Министерство сельского хозяйства РФ
ФГБОУ ВО «Иркутский государственный аграрный университет им. А.А. Ежевского»

Кафедра Математики

Н.И. Овчинникова

ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКЕ ПОСОБИЕ

Иркутск -2021

УДК 510.6 (075.8)

Рекомендовано к изданию научно-методическим советом инженерного факультета Иркутского государственного аграрного университета им. А.А. Ежевского (протокол № 7 от 26 марта 2021 г.).

Составитель: д.т.н., профессор Н.И. Овчинникова

Рецензент – С.Н. Шуханов, доктор технических наук, профессор кафедры технического обеспечения АПК ИрГАУ им А.А. Ежевского.

Учебно-методическое пособие предназначено для студентов инженерной специальности 44.03.04 – Профессиональное образование (по отраслям), изучающих математическую логику на втором курсе по выбору дисциплин общего математического и естественно-научного блока. В настоящее издание включены основные понятия и формулы математической логики, анализ решений различных классов задач, упражнения для самопроверки, индивидуальные контрольные задания. Содержание учебно-методического пособия представлено в сжатой форме с необходимыми логическими символами и текстовыми пояснениями, большим количеством примеров и геометрическими иллюстрациями.

Может быть использовано при самостоятельной работе студентов очного и заочного обучения для привития навыков правильного изложения мыслей и решения логических задач.

СОДЕРЖАНИЕ

П Р Е Д И С Л О В И Е

Слово "логика" употребляется довольно часто, но в разных значениях. Нередко говорят о логике событий, имея в виду их последовательность и взаимозависимость. Часто упоминают логику поступков. Употребляется также это слово в связи с процессами мышления. Так, мы говорим о логичном и нелогичном мышлении, имея в виду наличие или отсутствие таких его свойств как последовательность, аргументированность, доказательность и др. Именно в третьем смысле логика является особой наукой о мышлении, называемой также формальной логикой. *Формальная логика – наука о законах и операциях правильного мышления* (от греческого слова logos –"мысль, слово, разум"). Она является *нормативной наукой*, т.е. формулирует законы и правила, которые следует выполнять в процессе рассуждения, иначе возникнут логические ошибки.

Как известно, математика представляет собой науку, в которой умозаключение играет более важную роль по сравнению с другими науками. Все математические теоремы опираются на точные доказательства, основанные на выводе следствий из общепринятых математических аксиом и постулатов. Поэтому неудивительно, что ученые при анализе математических рассуждений открыли в них больше всего схем и способов правильных рассуждений. В силу этого современная логика носит название математической логики. Современная логика называется также символической логикой, [1], поскольку схемы правильных умозаключений осуществляются с помощью логических символов, являющимися сокращенными знаками, заменяющими более длинные речевые обороты. Математическая, символическая, формальная логика обозначают одно и то же. *Предметом изучения математической логики являются категории мышления, способы умозаключений, закономерности логического вывода.*

История логики охватывает около двух с половиной тысячелетий. В становлении логики выделяются два основных этапа: первый – от древнегреческой логики до возникновения во второй половине XX века современной логики; второй – с этого времени до наших дней. Основателем логики считается древнегреческий философ Аристотель (384-322 г. до н. э.). Развитие формальной логики в это время было обусловлено необходимостью овладения ораторским искусством. Им были изложены первые общие схемы правильных рассуждений. Он оставил хорошо систематизированные научные труды "Аналитика", "Органон". В качестве стандартного примера можно привести следующий вывод: "Все люди смертны. Сократ – человек, следовательно, Сократ смертен". Схема данного рассуждения проста, если есть первое, то есть второе; имеет место первое, значит, есть и второе. Схемы правильного рассуждения были развиты и пополнены в средние века. Некоторый прогресс в логике наступил благодаря немецкому философу и математику Г. Лейбницу (1646-1716). По Лейбницу вычисление суммы или разности чисел осуществляется на основе простых правил, принимающих во внимание только форму чисел, а не их смысл. Лейбниц мечтал о времени, когда умозаключение будет преобразовано в вычисление. Период интенсивного развития в логике начался только со второй половины XIX и начале XX веков благодаря работам немецкого математика Г. Фреге (1848-1925) и английского логика и философа Б. Рассела (1872-1970). Эти ученые стали применять формальную логику для исследования оснований математики. Они пытались свести всю чистую математику к логике, тем самым реконструировали и саму логику. Их попытки привели к сближению математики и логики, к широкому проникновению методов первой во вторую. Развитие логики в этот период обусловлено созданием специального символического языка, позволившего формализовать любые высказывания и обеспечить логике независимость от естественного языка. В России важный вклад в развитие логики внес доктор астрономии Казанского университета, математик и логик П.С. Порецкий (1846-1907). Он первым начал читать лекции по современной логике, о которой говорил, что это "по предмету своему есть логика, а по методу - математика". Часть своих работ он вынужден был опубликовать за границей в силу сдержанного отношения к математической логике многих русских математиков. Известный русский физик Эренфест П. первым высказал гипотезу о возможности применения логики в технике. Его гипотезы получили воплощение в теории релейно-контактных схем (а именно телефонных схем). Современная логика находит широкие приложения как в кибернетике, так и во многих других областях науки и техники.

Соблюдение правил и законов логики является необходимым условием всякого познания, [1]. Знание логики позволяет осознанно подходить к процессу мышления, повышает культуру мышления. Пожалуй, нет ни одной области практической деятельности, где низкий уровень развития логического мышления приносит большой вред.

Знание законов логики является необходимым, но недостаточным условием правильного мышления. Обязательным является приобретение практических навыков в решении логических задач.

Для того, чтобы успешно изучить логику, необходимы последовательность и систематичность в усвоении материала и закрепление знаний путем выполнения упражнений. Логику можно изучать только небольшими дозами, так как она не поддается "штурмовщине".

Данное пособие включает в себя пять разделов "Понятия", "Алгебра высказываний", "Нормальные формы", "Дедуктивные рассуждения", "Алгебра предикатов", в которых приведены краткие сведения теоретического характера. После каждого раздела имеются упражнения для самопроверки и индивидуальные контрольные задания.

