается задача при $3\le t\le 4$.

3. Решается задача при $5 \le t \le 6$.
4. Решается задача при $7 \le t \le 8$.
5. Решается задача при $9 \le t \le 10$.
6. Решается задача при $11 \le t \le 12$.
7. Решается задача при $13 \le t \le 14$.

Задача 2. Предприятие изготавливает x_1 единиц продукции *A* и x_2 единиц продукции *B*. Математическая постановка задачи состоит в определении для каждого значения параметра $(0 \le t \le 10)$ максимального значения функции

$$f = (2+t)x_1 + (11-t)x_2$$

при условиях

$$\begin{aligned}
&4x_1 + x_2 \le 16 \\
&x_1 + x_2 \le 11 \\
&2x_1 + x_2 \le 12 \\
&x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}$$

8. Решается задача при $0 \le t \le 2$.
9. Решается задача при $3 \le t \le 4$.
10. Решается задача при $5 \le t \le 6$.
11. Решается задача при $7 \le t \le 8$.
12. Решается задача при $9 \le t \le 10$.

2.2.3 Задача дробно-линейного программирования

В задаче дробно-линейного программирования целевая функция является нелинейной и состоит из числителя и знаменателя:

$$f = \frac{q_0 + \sum_{j=1}^{n} q_j x_j}{s_0 + \sum_{j=1}^{n} s_j x_j}, \tag{2.37}$$

где x_j- количество реализуемой продукции j-го вида, q_j – прибыль от реализации единицы продукции j-го вида, s_j – себестоимость единицы продукции j-го вида.

Ограничения описываются линейными равенствами:

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \; i = \overline{1, m}, \\
&x_j \ge 0,
\end{aligned} \tag{2.38}$$

где a_{ij}, b_i – постоянные коэффициенты.

Ограничения описываются линейными равенствами:

$$\sum_{j=1}^{n} s_j x_j \neq 0. \qquad (2.39)$$

Сведем задачу дробно-линейного программирования к задаче линейного программирования.

Для этого вводятся новые переменные

$$y_0 = \frac{1}{s_0 + \sum_{j=1}^{n} s_j x_j}. \qquad (2.40)$$

В этом случае целевая функция становится линейной

$$f = q_0 y_0 + \sum_{j=1}^{n} q_j y_j. \qquad (2.41)$$

При этом ограничения примут вид:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j - b_i y_0 = 0,\ i = \overline{1, m}, \qquad ((2.42)$$

$$y_0 (s_0 + \sum_{j=1}^{n} s_j x_j) = 1. \qquad (2.43)$$

Приведем пример задачи дробно-линейного программирования.

Пример 2.10. Требуется максимизировать целевую функцию вида

$$f = \frac{2x_1 - x_2}{1 + x_1 + 2x_2}.$$

При этом ограничения записываются следующим образом:

$$x_1 - 2x_2 + x_3 = 2,$$
$$2x_1 + x_2 + x_4 = 6,$$
$$x_j \geq 0,\ j = 1, 2, 3, 4.$$

Решение. Введем обозначение

$$y_0 = \frac{1}{1 + x_1 + 2x_2},$$
$$y_0 > 0, y_1 = x_1 y_0, y_2 = x_2 y_0,\ y_3 = x_3 y_0, y_4 = x_4 y_0.$$

Исходная задача примет вид:

$$f = 2y_1 - y_2$$
$$y_1 - 2y_2 + y_3 = 2y_0,$$
$$2y_1 + y_2 + y_4 = 6y_0,$$
$$y_0 + y_1 + 2y_2 = 1, y_0 > 0.$$

Результатом решения системы трех уравнений с тремя неизвестными будут следующие значения переменных

$$y_0 = 1/3,\ y_1 = 2/3,\ y_2 = y_3 = 0,\ y_4 = 2/3$$

или $x_1 = y_1 / y_0 = 2,\ x_2 = y_2 / y_0 = 0,\ x_3 = y_3 / y_0 = 0,\ x_4 = y_4 / y_0 = 2.$

При этом максимальное значение целевой функции соответствует $f_{max}=4/3$.

Задания к разделу

Найти оптимальное решение задачи дробно-линейного программирования.

1. $f = \dfrac{2x_1 + 3x_2}{x_1 + x_2} \to \min$,

$2x_1 + 8x_2 \le 26,$

$x_1 + x_2 \ge 4,$

$12x_1 + 3x_2 \le 39.$

$x_1,\ x_2 \ge 0.$

2. $f = \dfrac{3x_1 - 2x_2}{x_1 + 2x_2} \to \max$,

$2x_1 + 4x_2 \le 16,$

$-4x_1 + 2x_2 \le 8,$

$x_1 + 3x_2 \ge 9.$

$x_1,\ x_2 \ge 0.$

3. $f = \dfrac{-5x_1 + 4x_2}{-2x_1 - 3x_2} \to \min$,

$2x_1 - 4x_2 \le 12,$

$-x_1 + 2x_2 \le 8,$

$x_1 + x_2 \ge 10.$

$x_1,\ x_2 \ge 0.$

4. $f = \dfrac{5x_1 + 3x_2}{x_1 + 3x_2} \to \max$,

$2x_1 + 3x_2 \ge 12,$

$-x_1 + 6x_2 \le 18,$

$x_1 - 3x_2 \le 3.$

$x_1,\ x_2 \ge 0.$

5. $f = \dfrac{4x_1 + 3x_2}{x_1 + 2x_2} \to \max$,

$2x_1 + 3x_2 \geq 9,$

$-x_1 + 6x_2 \leq 18,$

$x_1 - 3x_2 \leq 3.$

$x_1, x_2 \geq 0.$

6. $f = \dfrac{-4x_1 + 3x_2}{-2x_1 - 3x_2} \to \min$,

$2x_1 - 3x_2 \leq 12,$

$-x_1 + 2x_2 \leq 8,$

$x_1 + x_2 \geq 10.$

$x_1, x_2 \geq 0.$

7. $f = \dfrac{4x_1 + 3x_2}{2x_1 + 3x_2} \to \max$,

$2x_1 + 3x_2 \geq 15,$

$-x_1 + 4x_2 \leq 16,$

$x_1 - 3x_2 \leq 3.$

$x_1, x_2 \geq 0.$

8. $f = \dfrac{5x_1 + 3x_2}{2x_1 + 4x_2} \to \max$,

$2x_1 + 3x_2 \geq 12,$

$-x_1 + 3x_2 \leq 15,$

$x_1 - 3x_2 \leq 3.$

$x_1, x_2 \geq 0.$

9. $f = \dfrac{4x_1 + 3x_2}{x_1 + 2x_2} \to \max$,

$x_1 + 3x_2 \geq 12,$

$-x_1 + 4x_2 \leq 16,$

$x_1 - 3x_2 \leq 3.$

$x_1, x_2 \geq 0.$

10. $f = \dfrac{-3x_1 + 2x_2}{-2x_1 - 3x_2} \to \min$,

$3x_1 - 4x_2 \leq 12,$

$-x_1 + 2x_2 \leq 6,$

$x_1 + x_2 \geq 8.$

$x_1, x_2 \geq 0.$

11. $f = \dfrac{-4x_1 + 2x_2}{-3x_1 - 5x_2} \to \min$,

$2x_1 - 3x_2 \le 12,$

$-2x_1 + 3x_2 \le 6,$

$x_1 + x_2 \ge 8.$

$x_1,\ x_2 \ge 0.$

12. $f = \dfrac{4x_1 + 3x_2}{x_1 + 2x_2} \to \max$,

$2x_1 + 4x_2 \ge 12,$

$-2x_1 + 5x_2 \le 15,$

$x_1 - 3x_2 \le 3.$

$x_1,\ x_2 \ge 0.$

13. $f = \dfrac{5x_1 + 3x_2}{2x_1 + 3x_2} \to \max$,

$2x_1 + 5x_2 \ge 15,$

$-x_1 + 3x_2 \le 9,$

$x_1 - 3x_2 \le 3.$

$x_1,\ x_2 \ge 0.$

14. $f = \dfrac{-3x_1 + 2x_2}{-3x_1 - 5x_2} \to \min$,

$x_1 - 3x_2 \le 9,$

$-2x_1 + 3x_2 \le 6,$

$x_1 + x_2 \ge 8.$

$x_1,\ x_2 \ge 0.$

15. $f = \dfrac{4x_1 + 3x_2}{x_1 + 2x_2} \to \max$,

$x_1 + 4x_2 \ge 12,$

$-2x_1 + 3x_2 \le 6,$

$x_1 - 3x_2 \le 3.$

$x_1,\ x_2 \ge 0.$

16. $f = \dfrac{-3x_1 + 2x_2}{-3x_1 - 5x_2} \to \min$,

$$2x_1 - 3x_2 \le 9,$$
$$-2x_1 + 3x_2 \le 12,$$
$$x_1 + x_2 \ge 10.$$
$$x_1,\ x_2 \ge 0.$$

17. $f = \dfrac{5x_1 + 2x_2}{2x_1 + 3x_2} \to \max$,

$$x_1 - 3x_2 \le 12,$$
$$-x_1 + 3x_2 \le 12,$$
$$x_1 + x_2 \ge 18.$$
$$x_1,\ x_2 \ge 0.$$

Контрольные задания по задачам линейного программирования и специальным задачам линейного программирования

1. Найти минимальное и максимальное значения целевой функции $f=x_1+2x_2$ для ограничений:

$$x_1 - x_2 \le 4,$$
$$x_2 \le 5,$$
$$3x_1 - 2x_2 \ge -1,$$
$$x_1 - 0.5x_2 \le 6,$$
$$x_{11},\ x_2 \ge 0.$$

2. По исходной задаче линейного программирования построить двойственную задачу и найти ее оптимальный план. Исходная задача имеет вид:

$$f = x_1 + 1.5x_2 \to \max,$$
$$x_1 + x_2 \le 6,$$
$$x_1 + 2x_2 \le 8,$$
$$x_2 \le 5,$$
$$x_1,\ x_2 \ge 0$$

3. По исходной задаче линейного программирования построить двойственную задачу и найти ее оптимальный план. Исходная задача имеет вид:

$f = 0.5x_1 + x_2 - 2 \to \min,$

$-x_1 + 1 \ge 0,$

$-0.5x_1 + 2 \ge 0,$

$0.5x_1 + x_2 - 1 \ge 0,$

$x_1, x_2 \ge 0$

4. Найти оптимальное решение задачи линейного программирования:

$f = x_2 + x_3 - 10 \to \min,$

$x_1 + 2x_2 + x_3 = 10,$

$x_1 + 2x_2 - x_5 = 2,$

$2x_1 + x_2 + x_4 = 10,$

$x_1 + x_6 = 4$

$x_1, x_2 \ge 0$

5. По исходной задаче линейного программирования построить двойственную задачу и найти ее оптимальный план. Исходная задача имеет вид:

$f = 3x_1 + 8x_2 \to \max,$

$x_1 + 4x_2 \le 6$

$x_1 + 2x_2 \le 4$

$x_1 \le 3,$

$x_1, x_2 \ge 0$

6. Четыре предприятия для производства продукции используют три вида сырья. Потребности в сырье каждого предприятия составляют120, 60, 180 и 110 ед. Сырье сосредоточено в трех складах с запасами 160, 140 и 170 единиц. Тарифы перевозки приведены в таблице

Склады	Предприятия				Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	7	8	1	2	160
A_2	4	6	9	8	140
A_3	9	2	4	6	170
Потребности	120	60	180	110	470

Требуется определить оптимальный план перевозок сырья.

7. На трех складах базы сосредоточен груз 90, 70 и 140 единиц. Груз необходимо перевезти в четыре магазина в количестве 110, 50, 60 и 80 единиц. Тарифы перевозки приведены в таблице

Склады	Магазины				Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	2	3	4	3	90
A_2	5	3	1	2	70
A_3	3	2	4	2	140
Потребности	110	50	60	80	300

Требуется определить оптимальный план перевозок сырья.

8. Тремя предприятиями производятся три вида продукции в количестве 50, 30 и 20 единиц для четырех потребителей с потребностями: 30, 30, 25 и 15 единиц. Тарифы перевозки приведены в таблице

Предприятия	Потребители				Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	1	2	4	2	50
A_2	2	3	1	5	30
A_3	3	2	4	3	20
Потребности	30	30	25	15	100

Требуется определить оптимальный план перевозок сырья.

9. Тремя предприятиями производятся три вида продукции в количестве 180, 300 и 50 единиц для пяти потребителей с потребностями: 110, 90, 120, 80 и 130 единиц. Тарифы перевозки приведены в таблице

Предприятия	Потребители					Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	7	12	4	6	5	180
A_2	1	8	6	5	4	300
A_3	6	13	8	7	3	50
Потребности	110	90	120	80	130	530

Требуется определить оптимальный план перевозок сырья.

10. Найти оптимальный план задачи дробно-линейного программирования:

$f=(4x_1+3x_2)/(x_1+3x_2)\to \max,$

$2x_1+3x_2\ge 12,$

$-x_1+6x_2\le 16,$

$x_1-3x_2\le 3,$

$x_1, x_2\ge 0.$

11. Найти оптимальный план задачи дробно-линейного программирования:

$f=(3x_1-1.5x_2)/(x_1+2x_2)\to \max,$

$2x_1+3x_2\le 15,$

$-3x_1+2x_2\le 7,$

$x_1+3x_2\ge 2,$

$x_1, x_2\ge 0.$

12. Найти оптимальный план задачи дробно-линейного программирования:

$$f = (-4x_1 + 3x_2)/(-2x_1 - 3x_2) \to \max,$$
$$2x_1 - 3x_2 \le 12,$$
$$-x_1 + 2x_2 \le 9,$$
$$x_1 + x_2 \ge 11,$$
$$x_1, x_2 \ge 0.$$

13. Найти оптимальный план задачи дробно-линейного программирования:
$$f = (x_1 + 2x_2)/(x_1 + x_2) \to \min,$$
$$x_1 + 4x_2 \le 12,$$
$$x_1 + x_2 \ge 5,$$
$$6x_1 + x_2 \le 20,$$
$$x_1, x_2 \ge 0.$$

14. Найти оптимальный план задачи параметрического программирования:
$$f = 2x_1 + (2 + 4t)x_2 \to \max,$$
$$x_1 + x_2 \le 12,$$
$$x_1 - x_2 \le 10,$$
$$-x_1 + x_2 \le 5,$$
$$x_1, x_2 \ge 0,$$
$$t[0,10].$$

15. Найти оптимальный план задачи параметрического программирования:
$$f = (3 + t)x_1 + x_2 \to \max,$$
$$3x_1 + x_2 \le 14,$$
$$x_1 + x_2 \le 10,$$
$$2x_1 + x_2 \le 12,$$
$$x_1, x_2 \ge 0,$$
$$t[0,5].$$

16. Найти оптимальный план задачи параметрического программирования:
$$f = (1 + t)x_1 + (7 - t)x_2 \to \max,$$
$$3x_1 + x_2 \le 15,$$
$$x_1 + x_2 \le 10,$$
$$2x_1 + x_2 \le 12,$$
$$x_1, x_2 \ge 0,$$
$$t[0,5].$$

17. Найти оптимальный план задачи параметрического программирования:

$$f = (2+t)x_1 + (6-t)x_2 \to \max,$$
$$3x_1 + 2x_2 \le 18,$$
$$x_1 + x_2 \le 8,$$
$$x_2 \ge 2,$$
$$x_1, x_2 \ge 0,$$
$$t[0,4].$$

2.3 НЕЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

В общем виде задача нелинейного программирования состоит в определении максимального (минимального) значения функции

$$f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) \tag{2.44}$$

при условии, что ее переменные удовлетворяют соотношениям

$$\begin{cases} g_i\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) \le b_i & \left(i = \overline{1,k}\right), \\ g_i\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) = b_i & \left(i = \overline{k+1,m}\right), \end{cases} \tag{2.45}$$

где f и g_i – некоторые известные функции n переменных, а b_i – заданные числа.

Процесс нахождения решения задачи нелинейного программирования с использованием ее геометрической интерпретации включает следующие этапы.

1. Находят область допустимых решений задачи.
2. Строят гиперповерхность $f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) = h.$
3. Определяют гиперповерхность наивысшего (наинизшего) уровня или устанавливают неразрешимость задачи из-за неограниченности функции (f) сверху (снизу) на множестве допустимых решений.
4. Находят точку области допустимых решений, через которую проходит гиперповерхность наивысшего (наинизшего) уровня, и определяют в ней значение функции (f).

Если ограничения (2.45) представляют собой только уравнения, переменные не обязательно положительны и функции (2.44) и (2.45) являются непрерывными вместе со своими частными производными, тогда для решения задачи применяют метод множителей Лагранжа.

Идея метода Лагранжа состоит в следующем. Допустим, необходимо найти такие значения переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, которые доставляли максимум (минимум) целевой функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ при условии выполнения системы ограничений $g_i\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) = b_i \quad \left(i = \overline{1,n}\right)$.

Для решения задачи вводят так называемую функцию Лагранжа

$$F(x_1, x_2, ..., x_n, \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m) = f(x_1, x_2, ..., x_n) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x_1, x_2, ..., x_n) \qquad (2.46)$$

где λ_i - константы, называемые неопределенными множителями Лагранжа.

Затем находят частные производные $\partial F(f, g_i, \lambda_i)/\partial x_j$ и $\partial F(f, g_i, \lambda_i)/\partial \lambda_i$ где $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$, приравнивают их к нулю и решают систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F(f, g_i, \lambda_i)}{\partial x_j} = 0,\ j = \overline{1, n}; \\ \dfrac{\partial F(f, g_i, \lambda_i)}{\partial \lambda_i} = g_i = 0,\ i = \overline{1, m}. \end{cases} \qquad (2.47)$$

После этого исследуют точки, полученные в результате решения системы на максимум (минимум), поскольку условия системы являются необходимыми, но недостаточными условиями экстремума.

Пример 2.11. Найти максимальное значение функции

$$f = x_2 - x_1^2 + 6x_1$$

при условиях

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 24 \\ x_1 + 2x_2 \le 15 \\ 3x_1 + 2x_2 \le 24 \end{cases}$$
$$x_2 \le 4,$$
$$x_1, x_2 \ge 0.$$

Решение

Так как целевая функция нелинейная, то задача является задачей нелинейного программирования.

В примере 2.11 областью допустимых решений данной задачи является многоугольник *OABC* (рисунок 2.10). Следовательно, для нахождения ее решения нужно определить такую точку многоугольника *OABC,* в которой функция f принимает максимальное значение. Построим линию уровня $f = x_2 - x_1^2 + 6x_1 = h$ где h - некоторая постоянная, и исследуем ее поведение при различных значениях h. При каждом значении h получаем параболу, которая тем выше отдалена от оси Ox_1 чем больше значение h (рисунок 2.10). Значит, функция F принимает максимальное значение в точке касания одной из парабол с границей многоугольника *OABC*. В данном случае это точка D, в которой линия уровня $f = x_2 - x_1^2 + 6x_1 = 13$ касается стороны AB многоугольника *OABC*. Координаты точки D можно найти из системы уравнений

$$\begin{cases} x_2 - x_1^2 + 6x_1 = 13, \\ x_2 = 4. \end{cases}$$

Решая эту систему, получим $x_1^* = 3$; $x_2^* = 4$.. Итак, f_{max}=*13* при $X^* = (3, 4)$.

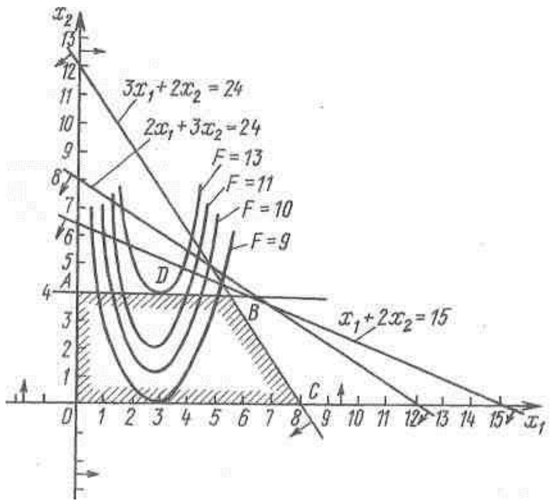


Рисунок 2.10 – Графическая интерпретация решения задачи нелинейного программирования

В задаче точка максимального значения целевой функции не является вершиной многоугольника решений. Поэтому процедура перебора вершин, которая использовалась при решении задач линейного программирования, неприменима для решения данной задачи.

Пример 2.12. Найти максимальное значение функции

$$f = 3x_1 + 4x_2$$

при условиях

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 \le 25 \\ x_1 x_2 \ge 4 \end{cases},$$

$$x_1, x_2 \ge 0.$$

Решение

Область решений задачи 2.12 изображена на рисунке 2.11. Построены две линии уровня, представляющие собой прямые. Из рисунка видно, что максимальное значение целевая функция задачи принимает в точке *E,* в которой прямая касается окружности $x_1^2 + x_2^2 = 25$.

Для определения координат точки *E* воспользуемся равенством угловых коэффициентов прямой $3x_1 + 4x_2 = h$, где h - некоторая постоянная и касательной к окружности в точке *E.*

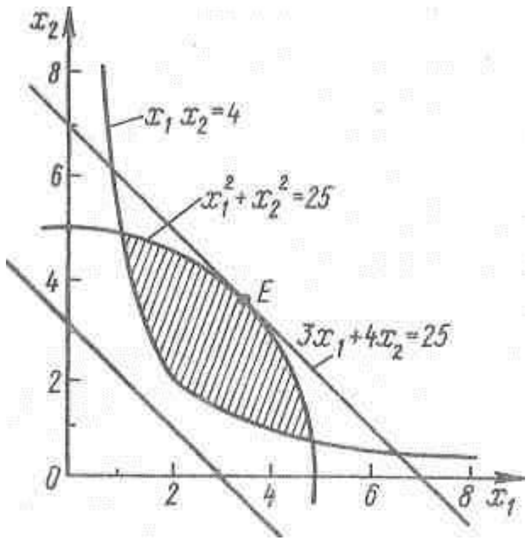


Рисунок 2.11 – Графическое решение задачи нелинейного программирования

Рассматривая x_2 , как неявную функцию, переменной x_1 , почленно дифференцируем уравнение окружности $x_1^2+x_2^2=25$, получим

$$2x_1+2x_2x_2'=0 \text{ или } x_2'=-x_1/x_2.$$

Приравнивая найденное выражение числу $k=-3/4$, получаем одно из уравнений для определения координат точки E. В качестве второго уравнения возьмем уравнение окружности. Таким образом, для определения координат точки E имеем систему

$$\begin{cases} 4x_1+3x_2=0 \\ x_1^2+x_2^2=25 \end{cases},$$

откуда $x_1^*=3$, $x_2^*=4$, $f_{max}=3^2+4^2=25$.

Пример 2.13. По плану производства продукции предприятию необходимо изготовить 180 изделий. Эти изделия могут быть изготовлены двумя технологическими способами. При производстве x_1 изделий I способом затраты равны $4x_1+x_1^2$ руб., а при изготовлении x_2 изделий II способом они составляют $8x_2+x_2^2$ руб. Определить, сколько изделий каждым из способов следует изготовить, так чтобы общие затраты на производство продукции были минимальными.

Решение

Данную задачу можно решить, используя ее геометрическую интерпретацию и применяя метод множителей Лагранжа.

Математическая постановка задачи состоит в определении минимального значения функции

$$f=4x_1+x_1^2+8x_2+x_2^2$$

при условиях

$$x_1 + x_2 = 180,$$
$$x_1, x_2 \geq 0.$$

Сначала найдем решение задачи, используя ее геометрическую интерпретацию. Областью допустимых решений исходной задачи является отрезок прямой *AB* (рисунок 2.12), а линиями уровня - окружности с центром в точке *E* (-2, -4).

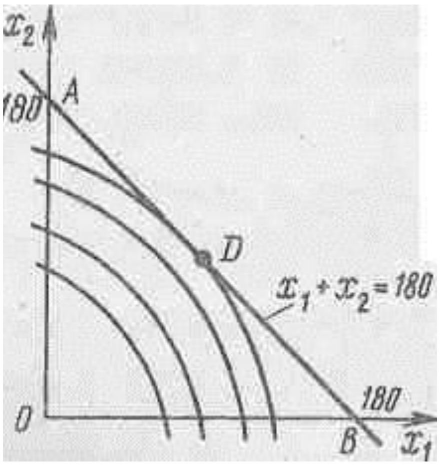


Рисунок 2.12 – К задаче определения экстремума функции методом Лагранжа

Проводя из точки *E* окружности разных радиусов, видим, что минимальное значение целевая функция принимает в точке *D*. Чтобы найти координаты этой точки, воспользуемся тем, что угловой коэффициент к окружности $4x_1 + x_1^2 + 8x_2 + x_2^2 = C$ в точке *D* совпадает с угловым коэффициентом прямой $x_1 + x_2 = 180$ и, следовательно, равен -1. Рассматривая x_2 как неявную функцию от x_1 и дифференцируя уравнение окружности, имеем

$$4 + 2x_1 + 8x_2' + 2x_2 x_2' = 0 \text{ или } x_2' = -(2 + x_1)/(4 + x_2).$$

Приравнивая полученное выражение числу -1, получаем одно из уравнений для определения координат точки *D*. Присоединяя к нему уравнение прямой, на которой лежит точка *D*, получим систему

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 2 \\ x_1 + x_2 = 180 \end{cases},$$

$x_1^* = 91;\ x_2^* = 89$. Это означает, что если предприятие изготовит 91 изделие I технологическим способом и 89 изделий II способом, то общие затраты будут минимальными и составят 17278 руб.

Решим теперь задачу, используя метод множителей Лагранжа. Найдем минимальное значение функции (*f*) при условии, т.е. без учета требования неотрицательности переменных. Для этого составим функцию Лагранжа

$$F(x_1, x_2, \lambda) = 4x_1 + x_1^2 + 8x_2 + x_2^2 + \lambda(180 - x_1 - x_2),$$

вычислим ее частные производные по x_1, x^2, λ и приравняем их нулю:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x_1} = 4 + 2x_1 - \lambda = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial x_2} = 8 + 2x_2 - \lambda = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda} = 180 - x_1 - x_2 = 0. \end{cases}$$

Перенося в правые части первых двух уравнений λ и приравнивая их левые части, получим

$$4 + 2x_1 = 8 + 2x_2 \text{ или } x_1 - x_2 = 2.$$

Решая последнее уравнение совместно с уравнением $x_1 + x_2 = 180$, находим $x_1^* = 91;\ x_2^* = 89$, т.е. получили координаты точки *D*, удовлетворяющей условиям неотрицательности. Эта точка является подозрительной на экстремум. Используя вторые частные производные, можно показать, что в точке *D* функция *f* имеет условный минимум. Этот результат и был получен выше.

Задания по разделу

1.Найти графически минимальное значения функции $9(x_1 - 5)^2 + 4(x_2 - 6)^2$ при условиях

$$\begin{aligned} &3x_1 + 2x_2 \ge 12, \\ &x_1 - x_2 \le 6, \\ &x_2 \le 4, \\ &x_1, x_2 \ge 0. \end{aligned}$$

2.Найти графически максимальное значения функции $f = x_1x_2$ при условиях

$$\begin{aligned} &6x_1 + 4x_2 \ge 12, \\ &2x_1 + 3x_2 \le 24, \\ &-3x_1 + 4x_2 \le 12, \\ &x_1, x_2 \ge 0. \end{aligned}$$

3. Найти графически максимальное значения функции $f = 4x_1 + 3x_2$ при условиях

$$\begin{aligned} &x_1^2 - 2x_1 + x_2^2 - 2x_2 - 34 \le 0, \\ &x_1 \ge 1, \\ &x_2 \ge 1. \end{aligned}$$

4. Найти графически максимальное значения функции $f = x_1x_2$ при условиях

$$\begin{aligned} &x_1^2 + 2x_1 + x_2^2 - 2x_2 - 14 \ge 0, \\ &2x_1 + x_2 \le 10, \\ &x_1, x_2 \ge 0. \end{aligned}$$

5. Найти графически максимальное значения функции f $=3x_1+4x_2$ при условиях

$$x_1^2 + 2x_1 \le 25,$$
$$x_1 x_2 \le 4,$$
$$x_1, x_2 \ge 0.$$

6. Найти графически максимальное значения функции f $=(x_1-4)^2+(x_2-3)^2$ при условиях

$$2x_1 + 3x_2 \ge 6,$$
$$3x_1 - 2x_2 \le 18,$$
$$-x_1 + 2x_2 \le 8,$$
$$x_1, x_2 \ge 0.$$

7. Найти графически максимальное значения функции f $=(x_1-3)^2+(x_2-4)^2$ при условиях

$$3x_1 + 2x_2 \ge 7,$$
$$10x_1 - x_2 \le 8,$$
$$-18x_1 + 4x_2 \le 12,$$
$$x_1, x_2 \ge 0.$$

8. Найти графически максимальное значения функции f $=x_1^2+x_2^2$ при условиях

$$x_1 x_2 \le 4,$$
$$x_1 + x_2 \ge 5,$$
$$x_1 \le 7,$$
$$x_2 \le 6,$$
$$x_1, x_2 \ge 0.$$

9. Найти графически максимальное значения функции f $=2x_1+x_2$ при условиях

$$x_{1_1}^2 + x_2^2 \le 16,$$
$$x_1, x_2 \ge 0.$$

10. Найти графически максимальное значения функции f $=(x_1-2)^2+(x_2 - 3)^2$ при условиях

$$x_1 + 2x_2 \le 12,$$
$$x_1 + x_2 \le 9,$$
$$x_1, x_2 \ge 0.$$

11.Найти графически минимальное значения функции $9(x_1 - 5)^2 + 4(x_2 - 6)^2$ при условиях

$$3x_1 + 2{,}5x_2 \ge 15,$$
$$x_1 - x_2 \le 6,$$
$$x_2 \le 5,$$
$$x_1, x_2 \ge 0.$$

12.Найти графически максимальное значения функции f $=x_1x_2$ при условиях

$$3x_1+2x_2\geq 6$$
$$2x_1+3x_2\leq 21,$$
$$-3x_1+4x_2\leq 12,$$
$$x_1,x_2\geq 0.$$

13. Найти графически максимальное значения функции f $=5x_1+4x_2$ при условиях

$$x_1^2-2x_1+x_2^2-2x_2-34\leq 0,$$
$$x_1\geq 1,$$
$$x_2\geq 1.$$

14. Найти графически максимальное значения функции f $=x_1x_2$ при условиях

$$x_1^2+2x_1+x_2^2-2x_2-15\geq 0,$$
$$2x_1+x_2\leq 9,$$
$$x_1,x_2\geq 0.$$

15. Найти графически максимальное значения функции f $=3x_1+5x_2$ при условиях

$$x_1^2+2x_1\leq 25,$$
$$x_1x_2\leq 4,$$
$$x_1,x_2\geq 0.$$

16. Найти графически максимальное значения функции f $=(x_1-3)^2+(x_2-4)^2$ при условиях

$$3x_1+2x_2\geq 9,$$
$$10x_1-x_2\leq 6,$$
$$-16x_1+4x_2\leq 12,$$
$$x_1,x_2\geq 0.$$

17. Найти графически максимальное значения функции f $=x_1^2+x_2^2$ при условиях

$$x_1x_2\leq 3,$$
$$x_1+x_2\geq 5,$$
$$x_1\leq 7,$$
$$x_2\leq 5{,}5,$$
$$x_1,x_2\geq 0.$$

Задание по использования метода Лагранжа

1. Найти условный экстремум функции $f=x_1^2+x_2^2+x_3$ при условиях

$x_1+x_2+x_3=4,$

$2x_1-3x_2=12.$

2. Найти условный экстремум функции $f=x_1x_2x_3$ при условиях

$2x_1x_2 + x_2x_3 = 12,$

$2x_1 - x_2 = 8.$

3. Найти условный экстремум функции $f = x_1x_2 + x_2x_3$ при условиях

$x_1 + x_2 = 4,$

$x_2 + x_3 = 4.$

4. Найти условный экстремум функции $f = 3x_1^2 + 2x_1 + 2x_2^2 + 4x_2x_3$ при условиях

$x_1^2 + 2x_2^2 = 19,$

$x_2 + 2x_2x_3 = 11.$

5. Найти условный экстремум функции $f = x_1x_2x_3$ при условиях

$x_1 + x_2 + x_3 = 5,$

$x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = 8.$

6. Найти максимальное значение функции $f = x_1^2x_2^3x_{3_3}^4$ при условии

$x_1 + x_2 + x_3 = 18.$

7. Найти минимальное значение функции $f = x_1x_2 + x_2x_3$ при условиях

$x_1 - x_2 = 2,$

$x_2 + 2x_3 = 4.$

8. Найти экстремальное значение функции $f = x_1^2 + x_2^2$ при условиях

$x_1 + x_2 = 5.$

9. Найти условный экстремум функции $f = x_1^2 + x_2^2 + x_3$ при условиях

$x_1 + x_2 + x_3 = 4,$

$3x_1 - 4x_2 = 12.$

10. Найти условный экстремум функции $f = x_1x_2x_3$ при условиях

$2x_1x_2 + x_2x_3 = 10,$

$2x_1 - x_2 = 6.$

11. Найти условный экстремум функции $f = x_1x_2 + x_2x_3$ при условиях

$x_1 + x_2 = 5,$

$x_2 + x_3 = 5.$

12. Найти условный экстремум функции $f = 1.5x_1^2 + x_1 + x_2^2 + 2x_2x_3$ при условиях

$x_1^2 + 2x_2^2 = 18,$

$x_2 + 2x_2x_3 = 11.$

13. Найти условный экстремум функции $f = x_1x_2x_3$ при условиях

$x_1 + x_2 + x_3 = 6,$

$x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = 9.$

14. Найти максимальное значение функции $f = x_1^2x_2^3x_{3_3}^4$ при условии

$x_1 + x_2 + x_3 = 16.$

15. Найти минимальное значение функции $f = x_1x_2 + x_2x_3$ при условиях

$x_1 - x_2 = 3,$

$x_2 + 2x_3 = 5.$

16. Найти экстремальное значение функции $f = x_1^2 + x_2^2$ при условиях $x_1 + x_2 = 6.$

17. Найти экстремальное значение функции $f = x_1^2 + 2x_2^2$ при условиях $x_1 + x_2 = 8.$

2.4 ЗАДАЧИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

2.4.1 Задача с интервальными оценками

Большинство реальных задач, связанных с моделированием сельскохозяйственного производства описывается множеством параметров, многие из которых является неопределенными.

Выделяют несколько различных видов неопределенностей, часть из которых связана с недостаточностью знаний о природных явлениях и процессах:

- неопределенности, связанные с недостаточными знаниями о природе (например, неизвестен точный объем полезных ископаемых в конкретном месторождении);
- неопределенности природных явлений, таких, как погода, влияющая на урожайность, на затраты и др.;
- неопределенности климатических условий, влияющих на урожайность, на затраты и др.;
- неопределенности, связанные с осуществлением действующих и проектируемых технологических процессов.

Источники неопределенной информации можно разделить на две категории: недостаточно полное знание предметной области и недостаточная информация о конкретной ситуации.

Особенно распространенными являются ситуации, когда выбор решения осуществляется в условиях рисков: существует неопределенность в виде множества частных исходов результата принятия решения, причем вероятности появления этих исходов либо определяемы тем или иным способом, либо неизвестны или не имеют смысла.

Если никаких предположений о стохастической устойчивости параметров не существует, то говорят о нестохастической неопределенности.

Когда нельзя сопоставить вероятности результатов при выборе того или иного решения, хотя возможный набор результатов известен, для оптимизации производства продукции на сельскохозяйственном предприятии можно использовать модели с интервальными параметрами в целевой функции и ограничениях:

$$f = \sum_{J=1}^{n} \tilde{c}_j x_j \to \max , \qquad (2.48)$$

$$\sum_{j=1}^{n} \tilde{a}_{ij} x_j \le (\ge) \tilde{b}_i \ \ (i = \overline{1,m}) , \qquad (2.49)$$

$$x_j \ge 0 \textbf{, (} j = \overline{1,n} \textbf{),} \qquad (2.50)$$

где $\tilde{c}_j$, $\tilde{a}_{ij}$, и $\tilde{b}_i$ являются компактными интервалами. Другими словами, $\tilde{c}_j = \lfloor \bar{c}_j , \underline{c}_j \rfloor$, $\tilde{a}_{ij} = \lfloor \bar{a}_{ij} , \underline{a}_{ij} \rfloor$, $\tilde{b}_i = \lfloor \bar{b}_i , \underline{b}_i \rfloor$, где $\bar{c}_j$, $\underline{c}_j$, $\bar{a}_{ij}$ $\underline{a}_{ij}$, $\bar{b}_i$, $\underline{b}_i$ - верхние и нижние границы соответствующих интервалов.

Следует отметить, что в моделях сложных систем для решения задач с интервальными и вероятностными параметрами можно использовать метод статистических испытаний, позволяющий случайным образом моделировать неопределенные величины и параметры, подчиненные законам распределения вероятностей. Возможность использования метода обусловлена адекватным отображением имитационных значений реальным данным. При этом на предварительном этапе необходимо оценить верхние и нижние оценки параметров, определить законы распределения, которым они подчиняются. С помощью методов имитационного моделирования можно оценить устойчивость результатов в зависимости от различной степени возмущений, влияющих на рассматриваемую систему.

Пример 2.14. Рассмотрим задачу оптимизации производства аграрной продукции на примере сельскохозяйственного предприятия Иркутского района ООО «Академия».

Запишем упрощенную модель оптимизации растениеводческой продукции. Целью задачи является максимизация дохода:

$$\mathbf{18960} x_1 + 15457 x_2 + 18328 x_3 + 1280 x_4 + 1620 x_5 \to max,$$

где x_1 – посевная площадь пшеницы, га; x_2 – посевная площадь овса, га; x_3 – посевная площадь ячменя, га; x_4 – площадь однолетних трав на силос, га; x_5 – площадь однолетних трав на зеленый корм, га. В выражении коэффициент при x_1 (стоимость реализации пшеницы с одного га) будет изменяться в заданном интервале.

Далее обозначим ограничения задачи.

В хозяйстве имеется 2000 га посевных площадей, это обозначается в правой части ограничения со знаком непревышения, коэффициент 1,1 означает дополнительную на 10% площадь зерновых для выращивания семян. Такое ограничение запишется так:

$$1{,}1x_1 + 1{,}1x_2 + 1{,}1x_3 + x_4 + x_5 \leq 2000.$$

Далее запишем условие непревышения затрат на горюче-смазочные материалы:

$$1600x_1 + 1600x_2 + 1600x_3 + 1000x_4 + 300x_5 \leq 2600000$$

и ограничение затрат на оплату труда

$$450x_1 + 450x_2 + 450x_3 + 410x_4 + 160x_5 \leq 800000.$$

Затем обозначим минимальные объемы производства растениеводческой продукции, которые отражены в правых частях уравнений, коэффициенты при соответствующих переменных в левых частях обозначают урожайность культуры:

- пшеницы $15{,}8x_1 \geq 6030$;
- овса $15{,}9x_2 \geq 4000$;
- ячменя $15{,}8x_3 \geq 8000$;
- однолетних трав на силос $80x_4 \geq 3500$;
- однолетних трав на зеленый корм $90x_5 \geq 20000$.

На рис. 2.13 приведена матрица коэффициентов задачи и ее решение при помощи надстройки «Поиск решения» в табличном процессоре MS Excel. Алгоритм использования инструмента «Поиск решения» приведен в разделе 2.4 данного учебного пособия.

На рис. 2.13 в ячейке I12 приведено значение целевой функции, а в диапазоне D15:H15 - оптимальный план производства, представляющий собой структуру посевных площадей. Иллюстрация отражения условий задачи в окне надстройки «Поиск решения» приведены на рис. 2.14.

