А. И. Мартыненко
М.Ю. Бузунова

МАТЕМАТИКА. ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Учебное пособие

Содержание

ВВЕДЕНИНЕ

Теория вероятностей является одним из разделов математической науки, подобно алгебре, аналитической геометрии или математическому анализу. Это значит, что теория вероятностей содержит точные рассуждения, а главным ее инструментом служат формулы, таблицы, графики и т.п.

Представленное учебное пособие будет полезно студентам аграрных образовательных организаций, обучающихся по образовательным программам среднего профессионального обучения, а также для лиц, желающих изучить теорию вероятностей самостоятельно.

Пособие состоит из 7 разделов по основным вопросам теории вероятностей. В первых трех разделах рассматриваются случайные события. Здесь читатель может ознакомиться с основными понятиями теории вероятностей, определениями вероятности, основными теоремами теории вероятностей, повторными независимыми испытаниями. Последние четыре раздела посвящены случайной величине. В них рассматриваются дискретные и непрерывные величины, основные понятия, законы распределения и числовые характеристики.

Каждый раздел разбит на подразделы. В начале каждого подраздела приведены краткие теоретические сведения и формулы. Далее следуют примеры с подробными решениями. В конце каждого подраздела имеются задачи для самостоятельной работы с ответами.

Задачи составлены так, чтобы они были доступны и не требовали большой затраты времени на вычисления.

В конце пособие содержит приложения, необходимые для решения задач.

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

1.1. Элементы комбинаторики

Представителям различных специальностей приходится решать задачи, в которых рассматриваются те или иные комбинации, составленные из букв, цифр и других объектов. Так, например, начальнику цеха надо распределить несколько видов работ между имеющимися станками, агроному - разместить посевы сельскохозяйственных культур по нескольким полям, диспетчеру – составить расписание занятий и т.д.

Т.е. область математики, изучающая вопросы составления разных комбинаций из данных предметов, которые подчинены различным условиям, и есть *комбинаторика*.

Возникла она еще в 16 веке. Первоначально комбинаторные задачи касались в основном азартных игр: карты, кости, лотереи. За последние годы комбинаторика переживает период бурного развития. Сейчас ее методы используются для решения транспортных задач, для составления планов производства, для составления шифров, кодов, паролей и т.д.

Комбинаторные задачи бывают самых различных видов, но большинство из них решается с помощью готовых формул.

Различные группы, которые можно составить из каких-либо предметов и которые отличаются одна от другой либо порядком предметов, либо самими предметами, называются *соединениями*. А сами предметы, из которых составляются соединения, называются *элементами*.

Можно выделить три основных вида соединений.

1. Размещения.

Пусть число предметов, из которых будем составлять различные соединения равно 3. Обозначим эти предметы буквами a, b, c.

Из них можно составить соединения по одному: a, b, c;

по два: ab, ac, bc, ba, ca, cb;

по три: $abc, acb, bac, bca, cab, cba$.

Возьмем из этих соединений по два. Можно заменить, что они отличаются либо предметами (ab и ac), либо порядком предметов (ab и ba), при этом число предметов в них одно и то же. Подобные соединения называют *размещениями*.

В нашем случае число элементов мало, поэтому можно легко составить все размещения. А как быть, если имеем дело с большим числом элементов? В таких случаях трудоемко, а иногда и практически невозможно составить все размещения. Как узнать, сколько же таких размещений можно составить, не составляя самих размещений? Ответ дает следующая формула:

$$A_n^m=\frac{n!}{(n-m)!}=n(n-1)(n-2)\dots(n-m+1)\ , \qquad (1.1.1)$$

где n - число всех элементов, m – число элементов в каждом размещении, $n!=1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n$. Отметим, что $0!=1$.

Пример 1.1. Диспетчеру требуется составить расписание занятий на определенный день недели, в котором должны быть 3 предмета из 10 изучаемых. Сколькими способами он может это сделать?

Решение.

Любой вариант расписания содержит 5 предметов из 10, который отличается от других вариантов или самими предметами, или их порядком. Поэтому воспользуемся формулой (1.1.1)

$$A_{10}^5=\frac{10!}{(10-5)!}=\frac{10!}{5!}=\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}=30240.$$

Ответ. 30240.

2. Перестановки.

Составим соединения из двух элементов a и b: ab и ba. Они отличаются только порядком элементов. Такие соединения называют *перестановками*.

Число всевозможных перестановок из n элементов находится по формуле: $P_n=n!$. (1.1.2)

Пример 1.2. На день рождения к Николаю придут друзья. Сколькими способами он может рассадить 7 гостей за круглым столом?

Так как состав гостей не изменится, то рассадить их можно только меняя их место за столом. Поэтому применяем формулу (1.1.2)

$P_7 = 7! = 5040$

Ответ. 5040.

3. Сочетания.

Составим соединения из четырех элементов a, b, c, d по три элемента в каждом , предполагая, что они отличаются друг от друга, хотя бы одним элементом: *abc, abd, acd, bcd*. Такие соединения называют *сочетаниями*.

Для нахождения числа сочетаний, составленных из n элементов m элементов по в каждом, применяют формулу:

$$C_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}. \qquad (1.1.3)$$

Пример 1.3. Студенческая группа состоит из 25 студентов. Сколько способов выбора из них 3 студентов на дежурство существует?

Решение.

Тройки студентов, выбранных для дежурства, должны отличаться друг от друга фамилиями студентов, то используем формулу (1.1.3):

$$C_{25}^3 = \frac{25!}{3!\,(25-3)!} = \frac{25 \cdot 24 \cdot 23}{6} = 2300.$$

Ответ. 2300.

Задачи для самостоятельной работы.

1. На железнодорожной станции имеется 10 путей. Сколько способов может быть для расстановки на них 3 –х составов? (*Ответ*: 720)
2. В отделе среди 10 сотрудников разыгрываются 3 билета на концерт известного артиста. Сколькими способами можно выбрать троих «счастливчиков»?

   (*Ответ*: 120)
3. На гору можно подняться на 7 подъемниках. Сколько у туриста способов подняться и спуститься с годы, если подъем и спуск осуществляется различными путями. (*Ответ*: 42)

4. В группе 25 студентов. Сколько способов может быть при выборе из них 3-х студентов на 3 различные должности? (*Ответ*: 2300)
5. Сколько можно составить телефонных номеров из 6 цифр так, чтобы в каждом отдельно взятом номере все цифры были различные? (*Ответ*: 151200)
6. В колоде 32 карты. Раздаются 3 карты. Сколько может быть случаев появления одного туза среди розданных карт? (*Ответ*: 1512)
7. В вещевой лотерее разыгрывается 8 предметов. Тот, кто подошел к урне первым, вынимает 5 билетов. Каким числом способов он их может вынуть, чтобы ровно 2 из них оказались выигрышными. Всего в урне 50 билетов. (*Ответ*: 321440)

1.2. Предмет теории вероятностей

Во многих задачах различных сфер деятельности и науки исследователи пытаются выявить определенные закономерности. Изучением закономерностей случайных явлений занимается теория вероятностей.

Во всех наблюдаемых нами явлениях присутствуют элементы случайности. Если явление наблюдать один раз, то нельзя точно предсказать, как оно будет протекать. Например, если бросить монету один раз, то нельзя точно предсказать, что выпадет «герб» или «решка». Или при посадке одного дерева нельзя заранее утверждать, что оно приживется. Но, если наблюдение повторять много раз, то можно заметить закономерность, которая позволяет предсказать результат.

Итак, изучение вероятностных закономерностей случайных событий является предметом теории вероятности.

Зарождение основных понятий теории вероятности началось в 16-17 веках. Первые труды принадлежали Х. Гюйгенсу, Д. Кардано, П. Ферма, Б. Паскалю, и др. Авторы в своих работах пытались создать теории азартных игр с рекомендациями для игроков. На следующем (17- начало 18 в.), этапе развития теории вероятностей Я. Бернулли доказал теорему, которая теоретически обосновала ранее накопленные факты. Позже теорема получила название «закона больших чисел». В 17-19 веках теория вероятностей получила дальнейшее развитие благодаря работам С. Пуассона, П. Лапласа, К. Гаусса, А. Муавра, и др. Русские математики, такие как П.Л. Чебышев, А.М. Ляпунов, А.А. Марков развивали теорию вероятностей в 19-20 веках.

1.3. Классификация событий

Испытанием называют опыт (эксперимент). Например, бросание монеты, выстрел из орудия, бросание кубика, посадка дерева и др.

Событием называют результат (исход) испытания. Например, попадание в цель или промах, выпадение четного числа очков при подбрасывании кубика, выигрыш некоторой суммы денег по билету денежно-вещевой лотереи и др. События принято обозначать заглавными буквами латинского алфавита A, B, C, D и т.д.

Все события можно разделить на достоверные, невозможные и случайные.

Случайным называется событие, которое в результате испытания может наступить или не наступить. Например, при розыгрыше денежно-вещевой лотереи событие A – обладатель одного билета выиграет денежный приз и событие B – обладатель одного билета выиграет ценный подарок.

Достоверным называется событие, которое в результате испытания должно обязательно произойти. Обозначается такое событие символом Ω. Например, событие A - вода в стакане находится в жидком состоянии при комнатной температуре и нормальном давлении, является достоверным.

Невозможным называется событие, которое в результате испытания не может произойти вообще. Обозначается такое событие символом Ø. Например, событие B - вода в стакане находится в твердом состоянии при комнатной температуре и нормальном давлении - событие, которое не может наступить, т.е. является невозможным.

Будем называть два события *несовместными*, если наступление при одном испытании одного из них, исключает наступление другого события. Это означает, что одновременно эти события произойти не могут. В качестве примеров приведем следующие события: обладатель одного билета денежно-вещевой лотереи выиграл холодильник и телевизор – события несовместные; при одном залпе из орудия попадание в цель и промах - также несовместные события.

Совместными называют два события, если при одном испытании наступление одного из них не исключает наступление другого события. Т.е. в этом случае эти события могут произойти одновременно. Например, выигрыш двух ценных призов по двум билетам лотереи – события совместные или выпадение четного числа очков и выпадение двойки при одном бросании игральной кости также события совместные.

События называются *равновозможными,* если в данном испытании нет оснований считать, что одно из них более возможно, чем другие. Например, извлечение «шестерки», «семерки», «восьмерки», «девятки» или «десятки» из новой колоды карт; выпадение граней с 1,2,3,4,5,6 очками при подбрасывании кубика – равновозможные события.

Единственно возможными называют события, если в результате испытания хотя бы одно из нескольких событий должно обязательно произойти. Рассмотрим на примере семьи из двух детей. Возможны события: A- в семье два мальчика, B – в семье один мальчик и одна девочка, C- в семье две девочки. Так как одно из этих событий обязательно произойдет, то события A, B, C – единственно возможные.

Полную группу образуют события, которые являются единственно возможными и несовместными, т.е. в результате испытания обязательно должно произойти только одно из этих событий.

Вернемся к последнему примеру. Так как одно из событий A, B или C обязательно произойдет, то эти события образуют полную группу.

Перейдем к частному случаю полной группы, а именно к противоположным событиям.

Противоположными называют два несовместных события, одно из которых обязательно произойдет. Противоположное событие, обозначается через $\overline{A}$. Например, производится один выстрел из орудия по мишени. Событие A – стрелок попадает в десятку. Противоположное событие $\overline{A}$ - стрелок не попадает в десятку.

1.4. Вероятность события. Определения.

На практике часто возникает необходимость в умении сравнивать степень возможности появления событий.

Рассмотрим две пары событий:

1) Событие A - выпадение дождя в первый день июля,
   Событие B - выпадения снега в первый день июля.
2) Событие C - выигрыш по одному билету денежно-вещевой лотереи,
   Событие D - выигрыш по каждому из 100 приобретенных билетов денежно-вещевой лотереи.

Очевидно, что степень возможности наступления этих событий будет достаточно разной: события A и C имеют меньше шансов наступить, чем события B и D. Как же сравнить события по степени возможности их наступления? На помощь приходит понятие вероятности.

Итак, *вероятностью события* называется численная мера степени объективной возможности наступления события.

Существуют различные определения вероятности. Рассмотрим некоторые из них.

1.4.1. Классическое определение вероятности

Назовем *элементарными* исходы некоторого испытания, которые являются единственно возможными, несовместными и равновозможными.

Событие A называется *благоприятствующим* событию B, если наступление события A влечет за собой наступление события B.

Приведем классическое определение вероятности:

Вероятностью события $P(A)$ события A называется отношение числа m благоприятствующих этому событию исходов, к общему числу n элементарных исходов испытания, т.е.

$$P(A)=\frac{m}{n} \qquad (1.4.1),$$

где $P(A)$ – вероятность события A,

m - число благоприятствующих наступлению событию A исходов,

n – число всех элементарных исходов.

Принято называть это определение *классическим определением вероятности*.

Проанализировав классическое определение вероятности, можно заключить следующее:

1. Если событие достоверное, то его вероятность равна единице, т.е. $P(\Omega) = 1$.
2. Если событие невозможное, то его вероятность равна нулю, т.е. $P(\emptyset) = 0$.
3. Вероятность случайного события больше нуля, но меньше единицы, т.е. $0 < P(A) < 1$.

   Следовательно, вероятность любого события принадлежит отрезку $[0,1]$ или $0 \le P(A) \le 1$.

Практически невозможными называют события, вероятности, наступления которых близки к 0, а практически достоверными называют события, вероятности, наступления которых близки к 1.

1.4.2. Статистическое определение вероятности

Понятие относительной частоты или частости является одним из основных понятий теории вероятности.

Относительной частотой (частостью) события называют отношение числа испытаний, в которых событие *A* наступило , к общему числу всех фактически произведенных испытаний, т.е.

$$W(A) = \frac{N_A}{N}\ , \qquad (1.4.2)$$

где $W(A)$ - относительная частота события *A*;

N_A - число появлений события *A*;

N - общее число всех произведенных испытаний.

Относительная частота рассматривается в предположении, что испытания уже фактически произведены. А понятие вероятности не предполагает проведения испытаний проводились на самом деле. Другими словами, вероятность вычисляют до проведения испытания, а относительную частоту – после произведенного испытания.

Не всегда можно применить классическое определение. Оно не пригодно, если случайные события не являются равновозможными. Например, если игральная кость неправильная или монета не цилиндрической формы. В таких случаях использую статистическое определение вероятности.

В таких случаях за *вероятность события A* принимают постоянное число $P^*(A)$, вокруг которого группируются относительные частоты $W(A)$ события *A* с возрастанием числа опытов.

1.4.3. Геометрическое определение вероятности

Рассмотренное выше классическое определение вероятности имеет ряд из недостатков, которые ограничивают его применение. Одним из таких недостатков является то, что классическое определение предполагает, чтобы число всех возможных исходов испытания было конечно. Но, если использовать геометрическое определение вероятности, то этот недостаток можно преодолеть. Можно найти вероятность попадания точки в некоторую область (отрезок прямой, какую-то часть плоскости и т.д.).

Рассмотрим плоскую фигуру D и некоторую фигуру d, которая является частью плоской фигуры D. Бросим на фигуру точку случайным образом. В данном случае все точки области D имеют «равные права» относительно попадания туда брошенной случайной точки. Если полагать, что вероятность события A - попадания брошенной точки на фигуру d, окажется пропорциональной площади этой фигуры и не будет зависеть ни от расположения относительно фигуры D, ни от формы фигуры d, то можно найти вероятность события $P(A) = \frac{S_d}{S_D}$, где S_d, S_D соответственно площади фигур d и D. В этом случае фигура d называется благоприятствующей событию A. Размерность области, бывает одномерной (прямая, часть прямой, окружность), двумерной (круг, сегмент, прямоугольник) и трехмерной (сфера, конус). Обозначим через mes меру. Использую в качестве такой геометрической меры чаще всего длину или площадь, значительно реже – объём.

Рассмотрим равновозможные и образующие полную группу элементарные исходы. Пусть их число будет бесконечно. Тогда каждому из всех возможных исходов можно поставить в соответствие точку пространства, а группе всех возможных исходов – некоторую область D данного пространства. Так как мы предположили, что все исходы равно возможны, то попадание в любую точку области D будет также равно возможно, а всем благоприятствующим исходам будет соответствовать некоторая область $d \in D$.

Отношение меры области, благоприятствующей наступлению события A, к мере всей области называется *геометрической вероятностью* события A, т.е.

$$P(A) = \frac{mes_d}{mes_D}, \qquad (1.4.3)$$

где S_d и S_D - метрические характеристики (объем, площадь, длина) областей d и D.

Рассмотрим применение определений вероятности на примерах.

Пример 1.8. Брошена игральная кость с гранями 1,2,3,4,5 и 6 очков. Найти вероятность того, что появилось четное число очков?

Решение.

Обозначим событие A исходя из вопроса задачи, т.е. A – появилось четное число очков. Этому событию благоприятствуют 3 исхода – 2,4,6 очков. Всего 6 исходов. Итак, m=3, n=6. Подставляем в формулу (1.4.1)

$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

Ответ. $\frac{1}{2}$.

Пример 1.9. Из 1000 единиц семян гороха «Сахарный» для определения всхожести взяли пробу, из которых 115 семян не взошли.

а) Определить частость всхожести семян гороха?

б) Какова вероятность того, что не взойдет первое наудачу взятое семя гороха?

Решение.

Для начала обозначим события:

а) Пусть событие A – отобранное семя окажется доброкачественным.

Вычислим относительную частоту (частость) события A, воспользовавшись формулой (1.4.2). По условию задачи общее число всех испытаний равно $N = 1000$. Число испытаний, в которых событие A появилось, будет $N_A = 1000 - 115 = 885$.

Тогда частость события A будет равна $W(A) = \frac{885}{1000} = 0{,}885$.

б) Пусть событие B – наудачу взятое семя не взойдет.

Общее число случаев $n = 1000$ из них 115 благоприятствуют наступлению события B: $m = 115$. По формуле (1.3.1) $P(B) = 0{,}115$

Ответ. а) 0,885; б) 0,115.

Пример 1.10. Провели 10 серий бросания монеты. Каждая серия содержала 1000 бросаний. Относительные частоты выпадения «герба» оказались равными: 0,501; 0,485; 0,509; 0,536; 0,485; 0,488; 0,500; 0,497; 0,494; 0,484.

Рассмотрев данные частоты, можно сделать вывод, что они то больше 0,5, то меньше 0,5, т.е. группируются около числа 0,5. Следовательно, за вероятность можно взять число 0,5.

Пример 1.11. Относительная частота попадания в цель при огневой стрельбе из орудия оказалась равной 0,85. Требуется определить число попаданий в цель, если всего произвели 120 выстрелов.

Решение.

Пусть событие A – попадание в цель.

Подставляем в формулу (1.4.2) известное значение относительной частоты и решаем уравнение относительно неизвестного числа появлений события A:

$$W(A) = \frac{N_A}{N};\ \frac{N_A}{120} = \frac{85}{100};\ \frac{N_A}{6} = \frac{85}{5};\ N_A = 102.$$

Ответ. Число попаданий 102.

Пример 1.12. В группе студентов имеется шесть отстающих. Преподаватель пригласил через старосту группы на обязательную консультацию из них трёх студентов. Староста не запомнил фамилии приглашенных и отправил наудачу трех отстающих. Какова вероятность того, что явились как раз те студенты, которых ждал преподаватель?

Решение.

Обозначим событие A – вызов на консультацию определенной группы из трех человек.

Число n различных групп по 3 студента из 6 вычислим по формуле $n = C_6^3 = \frac{6!}{3!\cdot 3!} = \frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6}{1\cdot2\cdot3\cdot1\cdot2\cdot3} = \frac{2\cdot5\cdot2}{1} = 20$. Наступлению события A благоприятствует один исход, т.е. m=1. По классическому определению вероятности $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{1}{20} = 0.05$.

Ответ. 0,05

Пример 1.13. Лене на день рождения подарили букет из семи роз, из которых четыре белых и три красных. Лена решила поставить цветы в вазу и взяла (последовательно или одновременно) две розы. Какова вероятность того, что она взяла две белых розы?

Решение.

Лена взяла две розы. Пусть событие A – обе взятые розы окажутся белыми. Число способов, которыми можно выбрать две розы из всех семи роз найдем , используя число сочетаний $n = C_7^2 = 21$, а число исходов благоприятствующих событию A - это число способов, которыми можно выбрать две белые розы из четырех имеющихся белых роз: $m = C_4^2 = 6$. Отсюда по классическому определению вероятности $P(A) = \frac{6}{21} = \frac{2}{7}$.

Ответ. $\frac{2}{7}$.

Пример 1.14. Агрохимическая лаборатория располагает шестью различными видами минеральных удобрений. Некий агрохимик проводит несколько экспериментов, в которых изучает совместное влияние любой тройки удобрений на рост растений. Какова вероятность того, что в наугад взятой для изучения тройке удобрений: а) окажутся вместе удобрения A и B; б) удобрения A и B не окажутся одновременно в одной тройке?

Решение.

а) Обозначим событие C – удобрения A и B окажутся в одной тройке удобрений. Подсчитаем число всех возможных исходов: $n = C_6^3 = \frac{6!}{3!(6-3)!} = 20$.

Так как в любой из нужных троек удобрений должно быть, кроме A и B, еще одно из оставшихся четырех удобрений, то число исходов благоприятствующих событию C равно $m = C_4^1 = 4$. По классическому определению вероятности получим

$$P(C) = \frac{4}{20} = 0{,}2.$$

б) Теперь рассмотрим событие D – удобрения A и B не окажутся в одной тройке, которое является событием противоположным событию C. Тогда:

$$P(D) = 1 - P(C) = 1 - 0{,}2 = 0{,}8.$$

Ответ. а) 0,2; б) 0,8.

Пример 1.15. В домашней библиотеке имеется N книг, из которых k в твердом переплете. Владелец библиотеки взял для чтения наудачу l книг. Какова вероятность того, что среди взятых наудачу книг окажется ровно r в твердом переплете?

Решение.

Исходя из вопроса задачи обозначим событие A – среди взятых наудачу l книг имеется ровно r в твердом переплете.

Опять используем классическое определение вероятности (формула 1.4.1). Для этого найдем число всех возможных исходов и число исходов, благоприятствующих наступлению события A.

Всего имеется N книг, из них k, в твердом переплете. Следовательно, без переплета будет $N - k$ книг. Число n всех исходов испытания равно числу способов, которыми можно выбрать l книг из N, т.е. $n = C_N^l$. Найдем число случаев, благоприятствующих событию A: r книг в твердом переплете можно выбрать из k книг в твердом переплете C_k^r способами, а $l - r$ книг без переплета из $N-k$ таких книг можно выбрать C_{N-k}^{l-r} способами. Каждая комбинация из r книг в твердом переплете может сочетаться с каждой комбинацией из $l-r$ книг без переплета. Следовательно, число исходов, благоприятствующих событию A, равно $C_k^r \cdot C_{N-k}^{l-r}$. Теперь находим вероятность события A

$$P(A)=\frac{C_k^r \cdot C_{N-k}^{l-r}}{C_N^l}. \qquad (1.4.5)$$

Пример 1.16. В бассейне содержится 8 лещей и 12 карпов. Для продажи выловили наудачу 5 рыб. Какова вероятность того, что среди них окажется два леща?

Решение.

Событие A – из пяти пойманных рыб две окажутся карпами.

Задача по структуре полностью совпадает с предыдущей задачей. Применяя формулу (1.4.5), полагая в ней $N=20$, $l=5$, $r=2$, $k=8$, $N-k=12$, $l-r=3$, получим:

$$P(A)=\frac{C_8^2 \cdot C_{12}^3}{C_{20}^5} \approx 0{,}397 \cdot$$

Ответ. 0,397.

Пример 1.17. На карточках написаны буквы русского алфавита Н, Ц, Е, С, Л, О. Определить вероятность того, что а) при выборе наудачу трех карточек получится слово «ЛЕС»; б) при выборе случайным образом шести карточек получится слово «СОЛНЦЕ» (карточки разложены в ряд в порядке появления).

Решение.

а) Пусть событие A – появление слова ЛЕС». Общее число случаев найдем, используя формулу для вычисления числа размещений, так как комбинации, составленные по три буквы из имеющихся шести, могут отличаться как самими буквами, так и их порядком, т.е. $n = A_6^3$. Благоприятствует наступлению событию A только один случай, т.е. $m = 1$.

Тогда вероятность события A будет равна

$$P(A) = \frac{1}{A_6^3} = \frac{1}{120}.$$

б) Обозначим событие B – появление слова «СОЛНЦЕ». В слове «СОЛНЦЕ» шесть букв, по условию задачи карточек тоже шесть. Получить различные комбинации шести букв из имеющихся шести можно лишь переставляя буквы местами, поэтому используем перестановки: $n = P_6$. Благоприятствует событию B только один, т.е. $m = 1$. Поэтому

$$P(B) = \frac{1}{P_6} = \frac{1}{720}.$$

Ответ. а) $\frac{1}{120}$; б) $\frac{1}{720}$.