Пособие предназначено для студентов очного и заочного обучения специальности 44.03.04– Профессиональное образование (по отраслям) Иркутского государственного аграрного университета, как курс по выбору студентов «математическая логика». Ориентирует читателя на овладение мастерством правильного изложения мысли и аргументации, навыками решения логических задач.

I. ПОНЯТИЯ

1.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОНЯТИЙ

Опр. 1.1 *Признак* – то, чем один предмет отличается от другого. *Существенный признак* характеризует сущность данного предмета.

Опр. 1.2 *Понятием* называется форма мышления, в которой отражаются существенные признаки предметов и явлений (совокупность существенных признаков), [2].

В речи понятие выражается словом или группой слов, например "лошадь", "стол", "низкий голос", "громко лающая собака".

Каждое понятие характеризуется *содержанием* и *объемом.*

Опр. 1.3 *Содержание* – перечень существенных признаков, позволяющих отличить данное понятие от других. Содержание понятия может изменяться, если изменяется сам предмет или наши знания о нем.

По содержанию понятия бывают:

конкретные, которые отражают реальные или идеальные предметы и явления (зима, поэма, роман, парта);

абстрактные, в которых отражается не предмет, а какой-то из его признаков, взятый отдельно (честность, красота, небрежность);

положительные, которые указывают наличие признака у предмета (пьющий человек, логичный поступок, стопроцентная успеваемость);

отрицательные, которые указывают на отсутствие признака у предмета и вводятся при помощи частиц не-, без-, а-, анти- (бескорыстная помощь, ненормальный режим, нездоровый человек);

относительные, в которых мыслятся предметы, существование одного из которых предполагает существование другого (север-юг, право-лево, родители-дети, утро-вечер);

безотносительные, в которых мыслятся предметы, существующие самостоятельно, вне зависимости от другого предмета (дом, речь, поле, класс).

Уяснение видов понятий помогает более точному и однозначному их употреблению в наших рассуждениях.

Опр. 1.4 *Объем понятия* – количество объектов, обладающих признаками понятия (объемом понятия "парта" являются все возможные парты).

Важно не путать объем понятия с грамматическим числом и геометрическим объемом ("дом" и "дома" являются одним и тем же понятием с одинаковым объемом; объем понятия "комната" больше объема понятия "квартира"). Объем понятия представляет собой множество, которое можно изобразить кругами Эйлера.

По объему понятия бывают:

единичные, которые содержат один элемент (Иркутская государственная сельскохозяйственная академия, Вселенная);

общие, которые содержат более одного элемента (писатель, ученик, адрес, рост);

нулевые, в объем которых не входит ни один элемент (вечный двигатель, русалка, сын бездетной матери).

Чем богаче содержание, тем уже объем (объем понятия "ромб" шире, чем объем понятия "квадрат").

1.2. ОТНОШЕНИЯ МЕЖДУ ПОНЯТИЯМИ

Так как предметы мира находятся друг с другом во взаимосвязи и взаимообусловленности, поэтому и понятия, отражающие предметы, находятся в определенных отношениях: *сравнения и родовидовых*.

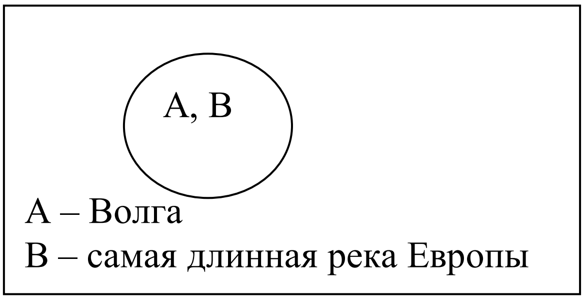
Опр. 1.5 Понятия называются *сравнимыми*, [2], если они имеют в содержании общие признаки, позволяющие их сравнить (прямоугольник, квадрат, ромб).

Опр. 1.6 *Несравнимыми* являются далекие друг от друга по содержанию понятия, не имеющие общих признаков (романс и кирпич, нитка и город).

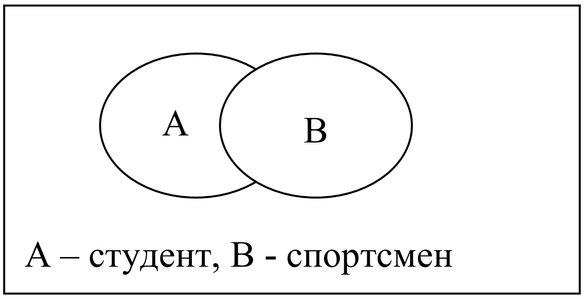
Опр. 1.7 *Совместимыми* являются понятия, объемы которых полностью или частично совпадают.

Совместимые понятия бывают трех видов:

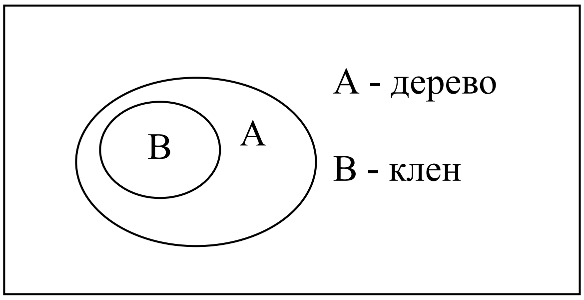
равнозначные (*тождественные*) – близкие по содержанию и равные по объему (Волга и самая длинная река в Европе, Москва и столица России);



пересекающиеся – понятия, объемы которых совпадают только в какой-то своей части (студент-спортсмен, ученый-педагог);



подчиняющиеся – понятия, объем одного из которых целиком включен в объем другого (животное-корова, деверо-клен).



Большее понятие часто называют *родовым* или *родом*, а меньшее понятие – *видовым* или *видом* (параллелограмм – родовое понятие по отношению к квадрату и прямоугольнику). Одно и то же понятие может быть и родом и видом по отношению к разным понятиям ("береза" является видом понятия "дерево", но родом для понятия "карликовая береза").