I12 =СУММПРОИЗВ(D12:H12;D15:H15)

№ п/п	Расшифровка переменной / Переменная / Название ограничения	Ед. изм.	Пшеница, га	Овес, га	Ячмень, га	Однолетние травы на силос, га	Однолетние травы на зеленый корм, га	Результат расчета по ограничению	Знак	Значение ограничения
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5			
			га	га	га	га	га			
1	Посевная площадь	га	1,1	1,1	1,1	1	1	1 978	≤	2 000
2	Затраты на ГСМ	руб.	1600	1600	1600	1000	300	2 600 000	≤	2 600 000
3	Затраты на оплату труда	руб.	450	450	450	410	160	753 688	≤	800 000
4	Однолетние травы на силос	ц	0	0	0	80	0	3 500	≥	3 500
5	Однолетние травы на зеленый корм	ц	0	0	0	0	90	20 000	≥	20 000
6	Пшеница	ц	15,8	0	0	0	0	12 610	≥	6 030
7	Овес	ц	0	15,9	0	0	0	4 000	≥	4 000
8	Ячмень	ц	0	0	15,8	0	0	8 000	≥	8 000
Целевая функция (доход)		руб.	18960	16457	18328	1280	1620	28 967 751р.	→	max

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
798	252	506	44	222

Рисунок 2.13 - **Матрица коэффициентов задачи и ее решение**

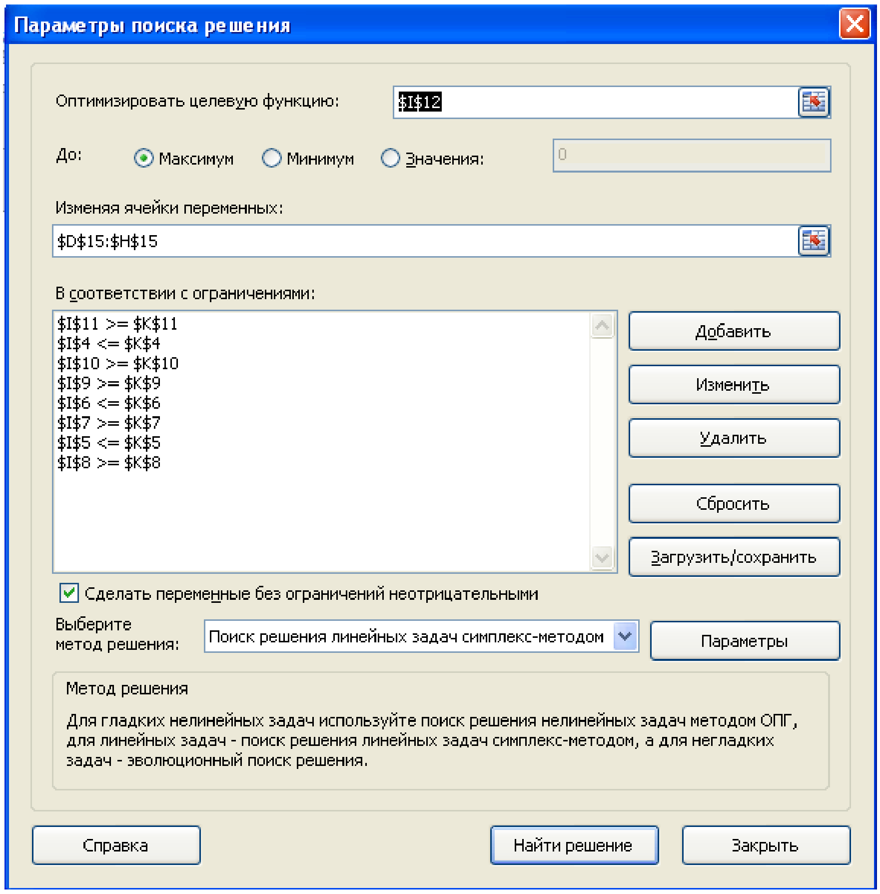


Рисунок 2.14 - **Условия задачи в окне надстройки MS Execel «Поиск решения»**

Как уже отмечено выше результатом решения задачи является максимум дохода. Коэффициенты в целевой функции обозначают доход от реализации продукции с единицы площади с учетом биопродуктивности культуры. При этом в современной системе рыночных отношений знакома ситуация несоответствия цен ожиданиям, они могут изменяться в большую или меньшую сторону по разным причинам. Поэтому разумно будет предположить, что доход в целевой функции может изменяться в некотором интервале.

Рассмотрим подобную ситуацию на примере изменчивости одного коэффициента в целевой функции при переменной x_1, который в исходной задаче означает реализацию пшеницы по цене 1200 руб. за центнер. Другие коэффициенты примем неизменными, чтобы не усложнять реализацию решения.

Предположим, основываясь на данных предыдущих лет, что стоимость реализации зерновых изменяется от 900 до 1200 руб. за центнер. На формирование цены влияет множество факторов, которые зачастую не поддаются точному прогнозированию. Поэтому примем, что цена на пшеницу изменяется в заданном интервале (900-1200 руб. за центнер) случайным образом. Найдем решение задачи для 10 смоделированных ситуаций изменения закупочных цен на пшеницу. Случайное изменение стоимости реализации в заданном интервале в MS Excel можно реализовать при помощи функции *СЛУЧМЕЖДУ(нижн_граница, верхн_граница)*, что можно увидеть в строке формул на рис. 2.15.

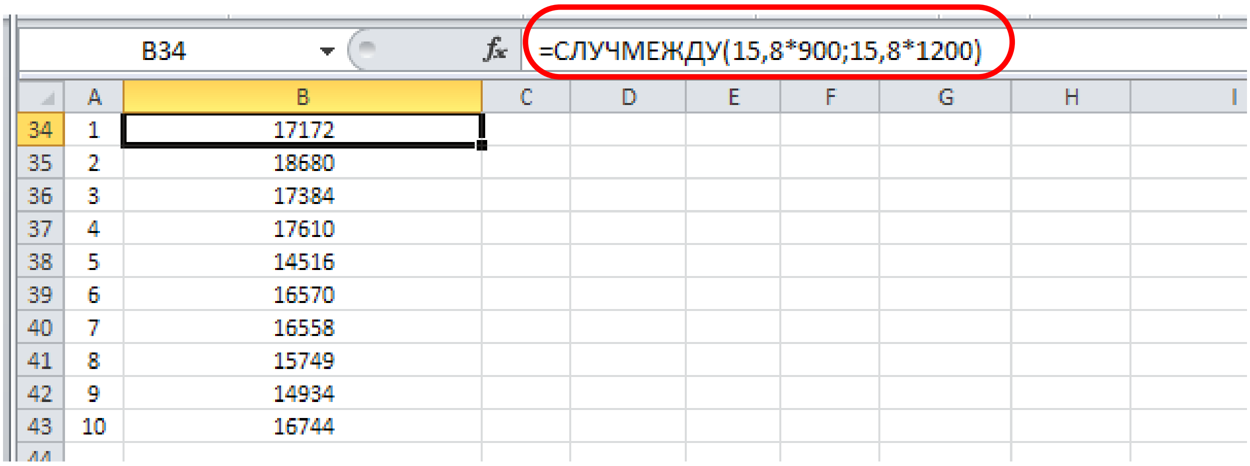
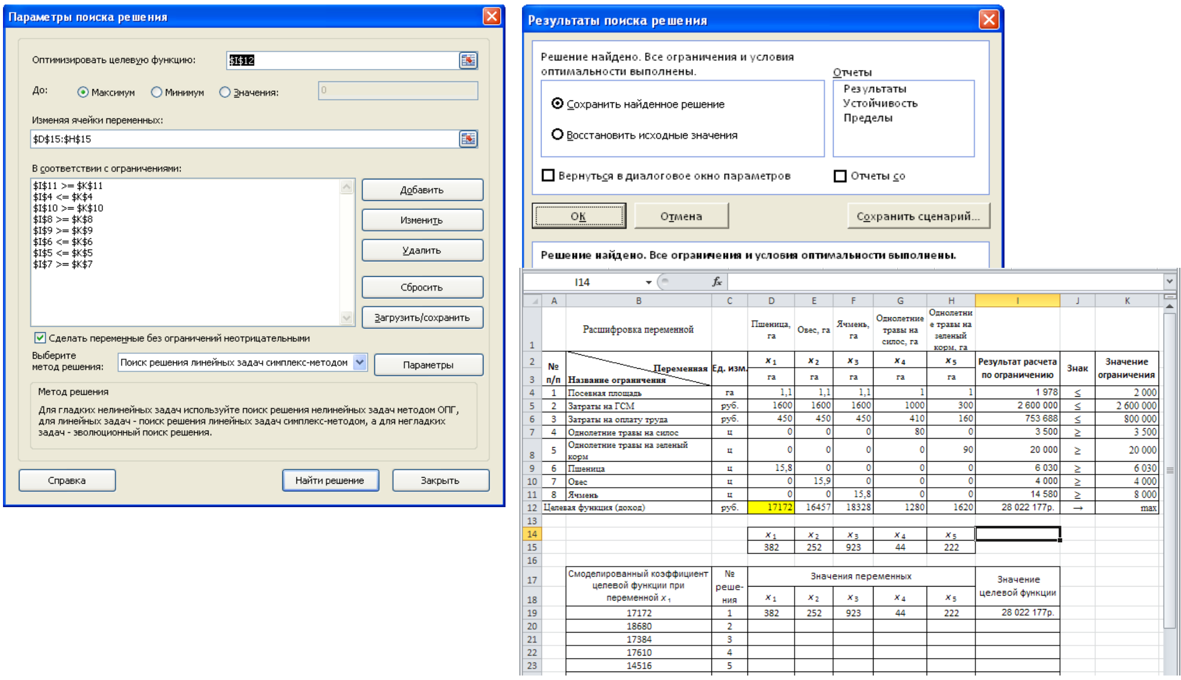


Рисунок 2.15 – **Моделирование случайным образом стоимости закупочной цены на пшеницу с одного га при помощи функции *СЛУЧМЕЖДУ(нижн_граница, верхн_граница)***

На рис. 2.15 в диапазоне В34:В43 приведены смоделированные случайным образом коэффициенты целевой функции при переменной x_1. Далее, полученные в результате моделирования значения, поочередно подставляются в ячейку D12 на каждом шаге (рис. 2.16). С учетом каждого из них определяются оптимальные планы с соответствующим значением целевой функции. При этом значение коэффициента в критерии оптимальности и соответствующие ему результаты решения задачи (значение целевой функции и план производства) будем фиксировать в диапазоне В17:I28 (рис 2.16).

Шаг 1



Шаг 2

I12 f_x =СУММПРОИЗВ(D12:H12;D15:H15)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1		Расшифровка переменной		Пшеница, га	Овес, га	Ячмень, га	Однолетние травы на силос, га	Однолетние травы на зеленый корм, га			
2	№	Переменная	Ед. изм.	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Результат расчета по ограничению	Знак	Значение ограничения
3	п/п	Название ограничения		га	га	га	га	га			
4	1	Посевная площадь	га	1,1	1,1	1,1	1	1	1 978	≤	2 000
5	2	Затраты на ГСМ	руб.	1600	1600	1600	1000	300	2 600 000	≤	2 600 000
6	3	Затраты на оплату труда	руб.	450	450	450	410	160	753 688	≤	800 000
7	4	Однолетние травы на силос	ц	0	0	0	80	0	3 500	≥	3 500
8	5	Однолетние травы на зеленый корм	ц	0	0	0	0	90	20 000	≥	20 000
9	6	Пшеница	ц	15,8	0	0	0	0	12 610	≥	6 030
10	7	Овес	ц	0	15,9	0	0	0	4 000	≥	4 000
11	8	Ячмень	ц	0	0	15,8	0	0	8 000	≥	8 000
12	Целевая функция (доход)		руб.	18680	16457	18328	1280	1620	28 744 286р.	→	max
13											
14				x_1	x_2	x_3	x_4	x_5			
15				798	252	506	44	222			

	Смоделированный коэффициент целевой функции при переменной x_1	№ реше-ния	Значения переменных x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Значение целевой функции
19	17172	1	382	252	923	44	222	28 022 177р.
20	18680	2	798	252	506	44	222	28 744 286р.
21	17384	3						
22	17610	4						
23	14516	5						
24	16570	6						

……

Шаг 10

I12 f_x =СУММПРОИЗВ(D12:H12;D15:H15)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1		Расшифровка переменной		Пшеница, га	Овес, га	Ячмень, га	Однолетние травы на силос, га	Однолетние травы на зеленый корм, га			
2	№	Переменная	Ед. изм.	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Результат расчета по ограничению	Знак	Значение ограничения
3	п/п	Название ограничения		га	га	га	га	га			
4	1	Посевная площадь	га	1,1	1,1	1,1	1	1	1 978	≤	2 000
5	2	Затраты на ГСМ	руб.	1600	1600	1600	1000	300	2 600 000	≤	2 600 000
6	3	Затраты на оплату труда	руб.	450	450	450	410	160	753 688	≤	800 000
7	4	Однолетние травы на силос	ц	0	0	0	80	0	3 500	≥	3 500
8	5	Однолетние травы на зеленый корм	ц	0	0	0	0	90	20 000	≥	20 000
9	6	Пшеница	ц	15,8	0	0	0	0	6 030	≥	6 030
10	7	Овес	ц	0	15,9	0	0	0	4 000	≥	4 000
11	8	Ячмень	ц	0	0	15,8	0	0	14 580	≥	8 000
12	Целевая функция (доход)		руб.	16744	16457	18328	1280	1620	27 858 833р.	→	max
13											
14				x_1	x_2	x_3	x_4	x_5			
15				382	252	923	44	222			

	Смоделированный коэффициент целевой функции при переменной x_1	№ реше-ния	Значения переменных x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Значение целевой функции
19	17172	1	382	252	923	44	222	28 022 177р.
20	18680	2	798	252	506	44	222	28 744 286р.
21	17384	3	382	252	923	44	222	28 103 086р.
22	17610	4	382	252	923	44	222	28 189 338р.
23	14516	5	382	252	923	44	222	27 008 527р.
24	16570	6	382	252	923	44	222	27 792 427р.
25	16558	7	382	252	923	44	222	27 787 847р.
26	15749	8	382	252	923	44	222	27 479 096р.
27	14934	9	382	252	923	44	222	27 168 054р.
28	16744	10	382	252	923	44	222	27 858 833р.

Рисунок 2.16 – **Результаты решения задачи при условии меняющейся цены реализации пшеницы**

В результате десятикратного решения задачи в условиях изменяющейся цены на пшеницу, можно заключить, что доход сельскохозяйственного предприятия ООО «Академия» может изменяться в пределах 27 008 527-28 744 286 руб., а посевная площадь пшеницы варьирует в диапазоне 382-798 га (строки 23 и 20 на рис. 2.16).

Задачи с интервальными параметрами

1. Хозяйство производит 2 вида продукции. за единицу производства культуры А оно получает прибыль 4,5-5,5.д.е, а культуры В – 4 д.е. Площадь посевов составляет 90 га. Ограничение трудовых ресурсов соответствует 120. чел.-дней. Для обработки единицы площади культуры А необходимо 1,5-2,5. чел.-дней, а культуры В - …1..чел.- дней. Кроме того, нужно поставить на рынок не менее 30. т. продукции культуры В при урожайности 1,5-2 т/га. Требуется разделить площадь таким образом, чтобы получить максимальную прибыль.
2. Хозяйство производит 2 вида продукции. за единицу производства культуры А оно получает прибыль 3..д.е, а культуры В – 1-2 д.е. Площадь посевов составляет 50. га. Ограничение трудовых ресурсов соответствует 180.. чел.-дней. Для обработки единицы площади культуры А необходимо 4.. чел.-дней, а культуры В - …2-3..чел.- дней. Кроме того, необходимо поставить на рынок не менее …40. т. продукции культуры В при урожайности 1,5-2,5 т/га. Требуется разделить площадь таким образом, чтобы получить максимальную прибыль.
3. Хозяйство производит 2 вида продукции. за единицу производства культуры А оно получает прибыль 1,5-2..д.е, а культуры В – 3 д.е. Площадь посевов составляет 35. га. Ограничение трудовых ресурсов соответствует 120.. чел.-дней. Для обработки единицы площади культуры А необходимо 3.. чел.-дней, а культуры В – 4-5..чел.- дней. Кроме того, необходимо поставить на рынок не менее 50. т. продукции культуры А при урожайности 2-2,5…т/га. Требуется разделить площадь таким образом, чтобы получить максимальную прибыль.
4. Хозяйство производит 2 вида продукции. за единицу производства культуры А оно получает прибыль…2,5-3,5..д.е, а культуры В – 5 д.е. Площадь посевов составляет …70. га. Ограничение трудовых ресурсов соответствует …180.. чел.-дней. Для обработки единицы площади культуры А необходимо …1,5-2.. чел.-дней, а культуры В - …3..чел.-дней. Кроме того, необходимо поставить на рынок не менее 60. т. продукции культуры А при урожайности 1,4-2…т/га. Требуется разделить площадь таким образом, чтобы получить максимальную прибыль.
5. Хозяйство производит 2 вида продукции. за единицу производства культуры А оно получает прибыль 4-5…..д.е, а культуры В – 2 д.е. Площадь посевов составляет 90. га. Ограничение трудовых ресурсов соответствует 210. чел.-дней. Для обработки единицы площади культуры А необходимо …3.. чел.-дней, а культуры В - …1,5-2,5..чел.-дней. Кроме того,

необходимо поставить на рынок не менее 40…. т. продукции культуры В при урожайности 1,6-2,4…т/га. Требуется разделить площадь таким образом, чтобы получить максимальную прибыль.

6. Хозяйство производит 2 вида продукции. за единицу производства культуры А оно получает прибыль 3,5-4,5..д.е, а культуры В – 3 д.е. Площадь посевов составляет 80…. га. Ограничение трудовых ресурсов соответствует 210. чел.-дней. Для обработки единицы площади культуры А необходимо 3-4.. чел.-дней, а культуры В - …2..чел.- дней. Кроме того необходимо поставить на рынок не менее 50. т. продукции культуры В при урожайности …2-2,6 т/га. Требуется разделить площадь таким образом, чтобы получить максимальную прибыль.

7. Хозяйство производит 2 вида продукции. за единицу производства культуры А оно получает прибыль …3..д.е, а культуры В – 6-7 д.е. Площадь посевов составляет 40. га. Ограничение трудовых ресурсов соответствует 120.. чел.-дней. Для обработки единицы площади культуры А необходимо 2-3.. чел.-дней, а культуры А- 5..чел.- дней. Кроме того необходимо поставить на рынок не менее …30. т. продукции культуры В при урожайности 1,5-2 т/га. Требуется разделить площадь таким образом, чтобы получить максимальную прибыль.

8. Хозяйство производит 2 вида продукции за единицу производства культуры А оно получает прибыль …4..д.е, а культуры В – 2-3 д.е. Площадь посевов составляет 60. га. Ограничение трудовых ресурсов соответствует 150.. чел.-дней. Для обработки единицы площади культуры А необходимо …3-3,5.. чел.-дней, а культуры В - …2..чел.-дней. Кроме того, необходимо поставить на рынок не менее 30. т. продукции культуры В при урожайности 1,5-2…т/га. Требуется разделить площадь таким образом, чтобы получить максимальную прибыль.

9. Хозяйство производит 2 вида продукции за единицу производства культуры А оно получает прибыль 3.д.е, а культуры В – 4,5-5,5 д.е. Площадь посевов составляет 75 га. Ограничение трудовых ресурсов соответствует 180 чел.-дней. Для обработки единицы площади культуры А необходимо 2.. чел.-дней, а культуры В – 3-4..чел.- дней. Кроме того, нужно поставить на рынок не менее 40. т. продукции культуры А при урожайности 1,6-2,2 т/га. Требуется разделить площадь таким образом, чтобы получить максимальную прибыль.

10. Хозяйство производит 2 вида продукции. За единицу производства культуры А оно получает прибыль 4-5.д.е, а культуры В – 6 д.е. Площадь посевов составляет 35 га. Ограничение трудовых ресурсов соответствует 120 чел.-дней. Для обработки единицы площади культуры А необходимо 3.. чел.-дней, а культуры В – 4-5..чел.- дней. Кроме того, нужно поставить на рынок не менее 30. т. продукции культуры А при урожайности 1,5-2 т/га. Требуется разделить площадь таким образом, чтобы получить максимальную прибыль.

11. Хозяйство производит 2 вида продукции. За единицу производства культуры А оно получает прибыль 5.д.е, а культуры В – 2,5-3 д.е. Площадь посевов составляет 45 га. Ограничение трудовых ресурсов соответствует 150. чел.-дней. Для обработки единицы площади культуры А необходимо 4.. чел.-дней, а культуры В – 2-3..чел.- дней. Кроме того, нужно поставить на рынок не менее 40. т. продукции культуры В при урожайности 2-2,5 т/га. Требуется разделить площадь таким образом, чтобы получить максимальную прибыль.

12. Хозяйство производит 2 вида продукции. За единицу производства культуры А оно получает прибыль 4-5.д.е, а культуры В – 7 д.е. Площадь посевов составляет 40 га. Ограничение трудовых ресурсов соответствует 120. чел.-дней. Для обработки единицы площади культуры А необходимо 2-3.. чел.-дней, а культуры В - …4..чел.- дней. Кроме того, нужно поставить на рынок не менее 30. т. продукции культуры А при урожайности 1,5-2 т/га. Требуется разделить площадь таким образом, чтобы получить максимальную прибыль.

13. Хозяйство производит 2 вида продукции. За единицу производства культуры А оно получает прибыль 1,5-2,5 .д.е, а культуры В – 4 д.е. Площадь посевов составляет 50 га. Ограничение трудовых ресурсов соответствует 90. чел.-дней. Для обработки единицы площади культуры А необходимо 1-2. чел.-дней, а культуры В - 3..чел.- дней. Кроме того, нужно поставить на рынок не менее 30 т. продукции культуры В при урожайности 1,7-2,4 т/га. Требуется разделить площадь таким образом, чтобы получить максимальную прибыль.

14. Хозяйство производит 2 вида продукции. За единицу производства культуры А оно получает прибыль 4.д.е, а культуры В – 2,5-3 д.е. Площадь посевов составляет 45 га. Ограничение трудовых ресурсов соответствует 150. чел.-дней. Для обработки единицы площади культуры А необходимо 4,5.. чел.-дней, а культуры В –3..чел.- дней. Кроме того, нужно поставить на рынок не менее 40. т. продукции культуры В при урожайности 1,5-2,5 т/га. Требуется разделить площадь таким образом, чтобы получить максимальную прибыль.

15. Хозяйство производит 2 вида продукции. За единицу производства культуры А оно получает прибыль 4,5-5,5 д.е, а культуры В – 7 д.е. Площадь посевов составляет 40 га. Ограничение трудовых ресурсов соответствует 120. чел.-дней. Для обработки единицы площади культуры А необходимо 2.. чел.-дней, а культуры В - …3-4..чел.- дней. Кроме того, нужно поставить на рынок не менее 30. т. продукции культуры А при урожайности 1,5-2 т/га. Требуется разделить площадь таким образом, чтобы получить максимальную прибыль.

16. Хозяйство производит 2 вида продукции. За единицу производства культуры А оно получает прибыль 2,0-2,5 .д.е, а культуры В – 4 д.е. Площадь посевов составляет 50 га. Ограничение трудовых ресурсов соответствует 90. чел.-дней. Для обработки единицы площади культуры А

необходимо 1-2. чел.-дней, а культуры В – 3,5..чел.- дней. Кроме того, нужно поставить на рынок не менее 30 т. продукции культуры В при урожайности 1,8-2,5 т/га. Требуется разделить площадь таким образом, чтобы получить максимальную прибыль.

17. Хозяйство производит 2 вида продукции. За единицу производства культуры А оно получает прибыль 2,0-3 .д.е, а культуры В – 4 д.е. Площадь посевов составляет 50 га. Ограничение трудовых ресурсов соответствует 90. чел.-дней. Для обработки единицы площади культуры А необходимо 1-2. чел.-дней, а культуры В – 3,5..чел.- дней. Кроме того, нужно поставить на рынок не менее 30 т. продукции культуры В при урожайности 1,7-2,4 т/га. Требуется разделить площадь таким образом, чтобы получить максимальную прибыль.

2.4.2 Задача со случайными оценками

Стохастическая (вероятностная) неопределенность возникает, когда неизвестные факторы статистически устойчивы и представляют собой случайные величины, для которых известны или определены законы распределения и их параметры.

Подобная ситуация описывается задачей стохастического программирования которая имеет вид:

$$f(x) = M\left(\sum_{j \in J} c_j x_j\right) \to \min(\max), \qquad (2.51)$$

$$P\left\{\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_{ij} \le b_i\right\} \ge \alpha_i \ (i \in I), \qquad (2.52)$$

где $f(X)$ - целевая функция, удовлетворяющий системе ограничений, x_j – искомая переменная, c_j – коэффициенты целевой функции, a_{ij} , b_i – параметры ограничений, α_i – заданная вероятность выполнения системы, P – вероятность выполнения каждого заданного ограничения.

Для планирования производства продукции может быть сформулирована другая задача, когда коэффициенты ограничений, целевой функции и правых частей условий c_j , a_{ij}, и b_i представляют собой случайные величины, связанные с вероятностью превышения P:

$$f = \sum_{J=1}^{n} c_j^P x_j \to \max, \qquad (2.53)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^P x_j \le (\ge)\, b_i^P (i = \overline{1, m}), \qquad (2.54)$$

$$x_j \ge 0, \ (j = \overline{1, n}). \qquad (2.55)$$

Так как представленная задача является сложной, возможным методом ее решения является переход к детерминированному эквиваленту. В основе этого перехода лежит использование закона распределения случайной величины. В практике наиболее часто используются семейство нормальных законов распределения и гамма-распределение.

Пример 2.15. Рассмотрим решение упрощенной задачи оптимизации производства аграрной продукции со случайными параметрами для ООО «Академия». При этом условия задачи примем аналогичными примеру 5.1 за исключением целевой функции, коэффициенты при неизвестных в которой теперь не будем изменять: $12840x_1 + 15457x_2 + 18328x_3 + 1280x_4 + 1620x_5 \to max$,
и урожайности пшеницы в ограничениях, которая будет зависеть от вероятности: $y^P x_1 \geq 6030$ (здесь y^P – урожайность пшеницы, зависящая от вероятности P).

Для того чтобы определить параметр y^P в условии задачи используем многолетний ряд наблюдений урожайности пшеницы в Иркутском районе (рис. 2.17).

D2 =НОРМРАСП(C2;$G$4;$G$17;1)

	A	B	C	D	E	F	G
1	Год	Урожайность пшеницы в Иркутском р-оне, ц/га	Модульный коэффициент, $x_i/\bar{x}$	Вероятность появления события по нормальному закону распределения			
2	1996	17,5	1,11	0,722		*Столбец1*	
3	1997	13	0,82	0,134			
4	1998	13,2	0,83	0,151		Среднее	1,007
5	1999	12,8	0,81	0,118		Стандартная ошибка	0,041
6	2000	15,3	0,97	0,405		Медиана	1,068
7	2001	10,7	0,68	0,0241		Мода	1,112
8	2002	11,8	0,75	0,0592		Стандартное отклонени	0,169
9	2003	15,2	0,96	0,390		Дисперсия выборки	0,028
10	2004	18,7	1,18	0,851		Эксцесс	-0,939
11	2005	17,8	1,12	0,758		Асимметричность	-0,590
12	2006	17,5	1,11	0,722		Интервал	0,547
13	2007	17,6	1,11	0,734		Минимум	0,680
14	2008	19,3	1,22	0,897		Максимум	1,227
15	2009	16,8	1,06	0,627		Сумма	17,112
16	2010	18	1,14	0,781		Счет	17
17	2011	15,6	0,99	0,449		Коэффициент вариации	0,17
18	2012	18,4	1,16	0,823			
19							
20	Средне-ариф-мети-ческое ряда	15,8					

Рисунок 2.17 – **Определение вероятности появления события по нормальному закону распределения вероятностей для значений многолетнего ряда урожайности пшеницы в Иркутском районе**

Сначала определим среднеарифметическое значение ряда наблюдений. С этой целью в ячейке B20 введена формула «=СРЗНАЧ(B2:B18)» (использована встроенная функция MS Excel СРЗНАЧ(число1; [число2];...)). После этого для урожайности пшеницы рассчитаем модульный коэффициент, который определяется как отношение каждого значения урожайности к среднеарифметическому значению многолетнего ряда, с этой целью в ячейку C2 введена формула «=B2/$B$20», которая затем скопирована в диапазон ячеек C3:C18. Обратите внимание, что знак «$» служит для создания абсолютной ссылки на ячейку в формуле (иными словами при копировании или протягивании формулы данный аргумент не смещается).

Затем для ряда урожайности пшеницы, расположенного в диапазоне ячеек B2:B18 найдем статистические параметры, используя инструмент MS Excel «Описательная статистика», расположенного на вкладке «Данные», панель инструментов «Анализ», кнопка «Анализ данных» (рис. 2.18). Результат выведен в диапазон ячеек F2:G16.

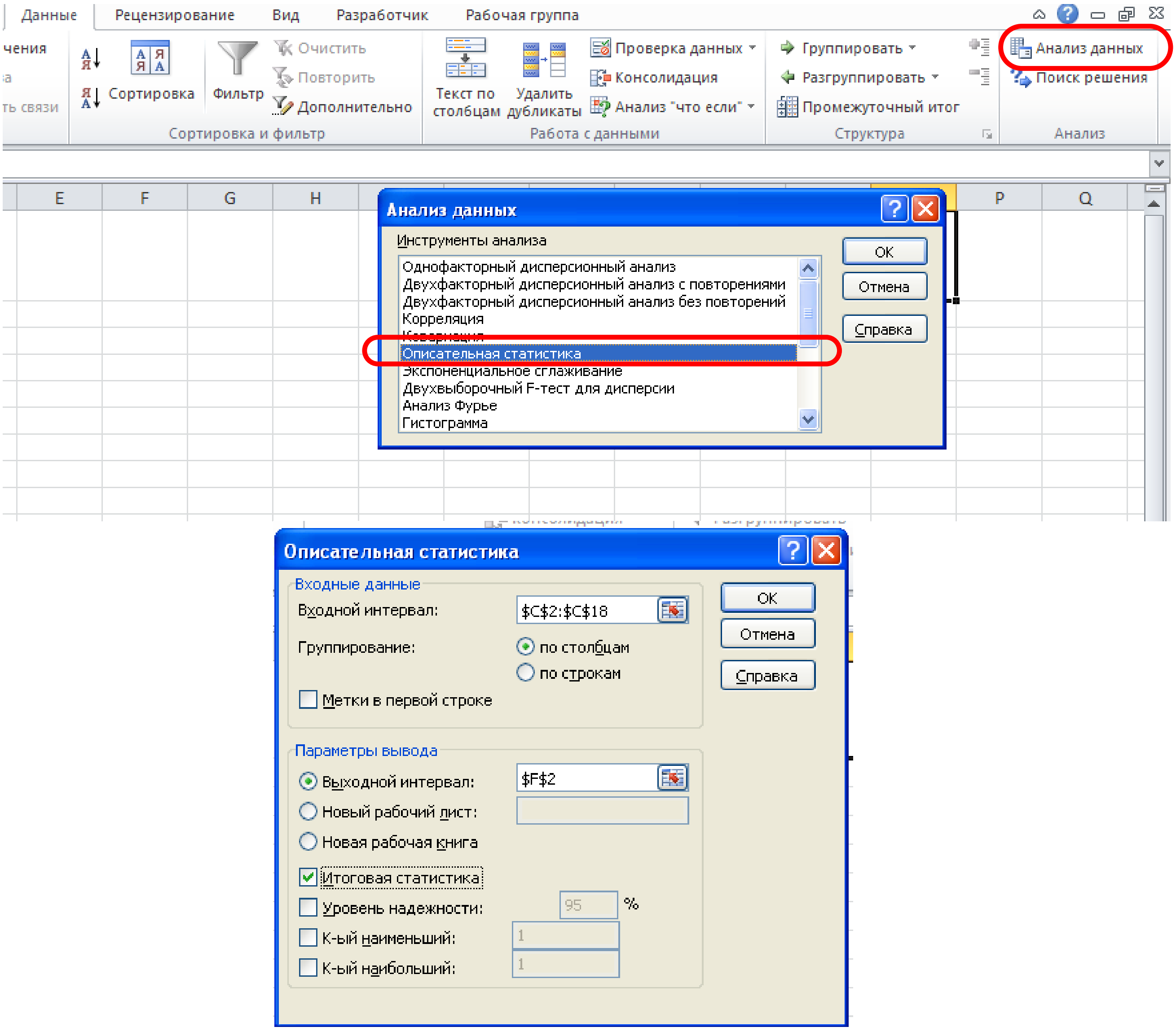


Рисунок 2.18 – **Определение статистических параметров ряда модульных коэффициентов урожайности пшеницы в Иркутском районе**

Дополнительно в ячейке G17 рассчитаем коэффициент вариации путем деления стандартного отклонения на среднее значение ряда (в ячейку G17 введена формула «=G8/G4»).

Затем в ячейку D2 введем формулу «=НОРМРАСП(C2;$G$4;$G$17;1)», которая позволяет определить вероятность появления события по нормальному закону распределения, и скопируем ее в диапазон D3: D18 (рис. 2.17). Здесь использована встроенная функция MS Excel «НОРМРАСП(x,среднее,стандартное_откл)».

Как можно видеть минимальное значение урожайности в Иркутском районе за рассматриваемый период (1996-2012 гг.) составило 10,7 ц/га в 2001 г. (рис. 2.17). Согласно определению вероятности она для данного события составляет 0,0241 (ячейка D7). Это и является составляющим условия задачи.

Теперь решим задачу оптимизации производства аграрной продукции с минимальной урожайностью пшеницы (рис. 2.19 и 2.20).

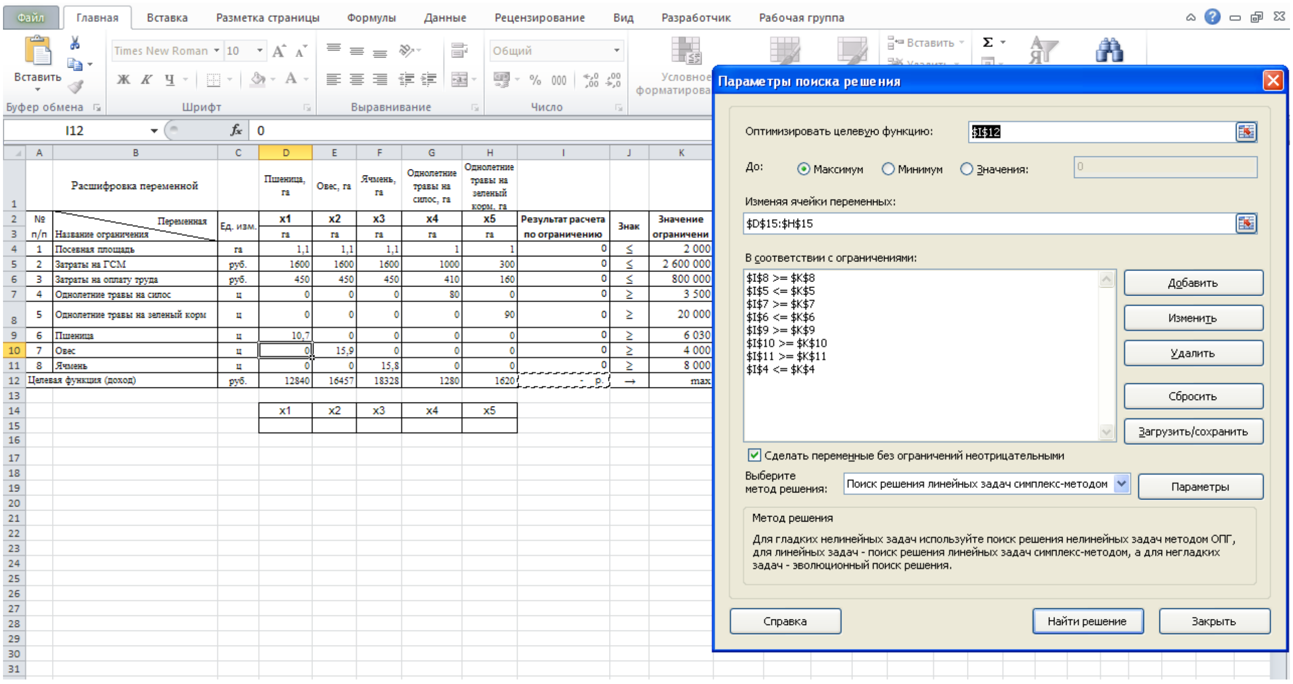


Рисунок 2.19 – **Решение задачи оптимизации производства аграрной продукции со случайными параметрами**

В результате решения задачи оптимизации производства аграрной продукции со случайными параметрами мы получаем план производства (ячейки D15:H15), согласно которому посевная площадь пшеница составляет 564 га, овса – 252 га, ячменя – 741, однолетних трав на силос – 44 га, однолетних трав на зеленый корм – 222 га. Полученное значение целевой функции 5 370 589 руб. соответствует вероятности 0,0241.

I12 =СУММПРОИЗВ(D12:H12;D15:H15)

№ п/п	Переменная / Название ограничения	Ед. изм.	x1	x2	x3	x4	x5	Результат расчета по	Знак	Значение ограничени
	Расшифровка переменной		Пшеница, га	Овес, га	Ячмень, га	Однолетние травы на силос, га	Однолетние травы на зеленый корм, га			
			га	га	га	га	га			
1	Посевная площадь	га	1,1	1,1	1,1	1	1	1 978	≤	2 000
2	Затраты на ГСМ	руб.	1600	1600	1600	1000	300	2 600 000	≤	2 600 000
3	Затраты на оплату труда	руб.	450	450	450	410	160	753 688	≤	800 000
4	Однолетние травы на силос	ц	0	0	0	80	0	3 500	≥	3 500
5	Однолетние травы на зеленый корм	ц	0	0	0	0	90	20 000	≥	20 000
6	Пшеница	ц	10,7	0	0	0	0	6 030	≥	6 030
7	Овес	ц	0	15,9	0	0	0	4 000	≥	4 000
8	Ячмень	ц	0	0	15,8	0	0	11 706	≥	8 000
Целевая функция (доход)		руб.	12840	16457	18328	1280	1620	25 370 589р.	→	max

x1	x2	x3	x4	x5
564	252	741	44	222

Рисунок 2.20 – **Результаты решения задачи оптимизации производства аграрной продукции со случайными параметрами**

Таким образом, значение целевой функция и оптимальный план в задаче математического программирования со случайными оценками связаны с вероятностью.

Контрольные задания

1. Хозяйство производит 2 вида продукции. за единицу производства культуры А оно получает прибыль 5.д.е, а культуры В – 4 д.е. Площадь посевов составляет 90 га. Ограничение трудовых ресурсов соответствует 120. чел.-дней. Для обработки единицы площади культуры А необходимо 2 чел.-дней, а культуры В - …1..чел.- дней. Кроме того, нужно поставить на рынок не менее 30. т. продукции культуры В при урожайности, подчиняющейся нормальному закону с параметрами: среднее – 1,7 т/га, коэффициент вариации – 0,15. Требуется разделить площадь таким образом, чтобы получить максимальную прибыль.
2. Хозяйство производит 2 вида продукции. за единицу производства культуры А оно получает прибыль 3..д.е, а культуры В – 2 д.е. Площадь посевов составляет 50. га. Ограничение трудовых ресурсов соответствует 180.. чел.-дней. Для обработки единицы площади культуры А необходимо 4.. чел.-дней, а культуры В - …2..чел.- дней. Кроме того, необходимо поставить на рынок не менее …40. т. продукции культуры В при урожайности, подчиняющейся нормальному закону с параметрами: среднее – 1,4 т/га, коэффициент вариации – 0,18.. Требуется разделить площадь таким образом, чтобы получить максимальную прибыль.
3. Хозяйство производит 2 вида продукции. за единицу производства культуры А оно получает прибыль 2..д.е, а культуры В – 3 д.е. Площадь посевов составляет 35. га. Ограничение трудовых ресурсов

соответствует 120.. чел.-дней. Для обработки единицы площади культуры А необходимо 3.. чел.-дней, а культуры В –5..чел.- дней. Кроме того, необходимо поставить на рынок не менее 50. т. продукции культуры А при урожайности, подчиняющейся гамма-распределению с параметрами: среднее – 1,5 т/га, коэффициент вариации – 0,30. Требуется разделить площадь таким образом, чтобы получить максимальную прибыль.