Пример 1.18. Точка бросается в круг радиуса R. Найти вероятность того, что точка попала внутрь вписанного в круг правильного треугольника, если вероятность попадания точки в треугольник пропорциональна площади треугольника и не зависит от его расположения относительно круга.

Решение.

Исходя из вопроса задачи событие A - точка попала внутрь вписанного в круг правильного треугольника. Для вычисления вероятности события A, воспользуемся определением геометрической вероятности, т.е. формулой (1.4.3).

Из школьной геометрии известно, что площадь круга радиуса R вычисляется по формуле $S_D = \pi \cdot R^2$, а площадь вписанного в круг правильного треугольника - $S_d = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$, где a – сторона треугольника.

Так как $a = R \cdot \sqrt{3}$, то подставляя в формулу для вычисления площади вписанного в круг правильного треугольника, получим $S_d = \frac{R^2 \cdot 3\sqrt{3}}{4}$. Тогда получим искомую вероятность события А: $P(A) = \frac{S_d}{S_D} = \frac{3\sqrt{3}}{4\pi}$.

Ответ. $\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}$.

Задачи для самостоятельной работы

1. Кондитерская за смену выпекает определенное количество тортов. Для контроля качества продукции наудачу отбирается 10 тортов. Какова вероятность того, что среди отобранных тортов два торта со сливочным кремом, если из всех выпеченных тортов 25 тортов с заварным кремом и пять – со сливочным? (*Ответ*: 0,3601)
2. В группе 30 студентов, 10 из которых отличники. Найти вероятность того, что вызванные к доске 3 студента – отличники. (*Ответ*: $\frac{6}{203}$)
3. На собрании присутствует 25 человек, среди которых 5 мужчин. На повестке дня выборы трех делегатов на конференцию. Какова вероятность того, что в делегацию войдет двое мужчин и одна женщина. (*Ответ*: 0,087)
4. Из карточек с буквами составлено слово «молния». После того как карточки перемешали, извлекают четыре карточки и раскладывают их по порядку. Определить вероятность того, что получится слово «миля». (*Ответ*: $\frac{1}{360}$)
5. На книжной полке стоит шесть книг, из которых две в переплете. Наудачу отбираются две книги. Найти вероятность того, что они оказались без переплета. (*Ответ*: 0,4)
6. В группе 20 человек, из которых 10 юношей и 10 девушек. Разыгрываются 5 билетов на концерт известного артиста. Найти

вероятность того, что обладателями билетов окажутся 2 юноши и 3 девушки. (*Ответ:* 0,35)

7. Перед высадкой в теплицу случайно смешана рассада 2-х сортов томатов: 6 корней - сорта «Бабушкин секрет» и 8 – сорта «Гусиное яйцо». Найти вероятность того, что первыми будут посажены 3 корня томатов сорта «Бабушкин секрет». (*Ответ*: 0,0549)
8. Точка появляется в круге радиуса R наудачу. Какова вероятность того, что точка попадет внутрь вписанного в круг квадрата. (*Ответ*: $\frac{2}{\pi}$)
9. Относительная частота (частость) сотрудников кафедры, имеющих ученое звание доцента, равна 0,15. Определить число сотрудников, имеющих ученое звание доцента, если в штате кафедры имеется сорок сотрудников. (*Ответ*: 6)

2. ТЕОРЕМЫ СЛОЖЕНИЯ И УМНОЖЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

2.1. Теорема сложения вероятностей двух несовместных событий

Суммой двух событий *A* и *B* назовем событие *C*=*A*+*B*, которое состоит в наступлении или события А, или события В, или обоих этих событий одновременно.

Суммой нескольких событий $A_1,\ A_2, ..., A_n$ называется событие *A*, которое состоит в появлении хотя бы одного из событий $A_1,\ A_2, ..., A_n$ (или A_1, или A_2, …, или A_n, или нескольких из них, или всех).

Записываю так: $A = A_1 + A_2 + ... + A_n$.

Событие C, состоящее в наступлении события A, и не наступлении события *B* называют *разностью событий* A и B.

Записывают это так:

$C = A - B$ или $C = A \setminus B$

Пример 2.1. Пусть событие A – наудачу выбранная из стада корова имеет годовой удой от 3000 кг до 3500 кг, событие B – выбранная корова имеет удой свыше 2500 кг. Тогда событие $C=A+B$ – корова имеет удой свыше 3000 кг.

Пример 2.2. Спортсмен - лучник произвел два выстрела по мишени. Событие A – попадание в цель при первом выстреле, событие B – попадание в цель при втором выстреле. Тогда событие C – попадание при первом выстреле, или попадание при втором выстреле, или попадание при обоих выстрелах можно рассматривать как сумму событий $A+B$, т.е. $C=A+B$.

Пример 2.3. По итогам соревнований победитель может быть награжден ценным подарком (событие A), денежным вознаграждением (событие B), получить медаль (событие C). Опишите события: а) $A+B$; б) $AB-C$?

Решение.

а) Событие $A+B$ состоит в получении победителем или ценного подарка, или денежного вознаграждения, или того и другого.

б) Событие $AB-C$ состоит в получении победителем одновременно и ценного подарка, и денежного вознаграждения без вручения медали.

Отметим, что, если события A и B окажутся несовместными, то событие $A+B$ - появление одного из этих событий, неважно какого из них.

Теорема 2.1. Вероятность появления одного из двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A+B)=P(A)+P(B). \qquad (2.1.1)$$

Доказательство.

В основу доказательства положим классическое определение вероятности.

Пусть n- общее число всех возможных элементарных исходов;

m_1 - число исходов, благоприятствующих наступлению события A;

m_2 - число исходов, благоприятствующих наступлению события B.

$m_1 + m_2$ - число исходов, благоприятствующих наступлению либо событию A, либо событию B. Отсюда следует,

$P(A+B) = \frac{m_1+m_2}{n} = \frac{m_1}{n} + \frac{m_2}{n} = P(A) + P(B),$ что и требовалось доказать.

Теорему можно обобщить на конечное число событий:

$$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n), \qquad (2.1.2)$$

т.е. вероятность суммы конечного числа несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий.

Пример 2.4. Разыгрывается денежно-вещевая лотерея, в которой на каждую тысячу выпущенных билетов приходится 5 денежных и 20 вещевых выигрышей. Найти вероятность того, что владелец одного лотерейного билет получил выигрыш, безразлично какой.

Решение. В условиях задачи возможны следующие события:

A - владелец билета получил выигрыш;
A_1 - владелец билета получил вещевой выигрыш;
A_2 - владелец билета получил денежный выигрыш.
Тогда событие A является суммой событий, т.е. $A = A_1 + A_2$.

По условию задачи события A_1 и A_2 - несовместные, тогда вероятность события A найдем по теореме сложения несовместных событий: $P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2)$, где $P(A_1) = \frac{20}{1000} = 0{,}02$; $P(A_2) = \frac{5}{1000} = 0{,}005$. Итак, искомая вероятность будет равна

$$P(A) = 0{,}02 + 0{,}005 = 0{,}025.$$

Ответ. 0,025.

Пример 2.5. В коробке находится 40 шаров, из них 15 красных, 5 желтых и 20 белых. Некто извлекает наудачу один шар. Найти вероятность извлечения цветного шара.

Решение. Рассмотрим события:

A - извлечен цветной шар;

A_1 - извлечен красный шар;

A_2 - извлечен желтый шар.

A_1 и A_2 - несовместные события. По классическому определению вероятность того, что извлекли красный шар равна $P(A_1) = \frac{15}{40} = \frac{3}{8}$, а вероятность, того, что извлекли желтый шар равна $P(A_2) = \frac{5}{40} = \frac{1}{8}$. Событие A, состоящее в извлечении или голубого, или зеленого шара, является суммой событий A_1 и A_2, т.е. $A = A_1 + A_2$.

Согласно формуле (2.1.1) найдем вероятность события A

$$P(A) = P(A_1) + P(A_2) = \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2}.$$

Ответ. $\frac{1}{2}$.

2.2. Противоположные события

Два несовместных и единственно возможных (одно из них обязательно произойдет) события называются *противоположными*.

Теорема 2.2. Сумма вероятностей противоположных событий равна единице, т.е. $P(A) + P(\bar{A}) = 1$.

Доказательство.

Из определения следует, что события A и $\overline{A}$ являются единственно возможными, поэтому наступление одного из них есть событие достоверное (обязательно произойдет), поэтому вероятность $P\left(A + \overline{A}\right) = 1$. Но события A и $\overline{A}$ - несовместные, поэтому по теореме сложения несовместных событий

$$P\left(A + \overline{A}\right) = P(A) + P\left(\overline{A}\right).$$

Так как $P\left(A + \overline{A}\right) = 1$, получим $P(A) + P(\bar{A}) = 1$, что и требовалось доказать.

Если вероятность события A обозначить через p, а вероятность события $\overline{A}$ обозначить через q, то справедливо равенство $p + q = 1$ или $q = 1 - p$.

Пример 2.6. Найти вероятность того, что день будет ясным если вероятность того, что день будет дождливым, равна p=0,7.

Решение.

Обозначим события:

A – день будет дождливым;

B – день будет солнечный.

По условию задачи P(A)= p =0,7, $P(\overline{A}) = 1 - p = 1 - 0{,}7 = 0{,}3$.

Ответ. 0,3.

Если $A_1, A_2, \ldots, A_n$ - n несовместных событий, которые образуют полную группу, то,

$$P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n) = 1. \qquad (2.2.1)$$

Пример 2.7. Магазин получает товар с трех товарных баз A, B и C. Вероятность получения товара с база A равна 0,6, с базы B – 0,2.Найти вероятность торо, что очередной товар поступит с базы C.

Решение.

Обозначим события:

A_1 - товар получен с базы A;

A_2 - товар получен с базы B;

A_3 - товар получен с базы C.

Согласно теореме (2.1.3) $P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) = 1$;

0,6+0,2+ $P(A_3)$=1. Решаем уравнение относительно $P(A_3) = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$.

Ответ. 0,2.

2.3. Теорема умножения вероятностей независимых событий

Если вероятность одного из событий не зависит от того наступит или не наступит другое событие, то такие два события называют *независимыми*.

Пример 2.8. Пусть монета бросается два раза. Событие A – появление «решки» при первом испытании, событие B – появление «решки» при втором испытании будут независимыми, так как вероятность появления события A не зависит от появления события B и наоборот.

Если каждые два из нескольких событий независимы, то эти события называются *попарно независимыми*.

Событие $C=AB$ называется *произведением* двух событий A и B, если оно состоит в совместном появлении и события A, и события B.

Пример 2.9. В ящике содержатся помидоры, собранные с двух теплиц.

Событие A – появление красного помидора,

событие B – помидор снят с первой теплицы.

Тогда AB – появление красного помидора из первой теплицы.

Теорема 2.3. Вероятность совместного появления двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий, т.е.

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B).$$

Доказательство.

Пусть

n - все возможные исходы, в которых A может наступить или не наступить,

n_1 – исходы, которые благоприятствуют наступлению события A ($n_1 \leq n$),

m –все возможные исходы, в которых событие B может наступить или не наступить ,

m_1 – исходы, которые благоприятствуют наступлению события B ($m_1 \leq m$).

Тогда общее число всех возможных элементарных исходов будет равно $n \cdot m$. Действительно, каждый из n исходов, в которых A может наступить или не наступить , сочетается с каждым из m исходов, в которых B может наступить или не наступить.

При этом $n_1 \cdot m_1$ исходов из общего числа исходов благоприятствуют совместному наступлению событий A и B. Каждый из n_1 исходов, благоприятствующих событию A, может сочетаться с каждым из m_1 исходов, благоприятствующих событию B. Тогда

$P(AB) = \frac{n_1 \cdot m_1}{n \cdot m} = \frac{n_1}{n} \cdot \frac{m_1}{m} = P(A) \cdot P(B)$, что и требовалось доказать.

Для нескольких событий, независимых в совокупности, вероятность совместного появления нескольких событий равна произведению вероятностей этих событий, т.е. $P(A_1 A_2 \dots A_n) = P(A_1)P(A_2) \dots P(A_n)$.

Пример 2.10. Какова вероятность поражения цели при стрельбе тремя орудиями одновременно, если вероятности поражения цели орудиями соответственно равны 0,9; 0,8 и 0,7?

Решение.

Обозначим события.

А – поражение цели первым орудием,

В – поражение цели вторым орудием,

С – поражение цели третьим орудием.

События независимые. Применяем теорему умножения для независимых событий $P(ABC) = P(A)P(B)P(C) = 0{,}9 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}7 = 0{,}504$.

Ответ. 0,504.

Пример 2.11. В каждой из трех партий отшитых костюмов имеется по 30 штук. В первой партии - 27, во второй - 28, в третьей - 25 доброкачественных костюмов. Для проверки из каждой партии случайным образом берут по одному костюму. Найти вероятность того, что все три взятые костюма окажутся доброкачественными.

Решение.

Рассмотрим события:

A - все три взятые костюма - доброкачественные;

A_1 - из 1-ой партии взят доброкачественный костюм;

A_2 - из 2-ой партии взят доброкачественный костюм;

A_3 - из 3-ей партии взят доброкачественный костюм.

Событие A состоит в том, что костюм, взятый из 1-ой партии, доброкачественный, из 2-ой партии – доброкачественный и из 3-ей - тоже доброкачественный. Значит, событие A является произведением событий $A = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3$. Т.к. события A_1, A_2, A_3 - независимые, то получим

$P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3)$, где

$$P(A_1) = \frac{27}{30} = \frac{9}{10}; \quad P(A_2) = \frac{28}{30} = \frac{14}{15}; \quad P(A_3) = \frac{25}{30} = \frac{5}{6}.$$

Тогда $P(A) = \frac{9}{10} \cdot \frac{14}{15} \cdot \frac{5}{6} = 0{,}7$.

Ответ. 0,7.

2.4. Вероятность появления хотя бы одного события

Рассмотрим случай, когда в результате испытания могут наступить n независимых в совокупности событий, причем вероятности наступления каждого из этих событий известны и требуется найти вероятность появления хотя бы одного из них.

В этом случае справедлива следующая теорема.

Теорема 2.4. Вероятность появления хотя бы одного из независимых событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$ определяется формулой

$P(A) = 1 - q_1 \cdot q_2 \cdot \ldots \cdot q_n$, где $q_i = 1 - p_i$ – вероятности соответствующих противоположных событий $\overline{A}_i$ $\left(i = \overline{1,n}\right)$

Доказательство.

Событие А – наступление хотя бы одного из независимых событий A_1, $A_2, \ldots, A_n$. События A и $\overline{A}_1 \overline{A}_2 \ldots \overline{A}_n$ (ни одно из событий не наступило) являются противоположными. Это означает, что сумма их вероятности этих событий равна единице, т.е.

$P(A) + P(\overline{A}_1 \overline{A}_2 \ldots \overline{A}_n) = 1$, $P(A) = 1 - P(\overline{A}_1 \overline{A}_2 \ldots \overline{A}_n) = 1 - P(\overline{A}_1) P(\overline{A}_2) \ldots P(\overline{A}_n)$ или

$P(A) = 1 - q_1 \cdot q_2 \cdot ... \cdot q_n$, что и требовалось доказать.

В частности, если вероятности событий $\overline{A}_1, \overline{A}_2, \ldots, \overline{A}_n$ равны между собой и равны числу p, то вероятность появления хотя бы одного события вычисляется по формуле $P(A) = 1 - q^n$.

Пример 2.12. Вероятности попадания в цель при стрельбе из четырех орудий соответственно равны $p_1 = 0{,}8$; $p_2 = 0{,}7$; $p_3 = 0{,}9$; $p_4 = 0{,}6$. Найти вероятность хотя бы одного попадания при одном залпе из всех орудий.

Решение.

Пусть событие A – произошло хотя бы одно попадание в цель. При этом возможны следующие события:

A_1 – попали в цель первым орудием;

A_2 – попали в цель вторым орудием;

A_3 – попали в цель третьим орудием;

A_4 – попали в цель четвертым орудием.

По условию задачи вероятности этих событий известны. Найдем вероятности противоположных событий: $q_1 = 1 - 0{,}8 = 0{,}2, q_2 = 1 - 0{,}7 = 0{,}3, q_3 = 1 - 0{,}9 = 0{,}1, q_4 = 1 - 0{,}6 = 0{,}4$. Следовательно,

$$P(A) = 1 - q_1 \cdot q_2 \cdot q_3 \cdot q_4 = 1 - 0{,}2 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}4 = 0{,}976.$$

Ответ. 0,976.

Пример 2.13. На перевозку груза направлены четыре грузовых автомобиля. Каждый из грузовиков исправен с вероятностью 0,8. Какова вероятность того, что хотя бы один автомобиль приступил к перевозке груза?

Решение.

Событие А – хотя бы один автомобиль приступил к перевозке груза. Найдем вероятность противоположного события, т.е. вероятность того, что автомобиль не исправен: q=1-p=1-0,8=0,2. Искомую вероятность вычисляем по формуле $P(A) = 1 - q^n = 1 - (0{,}2)^4 = 0{,}9984$.

Ответ. 0,9984.

2.5. Теорема умножения вероятностей зависимых событий

Известно, что два события называются зависимыми, если вероятность наступления одного из них зависит от того, появится или не появится другое событие.

Пример 2.14. Случайно контролер переложил в одну коробку 90 стандартных и 10 нестандартных деталей. Из коробки извлекают одну деталь, не возвращая ее обратно в коробку. Если появилась стандартная деталь (событие A), то вероятность извлечения при втором испытании стандартной детали (событие B) равна $P(B) = \frac{89}{99}$. Если же в первом испытании извлечена нестандартная деталь, то $P(B) = \frac{90}{99}$.

Как видим, вероятность наступления события B зависит от появления или не появления события A.

Пусть A и B - зависимые события. Назовем *условной вероятностью* $P_A(B)$ события B вероятность события, найденную в предположении, что событие A уже произошло. В последнем примере $P_A(B) = \frac{89}{99}$.

Теорема 2.5. Вероятность совместного появления двух зависимых событий равна произведению вероятности одного из этих событий на условную вероятность другого события , вычисленную в предположении, что первое событие уже наступило, т.е.

$$P(AB) = P(A) \cdot P_A(B) = P(B) \cdot P_B(A)$$

Доказательство

Пусть

n –все возможные элементарные исходы, в которых событие A может появиться или не появиться,

n_1 –исходы, которые благоприятствуют наступлению события A ($n_1 \leq n$),

m –возможные исходы, в которых событие B наступает, в предположении, что событие A уже наступило, т.е. эти исходы благоприятствую наступлению события AB $(m \leq n_1)$, тогда по определению вероятности

$P(AB) = \frac{m}{n} = \frac{n_1}{n} \cdot \frac{m}{n_1} = P(A) \cdot P_A(B),$ что и требовалось доказать.

Пример 2.15. В ящике 60 груш первого сорта и 40 груш второго сорта. Отбирают две груши. Определить вероятности а) отобранные груши обе первого сорта, б) отобранные груши обе второго сорта, в) одна отобранная груша первого сорта, а другая – второго сорта.

Решение.

Обозначим события:

A – извлечена при первом испытании груша первого сорта,

B – извлечена при втором испытании груша первого сорта,

C – извлечена при первом испытании груша второго сорта,

D – извлечена при втором испытании груша второго сорта.

а) $P(AB) = P(A) \cdot P_A(B) = \frac{60}{100} \cdot \frac{59}{99} = 0{,}36;$

б) $P(CD) = P(C) \cdot P_C(D) = \frac{40}{100} \cdot \frac{39}{99} = 0{,}16;$

в) $P(AD + CB) = P(A) \cdot P_A(D) + P(C) \cdot P_C(B) = \frac{60}{100} \cdot \frac{40}{99} + \frac{40}{100} \cdot \frac{60}{99} = 0{,}48.$

Ответ. а) 0,36; б) 0,16; в) 0,48.

Если $A_1, A_2, \ldots, A_n$ - n зависимых событий, тогда

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P_{A_1}(A_2) \cdot \ldots \cdot P_{A_1 A_2 \ldots A_{n-1}}(A_n).$$

Итак, вероятность произведения нескольких событий равна произведению вероятности одного из этих событий на условные вероятности других; при этом условная вероятность каждого последующего события вычисляется в предположении, что все предыдущие события произошли.

Пример 2.16. По многолетним наблюдениям в некоторой местности среднее число дождливых дней в июле равно шести. Какова вероятность того, что в этой местности в первые два июля дождя не будет?

Решение. Рассмотрим события:

A - и 1, и 2 июля в некоторой местности дождя не будет;

A_1 - 1 июля дождя не будет;

A_2 - 2 июля дождя не будет.

Событие Aсостоит в том, что и 1, и 2 июля дождя не будет. Это означает, что событие A является произведением событий A_1 и A_2, т.е. $A = A_1 \cdot A_2$. Воспользуемся теоремой умножения зависимых событий. Так как вероятность события A_2 будет принимать разные значения в зависимости от того, произойдет или не произойдет событие A_1, то события A_1 и A_2 - зависимые. Найдем вероятность события A_1 и условную вероятность события A_2, вычисленную в предположении, что событие A_1 уже произошло: $P(A_1) = \frac{25}{31}$, $P_{A_1}(A_2) = \frac{24}{30}$. Применяем теорему умножения зависимых событий:

$$P(A_1 \cdot A_2) = P(A_1) \cdot P_{A_1}(A_2) = \frac{25}{31} \cdot \frac{24}{30} \approx 0{,}65 \cdot$$

Ответ. 0,65.

2.6. Теорема сложения вероятностей совместных событий

Мы уже знаем, что, если события A и B могут произойти одновременно, то они являются совместными. Заранее известны вероятности наступления этих событий и вероятность их совместного наступления.

Теорема 2.6. Вероятность наступления хотя бы одного из двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного наступления, т.е.

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

Доказательство.

По определению $A + B = A\overline{B} + \overline{A}B + AB,\ P(A+B) = P(A\overline{B}) + P(\overline{A}B) + P(AB).$ Но $A = AB + A\overline{B},\ B = AB + \overline{A}B,\ P(A) = P(AB) +$

$P(A\overline{B}), P(B) = P(AB) + P(\overline{A}B)$. Следовательно, $P(A\overline{B}) = P(A) - P(AB)$, $P(\overline{A}B) = P(B) - P(AB)$, тогда $P(A+B) = P(A) - P(AB) + P(B) - P(AB) + P(AB) = P(A) + P(B) - P(AB)$, т.е. $P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$, что и требовалось доказать.

Пример 2.17. На опытном поле пшеницы здоровыми являются 95 % растений. Наудачу отбирают два растения. Найти вероятность того, что среди отобранных растений хотя бы одно будет здоровым.

Решение.

Обозначим события:

A – хотя бы одно растение окажется здоровым;

A_1 – первое растение окажется здоровым;

A_2 – второе растение окажется здоровым.

Событие $A = A_1 + A_2$. События A_1 и A_2 совместные. Применяем теорему сложения для совместных событий $P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1A_2) = \frac{95}{100} + \frac{95}{100} - \frac{95}{100} \cdot \frac{95}{100} = 0{,}95 + 0{,}95 - 0{,}95 \cdot 0{,}95 = 0{,}9975$.

Ответ. 0,9975.

Пример 2.18. В животноводческом комплексе для раздачи кормов работает два транспортера. Вероятность того, что в зимние месяцы каждый транспортер будет работать безотказно, равна 0,9. Какова вероятность того, что в зимние месяцы будут работать безотказно: а) хотя бы один транспортер, б) оба транспортера, в) ни один транспортер, г) только один?

Решение.

Обозначим события:

A_1 – безотказно работает первый транспортер;

A_2 – безотказно работает второй транспортер.

Данные события являются совместными и независимыми.

а) Событие A – безотказно работает хотя бы один транспортер означает, что работает или первый транспортер, или работает второй транспортер. Найдем сначала вероятность события A по формуле вероятности появления хотя бы одного события $P(A) = 1 - q_1 \cdot q_2 = 1 - (1 - 0{,}9)(1 - 0{,}9) = 1 - 0{,}1 \cdot 0{,}1 = 1 - 0{,}01 = 0{,}99$. Эту же вероятность можно найти, используя теорему сложения вероятности совместных событий $P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1A_2) = 0{,}9 + 0{,}9 - 0{,}9 \cdot 0{,}9 = 1{,}8 - 0{,}81 = 0{,}99$.

б) Событие A – безотказно работают оба транспортера означает. Что работает и первый транспортер, и работает второй транспортер. Воспользуемся теоремой умножения для независимых событий $P(A) = P(A_1A_2) = P(A_1)P(A_2) = 0{,}9 \cdot 0{,}9 = 0{,}81$.