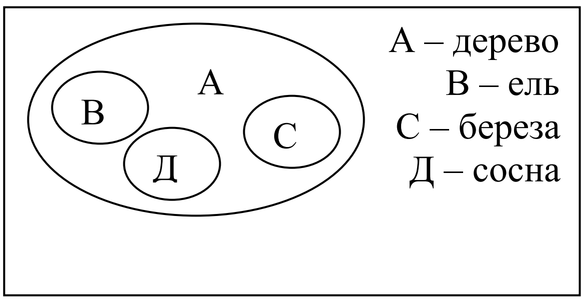
Необходимо различать отношения *"род-вид"* (дорога-шоссе) и отношения *"часть-целое"* (лицо-брови). Признаки рода переносятся на вид, а признаки целого не переносятся на часть.

При переходе от рода к виду содержание увеличивается, а объем уменьшается, а при переходе от вида к роду наоборот.

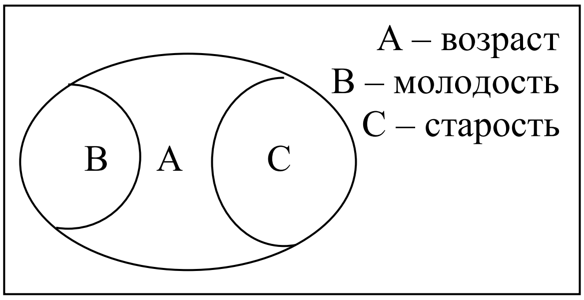
Опр. 1.8 *Несовместимыми* называются понятия, объемы которых не совпадают ни в одном элементе.

Несовместимые понятия бывают трех видов:

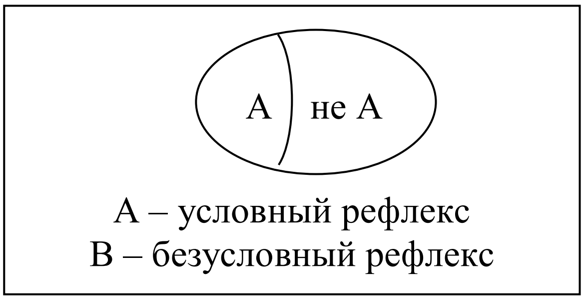
соподчиняющиеся – два или несколько видовых понятий, исключающих друг друга по объему, но принадлежащих одному роду. Это разные виды одного рода, соподчиняющиеся между собой (дерево – ель, береза, сосна);



противоположные – виды одного рода, не охватывающие его целиком, причем одно понятие содержит какой-либо признак, а второе этот признак отрицает и заменяет другим, исключающим (старость-молодость, больной-здоровый, север-юг), [3];



противоречивые – два вида одного рода, полностью охватывающих его, при этом содержание одного исключает содержание другого, не утверждая каких-либо иных признаков (женатый – холостой, условный рефлекс - безусловный рефлекс).



1.3. ПРАВИЛА ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПОНЯТИЙ

1. <u>Определение должно быть соразмерным</u>, т.е. объем определяемого понятия (левая часть определения) должен быть равен объему определяющего понятия (правая часть определения). При несоблюдении этого правила возможны ошибки:

- *широкое определение* – правая часть больше левой части ("метр-мера длины", так как мерой длины является не только метр), поскольку в правой части не перечислены все существенные признаки;

- *узкое определение* – правая часть меньше левой части ("устав – закон жизни воинов", так как устав может быть не только воинским, а в любой организации), поскольку в правой части перечислены несущественные признаки;

- *широкое и узкое одновременно* ("бочка – сосуд, предназначенный для хранения жидкости", так как для хранения жидкости используется не только бочка, а в бочке можно хранить не только жидкость).

Таким образом, нельзя не упускать ни одного существенного признака или добавлять признак, которым обладают не все объекты данного понятия.

2. Определение не должно содержать "порочного круга".

При невыполнение этого правила возможны ошибки:

- *определение понятия через само себя* (*тавтология*) ("забастовка рабочих – это когда бастуют рабочие");

- *определение понятия через другое раннее неопределенное понятие* ("олигоцен – третья эпоха палеолита");

- *определение первого понятия через второе, а второго через первое* ("прямой угол – это угол между перпендикулярными прямыми, а перпендикулярные прямые – прямые, образующие прямой угол") .

3. Определение понятия нельзя давать через отрицание ("нечетная функция – это функция, которая не является четной").

4. Определение должно быть четким, кратким и непротиворечивым, т.е. свободным от двусмысленностей, сравнений, метафор ("сельскохозяйственная машина – множество узлов и механизмов, взаимосвязанных друг с другом и служащих для выполнения определенных технологических операций").

1.4. УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Дайте полную логическую характеристику видов понятий:

а) газета; б) сила; в) неуверенность; г) планета Солнечной системы; д) К.Э. Циолковский; е) приговор суда; ж) некорректная постановка задачи; з) незамужняя женщина; и) дневная форма обучения.

2. Являются ли равнозначными следующие пары понятий?

а) арест и задержание; б) сытный и сытый; в) совет и предупреждение;

г) эффектный и эффективный; д) любитель радио и радиолюбитель; е) приговор суда и решение суда; ж) научная книга и монография; з) элементарная частица и электрон; и) старательный ученик и прилежный ученик.

3. Укажите, какое из понятий богаче по содержанию (содержит большее число признаков)?

а) логика или наука; б) существительное или часть речи; в) рациональное число или действительное число; г) животное или млекопитающее; д) правонарушение или преступление; е) равнобедренный или равносторонний треугольник;
ж) растение или живой организм.

4. Какие из понятий имеют больший объем в следующих парах?

а) рыночная экономика или экономика; б) предложение или текст; в) имя или название; г) повествовательное предложение или предложение; д) преступление или взятка; е) автобус и транспортное средство; ж) геометрическая фигура и ромб.

5. Какие пары понятий находятся в отношениях "род-вид", а какие в отношении "часть-целое"?

а) дорога–шоссе; б) университет–факультет; в) дом–крыша; г) линия–окружность; д) посуда–кастрюля; е) область–район; ж) время года–осень.

6. Изобразите круговыми схемами отношения между понятиями:

а) измерение, взвешивание; б) моряк, офицер; в) драматургия, поэзия; г) веселый, грустный; д) растение, животное, организм; е) воскресенье, выходной день, среда; ж) вуз, институт, техникум.