4. Хозяйство производит 2 вида продукции. за единицу производства культуры А оно получает прибыль…3,5..д.е, а культуры В – 5 д.е. Площадь посевов составляет …70. га. Ограничение трудовых ресурсов соответствует …180.. чел.-дней. Для обработки единицы площади культуры А необходимо …1,5.. чел.-дней, а культуры В - …3..чел.-дней. Кроме того, необходимо поставить на рынок не менее 50. т. продукции культуры А при урожайности, подчиняющейся гамма-распределению с параметрами: среднее – 1,4 т/га, коэффициент вариации – 0,28.. Требуется разделить площадь таким образом, чтобы получить максимальную прибыль.

5. Хозяйство производит 2 вида продукции. за единицу производства культуры А оно получает прибыль 4…..д.е, а культуры В – 2 д.е. Площадь посевов составляет 90. га. Ограничение трудовых ресурсов соответствует 210. чел.-дней. Для обработки единицы площади культуры А необходимо …3.. чел.-дней, а культуры В - …1,5 чел.-дней. Кроме того, необходимо поставить на рынок не менее 40…. т. продукции культуры В при урожайности, подчиняющейся нормальному закону с параметрами: среднее – 1,5 т/га, коэффициент вариации – 0,20. Требуется разделить площадь таким образом, чтобы получить максимальную прибыль.

6. Хозяйство производит 2 вида продукции. за единицу производства культуры А оно получает прибыль 4,5..д.е, а культуры В – 3 д.е. Площадь посевов составляет 80…. га. Ограничение трудовых ресурсов соответствует 210. чел.-дней. Для обработки единицы площади культуры А необходимо 3.. чел.-дней, а культуры В - …2..чел.- дней. Кроме того необходимо поставить на рынок не менее 50. т. продукции культуры В при урожайности подчиняющейся нормальному закону с параметрами: среднее – 1,9 т/га, коэффициент вариации – 0,13. Требуется разделить площадь таким образом, чтобы получить максимальную прибыль.

7. Хозяйство производит 2 вида продукции. за единицу производства культуры А оно получает прибыль …3..д.е, а культуры В – 6 д.е. Площадь посевов составляет 40. га. Ограничение трудовых ресурсов соответствует 120.. чел.-дней. Для обработки единицы площади культуры А необходимо 3.. чел.-дней, а культуры А- 5..чел.- дней. Кроме того необходимо поставить на рынок не менее …30. т. продукции культуры В при урожайности, подчиняющейся гамма-распределению с параметрами: среднее – 1,3 т/га, коэффициент вариации – 0,25.. Требуется разделить площадь таким образом, чтобы получить максимальную прибыль.

8. Хозяйство производит 2 вида продукции за единицу производства культуры А оно получает прибыль …4..д.е, а культуры В – 2

д.е. Площадь посевов составляет 60. га. Ограничение трудовых ресурсов соответствует 150.. чел.-дней. Для обработки единицы площади культуры А необходимо …3,5.. чел.-дней, а культуры В - …2..чел.-дней. Кроме того, необходимо поставить на рынок не менее 30. т. продукции культуры В при урожайности подчиняющейся гамма-распределению с параметрами: среднее – 1,5 т/га, коэффициент вариации – 0,24.. Требуется разделить площадь таким образом, чтобы получить максимальную прибыль.

9. Хозяйство производит 2 вида продукции за единицу производства культуры А оно получает прибыль 3.д.е, а культуры В –5 д.е. Площадь посевов составляет 75 га. Ограничение трудовых ресурсов соответствует 180 чел.-дней. Для обработки единицы площади культуры А необходимо 2.. чел.-дней, а культуры В – 3..чел.- дней. Кроме того, нужно поставить на рынок не менее 40. т. продукции культуры А при урожайности, подчиняющейся логнормальному закону с параметрами: среднее – 1,3 т/га, коэффициент вариации – 0,32.. Требуется разделить площадь таким образом, чтобы получить максимальную прибыль.

10. Хозяйство производит 2 вида продукции. За единицу производства культуры А оно получает прибыль 4.д.е, а культуры В – 6 д.е. Площадь посевов составляет 35 га. Ограничение трудовых ресурсов соответствует 120 чел.-дней. Для обработки единицы площади культуры А необходимо 3.. чел.-дней, а культуры В – 5..чел.- дней. Кроме того, нужно поставить на рынок не менее 30. т. продукции культуры А при урожайности, подчиняющейся логнормальному закону с параметрами: среднее – 1,6 т/га, коэффициент вариации – 0,28. Требуется разделить площадь таким образом, чтобы получить максимальную прибыль.

11. Хозяйство производит 2 вида продукции. За единицу производства культуры А оно получает прибыль 5.д.е, а культуры В – 2 д.е. Площадь посевов составляет 45 га. Ограничение трудовых ресурсов соответствует 150. чел.-дней. Для обработки единицы площади культуры А необходимо 4.. чел.-дней, а культуры В – 2.чел.- дней. Кроме того, нужно поставить на рынок не менее 40. т. продукции культуры В при урожайности, подчиняющейся гамма-распределению с параметрами: среднее – 1,2 т/га, коэффициент вариации – 0,35.. Требуется разделить площадь таким образом, чтобы получить максимальную прибыль.

12. Хозяйство производит 2 вида продукции. За единицу производства культуры А оно получает прибыль 4.д.е, а культуры В – 7 д.е. Площадь посевов составляет 40 га. Ограничение трудовых ресурсов соответствует 120. чел.-дней. Для обработки единицы площади культуры А необходимо 3.. чел.-дней, а культуры В - …4..чел.- дней. Кроме того, нужно поставить на рынок не менее 30. т. продукции культуры А при урожайности, подчиняющейся логнормальному закону с параметрами: среднее – 1,4 т/га, коэффициент вариации – 0,25.. Требуется разделить площадь таким образом, чтобы получить максимальную прибыль.

13. Хозяйство производит 2 вида продукции. За единицу производства культуры А оно получает прибыль 2,5 .д.е, а культуры В – 4 д.е. Площадь посевов составляет 50 га. Ограничение трудовых ресурсов соответствует 90. чел.-дней. Для обработки единицы площади культуры А необходимо 2. чел.-дней, а культуры В - 3..чел.- дней. Кроме того, нужно поставить на рынок не менее 30 т. продукции культуры В при урожайности, подчиняющейся логнормальному закону с параметрами: среднее – 1,3 т/га, коэффициент вариации – 0,31.. Требуется разделить площадь таким образом, чтобы получить максимальную прибыль.

14. Хозяйство производит 2 вида продукции. За единицу производства культуры А оно получает прибыль 4.д.е, а культуры В – 2 д.е. Площадь посевов составляет 45 га. Ограничение трудовых ресурсов соответствует 150. чел.-дней. Для обработки единицы площади культуры А необходимо 4.. чел.-дней, а культуры В – 2.чел.- дней. Кроме того, нужно поставить на рынок не менее 40. т. продукции культуры В при урожайности, подчиняющейся гамма-распределению с параметрами: среднее – 1,35 т/га, коэффициент вариации – 0,30.. Требуется разделить площадь таким образом, чтобы получить максимальную прибыль.

15. Хозяйство производит 2 вида продукции. За единицу производства культуры А оно получает прибыль 4.д.е, а культуры В – 6 д.е. Площадь посевов составляет 40 га. Ограничение трудовых ресурсов соответствует 120. чел.-дней. Для обработки единицы площади культуры А необходимо 3.. чел.-дней, а культуры В - …4..чел.- дней. Кроме того, нужно поставить на рынок не менее 30. т. продукции культуры А при урожайности, подчиняющейся логнормальному закону с параметрами: среднее – 1,45 т/га, коэффициент вариации – 0,25.. Требуется разделить площадь таким образом, чтобы получить максимальную прибыль.

16. Хозяйство производит 2 вида продукции. За единицу производства культуры А оно получает прибыль 2,5 .д.е, а культуры В – 4,5 д.е. Площадь посевов составляет 50 га. Ограничение трудовых ресурсов соответствует 90. чел.-дней. Для обработки единицы площади культуры А необходимо 2. чел.-дней, а культуры В - 3..чел.- дней. Кроме того, нужно поставить на рынок не менее 30 т. продукции культуры В при урожайности, подчиняющейся логнормальному закону с параметрами: среднее – 1,35 т/га, коэффициент вариации – 0,29.. Требуется разделить площадь таким образом, чтобы получить максимальную прибыль.

17. Хозяйство производит 2 вида продукции. За единицу производства культуры А оно получает прибыль 2 .д.е, а культуры В – 4,5 д.е. Площадь посевов составляет 40 га. Ограничение трудовых ресурсов соответствует 90. чел.-дней. Для обработки единицы площади культуры А необходимо 2. чел.-дней, а культуры В - 3..чел.- дней. Кроме того, нужно поставить на рынок не менее 30 т. продукции культуры В при урожайности, подчиняющейся логнормальному закону с параметрами: среднее – 1,4 т/га, коэффициент вариации – 0,33.. Требуется разделить площадь таким образом, чтобы получить максимальную прибыль.

2.5 ЗАДАЧИ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

В многокритериальных задачах используется не одна целевая функция, а их множество. Примером многокритериальной задачи может быть комплексное использование водных ресурсов водохранилища. Водопользователями и водопотребителями в этом случае могут быть энергетика, промышленные объекты, сельскохозяйственные организации, рыбное хозяйство, речной транспорт, водоснабжение, рекреация и другие. У каждого участника водохозяйственного комплекса своя цель. В некоторых случаях критерии оптимальности противоречат друг другу. В частности, задачи рыбного хозяйства в период нереста не совпадают с задачами гидроэнергетики.

Задача многокритериальной оптимизации имеет следующий вид

$$f(X) = \langle (f_1(X), f_2(X), ..., f_s(X) \rangle \to \max, \tag{2.56}$$

$$X \in G. \tag{2.57}$$

где $f_i(X)$ – частный критерий, X – допустимое решение в области G.

Для решения многокритериальных задач применяют различные методы достижения компромисса: линейная свертка критериев, последовательные уступки, выделения основного критерия, получение компромиссного решения для двух равнозначных критериев и др.

Метод линейной свертки критериев

По методу линейной свертки

$$F_j(X) = \sum_{i=1}^{n} C_i f_{ij}(X), \tag{2.58}$$

где $F_j(X)$ – эффективность некоторого j-го варианта решения; $f_{ij}(X)$ – оценка эффективности j-го варианта относительно i-ой цели; C_i – оценки значимости цели.

Оптимальным считается вариант, при котором функция $F_j(X)$ принимает максимальное значение. Параметр C_i определяют экспертным путем. Причем $\sum_{i=1}^{n} C_i = 1.$

Определение области эффективных решений (области Парето)

Основная идея метода заключается в том, чтобы исключить из рассмотрения те варианты решения многокритериальной задачи, которые заведомо плохи. Для этого определяют область область эффективных решений или область Парето (фамилия итальянского исследователя, В. Парето предложившего этот метод в 1904 г.)

Решение X^* называется оптимальным по Парето (парето-оптимальным), если не существует такого возможного решения X для которого имеет место неравенство $f(x)\geq f(x^*)$. Все парето-оптимальные решения образуют множество Парето.

Принцип Парето не выделяя единственного решения, облегчает процедуру выбора эффективного решения, так как это множество легче обозримо и легче поддается анализу, чем все множества возможных решений. Окончательный выбор решения осуществляется на основании неформальных методов.

Метод получения компромиссного решения для двух разных критериев

Для каждого из критериев определяют его оптимальное решение. При этом вводится дополнительное условие

$$\left|\frac{f_1^*(X)-f_1(X)}{f_1^*(X)}\right|=\left|\frac{f_2^*(X)-f_2(X)}{f_2^*(X)}\right|, \qquad (2.59)$$

где $f_1(X)$ и $f_2(X)$ – первая и вторая целевые функции, $f_1^*(X)$ и $f_2^*(X)$ – оптимальные значения целевых функций.

Оптимальным является такой вариант решения многокритериальной задачи, в котором относительные отклонения каждого критерия от своего оптимального значения равновелики, или выполняется указанное равенство

Метод последовательных уступок

Рассмотрим метод последовательных уступок. В этом методе экспертным путем ранжируют цели. Сначала определяется решение согласно наиболее важному критерию. После этого значение этого критерия уменьшается на основе заданного значения уступки. Далее решается задача оптимизации с учетом второго по ранжиру критерия с учетом второй уступки. Процедуры повторяются до тех пор, пока не будет получено максимальное значение последнего критерия при условии, что значение каждого из предшествующих частных критериев отличается от соответствующего условного максимума не более чем на величину допустимой уступки по данной целевой функции. Найденное на последнем этапе решение является оптимальным.

Рассмотрим метод последовательных уступок. В этом методе экспертным путем ранжируют цели. Сначала определяется решение согласно наиболее важному критерию. После этого значение этого критерия

уменьшается на основе заданного значения уступки. Далее решается задача оптимизации с учетом второго по ранжиру критерия с учетом второй уступки. Процедуры повторяются до тех пор, пока не будет получено максимальное значение последнего критерия при условии, что значение каждого из предшествующих частных критериев отличается от соответствующего условного максимума не более чем на величину допустимой уступки по данной целевой функции. Найденное на последнем этапе решение является оптимальным.

Пример 2.16. Задача двухкритериальной оптимизации имеет вид:

$$f_1 = -x_1 + 2x_2 \to \max$$

$$f_2 = 2x_1 + x_2 \to \max$$

$$\left.\begin{array}{l} x_1 + x_2 \le 6 \\ 1 \le x_1 \le 3 \\ 1 \le x_2 \le 4 \end{array}\right\}.$$

Решить задачу методом последовательных уступок, если задана уступка по первому критерию: $\delta = 2$.

Решение

Так как коэффициенты при одних и тех же переменных в частных критериях имеют разные знаки, то в заданной области допустимых решений невозможно одновременно улучшить все частные критерии, т.е. в данном случае область компромиссов (область Парето) совпадает с областью допустимых решений.

Максимизируем функцию *f*$_1$ в области допустимых решений, т.е. решим однокритериальную задачу графическим методом (рисунок 2.21).

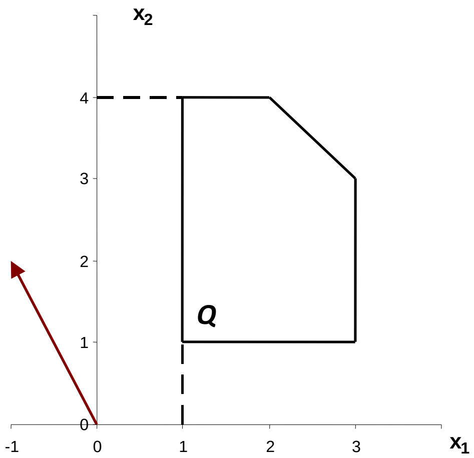


Рисунок 2.21– К задаче многокритериальной оптимизации

Максимум функции *f*$_1$ при условиях задачи достигается в точке с координатами (1;4), так что в данном случае

$$x_1^* = 1, x_{12}^* = 4, \ \max f_1 = f_1^* = 7.$$

Переходим к максимизации функции f_2 при условиях задачи и дополнительном ограничении, позволяющем учесть, что по критерию f_1 нельзя уступать более чем на $\delta=2$. Так как f_1 - 2=5, то дополнительное ограничение будет иметь вид:

$$-x_1 + 2x_2 \geq 5.$$

Новую задачу также решаем графически (рисунок 2.22).

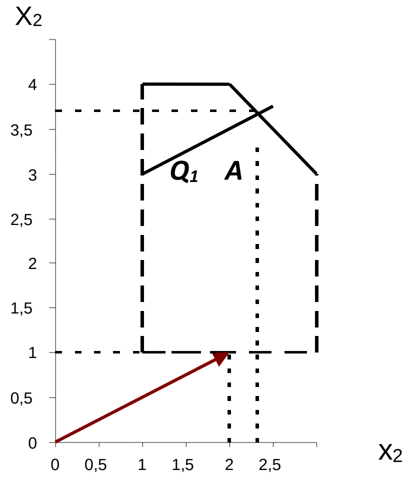


Рисунок 2.22 – Решение задачи многокритериальной оптимизации

Получаем, что максимум функции f_2 при условиях достигается в точке A части Q_1 ,области Q, так что

$x_1^{**} = 2,32;\ x_2^{**} = 3,70;\ \max \mathrm{f}_2 = f_2^* = 8,34.$

Таким образом, оптимальное решение двухкритериальной задачи достигается при $x_1^{**} = 2{,}32, x_2^{**} = 3{,}70$. При этом значения частных критериев составляют:

$$f_1 = 5,\ \mathrm{f}_2 = 8{,}34.$$

Варианты задания

Используя пример 2.16 решить задачу многокритериальной оптимизации для различных значений уступок графически и с помощью прикладной программы.

1. δ=1,5	11. δ=1,6
2. δ=1,7	12 δ=2,3
3. δ=2,1	13. δ=2,6
4. δ=2,2	14. .δ=2,8
5. δ=1,8	15. δ=2,9
6. δ=2,4	16. δ=3,1
7. δ=2,5	17. δ=1,4

8. δ=1,9 18. δ=3,2
9. δ=2,7 19. δ=3,4
10. δ=3,0 20. δ=1,3.

2.6 ЗАДАЧИ ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Задачу о зависимости затрат на содержание и ремонт оборудования при различном времени можно рассматривать, как задачу динамического программирования, в которой в качестве системы S выступает оборудование. Состояния этой системы определяются фактическим временем использования оборудования (его возрастом) τ, т.е. описываются единственным параметром τ.

В качестве управлений выступают решения о замене и сохранении оборудования, принимаемые в начале каждого года. Обозначим через u_1 решение о сохранении оборудования, а через u_2 - решение о замене оборудования. Тогда задача состоит в нахождении такой стратегии управления, определяемой решениями, принимаемыми к началу каждого года, при которой общая прибыль предприятия за пятилетку является максимальной.

Таким образом, сформулирована исходная задача в терминах ***задачи динамического программирования***. Эта задача обладает свойствами аддитивности и отсутствия последействия. Следовательно, ее решение можно найти с помощью алгоритма решения задачи динамического программирования, реализуемого в два этапа. На первом этапе при движении от начала 5-го года к началу 1-го года для каждого допустимого состояния оборудования найдем условное оптимальное управление (решение), а на втором этапе при движении от начала 1-го года к началу 5-го года из условных оптимальных решений для каждого года составим оптимальный план замены оборудования.

В основе метода динамического программирования положен принцип оптимальности Беллмана, заключающийся в следующем: независимо от того, каким образом система оказалась в конкретном состоянии, последующие шаги должны составлять оптимальную стратегию, которая привязана к исходному состоянию.

Пример 2.17. В определенный момент времени на предприятии установлено новое оборудование. Зависимость производительности этого оборудования от времени его использования предприятием, а также зависимость затрат на содержание и ремонт оборудования при различном времени его использования приведены в таблице 2.13.

Зная, что затраты, связанные с приобретением и установкой нового оборудования, идентичного с установленным, составляют 40 тыс. руб., а заменяемое оборудование списывается, составить такой план замены оборудования в течение 5 лет, при котором общая прибыль за данный период времени максимальна.

Таблица 2.13– Зависимость затрат на содержание и ремонт оборудования при различном времени его использования

	Время, в течение которого используется оборудование (лет)					
	0	1	2	3	4	5
Годовой выпуск продукции *R(τ)* в стоимостном выражении, тыс.руб.	80	75	65	60	60	55
Ежегодные затраты *Z(τ)*, связанные с содержанием и ремонтом оборудования, тыс.руб.	20	25	30	35	45	55

Решение

Так как предположили, что к началу *k-го* года $\left(k=\overline{1,5}\right)$ может приниматься только одно из двух решений - заменять или не заменять оборудование, то прибыль предприятия за *k* - й год составит

$$F_k\left(\tau^{(k)},u_k\right)=\begin{cases}R\left(\tau^{(k)}\right)-Z\left(\tau^{(k)}\right) & \text{при } u_1,\\ R\left(\tau^{(k)}=0\right)-Z\left(\tau^{(k)}=0\right)-C_n & \text{при } u_1,\end{cases} \tag{2.60}$$

где $\tau^{(k)}$ - возраст оборудования к началу *k-го* года $\left(k=\overline{1,5}\right)$; u_k - управление, реализуемое к началу *k-го* года; C_n - стоимость нового оборудования.

Таким образом, в данном случае уравнение Беллмана имеет вид

$$F_k\left(\tau^{(k)},u_k\right)=\max_{\tau}\begin{cases}R\left(\tau^{(k)}\right)-Z\left(\tau^{(k)}\right)+F_{k+1}\left(\tau^{(k+1)}\right),\\ R\left(\tau^{(k)}=0\right)-Z\left(\tau^{(k)}=0\right)-C_n+F_{n+1}\left(\tau^{(k)}=1\right).\end{cases} \tag{2.61}$$

Используя теперь уравнение (2.60), приступаем к нахождению решения исходной задачи. Это решение начинаем с определения условно оптимального управления (решения) для последнего (5-го) года, поэтому находим множество допустимых состояний оборудования к началу данного года. Так как в начальный момент имеется новое оборудование $\left(\tau^{(1)}=0\right)$, то возраст оборудования к началу 5-го года может составлять 1, 2, 3 и 4 года. Поэтому допустимые состояния системы на данный период времени таковы: $\tau_1^{(5)}=1;\tau_2^{(5)}=2;\tau_3^{(5)}=3;\tau_4^{(5)}=4$. Для каждого из этих состояний найдем условно оптимальное решение и соответствующее значение функции $F_5\left(\tau^{(5)}\right)$. Используя уравнение (2.61) и соотношение $F_6\left(\tau^{(k+1)}=0\right)$ (так как рассматривается последний год расчетного периода), получаем

$$F_5\left(\tau^{(5)}\right)=\max\begin{cases}R\left(\tau^{(5)}\right)-Z\left(\tau^{(5)}\right)\\ R\left(\tau^{(5)}=0\right)-Z\left(\tau^{(5)}=0\right)-C_n\end{cases}. \tag{2.62}$$

Подставляя теперь в формулу (6.1) вместо $\tau^{(5)}$ его значение, равное 1, и учитывая данные таблица 6.1 , находим

$$F_5\left(\tau^{(5)}\right)=\max\left\{\begin{matrix} R\left(\tau^{(5)}=1\right)-Z\left(\tau^{(5)}=1\right) \\ R\left(\tau^{(5)}=0\right)-Z\left(\tau^{(5)}=0\right)-C_n \end{matrix}\right\}=\max\left\{\begin{matrix} 75-25 \\ 80-20-40 \end{matrix}\right\}=50, u^0=u_1.$$

Следовательно, условно оптимальное решение в данном случае есть u_1.

Проведем аналогичные вычисления для других допустимых состояний оборудования к началу 5-го года:

$$F_5\left(\tau_2^{(5)}\right)=\max\left\{\begin{matrix} 65-30 \\ 80-20-40 \end{matrix}\right\}=35, u^0=u_1;$$

$$F_5\left(\tau_3^{(5)}\right)=\max\left\{\begin{matrix} 65-35 \\ 80-20-40 \end{matrix}\right\}=25, u^0=u_1;$$

$$F_5\left(\tau_4^{(5)}\right)=\max\left\{\begin{matrix} 65-45 \\ 80-20-40 \end{matrix}\right\}=20, u^0=u_2.$$

Полученные результаты вычислений приведены в таблице 2.14.

Рассмотрим теперь возможные состояния оборудования к началу 4-го года. Очевидно, допустимыми состояниями являются $\tau_1^{(4)}=1; \tau_2^{(4)}=2; \tau_3^{(4)}=3.$ Для каждого из них определяем условно оптимальное решение и соответствующее значение функции $F_4\left(\tau^{(4)}\right)$. Для этого используем уравнение (2.61) и данные таблица 2.14.

Таблица 2.14 - Результаты вычислений

Возраст оборудования $\tau^{(5)}$ (лет)	Значения функции $F_5\left(\tau^{(5)}\right)$, тыс. руб.	Условно оптимальное решение u
1	50	u_1
2	35	u_1
3	25	u_1
4	20	u_2

Так, в частности, для $\tau_1^{(4)}=1$ получим

$$F_4\left(\tau_1^{(4)}\right)=\max\left\{\begin{matrix} R\left(\tau^{(4)}=1\right)-Z\left(\tau^{(4)}=1\right)+\mathrm{F}_5\left(\tau^{(5)}=2\right) \\ R\left(\tau^{(4)}=0\right)-Z\left(\tau^{(4)}=0\right)-C_n+\mathrm{F}_5\left(\tau^{(5)}=1\right) \end{matrix}\right\}=\max\left\{\begin{matrix} 75-25+35 \\ 80-20-40+50 \end{matrix}\right\}=85, u^0=u_1.$$

Аналогично находим

$$F_4\left(\tau_2^{(4)}\right)=\max\left\{\begin{matrix} 65-30+25 \\ 80-20-40+50 \end{matrix}\right\}=70, u^0=u_2.$$

$$F_4\left(\tau_3^{(4)}\right)=\max\begin{Bmatrix}60-35+20\\80-20-40+50\end{Bmatrix}=70, u^0=u_2.$$

Полученные результаты вычислений записываем в таблица 2.15.

Таблица 2.15 - Результаты вычислений

Возраст оборудования $\tau^{(4)}$ (лет)	Значения функции $F_4\left(\tau^{(4)}\right)$, тыс.руб.	Условно оптимальное решение u^0
1	85	u_1
2	70	u_2
3	70	u_2

Определим теперь условно оптимальное решение для каждого из допустимых состояний оборудования к началу 3-го года. Очевидно, такими состояниями являются $\tau_1^{(3)}=1;\tau_2^{(3)}=2.$. В соответствии с уравнением (2.61) находим

$$F_3\left(\tau_1^{(3)}\right)=\max\begin{Bmatrix}R\left(\tau^{(3)}=1\right)-Z\left(\tau^{(3)}=1\right)+\mathrm{F}_4\left(\tau^{(4)}=2\right)\\R\left(\tau^{(3)}=0\right)-Z\left(\tau^{(3)}=0\right)-C_n+\mathrm{F}_4\left(\tau^{(4)}=1\right)\end{Bmatrix};$$

$$F_3\left(\tau_2^{(3)}\right)=\max\begin{Bmatrix}R\left(\tau^{(3)}=2\right)-Z\left(\tau^{(3)}=2\right)+\mathrm{F}_4\left(\tau^{(4)}=3\right)\\R\left(\tau^{(3)}=0\right)-Z\left(\tau^{(3)}=0\right)-C_n+\mathrm{F}_4\left(\tau^{(4)}=1\right)\end{Bmatrix}.$$

Используя данные первой и третьей таблиц примера, получаем

$$F_3\left(\tau_1^{(3)}\right)=\max\begin{Bmatrix}75-25+70\\80-20-40+85\end{Bmatrix}=120, u^0=u_1;$$

$$F_3\left(\tau_2^{(3)}\right)=\max\begin{Bmatrix}65-30+70\\80-20-40+85\end{Bmatrix}=105, u^0=u_2.$$

Из последнего выражения видно, что если к началу 3-го года возраст оборудования составляет 2 года, то независимо от того, будет ли принято решение u_1 или u_2, величина прибыли окажется одной и той же. Это означает, что в качестве условно оптимального решения можно взять любое, например, u_2. Полученные значения для $F_3\left(\tau^{(3)}\right)$ и соответствующие условно оптимальные решения записываем в таблицу 2.16.

Таблица 2.16- Результаты вычислений

Возраст оборудования $\tau^{(3)}$ (лет)	Значения функции $F_3\left(\tau^{(3)}\right)$, тыс. руб.	Условно оптимальное решение u^0
1	120	u_1
2	105	u_2

Наконец, рассмотрим допустимые состояния оборудования к началу 2-го года. Очевидно, на данный момент времени возраст оборудования может быть равен только лишь одному году. Поэтому предстоит сравнить лишь два возможных решения: сохранить оборудование или произвести замену. Анализ такого сравнения характеризуется данными таблицы 2.17.

Согласно условию в начальный момент установлено новое оборудование $\left(\tau_1^{(1)}=0\right)$. Поэтому проблемы выбора между сохранением и заменой оборудования не существует: оборудование следует сохранить. Следовательно, условно оптимальным решением является u_1, а значение функции $F_1\left(\tau_1^{(1)}\right)=215$.

Таблица 2.17 - Результаты вычислений

Возраст оборудования $\tau^{(2)}$ (лет)	Значения функции $F_2\left(\tau^{(2)}\right)$, тыс.руб.	Условно оптимальное решение u^0
1	155	u_1

Таким образом, максимальная прибыль предприятия может быть равной 215 тыс. руб. Она соответствует оптимальному плану замены оборудования, который получается на основе данных таблиц в результате реализации второго этапа вычислительного процесса, состоящего в прохождении всех рассмотренных шагов с начала 1-го до начала 5-го года.

Для 1-го года решение единственно - следует сохранить оборудование. Отсюда, возраст оборудования к началу 2-го года равен одному году. Тогда в соответствии с данными последней таблицы, оптимальным решением для 2-го года является решение о сохранении оборудования. Реализация такого решения приводит к тому, что возраст оборудования к началу 3-го года становится равным двум годам. При таком возрасте оборудование в 3-м году следует заменить. После замены оборудования его возраст к началу 4-го года составит один год. Как видно из третьей таблицы, при таком возрасте оборудования его менять не следует. Поэтому возраст оборудования к началу 5-го года составит два года, т.е. менять оборудование нецелесообразно.

Задание к разделу

Решить задачу динамического программирования согласно предложенному варианту.

II ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

1 МОДЕЛИРОВАНИЕ СЛУЧАЙНЫХ ЧИСЕЛ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ

Равномерно распределенные последовательности случайных чисел в интервале [0, 1] можно получить с помощью генератора случайных чисел, специальных таблиц и методом моделирования псевдослучайных чисел.

В качестве генераторов случайных чисел можно использовать рулетку, урну с десятью цифрами и другие.

В таблице случайных чисел цифры задаются случайным образом. При этом назначается группа цифр, благодаря которой последовательно или по другому правилу формируют числа в пределах интервала [0, 1].

Псевдослучайные числа моделируют с помощью формулы. При этом полученное число имитирует случайное число.

Первый алгоритм для получения псевдослучайных чисел, названный методом середины квадратов, предложил Дж. Нейман. К сожалению, алгоритм себя не оправдал, поскольку в моделируемых последовательностях преобладают малые числа.

При моделировании случайных чисел можно использовать формулу

$$r_{i+1}=r_i \cdot D(r_i) \bmod 1. \tag{1.1}$$

В этой формуле второй множитель представляет собой целое число в виде набора символов после нуля. Знак *mod 1* означает операцию извлечения из результата дробной части.

Пример 1.1. Задавая исходное число $r_i=0,003043508$, смоделируем 25 случайных чисел, используя формулу (1.1). В таблице 1.1 r_i и r_{i+1} представляют собой предшествующее и преобразованное числа.

Таблица 1.1 – Результаты моделирования случайных чисел по формуле (1.1)

r_i	r_{i+1}	r_i	r_{i+1}	r_i	r_{i+1}
0,003043508	0,294094606	0,667282617	0,05761613	0,92121261	0,256013632
0,294094606	0,751350082	0,05761613	0,83805837	0,256013632	0,967801403
0,751350082	0,640823923	0,83805837	0,151181072	0,967801403	0,614093527
0,640823923	0,035493188	0,151181072	0,653006801	0,614093527	0,014628157
0,035493188	0,636645847	0,653006801	0,265076838	0,014628157	0,297779052
0,636645847	0,452110752	0,265076838	0,027402843	0,297779052	0,361171044
0,452110752	0,249296818	0,027402843	0,58235924	0,361171044	0,331968654
0,249296818	0,342930192	0,58235924	0,456295758		
0,342930192	0,667282617	0,456295758	0,92121261		

Пример 1.2. Требуется вычислить число π методом Монте-Карло. Для этого используется единичный квадрат с вписанной частью круга. При выполнении условия

$$Если(a\text{^}2+b\text{^}2<=1;1;0) \quad (1.2)$$

определяется сумма единиц. В этом условии a и b – стороны единичного квадрата, соответствующие случайным числам. Если условие выполняется, то получаем единицу (первое число после условия), в противном случае – ноль. Деление на четвертую часть смоделированных результатов (ноль или один) позволяет приближенно определить значение π. Очевидно, что точность вычисления числа π зависит от числа экспериментов.

Приведен пример решения задачи при использовании 100 смоделированных случайных чисел a и b. В примере (таблица 2.2) случайные числа в столбцах a и b смоделированы с помощью функции Excel *=СЛЧИС()*. Добавим к этому, что случайные числа можно было бы смоделировать и с помощью формулы (1.1). Значения 0 или 1 определены в таблице 2.2 согласно условию (1.2).

Таблица 1.2 – Определение числа π методом Монте-Карло

a	b	Если(a^2+b^2 <=1;1;0)	a	b	Если(a^2+b^2 <=1;1;0)
0,415250192	0,383464524	1	0,738152102	0,60312565	1
0,216414072	0,613932897	1	0,508336405	0,583160263	1
0,646305006	0,572795742	1	0,428273093	0,281369539	1
0,638306499	0,019451325	1	0,541572643	0,996251082	0
0,242788668	0,638837209	1	0,393202628	0,854341063	1
0,231554907	0,312071672	1	0,694911069	0,93293851	0
0,067222358	0,402103651	1	0,600428805	0,022617477	1
0,271287797	0,528783139	1	0,337567333	0,460105099	1
0,390538762	0,692507496	1	0,903507349	0,55700592	0
0,327445896	0,057472757	1	0,566469328	0,506596484	1
0,651274768	0,380822619	1	0,495399912	0,53386284	1
0,270273047	0,562925578	1	0,278277815	0,17774769	1
0,703425801	0,556122229	1	0,87138937	0,126333177	1
0,88773537	0,660394318	0	0,929461753	0,455198422	0
0,943922361	0,472834659	0	0,71502659	0,487468642	1
0,920515763	0,596636629	0	0,640862824	0,125119532	1
0,779660126	0,253422689	1	0,010247538	0,852398022	1
0,075557866	0,265133703	1	0,612305257	0,661252998	1
0,089428624	0,489842119	1	0,377022556	0,949854005	0
0,950772801	0,751002072	0	0,727507964	0,067044497	1
0,802678816	0,319983322	1	0,65533415	0,248012068	1
0,767536139	0,183747647	1	0,937843306	0,770434274	0
0,796968016	0,2342156	1	0,646335209	0,869417875	0
0,442735645	0,318095751	1	0,764281504	0,219978102	1
0,22970177	0,112409259	1	0,616271476	0,613488181	1
0,182662581	0,140536551	1	0,27875749	0,888640745	1

0,420796107	0,849889278	1	0,552080632	0,195210348	1
0,973926331	0,141828147	1	0,372151429	0,11050934	1
0,105558671	0,903033888	1	0,523553676	0,031974597	1
0,907140197	0,235200483	1	0,23384336	0,786964571	1
0,115267852	0,25690352	1	0,990378107	0,714720591	0
0,26080118	0,539720409	1	0,482248954	0,378300723	1
0,805460031	0,634289312	0	0,502726511	0,488394787	1
0,566657272	0,352392925	1	0,736529976	0,67221922	1
0,062240444	0,474730031	1	0,076284211	0,398560268	1
0,534962906	0,082031127	1	0,471718893	0,962573235	0
0,839021367	0,240174292	1	0,643070209	0,803852817	0
0,963047033	0,296241154	0	0,849843152	0,520919579	1
0,595695841	0,540185287	1	0,16251622	0,126688109	1
0,371030719	0,104021967	1	0,28312165	0,749048696	1
0,811066452	0,694950698	0	0,618570927	0,196404358	1
0,322127603	0,82651516	1	0,098522106	0,796931725	1
0,416713406	0,753685248	1	0,877799658	0,081763699	1
0,154148267	0,101461332	1	0,212612169	0,27544275	1
0,663067242	0,194708598	1	0,334569865	0,02197332	1
0,444470612	0,35720638	1	0,01130512	0,238915153	1
0,335182495	0,03860608	1	0,597044525	0,785610547	1
0,361638385	0,861907201	1	0,692513853	0,389877394	1
0,001946319	0,326123353	1	0,197212307	0,033396471	1
0,068774647	0,647135852	1	100	100	3,32
0,732526615	0,355210959	1			

Пример 1.3. Смоделировать 24 случайных числа от 0 до 10.

Поскольку случайные числа находятся в пределах $1>r>0$, то умножение это числа на 10 с округлением в большую сторону позволяет определять любой набор чисел от 0 до 10. В Excel это реализуется с помощью следующего выражения

$$=ОКРВВЕРХ(СЛЧИС()*10;1). \qquad (1.3)$$

В таблице 1.3 приведен набор чисел, полученный по этому выражению, включающему в себя две функции.

Таблица 1.3 – Смоделированные случайным образом числа от 0 до 1

Случайные числа					
0	1	6	4	1	3
2	9	10	2	6	7
9	10	1	1	3	1
7	7	3	8	1	5

Пример 1.4. Смоделировать случайным образом числа от 3,2 до 4,6.

Для решения этой задачи необходимо к начальному значению интервала прибавить произведение случайного числа и разности между конечным и начальным значениями заданного интервала. При этом следует учитывать, что получаемые числа должны быть кратными 0,2. В Excel подобный алгоритм можно реализовать с помощью выражения

$$=ОКРУГЛТ(СЛЧИС()*1,4+3,2;0,2). \tag{1.4}$$

Приведенная функция округления позволяет определять числа кратные 0,2 (значение после точки с запятой). В таблице 1.4 приведены 10 смоделированных чисел от 3,2 до 4,6.

Таблица 1.4 – Смоделированные случайные числа от 3,2 до 4,6

,8	,2	,0	,6	,8	,2	,2	,0	,4	,6

Существуют другие варианты решения задачи. В частности, при отсутствии функции, определяющей кратные заданному значению числа, можно с помощью условия находить. Попытайтесь решить задачу другим способом.

Варианты задач

1. Смоделировать 100 случаев бросания шестигранного кубика.
2. Смоделировать игру двух игроков, бросающих шестигранный кубик.
3. Смешайте случайным образом последовательность чисел от 1 до 32.
4. Смоделируйте ряд четных чисел до 88.
5. Смоделируйте ряд нечетных чисел до 99.
6. Получить случайные константы от 1,2 до 4,8 с шагом 0,2.
7. Получить диапазон чисел, изменяющихся от 8 до 13.

2 МОДЕЛИРОВАНИЕ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН ПО ВЕРОЯТНОСТНЫМ ЗАКОНАМ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

При построении стохастических моделей возникает задача определения вероятности появления случайной величины или оценки вероятности ее превышения. Например, практическое значение имеют расчеты частоты неурожайных лет, вероятности проявления катастрофических наводнений или повторяемости благоприятных условий для экономического роста предприятия.

Подобные задачи решаются по нескольким этапам.

Сначала строят гистограмму (кумулятивную кривую). Затем вычисляют ее статистические параметры, задают множество статистических распределений, из которых по критерию согласия отбирают оптимальный вариант.

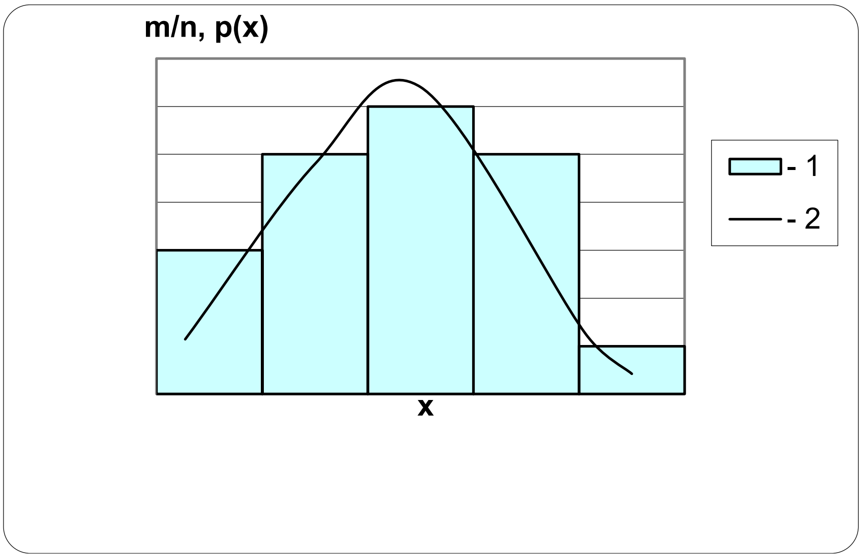


Рисунок 2.1 - Гистограмма (1) и кривая плотности вероятностей распределения (2)

Гистограмма представляет собой связь случайной величины *x* и ее относительной частоты или частости *m/n* (рисунок 2.1). Параметр *m* характеризует число значений *x*, попавших в заданные интервалы, а *n* – длину ряда случайных величин.