в) Событие A – безотказно работает только один транспортер означает, что не работает и первый (событие $\overline{A}_1$) и второй (событие $\overline{A}_2$) транспортеры. По теореме умножения независимых событий будем иметь $P(\overline{A}_1\overline{A}_2)= 0{,}1\cdot 0{,}1 = 0{,}01$.

г) Событие A – безотказно работает только один транспортер означает, что работает первый и не работает второй или не работает первый и работает второй транспортер, т.е. событие $A = A_1\overline{A}_2 + \overline{A}_1A_2$, тогда его вероятность равна $P(A) = P(A_1\overline{A}_2 + \overline{A}_1A_2) = 0{,}9 \cdot 0{,}1 + 0{,}1 \cdot 0{,}9 = 0{,}09 + 0{,}09 = 0{,}18$.

Ответ. а) 0,99; б) 0,81; в) 0,01; г) 0,18.

Задачи для самостоятельной работы

1. На обслуживании у мастера имеется 5 станков. В течение рабочей смены 20% он находится у первого станка, 10% - у второго, 15% - у третьего, 25% - у четвертого, 30% - у пятого. Определить вероятность того, что в наудачу выбранный момент времени мастер обслуживает первый, или второй, или третий станок. (*Ответ*: 0,45)
2. Перед высадкой в грунт агроном случайно смешал рассаду двух сортов томатов: девять кустов рассады сорта «Арбузик» и семь кустов – сорта «Интуиция». Какова вероятность того, что первые три куста томатов,

высаженные агрономом друг за, другом являются рассадой сорта «Арбузик»? (*Ответ*: 0,15)

3. Из 12 плодов яблок три поражены некоторой болезнью в скрытой форме. Случайным образом извлекается два плода. Какова вероятность того, что оба плода поражены болезнью? (*Ответ*: $\frac{1}{22}$)
4. Из коробки с семенами наудачу извлекают три пакетика. Найти вероятность того, что извлеченные пакетики окажутся с семенами моркови, если из 15 пакетиков, находящихся в коробке, имеется 5 пакетиков с семенами моркови. (*Ответ*: $\frac{2}{91}$)
5. Предприятие пищевой промышленности выпускает в среднем 25 % высококачественной продукции и 65% первосортной продукции. Найти вероятность того, что случайно взятое изделие окажется первосортной или высококачественной. (*Ответ*: 0,9)
6. В некотором мероприятии приняло участие 420 человек. Организатором мероприятия составлены списки, в который указаны фамилии участников. Выяснилось, что у 10 участников начальной буквой фамилии была буква «А», у 6 – «Е», у 9 – «И», у 12 – «О», у 5 – «У», у 3 – «Ю», у остальных фамилия начиналась с согласной. Найти вероятность того, что фамилия участника начиналась с гласной буквы. (*Ответ*: 0,107)
7. Кубик и монета подброшены одновременно. Какова вероятность того, что на кубике выпало число очков, кратное трем, а на монете выпала «решка»? (*Ответ*: $\frac{1}{6}$)
8. В поле работают две бригады трактористов. В первой бригаде шесть тракторов, а во второй – девять. Выяснилось, что один трактор из каждой бригады требует ремонта. Из каждой бригады случайным образом выбирается один трактор. Найти вероятность того, что оба трактора не требуют ремонта и продолжат работу в поле. (*Ответ*: 0,741)

9. В течение года две финансовые организации могут независимо друг от друга обанкротиться с вероятностями 0,09 и 0,06 соответственно. Какова вероятность того, что к концу года обе организации продолжат работу? (*Ответ*:0,8824)

2.7. Формула полной вероятности

Пусть событие A может наступить только при условии появления одного из несовместных событий $H_1, H_2, \ldots, H_n$, образующих полную группу ($P(H_1)+P(H_2)+\ldots+P(H_n)=1$).

Пусть известны вероятности этих событий и условные вероятности $P_{H_1}(A), P_{H_2}(A), \ldots, P_{H_n}(A)$ события A. Тогда вероятность события A, которое может наступить лишь при условии появления одного из n несовместных событий (часто называемые гипотезами) H_i ($i = 1, 2, \ldots, n$), которые образуют полную группу можно по формуле:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) P_{H_i}(A) \text{ , где}$$

$P(A)$- вероятность события A,

$P(H_i)$- вероятности гипотез H_i,

$P_{H_i}(A)$- условная вероятность события A, вычисленная при условии, что событие H_i уже наступило;

$\sum_{i=1}^{n} P(H_i) P_{H_i}(A)$- сумма произведений вероятностей $P(H_i)$ каждой из гипотез H_i на соответствующую условную вероятность $P_{H_i}(A)$, $\sum_{i=1}^{n} P(H_i) = 1$. Эта формула называется *формулой полной вероятности*.

Пример 2.19. Стадо коров было разбито на три группы. Проводится исследование жирности молок. Первая группа состоит из 70%, вторая из 23% и третья из 7% коров стада. Вероятность того, жирность молока, полученного от отдельной коровы, составляет не менее 4% для каждой из групп коров, равна соответственно 0,6; 0,35 и 0,1. Найти вероятность того, что наудачу взятая корова дает молоко жирности не менее 4%.

Решение.

Событие A - наудачу взятая корова дает молоко жирности не менее 4%. Событие наступит, если наступит одно из несовместных гипотез:

H_1 - корова наудачу выбрана из первой группы стада;

H_2 - корова наудачу выбрана из второй группы стада;

H_3 - корова наудачу выбрана из третьей группы стада.

По условию задачи вероятности гипотез равны: $P(H_1) = 0{,}7$ $P(H_2) = 0{,}23$ $P(H_3) = 0{,}07$ и $\sum_{i=1}^{3} P(H_i) = 0{,}7 + 0{,}23 + 0{,}07 = 1$.

Условные вероятности события A при каждой из гипотез H_1, H_2,…,H_n соответственно равны

$$P_{H_1}(A) = 0{,}6\,;\ \ P_{H_2}(A) = 0{,}35\,;\ \ P_{H_3}(A) = 0{,}1.$$

Применяя формулу полной вероятности, получим

$$P(A) = 0{,}7 \cdot 0{,}6 + 0{,}23 \cdot 0{,}35 + 0{,}07 \cdot 0{,}1 = 0{,}42 + 0{,}0805 + 0{,}007 = 0{,}5075\,.$$

Ответ. 0,5075.

Пример 2.20. Имеются две коробки, содержащие по два черных и по восемь белых шаров. Наудачу извлекают из первой коробки один шар и перекладывают во вторую коробку. Затем из второй коробки извлекают шар. Какова вероятность того, что шар, извлеченный из второй коробки, окажется белым?

Решение.

Событие A - шар, извлеченный из второй коробки, окажется белым. Возможны две гипотезы:

H_1 - из первой коробки извлекли белый шар;

H_2 - из первой коробки извлекли черный шар.

Найдем вероятности гипотез $P(H_1) = \dfrac{8}{10}$, $P(H_2) = \dfrac{2}{10}$.

Так как события H_1 и H_2 образуют полную группу, то сумма их вероятностей равна 1.

Найдем условные вероятности. Если из первой коробки извлекли белый шар (наступила гипотеза H_1) и переложили его во вторую коробку, то $P_{H_1}(A)=\frac{9}{11}$. Если из первой коробки извлекли черный шар (наступила гипотеза H_2) и переложили его во вторую коробку, то $P_{H_2}(A)=\frac{8}{11}$. Тогда, по формуле полной вероятности, найдем вероятность того, что извлеченный шар из второй коробки окажется белым:

$$P(A)=\frac{8}{10}\cdot\frac{9}{11}+\frac{2}{10}\cdot\frac{8}{11}=\frac{44}{55}=\frac{4}{5}=0{,}8\cdot$$

Ответ. 0,8.

2.7. Формула Байеса

Часто условия задач содержат требования, состоящие в переоценке вероятности гипотез. Такая необходимость возникает после того, как стал известен результат испытания, в результате которого появилось событие *A*.

Пусть некоторый опыт произведен, причем об условиях его проведения можно высказать n единственно возможных и несовместных гипотез H_1, H_2, …, H_n, которые имеют вероятности $P(H_i)$, $i=1,2,\ldots,n$. По формуле полной вероятности находится вероятность события А $P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(H_i)P_{H_i}(A)$.

Предположим , что испытание произведено и событие A уже наступило, тогда изменение вероятности гипотез в связи с наступлением события A определяется по формулам:

$$P_A(H_i)=\frac{P(H_i)P_{H_i}(A)}{\sum_{i=1}^{n}P(H_i)P_{H_i}(A)},\quad i=1,2,\ldots,n\,.$$

Здесь $P(H_i)$ - вероятность события H_i,

$P_{H_i}(A)$ - условная вероятность события A, вычисленная при условии, что событие H_i наступило;

$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(H_i)P_{H_i}(A)$ - вероятность события A;

$P_A(H_i)$ - условная вероятность события H_i, вычисленная при условии, что событие A произошло.

Данные формулы называют формулами Байеса. С их помощью можно увидеть как изменились вероятности гипотез , после того, как стало известно, что событие *A* уже произошло.

Пример 2.21. У фермера имеются семена овса. Среди них 96% семян I сорта, 1% - II сорта , 2% - III сорта и 1% - IV сорта. Известны вероятности того, что из зерна вырастет колос, содержащий не менее 50 зерен: для I сорта – 0,5, для II сорта – 0,2, для III сорта – 0,15 и для IV сорта – 0,05. Из наудачу взятого зерна вырос колос, содержащий более 50 зерен. Найти вероятность, что наудачу взятое зерно относится к I сорту.

Решение.

Событие A - из наудачу взятого зерна вырос колос, содержащий более 50 зерен.

Это событие может произойти, если произойдет одна из несовместных гипотез:

H_1 - взятое наудачу зерно относится к I сорту;

H_2 - взятое наудачу зерно относится ко II сорту;

H_3 - взятое наудачу зерно относится к III сорту;

H_4 - взятое наудачу зерно относится к IV сорту.

Из условия задачи находим вероятности гипотез:

$$P(H_1)=0{,}96; \quad P(H_2)=0{,}01; \quad P(H_3)=0{,}02; \quad P(H_4)=0{,}01.$$

Проверим, будет ли сумма вероятностей этих гипотез равна 1:

$$P(H_1)+P(H_2)+P(H_3)+P(H_4)=0{,}96+0{,}01+0{,}02+0{,}01=1.$$

Условные вероятности события A при гипотезах H_1, H_2, H_3, H_4 равны: $P_{H_1}(A)=0{,}5$; $P_{H_2}(A)=0{,}2$; $P_{H_3}(A)=0{,}15$; $P_{H_4}(A)=0{,}05$. Тогда по формуле полной вероятности, найдем

$$P(A)=0{,}96\cdot 0{,}5+0{,}01\cdot 0{,}2+0{,}02\cdot 0{,}15+0{,}01\cdot 0{,}05=0{,}4865$$

Пусть событие A произошло. Переоценим вероятность первой гипотезы, а именно, найдем $P_A(H_1)$ - вероятность того, что зерно относится к I сорту при условии, что из него вырос полноценный колос. По формуле Байеса получим

$$P_A(H_1)=\frac{P(H_1)P_{H_1}(A)}{P(A)}=\frac{0{,}96\cdot 0{,}5}{0{,}4865}=0{,}988.$$

Ответ. 0,988.

Задачи для самостоятельной работы

1. В цехе имеется три станка. Вероятность изготовления детали первым станком равна 0,2; вторым - 0,3; третьим - 0,5. Вероятность того, что деталь имеет брак, для первого станка равна 0,02, для второго - 0,03, для третьего - 0,01. Определить : а) вероятность того, что случайно взятая деталь - стандартная; б) вероятность того, что деталь изготовлена на втором станке, если она оказалась стандартной. (*Ответ:* а) 0,982; б) 0,2963.)
2. В магазин поступили изделия с двух фабрик, причем 30 % - с фабрики № 1, остальные - с фабрики № 2. Вероятность того, что бракованное изделие с фабрики № 1 равна 0,02, с фабрики № 2 - 0,03. Покупатель наудачу приобрел изделие в магазине. Определить: а) вероятность того, что покупатель наугад приобрел стандартное изделие; б) вероятность того, что приобретенное изделие изготовлено фабрикой № 1, если оно оказалось стандартным. (*Ответ:* а) 0,973; б) 0,302.)

3. В автопарке имеется 10 грузовых автомобилей и 15 легковых. Вероятность того, что во время движения грузовик не выйдет из строя, равна 0,9, а для

легкового автомобиля - 0,7. Определить вероятность того, что: а) случайно выбранной автомобиль во время движения не выйдет из строя; б) автомобиль , который во время движения не вышел из строя, является грузовым первого типа. (*Ответ:* а) 0,78; б) 0,4615.)

4. В производственном цехе на сборку поступают детали с трех автоматов. Известно, что первый автомат выдает 0,4% брака, второй – 0,2%, третий – 0,3%. Определить вероятность попадания на сборку бракованной детали, если с первого автомата поступило 2500 деталей, со второго – 2000 деталей, с третьего – 1000 деталей. (*Ответ*: 0,0000056.)
5. В спортивных соревнованиях института принимают участие студенты двух факультетов: десять студентов инженерного и восемь энергетического. Вероятность того, что студент инженерного факультета попадет в сборную института, равна 0,8, а для студента энергетического факультета — 0,7. а) Какова вероятность того, что наудачу выбранный студент попал в сборную института; б) студент попал в сборную института. На каком факультете он вероятнее всего обучается? (*Ответ:* а)0,7555; б) на инженерном факультете.)

3. ПОВТОРНЫЕ НЕЗАВИСИМЫЕ ИСПЫТАНИЯ

При решении практических задач встречаются такие задачи, которые представляются в виде повторяющихся многократно испытаний, результатом каждого из которых будет появление или не появление события.

Особый интерес представляет исход общее число наступления события в результате вполне определенного числа испытаний. В таких задачах находится вероятность любого числа m появлений события A в результате произведенных n испытаний.

Будем рассматривать независимые испытания, и будем считать, что вероятность появления события A в каждом испытании будет равна одному и тому же числу, т.е. постоянна. Такие испытания будем называть *повторными независимыми испытаниями*.

В качестве примера независимых испытаний можно рассматривать проверку на качество некоторых изделий, которые берут по одному из ряда партий. Если в этих партиях процент качественных изделий одинаков, то вероятность того, что отобранное изделие будет качественным, в каждом случае является постоянным числом.

3.1. Формула Бернулли

Предположим, что производится n независимых испытаний, причем в каждом испытании событие A может либо появиться, либо не появиться ($\overline{A}$). Вероятность появления события A постоянна в каждом испытании и равна $P(A) = p$, а, следовательно, вероятность не появления равна $P\left(\overline{A}\right) - 1 - p = q$. Как же найти вероятность $P_n(m)$ того, что событие A наступит ровно n раз в m испытаниях? Попробуем найти ответ. Заметим, что появление или не появление события A могут чередоваться произвольно. Запишем возможные результаты испытаний в виде комбинации букв A и $\overline{A}$. Например, комбинация $A\overline{A}\overline{A}AA$ означает, что в пяти испытаниях событие A наступило в первом, четвертом и пятом испытаниях и не наступило во втором и третье испытаниях.

Любая комбинация, в которую A входит m раз $\overline{A}$ входит $(n - m)$ раз называется благоприятной. Число благоприятных комбинаций равно числу k способов, которыми можно выбрать m элементов из n элементов вычислим используя формулу для нахождения числа сочетаний из n элементов по m, т.е. $C_n^m = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$. Определим вероятности благоприятных комбинаций. Начнем со случая, когда событие A наступает в m испытаниях и не наступает в $(n - m)$ испытаниях. Такая благоприятная комбинация имеет вид

$B_1 = \underbrace{AA \dots A}_{m \text{ раз}} \underbrace{\overline{A}\overline{A} \dots \overline{A}}_{(n-m) \text{ раз}}$. На основании теоремы умножения независимых событий $P(B_1) = \underbrace{P(A)P(A) \dots P(A)}_{m \text{ раз}} \underbrace{P(\overline{A})P(\overline{A}) \dots P(\overline{A})}_{(n-m) \text{ раз}} = p^m \cdot q^{n-m}$.

В любой другой комбинации B_i событие A встречается раз, а событие $\overline{A}$ встречается $(n-m)$ раз и вероятность каждой из таких комбинаций также равна $p^m \cdot q^{n-m}$. Итак, $P(B_1) = p(B_2) = \cdots = P(B_k) = p^m \cdot q^{n-m}$. На основании теоремы сложения несовместных событий $P_n(m) = P(B_1 + B_2 + \cdots + B_k) = P(B_1) + P(B_2) + \cdots + P(B_k) = k \cdot p^m \cdot q^{n-m} = C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m}$ или $P_n(m) = \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m \cdot q^{n-m}$. Это формула называется формулой Бернулли, где

p – вероятность наступления события A в одном испытании;

$q = 1 - p$ - вероятность не наступления события A в одном испытании;

n – общее число производимых испытаний;

m – число испытаний, в которых наступит событие A;

$P_n(m)$ - вероятность того, что событие A наступит ровно m раз в n испытаниях.

Формулу Бернулли применяют при небольшом числе испытаний n, как правило меньше десяти.

Имеют место частные случаи: вероятность того, что в n испытаниях, событие A наступит:

а) менее m раз:

$$P_n(0) + P_n(1) + \dots + P_n(m-1),$$

б) более m раз:

$$P_n(m+1) + P_n(m+2) + \dots + P_n(n),$$

в) не менее m раз:

$$P_n(m) + P_n(m+1) + \dots + P_n(n),$$

г) не более m раз:

$$P_n(0) + P_n(1) + \dots + P_n(m),$$

д) хотя бы один раз:

$$P_n(m \geq 1) = 1 - P_n(0) = 1 - q^n .$$

Пример 3.1. В экзаменационном тесте 4 вопроса. На каждый вопрос есть 4 варианта ответов, среди которых только один правильный. Найти вероятность того, что студент правильного ответит на 2, 3 и 4 вопроса теста, если он не подготовлен к экзамену (отвечает наудачу).

Решение.

Событие A – выбран правильный ответ. Вероятность того, ответ правильный равна $P(A) = \frac{1}{4} = 0{,}25$, т.е. p = 0,25, тогда q = 1- 0,25 = 0,75.

Применяя формулу Бернулли, найдем

$P_4(2) = C_4^2\,(0{,}25)^2(0{,}75)^2 = \frac{4!}{2!\cdot 2!}0{,}0625 \cdot 0{,}5625 = 0{,}21;$

$P_4(3) = C_4^3\,(0{,}25)^3(0{,}75)^1 = \frac{4!}{3!\cdot 1!}0{,}015625 \cdot 0{,}75 = 0{,}047;$

$P_4(4) = C_4^4\,(0{,}25)^4(0{,}75)^0 = \frac{4!}{4!\,0!}0{,}003906 \cdot 1 = 0{,}004.$

Ответ. 0,21; 0,047; 0,004.

Пример. 3.2. Какова вероятность того, что из 5 посеянных семян моркови сорта «Витаминная» взойдет четыре семени, если всхожесть семян моркови данного сорта составляет 90%

Решение.

Событие A- посеянное семя моркови взойдет, тогда $p = \frac{90}{100} = 0{,}9;$ $q = 1 - 0{,}9 = 0{,}1.$ По условию задачи $n = 5, m = 4.$

Применяя формулу Бернулли, получим

$P_5(4) = C_5^4\,(0{,}9)^4(0{,}1)^1 = \frac{5!}{4!\,1!} \cdot 0{,}656\ \cdot 0{,}1 = 5 \cdot 0{,}0656 = 0{,}328.$

Ответ. 0,328.

Пример 3.3. Результаты исследований показали, что из всех заложенных в инкубатор яиц в среднем гусята выводятся из 70% . Наудачу отобраны и помечены шесть яиц из всего количества заложенных в инкубатор яиц. Какова вероятность того, что выведутся из помеченных яиц:

1) три гусенка,
2) менее трех гусят,
3) более трех гусят,
4) не менее трех гусят,
5) не более трех гусят;
6) хотя бы один гусенок?

Решение.

Проводятся испытания по выведению гусят. Вероятность того, что из заложенного в инкубатор яйца выведется гусенок (событие A) постоянна и равна

$p=0{,}7$, т.е. $P(A)=p=0{,}7$, не наступления - $P(\overline{A})=1-p=q=0{,}3$. Общее число независимых испытаний $n=6$.

1. Вероятность того, что из 6-ти яиц выведутся ровно три гусенка, находим по формуле Бернулли:

$$P_6(3)=C_6^3\cdot p^3\cdot q^3=20\cdot(0{,}7)^3\cdot(0{,}3)^3=0{,}185.$$

2. Требование «выведутся менее трех гусят» означает что, выведется или 0 гусят, или 1 гусенок, или 2 гусенка. Поэтому вероятность того, что из 6-ти яиц выведутся менее трех гусят, вычислим по формуле

$$P_6(k<3)=P_6(0)+P_6(1)+P_6(2),\text{ где}$$

$$P_6(0)=C_6^0\cdot p^0\cdot q^6=(0{,}3)^6=0{,}0008;$$

$$P_6(1)=C_6^1\cdot p^1\cdot q^5=C_6^1\cdot(0{,}7)^1(0{,}3)^5=0{,}01;$$

$$P_6(2)=C_6^2\cdot p^2\cdot q^4=C_6^2\cdot(0{,}7)^2(0{,}3)^4=0{,}06.$$

Тогда, $P_6(k<3)=P_6(0)+P_6(1)+P_6(2)=0{,}07$.

3. Требование «выведутся более трех гусят» означает, что выведутся или 4 гусенка, или 5 гусят, или 6 гусят. Следовательно, вероятность того, что из шести яиц выведутся более трех гусят, вычисляется по формуле:

$$P_6(k>3)=P_6(4)+P_6(5)+P_6(6),\text{ где}$$

$$P_6(4)=C_6^4\cdot p^4\cdot q^2=C_6^4\cdot(0{,}7)^4(0{,}3)^6=0{,}324,$$

$$P_6(5) = C_6^5 \cdot p^5 \cdot q^1 = C_6^5 \cdot (0{,}7)^5 (0{,}3) = 0{,}303,$$

$$P_6(6) = C_6^6 \cdot p^6 \cdot q^0 = (0{,}7)^6 = 0{,}118$$

Окончательно, $P_6(k > 3) = P_6(4) + P_6(5) + P_6(6) = 0{,}745$.

4. Требование «выведутся не менее трех гусят» означает, что выведутся или 3 гусенка, или 4 гусенка, или 5 гусят, или 6 гусят. Следовательно, вероятность того, что из 6-ти яиц выведутся не менее трех гусят, вычислим по формуле

$$P_6(k \geq 3) = P_6(3) + P_6(4) + P_6(5) + P_6(6),$$

значения слагаемых этого равенства найдены из предыдущих пунктов, тогда $P_6(k \geq 3) = 0{,}93$.

5. Требование «выведутся не более трех гусят» означает, что выведутся или 0 гусят, или 1 гусенок, или 2 гусенка, или 3 гусенка. *А* вероятность того, что из шести яиц выведутся не более трех гусят, будет равна

$$P_6(k \leq 3) = P_6(0) + P_6(1) + P_6(2) + P_6(3) = 0{,}256.$$

6. Вероятность того, что из шести яиц выведется хотя бы один гусенок, равна

$$P_6(k \geq 1) = 1 - P_6(0) = 1 - 0{,}0008 = 0{,}999.$$

Ответ. 1) 0,185; 2) 0,07; 3) 0,745; 4) 0,93; 5) 0,256; 6) 0,999.

2. 2. Наивероятнейшее число появлений события в независимых испытаниях

При решении задач часто появляется необходимость знать при каком значении m вероятность принимает наибольшее значение, т.е. нужно найти наивероятнейшее число m_0 наступления события A в данной серии опытов. Можно доказать, что число m_0 удовлетворяет неравенству

$$np - q \leq m_0 \leq np + p.$$

Отрезок $[np - n; p + p]$, в котором лежит m_0, имеет длину $np + p - (np - q) = np + p - np + q = p + q = 1$. Поэтому, если один из концов не является числом целым, то m_0 определяет одно число. Если же концы отрезка являются целыми числами, то будет два наивероятнейших числа $np - q$ и $np + p$.

Пример 3.4. В оранжерее кусты роз перед посадкой проверяют на заболевание. После проверки обнаружили 20% кустов роз с признаками заболевания. Определить наивероятнейшее число кустов роз без признаков заболевания из наудачу отобранных 9 кустов роз.

Решение.

Проводятся испытания по проверке кустов роз.

Событие A - проверенный куст розы окажется без заболевания.