5. Оцените правильность определения понятий:

а) раб – человек, не имеющий свободы; б) курица – домашняя птица, самка петуха; в) эллипс – замкнутая кривая, получаемая при сечении конуса или цилиндра плоскостью; г) сутки – отрезок времени, в течение которого Земля делает полный оборот вокруг своей оси; д) книга – определенное число соединенных в одно целое рукописных листов; е) мост – сооружение через реку; ж) термометр – стеклянный физический прибор для измерения температуры тела.

II. АЛГЕБРА ВЫСКАЗЫВАНИЙ

2.1. ВЫСКАЗЫВАНИЯ И ОПЕРАЦИИ НАД НИМИ

Опр. 2.1 *Высказыванием* называется грамматически правильное повествовательное предложение, взятое вместе с выражаемым им смыслом, о котором можно сказать истинно оно или ложно (Москва – столица России), [4]. Высказывания обозначаются большими буквами латинского алфавита A, B, C, D, E, …. Если высказывание истинно, то записывается A – "И" или $\lambda(A) = 1$, в противном случае A – "Л" или $\lambda(A) = 0$. "Истина" и "Ложь" называются значениями истинности высказываний. Каждому высказыванию приписывают только одно из двух значений истинности, одновременно тем и другим оно не может быть.

Опр. 2.2 Высказывание считается *истинным*, если даваемое им описание соответствует реальной ситуации, и *ложным*, если не соответствует ей (В августе 28 дней – ложное высказывание).

Высказывания бывают простыми (элементарными) и составными (сложными).

Опр. 2.3 Высказывание называется *простым* или *элементарным*, если оно не включает других высказываний в качестве своих частей.

Опр. 2.4 Высказывание называется *составным* или *сложным*, если оно получено из двух или более простых высказываний с помощью слов "и", "или", "либо", "если …, то", "тогда и только тогда, когда …", "неверно, что …", "ни…, ни…" и т.д. Эти слова называются *логическими связками*.

Например, A: "Число 28 делится на 7" – простое высказывание; B: "Число 28 – четное и делится на 7" – составное высказывание.

Для выявления логической структуры составного высказывания нужно установить:

1) из каких элементарных высказываний образовано данное высказывание;

2) с помощью, каких логических связок оно образовано.

В предыдущем примере В - составное высказывание, состоящее из двух простых высказываний: С: "Число 28 – четное", А: "Число 28 делится на 7", которые соединены с помощью логической связки "и". Данное высказывание имеет логическую структуру (форму) "С и А".

В математической логике различают следующие операции над высказываниями: *конъюнкция, дизъюнкция, отрицание, импликация, эквиваленция.*

Опр. 2.5 *Конъюнкцией* двух простых высказываний называется новое высказывание, построенное с помощью союза "и", которое истинно тогда и только тогда, когда истинны простые высказывания и ложно, когда хотя бы одно из простых высказываний ложно ("Идет дождь и дует ветер"), [4].

Обозначается конъюнкция **$A \wedge B$**. В высказывании " $A \wedge B$ ", его члены A, B называются *конъюнктами*.

Определение конъюнкции можно записать с помощью таблицы истинности

A	B	$A \wedge B$
И	И	И
И	Л	Л
Л	И	Л
Л	Л	Л

Замечание 1. При словесном содержательном построении конъюнкции из высказываний, речь в которых идет об одних и тех же объектах, во втором конъюнкте, как правило, опускаются имена этих объектов. Так, например, высказывание "Углы α, β - вертикальные и углы α, β равны" формулируется так :" Углы α, β - вертикальные и равны". Это же относится и к другим логическим связкам.

Опр. 2.6 *Дизъюнкцией* двух простых высказываний называется новое высказывание, построенное с помощью союза "или", которое истинно, когда истинно хотя бы одно из элементарных высказываний и ложно, когда оба высказывания ложны.

Обозначается конъюнкция **$A \vee B$**. В высказывании " $A \vee B$ ", его члены A, B называются *дизъюнктами*. Таблица истинности дизъюнкции имеет вид

A	B	$A \vee B$
И	И	И
И	Л	И
Л	И	И
Л	Л	Л

<u>Замечание 2.</u> В обыденной жизни мы чаще привыкли понимать союз "или" в разделительном смысле. Например, "Две прямые на плоскости имеют одну общую точку или параллельны". В математической логике слово "или" не является разделительным и мы будем допускать истинное высказывание "A или B" также в том случае, когда A, B одновременно истинны.

<u>Опр. 2.7</u> *Отрицанием* простого высказывания называется новое высказывание, образованное с помощью логической связки "не" или "неверно, что", которое истинно, когда исходное высказывание ложно и ложно, когда исходное высказывание истинно ("Неверно, что сумма углов треугольника равна 100^0").

Обозначается отрицание **$\urcorner A$**. Таблица истинности представлена в виде

A	$\urcorner A$
И	Л
Л	И

<u>Опр. 2.8</u> *Импликацией* двух простых высказываний A,B называется новое высказывание, построенное с помощью логической связки "если…, то…"; читается "A влечет B", "из A следует B", "если A, то B", которое является ложным только в том случае, когда первое высказывание истинно, а второе ложно, в

остальных случаях оно истинно ("Если число натуральное, то оно положительное").

Импликация обозначается **A→B**. Таблица истинности импликации имеет вид

A	B	$A \to B$
И	И	И
И	Л	Л
Л	И	И
Л	Л	И

Импликация – это формализация интуитивного понимания логического следования, т.е. истинность высказывания " $A \to B$" означает, что B является логическим следствием из A. Члены импликации называются A – *посылкой*, B – *следствием*.

Замечание 3. Если посылка A ложна, то импликация будет истинна независимо от значения истинности следствия B.

Опр. 2.9 *Эквиваленцией* двух простых высказываний A, B называется новое высказывание, построенное с помощью связок "тогда и только тогда, когда", " в том и только том случае", "необходимо и достаточно", которое истинно, когда оба высказывания истинны или оба ложны ("Треугольник является равносторонним тогда и только тогда, когда он равноугольный"), [5].

Эквиваленция обозначается **A ↔ B**. Определение эквиваленции можно записать с помощью таблицы истинности

A	B	$A \leftrightarrow B$
И	И	И
И	Л	Л
Л	И	Л
Л	Л	И

К эквиваленции в той же мере, что и к импликации относится замечание, что ее использование в математической логике не учитывает смыслового содержания высказываний.