График, увязывающий накопленную частоту $\sum_{j=1}^{k} m/n$ и значения x, назван кумулятивной кривой (рисунок 2.2). Характеристика k определяет количество интервалов на отрезке размаха – разности максимального и минимального значений случайной величины (x_{max} - x_{min}). Гистограмма и кумулятивная кривая связаны между собой, поскольку накопленная частота равна последовательной сумме относительных частот.

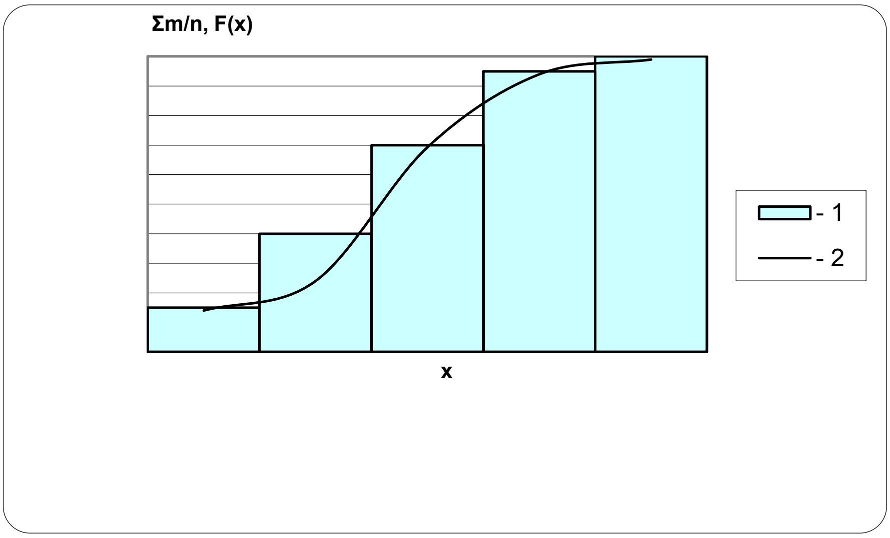


Рисунок 2.2 - Кумулятивная кривая (1) и функция

распределения вероятностей (2)

Построив гистограмму и кумулятивную кривую, из множества законов распределения вероятностей выбирают оптимальный вариант, предварительно определив статистические параметры ряда случайных величин.

Одномерный закон распределения вероятностей описывает зависимость плотности вероятностей распределения *p(x)* или функции распределения *F(x)* от случайной величины *x*. В первом случае вероятностный закон представляет собой плотность вероятностей распределения (рисунок 2.1), а во втором – функцию распределения вероятностей (рисунок 2.2). В качестве случайной величины можно использовать урожайность, стоимость валовой продукции, погодные факторы и другие характеристики.

Функция распределения связана с плотностью вероятностей распределения выражением

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(x)dx. \tag{2.1}$$

Подынтегральная функция *p(x)* связана с относительной частотой *m/n* как отношение числа попаданий случайной величины *m* в заданные интервалы к числу экспериментов *n*:

$$p(x) \approx \frac{m}{n}. \tag{2.2}$$

Формула (2.2) представляет собой статистическую вероятность, которая приближается к теоретической вероятности при большом количестве опытов.

Статистические распределения имеют различную форму. Плотности вероятностей распределения бывают одномодальными (одновершинными) и многомодальными (многовершинными). Кроме того, различают дискретные и непрерывные законы распределения вероятностей. В зависимости от числа параметров, законы распределения вероятностей подразделяют на однопараметрические, двухпараметрические и многопараметрические. Обычно в качестве статистических параметров применяются характеристики центра распределения, меры рассеяния и асимметрии. Остальные параметры, которые входят в вероятностные распределения, как правило, определяются через перечисленные статистики.

Наиболее часто используемой характеристикой центра распределения является среднее арифметическое значение ряда:

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}, \tag{2.3}$$

где x_i – значение ряда, *n* – длина ряда.

В качестве параметра рассеяния широко применяется среднее квадратическое отклонение или стандарт:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n-1}} . \quad (2.4)$$

Асимметричность распределения оценивается с помощью коэффициента асимметрии:

$$c_s = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^3 n}{(n-1)(n-2)\sigma^3} . \quad (2.5)$$

В формулах (2.4) и (2.5) учтено свойство смещенности короткого ряда ($n \leq 30$), заключающееся в занижении значений σ и c_s.

По полученным статистическим параметрам строят законы распределения вероятностей. В книге Н.Хастингс и Дж.Пикок «Справочник по статистическим распределениям» приведено 24 вероятностных закона с основными свойствами.

Примером однопараметрического статистического распределения является экспоненциальная кривая с плотностью вероятности

$$p(x,b) = \frac{1}{b} e^{-\frac{x}{b}} , \quad (2.6)$$

где b – среднее арифметическое значение ряда. Здесь ординаты $p(x)$ зависят от одного параметра b.

К двухпараметрическим функциям относятся нормальный закон (кривая Гаусса), бета-распределение, логистическое распределение и др. Приведем распространенную в практических приложениях формулу нормального вероятностного распределения:

$$p(x,\bar{x},\sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}} , \quad (2.7)$$

где $\bar{x}$- среднее значение ряда случайных чисел x, а σ – среднее квадратическое отклонение.

Популярностью среди непрерывных вероятностных функций, зависимых от трех статистических параметров, пользуются биномиальное распределение (кривая Пирсона III типа), логарифмически-нормальное и гамма-распределение. При этом третье статистическое распределение является частным случаем первого. В отличие от закона Гаусса гамма-распределение является асимметричным. Его формула имеет вид

$$p(x,b,c) = \left(\frac{x}{b}\right)^{c-1} e^{-\frac{x}{b}} \frac{1}{b\Gamma(c)} , \quad (2.8)$$

где $c = (\bar{x}/\sigma)^2$; $b = \sigma^2/\bar{x}$; $\Gamma(c)$ – гамма-функция, определяемая с помощью интеграла $\int\limits_0^\infty t^{\alpha-1}e^{-t}dt$. Для безразмерных величин ряда статистики c и b вычисляются по формулам: $c = 1/c_v^2$ и $b = c_v^2$. В подынтегральном выражении переменная t исключается подстановкой пределов интегрирования. Коэффициент вариации c_v вычисляется по соотношению

$$c_v = \frac{\sigma}{\bar{x}}. \tag{2.9}$$

С увеличением числа параметров статистическое распределение усложняется. При этом уменьшается точность определения его координат ввиду различной точности мер центра, рассеяния и асимметрии ряда. С наибольшей погрешностью вычисляется центр распределения, а с наименьшей – коэффициент асимметрии. Погрешности статистик зависят от длины ряда, стандарта и закона распределения. Чем больше количество случайных значений и меньше мера рассеяния, тем точнее оценка статистического параметра, т.е. ниже его ошибка.

После расчета статистик, вычисления их погрешностей и построения множества законов распределения из них выбирается оптимальный вариант. Соответствие аналитического закона распределения эмпирическим данным определяется, в частности, с помощью критериев согласия: χ^2, Колмогорова и $n\omega^2$.

Многие задачи, не решаемые теоретически, могут быть решены численными методами. Благодаря стремительному прогрессу компьютерных технологий, вычисление трудоемких операций ограничено только техническими возможностями и программными средствами.

Проблема дефицита информации и частичного снятия неопределенности всегда актуальна. Метод статистического моделирования или статистических испытаний позволяет находить решения в условиях недостаточности данных или их отсутствия. При этом возможно моделирования крайних ситуаций, что имеет особое значение при исследовании кризисных явлений в экономике и других сферах человеческой деятельности.

В пособии рассматриваются задачи моделирование независимой и связной выборок.

2.1 Методы расчета статистик

В предыдущем разделе отмечено, что статистические параметры ряда или статистики делимы на три группы: меры центра, рассеяния и асимметрии распределения. Приведены статистики $\bar{x}$, σ, c_v, c_s и α. Отмечено, что многие параметры статистических распределений определяются по среднему арифметическому значению ряда, стандарту и коэффициенту асимметрии.

Статистики вероятностных распределений, в том числе и перечисленные, рассчитываются различными методами. К ним относятся метод моментов, метод квантилей и метод максимального правдоподобия. Каждый из методов имеет свои особенности.

Метод квантилей (ординат заданной вероятности превышения) наиболее простой для применения. Он основан на том, что статистические параметры связаны со значениями квантилей, соответствующих заданному уровню вероятности превышения (Алексеев, 1960). С усредненной эмпирической интегральной кривой распределения снимаются ординаты вероятностью превышения 5, 50 и 95%. Затем по этим значениям вычисляются статистические параметры: меры центра, рассеяния и асимметрии распределения.

В отличие от метода квантилей метод максимального правдоподобия сложнее. Однако он обладает наибольшей точностью расчета статистик. При использовании метода максимального правдоподобия вводится понятие функции правдоподобия (Левин, 1968), которая представляет собой произведение плотностей вероятностей распределения, зависимых от искомых статистических параметров:

$$L(x_1, x_2, ..., x_n; a_1, a_2, ..., a_k) = p(x_1; a_1, a_2, ...a_k) \cdot p(x_2; a_1, a_2, ...a_k) \cdot ... \cdot p(x_n; a_1, a_2, ...a_k), \quad (2.10)$$

где x_i – ряд случайных величин количеством n, a_j – множество k статистических параметров. Задача сводится к поиску таких статистических параметров a_j, при которых функция правдоподобия принимает максимальное значение. Другими словами, находятся частные дифференциалы по искомым статистическим параметрам. Для удобства решения задачи функцию правдоподобия предварительно логарифмируют. Тогда система уравнений по нахождению статистических параметров имеет вид

$$\frac{\partial \log L}{\partial a_1} = 0, \quad \frac{\partial \log L}{\partial a_2} = 0, \quad \frac{\partial \log L}{\partial a_3} = 0, ..., \quad \frac{\partial \log L}{\partial a_k} = 0. \quad (2.11)$$

Количество решаемых уравнений зависит от закона распределения вероятностей. В простейшем случае для однопараметрического распределения решается одно уравнение. Система уравнений (3.11) обобщает многопараметрический вероятностный закон, где необходимо определить k формул по вычислению статистик.

В общем случае одни и те же статистические параметры распределений, полученные разными методами, различны.

Наиболее распространенным способом оценки статистик является метод моментов. Поэтому этот метод использован при нахождении статистических параметров выборок.

2.2 Метод моментов

При описании статистических рядов, как правило, используются понятия начального и центрального моментов, на которых основан метод расчета статистических параметров.

Начальный момент порядка s случайной дискретной совокупности x_i представим в виде формулы

$$m_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^s \ , \qquad (2.12)$$

где n – число значений ряда, s – порядковый номер момента, принимающий значения 0, 1, 2, и т.д. Не исключены случаи присвоения параметру s отрицательных чисел (Гриневич и др., 1972).

Если $s=0$, тогда нулевой начальный момент равен 1. Первый начальный момент соответствует выражению определения среднего арифметического ряда (2.3), т.е.

$$m_1 = \overline{x}\,. \qquad (2.13)$$

Формула центрального момента порядка s отличается от выражения (2.12) вводом в сумму центра распределения, которым обычно является среднее значение совокупности:

$$\mu_s = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^s\ . \qquad (2.14)$$

Центральный нулевой момент μ_0 равен 1, а $\mu_1=0$. Подставив вместо s порядок 2, получим формулу дисперсии или квадрата среднего квадратического отклонения (2.4). Другими словами, стандарт связан со вторым центральным моментом соотношением

$$\sigma = \sqrt{\mu_2}\ . \qquad (2.15)$$

Нетрудно показать, что коэффициент асимметрии (2.5) вычисляется как функция третьего и второго центральных моментов

$$c_s = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = \frac{\mu_3}{\mu_2^{3/2}}\,. \qquad (2.16)$$

Определенную роль при описании сложного закона распределения вероятностей играет эксцесс, оценивающий островершинность распределения:

$$\varepsilon = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} - 3 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^4}{\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2\right]^2} - 3\,. \qquad (2.17)$$

С увеличением порядка моментов s точность оценки статистического параметра уменьшается. Поэтому параметр, характеризующий островершинность плотности вероятностей распределения, в последующих разделах не используется.

Строго говоря, формулы (2.14) и (2.16) являются приближенными при оценке параметров ограниченных рядов. Это связано с наличием отрицательной смещенности статистик короткого ряда по отношению к параметрам генеральной совокупности.

Генеральная совокупность представляет собой все возможные значения случайной величины. Случайная выборка содержит в себе лишь некоторое множество значений случайной величины, являясь частью генеральной совокупности. Например, значения роста всех людей на планете составляют генеральную совокупность, а рост студентов группы является выборкой.

Приведенные формулы и их описание справедливы для выборки или ограниченного ряда данных. Практически всегда приходится работать с выборкой. При этом задача состоит в определении статистик ограниченного ряда наиболее близких параметрам генеральной совокупности.

По требованиям, предъявляемым к оценкам статистических параметров, последние должны быть состоятельными, несмещенными и эффективными.

Первое свойство предполагает совпадение статистик генеральной совокупности и выборки при неограниченном возрастании данных.

Статистические параметры ограниченных рядов обычно занижены или отрицательно смещены по отношению к характеристикам генеральной совокупности. Поэтому формулы расчета мер рассеяния и асимметрии, включающие в себя начальные и центральные моменты различных порядков, корректируются вводом дополнительных слагаемых и множителей.

И, наконец, более эффективной считается та оценка, дисперсия (квадрат стандарта) которой не превосходит некоторого теоретического минимума. В частности, оценки статистик с меньшими средними квадратическими погрешностями считаются более эффективными. Объективно наибольшей точностью обладают статистические параметры, полученные методом максимального правдоподобия. Тем не менее, во многих прикладных программах, применяют моментные оценки.

2.3 Погрешности статистик

Нахождения статистических параметров выборки является лишь частью решения задачи оптимального выбора статистического распределения. Учитывая ограниченность информации, необходима оценка точности вычисления статистических параметров. Для этого используется средняя квадратическая погрешность статистики, которая зависит от объема выборки или длины ряда, стандарта или коэффициента вариации и закона распределения.

Аппарат определения погрешностей статистических параметров хорошо разработан для закона Гаусса и гамма-распределения. В меньшей степени это касается непрерывного биномиального распределения или Пирсона III типа.

Средняя квадратическая погрешность среднего арифметического значения выборки для нормального закона распределения рассчитывается по формуле

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\,, \tag{2.18}$$

где n – длина или объем выборки, а σ - стандарт ряда.

При достаточно больших объемах выборок выражение (3.18) справедливо для статистических распределений, отклоняющихся от закона Гаусса.

Применительно к нормальному распределению формулы расчета средних квадратических погрешностей стандарта σ и коэффициента вариации c_v как мер рассеяния имеют вид

$$\sigma_{c_v} = \frac{\sigma}{\sqrt{2n}}\,, \tag{2.19}$$

$$\sigma_{c_v} = \frac{c_v}{\sqrt{2n}}\,. \tag{2.20}$$

Напомним, что по содержанию параметры c_v и σ идентичны. Отличие заключается только в том, что коэффициент вариации является величиной безразмерной. Поэтому он более удобен при сравнении статистик выборок физически разных случайных величин.

Формула расчета средней квадратической погрешности коэффициента вариации для гамма-распределения отличается от выражения (2.20):

$$\sigma_{c_v} = \frac{c_v}{\sqrt{2n}}\sqrt{1+c_v^2}\,. \tag{2.21}$$

Приведем одну из формул расчета погрешности коэффициента асимметрии применительно к гамма-распределению

$$\sigma_{c_s} = \sqrt{\frac{6}{n}(1+c_v^2)}\,. \tag{2.22}$$

В завершении краткого обзора формул определения погрешностей статистик отметим, что применяются, по крайней мере, два метода их построения: теоретический и статистического моделирования. Здесь приведены только основные выражения. Формулы (2.18)-(2.22) позволяют оценивать абсолютные средние квадратические погрешности. Для расчета относительных значений используются соотношения

$$E_{\bar{x}} = \frac{\sigma_{\bar{x}}}{\bar{x}}\cdot 100\%\,, \tag{2.23}$$

$$E_{c_v} = \frac{\sigma_{c_v}}{c_v}\cdot 100\%\,, \tag{2.24}$$

$$E_{c_s} = \frac{\sigma_{c_s}}{c_s}\cdot 100\%\,. \tag{2.25}$$

Следует помнить, что изложенная теория применяется для выборок с независимыми друг от друга значениями. Для связанных чисел ряда применяются иные модели оценок статистик и их погрешностей.

Таким образом, в задачу этого раздела входит определение последовательности действий в прикладной программе Excel по вычислению статистических параметров выборки и их погрешностей на основе изложенных методов.

2.4. Моделирование независимой выборки

Для независимого ряда последующие значения не связаны с предшествующими. Числовой мерой связи членов ряда являются ординаты автокорреляционной функции. В простейшем случае рассматривается только первый коэффициент автокорреляционной функции R_1 . Если его значение близко к нулю, тогда выборка или эмпирический ряд данных считается независимым.

При моделировании такой выборки необходимо задать закон распределения и знать его статистические параметры.

Решение задачи выполняется в два этапа. Сначала генерируются случайные числа, которые приравниваются к ординатам функции распределения F или плотности вероятностей распределения p. Затем по этим данным и статистическим параметрам заданного вероятностного закона определяются значения выборки. Другими словами, неизвестная величина x находится из формулы (2.3).

Графически это означает, что по данным смоделированных значений F с графика заданной функции распределения (рисунок 2.2) снимают величины x, формируя имитационный ряд.

В качестве аргументов x можно использовать безразмерные величины в виде соотношения

$$k = \frac{x}{\bar{x}} , \qquad (2.26)$$

где $\bar{x}$ - среднее значение ряда. Из формулы (3.26) следует, что среднее значение коэффициента $\bar{k}$ равно 1.

В случае использования безразмерного параметра k задача моделирования независимой выборки сводится к определению его значений. После этого вычисляется случайная величина x как произведение $k \cdot \bar{x}$.

Смоделированный ряд может иметь огромное количество значений, исчисляемое десятками и сотнями тысяч и более, что позволяет в значительной степени увеличить варианты появления случайной величины, их сочетаний по сравнению с реальными данными.

Пример 2.1. Пусть требуется смоделировать независимую выборку объемом 50 значений, используя нормальный закон распределения вероятностей с параметрами $\bar{x} = 15$ц/га и $c_v = 0{,}23$, полученными по данным об урожайности зерновых за многолетний период.

Для сравнения определим такое же количество случайных величин, подчиняющихся гамма-распределению с приведенными статистиками $\bar{x}$ и c_v. В таблице 2.1 приведены результаты моделирования.

Таблица 2.1 – Выборки случайных величин, смоделированные методом статистических испытаний по заданным законам распределения при *x=15ц/га* и c_v*=0,50*

Нормальный закон				Гамма-распределение			
F	*k*	*F*	*k*	*F*	*k*	*F*	*k*
0,293199	0,728	0,848166	1,514	0,197341	0,571	0,395064	0,797
0,723242	1,296	0,044786	0,151	0,769358	1,315	0,137726	0,493
0,17582	0,534	0,050217	0,179	0,076015	0,395	0,823059	1,433
0,93972	1,776	0,391471	0,862	0,758382	1,293	0,473673	0,887
0,197166	0,574	0,849734	1,518	0,282792	0,671	0,152644	0,513
0,582489	1,104	0,451531	0,939	0,515928	0,937	0,327297	0,722
0,840437	1,498	0,698257	1,260	0,139003	0,495	0,597227	1,040
0,138506	0,456	0,790327	1,404	0,359453	0,757	0,577782	1,015
0,47491	0,969	0,017315	-0,056	0,397206	0,800	0,60367	1,049
0,303055	0,742	0,257111	0,674	0,169134	0,535	0,851883	1,509
0,513029	1,016	0,295782	0,732	0,272479	0,660	0,54991	0,979
0,670718	1,221	0,089782	0,329	0,225646	0,605	0,873048	1,573
0,331696	0,782	0,959582	1,873	0,285463	0,674	0,416673	0,822
0,798051	1,417	0,26339	0,684	0,73893	1,257	0,359246	0,757
0,86576	1,553	0,963838	1,899	0,245017	0,628	0,364498	0,763
0,844995	1,508	0,067037	0,251	0,525916	0,949	0,948923	1,930
0,911289	1,674	0,577235	1,097	0,230203	0,611	0,581249	1,019
0,97866	2,013	0,2344	0,638	0,03563	0,305	0,661697	1,131
0,629159	1,165	0,257745	0,675	0,136416	0,491	0,734896	1,250
0,178317	0,539	0,524822	1,031	0,956327	1,989	0,628841	1,083
0,465075	0,956	0,488564	0,986	0,294265	0,684	0,054864	0,353
0,71102	1,278	0,398616	0,872	0,190282	0,562	0,034946	0,303
0,134108	0,446	0,017774	-0,051	0,972911	2,163	0,412038	0,816
0,286615	0,718	0,770514	1,370	0,167285	0,533	0,831956	1,455
0,062075	0,231	0,432625	0,915	0,119151	0,466	0,850933	1,506

Алгоритм решения задачи состоит в реализации следующих операций. Числа в столбцах, обозначенных символом *F* (значения функции распределения), получены путем моделирования случайных чисел. Здесь использована функция =СЛЧИС() табличного процессора Excel. Затем по данным $\bar{k}=1$ и c_v*=0,50* из интеграла формулы (2.7) определены значения *k* (столбцы 2 и 4). В Excel эта операция реализована с помощью функции *=НОРМОБР(вероятность;среднее;стандартное_откл)*. В частности, первое значение абсциссы функции распределения *k* получено как *=НОРМОБР(0,293199;1;0,50)*. Остальные значения случайной величины определены по аналогии.

Следует иметь в виду, что при выполнении последующих операций, установленные первоначально случайные числа автоматически изменяются. Чтобы этого не происходило, достаточно в окне «Параметры» (пункт меню «Сервис») установить переключатель «вручную», выключив опцию «автоматически». При этом активизирован вкладыш «Вычисление». В этом случае изменение случайных чисел происходит при нажатии клавиши F9.

Для перехода от модульного коэффициента $k_н$ к значениям ряда $x_н$ используется формула (2.26). Другими словами, каждое значение $k_н$ необходимо умножить на 15ц/га. Например, первое значение равно 0,728•15=10,9 ц/га.

При моделировании случайных величин, подчиняющихся гамма-распределению (столбцы 6 и 8) использован интеграл формулы (2.8). По данным об F (случайное число), $\bar{k}=1$ и $c_v=0{,}50$ определяются значения k. Одним из способов определения абсцисс функции распределения является использование функции табличного процессора Excel *=ГАММАОБР(вероятность;;*$1/c_v^2;c_v^2$*)*. В частности, первое значение случайной величины *0,571* в таблице 2.1 получено по формуле *=ГАММАОБР(0,197341;1/0,50^2;0,50^2)*. Для вычисления значений урожайности необходимо каждое значение k умножить на среднюю урожайность 15ц/га.

Как правило, смоделированные выборки отличаются от исходных более значительным интервалом или разностью между наибольшим и наименьшим значениями. Кроме того, моделирование случайных величин позволяет увеличить информацию об объекте исследования.

Не следует думать, что моделируемые ряды обязательно связаны с реальными выборками и их статистическими параметрами. Последовательность действий при расчете таблицы 2.1 показывает, что законы распределения вероятностей могут быть разными, как и задаваемые статистические параметры: среднее, коэффициент вариации, асимметрия и др. Обращает на себя внимание и недостаток нормального закона распределения, предполагающего наличие как положительных, так и отрицательных случайных величин.

Например, для рассматриваемой ситуации имеет смысл моделирование выборок при $c_v=0{,}45$, *0,50* и *0,55*, чтобы всесторонне оценить изменчивость урожайности зерновых культур.

Возвращаясь к примеру определим значения статистических параметров $\bar{k}$ и c_v на основе формул (2.3) и (2.4). В результате вычислений для нормального закона $\bar{k}$=0,959 и $c_v=0{,}537$, а для гамма-распределения - $\bar{k}$ =0,911 и $c_v=0{,}484$. Очевидна разница между исходными и полученными данными.

При увеличении числа экспериментов результаты улучшаются. Они ближе к исходным значениям.

Моделирование значительных по длине рядов методом статистических испытаний способствует решению множества задач. В частности, можно определять стандартные погрешности статистических параметров, которые для сложных законов распределения вероятностей трудно оценить теоретически.

Рассмотрим пример решения подобной задачи.

Пример 2.2. Определить стандартные погрешности среднего значения $\bar{k}$ модульных коэффициентов $(\sigma_{\bar{k}})$ и коэффициента вариации c_v. (σ_{c_v}). При этом использовать данные предыдущего примера $\bar{k}=1$ и $c_v=0,50$. Решить задачу для нормального закона распределения вероятностей, моделируя 21 выборку, каждая из которых $n=100$. Сравнить результаты с теоретическими формулами.

Для получения результата необходимо выполнить следующие операции.

Во-первых, по аналогии с предыдущим примером смоделировать с использованием распределения Гаусса 21 выборку по 100 значений.

Во-вторых, получить средние значения и коэффициенты вариации смоделированных выборок.

В-третьих, на основе формулы стандартного отклонения (2.6) вычислить относительные погрешности среднего и коэффициента вариации.

В-четвертых, рассчитать абсолютные погрешности статистических параметров $\bar{k}$ и c_v согласно выражениям (2.23) и (2.24).

В-пятых, сравнить полученные результаты с теоретическими значениями, рассчитанными по формулам (2.18) и (2.20).

По аналогии с предыдущим примером смоделированы случайные величины 21 выборки длиной 100.

Согласно формулам (2.3) и (2.4) найдены 21 значение средних и такое же количество коэффициентов вариации (таблица 2.2).

Таблица 2.2 – Средние значения и коэффициенты вариации смоделированных выборок

Среднее значение	1,038	0,964	0,996	1,071	1,055	0,984	0,988	0,964	0,964	0,941	0,987
Коэффициент вариации	0,525	0,495	0,437	0,562	0,522	0,555	0,559	0,491	0,467	0,543	0,473
Среднее значение	0,975	0,902	0,981	0,949	1,067	0,977	0,971	0,983	0,981	0,936	
Коэффициент вариации	0,479	0,503	0,515	0,479	0,512	0,447	0,530	0,473	0,453	0,523	

На третьем шаге определены средние значения средних и коэффициентов вариации по данным таблицы 6: $\bar{k}_{cp} = 0{,}991$, $\bar{c}_v = 0{,}502$. Затем получены стандартные отклонения рядов средних и коэффициентов вариации согласно (6): $\sigma_{\bar{k}} = 0{,}0489$, $\sigma_{c_v} = 0{,}0367$. Эти значения соответствуют относительным погрешностям статистических параметров $\bar{k}$ и c_v.

Абсолютные погрешности рассчитываются как соотношения относительных погрешностей к значениям статистических параметров: $E_{\sigma_{\bar{k}}} = \frac{0{,}0489}{0{,}991} \cdot 100\% = 4{,}93\%$, $E_{\sigma_{c_v}} = \frac{0{,}0367}{0{,}502} \cdot 100\% = 7{,}31\%$.

При длине ряда $n=100$ теоретические значения погрешностей для нормального закона распределения, рассчитанные по формулам (2.18) и (2.20), соответствуют $\sigma_{\bar{k}} = 0{,}05$ и $\sigma_{c_v} = 0{,}0353$. Тогда абсолютные погрешности равны: $E_{\sigma_{\bar{k}}} = \frac{0{,}05}{1} \cdot 100\% = 5\%$ $E_{\sigma_{c_v}} = \frac{0{,}0353}{0{,}50} \cdot 100\% = 7{,}07\%$.

Таким образом, расхождения между теоретическими погрешностями и результатами моделирования для среднего значения составили 0,07%, а коэффициента вариации – 0,24%.

При выборе закона распределения вероятностей возникает задача, связанная с количественной оценкой соответствия между аналитической функции распределения эмпирическим данным. Для этого используют различные критерии согласия.

По критерию согласия оценивается вероятность соответствия аналитического закона распределения эмпирическим данным. Обычно выбирается некоторая величина, характеризующая расхождение эмпирической и аналитической вероятностных кривых при заданном уровне значимости (Свешников А.А. и др., 1970). Если значение меры расхождения x, полученное по исходным данным, больше некоторого теоретического значения x_α, то гипотеза о соответствии аналитического закона распределения вероятностей эмпирической кривой не принимается. При $x_\alpha \geq x$ расхождение считается не значимым, и опытные данные не противоречат предположению о принятом законе распределения.

В качестве критериев согласия используются меры расхождения К.Пирсона или χ^2, Колмогорова, $n\omega^2$ и др. Рассмотрим первые два критерия и применим их для оценки соответствия эмпирических данных закону Гаусса и гамма-распределению.

Критерий χ_q^2 по информации об аналитическом распределении и эмпирическим данным вычисляется по формуле

$$\chi_q^2 = \sum_{i=1}^{s} \frac{(m_i - np_i)^2}{np_i}, \tag{2.27}$$

где s – число интервалов, на которое разделено расстояние между экстремальными значениями ряда, n – объем выборки, m_i – количество значений ряда, попадающее в i–ый интервал, p_i – вероятность попадания случайной величины для аналитического закона распределения.

Если объем выборки неограниченно возрастает ($n \to \infty$), то случайная величина стремится к закону распределения χ^2, который зависит от числа степеней свободы $l=n-r-1$. В приведенном выражении r представляет собой число параметров вероятностного распределения. По уровню значимости α и значению l находится ордината χ_α^2. Ее сравнение с величиной χ_q^2 позволяет оценить расхождение между аналитической и эмпирической кривыми распределения.

Критерий К.Пирсона применим для больших выборок, объемом более 50 значений. При этом он дает хорошие результаты при равномерном распределении точек в интервалах, количество которых соответствует условию $m_i \geq 5$.

В отличие от критерия χ^2 критерий согласия Колмогорова основан на определении максимального расхождения между эмпирической $F_э$ и аналитической F функциями распределения:

$$D_э = \max\left|F_э - F\right|. \qquad (2.28)$$

Если $n \to \infty$, то распределение параметра $\lambda = D_э\sqrt{n}$ не зависит от вида закона распределения случайной величины и стремится к вероятностному распределению Колмогорова. Таким образом, вычислив значение λ по опытным данным, выполняется его сравнение с критической величиной λ_α (таблица 2.3), где α – уровень значимости. При $\lambda_\alpha \geq \lambda$ принимается гипотеза о соответствии аналитического закона распределения эмпирическим данным.

Таблица 2.3 - Критические значения λ_α для распределения Колмогорова

α	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1	
λ_α	0,828	0,895	0,974	1,073	1,224	
α	0,05	0,02	0,01	0,001		
λ_α	1,358	1,52	1,627	1,95		

Критерий Колмогорова, как и критерий χ^2, применим для больших выборок ($n \geq 40$ -50). Причем он используется тогда, когда известен закон распределения и его параметры. К сожалению, при решении практических задач приходится сталкиваться с ситуациями невыполнения этого условия. Поэтому возможны случаи получения ложного результата, если по критерию согласия аналитический закон распределения соответствует эмпирическим данным. Добавим к этому, что перечисленные меры расхождения не всегда применимы в хвостовых частях выборки, где расположены экстремумы.

Для устранения недостатков критериев можно воспользоваться методом моделирования случайных величин по заданным законам распределения вероятностей, что позволяет увеличивать длину выборок и тем самым улучшать вероятностные модели экономических процессов.

Пример 2.3. По гамма-распределению с параметрами $\bar{k}=1$ и $c_v=0,50$ смоделировать ряд значений случайной величины длиной $n=100$. Определить соответствие полученного ряда заданному гамма-распределению, используя критерии согласия К.Пирсона и Колмогорова.

Приведем последовательность операций, способствующих решению задачи.

В начале определяются 100 значений случайной величины (таблица 2.4). В нечетных столбцах (k) смоделированы модульные коэффициенты, соответствующие гамма-распределению, а в четных (k_p) – их отсортированные значения в порядке возрастания. При получении модульных коэффициентов использована функция табличного процессора Excel

=ГАММАОБР(СЛЧИС();1/c_v^2;c_v^2)

или *=ГАММАОБР(СЛЧИС();1/0,5^2;0,5^2)*.

Таблица 2.4 – Значения случайной величины, смоделированные с помощью гамма-распределения при $\bar{k}=1$ и $c_v=0{,}50$

k	k_p	k	k_p	k	k_p	k	k_p
1,329	0,144	0,961	0,669	1,750	1,007	1,159	1,279
0,500	0,219	1,804	0,672	0,148	1,008	1,018	1,347
0,277	0,243	1,256	0,675	0,166	1,030	1,212	1,352
1,110	0,263	0,474	0,686	0,420	1,039	0,817	1,358
0,769	0,306	1,572	0,714	1,222	1,042	0,607	1,378
2,284	0,350	1,036	0,724	1,182	1,046	1,458	1,395
1,485	0,361	1,413	0,736	0,799	1,054	1,245	1,411
0,948	0,364	0,779	0,761	0,921	1,057	0,572	1,413
0,374	0,399	1,002	0,779	1,249	1,059	0,370	1,459
1,102	0,434	0,962	0,790	1,372	1,093	1,384	1,466
0,765	0,467	0,778	0,804	0,226	1,094	1,275	1,469
1,975	0,469	1,288	0,809	1,406	1,110	0,907	1,539
1,415	0,469	0,407	0,815	1,816	1,112	0,632	1,563
1,294	0,471	0,381	0,820	1,028	1,136	0,834	1,571
0,899	0,487	2,071	0,825	0,839	1,137	0,754	1,587
0,500	0,541	0,607	0,874	1,734	1,152	0,728	1,588
0,911	0,547	0,830	0,878	1,397	1,168	0,764	1,589
1,983	0,548	0,517	0,890	0,958	1,174	1,592	1,649
0,906	0,549	1,464	0,902	1,341	1,181	0,960	1,657
0,908	0,551	0,560	0,930	1,138	1,186	0,957	1,753
0,955	0,567	1,637	0,936	0,834	1,189	0,818	2,172
1,250	0,575	2,527	0,952	0,595	1,213	1,122	2,217
0,947	0,619	0,807	0,957	0,542	1,225	1,309	2,960
1,497	0,658	1,083	0,980	2,054	1,246	1,127	2,985
1,226	0,659	0,498	0,984	1,774	1,276	1,185	4,205

На втором этапе определены частоты кумулятивной кривой. По экстремальным значениям смоделированного ряда найдена разность $4{,}205-0{,}144=4{,}061$. По формуле $s=5\lg n=5\lg 100=10$ определено число интервалов полученной выборки и длина интервала как частное $4{,}061/10=0{,}4061$. Последовательное суммирование длины интервала к минимальному значению и другим получаемым модульным коэффициентам до максимального значения позволило определить абсциссы эмпирической функции распределения (первый столбец таблицы 2.5).

Во втором столбце найдено количество точек, попавших в заданные интервалы. В работе для определения этих значений использована функция Excel *=ЧАСТОТА(ранжированный ряд;интервалы)*. При расчете суммарной частоты или ординат эмпирической функции распределения (третий столбец таблицы 3.5) каждое значение частоты разделено на длину смоделированного ряда 100. После этого определена последовательная сумма от первого до последнего значения. Очевидно, что окончательное число должно соответствовать 1. Таким образом, получены ординаты $F_э$.

Таблица 2.5 – Результаты оценки соответствия смоделированного ряда закону распределения вероятностей с помощью критериев χ^2 и Колмогорова

Интервалы	Частота, m	Суммарная частота	Значения функции гамма-распределения	Относительная частота гамма-распределения	Число Попаданий, np	$(m-np)^2/np$	$\lvert F_э-F \rvert$
0,549896	19	0,19	0,1806	0,18057	18,06	0,05	0,0094
0,95601	28	0,47	0,5314	0,35086	35,09	1,43	0,0614
1,362124	32	0,79	0,7924	0,26097	26,10	1,33	0,0024
1,768238	16	0,95	0,9220	0,12956	12,96	0,71	0,0280
2,174352	1	0,96	0,9737	0,05179	5,18	3,37	0,0137
2,580466	1	0,97	0,9918	0,01809	1,81	0,36	0,0218
2,98658	2	0,99	0,9976	0,00577	0,58	3,51	0,0076
3,392694	0	0,99	0,9993	0,00172	0,17	0,17	0,0093
3,798807	0	0,99	0,9998	0,00049	0,05	0,05	0,0098
4,204921	1	1	1	0,0002	0,02	53,49	0,0000
Итого	100	1	1	1	100	64,48	0,0614

Следующая операция состоит в оценке ординат гамма-функции распределения F. В четвертом столбце по данным частоты (первый столбец) согласно интегралу выражения (2.8) найдены значения гамма-функции. В примере использована функция =ГАММАРАСП(I6;1/0,5^2;0,5^2;1). Зная ординаты функции распределения нетрудно вычислить значения плотности вероятностей распределения (пятый столбец таблицы 2.5) как разность последующих и предыдущих значений четвертого столбца. При этом первые значения ординат плотности вероятностей распределения и функции равны друг другу. При переходе от относительной частоты к числам попаданий в заданные интервалы np_i необходимо значения пятой графы умножить на $n=100$ (шестой столбец).

Наконец, для вычисления критерия χ^2 определены значения, входящие в сумму выражения (2.27). Результаты вычислений приведены в предпоследнем столбце. Таким образом, сумма значений седьмого столбца соответствует эмпирическому значению критерия $\chi^2_\alpha=64{,}48$.

Для уровня значимости α=5% и числа степеней свободы l=100-2-1=97 нетрудно в математических таблицах найти теоретическое значение χ^2_q=121.

Поскольку $\chi_q^2 > \chi_\alpha^2$, то принимается гипотеза о соответствии теоретической кривой распределения смоделированным эмпирическим данным. На основе этого примера можно резюмировать, что длина выборки *n=100* вполне приемлема при использовании критерия χ^2.

Что касается критерия Колмогорова, то и он подтверждает вывод о соответствии гамма-распределения смоделированным значениям ряда. В последнем столбце найдены абсолютны разности эмпирических и теоретических значений функции распределения $|F_э\text{-}F|$, полученные по данным третьего и четвертого столбцов таблицы 2.5. Наибольшее расхождение составило 0,0614. Отсюда, $\lambda = D_э\sqrt{n} = 0{,}0614 \cdot \sqrt{100} =$ 0,614. Согласно таблице 2.3 значение $\lambda_т$=1,358. Следовательно, как было отмечено, смоделированный ряд соответствует теоретической функции распределения.

Визуально сравнить соответствие эмпирических и теоретических данных можно по рисунку 2.3.