Вероятность появления события A в каждом испытании постоянна и равна $p = 0{,}8$. Вероятность противоположного события $\overline{A}$ равна $q = 1 - p = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$. По условию задачи общее число независимых испытаний $n = 9$.

Наивероятнейшее число клубней без признаков заболевания находим из условия

$$np - q \le m_0 \le np + p\ .$$

Поскольку $n = 9$, $p = 0{,}8$, $q = 0{,}2$, то

$$9 \cdot 0{,}8 - 0{,}2 \le m_0 \le 9 \cdot 0{,}8 + 0{,}8,$$

т.е. $7 \le k_0 \le 8$. Отсюда следует, что имеем два наивероятнейших числа: $m_0{}' = 7$ или $m_0{}'' = 8$.

Ответ. 7 и 8.

Пример 3.4. Найти наивероятнейшее число всхожести семян моркови «Витаминная» в примере 3.2.

Решение.

По условию задачи n=5, p=0,9 , q=0,1. Тогда $5 \cdot 0{,}9 - 0{,}1 \le m_0 \le 5 \cdot 0{,}9 + 0{,}9$, $4{,}5 - 0{,}1 \le m_0 \le 4{,}5 + 0{,}9$, $4{,}4 \le m_0 \le 5{,}4 \ \Rightarrow\ m_0 = 5$.

Ответ. 5.

В случае большого числа испытаний при использовании формулы Бернулли возникаю проблемы с вычислениями, достаточно сложно возводить числа в высокие степени. Поэтому при больших значениях числа испытаний n пользуются другими формулами.

3.3. Локальная формула Лапласа

Произведено n независимых испытаний, в каждом из которых некоторое событие A может наступить или не наступить. Пусть вероятность появления события A в каждом испытании постоянна и равна $P(A)=p$, причем $0 < p < 1$. Тогда вероятность того, что в n испытаниях событие A появится ровно k раз, приближенно равна:

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x),$$

где $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$; $x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}$.

Функция $\varphi(x)$ табулирована и обладает следующими свойствами:

1) Четная, т.е. $\varphi(-x) = \varphi(x)$.
2) Монотонно убывает и $\lim\limits_{x\to\infty} \varphi(x) = 0$.
3) При $x > 4$ можно считать $\varphi(x) \approx 0$.

Практически этой формулой можно пользоваться при $npq \geq 20$. Таблица значений функции $\varphi(x)$ для некоторых $x \geq 0$ приводится в приложениях.

Пример 3.5. Садовод для посадки картофеля отобрал 1000 клубней, из которых 400 клубней сорта «Сарма». Случайным образом садовод сложил в емкость первые 100 клубней. Найти вероятность того, что среди взятых клубней окажется 37 клубней сорта «Сарма».

Решение.

Событие A - взятый клубень сорта «Сарма».

Вероятность появления события A в каждом испытании постоянна и равна $p = 0{,}4$. Число испытаний n немаленькое и $npq = 24 \geq 20$, поэтому воспользоваться локальной формулой Лапласа.

Произведем необходимые вычисления:

а) Запишем кратко условие задачи.

Дано: $n = 100$, $p = 0{,}4$, $q = 0{,}6$, $k = 37$.

Определить $P_{100}(37)$.

б) Вычислим $\sqrt{npq} = \sqrt{100 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}6} = \sqrt{24} \approx 4{,}9$.

в) Определим $x = \dfrac{k - np}{\sqrt{npq}} = \dfrac{37 - 40}{4{,}9} = -0{,}612$.

г) Искомая вероятность $P_{100}(37) \approx \dfrac{0{,}3308}{4{,}9} \approx 0{,}0675$.

Ответ. 0,0675.

Пример 3.6. Вероятность того, что при пошиве верхней одежды некоторой фабрикой изделие окажется бракованным, постоянна и равна 0,05. 1) Найти вероятность того, что в партии из 1000 изделий окажется ровно 40 бракованных. 2) Сколько доброкачественных изделий ожидается с вероятностью 0,042?

Решение.

Производятся независимые испытания по пошиву изделий, в каждом из которых два исхода: изделие – бракованное (событие *А)* и изделие – доброкачественное. Вероятность появления события *А* в каждом испытании известна и равна $p = 0{,}05$.

1) Из условий задачи следует, что *n*=1000, $p = 0{,}05$, $q = 1 - 0{,}05 = 0{,}95$, $k = 40$.

Необходимо найти $P_{1000}(40)$.

В данном случае удобнее использовать локальную формулу Лапласа, т.к. число испытаний n велико и $npq = 1000 \cdot 0{,}05 \cdot 0{,}95 = 47{,}5 > 20$.

Вычисляем значение $\sqrt{npq} = \sqrt{47{,}5} \approx 6{,}892$, а также найдем значение аргумента для функции $\varphi(x)$: $x = \dfrac{k - np}{\sqrt{npq}} = \dfrac{40 - 50}{6{,}892} = -1{,}45$.

Из таблицы значений функции $\varphi(x)$ следует, что для $x = 1{,}45$ $\varphi(1{,}45) = 0{,}1394$.

Искомая вероятность $P_{1000}(40) \approx \dfrac{0{,}1394}{6{,}892} = 0{,}02$.

2). Дано $n = 1000$, $p = 0{,}95$ (вероятность не бракованного изделия), $q = 0{,}05$, $P_{1000}(k) = 0{,}042$. Найти k.

Т. к. $\sqrt{npq} = \sqrt{1000 \cdot 0{,}95 \cdot 0{,}05} = \sqrt{47{,}5} \approx 6{,}892$, то

$$P_{1000}(k) \approx \frac{1}{6{,}892} \cdot \varphi(x) = 0{,}042.$$

Из этого равенства находим функцию $\varphi(x) = 6{,}892 \cdot 0{,}042 \approx 0{,}289$. По таблице значений функции $\varphi(x)$ определяем $x \approx \pm 0{,}8$. Учитывая, что

$$x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}} = \frac{k - 1000 \cdot 0{,}95}{6{,}892} = \frac{k - 950}{6{,}892}, \quad \text{получаем} \quad \frac{k - 950}{6{,}892} = \pm 0{,}8.$$

Отсюда $k = 950 \pm 0{,}8 \cdot 6{,}892$, $k = 950 \pm 5{,}51$. Т.к. k - целое число, то $k = 955$ или $k = 945$.

Ответ. 1) 0,1394; 2) 955 или 945.

Для частного случая при $p = \frac{1}{2}$, формула была найдена в 1730 году Муавром. Лаплас обобщил формулу Муавра для произвольного значения вероятности p, отличного от 0 и 1. Поэтому формулу иногда называют формулой Муавра-Лапласа.

3. 4. Интегральная формула Лапласа

Во многих задачах требуется найти вероятность того, что событие A наступит не менее k_1 и не более k_2 раз. Эту вероятность можно вычислить приближенно по формуле

$$P(k_1 \le k \le k_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1),$$

где $x_1 = \dfrac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}$, $x_2 = \dfrac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$, $q = 1 - p$, $\Phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ - функция Лапласа.

Эту формулу называют интегральной формулой Лапласа, применяют при $n > 10$ и при значениях вероятности p, не слишком близких к нулю или к единице.

Функция Лапласа табулирована и обладает следующими свойствами:

1. функция $\Phi(x)$ нечетная, $\Phi(-x) = -\Phi(x)$,
2. $\lim\limits_{x \to \infty} \Phi(x) = 0{,}5$ и $\Phi(0) = 0$,
3. для значений $x > 5$ можно считать $\Phi(x) \approx 0{,}5$.

Пример 3.7. Во время уборки свеклы при помощи специализированных машин в среднем получают повреждения 10% корнеплодов. Какова вероятность того, что из наудачу выбранных 200 корнеплодов повреждения получат от 15 до 50 корнеплодов?

Решение.

Событие A - корнеплод свеклы получил повреждение. Вероятность наступления события A в каждом испытании постоянна и по классическому определению вероятности равна $p = \dfrac{10\%}{100\%} = 0{,}1$.

По условию задачи $n = 200$, $p = 0{,}1$, $q = 0{,}9$, $k_1 = 15$, $k_2 = 50$.

Определим $P(15 \le k \le 50)$.

Вычислим $\sqrt{npq} = \sqrt{200 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9} \approx 4{,}24$;

$x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{50 - 200 \cdot 0{,}1}{4{,}24} = \frac{30}{4{,}24} = 7{,}07$;

$$x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{15 - 200 \cdot 0{,}1}{4{,}24} = \frac{-5}{4{,}24} = -1{,}18;$$

Т.к. $x_2 > 5$, то по таблице находим $\Phi(7{,}07) \approx 0{,}5$. Учитывая нечетность функции Лапласа, получим $\Phi(-1{,}18) = -\Phi(1{,}18)$, из таблицы найдем $\Phi(1{,}18) = 0{,}3810$;

Применяя интегральную формулу Лапласа найдем искомую вероятность

$$P(15 \le k \le 50) \approx \Phi(7{,}07) - \Phi(-1{,}18) \approx 0{,}5 + 0{,}3810 = 0{,}881.$$

Ответ. 0,881.

Пример 3.8. Известно, что градом повреждаются посевы примерно одного из 50 фермерских хозяйств области. Найти вероятность того, что в 200 фермерских хозяйствах, имеющихся в области, будут повреждены посевы от града: а) не более, чем в двух фермерских хозяйствах; б) не менее, чем в восьми фермерских хозяйствах.

Решение.

Производится испытания по проверке повреждения градом посевов фермерских хозяйств области. В каждом испытании может наступить или не наступить событие A - будет повреждены от града посевы одного фермерского хозяйства. Событие A имеет постоянную вероятность в каждом испытании, которая равна $p = \frac{1}{50} = 0{,}02$.

а). Из условия задачи следует, что $n = 200$, $p = 0{,}02$, $q = 0{,}98$, $k_1 = 0$, $k_2 = 2$.

Определим вероятность того, что будут повреждены посевы от града не более в двух фермерских хозяйствах, т.е. $P(0 \le k \le 2)$.

Для этого вычислим $\sqrt{npq} = \sqrt{200 \cdot 0{,}02 \cdot 0{,}98} = \sqrt{3{,}92} \approx 2$,

$$x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{2-4}{2} = -1,$$

$$x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{0-4}{2} = -2 \cdot$$

Из таблицы значений функции Лапласа находим $\Phi(2) \approx 0{,}4772$; $\Phi(1) \approx 0{,}3413$

Теперь по интегральной формуле Лапласа получим

$$P(0 \le k \le 2) \approx \Phi(-1) - \Phi(-2) = \Phi(2) - \Phi(1) \approx$$
$$\approx 0{,}4772 - 0{,}3413 = 0{,}1359.$$

б). По условию задачи $n = 200$, $p = 0{,}02$, $q = 0{,}98$, $k_1 = 8$, $k_2 = 200$.

Найдем $P(8 \le k \le 200)$.

Проводя такую же последовательность, как и в пункте 1, получим

$x_2 = 98$; $x_1 = 2$; $\Phi(x_2) = \Phi(98) = 0{,}5$; $\Phi(x_1) = \Phi(2) = 0{,}4772.$

Отсюда: $P(8 \le k \le 200) \approx 0{,}5 - 0{,}4772 = 0{,}0228 \cdot$

Ответ. 1) 0,1359; 2) 0,0228.

3.5. Формула Пуассона

Предположим, что производится n независимых испытаний, в каждом из которых событие A может наступить или не наступить. Вероятность появления события A в каждом испытании равна p и мала, а число n испытаний – велико. Тогда вероятность того, что в n испытаниях событие наступит ровно m раз, вычисляется по формуле

$$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad \text{где } \lambda = np, \lambda \le 10.$$

Эту формулу называют формулой Пуассона. Значения функции $P(k, \lambda)$ приводится в приложениях. Применяют формулу Пуассона в теории массового обслуживания.

Пример 3.9. При выработке некоторой массовой продукции вероятность изготовления некачественного изделия равна 0,004. Определить вероятность того, что в партии из 1000 изделий ровно окажется 5 окажется некачественных.

Решение.

Событие A - изготовление некачественного изделия. В каждом испытании события A наступает с постоянной вероятностью, которая $p = 0{,}004$. Таким образом, $p = 0{,}004$, $q = 0{,}996$, $n = 1000$.

Чтобы найти вероятность того, что из 1000 изделий окажется ровно 5 некачественных, применим формулу Пуассона, т.к. число испытаний велико, а вероятность p мала $(p < 0{,}1)$ и $\lambda = 4 < 10$.

$$P_{1000}(5) \approx \frac{\lambda^5}{5!} e^{-\lambda}, \text{ где } \lambda = np = 0{,}004 \cdot 1000 = 4.$$

Искомая вероятность равна

$$P_{1000}(5) \approx \frac{4^5}{5!} e^{-4} \approx 0{,}1563.$$

Ответ. 0,1563.

Пример 3.10. В некоторой партии семян овса содержится 0,6% сорняков. Найти вероятность того, что среди наудачу отобранных 1000 семян овса обнаружат ровно 6 семян сорняков?

Решение.

Производятся независимые испытания – отбор семян. В каждом испытании два исхода: появление семени сорняка (событие A) и появление семени овса. Легко найти вероятность события A и вероятность противоположного события, т.е. появление семени овса: $p = 0{,}006$, $q = 1 - 0{,}006 = 0{,}994$. По условию задачи $n = 1000$. Так как вероятность мала, число испытаний велико и $\lambda < 10$, то для вычисления вероятности того, что при отборе 1000 семян обнаружится 6 семян сорняков, применим формулу Пуассона:

$$P_{1000}(6) \approx \frac{6^6}{6!} e^{-6} \approx 0{,}16.$$

Ответ. 0,16.

Задачи для самостоятельной работы

1. Статистикой установлено, что из каждой тысячи родившихся детей в среднем рождается 485 девочек и 515 мальчиков. Найти вероятность того, что в семье из 5 детей а) три девочки, б) не более трех девочек, в) не менее двух, но не более четырех девочек. (*Ответ*. 0,3; 0,83; 0,651)
2. Численность студентов некоторого факультета составляет 500 человек. Для каждого студента факультета вероятность отсутствия на занятиях по уважительной причине равна 0,01. Найти вероятность того, что в ближайший день пропустит занятия хотя бы один из студентов факультета. (*Ответ*: 0,993)
3. Семена некоторой культуры имеют всхожесть 75%. Определить вероятность того, что из 500 посеянных семян этой культуры не взойдет 130. (*Ответ*: ≈ 0,036)
4. Токарь изготавливает 2000 различных деталей. Вероятность изготовления нестандартной детали мала и равна 0,0005. Определить вероятность изготовления двух нестандартных деталей. (*Ответ*: 0,1838)
5. Для восстановления сгоревшего леса высажено 400 кедровых саженцев. Вероятность того, что саженец кедра приживется и продолжит расти, равна 0,8. Найти вероятность того, что приживется и будут расти не менее 250 деревьев. (*Ответ*: ≈ 1)
6. Среди 1000 женщин приблизительно 8 имеют рост 180 см. Найти вероятность того, что среди сотни наудачу выбранных женщин не будет ни одной с ростом 180 см. (*Ответ*: ≈ 0,4493)
7. В информационном центре работает 70 персональных компьютеров. Вероятность выхода из строя компьютера равна 0,2. Найти наивероятнейшее число исправных компьютеров, а также вероятность этого числа. (*Ответ*: 56; 0,119)

8. Вероятность поражения цели стрелком при одиночном выстреле равна $p = 0{,}2$. Какова вероятность поразить цель 20 раз, если произведено 100 выстрелов (*Ответ*: 0,1)
9. В страховой компании 10 тысяч клиентов, застраховавших свой автотранспорт. Страховой взнос составляет 2000 денежных единиц, вероятность наступления страхового случая равна $p = 0{,}005$, страховая выплата клиенту при страховом случае составляет 200 тысяч денежных единиц. Найти размер прибыли страховой компании с вероятностью p равной 0,9. (*Ответ*: 8 млн. ден. ед.)

4. СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ. ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Среди задач, решаемых в теории вероятностей, много таких, в которых исход опыта выражается некоторой величиной.

Рассмотрим следующие примеры.

1. Число писем, поступающих в некоторое почтовое отделение за некоторый период времени.
2. Число родившихся мальчиков в первый день нового года.
3. Число проведенных выстрелов до первого попадания.
4. Расстояние, которое пролетит пуля при выстреле из ружья.
5. Количество выпавших осадков в апреле.
6. Высота стебля гороха за период вегетации.

В первых трех примерах величины могут принимать значения, которые отделены промежутками, в которых нет возможных значений данной величины. А в последних трех примерах величины могут принимать любые значения из некоторого промежутка.

В этих примерах есть и общее:

1) Все величины характеризуют некоторое случайное событие.

2) Все величины могут принимать переменные числовые значения, которые зависят от случайного исхода испытания.

Событие это качественная характеристика случайного результата опыта, а случайная величина - количественная характеристика.

4.1. Понятие случайной величины

Случайной величиной называется величина, которая принимает одно из возможного множества своих значений в зависимости от случая, причем какое именно – заранее неизвестно.

Случайные величины обозначают большими латинскими буквами латинского алфавита $X, Y, Z, \ldots$, а значения этих величин - соответствующими маленькими буквами $x, y, z, \ldots$

Все случайные величины делятся на дискретные и непрерывные.

Дискретной случайной величиной (ДСВ) называют случайную величину, которая принимает конкретные изолированные значения. ДСВ может принимать конечное или бесконечное множество значений, которые можно занумеровать с помощью натуральных чисел.

Геометрически множество всех возможных значений ДСВ представляет конечную систему точек числовой оси.

Примеры: количество студентов на экзамене; количество поросят, родившихся от одной свиноматки; число произведенных выстрелов до первого попадания в цель из орудия.

Непрерывной случайной величиной (НСВ) называют случайную величину, которая может принимать все значения из некоторого интервала (конечного или бесконечного).

Примеры: высота стебля гороха в период вегетации; процент жира в сливочном масле; расход горячей воды в течение месяца; прибавление в весе ребенка в первую неделю жизни.

Все возможные значения НСВ невозможно перечислить, их число бесконечно.

Описать случайную величину можно ее законом распределения.

Если можно составить соотношение между возможными значениями случайной величины и их соответствующими вероятностями, то это соотношение называют *законом распределения* случайной величины.

4.2. Закон распределения дискретной случайной величины.

Пусть X - дискретная случайная величина, возможными значениями которой являются числа $x_1, x_2, ...x_n$. Обозначим через $p_i = P(X = x_i)$ вероятности этих значений, т.е. p_i есть вероятность того, что случайная величина X примет значение x_i, где i=1,2,3…,n.

События X=x_i , $i = \overline{1,n}$ образуют полную группу событий, так как одно из них обязательно произойдет, поэтому $p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$.

Соответствие между всеми возможными значениями дискретной случайной величины и их вероятностями называют *законом распределения ДСВ*.

Закон распределения задают в виде таблицы или матрицы

x_i	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
p_i	p_1	p_2	$\cdots$	p_n

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \dots & x_n \\ p_1 & p_2 \dots & p_n \end{pmatrix}.$$

И там и там в первой строке содержатся все возможные значения (как правило, в порядке возрастания) случайной величины, а во второй – их вероятности.

Такую таблицу (матрицу) называется *рядом распределения*.

Графически закон распределения ДСВ можно изобразить в виде ломаной, соединяющей последовательно точки $(x_1;\ p_1)$, $(x_2;\ p_2)$. Эту ломаную называют *многоугольником распределения* (рис. 1). При этом на оси абсцисс отмечают возможные значения случайной величины, а на оси ординат – их соответствующие вероятности.

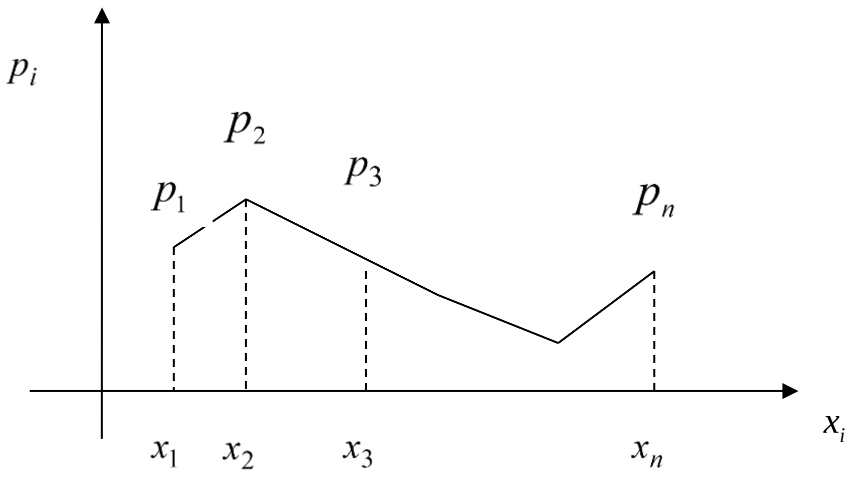


Рис.1 Многоугольник распределения

При решении задач необходимо знать понятие независимости случайных величин и операции со случайными величинами.

Две ДСВ X и Y называются *независимыми*, если события $\{X = x_i\} = A_i$ и $\{Y = y_j\} = B_j$ независимы для любых $i = 1, 2, ..., n$; $j = 1, 2, ..., m$, т.е.

$$P[\{X = x_i\}\{Y = y_j\}] = P\{X = x_i\} \cdot P\{Y = y_j\}.$$

Суммой (разностью, произведением) ДСВ X, принимающей значения x_i с вероятностями $p_i = P\{X = x_i\}$, $i = 1, 2, ..., n$ и ДСВ Y, принимающей значения y_j с вероятностями $p_j = P\{Y = y_j\}$, $j = 1, 2, ..., m$, называется ДСВ $Z = X + Y(Z = X - Y,\ Z = X \cdot Y)$, принимающая значения $z_{ij} = x_i + y_j$ $(z_{ij} = x_i - y_j;\ z_{ij} = x_i \cdot y_j)$ с вероятностями $p_{ij} = P[\{X = x_i\}\{Y = y_j\}]$ для всех указанных значений i и j.

В случае независимых случайных величин X и Y справедливо равенство $p_{ij} = P[\{X = x_i\}\{Y = y_j\}] = P\{X = x_i\} \cdot P\{Y = y_j\} = p_i \cdot p_j$.

Отметим, что в случае совпадения некоторых сумм $x_i + y_j$ (разностей $x_i - y_j$, произведений $x_i \cdot y_j$) соответствующие вероятности складываются.

Произведением ДСВ X на постоянное число c назовем ДСВ $Z = cX$, принимающую значения cx_i с теми же самыми вероятностями, что и случайная величина X, т.е. $P\{Z = cx_i\} = p_i$.

При решении практических задач встречается степень случайной величины.

m*-ой степенью ДСВ* X называется ДСВ $Z = X^m$, которая принимает значения x_i^m с теми же вероятностями, что и СВ X, т.е. $P\{Z = X^m\} = p_i$.

Пример 4.1. Пусть случайная величина X - число очков, выпадающих при одном бросании игрального кубика. Найти ряд распределения этой величины.

Решение.

Случайная величина X - число очков, выпадающих при одном бросании игрального кубика. Возможные значения, которые может принять случайная величина равны: $x_1 = 1$; $x_2 = 2$; $x_3 = 3$; $x_4 = 4$; $x_5 = 5$; $x_6 = 6$.

Так как все шесть возможных значений случайная величина X принимает с равной вероятностью, то по классическому определению вероятность p_i каждого из значений равна $\frac{1}{6}$.

Составим ряд распределения:

x_i	1	2	3	4	5	6
p_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Для проверки суммируем вероятности: $\sum_{i=1}^{6} p_i = 1$.

Пример 4.2. Известны вероятности того, что студент экзамен в сессию по дисциплинам «Математика» и «Физика», равны соответственно 0,7 и 0,9. Найти закон распределения и построить многоугольник распределения числа экзаменов, которые сдаст студент.

Решение.

Случайная величина X - число экзаменов, которые сдаст студент, может принять одно из следующих трех значений: $x_1 = 0$; $x_2 = 1$; $x_3 = 2$. Найдем соответствующие вероятности p_1, p_2, p_3. Для этого воспользуемся теоремами умножения вероятностей независимых событий и сложения вероятностей несовместных событий:

$$p_1 = P\{X = 0\} = p\{\textit{студент не сдаст } 1-\textit{й и } 2-\textit{й экзамены}\} =$$
$$= (1-0{,}7)(1-0{,}9) = 0{,}3 \cdot 0{,}1 = 0{,}03;$$

$$p_2 = P\{X = 1\} = p\{\textit{студент сдаст только один экзамен}\} =$$
$$= 0{,}7 \cdot (1-0{,}9) + (1-0{,}7) \cdot 0{,}9 = 0{,}07 + 0{,}27 = 0{,}34;$$

$$p_3 = P\{X = 2\} = p\{\textit{студент сдаст } 1-\textit{й и } 2-\textit{й экзамены}\} = 0{,}7 \cdot 0{,}9 = 0{,}63.$$

Таким образом, ряд распределения СВ X имеет вид

x_i	0	1	2
p_i	0,03	0,34	0,63

(Контроль: $\sum_{i=1}^{3} p_i = 0{,}03 + 0{,}34 + 0{,}63 = 1$).