Логические связки $\wedge$, $\vee$, $\rceil$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ полностью задают значения истинности сложных высказываний и их можно считать алгебраическими операциями на множестве истинности значений "И - 1", "Л - 0". Тогда действия всех логических операций можно представить в виде таблицы

A	B	$\rceil$A	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \rightarrow B$	$A \leftrightarrow B$
1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1	0
0	0	1	0	0	1	1

2.2. ФОРМУЛЫ АЛГЕБРЫ ВЫСКАЗЫВАНИЙ

Понятие формулы алгебры высказываний в математической логике очень похоже на понятие формулы в алгебре, с той лишь разницей, что в отличии алгебраических действий сложения, вычитания, умножения, деления в качестве операций выступают логические связки.

Опр. 2.10 *Формулами алгебры высказываний* называются логические операции, которые получаются комбинированием конечного числа высказываний A, B, C, … с помощью логических связок $\wedge$, $\vee$, $\rceil$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$. A, B, C, … будем называть *пропозициональными переменными*, а логические связки $\wedge$, $\vee$, $\rceil$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ - *пропозициональными связками*, [6]. Пропозициональные переменные и связки образуют *алфавит* в математической логике.

Определение формулы может быть дано следующим образом:

1. Всякая пропозициональная переменная есть формула.

2. Если цепочка символов A и B являются формулами, то и цепочка символов $A \wedge B$, $A \vee B$, $\rceil A$, $A \to B$, $A \leftrightarrow B$ также являются формулами.

3. Только те выражения являются формулами, для которых это следует из 1 и 2, т.е. других формул нет.

Из этого следует, что сначала определяются простейшие формулы, потом указывается способ получения новых формул из ранее полученных.

Чтобы не путаться в количестве скобок будем считать, что связки расположены в порядке убывания их старшинства следующим образом $\rceil$, $\wedge$, $\vee$, $\to$, $\leftrightarrow$. Так формула $(\rceil A \wedge B) \vee (\rceil A \wedge C)$ может быть записана без скобок $A \wedge B \vee \rceil A \wedge C$. Если записана формула $A \vee B \wedge C$, то сначала выполняется конъюнкция, а потом дизъюнкция, т.е. $A \vee (B \wedge C)$, так как знак конъюнкции "сильнее", чем знак дизъюнкции.

Для всякой формулы можно построить истинностную таблицу, последовательно используя таблицы истинности для основных операций.

Различают *выполнимые, тождественно истинные (тавтологии), тождественно ложные (противоречивые)* и *эквивалентные (равносильные)* формулы, [6].

Опр.2.11 Формула называется *выполнимой*, если существует набор значений для входящих в нее пропозициональных переменных, на которых эта формула истинна.

Опр. 2.12 Формула называется *тождественно истинной (тавтологией)*, если она истинна при любом наборе значений входящих в нее пропозициональных переменных.

Опр. 2.13 Формула называется *тождественно ложной (противоречивой)*, если она ложна при любом наборе значений входящих в нее пропозициональных переменных.

<u>Опр. 2.14</u> Формулы F и Ф называются *эквивалентными (равносильными)*, если при любых наборах значений истинности входящих в них пропозициональных переменных, значения истинности этих формул совпадают.

Эквивалентность формул обозначается $\mathbf{F \sim \Phi}$ или $\mathbf{F \approx \Phi}$.

<u>Пример 1.</u> Определить тип формулы $\Phi = ((A \to B) \to B) \to B$.

<u>Решение.</u> Составим таблицу истинности для данной формулы

A	B	$A \to B$	$(A \to B) \to B$	$((A \to B) \to B) \to B$
1	0	0	1	0
0	1	1	1	1
1	1	1	1	1
0	0	1	0	0

Из последнего столбца таблицы видно, что данная формула является выполнимой.

Справедлива теорема об основных эквивалентностях алгебры высказываний.

<u>Теорема.</u> Для любых формул A, B, C справедливы следующие эквивалентности

1. $\mathbf{A \vee B \sim B \vee A}$ (коммутативность дизъюнкции).
2. $\mathbf{A \wedge B \sim B \wedge A}$ (коммутативность конъюнкции).
3. $\mathbf{A \vee (B \vee C) \sim (A \vee B) \vee C}$ (ассоциативность дизъюнкции).
4. $\mathbf{A \wedge (B \wedge C) \sim (A \wedge B) \wedge C}$ (ассоциативность конъюнкции).
5. $\mathbf{A \vee (B \wedge C) \sim (A \vee B) \wedge (A \vee C)}$ (дистрибутивность дизъюнкции относительно конъюнкции).
6. $\mathbf{A \wedge (B \vee C) \sim (A \wedge B) \vee (A \wedge C)}$ (дистрибутивность конъюнкции относительно дизъюнкции).

$$\left.\begin{array}{l} 7.\ (\mathbf{A} \vee \mathbf{B}) \wedge \mathbf{A} \approx \mathbf{A} \\ 8.\ (\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) \vee \mathbf{A} \approx \mathbf{A} \end{array}\right\} \text{(законы поглощения).}$$

9. $\rceil\mathbf{(A \wedge B) \sim \rceil A \vee \rceil B}$ (первый закон де Моргана).

10. $\rceil(\mathbf{A} \vee \mathbf{B}) \sim \rceil\mathbf{A} \wedge \rceil\mathbf{B}$ (второй закон де Моргана).

11. $\rceil\rceil\mathbf{A} \sim \mathbf{A}$ (закон двойного отрицания).

12. $\mathbf{A} \to \mathbf{B} \sim \rceil\mathbf{A} \vee \mathbf{B}$ (закон удаления импликации).

13. $\mathbf{A} \wedge \mathbf{A} \sim \mathbf{A}$ **(**идемпотентность конъюнкции).

14. $\mathbf{A} \vee \mathbf{A} \sim \mathbf{A}$ **(**идемпотентность дизъюнкции).

15. $\mathbf{A} \leftrightarrow \mathbf{B} \sim (\mathbf{A} \to \mathbf{B}) \wedge (\mathbf{B} \to \mathbf{A})$ (закон удаления эквиваленции).