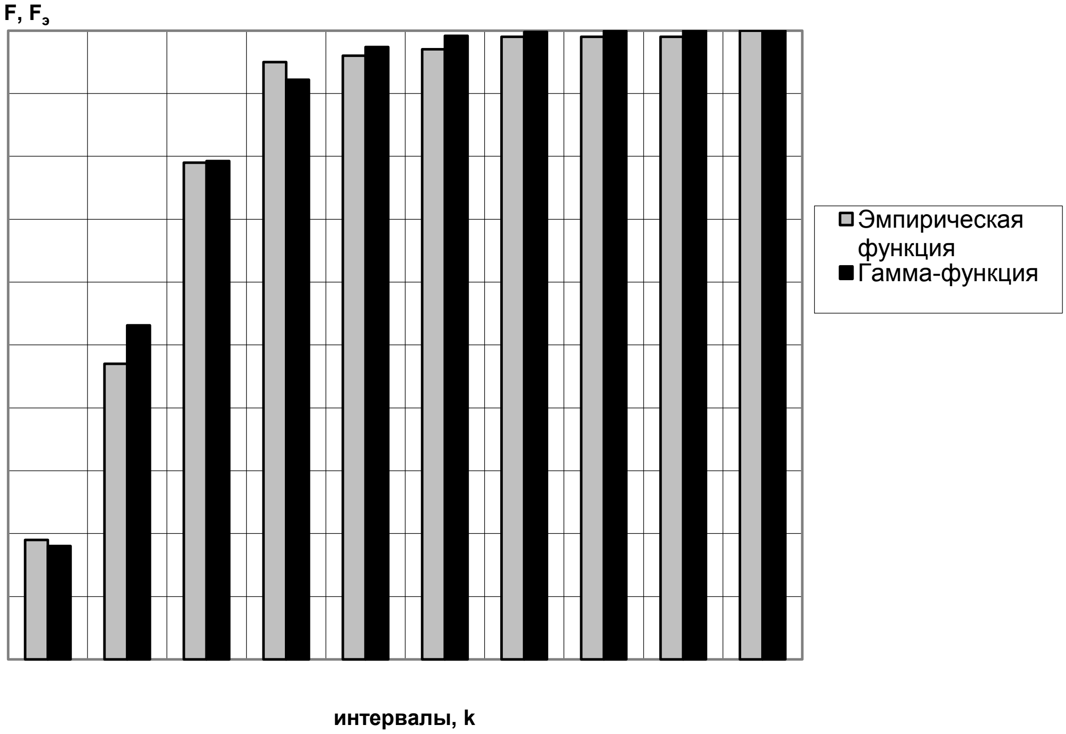


Рисунок 2.3 – Эмпирическая и теоретическая функции гамма-распределения при $\bar{k}$=1 и c_v*=0,50*.

Очевидно, что значения критериев согласия изменяются при моделировании рядов случайных величин с большими длинами. Обычно увеличение выборок приводит к уменьшению расхождения между эмпирическими данными и теоретической функцией распределения вероятностей.

2.5 Моделирование связной выборки

Моделирование ряда, в котором последующие значения связаны с предыдущими данными, несколько сложнее по сравнению с получением независимой выборки. Для оценки связности членов выборки применяют автокорреляционную функцию.

2.5.1 Автокорреляционная функция

Строго говоря, методы оценки статистических параметров и их погрешностей, приведенные в предыдущих разделах справедливы для выборки с независимыми значениями. Однако в реальных ситуациях может оказаться, что условие независимости между членами ряда не выполняется. В частности, логически трудно представить, чтобы ежегодные доходы хозяйства, составляющие многолетний ряд, были несвязанными. Очевидно, что для устойчиво работающего хозяйства доходы, полученные, по крайней мере, в соседние годы, зависимы. Другими словами, экономический показатель последующего года может оказаться зависимым от значения предыдущего года.

Для связанных данных разработаны другие методы обработки информации.

При выявлении зависимости между значениями выборки или опровержении этой гипотезы можно воспользоваться анализом автокорреляционной функции. Для ее вычисления применяется формула

$$R_\tau = \frac{\sum_{i=1}^{n-\tau}(x_i - \bar{x}_i)\cdot(x_{i+\tau} - \bar{x}_{i+\tau})}{\sigma_i \sigma_{i+\tau}(n-\tau-1)}, \qquad (2.29)$$

где n – объем выборки; τ - порядок сдвига, изменяющийся от 0 до m ($\tau = 0$, 1, 2,…, m); x_i – значения ряда от x_1 до $x_{n-\tau}$; $\bar{x}_i$ и σ_i – среднее значение и стандарт для части выборки от 1 до $n-\tau$; $x_{i+\tau}$ - значения ряда от $x_{1+\tau}$ до x_n; $\bar{x}_{i+\tau}$ и $\sigma_{i+\tau}$ - среднее значение и стандарт для выборки размером от $1+\tau$ до n.

Ординаты автокорреляционной функции изменяются от –1 до 1. При сдвиге $\tau = 0$ коэффициент автокорреляции R_0=1. Обычно связь считается значимой, если $R_\tau \geq 0{,}3$.

Помимо расчета ординат автокорреляционной функции, необходимо определить их средние квадратические погрешности. Для нормального закона распределения и совокупностей, подчиняющихся близким к нему статистическим распределениям, формула средней квадратической погрешности ординаты автокорреляционной функции имеет вид

$$\sigma_{R_\tau} = \frac{1 - R_\tau^2}{\sqrt{n-\tau-1}}. \qquad (2.30)$$

Чем длиннее выборка и ближе к 1 коэффициент автокорреляции, тем его точность выше. С увеличением параметра сдвига τ значение погрешности возрастает. Другими словами, более точно определяются ординаты R_τ при малых значениях τ. Следовательно, достоверность первого коэффициента автокорреляции наибольшая. Заметим, что формула (2.30) справедлива для незначительных по модулю ординат автокорреляционной функции, колеблющихся вокруг 0,3.

Наличие внутрирядных связей увеличивает значения коэффициентов вариации и асимметрии, определяемых по формулам справедливым для выборок с независимыми членами. В традиционные выражения средних квадратических погрешностей вводятся поправки, учитывающие ординаты автокорреляционной функции.

Определения несмещенных статистических параметров с учетом значений коэффициентов автокорреляции представляют собой самостоятельный раздел математической статистики. Поэтому приведем лишь пример приближенной формулы пересчета смещенного коэффициента вариации в несмещенную величину с учетом первого значения ординаты автокорреляционной функции:

$$c_v = \frac{\tilde{c}_v}{\sqrt{1 - \frac{2R_1}{n(n-1)(1-R_1)}\left(n - \frac{1-R_1^n}{1-R_1}\right)}}, \qquad (2.31)$$

где $\tilde{c}_v$ - коэффициент вариации, рассчитанный по формулам (2.4) и (2.9); R_1 – значение корреляции между смежными членами ряда; n– длина выборки. Из формулы (2.31) следует, что $c_v \geq \tilde{c}_v$.

При наличии значимых первых коэффициентов автокорреляции иной вид имеют формулы стандартных погрешностей средних значений и коэффициентов автокорреляции.

Выражение для вычисления погрешности среднего значения свячзного ряда можно записать в следующей редакции

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{c_v}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{1+R_1}{1-R_1}}. \qquad (2.32)$$

Более сложное выражение предложено Г.А. Алексеевым

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{c_v}{\sqrt{\frac{n}{1+\left[\frac{2R_1}{1-R_1}(1-\frac{1-R_1^n}{n(1-R_1)})\right]}}}. \qquad (2.33)$$

Приведем формулы для вычисления стандартных погрешностей коэффициентов вариации. Часто при определении этой характеристики используется выражение

$$\sigma_{c_v} = \frac{c_v}{n+4c_v^2}\sqrt{\frac{n(1+c_v^2)}{2}} \cdot \frac{1+3R_1^2 c_v}{1+R_1}. \qquad (2.34)$$

Приведем еще одно выражение, полученное Г.А. Алексеевым

$$\sigma_{\bar{x}} = c_v \sqrt{\frac{c_v^2}{n(1-R_1)(1+R_1)} + \frac{1+3c_v^2}{2n(1-R_1^2)(1+R_1^2)} - \frac{c_v}{n}}\ . \tag{2.35}$$

Приведенные формулы справедливы для нормального закона распределения. Из них следует, относительные погрешности статистических параметров связного ряда зависят от коэффициента вариации, длины выборки и первого коэффициента автокорреляции. При этом влияние последнего параметра на погрешности довольно существенны.

Выполним расчет ординат автокорреляционной функции и их погрешностей для ряда валового сбора зерновых за 1965-2000гг. и используемого при расчете статистик в предыдущем разделе.

Пример 2.4. В таблице 2.6 приведен ряд валового сбора зерновых в Иркутской области за период 1965-2000 гг. Необходимо вычислить коэффициенты автокорреляции при различных сдвигах и построить автокорреляционную функцию. Кроме того, требуется определить коэффициент вариации ряда с учетом первого коэффициента автокорреляции.

Согласно свойству коэффициента автокорреляции при сдвиге τ=0 R_τ=1 (таблица 2.6).

По формуле (3.29) нетрудно вычислить остальные коэффициенты автокорреляции. Для этого можно воспользоваться функцией *Коррел(массив1;массив2)* табличного процессора Excel. В таблице 2.6 значения в третьем столбце получены на основании данных второго столбца. При этом первое значение удалено, а остальные члены ряда сдвинуты на одну ячейку вверх. По данным второго и третьего столбца, исключая значение 1965 г., согласно функции *Коррел(массив1;массив2)* получен первый коэффициент автокорреляции при τ=1, равный 0,434.

Второй коэффициент автокорреляции получаем с помощью функции *Коррел(массив1;массив2)*. Массив третьего столбца формируется путем сдвига его значений на одну ячейку вверх при неизменном втором столбце. Для равенства числа членов массивов исключаем данные 1965 и 1966 гг.

В таблице 2.6 приведены результаты вычислений коэффициентов автокорреляции (столбцы 4 и 5). В последней графе определены стандартные погрешности коэффициентов автокорреляции, вычисленных по формуле (2.30).

По данным τ и R_τ построена автокорреляционная функция (рисунок 2.4).

Следует отметить, что с увеличением сдвига уменьшается точность вычисления коэффициента автокорреляции. Поэтому рекомендуется рассчитывать ординаты автокорреляционной функции согласно условию $\tau \le (2/3)n$.

Таблица 2.6 - Расчет ординат автокорреляционной функции валового сбора зерновых

Годы	Зерновые, тыс. т		τ	R_τ	σ_{R_τ}
2000	529	753,2	0	1	0
1999	753,2	741,9	1	0,434	0,139
1998	741,9	740,5	2	0,502	0,130
1997	740,5	706,2	3	0,643	0,103
1996	706,2	873,7	4	0,276	0,166
1995	873,7	1072,3	5	0,454	0,145
1994	1072,3	746,9	6	0,326	0,166
1993	746,9	1199,1	7	0,239	0,178
1992	1199,1	1037	8	0,143	0,188
1991	1037	744,8	9	-0,023	0,196
1990	744,8	1470	10	0,168	0,194
1989	1470	1264	11	0,102	0,202
1988	1264	1150,6	12	-0,067	0,208
1987	1150,6	1358	13	0,069	0,212
1986	1358	1298,4	14	0,208	0,209
1985	1298,4	1213,3	15	-0,183	0,216
1984	1213,3	1299,4	16	0,381	0,196
1983	1299,4	1326,6	17	0,308	0,213
1982	1326,6	1195,3	18	0,073	0,241
1981	1195,3	1062,4	19	0,441	0,201
1980	1062,4	762,4	20	0,124	0,254
1979	762,4	1469,6	21	0,340	0,236
1978	1469,6	1173,7	22	0,013	0,277
1977	1173,7	1199,1	23	0,050	0,288
1976	1199,1	1442,9	24	0,281	0,278
1975	1442,9	1046,1	25	-0,349	0,278
1974	1046,1	1281,2	26	0,312	0,301
1973	1281,2	1372,8	27	-0,054	0,353
1972	1372,8	1234	28	-0,216	0,360
1971	1234	1483,4	29	0,211	0,390
1970	1483,4	1126,2	30	-0,614	0,278
1969	1126,2	1342,3	31	0,830	0,155
1968	1342,3	1213	32	-0,653	0,331
1967	1213	1309,1	33	0,999	0,00049
1966	1309,1	1301,5			
1965	1301,5		c_v с учетом автокорреляции	0,240	

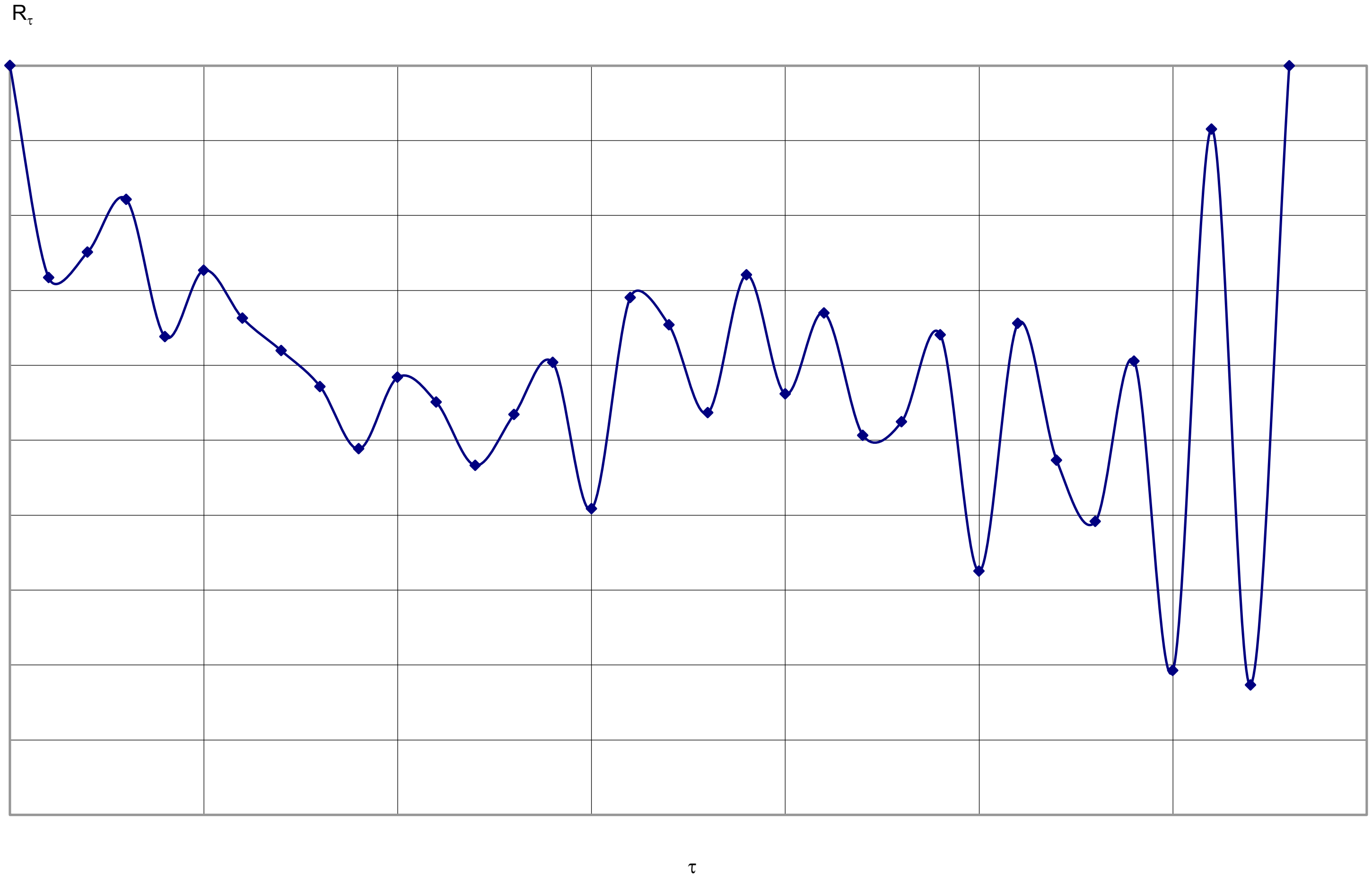


Рисунок 2.4 - Автокорреляционная функция валового сбора зерновых

Вычислив первое значение автокорреляционной функции, нетрудно, определить несмещенную оценку коэффициента вариации по формуле (2.31). В результате учета первой ординаты автокорреляционной функции значение коэффициента вариации увеличится на 0,01, поскольку смещенная оценка, рассчитанная по формулам (2.4) и (2.9) $\tilde{c}_v = 0{,}23$, а несмещенная величина c_v=0,24 (таблица 2.6). Здесь приведены округленные данные.

Ряд валового сбора зерновых обладает внутрирядной связанностью. Первый коэффициент автокорреляции равен 0,434, а его средняя квадратическая погрешность - 0,139. В таком случае значение R_1 необходимо учитывать при вычислении статистических параметров выборки c_v и c_s. Как показал расчет коэффициента вариации по формуле (2.31), несмещенная оценка не ниже смещенной величины. Причем чем больше мера рассеяния выборки (c_v), тем разность между ними ощутимее.

2.5.2 Моделирование выборки с автокорреляцией

Один из способов определения значений связного ряда заключается в использовании формулы

$$\bar{k}_{i+1_{усл}} = 1 + R_1(k_i - 1) \tag{2.36}$$

или $$k_{i+1} = 1 + R_1(k_i - 1) + (k_F - 1)\sqrt{1 - R_1^2}\,, \tag{2.37}$$

где $\bar{k}_{i+1_{усл}}$ - условное математическое ожидание, R_1 – первый коэффициент автокорреляции, k_i и k_{i+1} – предшествующий и последующий безразмерные коэффициенты, k_F – коэффициент, соответствующий ординате интегральной функции (случайное число).

Последовательность операций по получению модульных коэффициентов следующая.

На первом этапе генерируют случайные числа F. По ним на основе закона распределения вероятностей и его статистических параметров определяют коэффициенты k_F.

Задаваясь первым значением k_i и назначенной ординатой R_1 по формуле (2.37) рассчитывается последующий коэффициент k_{i+1}.

Перечисленные операции повторяются многократно. Каждое новое значение k_{i+1} на следующем шаге становится предыдущим k_i. Формула (2.37) справедлива при использовании нормального закона распределения вероятностей. Она может быть преобразована к более сложным законам распределения вероятностей.

Приведем пример моделирования связной выборки.

Пример 2.5. Дан закон распределения в виде вероятностной кривой Гаусса с параметрами $\bar{k}=1$ и $c_v=0{,}5$. Начальное значение $k_i=0{,}47$. Первый коэффициент автокорреляции R_1 соответствует 0,40. Смоделировать выборку со 100 случайными величинами. Сравнить полученные значения c_v и R_1 на основе смоделированного ряда с исходными значениями.

В таблице 2.7 приведены результаты моделирования связной выборки.

Значения связной выборки получены по формуле (2.37). В первом столбце задано первое значение модульного коэффициента. В графах «Псевдослучайные числа» приведены случайные числа, полученные с помощью функции *=СЛЧИС()*.

Таблица 2.7 – Результаты моделирования связной выборки с использованием нормального закона распределения при $\bar{k}=1$, $c_v=0,5$ и $R_1=0,40$

k_i	Псевдослучайное число	Случайная величина	Связная случайная величина	Псевдослучайное число	Случайная величина	Связная случайная величина	Псевдослучайное число	Случайная величина	Связная случайная величина
0,47				0,137	0,452	0,655	0,165	0,513	0,425
	0,080	0,297	0,144	0,864	1,549	1,365	0,001	-0,553	-0,653
	0,448	0,935	0,598	0,583	1,105	1,242	0,523	1,029	0,365
	0,686	1,243	1,061	0,591	1,115	1,202	0,135	0,449	0,241
	0,443	0,928	0,959	0,802	1,425	1,470	0,724	1,297	0,969
	0,879	1,584	1,519	0,173	0,528	0,756	0,697	1,258	1,224
	0,023	0,005	0,296	0,521	1,026	0,926	0,901	1,645	1,681
	0,114	0,398	0,166	0,407	0,882	0,862	0,348	0,804	1,093
	0,217	0,609	0,308	0,133	0,444	0,436	0,474	0,967	1,007
	0,123	0,419	0,191	0,783	1,392	1,133	0,023	-0,001	0,086
	0,149	0,479	0,199	0,876	1,577	1,582	0,957	1,856	1,419
	0,596	1,121	0,791	0,439	0,923	1,163	0,882	1,594	1,712
	0,483	0,978	0,896	0,007	-0,230	-0,062	0,846	1,509	1,751
	0,625	1,159	1,105	0,473	0,966	0,544	0,046	0,158	0,529
	0,155	0,492	0,576	0,646	1,187	0,989	0,774	1,376	1,156
	0,446	0,932	0,769	0,631	1,168	1,149	0,220	0,614	0,709
	0,356	0,815	0,738	0,299	0,737	0,818	0,100	0,358	0,296
	0,423	0,903	0,806	0,537	1,046	0,970	0,783	1,390	1,076
	0,527	1,034	0,954	0,216	0,607	0,628	0,577	1,097	1,120
	0,803	1,425	1,371	0,190	0,561	0,449	0,390	0,861	0,920
	0,757	1,348	1,467	0,243	0,652	0,461	0,903	1,649	1,563
	0,565	1,081	1,262	0,416	0,894	0,687	0,614	1,145	1,358
	0,743	1,326	1,403	0,890	1,613	1,437	0,427	0,908	1,059
	0,436	0,919	1,087	0,560	1,075	1,244	0,296	0,733	0,778
	0,099	0,355	0,444	0,720	1,291	1,364	0,077	0,286	0,257
	0,072	0,271	0,109	0,313	0,756	0,922	0,103	0,368	0,124
	0,340	0,793	0,454	0,698	1,260	1,207	0,962	1,889	1,464
	0,112	0,393	0,225	0,014	-0,100	0,075	0,633	1,170	1,342
	0,410	0,886	0,586	0,733	1,311	0,915	0,482	0,977	1,116
	0,838	1,493	1,286	0,190	0,561	0,564	0,926	1,723	1,709
	0,891	1,615	1,678	0,260	0,678	0,531	0,286	0,718	1,025
	0,459	0,948	1,224	0,733	1,310	1,097	0,782	1,390	1,368
	0,757	1,348	1,408	0,121	0,415	0,503	0,140	0,460	0,652
	0,692	1,251	1,394	0,396	0,868	0,680			

По полученным случайным числам F определены модульные коэффициенты, соответствующие нормальному закону распределения, k_F. (графы «Случайная величина»).

И, наконец, вычислив k_F и используя формулу (2.37) в столбцах «Связная случайная величина» определены слабо коррелируемые значения ряда длиной $n=100$.

По данным полученного ряда рассчитаны статистические параметры: $\bar{k}=0{,}96$, $c_v=0{,}50$ и $R_1=0{,}40$. Другими словами, за исключением среднего модульного коэффициента остальные статистические параметры близки к исходным значениям.

Следует иметь в виду, что связные выборки и независимые ряды одинакового объема имеют разную информативность. Первые из них обладают меньшей информацией, что вызвано влиянием внутрирядных связей.

Кроме моделирования связных выборок вызывает интерес определения погрешностей статистических параметров. Прежде чем приведем пример вычисления погрешностей статистических параметров оценим соответствие смоделированных выборок теоретическому закону распределения вероятностей.

Пример 2.6. Смоделировать 11 выборок по 100 значений по нормальному закону распределения с параметрами $\bar{k}=1$, $c_v=0{,}50$ и $R_1=0{,}40$ и оценить степень соответствия полученных данных теоретическим ординатам, используя критерии согласия χ^2 и Колмогорова.

Используя алгоритм предыдущего примера моделируем 1100 модульных коэффициентов, соответствующих нормальному закону распределения с параметрами $\bar{k}=1$, $c_v=0{,}50$ и $R_1=0{,}40$. Эти значения разделены на 11 выборок объемом $n=100$. На рисунках 2.5 и 2.6 показаны гистограммы и кумулятивные кривые по результатам моделирования ряда с 1100 значениями и выборки со 100 членами.

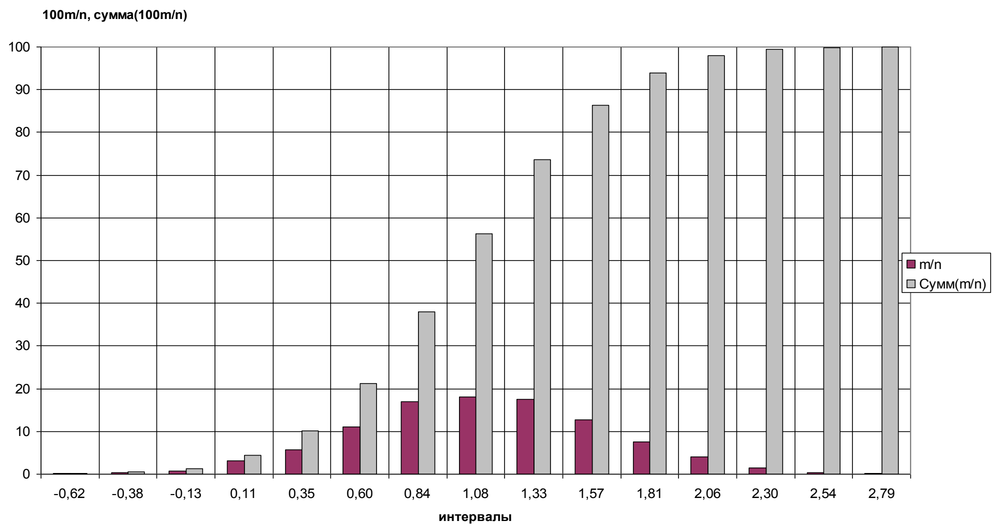


Рисунок 2.5 - Гистограмма и огива смоделированного ряда нормального закона распределения при k=1, Cv=0,5, r=0,4 и N=1100

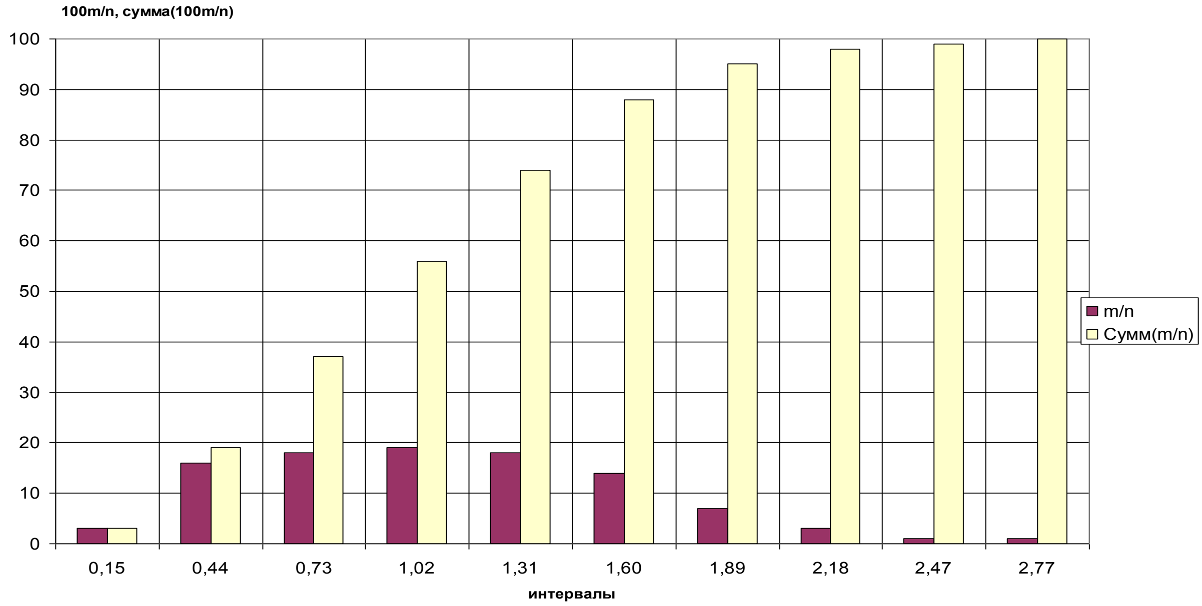


Рисунок 2.6 - Гистограмма и огива смоделированной связной выборки нормального закона распределения при k=1, Cv=0,5, r=0,4 и n=100

Сравнивая рисунки 2.5 и 2.6 нетрудно заметить, что чем больше выборка, тем ближе ее гистограмма и кумулятивная кривая к теоретическому распределению. Гистограмма, построенная по данным смоделированного ряда *n=1100*, лучше отображает нормальный закон распределения, чем гистограмма, полученная по выборке меньшей длины.

В таблицах 2.8 и 2.9 приведены расчеты критериев согласия χ^2 и Колмогорова по смоделированным выборкам 1100 и 100.

Таблица 2.8 – Определение критериев согласия χ^2 и Колмогорова по данным смоделированной выборки *n=1100* согласно нормальному закону распределения с параметрами $\bar{k}=1$, $c_v=0{,}50$ и $R_1=0{,}40$

Интервалы	*m*	*100m/n*	*Σ100m/n*	Функция нормального закон распределения	*np*	$(m-np)^2/np$	*F-Fm*
-0,618	2	0,182	0,182	0,00093	1,02	0,938	0,000889
-0,375	4	0,364	0,545	0,00409	3,48	0,077	0,00136
-0,132	8	0,727	1,273	0,0147	11,73	1,188	0,00203
0,112	35	3,182	4,455	0,0437	31,90	0,300	0,00078
0,355	62	5,636	10,091	0,107	69,95	0,904	0,00645
0,598	122	11,091	21,182	0,2198	123,70	0,0235	0,00800
0,841	186	16,909	38,091	0,3802	176,43	0,518	0,000690
1,085	199	18,091	56,182	0,5647	202,96	0,077	0,00291
1,328	192	17,455	73,636	0,7359	188,32	0,9380	0,000424
1,571	140	12,727	86,363	0,8640	140,93	0,0062	0,000428
1,815	83	7,545	93,909	0,9414	85,07	0,0504	0,00231
2,058	44	4	97,909	0,9790	41,41	0,1614	0
2,301	17	1,545	99,455	0,9938	16,26	0,033	0,000712
2,545	4	0,364	99,818	0,9985	5,147	0,255	0,000330
2,789	2	0,182	100	0,9997	1,31	0,3580	0,000292

Таблица 2.9 – Определение критериев согласия χ^2 и Колмогорова по данным смоделированной выборки $n=100$ согласно нормальному закону распределения с параметрами $\bar{k}=1$, $c_v=0,50$ и $R_1=0,40$

Интервал	m	$100m/n$	$\Sigma100(m/n)$	Функция нормального закона распределения	np	$(m-np)^2/np$	$/F_э\text{-}F/$
0,148088	3	3	3	0,060699	6,069	1,552638583	0,030699
0,438903	16	16	19	0,153822	9,312	4,802771447	0,036178
0,729718	18	18	37	0,311564	15,77	0,314078302	0,058436
1,020533	19	19	56	0,51489	20,33	0,087341204	0,04511
1,311348	18	18	74	0,714333	19,94	0,189536258	0,025667
1,602163	14	14	88	0,863207	14,88	0,052897476	0,016793
1,892978	7	7	95	0,947769	8,456	0,25076435	0,002231
2,183793	3	3	98	0,984315	3,654	0,11725418	0,004315
2,474609	1	1	99	0,996331	1,202	0,033816616	0,006331
2,765424	1	1	100	0,999336	0,300	1,628341098	0,000664

В первых столбцах таблиц определены интервалы гистограмм. В графе $100m/n$ приведены относительные частоты в %. Накопленные частоты как последовательные суммы относительных частот рассчитаны в четвертом столбце. Ординаты функции нормального закона распределения рассчитаны в пятом столбце. В графе np определено произведение длины ряда и разности последующего и предшествующего значений функции распределения. В предпоследнем столбце найдены слагаемые критерия χ^2. И, наконец, разности эмпирических и теоретических ординат функции распределения приведены в последней графе.

Таким образом, значения критериев χ^2 как суммы предпоследних столбцов составили 5,83 и 9,03, что меньше табличных значений 21,02 и 14,07. Согласно критериям в обоих случаях гипотеза о соответствии смоделированных случайных величин нормальному закону распределения вероятностей подтверждена. Вместе с тем согласие выборки длиной n=1100 выше, чем смоделированного ряда с меньшим числом значений.

При использовании критерия Колмогорова определены максимальные расхождения между эмпирическими и теоретическими ординатами. Для выборки длиной n=1100 они составили 0,00800, а для ряда с количеством значений 100 – 0,0584. Умножив эти числа на $\sqrt{n}$ получим эмпирические критерии λ, равные 0,265 и 0,584. Эти значения уступают табличному числу 1,358 (таблица 2.3), соответствующему уровню значимости α=5%. Следовательно, по критерию Колмогорова принимается гипотеза о соответствии полученных данных нормальному закону распределения.

Продолжая тему моделирования связных выборок с использованием нормального закона распределения, обратим внимание на необходимость определения погрешностей статистических параметров моделируемых рядов с применением метода статистических испытаний.

Пример 2.7. Дан закон распределения в виде вероятностной кривой Гаусса с параметрами $\bar{k}=1$ и c_v=0,5. Начальное значение k_i=1,12. Первый коэффициент автокорреляции соответствует 0,40. Смоделировать 11 выборок со 100 случайными величинами. Сравнить полученные путем моделирования коэффициенты c_v и R_1 с исходными значениями. Определить стандартные погрешности параметров $\bar{k}$, c_v и R_1, используя метод статистических испытаний, сравнив их с теоретическими значениями.

По аналогии с предыдущим примером смоделировано 11 выборок по 100 значений с применением нормального закона распределения с параметрами $\bar{k}$ =1, c_v=0,5 и R_1=*0,40*.

Затем для каждой полученной выборки рассчитаны статистические параметры $\bar{k}$, c_v и R_1, которые приведены в таблице 2.10.

Таблица 2.10 – Статистические параметры 11 смоделированных связных выборок длиной 100 и их стандартные погрешности

№ п.п.	$\bar{k}$	σ	c_v	R_1
1	0,953	0,548	0,576	0,383
2	0,938	0,536	0,571	0,333
3	1,105	0,489	0,443	0,350
4	0,969	0,461	0,476	0,240
5	1,043	0,539	0,517	0,473
6	1,038	0,431	0,416	0,179
7	0,993	0,553	0,557	0,497
8	0,902	0,573	0,635	0,408
9	1,006	0,519	0,516	0,460
10	1,115	0,492	0,441	0,403
11	0,943	0,535	0,568	0,325
Среднее	1,000	0,516	0,520	0,368
Стандартная погрешность	0,069	0,043	0,069	0,069
Относительная погрешность, %	6,89	8,33	13,29	18,71

Эти параметры определены методом моментов по формулам (2.3), (2.4), (2.9) и (2.29). По полученным рядам (2-12 строки) рассчитаны средние значения, их стандартные отклонения (стандартные погрешности) и относительные погрешности. В этом случае использованы формулы (2.3), (2.4), (2.23) и (2.24).

Согласно полученным данным средние модульные коэффициенты смоделированных рядов совпали с заданными значениями $\bar{k}=1$. Расхождение между модельным и теоретическим значениями коэффициентов c_v составило 0,02. Другими словами, смоделированное значение параметра рассеяния оказалось выше, чем заданное в задаче. Наибольшее отличие наблюдается между эмпирическим и теоретическим значениями коэффициента автокорреляции, на уровне 0,03. При этом модельное значение оказалось меньше заданного.

Обратим внимание на относительные погрешности, наибольшее из которых имеет коэффициент автокорреляции, а наименьшее – среднее значение. Для сравнения полученных погрешностей с теоретическими значениями использованы формулы (2.36) и (2.37). В первом случае относительная погрешность среднего значения составила 7,64%, а во втором – 7,60%, что несколько выше значений, приведенных в таблице 2.8. Что касается относительных погрешностей коэффициентов вариации, то они равны 9,2 и 11,3%. Эти результаты лучше того, который получен в таблице 2.10. И, наконец, теоретическое значение абсолютной погрешности первого коэффициента автокорреляции по (2.30) составило 0,084. Разделив этот результат на $R_1=0,40$ и умножив на 100%, получим относительную погрешность 23,46%, которая почти на 5% превышает значение, приведенное в таблице 2.10.

Резюмируя полученные результаты, можно отметить, что метод статистических испытаний имеет большое значение при оценке статистических параметров и их погрешностей и построении законов распределения в условиях недостаточности данных.

2.6 Алгоритмы имитационного моделирования редких событий

В работе авторами монографии предложены два алгоритма определения частоты появления редкого события с применением метода статистических испытаний (рисунки 2.7 и 2.8). Следует отметить, что эти алгоритмы применимы для редких явлений, являющихся случайными. При этом с их помощью оценивается рассеяние значений случайной величины и их вероятностей.

Оба алгоритма основаны на использовании некоторого закона распределения вероятностей, как правило, Пирсона III типа, трехпараметрического степенного гамма-распределения, логарифмически нормального и гамма-распределения. При этом известна продолжительность периода непревышения редкого события с учетом исторических свидетельств (N).

С помощью псевдослучайных чисел многократно моделируют выборки значений природного явления y_{ij}. Из них выбирают наибольшие величины и соответствующие им ординаты функции распределения.

Моделирование m числа выборок длиной N позволяет получить m наибольших значений редкого явления, по которым строят функцию между значениями параметра и соответствующими им вероятностями. По данным о фактическом редком явлении согласно полученной связи наибольших значений определяют расчетную вероятность превышения и ее погрешность для заданных уровней значимости.

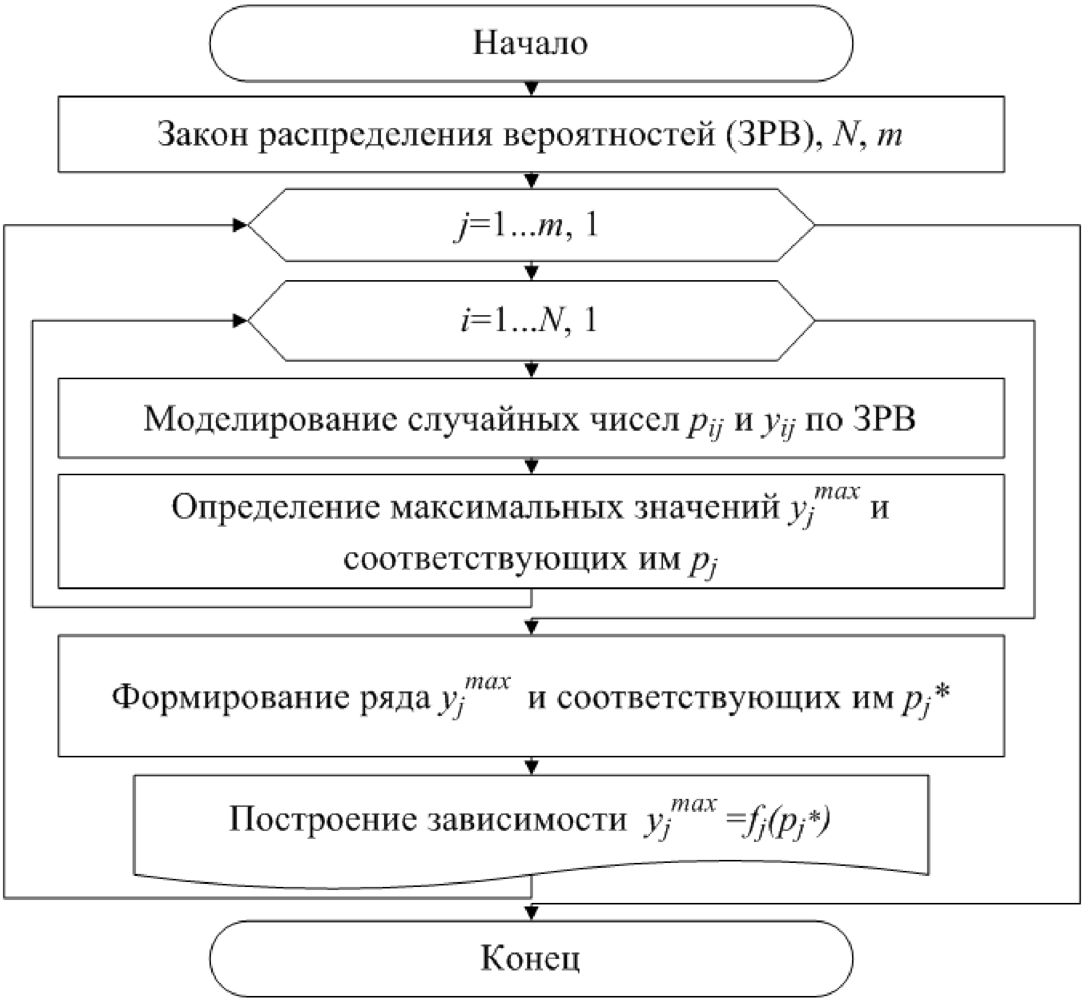


Рисунок 2.7 – **Алгоритм определения вероятностей появления редкого явления в результате многократного моделирования наибольших значений рядов за исторический период**

В отличие от первого алгоритма во втором многократно моделируется ряд до появления значения, которое не меньше фактического редкого явления (рисунок 2.8). При этом оценивается второе значение ряда для интерполяции вероятности по фактическому максиму максимуму.

Эксперименты повторяются m раз. В результате определяется вероятность превышения, характеризующего редкое явление, и ее рассеяние.