Многоугольник распределения представлен на рис.2.

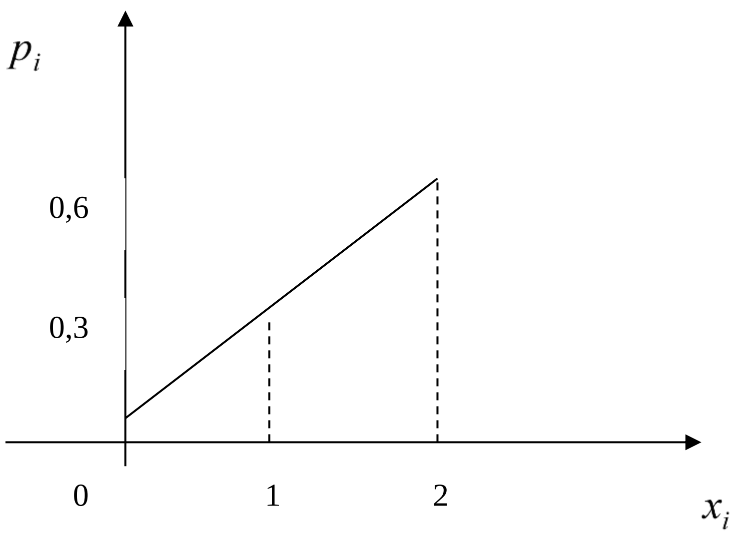


Рис.2 Многоугольник распределения для примера 4.2

Пример 4.3. Две независимые случайные величин X и Y заданы законами распределения:

x_i	0	2	4
p_i	0,5	0,2	0,3

y_j	0	1
p_j	0,3	0,7

Составить законы распределения случайных величин:

а) $Z = X + Y$; б) $U = XY$.

Решение.

а) Перечислим все возможные значения Z: $z_{ij} = x_i + y_j$ $(i = 1; 2; 3; \ \ j = 1; 2)$.

1) К значению $x_1 = 0$ прибавим все возможные значения: $x_1 + y_1 = 0 + 0 = 0$ и $x_1 + y_2 = 0 + 1 = 1$.

2) К значению $x_2 = 2$ прибавим все возможные значения y_j: $x_2 + y_1 = 2 + 0 = 2$ и $x_2 + y_2 = 2 + 1 = 3$.

3) К значению $x_3 = 4$ прибавим все возможные значения y_j: $x_3 + y_1 = 4 + 0 = 4$ и $x_3 + y_2 = 4 + 1 = 5$.

В результате совместного появления двух независимых событий появления значения $X = x_1 = 0$ и появления значения $Y = y_1 = 0$ получается значение $z_{11} = 0$. Результатом совместного появления этих событий является произведение этих событий. Следовательно, по теореме умножения вероятностей двух независимых событий, найдем вероятность того, что появится значение z_{11}: $P\{Z = z_{11}\} = P\{Z = 0\} = P\{X = 0\} \cdot P\{Y = 0\} = 0{,}5 \cdot 0{,}3 = 0{,}15$.

По аналогии, найдем вероятности всех остальных возможных значений величины Z:

$$P\{Z = z_{12}\} = P\{Z = 1\} = P\{X = 0\} \cdot P\{Y = 1\} = 0{,}5 \cdot 0{,}7 = 0{,}35;$$

$$P\{Z = z_{21}\} = P\{Z = 2\} = P\{X = 2\} \cdot P\{Y = 0\} = 0{,}2 \cdot 0{,}3 = 0{,}06;$$

$$P\{Z = z_{22}\} = P\{Z = 3\} = P\{X = 2\} \cdot P\{Y = 1\} = 0{,}2 \cdot 0{,}7 = 0{,}14;$$

$$P\{Z = z_{31}\} = P\{Z = 4\} = P\{X = 4\} \cdot P\{Y = 0\} = 0{,}3 \cdot 0{,}3 = 0{,}09;$$

$$P\{Z = z_{32}\} = P\{Z = 5\} = P\{X = 4\} \cdot P\{Y = 1\} = 0{,}3 \cdot 0{,}7 = 0{,}21.$$

Так как возможные значения Z не повторяются, то в результате получим следующий ряд распределения случайной величины Z:

z_k	0	1	2	3	4	5
p_k	0,15	0,35	0,06	0,14	0,09	0,21

(Контроль: $\sum_{K=1}^{6} P_k = 1$);

б) Теперь найдем ряд распределения случайной величины $U = XY$.

Перечислим все возможные значения случайной величины U: $u_{ij} = x_i \cdot y_j$ $(i = 1; 2; 3;\ j = 1; 2)$.

$$u_{11} = x_1 \cdot y_1 = 0 \cdot 0 = 0, \quad u_{12} = x_1 \cdot y_2 = 0 \cdot 1 = 0,$$

$$u_{21} = x_2 \cdot y_1 = 2 \cdot 0 = 0, \quad u_{22} = x_2 \cdot y_2 = 2 \cdot 1 = 2,$$

$$u_{31} = x_3 \cdot y_1 = 4 \cdot 0 = 0, \quad u_{32} = x_3 \cdot y_2 = 4 \cdot 1 = 4.$$

Соответствующие им вероятности:

$$P\{U = u_{11}\} = P\{U = 0\} = P\{X = 0\} \cdot P\{Y = 0\} = 0{,}5 \cdot 0{,}3 = 0{,}15;$$

$$P\{U = u_{12}\} = P\{U = 0\} = P\{X = 0\} \cdot P\{Y = 1\} = 0{,}5 \cdot 0{,}7 = 0{,}35;$$

$$P\{U = u_{21}\} = P\{U = 0\} = P\{X = 2\} \cdot P\{Y = 0\} = 0{,}2 \cdot 0{,}3 = 0{,}06;$$

$$P\{U = u_{22}\} = P\{U = 2\} = P\{X = 2\} \cdot P\{Y = 1\} = 0{,}2 \cdot 0{,}7 = 0{,}14;$$

$$P\{U = u_{31}\} = P\{U = 0\} = P\{X = 4\} \cdot P\{Y = 0\} = 0{,}3 \cdot 0{,}3 = 0{,}09;$$

$$P\{U = u_{32}\} = P\{U = 4\} = P\{X = 4\} \cdot P\{Y = 1\} = 0{,}3 \cdot 0{,}7 = 0{,}21.$$

Среди 6 значений U имеются повторяющиеся, поэтому вероятность того, что СВ U примет значение $U = 0$ все равно каким из четырех способов, определим по теореме сложения вероятностей несовместных событий:

$$P\{U = 0\} = 0{,}15 + 0{,}35 + 0{,}06 + 0{,}09 = 0{,}65$$

В итоге получаем закон распределения случайной величины $U = XY$:

u_k	0	2	4
p_k	0,65	0,14	0,21

(Контроль: $\sum_{k=1}^{3} p_k = 0{,}65 + 0{,}14 + 0{,}21 = 1$).

Пример 4.4. Задано распределение ДСВ X

x_i	-3	-2	0	2	3
p_i	0,1	0,4	0,2	0,1	0,1

Построить ряд распределения случайных величин:

а) $Y = 2X$; б) $Z = X^2$.

Решение.

а) Перечислим все возможные значения случайной величины Y:

$$y_1 = 2 \cdot (-3) = -6; \quad y_2 = 2 \cdot (-2) = -4; \quad y_3 = 2 \cdot 0 = 0;$$

$$y_4 = 2 \cdot 2 = 4; \quad y_5 = 2 \cdot 3 = 6.$$

Используя понятие умножения случайной величины на постоянное число, найдем соответствующие вероятности:

$$P\{Y = -6\} = P\{X = -3\} = 0{,}1; \quad P\{Y = -4\} = P\{X = -2\} = 0{,}4;$$

$$P\{Y = 0\} = P\{X = 0\} = 0{,}2; \quad P\{Y = 4\} = P\{X = 2\} = 0{,}1;$$

$$P\{Y = 6\} = P\{X = 3\} = 0{,}2.$$

На основании полученных данных запишем закон распределения случайной величины $Y = 2X$:

y_i	-6	-4	0	4	6
p_i	0,1	0,4	0,2	0,1	0,2

(Контроль $\sum_{i=1}^{5} Pi = 0{,}1 + 0{,}4 + 0{,}2 + 0{,}1 + 0{,}2 = 1$).

б) Перечислим значения случайной величины Z, используя понятие степени случайной величины:

$Z_1 = (-3)^2 = 9$; $Z_2 = (-2)^2 = 4$; $Z_3 = 0$; $Z_4 = 2^2 = 4$; $Z_5 = 3^2 = 9$.

Значения $Z = 9$ и $Z = 4$ повторяются по два раза, поэтому по теореме сложения вероятностей несовместных событий:

$$P\{Z = 9\} = 0{,}1 + 0{,}2 = 0{,}3.$$

По аналогии найдем $P\{Z = 4\} = 0{,}4 + 0{,}1 = 0{,}5$.

На основании полученных данных составим ряд распределения случайной величины *Z*:

z_i	0	4	9
p_i	0,2	0,5	0,3

(Контроль: $\sum_{i=1}^{3} p_i = 0{,}2 + 0{,}5 + 0{,}3 = 1$).

Задачи для самостоятельной работы

1. В денежной лотерее разыгрывается 1000 билетов. Имеется один выигрыш в 10000 руб., четыре – по 5000 руб., пять – по 4000 руб., десять – по 1000 руб. Составить закон распределения стоимости выигрыша для владельца одного билета и построить многоугольник распределения.
2. Экзаменационный билет содержит три вопроса. Вероятности правильного ответа на вопросы соответственно первой задачи равны 0,9; 0,8 и 0,7. Найти закон распределения правильных ответов на вопросы билета.
3. Произведено два залпа из орудий по мишени. Вероятность попадания в мишень из первого орудия равна 0,8, из второго – 0,7. Найти закон распределения числа попаданий по мишени. (Из каждого орудия произведено по одному залпу).

4. X и Y - независимые случайные величины. Построить ряд распределения для случайных величин $Z = X - Y$ и $W = X \cdot Y$, если даны законы распределения случайных величин X и Y:

x_i	2	8
p_i	0,4	0,6

y_j	1	4
p_j	0,3	0,7

5. Случайная величина X имеет закон распределения, определяемый таблицей

x_i	-3	-1	0	1	3	5
p_i	0,1	0,15	0,15	0,25	0,05	0,3

Найти распределение случайной величины:

а) $Y = 3X + 1$; б) $Z = X^3$.

6. Пусть даны законы распределения независимых случайных величин X и Y:

x_i	-1	0	-1	y_j	1	2	3	4
p_i	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	p_j	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

Найти ряд распределения случайной величины $Z = 3X + 2Y$.

4.3. Функция распределения случайной величины

Закон распределения случайной величины можно задать при помощи функции распределения. Этот способ является более удобным и универсальным.

Функцией распределения случайной величины X называют функцию $F(x)$, которая для любого $x \in R$ равна вероятности того, что случайная величина примет значение $X<x$, т.е. $F(x) = P\{X < x\}$. (4.3.1)

Также функцию $F(x)$ называют *интегральной функцией (законом) распределения*. С геометрической точки зрения функция распределения есть вероятность того, что случайная величина X примет значение, которое лежит левее точки x, т.е. случайная точка X попадет в интервал $(-\infty; x)$ (рис 3)

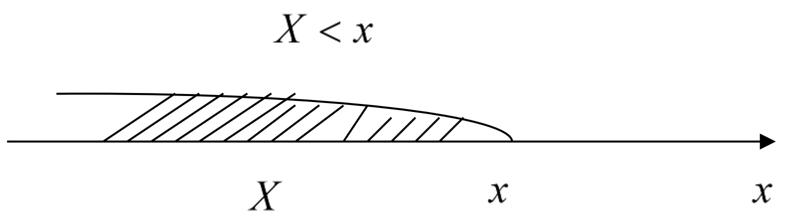


Рис.3 Геометрическая интерпретация функции распределения

Функция распределения обладает следующими свойствами:

1. $0 \le F(x) \le 1$
2. $F(x)$- неубывающая функция аргумента x, т.е. при $x_2 > x_1$ $F(x_2) \ge F(x_1)$.
3. $F(-\infty) = 0$, $F(+\infty) = 1$. Если возможные значения случайной величины X принадлежат отрезку $[a,b]$, то $F(x) = 0$ если $x \le a$ и $F(x) = 1$ если $x \ge b$.
4. Вероятность попадания случайной величины X в промежуток $[a;b)$ равна приращению функции распределения на этом промежутке, т.е.

$$P\{a \le X \le b\} = F(b) - F(a) . \qquad (4.3.2)$$

5. Вероятность события $\{X = \alpha\}$ равна величине скачка функции распределения случайной величины X в точке α .

Используя функцию распределения можно вычислить вероятность события $\{X \ge x\}$: $P\{X \ge x\} = 1 - F(x)$. (4.3.3)

4.4. Функция распределения ДСВ

Для дискретной случайной величины функция распределения есть разрывная ступенчатая функция. В точках, которые соответствуют возможным значениям случайной величины, происходят скачки, которые равны вероятностям этих значений.

Скачки функции $F(x)$ в сумме равны 1.

Пример 4.5. Для дискретной случайной величины дан ряд следующий распределения:

x_i	-2	0	3	7
p_i	0,3	0,1	0,5	0,1

Написать функцию распределения $F(x)$ и построить ее график

Решение.

Придаем x различные значения и находим для них значение функции распределения $F(x) = P\{X < x\}$.

1) Если $x \le -2$, то на промежутке $-\infty < x \le -2$ случайная величина X нет значений, меньшего числа -2, следовательно

$$F(x) = F(-2) = P\{X < -2\} = 0.$$

2) Если $-2 < x \le 0$, то на промежутке $-2 < x \le 0$ величина X примет одно значение $X = 0$, функция распределения $F(x) = F(0) = P\{X < 0\}$. Вероятность того, что X меньше 0, равна 0,3. На рассматриваемом промежутке $F(x) = F(0) = P\{X < 0\} = 0{,}3$.

3) Если $0 < x \le 3$, то на промежутке $0 < x \le 3$ случайная величина X примет одно значение $X = 3$, функция распределения $F(x) = F(3) = P\{X < 3\}$. Для $X < 3$случайная величина X может принять или значение -2 с вероятностью 0,3, или же значение 0 с вероятностью 0,1, поэтому одно из этих значений, безразлично какое, по теореме сложения вероятностей несовместных событий X может принять с вероятностью $0{,}3 + 0{,}1 = 0{,}4$. Тогда,

$$F(x) = F(3) = P\{X < 3\} = P\{X = -2\} + P\{X = 0\} = 0{,}3 + 0{,}1 = 0{,}4.$$

4) Если $3 < x \le 7$, то на промежутке $3 < x \le 7$ случайная величина X может принять одно значение $X = 7$, функция распределения $F(x) = F(7) = P\{X < 7\}$. Для $X < 7$ случайная величина X может принять или значение -2 с вероятностью 0,3, или значение 0 с вероятностью 0,1, или значение 3 с вероятностью 0,5, поэтому одно из этих значений, безразлично какое, по теореме сложения вероятностей несовместных событий X может принять с вероятностью $0{,}3 + 0{,}1 + 0{,}5 = 0{,}9$. Тогда, на данном промежутке

$$F(x) = F(7) = P\{X < 7\} = P\{X = -2\} + P\{X = 0\} + P\{X = 3\} =$$

$$= 0{,}3 + 0{,}1 + 0{,}5 = 0{,}9.$$

5) Пусть $x > 7$. На промежутке $7 < x < +\infty$ величина X может принять любое из всех своих возможных значений, поэтому функция распределения

$$F(x) = P\{X < \infty\} = P\{X = -2\} + P\{X = 0\} + P\{X = 3\} + P\{X = 7\} =$$

$$= 0{,}3 + 0{,}1 + 0{,}5 + 0{,}1 = 1.$$

Теперь можно записать функцию распределения рассматриваемой случайной величины X на всей числовой оси:

$$F(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \le -2, \\ 0{,}3 \text{ при } -2 < x \le 0, \\ 0{,}4 \text{ при } 0 < x \le 3, \\ 0{,}9 \text{ при } 3 < x \le 7, \\ 1 \text{ при } x > 7. \end{cases}$$

Изобразим функцию $F(x)$ на графике (рис. 4).

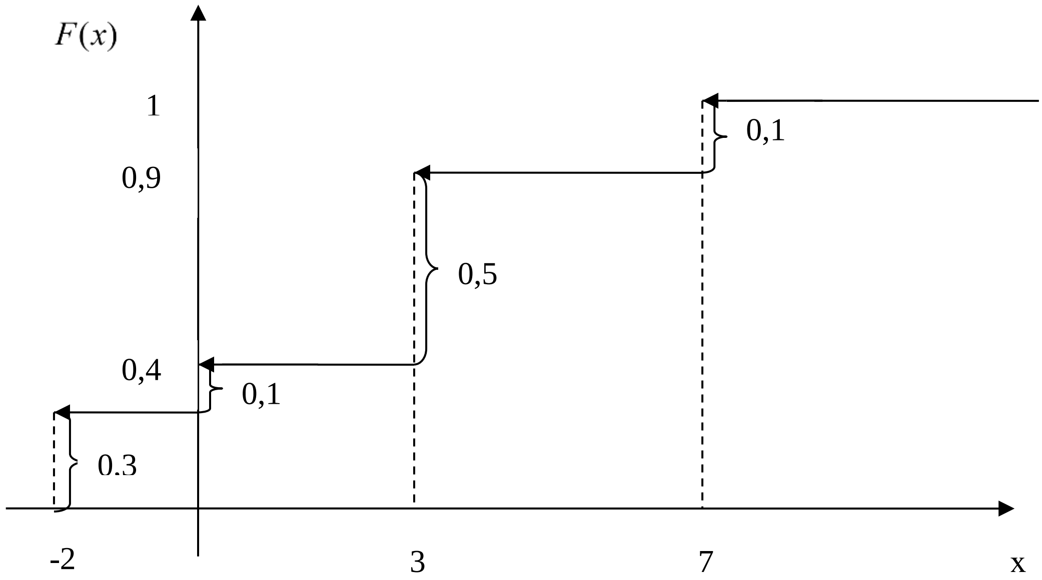


Рис.4 Функция распределения для примера 4.5.

Итак, в нашем примере видим, что функция распределения имеет четыре скачка; скачки происходят в точках, соответствующих возможным значениям случайной величины, а величины скачков равны вероятностям этих значений. Между скачками функции $F(x)$ сохраняет постоянное значение.

Таким образом, зная ряд распределения ДСВ X, можно построить ее функцию распределения, которая будет иметь вид

$$F(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \le x_1, \\ p_1 \text{ при } x_1 < x \le x_2, \\ p_1 + p_2 \text{ при } x_2 < x \le x_3, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \sum_{i=1}^{n-1} p_i \text{ при } x_{n-1} < x \le x_n, \\ 1 \text{ при } x > x_n. \end{cases} \qquad (4.4.1)$$

Пример 4.6. Ряд распределения дискретной случайной величины X задан таблицей:

x_i	1,1	1,4	1,7	2	2,3
p_i	0,1	0,2	0,3	0,3	0,1

Найти функцию распределения ДСВ, построить график этой функции и найти вероятности $P\{X > 1{,}4\}$, $P\{1{,}4 \le X \le 2{,}3\}$.

Решение.

Используя формулу (4.4.1) запишем функцию распределения в виде

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \le 1{,}1, \\ 0{,}1 & \text{при } 1{,}1 < x \le 1{,}4, \\ 0{,}3 & \text{при } 1{,}4 < x \le 1{,}7, \\ 0{,}6 & \text{при } 1{,}7 < x \le 2, \\ 0{,}9 & \text{при } 2 < x \le 2{,}3, \\ 1 & \text{при } x \ge 2{,}3. \end{cases}$$

График функции изобразим на рис. 5

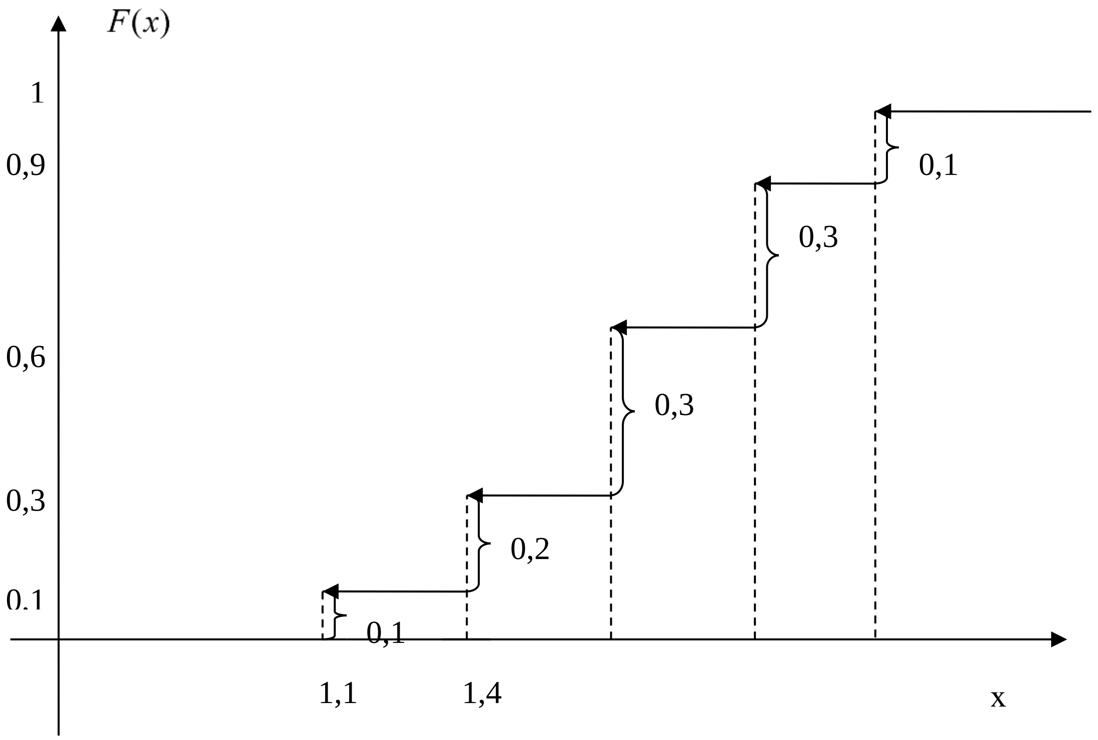


Рис.5 Функция распределения для примера 4.6.

Чтобы найти вероятность того, что случайная величина X примет значение > 1,4, используем формулу (4.3.3) и свойство 5 функции распределения. Получим

$$P\{X \ge 1{,}4\} = 1 - F(1{,}4) = 1 - 0{,}1 - 0{,}2 = 0{,}7\,.$$

Вероятность того, что случайная величина X попадет в промежуток $[1{,}4; 2{,}3]$, найдем, применяя свойства 4 и 5 функции распределения:

$$P\{1{,}4 \le X \le 2{,}3\} = P\{1{,}4 \le X < 2{,}3\} + P\{X = 2{,}3\} =$$
$$= F(2{,}3) - F(1{,}4) + 0{,}1 = 0{,}9 - 0{,}1 + 0{,}1 = 0{,}9.$$

Задачи для самостоятельной работы

1. Дискретная случайная величина X задана рядом распределения:

x_i	0	1	2	3
p_i	$\frac{1}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{18}{35}$	$\frac{4}{35}$

2.

Найти: а) функцию распределения $F(x)$;

б) вероятности событий $A = \{X \ge 2\}$, $B = \{1 \le X < 3\}$, $C = \{1 < X \le 3\}$;

в) построить график функции $F(x)$.

2. ДСВ X задана рядом распределения:

x_i	0	2	4	6
p_i	0,2	0,1	0,5	p_4

Определить функцию распределения случайной величины X и построить ее график.

3. Случайная величина X задана функцией распределения.

$$F(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \le 1, \\ 0{,}2 \text{ при } 1 < x \le 3, \\ 0{,}35 \text{ при } 3 < x \le 6, \\ 0{,}8 \text{ при } 6 < x \le 8, \\ 1 \text{ при } x > 8. \end{cases}$$

Найти ряд распределения и вероятности событий $A = \{X = 1\}$,

$B = \{1 < X \le 8\}$.