16. $\mathbf{A} \to \mathbf{B} \sim \rceil\mathbf{B} \to \rceil\mathbf{A}$ (закон контрапозиции).

Доказательство этой теоремы носит чисто технический характер и сводится к проверке равенства значений истинности формул при возможных наборах значений истинности пропозициональных переменных. Применение этих эквивалентностей позволяют существенно упростить формулы и высказывания.

Замечание 4. Полезно для сокращения тождественно истинных формул ввести знак **И**, а тождественно ложных - знак **Л**. Все тождественно истинные формулы от любого числа переменных равносильны между собой и то же самое имеет место для тождественно ложных формул. Тогда справедливы следующие равносильности

17. $\mathbf{A} \vee \rceil\mathbf{A} \sim \textbf{И}$.
18. $\mathbf{A} \wedge \rceil\mathbf{A} \sim \textbf{Л}$.
19. $\mathbf{A} \vee \textbf{И} \sim \textbf{И}$.
20. $\mathbf{A} \wedge \textbf{Л} \sim \textbf{Л}$.
21. $\mathbf{A} \vee \textbf{Л} \sim \mathbf{A}$.
22. $\mathbf{A} \wedge \textbf{И} \sim \textbf{И}$.

Пример 2. Применяя равносильные преобразования, привести формулу $(\rceil\mathbf{A} \to \mathbf{B}) \vee \rceil(\mathbf{A} \to \mathbf{B})$ к более простому виду.

Решение. На основании законов удаления импликации (формула 12), де Моргана (формула 9) и поглощения (формула 8) имеем

$$(\rceil\mathbf{A} \to \mathbf{B}) \vee \rceil(\mathbf{A} \to \mathbf{B}) \sim (\mathbf{A} \vee \mathbf{B}) \vee \rceil(\rceil\mathbf{A} \vee \mathbf{B}) \sim$$
$$\sim (\mathbf{A} \vee \mathbf{B}) \vee (\mathbf{A} \wedge \rceil\mathbf{B}) \sim \mathbf{B} \vee (\mathbf{A} \vee (\mathbf{A} \wedge \rceil\mathbf{B})) \sim \mathbf{B} \vee \mathbf{A}.$$

Задача. На вопрос, кто из трех студентов A, B и C изучал логику, были получены ответы: 1) если изучал A, то изучал и B; 2) неверно, что, если изучал C, то изучал B. Кто из них изучал логику?

Решение. Введем элементарные высказывания А: "логику изучал студент А"; В: "логику изучал студент В". Составим формулу из ответов на вопрос, соединив ответы конъюнкцией F = $(\mathbf{A} \to \mathbf{B}) \wedge \rceil(\mathbf{C} \to \mathbf{B})$. Упростим ее, используя таблицу эквивалентностей:

$$(\mathbf{A} \to \mathbf{B}) \wedge \rceil(\mathbf{C} \to \mathbf{B}) \sim (\rceil\mathbf{A} \vee \mathbf{B}) \wedge \rceil(\rceil\mathbf{C} \vee \mathbf{B}) \sim (\rceil\mathbf{A} \vee \mathbf{B}) \wedge (\mathbf{C} \wedge \rceil\mathbf{B}) \sim$$

$$\sim ((\rceil\mathbf{A} \vee \mathbf{B}) \wedge \rceil\mathbf{B}) \wedge \mathbf{C} \sim ((\rceil\mathbf{A} \wedge \rceil\mathbf{B}) \vee (\mathbf{B} \wedge \rceil\mathbf{B})) \wedge \mathbf{C} \sim$$

$$\sim ((\rceil\mathbf{A} \wedge \rceil\mathbf{B}) \vee \text{Л}) \wedge \mathbf{C} \sim \rceil\mathbf{A} \wedge \rceil\mathbf{B} \wedge \mathbf{C}.$$

По виду полученной формулы делаем вывод, что логику изучал студент С.

2.3. УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Какие из следующих предложений являются высказываниями?

а) Функция f(x) является нечетной; б) Платон был учителем Аристотеля; в) В этом треугольнике все углы равны; г) Москва – столица Украины; д) Кислород – газ; е) Да здравствуют каникулы!; ж) Луна есть спутник Марса.

2. Сформулируйте отрицания следующих высказываний:

а) Волга впадает в Каспийское море; б) Число 30 не делится на 7; в) Человеку известны все виды животных, обитающих на Земле; г) $4 \le 5$; д) В романе А.С. Пушкина "Евгений Онегин" 136 245 букв; е) Железо тяжелее свинца; ж) Все простые числа нечетные.

3. Записать с помощью логических связок следующие высказывания и определить их значения истинности:

а) Число делится на 6 тогда и только тогда, когда оно делится на 2 и на 3;

б) Если число целое и не натуральное, то оно не положительное;

в) Александр станет механиком и не станет математиком, либо он станет физиком и не станет механиком;

г) Неверно, что изучение логики трудно и бесполезно;

д) Если неверно, что $2 \cdot 2 = 3$ и 5 – четное число, то неверно, что 5 делится на 3;

е) Четырехугольник есть параллелограмм и не ромб, тогда и только тогда, когда его диагонали не взаимно перпендикулярны;

ж) Три точки А, В, С лежат на одной окружности и не лежат на одной прямой.

4. Дать словесную формулировку следующим формулам:

а) $\mathbf{(A \wedge B) \to C}$; б) $\mathbf{(\neg B \to \neg A) \leftrightarrow C}$; в) $\mathbf{(B \leftrightarrow C) \vee \neg A}$;

г) $\mathbf{\neg(A \wedge \neg B) \leftrightarrow \neg C}$; д) $\mathbf{A \leftrightarrow (B \vee \neg C)}$; е) $\mathbf{(A \vee C) \to (A \wedge B)}$;

ж) $\mathbf{A \vee (B \to C)}$, если А: "Этот четырехугольник – параллелограмм", В: "Этот четырехугольник – ромб", С: " В этом четырехугольнике диагонали взаимно перпендикулярны".

5. Как расставить скобки в выражениях, чтобы получилась формула, и каков ее смысл, если А: "число **а** – четное", В: " число **а** делится на 5", С: "число **а** делится на 10"?