Разработанные алгоритмы применены для оценки наибольших гидрологических событий с учетом историко-архивных данных с использованием распределения Пирсона III типа. При этом статистические параметры определены с помощью метода моментов и приближенно максимального правдоподобия. В таблице 2.11 приведены основные результаты статистической обработки значений рядов максимального стока дождевых паводков длиной n ($\overline{Q}$ - среднее значение гидрологического ряда, м^3/с; отношение коэффициента асимметрии C_s и вариации C_v; максимальное значение многолетнего ряда $Q_{\max}^{\max}$) с учетом историко-архивных данных (N). Кроме того, рассчитаны параметры эмпирической ($p_э$) и аналитической вероятностей появления события в виде распределения

Пирсона III типа $\left(p_{\Pi}^{\text{ММ}}\right)$. Приведены интервалы частоты появления редкого явления. Статистические параметры найдены методом моментов.

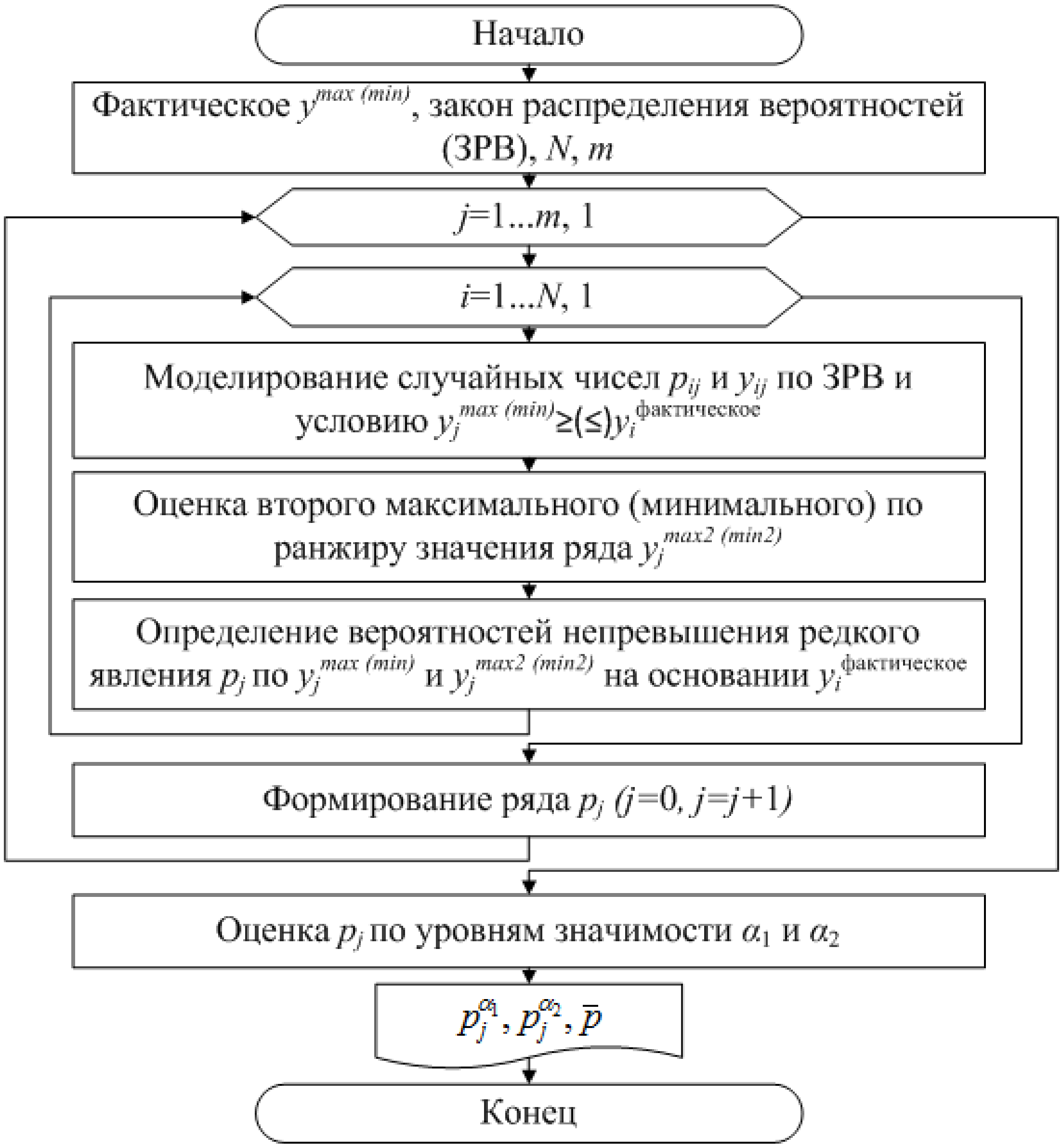


Рисунок 2.8 – **Алгоритм определения вероятности появления редкого явления на основе моделирования периодов превышения фактического редкого явления**

Следует отметить, что в отличие от метода моментов (ММ) с помощью оценки коэффициента асимметрии с учетом первого отрицательного начального момента и коэффициента вариации можно устранить отрицательную смещенность параметра (таблица 2.11). Кроме того, определено отношение асимметрии к коэффициенту вариации методом Гриневича, что улучшает его точность.

Таблица 2.11 – **Статистические параметры рядов максимального стока дождевых паводков с учетом историко-архивных свидетельств и вероятности проявления наибольших гидрологических событий для рек Ангарского бассейна**

Река (пункт)	F, км^2	N	$\bar{Q}$	C_v	C_s/C_v	Q_{max}^{max}	$p_э$	$p_п^{MM}$	Рассеяние $p_п^{MM}$	C_s/C_v по Гриневичу А.Г.
Иркут (Иркутск)	14800	134	1360	0,45	4,3	4800	0,00741	0,00224	0,00224-0,00440	4,3
Китой (Китой)	8420	142	910	0,50	5,1	3610	0,00699	0,00306	0,00305-0,00454	7,0
Белая (Мишелевка)	16400	142	1360	0,60	4,9	6060	0,00699	0,00474	0,00474-0,00597	7,0
Ия (Тулун)	14500	142	980	0,53	5,5	4400	0,00699	0,00192	0,00192-0,0267	-
Уда (Укар)	17200	141	1870	0,56	2,4	5900	0,00704	0,00694	0,00306-0,00955	-
Бирюса (Бирюсинск_	31800	100	1640	0,48	2,2	4720	0,00990	0,00475	0,00475-0,00937	3,1

Помимо оценки вероятностей редких гидрологических событий необходимо определить их рассеяние. Для этого использован предложенный алгоритм моделирования вариации наибольших максимальных расходов воды и их вероятностей с использованием метода Монте-Карло (рисунок 2.8). Суть алгоритма заключается в моделировании с помощью псевдослучайных чисел выборок значений максимального стока на основе условия ($Q_{max_i} \geq Q_{max}^{max}$), где Q_{max_i} - значение ряда, соответствующее заданному закону распределения. Из моделируемых выборок выделяют два наибольших значения $Q_{max_{1j}}^{max}$, $Q_{max_{2j}}^{max}$ и соответствующие им p_{1j} и p_{2j} по заданному закону распределения. По этим данным рассчитываются вероятности p_j фактического значения Q_{max}^{max}. Приведенные интервалы рассеяния вероятностей соответствуют уровням значимости 0,1 и 0,9. При этом число моделируемых выборок m соответствовало периоду N.

В зоне малой вероятности наилучшее соответствие наибольших максимальных расходов воды за историческое прошлое получено по закону распределения Пирсона III типа, статистические параметры которого определены методом моментов.

Интервалы вероятностей наибольших расходов воды с учетом историко-архивных свидетельств имеют меньшее значение, чем при использовании ряда за период инструментальных наблюдений.

В работе показано, что наиболее благоприятным для формирования дождевых паводков в бассейне Ангары был 1952 г., в котором наблюдался наибольший максимальный расход воды за период не менее 142 года на реке Белой (Мишелевка). Оценены вероятности высоких паводков, наблюдавшихся на реках бассейна Ангары в годы редких гидрологических событий: 1960 (р. Бирюса), 1971 (р. Иркут), 1984 (р. Ия), 1996 (р. Уда), 2001 (р. Китой).

Для определения вероятности гидрологической ситуации на основных притоках Ангары рассчитывались частные вероятности высокого максимального стока дождевых паводков, имевших место в годы редких гидрологических событий с использованием распределения Пирсона III типа. Статистические параметры определялись методом моментов с учетом исторических свидетельств. Согласно вероятности совмещения частных значений превышения редких максимальных расходов воды наименьшее значение оказалось для гидрологической ситуации на водотоках рассматриваемого водосбора в 1952 г. ($p = 0{,}378$), а наибольшее – для паводков, сформировавшихся в 1996 г. ($p = 0{,}999$).

Таким образом, по полученным суммарным вероятностям и данным индексов суммарных расходов воды согласно, 1952 г. был наиболее благоприятным для формирования высоких максимальных расходов воды в летний период.

Согласно методике приведены расчеты стандартных погрешностей квантилей (модульных коэффициентов максимальных расходов воды k с учетом исторических свидетельств) для первого (4720 м^3/с) и второго (3490 м^3/с) наибольших по величине максимальных расходов воды Q_{max_i} по распределению Пирсона III типа для р. Бирюса (Бирюсинск), которые составили 10,5 и 6,1%. Стандартная ошибка первого по величине максимального расхода воды составляет 490 м^3/с, а второго – 290 м^3/с. При этом получены вероятности этих событий с определением статистических параметров методом моментов, которые соответствуют 0,00485 и 0,0275 для первого и второго по величине паводочного расхода воды.

Кроме того, ошибка наибольшего максимального расхода воды дождевых паводков определена с использованием первого алгоритма (рисунок 2.2), согласно которому стандартное отклонение наибольшего максимального расхода воды для различных m (25-1000) колеблется в пределах 640-730 м^3/с (13,6-15,5%).

По предложенным алгоритмам (рисунки 2.7 и 2.8) осуществлена оценка трех наибольших по величине дождевых паводков, сформировавшихся на р. Иркут (Иркутск) (таблицы 2.12 и 2.13). В качестве вероятностного закона использовано распределение Пирсона III типа. При этом статистические параметры ряда определены методом моментов.

На основе полученных результатов по первому алгоритму с уменьшением значения события в ранжированном ряду уменьшается рассеяние его вероятности p согласно коэффициентам вариации C_v. При моделировании по второму алгоритму наблюдается снижение коэффициента вариации и интервала рассеяния p относительно фактического значения с уменьшением ранга события. Асимметричность рядов вероятностей при моделировании по первому и второму алгоритму отличается более чем в 1,5 раза.

Таблица 2.12 – **Оценка распределений вероятностей для трех наибольших расходов воды дождевых паводков на р. Иркут (Иркутск)**

Q_{max}, м^3/с	p	$\bar{p}$	σ_p	C_v	C_s/C_v	$P_{0,05}$	$p_{0,95}$	Размах p
Первый алгоритм								
4800	0,00222	0,00773	0,000564	0,85	1,84	0,000830	0,0208	0,0389
3300	0,0181	0,0142	0,0102	0,72	1,58	0,00211	0,0370	0,0474
2780	0,0378	0,0237	0,0149	0,63	1,79	0,00682	0,0546	0,0739
Второй алгоритм								
4800	0,00222	0,00300	0,000150	0,58	3,79	0,00197	0,00746	0,00778
3300	0,0181	0,0182	0,000887	0,049	-	0,0178	0,0199	0,00494
2780	0,0378	0,0382	0,00132	0,034	-	0,0375	0,0409	0,0102

В таблице 2.13 приведены стандартные ошибки максимальных расходов воды, которые колеблются от 15 до 20% относительно фактических Q_{max}. Коэффициенты вариации не превышают 0,18. При этом можно сравнить степень уменьшения рассеяния для распределений максимальных расходов воды.

Таблица 2.13 – **Оценка распределений трех наибольших максимальных расходов дождевых паводков на р. Иркут (Иркутск) по первому алгоритму**

Год	Q_{max}, м^3/с	$\bar{Q}_{max}$, м^3/с	σ_Q, м^3/с	Cv	Cs/Cv	$Q_{0,05}$, м^3/с	$Q_{0,95}$, м^3/с	Размах Q, м^3/с
1971	4800	4178	742	0,18	4,9	3200	5212	3706
2001	3300	3667	662	0,18	6,7	2788	4778	3631
1917	2780	3221	449	0,14	4,5	2546	4050	2449

Предложенные в разделе алгоритмы могут быть использованы для различных функций распределения. Причем число моделируемых выборок можно изменять для нахождения устойчивого решения. В первом приближении число выборок может соответствовать историческому периоду непревышения значения редкого явления N. В дополнение к этому метод Монте-Карло позволяет оценивать точность вероятности превышения редкого природного события.

Разработанные алгоритмы применимы для случайных и слабосвязных выборок. При этом для последних необходимо учитывать влияние первого коэффициента автокорреляции на статистические параметры функции распределения. Приведенные алгоритмы применимы для многолетних рядов максимальных расходов воды весеннего половодья, дождевых паводков и наибольших суточных осадков.

III КОМПЛЕКСЫ ПРОГРАММ

1 ПРОГРАММНЫЕ КОМПЛЕКСЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПРОИЗВОДСТВА ПРОИЗВОДСТВЕННОЙ ПРОДУКЦИИ

1.1 Задачи программных комплексов

Для решения задач управления аграрным производством очевидна необходимость применения современных методов экономико-математического моделирования и программно-аппаратных средств их реализации. Для принятия любого управленческого решения в условиях неопределенности и риска необходимо постоянно держать под контролем различные аспекты финансово-хозяйственной деятельности, будь-то: торговля, производство или представления каких-либо услуг. Поэтому современный подход к управлению предполагает вложение средств в информационные технологии. Реализация разработанных методов математического моделирования в виде программных комплексов является мощным средством выработки стратегии и тактики развития аграрного предприятия, обоснования управленческих решений, осуществления контроля над их выполнением, оценки результатов деятельности сельскохозяйственных предприятий и его подразделений. Многообразие методов экономико-математического моделирования подразумевает многообразие программных средств их реализации.

В задачах управления аграрным производством можно выделить два вида экономико-математических моделей:

1. Модели прогноза.
2. Оптимизационные модели.

В настоящее время существует большое количество методов прогнозирования, но чаще всего при исследованиях процессов и объектов, имеющих предысторию, например сельскохозяйственные показатели, используются фактографические методы (экстраполяция, интерполяция, тренд-анализ). Эти методы позволяют определять структуру временных рядов, оценивать статистические параметры, выявлять законы распределения вероятностей, выделять тренды, определять связи между характеристиками и т.д. Достоинством этих методов является то, что они достаточно полно проработаны в теоретическом плане и имеет наиболее мощное программное обеспечение, в которое входят такие известные специализированные прикладные программы, как PASW (SPSS Statistics), Statgraphics, Stadia, SAS и пакеты общего назначения, такие как Excel.

Оптимизационные модели, в которых используется целевая функция, нашли широкое применение при решении задач моделирования структуры сельскохозяйственного производства. Реализация моделей программными средствами зависит от характеристик наборов данных в моделях. Наборы данных, входящие в оптимизационные модели и являющиеся сельскохозяйственными показателями можно разделить на три группы.

К первой группе относятся параметры, многолетние ряды которых подчиняются законам распределения вероятностей. К ним относятся: урожайности зерновых, овощей и картофеля, кормовых культур практически во всех предприятиях.

Для этой группы параметров применимы задачи стохастического программирования. Модели со стохастическими параметрами можно использовать для решения задач, связанных с оптимизацией сельскохозяйственного производства с учетом проявления экстремальных природных явлений для рационального использования земельных ресурсов с целью оценки потенциала продовольственной продукции.

Во вторую группу входят параметры с неопределенностью, для которых законы распределения вероятностей неизвестны. В этом случае могут быть заданы интервальные оценки параметров - верхние и нижние значения.

Третья группа сельскохозяйственных показателей характеризуется высокой степенью определенности. Для этих показателей характерны значимые тренды или их пренебрежительно малое рассеянье относительно усредненной величины, зависимость между параметрами. В ряде случаев для стабильно развивающихся предприятий наблюдаются значимые тренды и имеют место хорошие зависимости между различными производственно-экономическими показателями. В этом случае можно использовать задачу параметрического программирования или динамические модели. Очевидно, что подобные модели в наименьшей степени подвержены влиянию случайных факторов.

На основании выделенных групп характеристик можно сделать вывод, что информация для моделирования производства сельскохозяйственной продукции обладает различной степенью определенности. Поэтому для реализации в программных комплексах оптимизационных моделей необходимо использовать методы, учитывающие все рассмотренные наборы данных.

Программная реализация оптимизационных моделей в большинстве случаев сводится к задачам линейного программирования и, так же как и для прогнозных моделей, достаточно полно проработана и реализована в специализированных пакетах и пакетах общего назначения. Кроме вышеупомянутых пакетов используются современные пакеты, такие как SYSTAT TableCurve 2D v5.01, SYSTAT TableCurve 3D v4.0, DataFit 9.0, LabFit v.7.2.43, MVR Composer.

Программные комплексы решения задач производства реализуют поставленную в них задачу прогнозирования или оптимизации посредством предложенных моделей с разными наборами данных и представлением результатов моделирования. Поэтому, в общем случае в таких комплексах реализуются следующие задачи:

- формирование наборов данных;

- хранение наборов данных;
- реализация математических моделей предметной области;
- анализ результатов моделирования и формирование рекомендаций для ЛПР;
- создание дружественного пользовательского интерфейса.

Структурная схема таких программных комплексов представлена на рисунке 1.1

В большинстве случаев программные комплексы решения задач сельскохозяйственного производства реализуются в виде специализированных информационных систем. Обычно в таких ИС реализуются основные задачи, предъявляемые к программным комплексам управления сельскохозяйственным производством, но в то же время, каждая из них предназначена для решения достаточно специфической задачи.

В зависимости от предметной области информационные системы могут очень сильно различаться по своим функциям, архитектуре, реализации. Однако можно выделить ряд свойств, которые являются общими.

Во-первых, информационные системы предназначены для сбора, хранения и обработки информации. Поэтому в основе любой из них лежит среда хранения и доступа к данным.

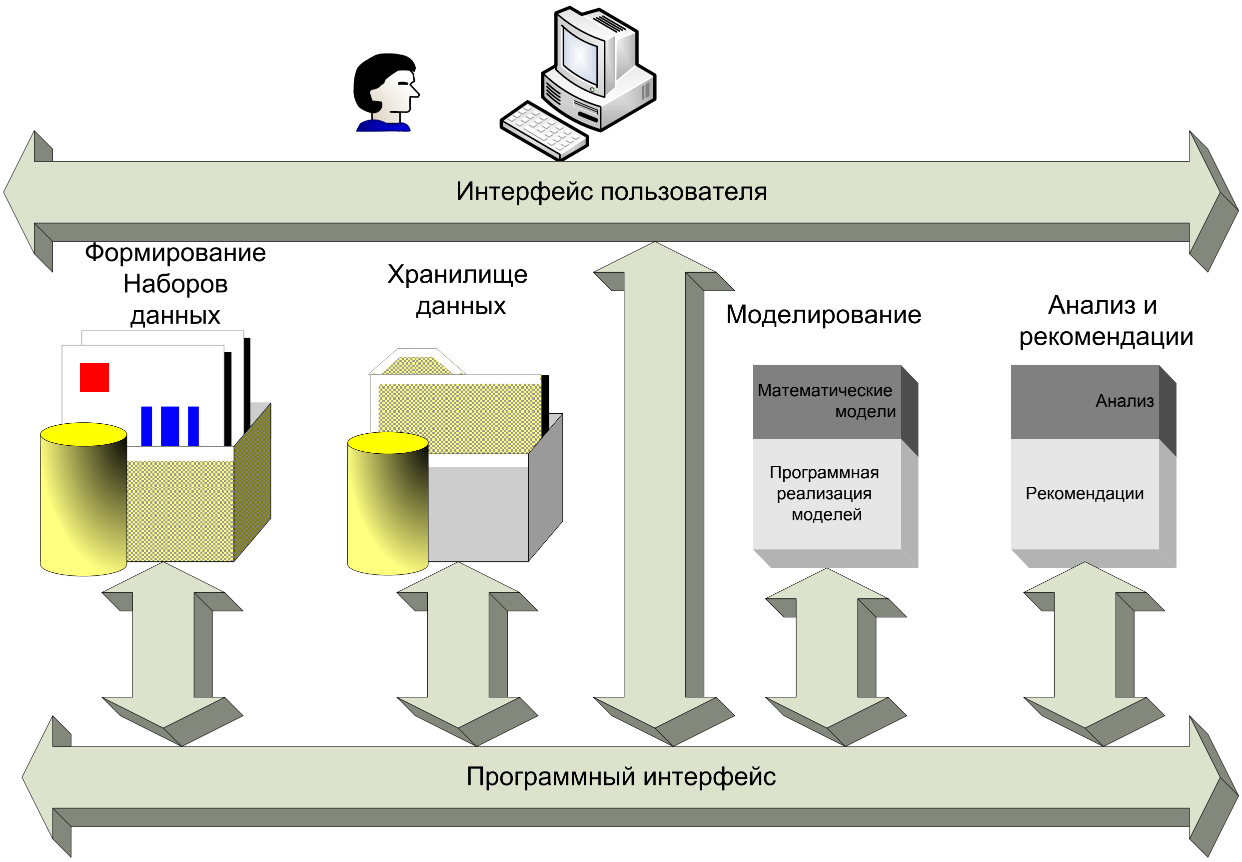


Рисунок 1.1 - Структурная схема программного комплекса

Во-вторых, информационные системы ориентируются на конечного пользователя, не обладающего высокой квалификацией в области применение вычислительной техники. Поэтому клиентские приложения информационной системы должны обладать простым, удобным, легко осваиваемым интерфейсом, который предоставляет конечному пользователю все необходимые для работы функции, но в то же время не дает ему возможность выполнять какие-либо лишние действия.

В-третьих, информационные системы должны обладать достаточным набором процедур и функций реализации методов математического моделирования. С их помощью решаются как задачи прогноза и оптимизации, так и выдачи управленческих решений лицам принимающим решения.

В связи с этим, можно выделить три класса программных средств, используемых в информационных системах управления сельскохозяйственным производством:

1. Системы управления базами данных, решающие задачи сбора, обработки и хранения информации.
2. Программные комплексы и отдельные программы, реализующие методы математического моделирования.
3. Языки и средства программирования, реализующие задачи создания пользовательского и программного интерфейса и создания программ, реализующих отдельные методы математического моделирования.

1.2 Программные комплексы реализации прикладных задач

1.2.1 Программный комплекс «Региональный агропромышленный кластер»

Эффективность взаимодействия участников агропромышленного кластера зависит от оперативного анализа экономической ситуации и выбора оптимального варианта из множества альтернатив. Решение подобных задач возможно с использованием методов математического моделирования.

В рамках выделенных агропромышленных кластеров региона созданы модели, учитывающие особенности территорий, на которых происходит их деятельность. Модели оптимизации взаимодействия участников агропромышленных кластеров описывают производство сельскохозяйственной продукции, осуществляемое тремя категориями предприятий, переработку и реализацию с учетом располагаемых ресурсов. Помимо этого, созданные модели учитывают природные условия и специализацию муниципальных районов, мощности перерабатывающих предприятий, ценовую политику, производственные и трудовые ресурсы и т.п.

Кроме описания производства, переработки и сбыта продукции, в модели включены ограничения по объемам капиталовложений и развитию инфраструктуры, учитывающие участие других организаций в агропромышленном кластере.

Таким образом, модели оптимизации взаимодействия участников кластера являются сложными, многоблочными, многоцелевыми, включают большое количество переменных и ограничений. Кроме того, процесс создания моделей является трудоёмким, требующим большой предварительной работы по подготовке информации, к которой относятся справочно-нормативные материалы, значения многолетних рядов экономических и производственных параметров, географические координаты объектов.

Учитывая сложность проводимых исследований, разработано программное обеспечение оптимизации взаимодействия между участниками агропромышленных кластеров, позволяющее формулировать задачи математического программирования, описывающие взаимодействие участников кластеров и решать их.

Программный комплекс «Региональный агропромышленный кластер» (рис. 1.2) предназначен для управленческого персонала предприятий и муниципальных районов Иркутской области и региона, которые согласно множеству вариантов решения задач математического программирования с учетом результатов кластеризации, выбирают наилучшую стратегию по определенному критерию оптимальности. Основной функцией программного комплекса является моделирование взаимодействия товаропроизводителей на основе применения методов математического программирования, кластеризации, теории вероятностей и математической статистики.

Комплекс реализован в среде VBA, которая позволяет создавать выполняемые модули операционной системы Windows, не требующие дополнительных библиотек; обеспечивает возможность работы с базами данных различных типов и быструю визуальную разработку интерфейса пользователя.

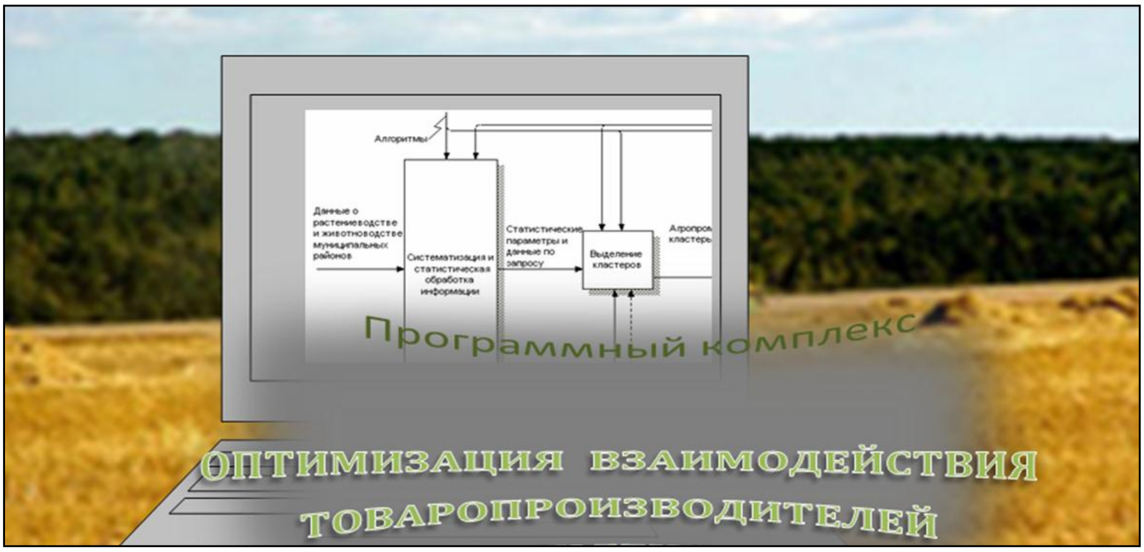


Рисунок 1.2 - Окно программного комплекса «Региональный агропромышленный кластер»

Для Иркутской области выделено 7 кластеров, в том числе зерновые, мясные и молочные, для каждого из которых построены и реализованы модели. Разработана и заполнена база данных сведениями о производственной деятельности муниципальных районов Иркутской области. Программный комплекс может использоваться для моделирования кластеров в различных регионах страны.

Программный комплекс разбит на два модуля: выделение кластеров и оптимизация взаимодействия участников в полученных кластерах. Первый модуль выполняет следующие функции: запрос информации из базы данных для выделения агропромышленных кластеров; контроль ввода данных; задание критерия и выбор метода кластеризации; определение кластеров (рисунок 1.3).

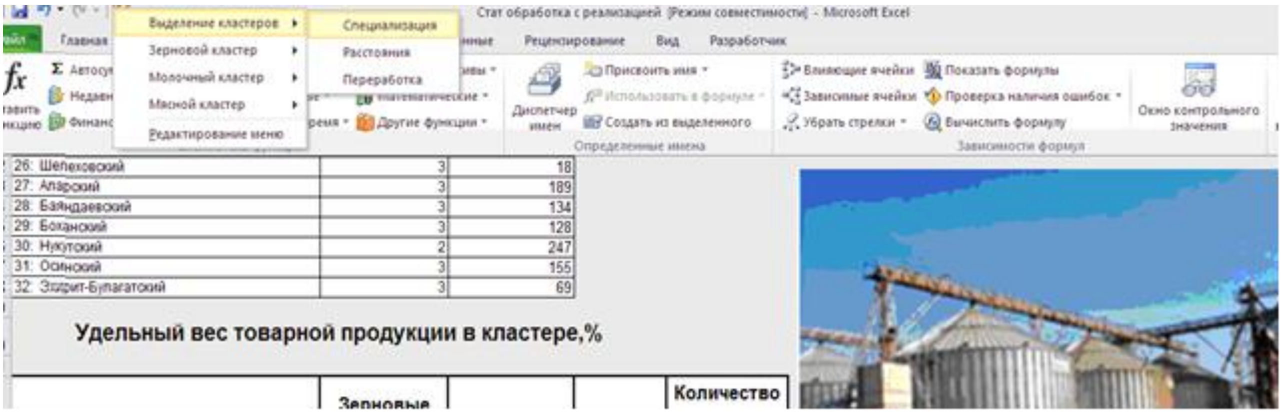


Рисунок 1.3 - Модуль выделения кластеров

Второй модуль решает задачи оптимизации взаимодействия производственных хозяйств различных категорий и перерабатывающих предприятий, с детерминированными, интервальными и случайными параметрами.

1.2.2 Программный комплекс «Засуха»

Разработанный специализированный программный комплекс «Засуха» предполагает решение следующих задач:

- оценивать статистические параметры многолетних рядов урожайности сельскохозяйственных культур;
- определять зависимости между характеристиками засух и природными факторами,

- оценивать очень сильные засухи (катастрофические засухи) с помощью алгоритмов имитационного моделирования на основе пространственно-временных данных о засушливых явлениях,
- решать различные варианты задач математического программирования с учетом одного или нескольких экстремальных природных явлений.

Таким образом, программный комплекс позволяет оценивать статистические параметры многолетних рядов урожайности, выделять засушливые годы на основании критерия перехода значения в событие, моделировать засуху с помощью вероятностных, имитационных и многофакторных моделей, определять различные стороны влияния природных стихий на агропромышленное производство, оптимизировать производственные процессы с учетом одного или нескольких природных событий.

Функциональная модель комплекса представлена на рисунке 1.4. На ней показано, что входными данными являются: систематизированные данные многолетних рядов урожайности зерновых по муниципальным образованиям Иркутской области за период 1982-2009 гг., гидрометеорологические данные, которые включают информацию о месячных осадках за вегетационный период, средней месячной температуре, числе дней бездождевого периода за промежуток времени 1977-2008 гг.

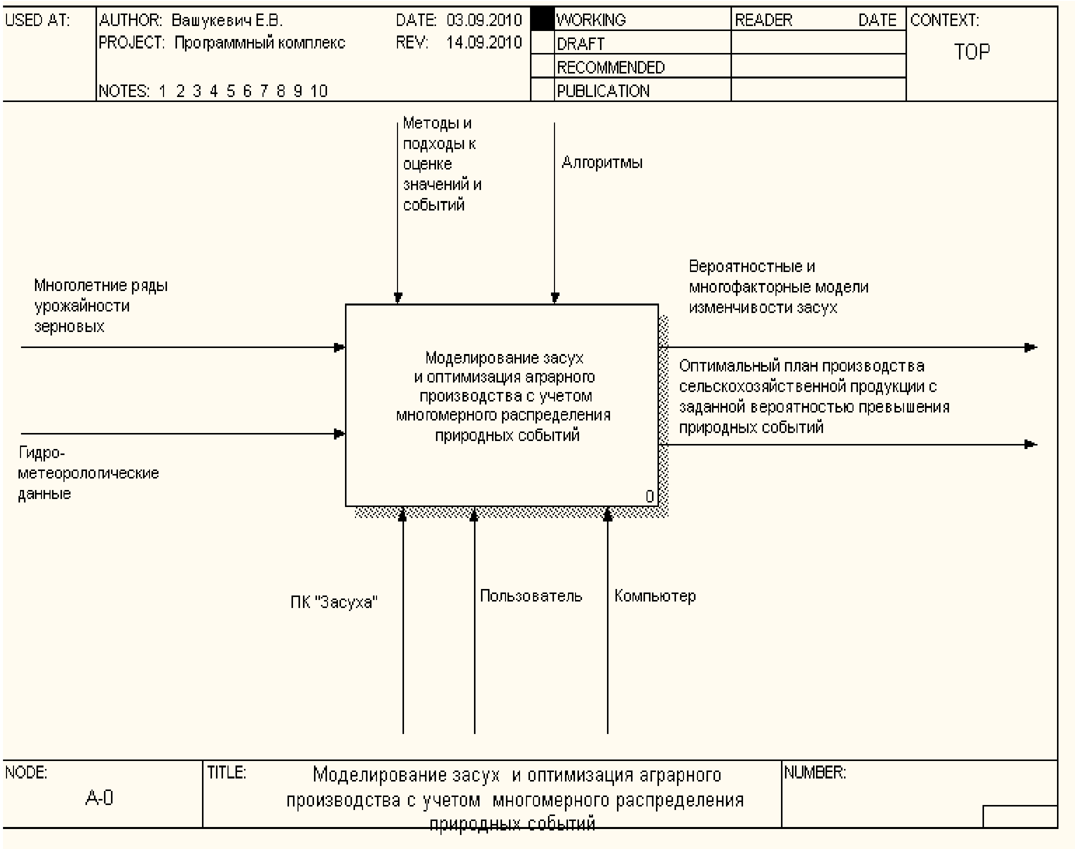


Рисунок 1.4 - Функциональная модель комплекса «Засуха»

Выходными данными являются: вероятностные и многофакторные модели изменчивости засух и оптимальный план производства сельскохозяйственной продукции с заданной вероятностью превышения природных событий.

Управляющее воздействие оказывают: методы и подходы к оценке значений и событий, алгоритмы. Механизмами для выполнения процесса являются пользователь, компьютер и программный комплекс «Засуха».

Основная функция декомпозирована на 6 подфункций: «Ввод исходных данных», «Построение графиков хронологических последовательностей урожайности зерновых», «Расчет статистических параметров и построение законов распределения вероятностей», «Создание многофакторных моделей», «Имитационное моделирование очень сильных засух» и «Создание оптимизационных моделей» (рисунок 1.5) .

При загрузке программного комплекса «Засуха» (рисунок 1.6.) появляется диалоговое окно, в котором перечислены все муниципальные образования Иркутской области. С помощью электронной карты и космоснимков демонстрируются территории или зоны, для которых решается задача.

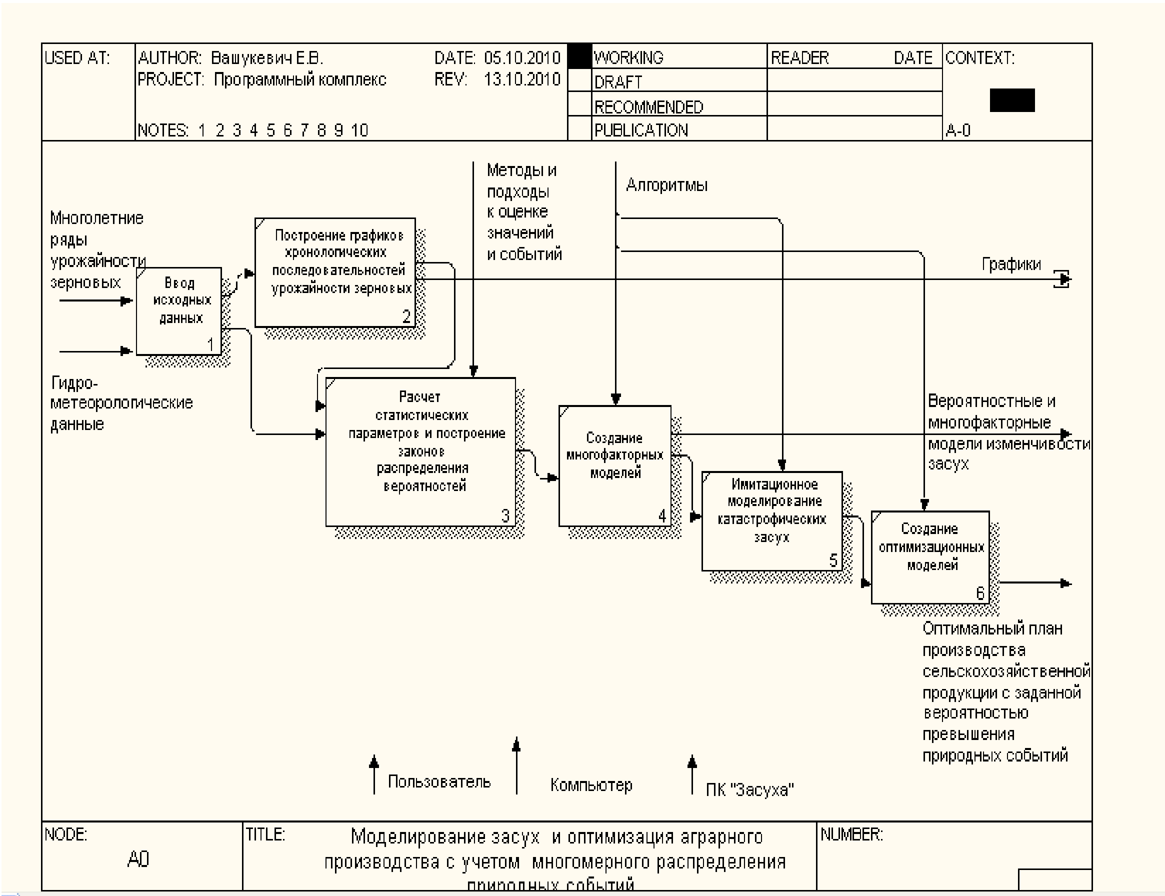


Рисунок 1.5 - Декомпозиция основной функции ПК «Засуха»

При выделении того или иного района на экране отображается ряд урожайности сельскохозяйственных культур за 1989-2009 гг. и его статистические параметры: среднее значение (X_{cp}), коэффициент вариации (C_v), коэффициент асимметрии (C_s), отношение (C_s/C_v), минимальное, максимальное и критическое значение (x_k) урожайности на основании предложенного критерия, определяются стандартные ошибки перечисленных статистических параметров. Вместе с тем программный комплекс позволяет осуществлять автокорреляционный анализ для оценки значимости первого коэффициента автокорреляции (r_1). При этом оцениваются стандартные ошибки коэффициентов автокорреляции. При $r_1 > 0{,}70$ пользователь может получить авторегрессионное уравнение, которое позволит прогнозировать урожайность зерновых. Если ряд представляет собой случайную выборку ($0 < r_1 < 0{,}3$), тогда на основании критериев согласия χ^2 и Колмогорова-Смирнова оценивается закон распределения вероятностей: нормальный, логарифмически нормальный и гамма-распределение.