4.5. Непрерывная случайная величина. Плотность распределения

Ранее было рассмотрено понятие непрерывной случайной величины. Используя понятие функции распределения, дадим более строгое определение НСВ.

Определение. Случайная величина X называется *непрерывной*, если ее функция распределения $F(x) = P\{X < x\}$ непрерывна и имеет производную на всей числовой оси, за исключением, возможно, точек, где имеет излом (рис. 6).

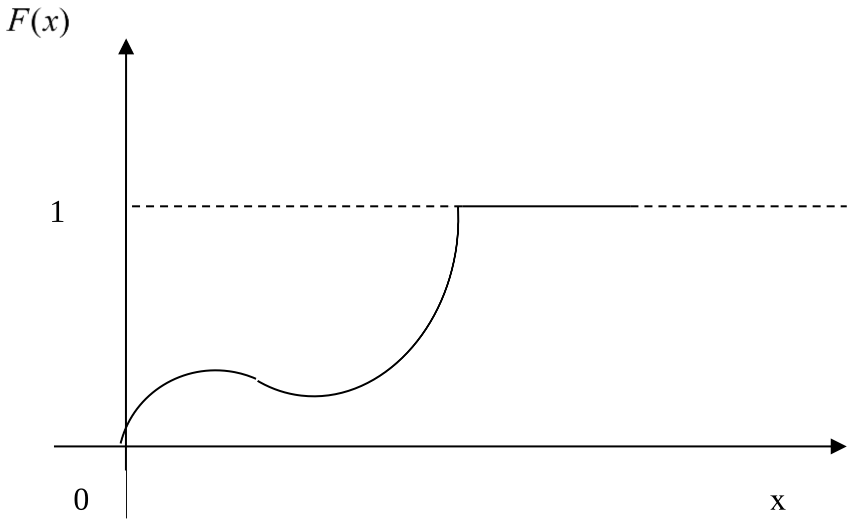


Рис.6 График непрерывной случайной величины

Для таких случайных величин функция $F(x)$ не имеет скачков, а значит, вероятность любого отдельного значения непрерывной случайной величины равна нулю: $P\{X = a\} = 0$ для любого a.

Следовательно, для НСВ вероятность попадания в заданный интервал не зависит от того, входят или нет в него границы интервала, т.е.

$$P\{a \le X < b\} = P\{a < X \le b\} = P\{a < X < b\} =$$
$$= P\{a \le X \le b\} = F(b) - F(a). \quad (4.5.1)$$

Задать закон распределения для непрерывных случайных величин можно с помощью еще одной дифференциальной функции распределения, а именно с помощью плотности распределения вероятностей (или плотности вероятностей).

Предположим, что для НСВ X ее функция распределения $F(x)$ имеет непрерывную производную.

Определение. *Плотностью распределения вероятностей или дифференциальной функцией (законом) распределения* $f(x)$ НСВ X называется производная ее функции распределения, т.е.

$$f(x) = F'(x). \qquad (4.5.2.)$$

Кривой распределения называют график функции плотности вероятностей $f(x)$ (рис. 7).

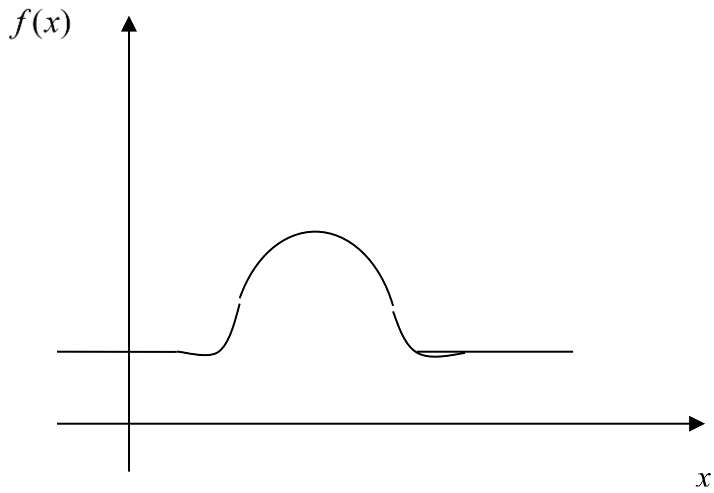


Рис. 7 Кривая распределения

Часто используют термин «плотность вероятностей» взамен термина «плотность распределения».

Плотность распределения обладает следующими свойствами:

1. Плотность распределения неотрицательна, т.е.

   $f(x) \geq 0$. Это значит, что вся кривая распределения лежит не ниже оси абсцисс.

2. Несобственный интеграл от плотности вероятностей в бесконечных пределах равен единице, т.е.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1, \qquad (4.5.3)$$

В частности, если все возможные значения НСВ принадлежат интервалу (a,b), то $\int_a^b f(x)dx = 1$

Геометрически эта вероятность представляет собой площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком плотности распределения, осью абсцисс и прямыми $x=a$ и $x=b$.

3. Вероятность того, что НСВ примет значение, принадлежащее интервалу $(a;b)$ вычисляется по формуле:

$$P\{a < X < b\} = \int_a^b f(x)dx. \qquad (4.5.4)$$

4. Функцию распределения НСВ можно выразить через плотность вероятностей по формуле:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx. \qquad (4.5.5)$$

Пример 4.7. Для непрерывной случайной величины задана функция распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \le 2, \\ (x-2)^2 & \text{при } 2 < x \le 3, \\ 1 & \text{при } x > 3. \end{cases}$$

Найти: а) плотность распределения $f(x)$; б) вероятность попадания случайной величины в интервал $(2{,}1;2{,}5)$, используя известную функцию $F(x)$ и найденную $f(x)$; в) построить графики функций $F(x)$ и $f(x)$, дать геометрическую интерпретацию вероятности $P\{2{,}1 < X < 2{,}5\}$.

Решение.

а) Найдем плотность распределения $f(x)$, взяв производную от данной функции $F(x)$. Таким образом, плотность распределения равна:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \le 2, \\ 2(x-2) & \text{при } 2 < x \le 3, \\ 0 & \text{при } x > 3. \end{cases}$$

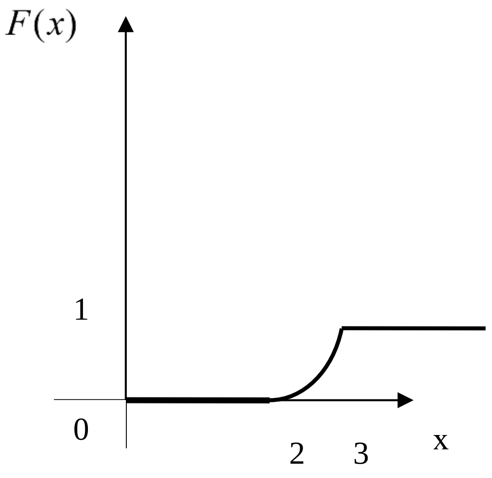
б) По формуле (4.5.1) вычислим вероятность, того, что случайная величина попадет в интервал $(2{,}1; 2{,}5)$:

$$P\{2{,}1 < X < 2{,}5\} = F(2{,}5) - F(2{,}1) = (0{,}5)^2 - (0{,}1)^2 = 0{,}24.$$

А теперь вычислим эту же вероятность, используя функцию плотности распределения, по формуле (4.5.4.):

$$P\{2{,}1 < X < 2{,}5\} = \int_{2{,}1}^{2{,}5} f(x)dx = 2\int_{2{,}1}^{2{,}5}(x-2)dx = (x-2)^2\Big|_{2{,}1}^{2{,}5} = 0{,}24.$$

в) Графики функций $F(x)$ и $f(x)$ представлены на рис. 8 и 9.



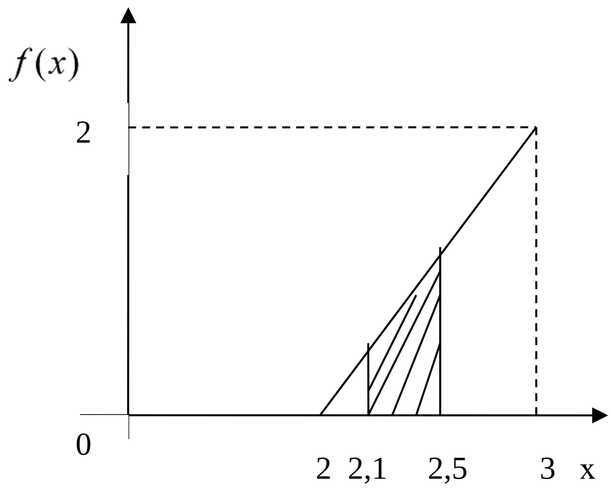


Рис. 8 График функции $F(x)$ Рис. 9 График функции $f(x)$

Полученную вероятность $P\{2{,}1 < X < 2{,}5\}$ можно интерпретировать геометрически как площадь заштрихованной криволинейной трапеции, приведенной на рис.9.

Пример 4.8. Для НСВ X задана функция распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < -\pi, \\ a(\cos x + C) & \text{при } -\pi \le x \le 0, \\ 1 & \text{при } x > 0. \end{cases}$$

Найти: а) значение постоянных величин a и C; б) функцию плотности распределения $f(x)$; в) $P\left\{X \in \left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right]\right\}$.

Решение.

Интегральная функция распределения обладает свойством: $0 \le F(x) \le 1$. Воспользуемся этим фактом для определения постоянных величин a и $C\cdot$ По условию задачи случайная величина X задана на отрезке $[-\pi;0]$, поэтому должны выполняться условия: $F(-\pi)=0$ и $F(0)=1$.

Для заданной функции $F(-\pi)=a(\cos(-\pi)+C)=a(-1+C)$, $F(0)=a(1+C)$.

Но $F(-\pi)=0$ и $F(0)=1$, тогда придем к системе двух линейных уравнений с двумя неизвестными a и C:

$$\begin{cases} a(C-1)=0, \\ a(C+1)=1. \end{cases}$$

Из полученной системы уравнений, находим искомые постоянные величины: $a=\frac{1}{2}$ и $C=1$. Тогда, функция распределения случайной величины X будет иметь вид:

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } x<-\pi, \\ \frac{1}{2}(\cos x+1) & \text{при } -\pi \le x \le 0, \\ 1 & \text{при } x>0. \end{cases}$$

б) по определению плотность распределения $f(x)=F'(x)$, поэтому получим:

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } x<-\pi, \\ -\frac{1}{2}\sin x & \text{при } -\pi \le x \le 0, \\ 0 & \text{при } x>0. \end{cases}$$

в) Используя формулу (4.5.4), находим, что

$$P\left\{X\in\left[-\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{2}\right]\right\}=P\left\{-\frac{\pi}{3}\le X\le\frac{\pi}{2}\right\}=\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}f(x)dx=$$

$$=-\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{3}}^{0}\sin x dx+\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}0dx=\frac{1}{2}\cos x\Bigg|_{-\frac{\pi}{3}}^{0}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}.$$

Пример 4.9. Найти коэффициент C, если случайная величина X, все возможные значения которой принадлежат интервалу $\left(0;\frac{\pi}{3}\right)$, задана функцией плотности распределения $f(x)=C\sin 3x$ в этом интервале.

Решение.

Так как все возможные значения данной НСВ X, принадлежат интервалу $\left(0;\frac{\pi}{3}\right)$, то $\int_0^{\frac{\pi}{3}}f(x)dx=1$. Воспользуемся этим свойством для определения коэффициента C. Вычислим

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}}f(x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{3}}C\sin 3x dx=-\frac{C}{3}\cos 3x\Bigg|_0^{\frac{\pi}{3}}=-\frac{C}{3}\left(\cos 3\pi-\cos 0\right)=$$

$$=-\frac{C}{3}\left(-1-1\right)=\frac{2C}{3}$$

и приравняем его к единице, получим уравнение: $\frac{2C}{3}=1$, из которого найдем $C=\frac{3}{2}$.

Пример 4.10. Функция $f(x)$ задана в виде:

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\le 2,\\ \frac{A}{x^4} & \text{при } x>2.\end{cases}$$

Требуется определить постоянный множитель A, при котором данная функция окажется плотностью вероятностей некоторой непрерывной случайной величины.

Решение.

Чтобы быть функций плотности вероятностей некоторой случайной величины X наша функция $f(x)$ должна быть $f(x) \geq 0$, т.е. $\frac{A}{x^4} \geq 0$, или $A \geq 0$, и для нее должно выполняться равенство $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$.

Следовательно,

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{2} 0dx + \int\limits_{2}^{+\infty} \frac{A}{x^4}dx = \lim_{b\to+\infty} \int\limits_{2}^{b} \frac{A}{x^4}dx = A\lim_{b\to+\infty} \int\limits_{2}^{b} x^{-4}dx =$$

$$= \frac{A}{3}\lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{x^3}\Bigg|_2^b \right) = \frac{A}{3}\lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{b^3} + \frac{1}{8} \right) = \frac{A}{24}.$$

Данный несобственный интеграл сходится и равен $\frac{A}{24}$. Из равенства $\frac{A}{24} = 1$ найдем $A = 24$.

Пример 4.11. Для некоторой непрерывной случайной величины X задана функция плотности вероятностей

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при x} < 2, \\ \frac{1}{3} & \text{при } 2 \leq \text{x} \leq 5, \\ 0 & \text{при x} > 5. \end{cases}$$

Определить функцию интегральную функцию распределения $F(x)$ и вычислить вероятность попадания $P\{2{,}5 < X < 3{,}5\}$.

Решение.

Для нахождения интегральной функции распределения случайной величины X при всех $x \in (-\infty; +\infty)$ применим формулу $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(x)dx$.

а) если $x < 2$, то $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} 0dx = 0$.

б) если $2 \leq x \leq 5$, то $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{2} f(x)dx + \int\limits_{2}^{x} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{2} 0dx + \int\limits_{2}^{x} \frac{1}{3}dx =$

$$= \frac{1}{3}x\Big|_2^x = \frac{x}{3} - \frac{2}{3} = \frac{x-2}{3}.$$

в) если $x > 5$, то $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{2} 0dx + \int\limits_{2}^{x} \frac{1}{3}dx + \int\limits_{5}^{x} 0dx = \frac{1}{3}x\Big|_{2}^{5} = \frac{5}{3} - \frac{2}{3} = 1$.

На основании произведенных вычислений запишем интегральную функцию распределения случайной величины X:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 2, \\ \dfrac{x-2}{3} & \text{при } 2 \le x \le 5, \\ 1 & \text{при } x > 5. \end{cases}$$

Теперь вычислим вероятность попадания в заданный интервал о формуле (4.5.4)

$$P\{2{,}5 < X < 3{,}5\} = \int\limits_{2,5}^{3,5} f(x)dx = \int\limits_{2,5}^{3,5} \frac{1}{3}dx = \frac{1}{3}x\Big|_{2,5}^{3,5} = \frac{1}{3}.$$

Можно найти вероятность $P\{2{,}5 < X < 3{,}5\}$ как приращение интегральной функции распределения

$$P\{2{,}5 < X < 3{,}5\} = F(3{,}5) - F(2{,}5) = \frac{3{,}5-2}{3} - \frac{2{,}5-2}{3} = \frac{1}{3}(1{,}5 - 0{,}5) = \frac{1}{3}.$$

Задачи для самостоятельной работы

1. Для некоторой НСВ X задана интегральная функция распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ \dfrac{x^2}{25} & \text{при } 0 \le x \le 5, \\ 1 & \text{при } x > 5. \end{cases}$$

Найти: а) функцию плотности вероятностей $f(x)$ НСВ X и построить ее график, а также график данной функции $F(x)$; б) вероятность попадания НСВ X в интервал [6;3] и $P\{X < 2\}$.

2. На числовой оси задана функция плотности вероятностей $f(x) = \frac{A}{1+x^2}$ для некоторой случайной величины X. Определить: а) неизвестный коэффициент A; б) функцию распределения вероятностей; в) вероятность попадания НСВ X $P\{-1 \le X \le 1\}$.

3. При каком значении параметра A функция $f(x)=\begin{cases} Axe^{-x} & \text{при } x \geq 0, \\ 0 & \text{при } x < 0. \end{cases}$ будет являться функцией плотности вероятностей некоторой случайной величины X?

4. Интегральная функция распределения некоторой НСВ X задана выражением

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } x \leq -\dfrac{\pi}{6}, \\ a\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)+b & \text{при } -\dfrac{\pi}{6} < x \leq \dfrac{\pi}{3}, \\ 1 & \text{при } x > \dfrac{\pi}{3}. \end{cases}$$

Найти: а) неизвестные коэффициенты a и b; б) функцию плотности распределения.

5. НСВ X задана функцией плотности вероятностей

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 1, \\ x-\dfrac{1}{2} & \text{при } 1 < x \leq 2, \\ 0 & \text{при } x > 2. \end{cases}$$

Найти функцию распределения $F(x)$ и построить графики функций $f(x)$ и $F(x)$.

6. НСВ X задается функцией плотности распределения

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } x \leq -\dfrac{\pi}{2}, \\ \dfrac{1}{2}\cos x & \text{при } -\dfrac{\pi}{2} < x \leq \dfrac{\pi}{2}, \\ 0 & \text{при } x > \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Найти: а) функцию распределения $F(x)$; б) вероятность попадания НСВ X в интервал $\left(0; \dfrac{\pi}{4}\right)$; в) $P\left\{X < \frac{\pi}{6}\right\}$.

5. ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

5.1.Математическое ожидание

Назовем *математическим ожиданием* $M(X)$ дискретной случайной величины X сумму парных произведений всех ее возможных значений x_i на их соответствующие вероятности, т.е. $M(X) = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + \cdots + x_n \cdot p_n = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i$, где $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

Если ДСВ принимает конечное число значений x_1, x_2, …, x_n, то ее математическое ожидание находится по формуле

$$M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i \,. \qquad (5.1.1)$$

Если же число возможных значений ДСВ бесконечно (счетно), то

$$M(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i \,. \qquad (5.1.2)$$

Причем ряд в правой части предполагается сходящимся.

Если значения непрерывной случайной величины X принадлежат всей оси *Ox*, то *математическое ожидание*, находится по формуле

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx, \qquad (5.1.3)$$

где $f(x)$ - плотность распределения вероятностей НСВ X. Причем, несобственный интеграл в формуле (5.1.3) сходится .

В частном случае, если все возможные значения X принадлежат интервалу $(a;b)$, то

$$M(X) = \int_{a}^{b} x f(x) dx \,. \qquad (5.1.4)$$

Математическое ожидание обладает следующими свойствами:

1. Математическое ожидание постоянной равно самой постоянной, т.е. $M(C) = C$, где $C = const$.
2. Постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания, т.е. $M(CX) = CM(X)$.

3. Математическое ожидание алгебраической суммы конечного числа случайных величин равно сумме математических ожиданий этих величин, т.е. $M(X \pm Y \pm Z \pm \ldots \pm V) = M(X) \pm M(Y) \pm M(Z) \pm \ldots \pm M(V)$.
4. Математическое ожидание произведения конечного числа *независимых* случайных величин равно произведению математических ожиданий этих величин, т.е. $M(X \cdot Y \cdot Z \cdot \ldots \cdot V) = M(X) \cdot M(Y) \cdot M(Z) \cdot \ldots \cdot M(V)$.

Математическое ожидание случайной величины X приближенно равно среднему арифметическому наблюдаемых значений случайной величины. В этом состоит вероятностный смысл математического ожидания.

5.2. Дисперсия

Рассмотрим случайная величина X и ее математическое ожидание $M(X)$. Пусть X-$M(X)$ - отклонение случайной величины от своего математического ожидания. Для любой случайной величины математическое ожидание ее отклонения равно 0, т.е. $M[X - M(X)] = 0$. Действительно, $M(X)$ – постоянная величина. Применяя свойства 1 и 3 математического ожидания будем иметь $M[X - M(X)] = M(X) - M[M(X)] = M(X) - M(X) = 0$.

Назовем *дисперсией* (рассеянием) случайной величины X математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания, т.е.

$$D(X) = M\left(X - M(X)\right)^2.$$

Для дискретной случайной величины (ДСВ) X дисперсия вычисляется по формуле

$$D(X) = \sum_i \left(x_i - M(X)\right)^2 p_i. \qquad (5.2.1)$$

Для непрерывной случайной величины (НСВ) X формула имеет вид

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(x - M(X)\right)^2 f(x)dx. \qquad (5.2.2)$$

В частном случае, когда все возможные значения случайной величины X принадлежат интервалу (a, b), то $D(X) = \int_a^b [x - M(X)]^2 dx$.

На практике для удобства вычисления используют другие формулы

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2 \quad \text{для ДСВ} \quad (5.2.3)$$

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - [M(X)]^2 \text{ или } D(X) = \int_a^b x^2 f(x)dx - -[M(X)]^2 \quad \text{для НСВ} \quad (5.2.4)$$

Дисперсия обладает следующими свойствами:

1. Дисперсия постоянной величины равна 0, т.е. $D(C) = 0$, где $C = const$.
2. Постоянный множитель можно выносить за знак дисперсии, возведя при этом его в квадрат, т.е. $D(CX) = C^2 D(X)$.
3. Дисперсия алгебраической суммы конечного числа *независимых* случайных величин равна сумме дисперсий этих величин, т.е. $D(X \pm Y \pm Z \pm ... \pm V) = D(X) + D(Y) + D(Z) + ... + D(V)$.

5.3. Среднее квадратическое отклонение

Дисперсия случайной величины $D(X)$ имеет размерность квадрата. Это не всегда удобно при решении практических задач. Поэтому используют корень квадратный из дисперсии в качестве показателя рассеяния.

Назовем *средним квадратическим отклонением* $\sigma(X)$ случайной величины X корень квадратный из ее дисперсии, т.е.

$$\sigma_x = \sqrt{D(X)}. \quad (5.3.1)$$

Величина $\sigma(X)$ неотрицательна и ее размерность совпадает с размерностью случайной величины X.

И дисперсия, и среднее квадратическое отклонение случайной величины есть характеристики рассеяния значений случайной величины вокруг ее математического ожидания.

Пример 5.1. Для дискретной случайной величины X дан ряд распределения:

x_i	-5	2	3	4
p_i	0,4	0,3	0,1	0,2

Найти: а) математическое ожидание; б) дисперсию; в) среднее квадратическое отклонение.

Решение.

а) так как ДСВ принимает конечное число значений, то ее математическое ожидание найдем, используя формулу (5.1.1).

$$M(X)=\sum_{i=1}^{4}x_i p_i=-5\cdot 0{,}4+2\cdot 0{,}3+3\cdot 0{,}1+4\cdot 0{,}2=-0{,}3;$$

б) чтобы найти дисперсию воспользуемся формулой (5.2.3). Запишем закон распределения случайной величины X^2 в виде таблицы:

x_i^2	25	4	9	16
p_i	0,4	0,3	0,1	0,2

Тогда $M(X^2)=\sum_{i=1}^{4}x_i^2 p_i=25\cdot 0{,}4+4\cdot 0{,}3+9\cdot 0{,}1+16\cdot 0{,}2=$

$$=10+1{,}2+0{,}9+3{,}2=15{,}3.$$

Учитывая, что $D(X)=M(X^2)-\left(M(X)\right)^2$, имеем

$$D(X)=15{,}3-\left(-0{,}3\right)^2=15{,}3-0{,}09=15{,}21.$$

в) Вычислив корень квадратный из дисперсии, найдем среднее квадратическое отклонение $\sigma_x=\sqrt{15{,}21}=3{,}9$.

Пример 5.2. Даны две независимые случайные величины X и Y. Вычислить математическое ожидание и дисперсию случайной величины $Z=5X-3Y$, если $M(X)=6$, $M(Y)=5$, $D(X)=5$, $D(Y)=4$.

Решение.

Воспользуемся свойствами математического ожидания: $M(Z)=M(5X-3Y)=5M(X)-3M(Y)=5\cdot 6-3\cdot 5=15$.

Используя свойства дисперсии будем иметь:

$$D(Z)=D(5X-3Y)=25D(X)+9D(Y)=25\cdot 6+9\cdot 5=161.$$

Пример 5.3. Фермерское хозяйство реализует гусей весом x_1 и x_2, причем $x_1 > x_2$. Вероятность того, что гуси будут проданы весом x_1, равна 0,4. Составить закон распределения случайной величины X - веса гусей, если математическое ожидание составило 4,6 кг, а дисперсия - 0,24.

Решение.