а) $\mathbf{\neg A \wedge B \to C}$; б) $\mathbf{A \to B \leftrightarrow C}$; в) $\mathbf{A \to \neg B \vee C}$; г) $\mathbf{A \to \neg C \wedge \neg B}$;

д) $\mathbf{A \vee B \to \neg C}$; е) $\mathbf{C \leftrightarrow A \vee B}$; ж) $\mathbf{\neg A \vee \neg B \to C}$.

6. Определить тип формулы

а) $\mathbf{((A \to B) \wedge (A \vee B)) \to B}$; б) $\mathbf{A \leftrightarrow ((A \vee B) \wedge (A \vee \neg C)}$;

в) $\mathbf{\neg(A \wedge B) \to (A \vee C)}$; г) $(\mathbf{\neg A \wedge (B \to C)) \to (\neg A \to C)}$;

д) $\mathbf{((X \to (У \wedge Z) \to (\neg У \to \neg X)) \to \neg У}$; е) $\mathbf{(P \leftrightarrow Q) \to (P \to Q)}$;

ж) $\mathbf{(X \vee У \vee Z) \to ((X \vee У) \wedge (X \vee Z))}$.

7. Следующие формулы преобразуйте равносильным образом так, чтобы они содержали только операции $\neg, \vee, \wedge$:

а) $\mathbf{(X \vee У) \to (\neg X \to Z)}$; б) $(\mathbf{(X \leftrightarrow \neg У) \to Z) \to (X \leftrightarrow \neg Z)}$;

в) $\mathbf{(\neg X \to У) \vee \neg(X \to У)}$; г) $(\mathbf{\neg X \wedge \neg У) \to (X \wedge У)}$;

д) $\mathbf{\neg(\neg P \to Q) \to ((P \vee Q) \to P)}$; е) $\mathbf{(P \wedge Q) \leftrightarrow (\neg Q \to \neg P)}$;

ж) $\mathbf{((X \to У) \wedge (У \to Z)) \to \neg X}$.

III. НОРМАЛЬНЫЕ ФОРМЫ

3.1. ДИЗЪЮНКТИВНАЯ И КОНЪЮНКТИВНАЯ НОРМАЛЬНЫЕЕ ФОРМЫ

Опр. 3.1 Формула F называется *элементарной конъюнкцией*, если для некоторых $n \geq 1$ она имеет вид $\mathbf{a_1 \wedge a_2 \wedge \ldots \wedge a_n}$, где каждая формула a_i (i=1,…n) является либо пропозициональной переменной, либо ее отрицанием, [7].

Например, $\mathbf{X}$, $\mathbf{\neg X}$, $\mathbf{X \wedge У}$, $\mathbf{X \wedge \neg У}$ являются элементарными конъюнкциями, а $X \vee У$, $\neg X \wedge У \vee Z$ не являются таковыми.

Опр. 3.2 Формула F называется *элементарной дизъюнкцией*, если для некоторых $n \geq 1$ она имеет вид $\mathbf{a_1 \vee a_2 \vee \ldots \vee a_n}$, где каждая формула a_i (i=1,…n) является либо пропозициональной переменной, либо ее отрицанием.

Опр. 3.3 Формула F называется *дизъюнктивной нормальной формой* (ДНФ), если для некоторых $n \geq 1$ она имеет вид $\mathbf{A_1 \vee A_2 \vee \ldots \vee A_n}$, где каждая формула $\mathbf{A_i}$ (i=1,…n) является элементарной конъюнкцией.

Например, формула $F = (X \wedge \neg У) \vee (X \wedge Z) \vee \neg X$ является ДНФ.

Опр. 3.4 Формула F называется *конъюнктивной нормальной формой* (КНФ), если для некоторых $n \geq 1$ она имеет вид $\mathbf{A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n}$, где каждая формула $\mathbf{A_i}$ (i=1,…n) является элементарной дизъюнкцией.

Например, $F = (A \vee \neg B) \wedge (\neg A \vee C) \wedge (\neg A \vee \neg B)$ является КНФ.

Опр. 3.5 Формула F называется *формулой с тесным отрицанием*, если она не содержит знака импликации и все, встречающиеся в ней отрицания, стоят непосредственно перед пропозициональными переменными.

Утверждение 1. Для всякой формулы алгебры логики существует эквивалентная ей формула, не содержащая знака импликации и эквиваленции.

Утверждение 2. Для всякой формулы алгебры логики существует эквивалентная ей формула с тесным отрицанием.

Пример 1. Преобразовать формулу $F = (X \rightarrow У) \leftrightarrow Z$.

Решение. Применяя эквивалентные формулы 12, 15, 9, 10, получим

$$(\neg X \vee У) \leftrightarrow Z \approx ((\neg X \vee У) \rightarrow Z) \wedge (Z \rightarrow (\neg X \vee У)) \approx$$
$$(\neg(\neg X \vee У) \vee Z) \wedge (\neg Z \vee (\neg X \vee У)) \approx (X \wedge \neg У) \vee Z) \wedge (\neg Z \vee (\neg X \vee У)).$$

Преобразованная формула не содержит знаков импликации и эквиваленции и является формулой с тесным отрицанием.

Теорема (без доказательства)

Для всякой формулы алгебры логики существует эквивалентная ей дизъюнктивная и конъюнктивная нормальные формы.

Для *приведения формулы к ДНФ* удобно пользоваться *заменой знака конъюнкции на умножение, а знака дизъюнкции на сложение*. Выполнив алгебраические действия, произвести обратную замену.

Для *приведения формулы к КНФ* необходимо *заменить знак конъюнкции на сложение, а знак дизъюнкции на умножение*. После выполнения алгебраических преобразований произвести обратную замену, [7].

Пример 2. Равносильными преобразованиями привести формулу

$\mathbf{F = (A \wedge (B \rightarrow C)) \rightarrow (A \rightarrow C)}$ к дизъюнктивной нормальной форме.

Решение. Сначала избавимся от импликаций по формуле 12.

$$(A \wedge (B \rightarrow C)) \rightarrow (A \rightarrow C) \approx (A \wedge(\neg B \vee C)) \rightarrow (\neg A \vee C) \approx$$

$$\approx \neg(A \wedge(\neg B \vee C)) \vee (\neg A \vee C) \approx (\neg A \vee (B \wedge \neg C) \vee (\neg A \vee C).$$

ДНФ имеет вид: $\neg A \vee (B \wedge \neg C) \vee \neg A \vee C \approx \neg A \vee (B \wedge \neg C) \vee C$, состоит из трех элементарных конъюнкций.