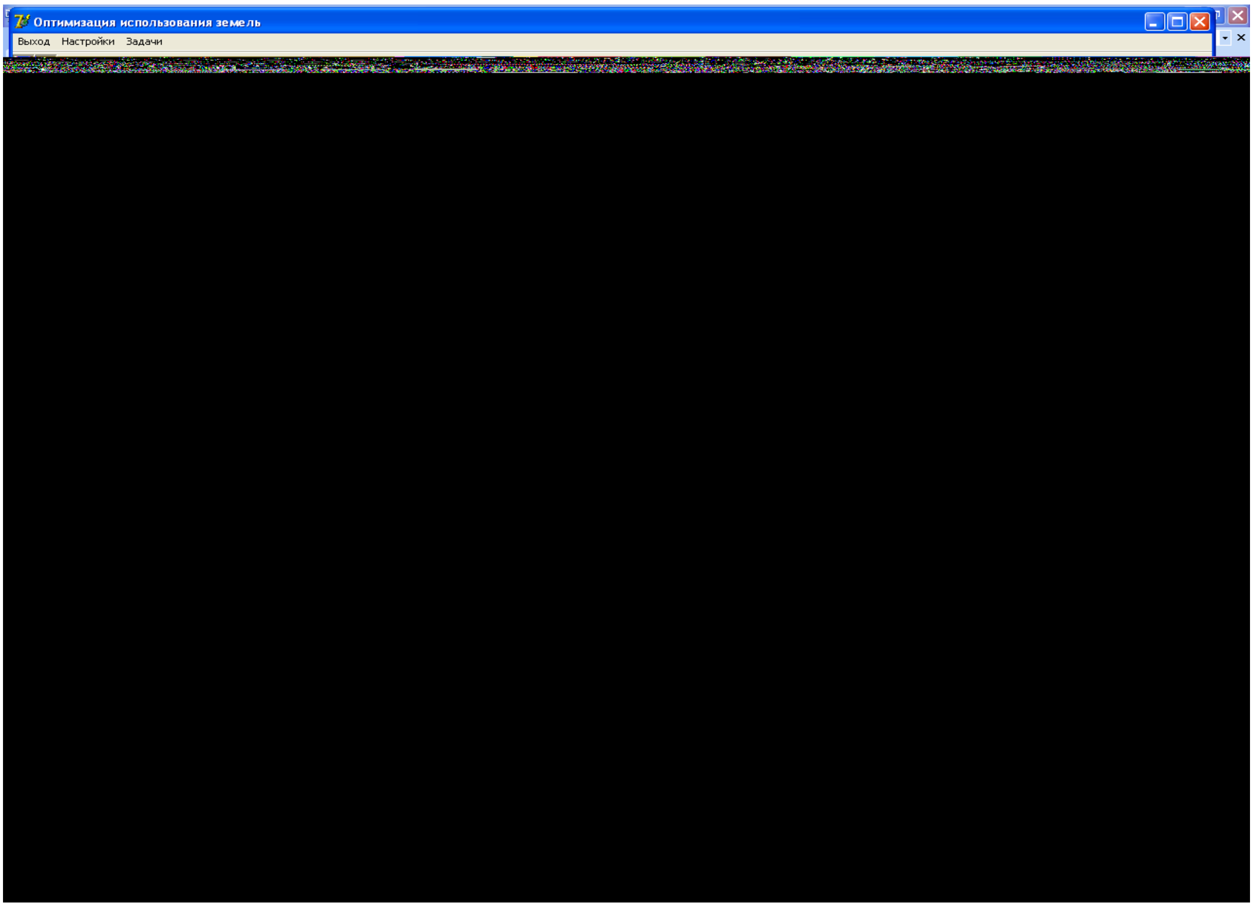


Рисунок 1.6 - Интерфейс ПК «Засуха»

Помимо этого программное обеспечение позволяет исходные многолетние ряды урожайности зерновых отображать в виде графиков их динамики за исследуемый период по заданному району.

Применение программного комплекса дает возможность оценивать засушливые события и их значения. На основании методики оценки изменчивости засухи как природного события для неоднородных природно-климатических территорий из многолетнего ряда значений зерновых культур формируются ряды событий и годы, в котором они наблюдались. По выделенным годам определяются наиболее существенные природные факторы, оказывающее влияние на засуху. Вместе с тем применение многофакторных моделей и алгоритма имитационного моделирования оценки очень сильных засух и определяющих их факторов позволяет моделировать урожайность зерновых культур.

Отличительной особенностью и достоинством разработанного программного комплекса является возможность его применения при решении задач математического программирования для планирования аграрного производства в условиях проявления одного или нескольких экстремальных природных явлений. Значения и параметры, используемые в задачах оптимизации, вычисляются с применением методов, алгоритмов и методик внутри программного комплекса, а затем экспортируются в приложение MS Excel. В дополнение к этому реализованы алгоритмы имитационного моделирования очень сильных засух с учетом и без учета автокорреляционных связей.

Таким образом, программный комплекс позволяет оценивать статистические параметры многолетних рядов урожайности, выделять засушливые годы на основании критерия перехода значения в событие, моделировать засуху с помощью вероятностных, имитационных и многофакторных моделей, определять различные стороны влияния природных стихий на агропромышленное производство, оптимизировать производственные процессы с учетом одного или нескольких природных событий.

1.2.3 Информационная система моделирования природных событий

Информационная система предназначена для предоставления полной и систематизированной информации по различным аспектам экстремальных

природных явлений с одновременным раскрытием (пояснением) методики выбора приемлемых сценариев развития.

Основные функции проектируемой системы:

- расчет вероятности появления событий;
- прогнозирование тенденций появления событий;
- предоставление информации для моделирования производственных процессов с учетом экстремальных природных явлений;
- восстановление данных за предыдущие периоды и др.

При проектировании системы использовался структурно-ориентированный подход. Разработанная информационная система выполняет функции реконструкции, моделирования и прогнозирования характеристик экстремальных природных явлений. Она включает в себя базу данных с историко-архивными сведениями и модули оценки, восстановления и прогнозирования комплекса экстремальных характеристик.

Основой системы является гидрометеорологическая реляционная база данных с дополнительными элементами пользовательского сервиса. Система представляет собой развитый инструментарий количественного анализа данных как для специалистов в области гидрометеорологии и промышленности, так и для широкого круга пользователей, использующих прикладной статистический анализ в деятельности, связанной с природными явлениями.

Информационная система моделирования природных событий состоит из следующих подсистем:

- модуль оценки событий экстремальных природных явлений;
- модуль прогнозирования экстремальных природных явлений;
- модуль восстановления данных и обработки исторических свидетельств по природным явлениям.

Модуль оценки событий экстремальных природных явлений позволяет определить закономерности изменчивости многолетних рядов характеристик.

На этой основе подбираются адекватные статистические модели. Модуль прогнозирования экстремальных характеристик связан с предшествующим модулем, поскольку предсказание связано с выбранной моделью, учитывающей особенности рассматриваемых временных последовательностей. Естественно, что система содержит подходы, методы и

ранее установленные закономерности, способствующие получению тенденций об изменчивости комплекса экстремальных характеристик. При этом используется несколько подходов к решению одной задачи, что имеет

большое значение в условиях неопределенности информации.

Модуль реконструкции данных основан на использовании разработанного справочника об историко-архивных свидетельствах, что способствует расширению информации об экстремальных природных явлениях как во времени, так и в пространстве. Модуль позволяет восстанавливать факты, события и значения исторического прошлого климата.

Функциональная модель информационной системы представлена на рисунке 1.7. Основной функцией рассматриваемой ИС является «Обработка информации об экстремальных природных явлениях».

Рисунок 1.7 - Функциональная модель информационной системы

Управляющей информацией в ИС являются «Виды природных явлений», «Подходы, методы и алгоритмы восстановления», «Подходы, методы оценки событий» и «Подходы и методы прогнозирования».

Механизмы, поддерживающие выполнение операций, представлены в виде «Компьютера» и «Пользователя». В качестве исходной информации имеются «Многолетние ряды экстремальных значений природных характеристик», «Исторические свидетельства об экстремальных природных явлениях» и «Запрос». Выходная информация - «Обработанные исторические свидетельства», «Восстановленные данные», «Прогноз характеристик экстремальных явлений», «Запрашиваемая информация» и «Комплексное определение изменчивости событий».

В разработанной информационной системе обработке поддаются многолетние ряды экстремальных значений природных характеристик и исторические свидетельства об экстремальных явлениях. Этот процесс основывается на различных алгоритмах и методах оценки, восстановления и

прогнозирования и осуществляется пользователем по средствам компьютера. В результате можно получать обработанные исторические свидетельства, восстановленные данные по экстремальным явлениям и прогнозы характеристик.

После декомпозиции основной функции (рисунок 8.8) получены следующие подфункции: «Систематизация исторических свидетельств», «Анализ количественной информации» и «Оценка, восстановление и прогноз».

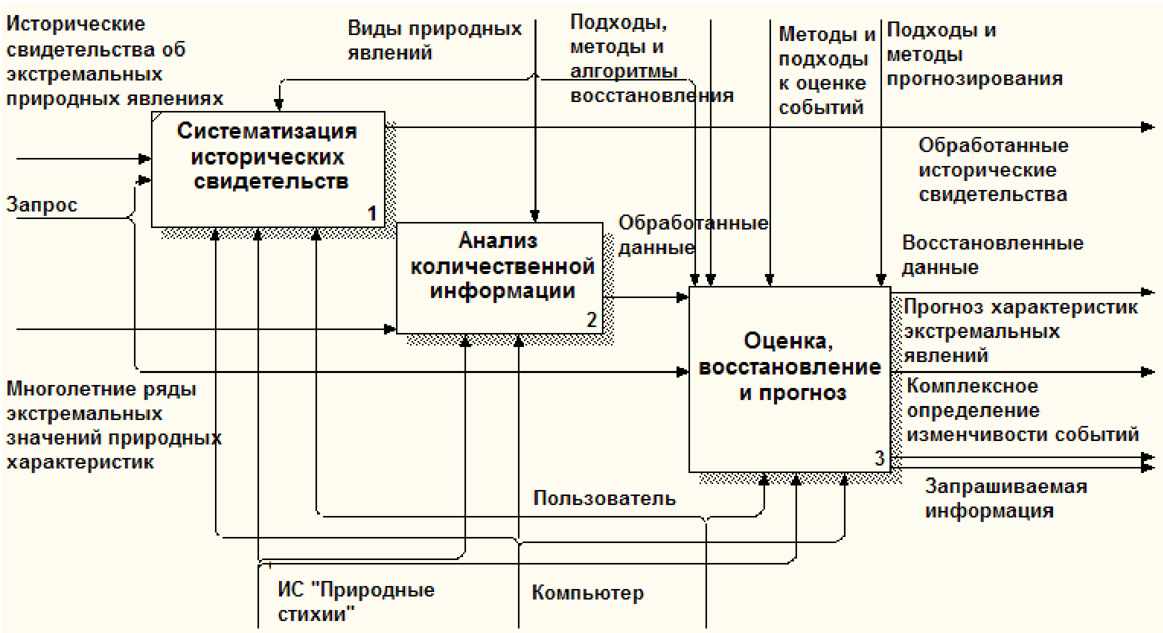


Рисунок 1.8 - Декомпозиция основной функции

Для реализации базы данных была выбрана архитектура клиент-сервер. В качестве сервера выступает реляционная система управления базами данных Firebird. Поскольку СУБД Firebird может быть установлена как на выделенный сервер, так и на рабочую станцию, она была установлена непосредственно на рабочей станции. При реализации базы данных была разработана функция экспорта данных в различные приложения (Microsoft Excel, Word, Statistica и т.п.). Для экспорта данных в Microsoft Excel применена технология COM. Excel предоставляет возможности проведения различных статистических расчетов, графические инструменты и язык программирования макросов VBA. Таким образом, возможность экспорта данных в Microsoft Excel существенно расширяет возможности реализованной системы.

В качестве клиента разработано программное приложение (информационная система «Природные стихии») с ресурсами из базы данных через SQL-запросы к СУБД. Информация, полученная от СУБД, используется для отображения результатов пользователю. Для реализации приложения-клиента, предоставляющего пользователю интерфейс для доступа к данным, была использована интегрированная среда разработки программного обеспечения Borland Delphi 7. Клиентская часть состоит из средств загрузки, выгрузки и мониторинга базы данных и программных инструментов обработки и анализа данных, реализованных в среде Delphi.

Для удобного доступа к функциям системы интерфейс ИС (рисунок 1.9) состоит из следующего меню.

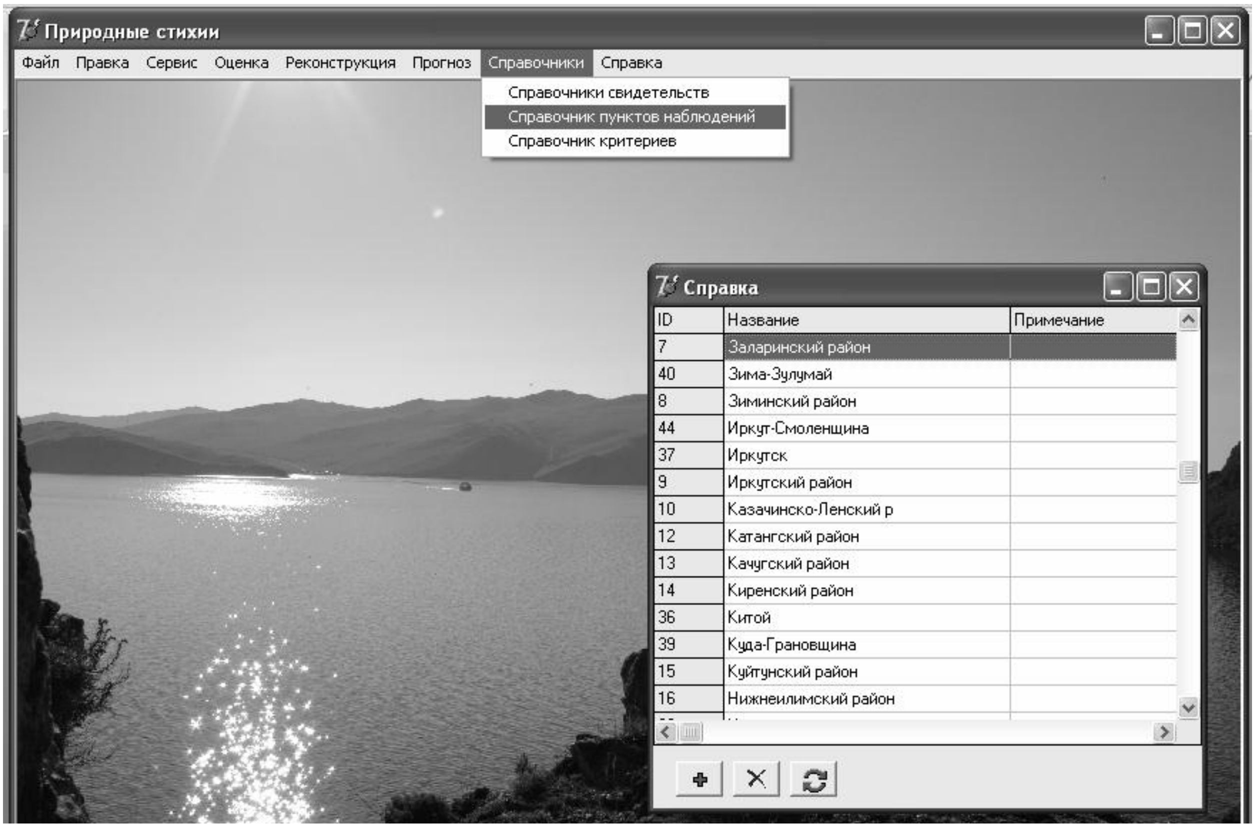


Рисунок 1.9 - Интерфейс информационной системы

«Файл» – открытие базы данных, печать таблиц, выход из программы.

«Правка» - копирование, вырезание, удаление, поиск данных.

«Сервис» - экспорт/импорт данных в другие системы (MS Excel, MS Word, Statistica, Панорама и др.).

«Оценка» - выделение событий, распределение событий по циклам солнечной активности, вероятность распределения событий и оценка потока событий.

«Реконструкция» - восстановление данных об экстремальных природных событиях.

«Прогноз» - прогнозирование экстремальных природных явлений.

«Справочники» - справочники: исторических свидетельств о явлениях, пунктов наблюдений и критериев.

«Справка» - меню справки.

Для эффективного просмотра и редактирования таблиц обеспечен быстрый доступ к таблицам, а также удобное переключение между таблицами. Доступ к таблицам базы данных организован с использованием вкладок. Каждая вкладка содержит данные по конкретному природному явлению.

Практически все наборы данных доступны для редактирования. Перейти к редактированию можно через меню, нажав соответствующую кнопку, или сделав двойной щелчок мышью на нужной записи.

1.2.4 Программный комплекс оптимизации использования земельных ресурсов

Программный комплекс, позволяет получать различные варианты оптимизации использования земельных ресурсов для оценки производства растениеводческой и животноводческой продукции в регионе. Он основан на методике определения входной информации для моделирования оптимального использования земельных ресурсов региона, модифицированных формулах определения требуемой площади для обеспечения человека продовольственной продукцией, разработанных прикладных задачах математического программирования.

Программный комплекс решает задачи условной и безусловной оптимизации использования земель для обеспечения человека собственными продуктами в зависимости от параметров сельскохозяйственного процесса.

Основной функцией рассматриваемого программного комплекса является «Моделирование использования земельных ресурсов» по разработанной методике определения входной информации на основе данных о нормах питания и потенциале агропромышленного комплекса (рисунок 1.10).

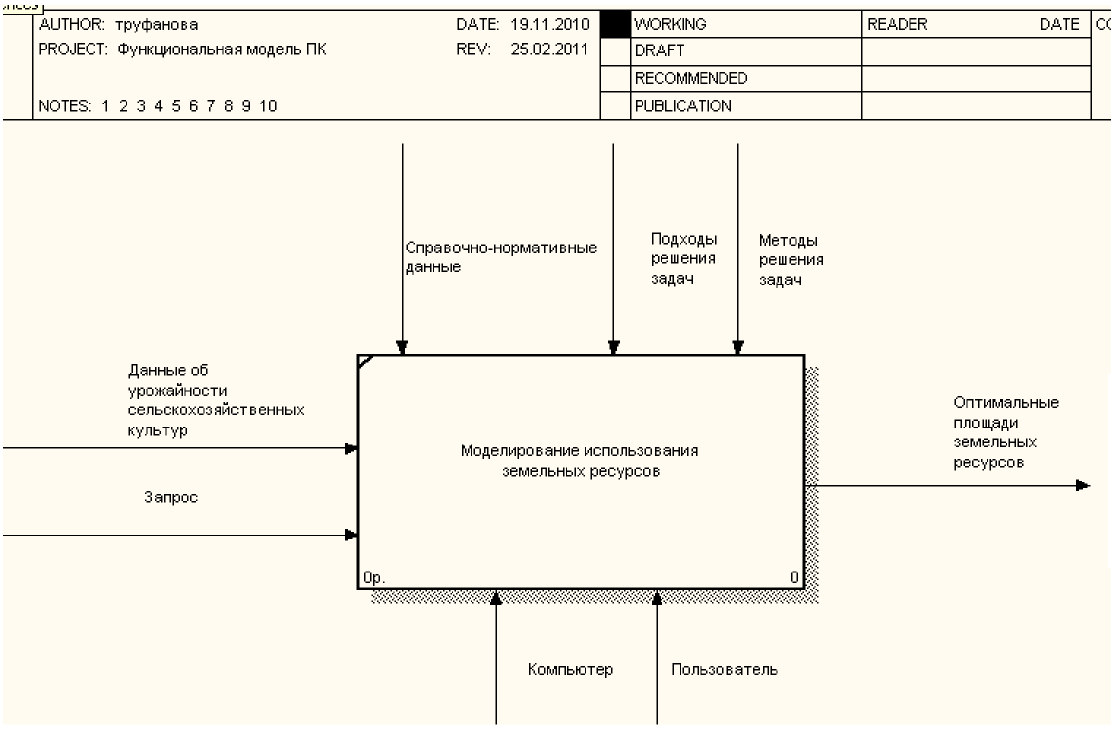


Рисунок 1.10 - Функциональная модель программного комплекса

Управляющей информацией в программном комплексе являются «Подходы решения задачи», «Методы решения задачи», «Справочно-нормативные данные». Применяются подходы условной и безусловной оптимизации использования земельных ресурсов. Кроме этого, приводятся методы теории вероятности, статистики и методы имитационного моделирования. Механизмы, поддерживающие выполнение операций, представлены в виде «Компьютера» и «Пользователя». В качестве исходной информации используются «Данные об урожайности сельскохозяйственных культур» и «Запрос». Урожайности сельскохозяйственных культур представляют собой многолетние данные о различных видах культур на разных территориях области. Нормативные данные – это справочная информация по нормам питания, о рационе кормления животных, коэффициенте выхода продукции с одной головы, структуре стада. Запрос подразумевает обмен информацией от других информационных систем. Результатом функциональной модели является «Оптимальные площади земельных ресурсов». Другими словами, с помощью программно комплекса можно получать оптимальные площади.

Программный комплекс состоит из двух частей: базы данных и расчетного модуля.

База данных содержит справочную информацию о нормах питания, рационе кормления животных, коэффициенте, определяющем отношение валового производства к выходу товарной продукции. В нее включены данные об использовании той или иной территориальной единицы: регион, агроклиматическая зона, муниципальное образование, сельскохозяйственный кластер, хозяйство.

База данных включает в себя вкладыш «Статистика», которая хранит данные об исходных рядах урожайности зерновых, картофеля, овощей и кормовых культур для различных территорий региона за многолетний период 1990-2009 гг. В базу данных введены исходные ряды урожайности зерновых культур (пшеница, овес, рожь) по Иркутской области. Кроме зерновых культур сюда включена информация по картофелю и овощным культурам (морковь, капуста, свекла и другие). Что касается кормовых культур, то в базу данных введены сведения об урожайности многолетних трав на сено, силос, сенаж, корнеплоды. В дополнение к этому база данных содержит сведения об урожайности сельскохозяйственных культур различных категорий хозяйств: сельскохозяйственные организации, крестьянские (фермерские) и личные подсобные хозяйства.

С помощью вкладыша «Изменчивость урожайности», возможно корректировать и пополнять базу данных. Помимо региональных сведений база данных заполнена информацией об урожайности зерновых, картофеля, овощей и кормовым культурам для разных категорий хозяйств по муниципальным образованиям, агроклиматическим зонам и сельскохозяйственным кластерам. База данных составляет 12 Мб и постоянно пополняется информацией из отчетов хозяйств.

База данных Database Desktop создана с использованием программной среды Delphi 7. Одно из главных преимуществ Delphi состоит в том, что данная среда поддерживает технологию RAD. Среди других преимуществ Delphi можно выделить объектно-ориентированный язык программирования Object Pascal и библиотеку компонентов VCL. VCL предоставляет большое количество готовых к использованию компонентов для решения всех поставленных задач, например, таких как реализация интерфейса пользователя, работа с базами данных, взаимодействие с операционной системой, решение задач, связанных с сетевым взаимодействием компонентов приложения и т.д. Предоставляемые Delphi средства обеспечивают создание и ведение локальных и клиент-серверных баз данных, а также разработку приложений для работы практически с любыми базами данных.

Интерфейс программного комплекса (рисунок 1.11) содержит три пункта меню (задачи, настройки, выход).

Первый из них «Задачи» включает в себя пункты решения условной и безусловной оптимизации использования земель: «Задача с неопределенными параметрами», «Задача с вероятностными параметрами», «Задача с детерминированными параметрами», «Задача со взаимозависящими параметрами» и «Задача математического программирования».

Второй пункт «Настройки» содержит в себе команды, позволяющие заполнять базу данных, дополнять новыми записями и удалять ненужную информацию.

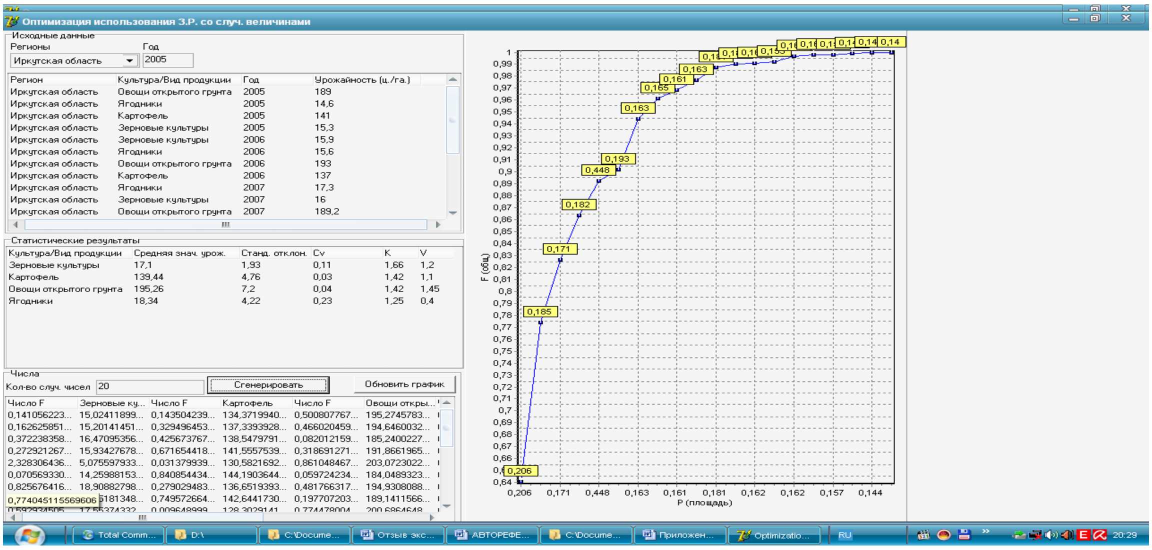


Рисунок 1.11 – Окно программного комплекса

В третьем пункте «Выход» можно выйти из программы.

В программном комплексе реализованы следующие методы обработки информации. Во-первых, с помощью метода моментов оцениваются статистические параметры многолетних рядов урожайности сельскохозяйственных культур: среднее значение (X_{cp}), коэффициент вариации (C_v), коэффициент асимметрии (C_s), отношение (C_s/C_v). Кроме этого, определяются стандартные ошибки перечисленных статистических параметров.

Во-вторых, согласно автокорреляционному анализу оценивается значимость коэффициентов автокорреляции и, прежде всего, первого значения - R_1. При этом вычисляются стандартные ошибки коэффициентов автокорреляции. При высоком коэффициенте автокорреляции, превышающем значение 0,70, пользователь может получить авторегрессионное уравнение при прогнозировании использования земельных ресурсов.

В-третьих, исходные ряды параметров подвергаются обработке для оценки наличия в них значимых тенденций или трендов. Программный комплекс позволяет строить как линейные, так и нелинейные тренды. При наличии значимых трендов предполагается определение прогностических значений. Для прогнозирования урожайности добавлена функция по расчету уравнения тренда, построения графика и линии тренда (рис. 1.11).

В-четвертых, с помощью корреляционно-регрессионного анализа можно вывести зависимости между разными культурами, что используется при моделировании площади земельных ресурсов.

В-пятых, для непродолжительных рядов сельскохозяйственных культур программой предусмотрено определение верхних и нижних оценок. Если при этом урожайности сельскохозяйственных культур являются независимыми переменными, тогда задача состоит в нахождении минимального и максимального значений площади земельных ресурсов для обеспечения одного жителя собственными продуктами питания на заданных интервалах независимых аргументов.

Программный комплекс позволяет выбрать модель определения площади земельных ресурсов для обеспечения населения продуктами питания в зависимости от территории и статистических свойств исходных рядов. Кроме этого, в программном комплексе реализованы четыре алгоритма имитационного моделирования определения площади земельных ресурсов.

Кроме того, программный комплекс решает задачи условной оптимизации использования земельных ресурсов. Для получения результатов с помощью задач математического программирования используется база данных, разработанная для решения задач безусловной оптимизации. Между тем программный комплекс основан на обращении к поиску решений в приложениях Excel для реализации решения задачи по оптимизации использования площадей сельскохозяйственных угодий.

1.2.5 Информационная система прогнозирования сроков технологических операций

Информационная система предназначена для составления прогнозов дат технологических операций на основе многолетних климатических данных и фактических сведениях о погоде. Его предметной областью является прогнозирование сроков агротехнологических операций на основе корреляционно-регрессионного анализа.

Реализация ИС основывается на специальном информационном обеспечении, представленном в виде базы данных с включением агрометеорологических сведений за многолетний период и фактических суточных данных о погоде; алгоритмическом обеспечении – комплексе алгоритмов прогнозирования сроков агротехнологических операций на основе факторных моделей и математическом обеспечении – методов корреляционно-регрессионного анализа, вероятностного анализа, имитационного моделирования и других.

Основной функцией информационной системы является функция «Прогнозирование сроков технологических операций возделывания сельскохозяйственных культур» (рис. 1.12).

Реализация алгоритмов определения рекомендуемых сроков технологических операций по характеристикам тепла и увлажнения в информационной системе осуществляется совместно с базой данных, содержащей агрометеорологические сведения необходимые для реализации этих алгоритмов. Для этого спроектирована база данных, которая содержит агроклиматические характеристики, влияющие на возделывание культур.

В базе данных помимо основных сведений о предприятии, технике, персонале, технологии возделывания культур и других сведений, учитываются агроклиматические факторы, влияющие на возделывание культур.

Рисунок 1.12 – Функциональная модель информационной системы

Для информационной системы была составлена модель данных на логическом уровне (рис. 1.13). Модель данных состоит из 12 сущностей. Основные сущности это: «Хозяйство», «Культура», «Агроклиматическая характеристика» и «Операция». Сущность «Хозяйство» содержит основные сведения о сельскохозяйственном предприятии. С ней непосредственно связаны сущности «Поле» и «Возделывание культур». Перечень сельскохозяйственных культур, возделывающийся в хозяйстве «Возделывание культур» и «Агроклиматическая характеристика» соответственно.

Для реализации базы данных использована СУБД Microsoft SQL Server 2005 Express Edition, обладающая высокой производительностью, надежностью и коммерческой независимостью.

Математическое обеспечение ИС представлено в виде методов автокорреляционного анализа, регрессионного анализа и метода статистических испытаний. С помощью этих методов осуществляется моделирование сроков выполнения операций и факторов влияющих на них. Методы регрессионного анализа позволяют получить уравнения зависимости сроков возделывания сельскохозяйственных культур от факторов, влияющих на эти сроки. Используя методы статистических испытаний можно определить законы распределения, которым подчиняются параметры технологических операций, и смоделировать их для дальнейшей оценки их вариации.

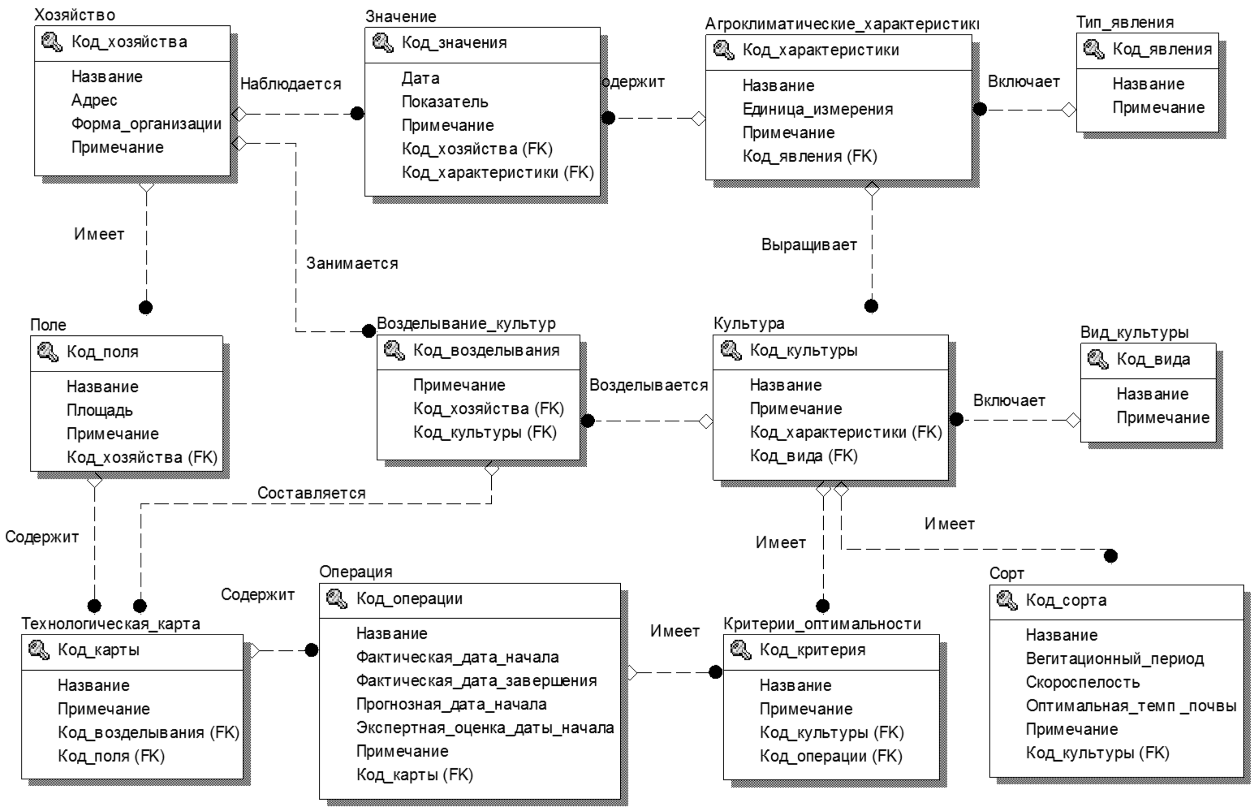


Рисунок 1.13 – Логический уровень модели данных ИС прогнозирования сроков агротехнологических операций

На основе разработанной базы данных, алгоритмического и математического обеспечения методики определения сроков возделывания сельскохозяйственных культур, создана информационная система прогнозирования сроков технологических операций, схема функционирования которой приведена на рисунке 1.14.

Для создания пользовательского интерфейса проектируемой системы использовалась среда разработки Borland Delphi 7.

Главное окно информационной системы состоит из следующих меню: «Файл»; «Культуры»; «Предпосевные операции»; «Посевные операции»; «Уборочные операции»; «База данных»; «Справка» (рисунок 1.15).

Меню «Файл» содержит основные пункты: «Открыть», «Сохранить» и «Выход», предназначенные для открытия и сохранения баз данных и для выхода из системы.

Меню «Культуры» позволяет выбрать тип культур для дальнейшей работы в системе.

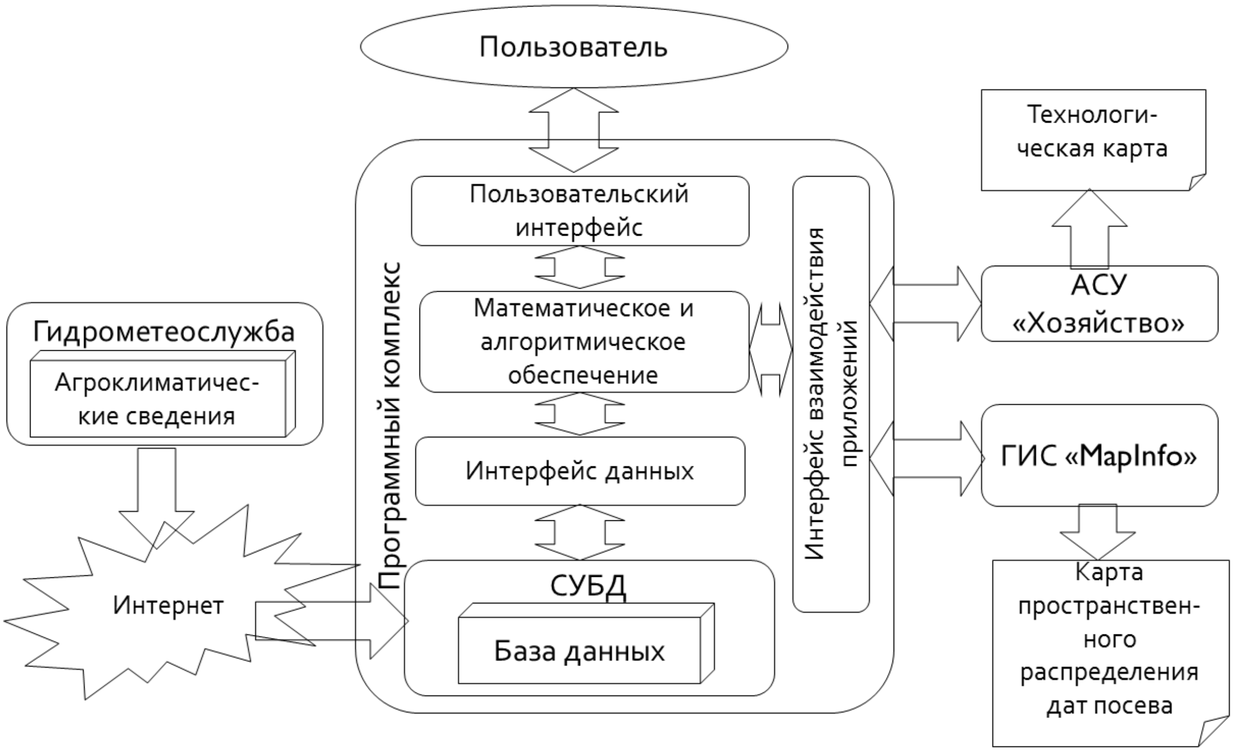


Рисунок 1.14 – Схема функционирования программного комплекса прогнозирования сроков посева

Меню «Предпосевные операции», «Посевные операции» и «Уборочные операции» содержат инструменты для расчета и вероятностной оценки рекомендуемых дат начала операций.

Меню «База данных» предназначена для редактирования текущей базы данных и содержит пункты соответствующие основным ее сущностям.

Меню справка содержит разделы: «Помощь» и «О программе».

Рисунок 1.15 – Интерфейс информационной системы прогнозирования сроков технологических операций

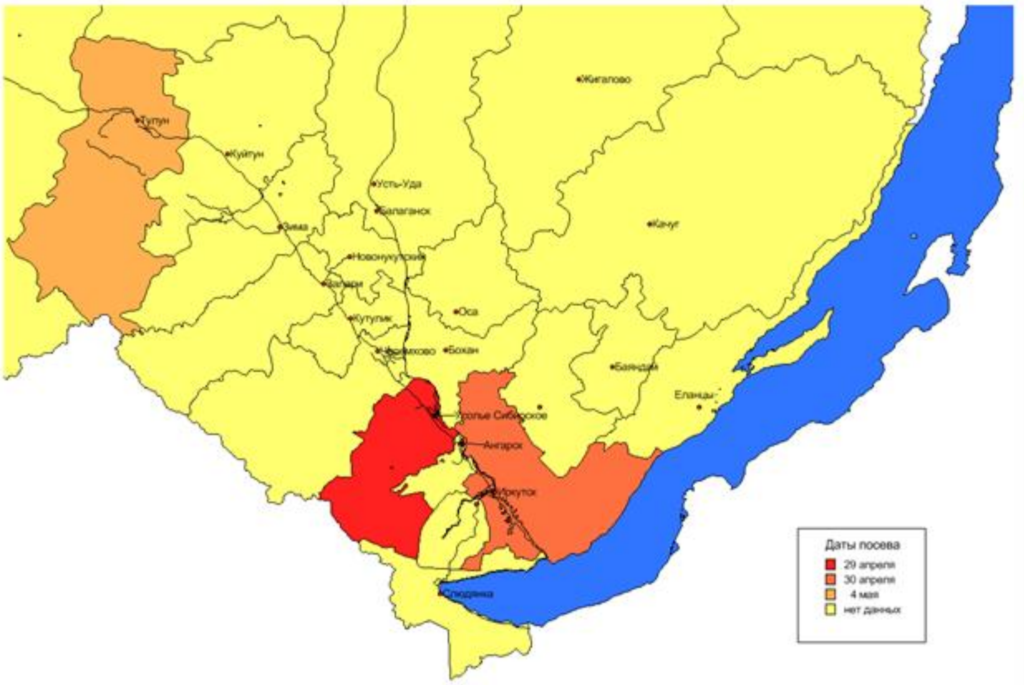


Рисунок 1.16 – Пример карты пространственного распределения дат посева зерновых культур по муниципальным районам созданный в MapInfo

Разработанная ИС передает спрогнозированные даты технологических операций в АСУ «Хозяйство» (рисунок 1.14). Полученные даты используются для составления технологических карт. Кроме того, полученные даты начала посевов применяться для составления карт пространственного распределения этих дат. Для этого используется ГИС-система MapInfo (рисунок 1.16). При этом возможны два варианта распределения дат: по муниципальным районам, когда по каждому району используется одна дата и по участкам, полученным в ходе интерполяции точечных данных по пунктам наблюдений.

1.2.6 Программный комплекс моделирования влияния природных и техногенных событий на планирование

Авторами разработана информационно-прогностическая система ГИПСАР, содержащая базу данных климатических временных рядов разной периодичности, компоненты статистического анализа данных, методы прогнозирования. В работе предложена информационная система «Природные стихии 1.0» для управления предприятиями народного хозяйства региона в условиях проявления экстремальных природных явлений различного происхождения.

Между тем в приведенных системах не рассматриваются техногенные события, совмещение техногенных и природных событий, изменчивость редких явлений с учетом рассеяния вероятностных параметров для планирования производства сельскохозяйственной продукции в крайне неблагоприятных природно-климатических условиях.

Поэтому в работе предлагается проблемно-ориентированный программный комплекс по решению задач математического программирования для оптимизации производства аграрной продукции с оценкой страховых возмещений в условиях проявления редких природных явлений, последствий техногенных воздействий и совмещений природных и техногенных событий, схема функционирования которого показана на рисунке 1.17.