Случайная величина X принимает два возможных значения x_1 и x_2 с вероятностями 0,4 и 0,6. Для нахождения значений x_1 и x_2 составим систему уравнений:

$$\begin{cases} M(X) = 4{,}6 \\ D(X) = 0{,}24 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0{,}4 \cdot x_1 + 0{,}6 \cdot x_2 = 4{,}6 \\ 0{,}4 \cdot x_1^2 + 0{,}6 \cdot x_2^2 - (4{,}6)^2 = 0{,}24 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0{,}4x_1 + 0{,}6x_2 = 4{,}6 \\ 0{,}4x_1^2 + 0{,}6x_2^2 = 21{,}4 \end{cases}.$$

Решая полученную систему, найдём два значения $x_1 = 4 \text{ и } x_2 = 5$, которые удовлетворяют условию задачи. Тогда закон распределения случайной величины X будет иметь вид:

x_i	4	5
p_i	0,4	0,6

Пример 5.4. В теплице высажено 200 кустов томатов. 20% снятых томатов имеют вес 60 г, 40% - 70г, 30% - 80г, 10% - 90г. За неделю с 30% всех кустов снимают по 3 томата, с 50% всех кустов - по 4 томата, с 20% - по 5 томатов. Сколько всего килограммов томатов снимут за неделю с данной теплицы?

Решение.

Введём в рассмотрение две случайные величины: X - вес одного томата, Y - количество томатов, снимаемых с одного куста, и построим для них ряды распределения:

x_i	60	70	80	90
p_i	0,2	0,4	0,3	0,1

y_j	3	4	5
p_j	0,3	0,5	0,2

Найдём $M(X)$ и $M(Y)$:

$$M(X) = 60\cdot 0{,}2 + 70\cdot 0{,}4 + 80\cdot 0{,}3 + 90\cdot 0{,}1 = 73(\text{г}) = 0{,}073 \text{ (кг)}.$$

$$M(Y) = 3\cdot 0{,}3 + 4\cdot 0{,}5 + 5\cdot 0{,}2 = 3{,}9.$$

Рассмотрим величину $X\ Y$. Это - случайная величина, определяемая вес томатов, снимаемых с одного куста. Если считать, что X и Y независимые случайные величины, то среднее значение случайной величины $X\ Y$ можно посчитать по формуле

$$M(XY) = M(X)\cdot M(Y) = 0{,}073\cdot 3{,}9 = 0{,}285 \text{ (кг)}.$$

Т.к. в теплице имеется 200 кустов, то общий вес томатов, снятых с этого участка, может быть оценен как произведение числа кустов на вес томатов с одного куста:

$$200\cdot 0{,}285 = 57 \text{ (кг)}.$$

Пример 5.5. Для случайной величины X дана функция плотности вероятностей:

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \le -2, \\ \dfrac{1}{4} \text{ при } -2 < x \le 2, \\ 0 \text{ при } x > 2. \end{cases}$$

Вычислить числовые характеристики случайной величины X.

Решение.

Для вычисления математического ожидания воспользуемся формулой (5.1.3), так как все возможные значения данной непрерывной случайной величины X лежат на всей оси Ox. Тогда

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_{-\infty}^{2} x\cdot 0dx + \int_{-2}^{2} x\frac{1}{4}dx + \int_{2}^{+\infty} x\cdot 0dx =$$

$$= \frac{x^2}{8}\Bigg|_{-2}^{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0.$$

Для вычисления дисперсии случайной величины X применяем формулу (5.2.4):

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-M(X))^2 f(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2 f(x)dx=$$

$$=\frac{1}{4}\int_{-2}^{2}x^2dx=\frac{1}{2}\int_{0}^{2}x^2dx=\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}\Bigg|_0^2=\frac{8}{2\cdot 3}=\frac{4}{3}.$$

Ну, а среднее квадратическое отклонение будет равно корню квадратному из дисперсии, т.е. $\sigma(X)=\sqrt{\frac{4}{3}}\approx 1{,}15$.

Пример 4.6. Все возможные значения случайной величины X принадлежат интервалу $(0;3)$. Для нее задана в этом интервале дифференциальная функция $f(x)=\frac{2}{9}x$. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение величины X .

Решение.

Так как все возможные значения случайной величины X принадлежат интервалу $(0;3)$, вычисляем математическое ожидание и дисперсию соответственно по формулам:

$$M(X)=\int_{a}^{в}xf(x)dx; \qquad D(X)=\int_{a}^{в}x^2 f(x)dx-M^2(X).$$

$$M(X)=\int_{0}^{3}x\cdot\frac{2}{9}xdx=\frac{2}{9}\cdot\frac{x^3}{3}\Bigg|_0^3=2;$$

$$D(X)=\int_{0}^{3}x^2\cdot\frac{2}{9}xdx-4=\frac{2}{9}\cdot\frac{x^4}{4}\Bigg|_0^3-4=4{,}5-4=0{,}5.$$

Среднее квадратическое отклонение величины X равно

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{0{,}5}\approx 0{,}7071.$$

Задачи для самостоятельной работы

1. Случайная величина X - число экзаменов, сданных студентов во время сессии имеет следующее распределение:

x_i	2	4	8	8
p_i	0,3	p_4	0,1	0,3

Найти математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение случайной величины.

2. Дискретная случайная величина X - число родившихся детей в первый день нового года задана законом распределения:

x_i	3	4	5	6
p_i	0,4	0,2	0,3	0,1

Найти математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение величины $Y = 4X - 4$.

3. Случайная величина X - число детей в семье имеет следующее распределение:

x_i	x_1	x_2	3	4
p_i	0,1	p_2	0,4	0,35

Найти x_1, x_2, p_2, если известно, что $M(X) = 2$, $D(X) = 0{,}9$.

4. Найти математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$ для НСВ X, если функция распределения имеет вид

$$F(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x < 0, \\ \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{4}x^3 \text{ при } 0 \le x \le 2, \\ 1 \text{ при } x > 2. \end{cases}$$

8. Зная функцию плотности вероятностей случайной величины X: при $x < 1$ $f(x) = 0$ и при $x \ge 1$ $f(x) = \frac{3}{x^4}$, найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины X.

9. Найти математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$, и среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$ для случайной величины X, заданной функцией распределения X $F(x)=\begin{cases} 0 \text{ при } x<0, \\ \frac{1}{2}(1-\cos x) \text{ при } 0\le x\le\pi, \\ 1 \text{ при } x>\pi. \end{cases}$.

10. Функция плотности распределения НСВ X задана формулой $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{c+1} \text{ при } x\in[-1;2], \\ 0 \text{ при } x\notin[1;2]. \end{cases}$

Найти: параметр с, $M(X)$ и $D(X)$.

6. ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДИСКРЕТНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

6.1. Биномиальное распределение

Когда производится n независимых испытаний, в каждом из которых событие A может появиться с вероятностью p и не появиться с вероятностью $q=1-p$, используют биномиальное распределение.

Случайная величина X - число появлений события A при n испытаниях имеет *биномиальное распределение* (или *распределена по биномиальному закону*), если вероятности p_i числа k появлений события ($X=k$) находятся по формуле Бернулли, т.е.

$$P_n(k)=C_n^k p^k q^{n-k}.$$

Для дискретной случайной величины X, которая распределена по биномиальному закону, ряд распределения имеет вид:

x_i	0	1	2	…	k	…	n
p_i	$P_n(0)$	$P_n(1)$	$P_n(2)$	…	$P_n(k)$	…	$P_n(n)$

Здесь: x_i - значения, которые принимает случайная величина X;

$P_n(0)$, $P_n(1)$, …, $P_n(k)$, …, $P_n(n)$ - соответствующие вероятности,

причем сумма вероятностей равна единице, т.е. $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

При нахождении числовых характеристик (математического ожидания, дисперсии и среднего квадратического отклонения) случайной величины, которая подчиняется биномиальному закону распределения, справедливы следующие формулы:

$$M(X) = np, \tag{6.1.1}$$

$$D(X) = npq, \tag{6.1.2}$$

$$\sigma = \sqrt{npq}. \tag{6.1.3}$$

Пример 6.1. Высажено $n = 5$ кустов роз. Каждый куст с вероятностью $p = 0{,}3$ независимо от других может быть заражен болезнью. Случайная величина X - число зараженных кустов. Построить ряд распределения случайной величины и найти математическое ожидание и дисперсию.

Решение.

Испытание состоит в высадке кустов роз, в результате которого может наступить или не наступить событие A - куст роз заражен болезнью. Вероятность наступления события A в одном испытании равна $p = 0{,}3$; вероятность противоположного события $\overline{A}$ равна $q = 1 - 0{,}3 = 0{,}7$.

Случайная величина X - число зараженных кустов – распределена по биномиальному закону и может принять одно из следующих значений: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$, $x_4 = 3$, $x_5 = 4$, $x_6 = 5$.

Вероятности каждого из возможных значений найдем по формуле Бернулли:

$$p_0 = P\{X = 0\} = P_5(0) = C_5^0 p^0 q^5 = (0{,}7)^5 = 0{,}1680;$$

$$p_1 = P\{X = 1\} = P_5(1) = C_5^1 p^1 q^4 = 5 \cdot 0{,}3 \cdot (0{,}7)^4 = 0{,}36015;$$

$$p_2 = P\{X = 2\} = P_5(2) = C_5^2 p^2 q^3 = 10 \cdot (0{,}3)^2 \cdot (0{,}7)^3 = 0{,}30870;$$

$$p_3 = P\{X = 3\} = P_5(3) = C_5^3 p^3 q^2 = 10 \cdot (0{,}3)^3 \cdot (0{,}7)^2 = 0{,}13230;$$

$$p_4 = P\{X = 4\} = P_5(4) = C_5^4 p^4 q = 5 \cdot (0{,}3)^4 \cdot (0{,}7) = 0{,}02835;$$

$$p_5 = P\{X = 5\} = P_5(5) = C_5^5 p^5 q^0 = (0{,}3)^5 = 0{,}00243.$$

Сделаем контроль, т.е. найдем сумму вероятностей, которая равна единице:

$$0{,}16807 + 0{,}36015 + 0{,}30870 + 0{,}13230 + 0{,}02835 + 0{,}00243 = 1.$$

Получим ряд распределения:

x_i	0	1	2	3	4	5
p_i	0,16807	0,36015	0,30870	0,13230	0,02835	0,00243

По формулам (6.1.1) и (6.1.2) найдем математическое ожидание и дисперсию случайной величины:

$$M(X) = np = 5 \cdot 0{,}3 = 1{,}5,$$

$$D(X) = npq = 1{,}5 \cdot 0{,}7 = 1{,}05.$$

Пример 6.2. Вероятность работы каждого из четырех комбайнов без поломок в течение уборочной равна 0,9. Составить закон распределения случайной величины X - числа комбайнов, работающих безотказно. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X.

Решение.

Проверяем работу одного комбайна. Всего проводится независимых испытаний $n = 4$. В каждом испытании может наступить или не наступить событие A - отобранный случайным образом комбайн в течение уборочной работает безотказно. Вероятность наступления события A в каждом испытании равна $p = 0{,}9$; вероятность не наступления события A равна $q = 0{,}1$.

Случайная величина X - число комбайнов, работающих безотказно, распределена по биномиальному закону, в результате испытания может принять одно из следующих возможных значений: 0, 1, 2, 3, 4. Соответствующие вероятности найдем по формуле Бернулли:

$p_1 = P\{X = 0\} = P_4(0) = C_4^0 p^0 q^4 = 1 \cdot (0{,}1)^4 = 0{,}0001;$

$p_2 = P\{X = 1\} = P_4(1) = C_4^1 p^1 q^3 = 4 \cdot 0{,}9 \cdot (0{,}1)^3 = 0{,}0036;$

$p_3 = P\{X = 2\} = P_4(2) = C_4^2 p^2 q^2 = 6 \cdot (0{,}9)^2 \cdot (0{,}1)^2 = 0{,}0486;$

$p_4 = P\{X = 3\} = P_4(3) = C_4^3 p^3 q^1 = 4 \cdot (0{,}9)^3 \cdot (0{,}1) = 0{,}2916;$

$p_5 = P\{X = 4\} = P_4(4) = C_4^4 p^4 q^0 = (0{,}9)^4 = 0{,}6561$

Контроль: $0{,}0001 + 0{,}0036 + 0{,}0486 + 0{,}2916 + 0{,}6561 = 1$.

Составим следующий ряд распределения для случайной величины X :

x_i	0	1	2	3	4
p_i	0,0001	0,0036	0,0486	0,2916	0,6561

По имеющимся формулам вычислим математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X

$$M(X) = np = 4 \cdot 0{,}9 = 3{,}6,$$

$$D(X) = npq = 3{,}6 \cdot 0{,}1 = 0{,}36,$$

$$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{0{,}36} = 0{,}6.$$

Пример 6.3. Проводится обследование некоторой группы людей. Вероятность того, что человек имеет антитела к вирусу, равна 0,91. Найти математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение для случайной величины X - числа людей, не имеющих антитела к вирусу среди 1000 человек этой группы.

Решение.

Рассматриваемая случайная величина X - число людей, не имеющих антитела к вирусу среди 1000 человек обследованной группы людей, распределена по биномиальному закону.

Событие A - обследуемый человек не имеет антитела к вирусу, в каждом испытании может наступить или не наступить.

$\overline{A}$ - обследуемый человек имеет антитела – противоположное событие. Так как $P(\bar{A}) = q = 0{,}91$, то вероятность $p = 1 - q = 0{,}09$. По условию задачи общее число испытаний $n = 1000$. Числовые характеристики находим соответственно по формулам (6.1.1), (6.1.2) и (6.1.3):

$$M(X) = np = 1000 \cdot 0{,}9 = 90,$$

$$D(X) = npq = 90 \cdot 0{,}91 = 81{,}9,$$

$$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{81{,}9} = 9{,}05.$$

6.2. Распределение Пуассона

Если дискретная случайная величина X может принимать значения: $x_i = 0, 1, 2, \ldots, k, \ldots$, а вероятность того, что X примет определенное значение k вычисляется по формуле

$$P\{X = k\} = P_k = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad (k = 0, 1, 2, \ldots), \qquad (6.2.1)$$

где $\lambda > 0$ - параметр распределения, то говорят, что случайная величина X *распределена по закону Пуассона.*

Как видно формулы (6.2.1) распределение Пуассона зависит от параметра λ, который является одновременно математическим ожиданием и дисперсией случайной величины X, распределенной по закону Пуассона, т.е. $M(X) = D(X) = \lambda$ (6.2.2)

Данное распределение с параметром $\lambda = np$ приближенно применяется вместо биномиального, когда число испытаний n очень велико, а вероятность p очень мала. Примерами случайных величин, имеющих распределение Пуассона, являются, например число опечаток в большом тексте; число нестандартных изделий в большой партии; число рождения четверней в семье, т.е. когда событие появляется очень редко.

Закон Пуассона встречается в ряде ситуаций на практике. Например, пусть на оси времени Ot случайным образом возникают точки – моменты появления каких-то однородных событий (сбоев на автоматической линии, вызовов на телефонной станции, поступлений информации в АСУ и т.п.). Последовательность событий, поступающих одно за другим в случайные моменты времени, называют *потоком событий,* а среднее число событий, поступающих в единицу времени, называют п*лотностью* λ потока событий.

Если вероятность попадания некоторого числа событий на промежуток времени зависит только от длины на оси, где он расположен, то такой поток называют *простейшим*.

Можно вычислить вероятность появления k событий простейшего потока за время t, если известна постоянная плотность λ, по формуле

$$P_t(k) = \frac{(t\lambda)^k}{k!} e^{-\lambda t}. \qquad (6.2.3)$$

Пример 6.4. Автомобиль находится на техническом обслуживании. Число обнаруженных неисправностей во время технического осмотра, подчиняется закону Пуассона с параметром λ. В случае отсутствия неисправностей техническое обслуживание автомобиля длится в среднем 2 часа. В случае обнаружения одной или двух неисправности на устранение каждой из них уходит в среднем еще полчаса. В случае обнаружения более двух неисправностей автомобиль оставляют на ремонт в среднем на 4 часа. Составить закон распределения среднего времени T обслуживания и ремонта автомобиля.

Решение.

Случайная величина T - среднее время обслуживания и ремонта автомобиля принимает значения: $t_1 = 2$; $t_2 = 2{,}5$; $t_3 = 3$; $t_4 = 4$, т.к. технический осмотр может длиться 2 часа (неисправностей нет), 2,5 часа (одна неисправность), 3 часа (две неисправности), 4 часа (более двух неисправностей).

Обозначим через p_1 вероятность того, что случайная величина T примет значение t_1=2, т.е. вероятность того, что за время технического осмотра неисправностей не обнаружено.

Итак, $p_1 = P\{T = 2\} = P\{k = 0\}$, где k - число неисправностей.

Аналогично определим p_2, p_3 и p_4:

$$p_2 = P\{T = 2{,}5\} = P\{k = 1\};$$

$$p_3 = P\{T = 3\} = P\{k = 2\};$$

$$p_4 = P\{T = 4\} = P\{k > 2\}.$$

Так как число неисправностей k подчинено закону Пуассона, то воспользовавшись формулой (6.2.1), будем иметь

$$p_1 = P\{k = 0\} = \frac{\lambda^0}{0!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda},$$

$$p_2 = P\{k = 1\} = \frac{\lambda^1}{1!} e^{-\lambda} = \lambda e^{-\lambda},$$

$$p_3 = P\{k = 2\} = \frac{\lambda^2}{2!} e^{-\lambda} = \frac{1}{2}\lambda^2 e^{-\lambda},$$

$$p_4 = P\{k > 2\} = 1 - P\{k \le 2\} = 1 - (e^{-\lambda} + \lambda e^{-\lambda} + \frac{1}{2}\lambda^2 e^{-\lambda}).$$

Таким образом, случайная величина T имеет следующий ряд распределения:

t_i	2	2,5	3	4
p_i	$e^{-\lambda}$	$\lambda e^{-\lambda}$	$\frac{1}{2}\lambda^2 e^{-\lambda}$	$1 - (e^{-\lambda} + \lambda e^{-\lambda} + \frac{1}{2}\lambda^2 e^{-\lambda})$

Пример 6.5. Некоторое устройство содержит большое число независимо работающих элементов. Вероятность выхода из строя за время t каждого элемента имеет одинаковую величину и очень мала. Определить среднее число вышедших из строя за время t элементов, если вероятность выхода из строя хотя бы одного элемента за это время известна и равна 0, 98.

Решение.

Случайная величина X - число вышедших из строя элементов за время t, подчиняется закону Пуассона, так как число элементов велико и вероятность выхода из строя каждого элемента мала. Следует из условия задачи.

Требуется найти среднее число вышедших из строя элементов, т.е. определить величину параметра λ .

Известно, что вероятность выхода из строя хотя бы одного элемента равна 0,98, из уравнения $0{,}98 = 1 - P_n(0)$ находим $P_n(0) = 0{,}02$ (*).

Вероятность того, что из n элементов ни один не выйдет из строя, вычислим по формуле (6.2.1)

$$P_n(0) = \frac{\lambda^0}{0!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} .$$

Подставляя полученное значение $P_n(0)$ в равенство (*), получим

$$e^{-\lambda} = 0{,}02 .$$

По таблице значений функции e^{-x} найдем, что параметр $\lambda = 3{,}9$.

Итак, за время t выйдет из строя примерно 4 элемента.

Пример 6.6. На станцию скорой помощи поступает простейший поток звонков с плотностью $\lambda = 0{,}8$ (вызов/мин). Найти вероятность того, что за две минуты поступит ровно один звонок.

Решение.

Случайная величина X - число звонков за 2 минуты, распределена по закону Пуассона с параметром λt, где $t = 2$.

По формуле (6.2.3) найдем вероятность того, что за 2 минуты поступит ровно один звонок.

По условию $t = 2$, $k = 1$, вычислим $\lambda t = 0{,}8 \cdot 2 = 1{,}6$

$$P_2(1) = \frac{1{,}6}{1!} e^{-1{,}6} \approx 1{,}6 \cdot 0{,}202 \approx 0{,}323 .$$

6.3. Геометрическое распределение

Полезно рассмотреть еще одно распределение.

Если возможными значениями дискретной случайной величины X являются значения 1, 2, 3, 4, …, n,…, а соответствующие вероятности этих значений представляют собой бесконечно убывающую геометрическую прогрессию

$p_k = P\{X = k\} = P_n(k) = pq^{k-1}$, где $0 < p < 1, q = 1 - p$, $k = 1, 2, 3, \ldots$ (6.3.1),

то говорят, что то ДСВ имеет *геометрическое распределение*.

Так как первый член прогрессии есть p, а знаменатель q, то сумма этой прогрессии будет равна 1, т.е. $p + pq + pq^2 + \cdots = \frac{p}{1-q} = \frac{p}{p} = 1.$ Это соответствует вероятностному смыслу задачи.

В качестве примеров дискретных случайных величин, имеющих геометрическое распределение, можно рассмотреть следующие: число выстрелов из орудия до первого попадания в цель, число испытаний некоторого устройства до первой поломки, число бросаний монеты до первого выпадения «герба», число телефонных звонков до первого ответа на звонок и т.д.

Геометрический ряд можно записать в виде

x_i	1	2	…	k	…
p_i	$P_n(1)$	$P_n(2)$	…	$P_n(k)$	…

Контроль: $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1.$

В первой строке таблицы перечислены возможные значения случайной величины X, а во второй соответствующие вероятности $P_n(1)$, $P_n(2)$, …, $P_n(k)$, вычисленные по формуле (6.3.1).

В случае геометрического распределения случайной величины математическое ожидание, дисперсия и среднее квадратическое отклонение, вычисляются соответственно по формулам:

$$M(X) = \frac{1}{p}, \qquad (6.3.2)$$

$$D(X) = \frac{q}{p^2}, \qquad (6.3.3)$$

$$\sigma(X)=\frac{\sqrt{q}}{p}. \qquad (6.3.4)$$

Пример 6.7. Службой качества проводится проверка документации до обнаружения неверно составленного документа без ограничения числа проверенных документов. Составить закон распределения числа проверенных документов. Найти его математическое ожидание и дисперсию, если известно, что неверного составления документа для каждого документа равна 0,1.

Решение.

Случайная величина X - число проверенных документов, имеет геометрическое распределение, с вероятностью появления неверно составленного документа $p=0{,}1$ в каждом опыте до первого обнаружения неверно составленного документа. Данная случайная величина X в результате испытания может принять одно из возможных значений: $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=3$, … $x_k=k$, …. Вероятности каждого из возможных значений X находятся по формуле (6.3.1):

$$p_1=P\{X=1\}=P_n(1)=(0{,}9)^0\cdot 0{,}1=0{,}1;$$

$$p_2=P\{X=2\}=P_n(2)=0{,}9\cdot 0{,}1=0{,}09;$$

$$p_3=P\{X=3\}=P_n(3)=(0{,}9)^2\cdot 0{,}1=0{,}081;$$

$$\ldots$$

$$p_k=P\{X=k\}=P_n(k)=(0{,}9)^{k-1}\cdot 0{,}1.$$

Тогда ряд распределения случайной величины X имеет вид

x_i	1	2	3	…	k	…
p_i	0,1	0,09	0,081	…	$(0{,}9)^{k-1}\cdot 0{,}1$	…

Математическое ожидание и дисперсию величины X найдем соответственно по формулам (6.3.2) и (6.3.3): $M(X)=\frac{1}{0{,}1}=10; D(X)=\frac{0{,}9}{0{,}01}=90.$

Пример 6.8. Некто приобретает лотерейные билеты до первого выигрыша, причем можно приобрести только четыре билета. Вероятность выигрыша по одному билету равна 0,1. Найти закон распределения случайной величины X - числа приобретенных билетов. Вычислить ее математическое ожидание.

Решение.

В испытании по приобретению билетов может наступить или не наступить событие A - выигрыш по билету. По условию задачи вероятность появления события A в одном испытании равна $p=0,1$; вероятность не появления равна $q=1-p=0,9$. Случайная величина X - число приобретенных билетов может принять одно из значений: $x_1=1; x_2=2; x_3=3; x_4=4$.

Вычислим соответствующие вероятности каждого из возможных значений X:

$P_1=P\{X=1\}$ - вероятность того, что игрок купит один лотерейный билет, и он окажется выигрышным, т.е.$P_1=0{,}1$;

$P_2=P\{X=2\}$ - вероятность того, что игрок купит выигрышный билет вторым, если первый билет оказался без выигрыша, т.е.$P_2=q\cdot p=0{,}9\cdot 0{,}1=0{,}09$;

$P_3=P\{X=3\}$ - вероятность того, что игрок покупает выигрышный билет третьим, если первые два билета – без выигрыша, т.е. $P_3=(0{,}9)^2\cdot 0{,}1=0{,}081$;

$P_4=P\{X=4\}$ - вероятность того, что игрок покупает четвертый билет, если первые три билета – без выигрыша (исход четвертого испытания не имеет значения), т.е.$P_4=(0{,}9)^3=0{,}729$

Рассматриваемая случайная величина имеет следующий ряд распределения:

x_i	1	2	3	4
p_i	0,1	0,009	0,081	0,729

Контроль:0,1+0,09+0,081+0,729=1.

Поэтому $M(X)=1\cdot 0{,}1+2\cdot 0{,}09+3\cdot 0{,}081+4\cdot 0{,}729=3{,}439$

Задачи для самостоятельной работы

1. Разыгрывается денежно-вещевая лотерея. По одному тиражу лотереи приобретено 100 билетов. Найти вероятность выигрыша по одному билету, если среднее квадратическое отклонение числа выигранных билетов равно 3. (*Ответ*: $p = 0{,}1$)
2. В некотором городе в течение года появляется на свет в среднем 300 младенцев. При этом вероятность рождения мальчика равна 0,51. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X - числа мальчиков, появившихся на свет в этом городе в течение года. (*Ответ*: $M(X) = 55845, D(X) = 27364$)
3. Предполагается, что случайные повреждения элементов оборудования трансформаторной подстанции распределены по закону Пуассона. Найти среднее число повреждений в год, если вероятность того, что в течение года произойдет хотя бы один отказ, равна 0,95. (*Ответ*: $\lambda = 3$)
4. При работе автоматической линии иногда происходят сбои в работе. Поток сбоев можно. Установлено, что среднее число сбоев за сутки равно 1,5. Найти вероятность того, что за двое суток не будет ни одного сбоя, если считать поток сбоев простейшим. (*Ответ*: $p = 0{,}05$)
5. Некоторый автомат изготавливает детали, причем вероятность брака равна 0,003. Изготовлено 1000 деталей. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины X - числа бракованных деталей. (*Ответ*: $M(X) = 3$, $D(X) = 1{,}732$)
6. Проводятся соревнования по стрельбе из лука. Вероятность того, что спортсмен поразит мишень при одном выстреле, равна 0,8. Спортсмен получает стрелы до тех пор, пока не промахнется. Вычислить математическое ожидание и дисперсию случайной величины X - числа стрел, выданных спортсмену. (*Ответ*: $M(X) = 5$; $D(X) = 20$)
7. Вероятность пошива бракованного изделия равна 0,05. Перед отправкой на склад изделия проверяются контролером. Изделия берутся по одному

до первого появления бракованного, но не более 3 штук. Найти математическое ожидание и дисперсию числа проверенных доброкачественных изделий. (*Ответ*: $M(X) = 2{,}8525; D(X) \approx 0{,}225$)

7. НОРМАЛЬНЫЙ ЗАКОН РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НЕПРЕРЫВНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

7.1. Понятие нормальный закон распределения

Нормальному закону подчиняются ошибки измерений, величины износа деталей в механизмах, рост человека, ошибки стрельбы, вес плодов томатов, величина шума в радиоприемном устройстве, колебания курса акций и т.д.

Нормальным законом называется закон распределения непрерывной случайной величины X, которая имеет плотность распределения,

выраженную формулой $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \; x \in R.$ (7.1.1)

Здесь a - математическое ожидание, σ -среднее квадратическое отклонение - параметры распределения.

Нормальный закон еще называют *законом Гаусса.*

Примерами нормально распределенных случайных величин являются, например, колебания курса валют, вес человека, величины износа деталей в различных механизмах, диаметр дерева, вес яблок и др.

Коротко нормально распределенную случайную величину X можно записать $X \sim N(a;\sigma)$

Кривую нормального закона называют *нормальной* или *гауссовой кривой* (рис. 10)

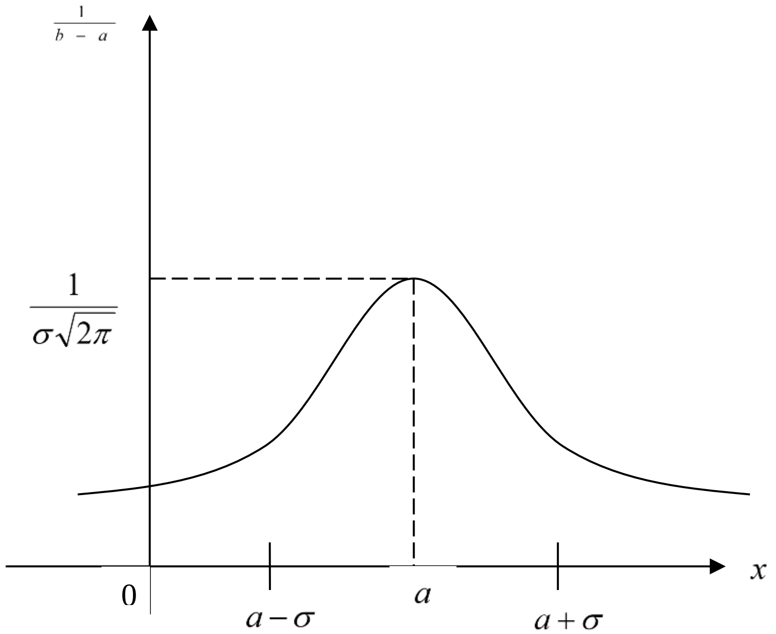


Рис. 10 Гауссова кривая

Функция распределения нормального закона выражается формулой

$F(x) = 0{,}5 + \Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)$, где функция $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$

есть функция Лапласа, для которой составлены таблицы. График функции $F(x)$ изображен на рисунке 11.

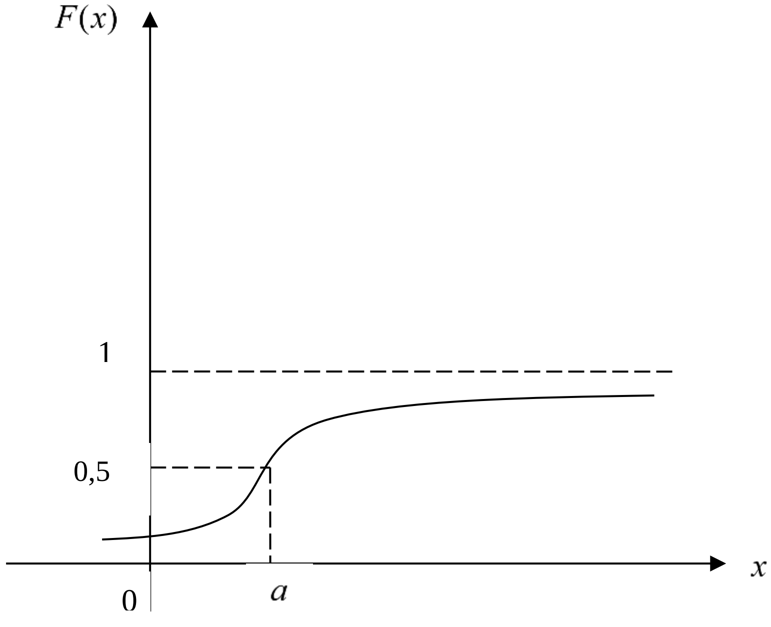


Рис. 11 График функции распределения нормального закона

7.2. Числовые характеристики нормального закона

1. Математическое ожидание характеризует центр распределения (положение центра):

$$M(X) = a; \qquad (7.2.1)$$

2. Дисперсия характеризует форму распределения (форму нормальной кривой):

$$D(X) = \sigma^2; \qquad (7.2.2)$$

3. Среднее квадратическое отклонение есть параметр σ:

$$\sigma(X) = \sigma. \qquad (7.2.3)$$

Перечислим свойства случайной величины, которая распределена по нормальному закону.

1. Вероятность того, что нормально распределенная случайная величина X попадет в заданный интервал $(\alpha; \beta)$, находится по формуле

$$P\{\alpha < X < \beta\} = \Phi\left(\frac{\beta - \alpha}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right). \qquad (7.2.4)$$

2. Вероятность того, что нормально распределенная случайная величина X, отклонена по абсолютной величине от математического ожидания a меньше, чем на положительное число ε, находится по формуле

$$P\{|X - a| < \varepsilon\} = P\{a - \varepsilon < X < a + \varepsilon\} = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right). \qquad (7.2.5)$$

При a=0 формула имеет вид $P\left\{|X| < \varepsilon = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right)\right\}$ (7.2.6)

3. В частном случае, если $\varepsilon = 3\sigma,$ то $P\{|X - a| < 3\sigma\} = 2\Phi(3) = 0{,}9973 \approx 1,$ т.е. практически достоверно, что случайная величина $X \sim N(a, \sigma)$ принимает свои значения в промежутке $(a - 3\sigma; a + 3\sigma)$. Это утверждение называется «*правилом трех сигм*». Сущность «правила трех сигм» заключается в том, что, если случайная величина распределена по нормальному закону, то отклонение случайной величины (по абсолютной величине) не превосходит утроенного среднего квадратического отклонения.

Пример 7.1. Известно, что на некотором лесном участке деревьев выше, чем 10,5 м нет. Высота дерева распределена по нормальному закону. Найти вероятность того, что на лесном участке со средней высотой деревьев 9 м, и стандартным отклонением, равным 0,5 м, высота деревьев окажется от 8 до 10 м.

Решение.

Пусть случайная величина X – высота дерева распределена по нормальному закону с математическим ожиданием, a=9 и средним квадратическим отклонением σ=0,5, т.е. можно записать $CB\ X \sim N(9;\,0{,}5)$.

По формуле (7.2.4) находим вероятность попадания случайной величины X в интервал (8;10). Зная, что $a = 9,\ \sigma = 0{,}5,\ \beta = 10,\ \alpha = 8,$ получим $P\{8 < X < 10\} = \Phi\left(\frac{10-9}{0{,}5}\right) - \Phi\left(\frac{8-9}{0{,}5}\right) = \Phi(2) - \Phi(-2)$, из нечетности функции $\Phi(x)$ следует, что $\Phi(-2) = \Phi(2)$ и $P\{8 < X < 10\} = \Phi(2) + \Phi(2) = 2\Phi(2)$. Воспользовавшись таблицей значений функции Лапласа, получим значение $\Phi(2) = 0{,}4772$. Искомая вероятность равна *0,9544*. Отсюда следует, что чуть больше 95% деревьев данного участка леса имеют высоту от 8 м до 10 м.

Пример 7.2. На кондитерской фабрике изготавливают конфеты «Драже в шоколаде» в виде шариков с номинальным диаметром d=5 мм. Случайная величина X - фактический размер диаметра шарика вследствие неточности изготовления, представляет собой нормально распределенную величину с математическим ожиданием a=d=5мм и средним квадратическим отклонением $\sigma = 0{,}05$м. Найти процент брака, если известно, что при контроле бракуются все шарики, диаметр которых отклоняется от номинального по абсолютной величине больше, чем на 0,1 мм.

Решение.

По условию задачи можно записать $X \sim N(a;\sigma)$. По формуле (7.2.5) найдем вероятность отклонения диаметра шарика от номинального по абсолютной величине не более чем на 0,1 мм. Зная, что $\varepsilon = 0{,}1$, будем иметь

$$P\{|x-5| \le 0{,}1\} = 2\Phi\left(\frac{0{,}1}{0{,}05}\right) = 2\Phi(2) = 0{,}9544.$$

Искомая вероятность (доля брака) будет равна

$$P\{|x-5| > 0{,}1\} = 1 - P\{|x-5| \le 0{,}1\} = 1 - 0{,}9544 = 0{,}0456.$$

Это означает, что бракуют 4,56% изготовленных шариков.

Пример 7.3. Средняя высота стебля гороха для данного сорта – 30 см. 30% всех выросших стеблей имеют высоту от 26 см до 30 см. Какой процент стеблей гороха имеют высоту, превышающую 35 см, если принять, что случайная величина X – высота стебля гороха – подчинена нормальному закону?

Решение.

Случайная величина X – высота стебля гороха распределена по нормальному закону с параметрами a=30 и σ, причем σ не дано.

Найдем σ из соотношения $P\{26 < X < 30\} = 0{,}3$:

$$P\{26 < X < 30\} = \Phi\left(\frac{30-30}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{26-30}{\sigma}\right) = \Phi(0) + \Phi\left(\frac{4}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{4}{\sigma}\right),$$

т.е. $\Phi\left(\frac{4}{\sigma}\right) = 0{,}3.$

Из таблицы значений функции Лапласа находим $\frac{4}{\sigma} = 0{,}84;\ \sigma = 4{,}76.$

В задаче требуется найти вероятность того, что высота стебля превышает 35 см, т.е. нужно определить

$$P\{35 < X < \infty\} = \Phi(\infty) - \Phi\left(\frac{35-30}{4{,}76}\right) = 0{,}5 - 0{,}3531 = 0{,}1469.$$

Итак, получим, что около 15% стеблей гороха имею высоту, превышающую 35 см.

Пример 7.4. Длина некоторой детали, изготавливаемой в цехе, представляет случайную величину X, распределенную по закону распределения, который характеризуется функцией $f(x) = \frac{1}{1{,}2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-6{,}6)^2}{2{,}88}}$.

Определить интервал, в который попадут практически все возможные значения длины этой детали.

Решение.

Случайная величина X – длина некоторой детали. По заданному выражению функции $f(x)$ можно сказать, что величина X распределена по нормальному закону с параметрами $a = 6{,}6$ см и $\sigma = 1{,}2$ см. По правилу «трех сигм» получим, что практически все возможные значения X будут находиться в интервале $(6{,}6 - 3{,}6;\ 6{,}6 + 3{,}6)$ см, т.е. деталь может иметь длину от 3 до 10,2 см.

Задачи для самостоятельной работы

1. Некто приобретает акции предприятия. Текущая цена акции распределена с помощью нормального закона распределения с известными параметрами: математическим ожиданием 15 денежных единиц и средним квадратическим отклонением 0,2 денежных единиц.

1. Вычислить вероятность того, цена акции:

а) не выше 15,3 денежных единиц;

б) не ниже 15,4 денежных единиц;

в) от 14,9 до 15,3 денежных единиц.

2. С помощью правила трех сигм найти границы, в которых будет находиться текущая цена акции.

(*Ответ:* 1. а) 0,9332; б) 0,0228; в) 0,6246. 2. (14,4; 15,6.)).

2. Отклонение размера длины изделия от стандартной представляет собой случайную величину *X*, распределенную нормально с математическим ожиданием, равным 4 и средним квадратическим отклонением, равным 0,2. Найти процент длин изделий , отклоняющихся от математического ожидания по модулю не более чем на 0,05.

(*Ответ: 19,7%*).

3. Определить интервал попадания с вероятностью 0,9545 нормально распределенной случайной величины *X*, если она задана функцией

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

(*Ответ: (-2; 2)*).

4. Известно, что случайная величина распределена по нормальному закону, т.е. $X \sim N(a;\sigma)$, а также известны вероятности $P\{X>20\}=0{,}02,\quad P\{X<10\}=0{,}31.$ Найти *M (X) и D (X)*.

(*Ответ:* $M(X)\approx 12; D(X)\approx 16$ *)*.

5. Было установлено, что случайная величина, распределенная по нормальному закону, принимает значение:

а) меньше 48 с вероятностью 0,975;

б) больше 59 с вероятностью 0,005.

Найти функцию *f*(*x*) распределения случайной величины *X*.

Приложение

Таблица 1

Значение функции $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3653	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144

0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	2420	2396	2371	2347	2323	22989	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2331	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290

Продолжение таблицы 1

2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013

3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

Таблица 2

Значение функции $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2dt}}$

x	*Φ(x)*	*x*	*Φ(x)*	*x*	*Φ(x)*	*x*	*Φ(x)*
0,00	0,0000	0,20	0,0793	0,40	0,1554	0,60	0,2257
0,01	0,0040	0,21	0,0832	0,41	0,1591	0,61	0,2291
0,02	0,0080	0,22	0,0871	0,42	0,1628	0,62	0,2324
0,03	0,0120	0,23	0,0910	0,43	0,1664	0,63	0,2357
0,04	0,0160	0,24	0,0948	0,44	0,1700	0,64	0,2389
0,05	0,0199	0,25	0,0987	0,45	0,1736	0,65	0,2422
0,06	0,0239	0,26	0,1026	0,46	0,1772	0,66	0,2454
0,07	0,0279	0,27	0,1064	0,47	0,1808	0,67	0,2486
0,08	0,0319	0,28	0,1003	0,48	0,1844	0,68	0,2517

0,09	0,0359	0,29	0,1141	0,49	0,1879	0,69	0,2549
0,10	0,0398	0,30	0,1179	0,50	0,1915	0,70	0,2580
0,11	0,0438	0,31	0,1217	0,51	0,1950	0,71	0,2611
0,12	0,0478	0,32	0,1255	0,52	0,1985	0,72	0,2642
0,13	0,0517	0,33	0,1293	0,53	0,2019	0,73	0,2673
0,14	0,0557	0,34	0,1331	0,54	0,2054	0,74	0,2703
0,15	0,0596	0,35	0,1368	0,55	0,2088	0,75	0,2734
0,16	0,0636	0,36	0,1406	0,56	0,2123	0,76	0,2764
0,17	0,0675	0,37	0,1443	0,57	0,2157	0,77	0,2794
0,18	0,0714	0,38	0,1480	0,58	0,2190	0,78	0,2823
0,19	0,0753	0,39	0,1515	0,59	0,2224	0,79	0,2852
0,80	0,2881	1,15	0,3749	1,50	0,4332	1,85	0,4678
0,81	0,2910	1,16	0,3770	1,51	0,4345	1,86	0,4686
0,82	0,2939	1,17	0,3790	1,52	0,4357	1,87	0,4693
0,83	0,2967	1,18	0,3810	1,53	0,4370	1,88	0,4699

Продолжение таблицы 2

x	*Ф(x)*	*x*	*Ф(x)*	*x*	*Ф(x)*	*x*	*Ф(x)*
0,84	0,2995	1,19	0,3830	1,54	0,4382	1,89	0,4706
0,85	0,3023	1,20	0,3849	1,55	0,4394	1,90	0,4713
0,86	0,3051	1,21	0,3869	1,56	0,4406	1,91	0,4719
0,87	0,3078	1,22	0,3883	1,57	0,4418	1,92	0,4726
0,88	0,3106	1,23	0,3907	1,58	0,4429	1,93	0,4732
0,89	0,3133	1,24	0,3925	1,59	0,4441	1,94	0,4738
0,90	0,3159	1,25	0,3944	1,60	0,4452	1,95	0,4744
0,91	0,3186	1,26	0,3962	1,61	0,4463	1,96	0,4750
0,92	0,3213	1,27	0,3980	1,62	0,4474	1,97	0,4756
0,93	0,3238	1,28	0,3997	1,63	0,4484	1,98	0,4761

0,94	0,3264	1,29	0,4015	1,64	0,4495	1,99	0,4767
0,95	0,3289	1,30	0,4032	1,65	0,4055	2,00	0,4772
0,96	0,3315	1,31	0,4049	1,66	0,4515	2,02	0,4783
0,97	0,3340	1,32	0,4066	1,67	0,4525	2,04	0,4793
0,98	0,3365	1,33	0,4082	1,68	0,4535	2,06	0,4803
0,99	0,3389	1,34	0,4099	1,69	0,4545	2,08	0,4812
1,00	0,3413	1,35	0,4115	1,70	0,4554	2,10	0,4821
1,01	0,3438	1,36	0,4131	1,71	0,4564	2,12	0,4830
1,02	0,3461	1,37	0,4147	1,72	0,4573	2,14	0,4838
1,03	0,3485	1,38	0,4162	1,73	0,4582	2,16	0,4846
1,04	0,3508	1,39	0,4177	1,74	0,4591	2,18	0,4854
1,05	0,3531	1,40	0,4192	1,75	0,4599	2,20	0,4861
1,06	0,3554	1,41	0,4207	1,76	0,4608	2,22	0,4868
1,07	0,3577	1,42	0,4222	1,77	0,4616	2,24	0,4875
1,08	0,3599	1,43	0,4236	1,78	0,4625	2,26	0,4881
1,09	0,3621	1,44	0,4251	1,79	0,4633	2,28	0,4887

Продолжение таблицы 2

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
1,10	0,3643	1,45	0,4265	1,80	0,4641	2,30	0,4893
1,11	0,3665	1,46	0,4279	1,81	0,4649	2,32	0,4898
1,12	0,3686	1,47	0,4292	1,82	0,4656	2,34	0,4904
1,13	0,3708	1,48	0,4306	1,83	0,4664	2,36	0,4909
1,14	0,3729	1,49	0,4319	1,84	0,4671	2,38	0,4913
2,40	0,4918	2,60	0,4953	2,80	0,4974	3,00	0,49865
2,42	0,4922	2,62	0,4956	2,82	0,4976	3,20	0,49931
2,44	0,4927	2,64	0,4959	2,84	0,4977	3,40	0,49966
2,46	0,4931	2,66	0,4961	2,86	0,4979	3,60	0,499841

2,48	0,4934	2,68	0,4963	2,88	0,4980	3,80	0,499928
2,50	0,4938	2,70	0,4965	2,90	0,4981	4,00	0,499968
2,52	0,4941	2,72	0,4967	2,92	0,4982	4,50	0,499997
2,54	0,4945	2,74	0,4969	2,94	0,4984	5,00	0,49999997
2,56	0,4948	2,76	0,4971	2,96	0,4985	∞	0,5
2,58	0,4951	2,78	0,4973	2,98	0,4986		

Таблица 3

x	e^{-x}	x	e^{-x}	x	e^{-x}	x	e^{-x}
0,00	1,000	0,40	0,670	0,80	0,449	3,00	0,050
0,01	0,990	0,41	0,664	0,81	0,445	3,10	0,040
0,02	0,980	0,42	0,657	0,82	0,440	3,20	0,041
0,03	0,970	0,43	0,650	0,83	0,436	3,30	0,037
0,04	0,961	0,44	0,644	0,84	0,432	3,40	0,033
0,05	0,951	0,45	0,638	0,85	0,427	3,50	0,030
0,06	0,942	0,46	0,631	0,86	0,423	3,60	0,027
0,07	0,932	0,47	0,625	0,87	0,419	3,70	0,025
0,08	0,923	0,48	0,619	0,88	0,415	3,80	0,022
0,09	0,914	0,49	0,613	0,89	0,411	3,90	0,020
0,10	0,905	0,50	0,606	0,90	0,407	4,00	0,0183
0,11	0,896	0,51	0,600	0,91	0,403	4,10	0,0166
0,12	0,887	0,52	0,595	0,92	0,399	4,20	0,0150

0,13	0,878	0,53	0,589	0,93	0,395	4,30	0,0136
0,14	0,869	0,54	0,583	0,94	0,391	4,40	0,0123
0,15	0,861	0,55	0,577	0,95	0,387	4,50	0,0111
0,16	0,852	0,56	0,571	0,96	0,383	4,60	0,0101
0,17	0,844	0,57	0,565	0,97	0,379	4,70	0,0091
0,18	0,835	0,58	0,560	0,98	0,375	4,80	0,0082
0,19	0,827	0,59	0,554	0,99	0,372	4,90	0,0074
0,22	0,819	0,60	0,549	1,00	0,368	5,00	0,0067
0,21	0,811	0,61	0,543	1,10	0,333	5,10	0,0061
0,22	0,803	0,62	0,538	1,20	0,302	5,20	0,0055
0,23	0,795	0,63	0,533	1,30	0,273	5,30	0,0050
0,24	0,787	0,64	0,527	1,40	0,247	5,40	0,0045
0,25	0,779	0,65	0,522	1,50	0,223	5,50	0,0041
0,26	0,771	0,66	0,517	1,60	0,202	5,60	0,0037
0,27	0,763	0,67	0,512	1,70	0,183	5,70	0,0033
0,28	0,756	0,68	0,507	1,80	0,165	5,80	0,0030
0,29	0,748	0,69	0,502	1,90	0,150	5,90	0,0027
0,30	0,741	0,70	0,497	2,00	0,135	6,00	0,0025
0,31	0,733	0,71	0,492	2,10	0,122	6,10	0,0022
0,32	0,726	0,72	0,487	2,20	0,111	6,20	0,0020
0,33	0,719	0,73	0,482	2,30	0,100	6,30	0,0018
0,34	0,712	0,74	0,477	2,40	0,091	6,40	0,0017
0,35	0,705	0,75	0,472	2,50	0,082	6,50	0,0015
0,36	0,698	0,76	0,468	2,60	0,074	6,60	0,0014
0,37	0,691	0,77	0,463	2,70	0,067	6,70	0,0012
0,38	0,684	0,78	0,458	2,80	0,061	6,80	0,0011
0,39	0,677	0,79	0,454	2,90	0,055	7,00	0,0009

Мартыненко Алла Ивановна

Бузунова Марина Юрьевна

Теория вероятностей

Редактор Тесля В.И.
Подготовка оригинал-макета: Мартыненко А.И.

Лицензия ЛР № 070444 от 11.03.98 г.

Формат 60х84
Усл. печ. л. 5,11
Тираж 250 экз.

Отпечатано на ризографе Иркутский ГАУ
664038 п. Молодежный