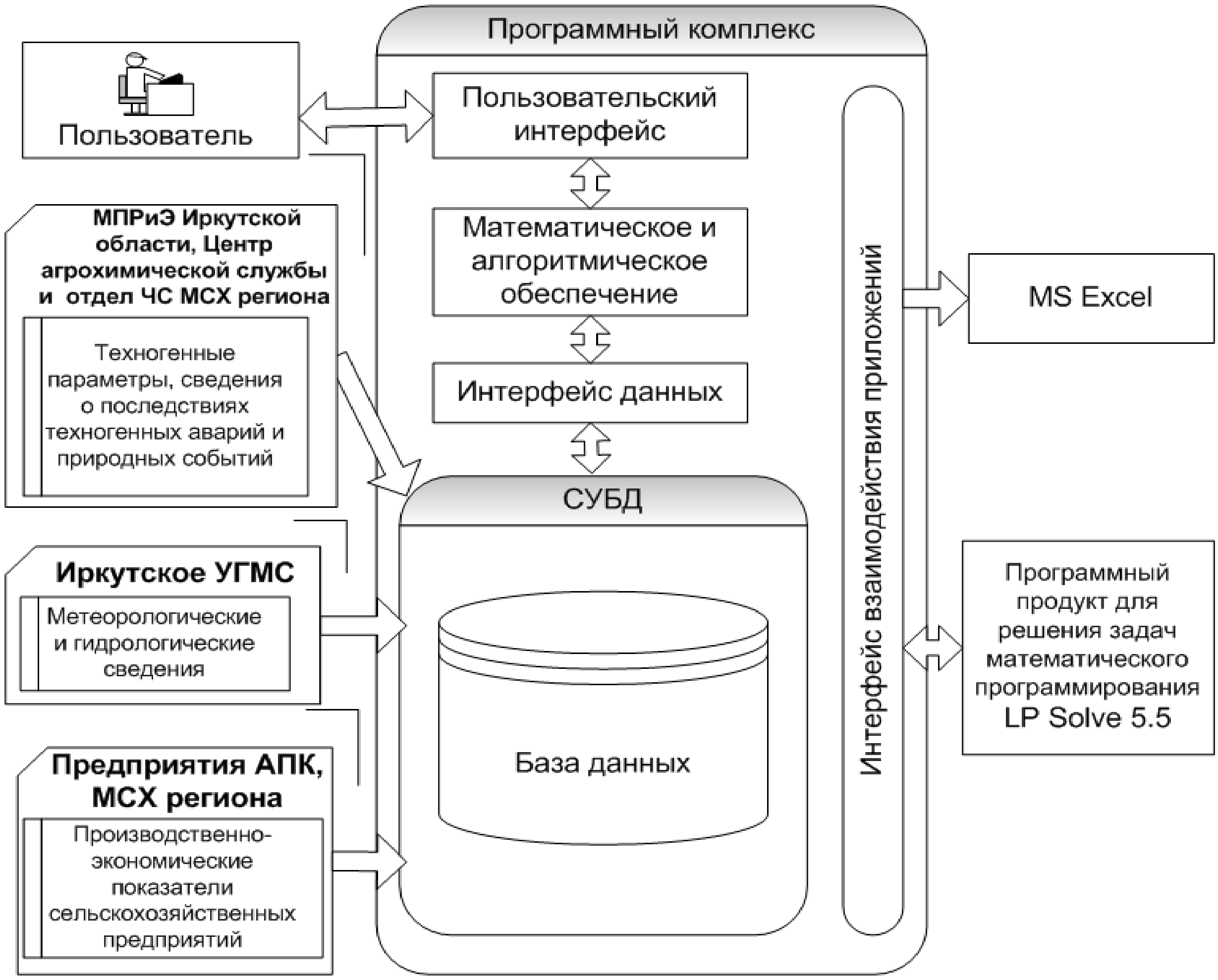


Рисунок 1.17 – **Схема функционирования программного комплекса моделирования влияния природных и техногенных событий на планирование**

Программный комплекс состоит из базы данных, которая пополняется сведениями о техногенных и природных событиях, метеорологическими и гидрологическими данными и производственно-экономическими показателями, математического и алгоритмического обеспечения, интерфейса. Источниками данных являются министерство природных ресурсов и экологии (МПРиЭ), центр агрохимической службы, министерство сельского хозяйства (МСХ), Иркутское управление по гидрометеорологии и мониторингу окружающей среды (Иркутское УГМС), предприятия агропромышленного комплекса (АПК) региона.

Реализация интерфейса программного комплекса и методов математической статистики осуществлялась при помощи интегрированной среды разработки DelphiXE3. База данных реализована в СУБД Microsoft SQL Server 2005 ExpressEdition. Алгоритмическое обеспечение представляет собой разработанные алгоритмы моделирования редких событий, их совмещений и решения задач математического программирования с использованием имитационного моделирования. Для реализации моделей планирования производства продовольственной продукции применен программный продукт LP Solve 5.5. Результаты статистической обработки данных, решений задач математического программирования и сведения из базы данных можно сохранять в виде таблиц в приложении MS Excel.

На рисунке 1.18 приведена функциональная модель проблемно-ориентированного программного комплекса, выполненная в нотации IDEF0. В качестве входных данных программного комплекса использованы природные, техногенные и производственно-экономические параметры. Результатом моделирования является: 1) пространственно-временная оценка редких природных событий и техногенных последствий; 2) оценка серий событий; 3) оптимальные планы производства сельскохозяйственной продукции в условиях проявления природных событий, техногенных последствий и их совмещения.

Рисунок 1.18 – **Функциональная модель программного комплекса моделирования влияния природных и техногенных событий на планирование**

На рисунке 1.19 показана декомпозиция функциональной модели программного комплекса моделирования влияния природных и техногенных событий на планирование производства.

Программное обеспечение структурно подразделяется на два блока. Первый из них посвящен статистической обработке данных: 1) стохастическая оценка редких природных явлений с учетом и без учета исторических свидетельств с использованием методов моментов и приближенно максимального правдоподобия; 2) статистическая оценка потоков событий; 3) оценка связей между числом событий и экстремальными значениями в рамках моделируемых эпох; 4) описание тенденций изменения событий и их серий с помощью различных математических функций; 5) определение зависимостей редких событий от факторов; 6) пространственно-временная оценка событий. При этом для реализации этих функций программного комплекса использованы разные подходы.

Второй блок программного обеспечения позволяет решать задачи математического программирования как общие, так и частные. Для решения задач с интервальными и случайными параметрами использованы разработанные алгоритмы получения оптимальных планов производства сельскохозяйственной продукции с использованием метода статистических испытаний.

Функционирование системы осуществляется на основе методов имитационного моделирования, теории вероятностей и математической статистики и математического программирования с использованием разработанных моделей пространственно-временной оценки природных и техногенных событий. При этом для реализации моделей предложены алгоритмы оценки вероятностей появления редкого события в условиях неопределенности и оптимизации параметров производства сельскохозяйственной продукции с применением имитационного моделирования для задач с интервальными и случайными оценками. В основу предложенных алгоритмов положено два варианта: 1) с учетом моделирования редкого события в пределах периода его повторяемости; 2) согласно условию превышения заданного фактического значения редкого явления. Благодаря разработанным алгоритмам оценивается не только повторяемость события, но и рассеяние вероятности и значения. Причем при решении сформулированных задач математического программирования использован симплекс-метод, поскольку предложенные модели сведены к линейному виду.

База данных реализована в СУБД Microsoft SQL Server 2005 ExpressEdition. Она состоит из сущностей, определенных в пять групп, включающих в себя природные, техногенные и производственно-экономические данные (рисунок 1.20).

Пользователем комплекса может быть экономист агропромышленного предприятия, специалист гидрометеорологической службы, представитель страховой компании, оценивающий риски.

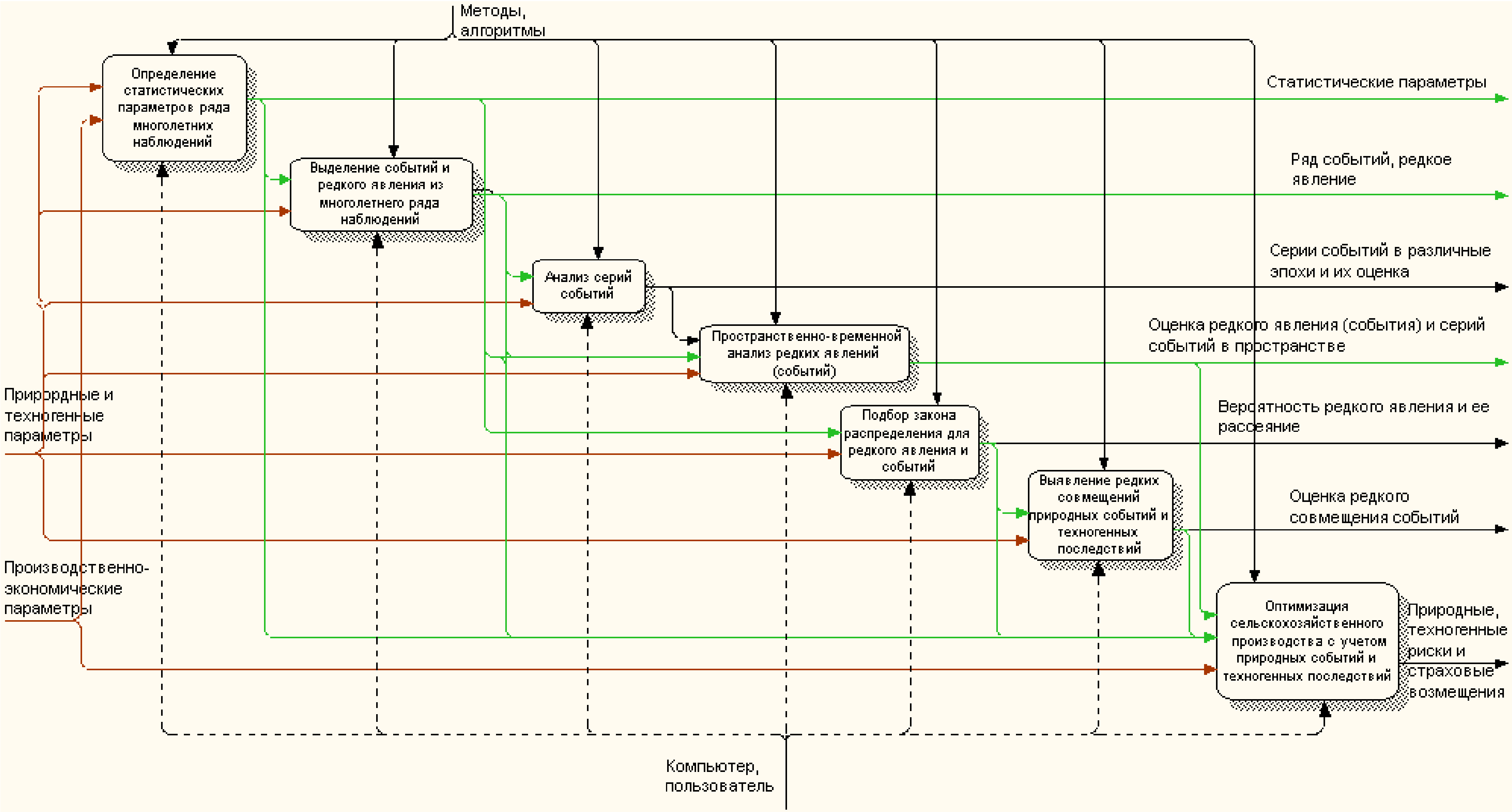


Рисунок 1.19 – **Декомпозиция функциональной модели программного комплекса моделирования влияния природных и техногенных событий на планирование**

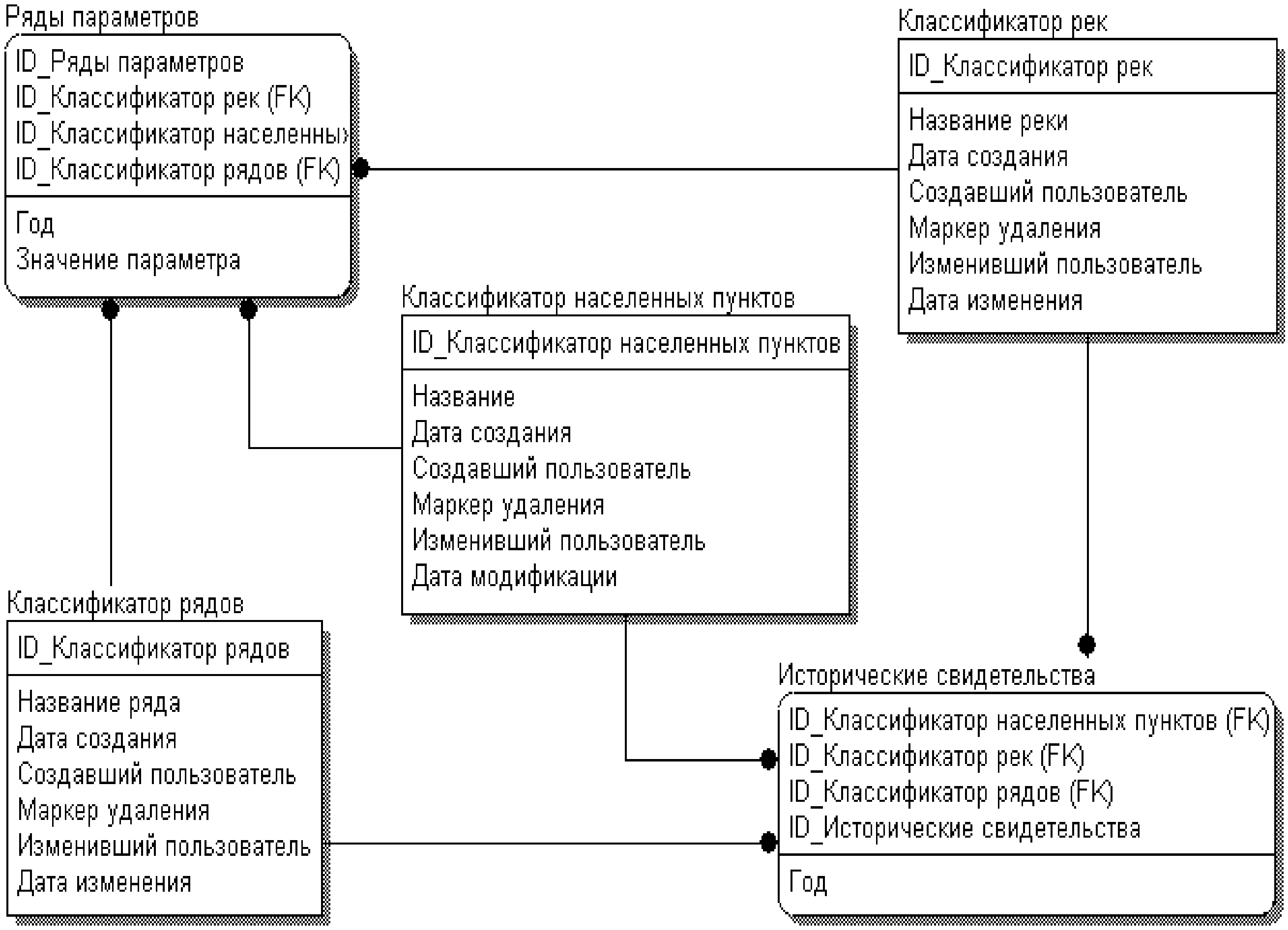


Рисунок 1.20 – **Модель базы данных программного комплекса моделирования влияния природных и техногенных событий на планирование**

Интерфейс программного комплекса состоит из пяти пунктов меню: «Анализ», «Оптимизация», «Исходные данные», «Импортирование», «Классификаторы».

С помощью пункта меню «Анализ» осуществляется статистическая обработка данных с использование метода моментов и приближенно максимального правдоподобия с учетом и без учета историко-архивных свидетельств (рисунок 1.21), выделение из ряда многолетних наблюдений редкого явления и событий, пространственно-временная оценка событий, оценка серий событий в различные эпохи с построением регрессионных зависимостей, подбор закона распределения случайной величины, выделение редкого совмещения событий.

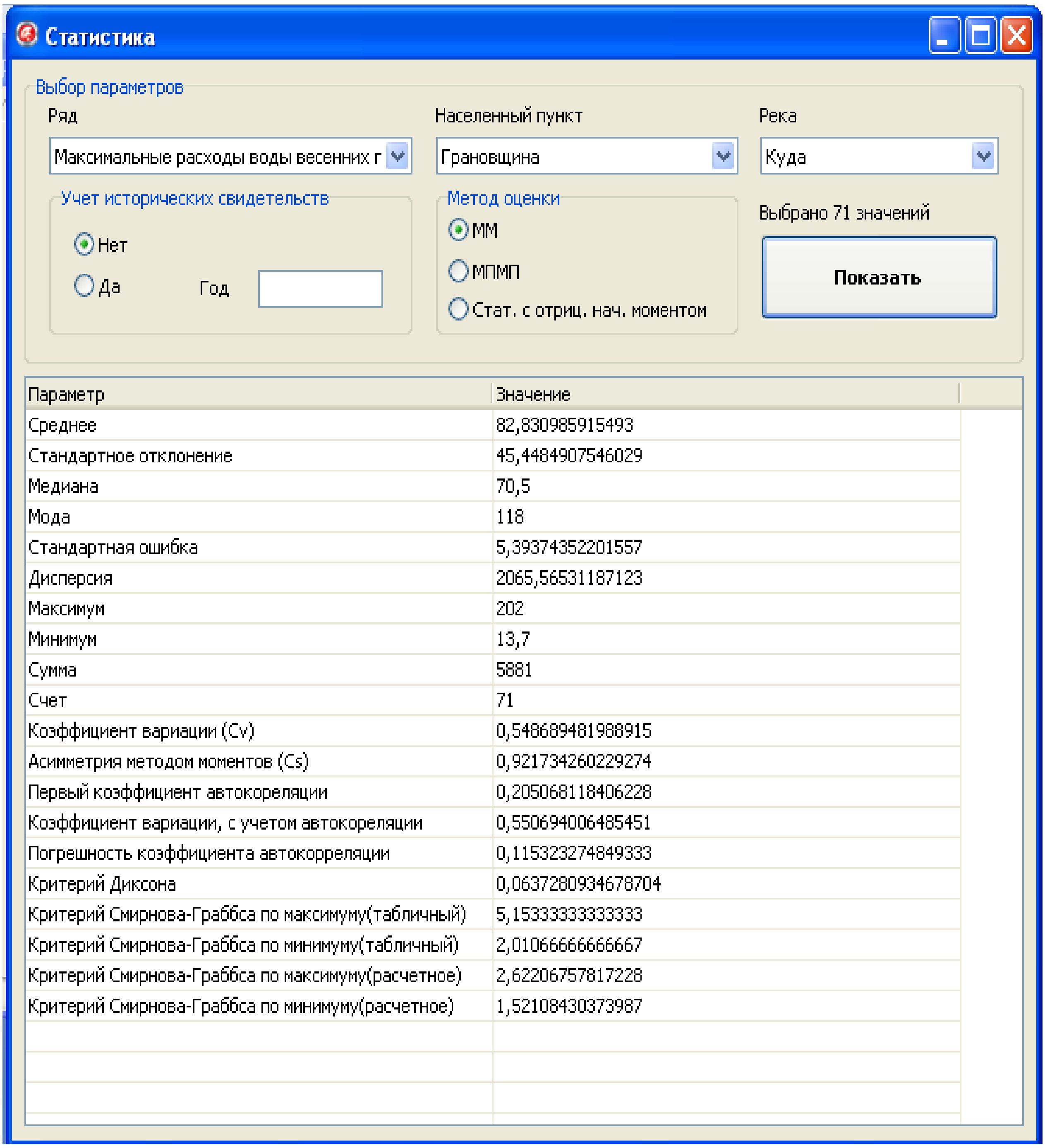


Рисунок 1.21 – **Окно выбора данных и расчета статистических параметров для многолетнего гидрологического ряда наблюдений**

Согласно пункту меню «Оптимизация» решаются задачи математического программирования для получения оптимальных планов производства продовольственной продукции с учетом влияния природных событий и техногенных последствий, по оценкам параметров, полученных с помощью меню «Анализ» (рисунок 1.22).

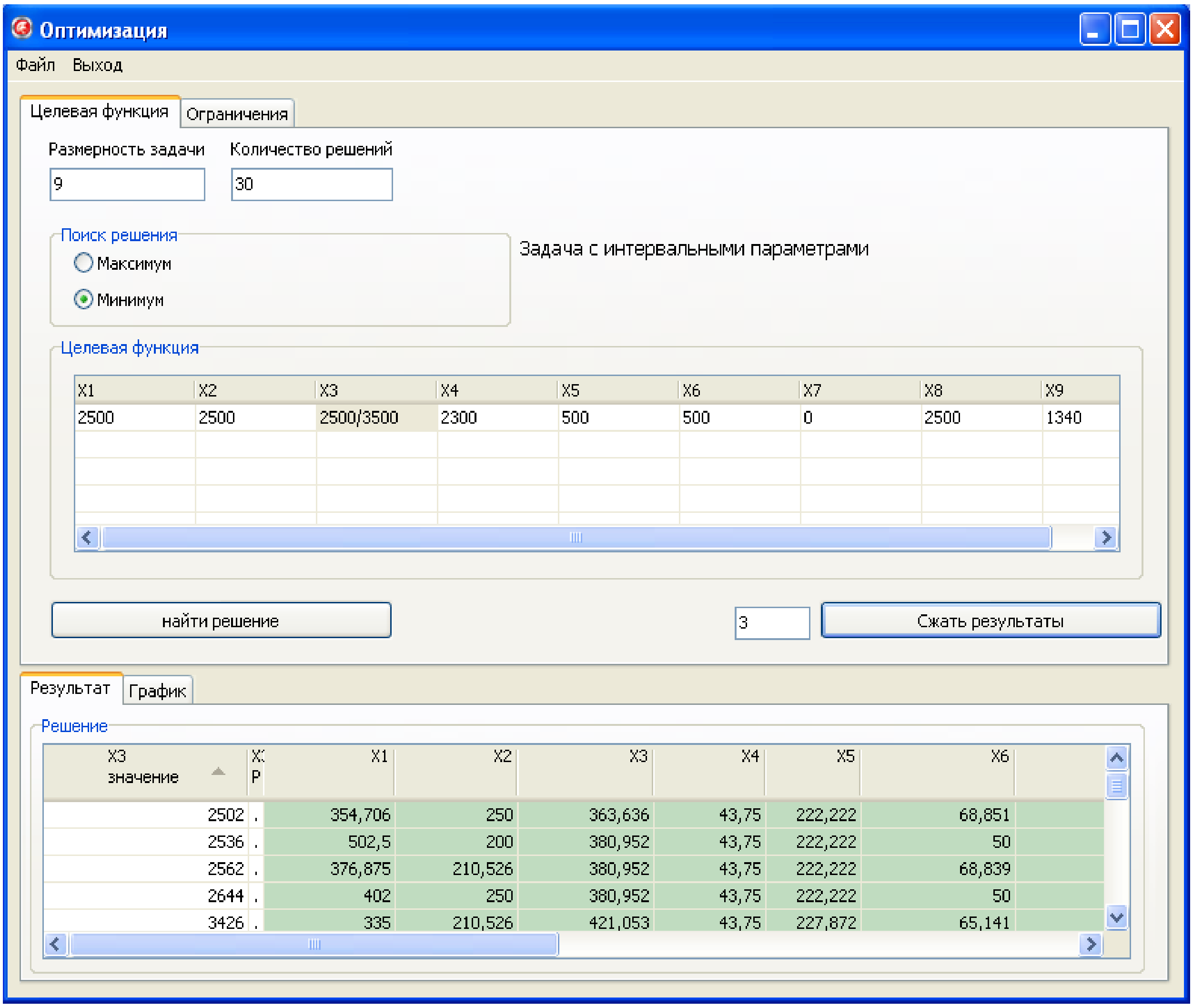


Рисунок 1.22 – **Окно выбора параметров, внесения данных в модель и вывода результатов решения задачи определения оптимальных планов производства продовольственной продукции с учетом засухи**

С помощью пункта меню «Исходные данные» осуществляется дополнение, обновление и удаление сведений в базе данных; просмотр, загрузка их для произведения расчетов (рисунок 1.23).

Пункт меню «Импортирование» позволяет перемещать данные из формализованных таблиц приложения MS Excel в базу данных посредством пользовательского интерфейса программного комплекса.

Для перечня сущностей базы данных используется пункт меню «Классификаторы».

Для использования программного комплекса необходим компьютер с указанным программным обеспечением. В качестве защиты информации используются пароли для доступа пользователя. База данных может периодически дополняться вручную или автоматизировано с официальных сайтов гидрометеорологической службы и министерства сельского хозяйства региона.

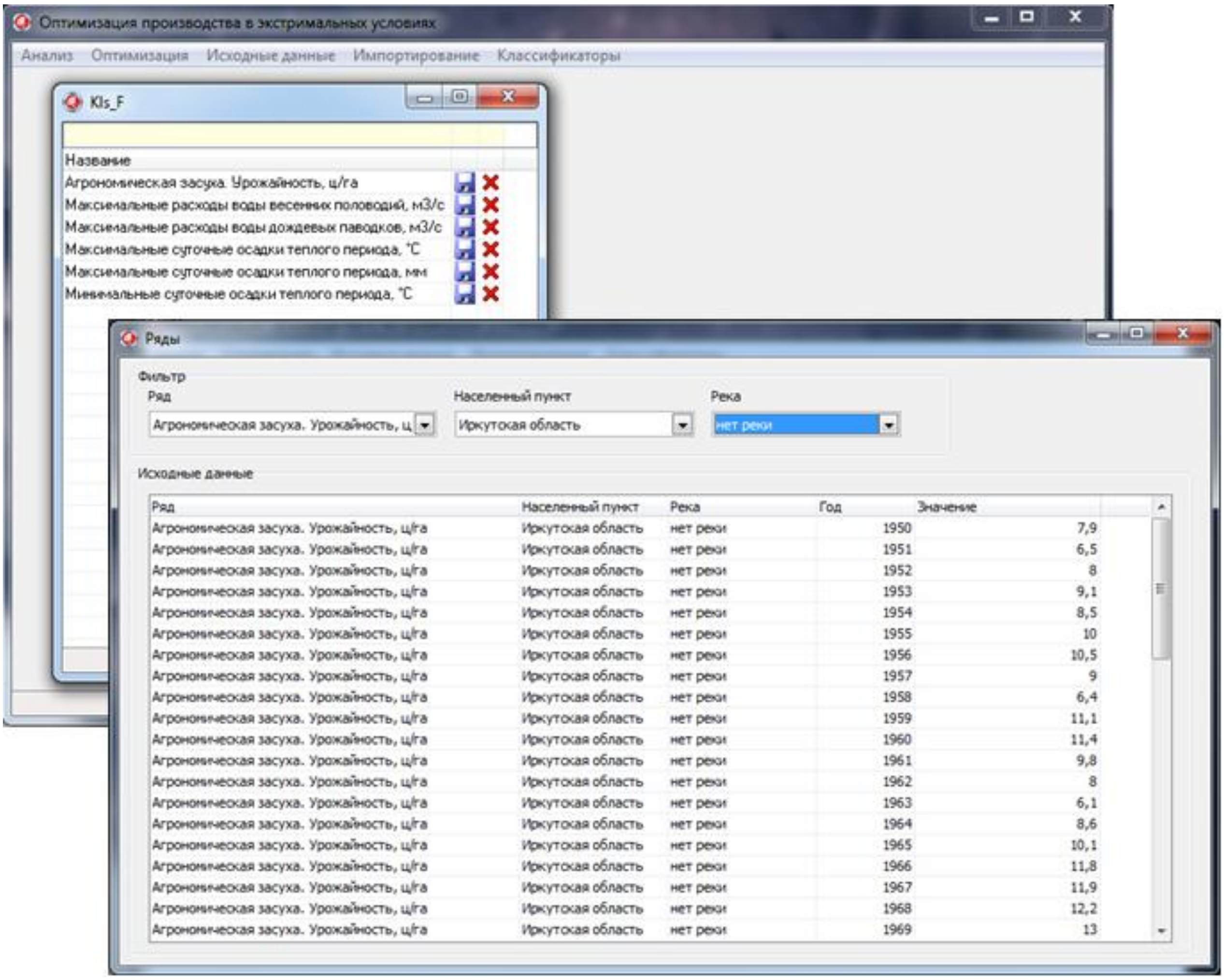


Рисунок 1.23 – **Окна содержимого базы данных параметров многолетних наблюдений и выбора данных для выполнения расчетов**

Некоторые результаты работы программного комплекса моделирования влияния природных событий и техногенных последствий на аграрное производство приведены в таблице 1.1.

Результатом первой задачи математического программирования со случайными параметрами является зависимость ущерба и страховых возмещений от вероятности события, характеризующегося рассеянием максимального расхода воды и соответствующей ему вероятности. Приведен диапазон вероятностей экстремальной гидрологической величины. При этом искомые переменные задачи колеблются на 97-98%.

Во второй задаче показано влияние на оптимальные решения загрязнителей, уменьшающих выход продукции и площади посевов. Результатом являются верхние, нижние и медианные оценки целевой функции в зависимости от разного сочетания интервальных оценок, которые проявляются непредсказуемо. В примере показано, что предприятие может потерять в лучшем случае 0,837 млн. руб., а в худшем – 4,387 млн. руб. При этом максимальные страховые возмещения составят 2,415, а минимальные – 0,652 млн. руб. Колебания искомых переменных достигают 83%.

Таблица 1.1 - **Результаты моделирования параметров аграрного производства с определением природных и техногенных рисков и страховых возмещений для сочетания отраслей в условиях неопределенности с помощью проблемно-ориентированного программного комплекса**

Признак (тип) неопределенности	Вид события	Влияние события на производство	Алгоритм решения	Объект исследования	Ущербы, млн. руб.	Расчетные страховые возмещения, млн. руб.	Сравнение оптимальных планов модели, %
Случайные параметры	Редкий дождевой паводок	Затопление сельскохозяйственных угодий	Первый	ООО «Талинка», Тайшетский район	$D = -112{,}37p + 11{,}34$, R^2 =0,95 p [0,00989; 0,0678]	$У = -141{,}05p + 11{,}8$, R^2 =0,99 p [0,00989; 0,0678]	97-98
Интервальные параметры	Техногенное событие	Изменение себестоимости про-дукции, урожайности сельскохозяйственных культур, сельскохозяйственных угодий	-	ООО «Талинка», Тайшетский район	$D_{min}^{max} = 4{,}387$ $D_{min}^{min} = 0{,}837$ $D_{min}^{med} = 3{,}240$	$У_{max}^{max} = 2{,}415$ $У_{max}^{min} = 0{,}163$ $У_{max}^{med} = 0{,}652$	77-83
Случайные параметры	Редкое совмещение весеннего половодья и дождевого паводка	Затопление сельскохозяйственных угодий	Первый	ООО «Талинка», Тайшетский район	$D = -119{,}32\zeta + 18{,}84$ $R^2 = 0{,}65$ ζ [0,0138; 0,0891]	$У = -165{,}1\zeta + 26{,}42$ $R^2 = 0{,}75$ ζ [0,0138; 0,0891]	0-89
Интервальные параметры	Засуха и техногенное событие	Изменение урожайности сельскохозяйственных культур, деградация сельскохозяйственных угодий, изменение себестоимости производимой продукции	-	ООО «Академия», Иркутский район	$D_{min}^{max} = 8{,}436$ $D_{min}^{min} = 0{,}499$ $D_{min}^{med} = 5{,}110$	$У_{max}^{max} = 14{,}375$ $У_{max}^{min} = 0{,}052$ $У_{max}^{med} = 8{,}753$	53-90

Третья задача отображает ситуацию влияния редкого совмещения гидрологических событий на потери сельскохозяйственной продукции. Как в первой задаче результатом решения является зависимость ущерба и расчетных страховых возмещений от вероятности совмещения событий для расчетного интервала вероятностей. Здесь максимальное расхождение искомых значений соответствует 89%.

Четвертая модель посвящена определению ущербов от засухи и загрязнения почвы. Результатом моделирования являются верхние и нижние оценки ущербов (8,436 и 0,499 млн. руб.) и страховых возмещений (14,375 и 0,052 млн. руб.) при колебании искомых значений модели в пределах 53-90%.

Помимо перечисленных вариантов решений задач математического программирования в условиях неопределенности программный комплекс позволяет реализовывать и другие модели, связанные с иными редкими природными явлениями, другим совмещением природных и техногенных явлений. Кроме того, можно реализовывать задачи, в которых используются как интервальные, так и случайные параметры.

Таким образом, особенностью программного обеспечения является возможность комплексной обработки событий, оценки редких значений, серий событий, их связей, определение редкого совмещения природных и техногенных событий. Кроме того, полученные разработки в зависимости от особенностей параметров позволяют моделировать различные ситуации производства сельскохозяйственной продукции в условиях неблагоприятной внешней среды на основе предложенных моделей, алгоритмов, информационного и программного обеспечения с определением сумм страховых возмещений.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Развитие информационных технологий и компьютерной техники позволяют по новому взглянуть на возможности использования методов математического программирования для построения и решения сложных задач оптимизации производства сельскохозяйственной продукции в условиях неопределенной информации.

Значительная вариация климатических параметров, неоднородность информации, сложность производственных процессов и их взаимосвязей, влияние экстремальных природных явлений на различные стороны сельскохозяйственной деятельности ориентируют на создание моделей с вероятностными и интервальными параметрами и их сочетанием. В этих случаях задачи имеют множество оптимальных решений, из которых необходимо выбрать наиболее приемлемые для управления или планирования.

Поэтому учебное пособие включает в себя три части: математическое моделирование, численные методы и комплексы программ. В первой части рассматриваются задачи математического программирования: линейные, нелинейные, специальные, с интервальными и вероятностными параметрами.

Для получения результатов при моделировании использованы численные методы решения задач. Приведены разные алгоритмы с широким использованием метода статистических испытаний.

В третьей части собраны разработанные на кафедре информатики и математического моделирования программные комплексы, решающие различные задачи производства сельскохозяйственной продукции в условиях природных и техногенных рисков с использованием экстремальных задач

Таким образом, основное внимание в учебном пособии уделено вопросам математического моделирования, численным методам, связанным с решением задач математического программирования в условиях неопределенности, разработке алгоритмов и концепций построения программных комплексов с определением математического, алгоритмического, информационного и программного обеспечения. Разработка программного комплекса позволяет определить эффективные связи между перечисленным обеспечением.

Подготовленное учебное пособие основано на опыте подготовки прикладных научно-исследовательских работ применительно к сельскому хозяйству и другим народно-хозяйственным отраслям. Конечно, это не означает, что работу нельзя использовать аспирантам других направлений, например, агрономии и агроинженерии.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 Акулич И.Л. Математическое программирование в примерах и задачах. Учеб. пособие. – 2-е изд., испр. И доп. – М.: Высш. Шк., 1993. – 336 с.

2 Асалханов П.Г. Прогнозирование и планирование агротехнологических операций для природно-климатических зон региона /П.Г. Асалханов, Я.М. Иваньо. – Иркутск: Изд-во ИрГСХА, 2014. – 164 с.

3 Афанасьев, В.Н. Анализ временных рядов и прогнозирование: учеб. / В. Н. Афанасьев, М. М. Юзбашев. – М. : Финансы и статистика, 2001. – С. 11-17.

4 Барсукова М.Н. Оптимизационные модели планирования производства стабильных сельскохозяйственных предприятий /М.Н. Барсукова, Я.М. Иваньо. – Иркутск: Изд-во ИрГСХА, 2011. –. -160 с.

5 Белякова, А.Ю.. Вероятностные модели экстремальных гидрологических явлений в задачах оптимизации сельскохозяйственного производства [Текст] /А.Ю. Белякова, Я.М. Иваньо. – Иркутск: Изд-во ИрГСХА, 2009. – 151 с.

6 Бережная, Е.В. Математические методы моделирования экономических систем: учеб. пособие / Е. В. Бережная, В. И. Бережной. - М.: Финансы и статистика, 2003. - 432 с.

7 Бузина Т.С. Оптимизация взаимодействия участников в региональных агропромышленных кластерах. Монография /Т.С. Бузина, Я.М. Иваньо. – Иркутск: Изд-во: Иркутский ГАУ, 2015. – 145 с. (вклад 0,5).

8 Вашукевич Е.В. Математические модели аграрного производства с вероятностными характеристиками засух и гидрологических событий /Е.В. Вашукевич, Я.М. Иваньо. – Иркутск: Изд-во ИрГСХА, 2012. – 150 с.

9 Гаврилов А.И. Региональная экономика и управление / А.И. Гаврилов. – М.: ЮНИТИ, 2002. – 239 с.

10 Гусев Б.П. Модель оптимизации сельскохозяйственного и промышленного производства в бассейне реки Ангара / Б.П. Гусев // Тезисы докладов международной конференции «Проблемы оптимизации и экономические приложения». – Омск, 1997, с. 54.

11 Гусев Б.П. Об одной эколого-экономико-математической модели функционирования региона со стохастическим характером общих водных ресурсов/ Б.П. Гусев // Математическое моделирование в сельскохозяйственном производстве: Тр. XII Байкальской международной конференции «Методы оптимизации и их приложения». - Иркутск: Изд-во ИрГСХА, 2001. - Т.8. - С.36-41.

12 Дегтярев Ю. Н. Методы оптимизации / Ю. Н. Дегтярев. – М.: Сов. радио, 1980. – 273 с.

13 Ермаков С. П., Захарова О.Д. Демографическое развитие России в первой половине XXI века (методические подходы и предварительные результаты прогноза). ИСПИ РАН. М., 2000. С. 70.

14 Зуховицкий С.И., Авдеева Л.И. Линейное и выпуклое программирование. М.: Наука, 1967.

15 Иваньо Я.М. Оптимизационные модели аграрного производства в решении задач оценки природных и техногенных рисков. Монография /Я.М. Иваньо, С.А. Петрова. – Иркутск: Изд-во Иркутского ГАУ, 2015. – 180 с.

16 Иваньо Я.М. Решение задач управления аграрным производством в условиях неполной информации / Я.М. Иваньо [и др.]; под редакцией Я.М. Иваньо. – Иркутск, 2012. -199 с.

17 Иваньо, Я.М. Моделирование природных событий для управления народно-хозяйственными объектами региона / Я.М. Иваньо, Н.В. Старкова – Иркутск: Изд-во ИрГСХА, 2011. – 160 с.

18 Коваленко Н.Я. Экономика сельского хозяйства. Курс лекций/ Н.Я. Коваленко. –М.: ТАНДЕМ, 1998. – 427 с.

19 Кравченко, Р. Г. Математическое моделирование экономических процессов в сельском хозяйстве / Р. Г. Кравченко. - М. : Колос, 1978. - 465 с.

20 Лотов В. А. Введение в экономико-математическое моделирование / В. А. Лотов. - М. : Наука, 1984. - 392 с.

21 Моделирование и управление процессами регионального развития / под ред. С.Н. Васильева – М:. ФИЗМАЛИТ, 2001. – 432с.

22 Прудников А. Г. О классификации методов прогнозирования урожайности / А. Г. Прудников // Экономика сел. хоз-ва. - 1983. - № 10. - С. 72-75.

23 Статистика с применением Excel : учеб. пособие / под ред. Я. М. Иваньо, А. Ф. Зверева. – Иркутск : ИрГСХА, 2004. – 109 с.

24 Экономико-математические методы и прикладные модели : учеб. пособие для вузов / В. В. Федосеев [и др.] ; под ред. В. В. Федосеева. – М. : ЮНИТИ, 1999. – 391 с.

25 Tintner G. A Stochastic linear programming with application to agricultural economics. // «Proc. Of the 2-th Symposium in L.P.», v.1, National Bureau of Standarts, 1955, p. 197 – 227.

Иваньо Ярослав Михайлович

Учебное пособие
по математическому моделированию, численным методам и комплексам программ для аспирантов направления 09.06.01 Информатика и вычислительная техника

Лицензия на издательскую деятельность
ЛР № 070444 от 11.03.98 г.
Подписано в печать 29.03.2022 г.
Тираж 300 экз