3.2. КРИТЕРИИ ТОЖДЕСТВЕННОЙ ИСТИННОСТИ И ЛОЖНОСТИ ФОРМУЛ АЛГЕБРЫ ВЫСКАЗЫВАНИЙ

Утверждение 3.

А. Элементарная дизъюнкция является *тождественно истинной* тогда и только тогда, когда она *содержит два вхождения с одной переменной, одно с отрицанием, другое без.*

Б. Элементарная конъюнкция является *тождественно ложной* тогда и только тогда, когда она *содержит два вхождения с одной переменной, одно с отрицанием, другое без.*

Утверждение 4. (*Критерий тождественной истинности формул*)

Формула F является тождественной истинной тогда и только тогда, когда в любой ее КНФ каждая элементарная дизъюнкция содержит два вхождения с одной переменной, одно с отрицанием, другое без,[8].

Утверждение 5. (*Критерий тождественной ложности формул*)

Формула F является тождественной ложной тогда и только тогда, когда в любой ее ДНФ каждая элементарная конъюнкция содержит два вхождения с одной переменной, одно с отрицанием, другое без.

Пример 3. Доказать, что формула $\mathbf{F = (P \leftrightarrow Q) \to (P \to Q)}$ является тождественно истинной.

Решение. Для решения этого примера приведем данную формулу к КНФ и проверим критерий тождественной истинности. Предварительно упростим формулу.

$$\mathbf{(P \leftrightarrow Q) \to (P \to Q) \approx ((P \to Q) \land (Q \to P)) \to (P \to Q) \approx}$$

$$\mathbf{\approx ((\rceil P \lor Q) \land (\rceil Q \lor P)) \to (\rceil P \lor Q) \approx \rceil ((\rceil P \lor Q) \land (\rceil Q \lor P)) \lor (\rceil P \lor Q) \approx}$$

$$\mathbf{\approx (P \land \rceil Q) \lor (Q \land \rceil P) \lor (\rceil P \lor Q)}.$$

По правилу приведения формулы к КНФ, получим

$$\mathbf{(P + \rceil Q) \cdot (Q + \rceil P) \cdot (\rceil P \cdot Q) = (P{\cdot}Q + \rceil Q{\cdot}Q + P \cdot \rceil P + \rceil Q{\cdot}P) \cdot \rceil P \cdot Q =}$$

$$\mathbf{= P{\cdot}Q{\cdot}\rceil P{\cdot}Q + \rceil Q{\cdot}Q \cdot \rceil P{\cdot}Q + P{\cdot}\rceil P{\cdot}\rceil P{\cdot}Q + \rceil Q{\cdot}P{\cdot}\rceil P{\cdot}Q}.$$

Произведем обратную замену знака "+" на "$\wedge$", а "·" на "$\vee$"

$$(\mathbf{P} \vee \mathbf{Q} \vee \rceil\mathbf{P} \vee \mathbf{Q}) \wedge (\rceil\mathbf{Q} \vee \mathbf{Q} \vee \rceil\mathbf{P} \vee \mathbf{Q}) \wedge (\mathbf{P} \vee \rceil\mathbf{P} \vee \rceil\mathbf{P} \vee \mathbf{Q}) \wedge (\rceil\mathbf{Q} \vee \mathbf{P} \vee \rceil\mathbf{P} \vee \mathbf{Q})$$

Получена конъюнктивная нормальная форма, состоящая из четырех элементарных дизъюнкций, каждая из которой содержит переменную со своим отрицанием. Это говорит о том, что критерий тождественной истинности выполняется, и формула является тождественно истинной.

3.3. СОВЕРШЕННЫЕ НОРМАЛЬНЫЕ ФОРМЫ

Различают две совершенные нормальные формы: совершенная дизъюнктивная нормальная форма (СДНФ) и совершенная конъюнктивная нормальная форма (СКНФ).

<u>Опр. 3.6</u> Формула **F** называется *совершенной дизъюнктивной нормальной формой*, если **F** – ДНФ и при этом каждая пропозициональная переменная входит в каждый ее конъюнктивный одночлен ровно один раз со знаком отрицания или без него, причем **F** не содержит двух одинаковых конъюнктивных одночленов, [8].

Например, $(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B} \wedge \rceil\mathbf{C}) \vee (\mathbf{A} \wedge \mathbf{C}) \vee \rceil\mathbf{B}$ – дизъюнктивная (но не совершенная) нормальная форма от трех переменных, $(\mathbf{A} \wedge \rceil\mathbf{B}) \vee (\rceil\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) \vee (\rceil\mathbf{B} \wedge \rceil\mathbf{A})$ - СДНФ.

<u>Опр. 3.7</u> Формула **F** называется *совершенной конъюнктивной нормальной формой*, если **F** – КНФ и при этом каждая пропозициональная переменная входит в каждый ее дизъюнктивный одночлен ровно один раз со знаком отрицания или без него, причем **F** не содержит двух одинаковых дизъюнктивных одночленов.

Например, $(\mathbf{X} \vee \mathbf{Y} \vee \mathbf{Z}) \wedge (\rceil\mathbf{Z} \vee \mathbf{Y} \vee \mathbf{X}) \wedge (\mathbf{X} \vee \rceil\mathbf{Y} \vee \rceil\mathbf{Z})$ – СКНФ.

<u>Теорема *о существовании совершенных нормальных форм*</u>

1. Если F – не тождественно ложная формула, то существует СДНФ, эквивалентная ей. Если Ф - тождественно ложная формула, то эквивалентной ей СДНФ не существует.

2. Если F – не тождественно истинная формула, то существует СКНФ, эквивалентная ей. Если Ф - тождественно истинная формула, то эквивалентной ей СКНФ не существует, [9].

Пример 4. Равносильными преобразованиями привести формулу

$(\neg \mathbf{X} \vee \mathbf{Z}) \wedge (\mathbf{Y} \vee \mathbf{Z})$ к СДН - форме.

Решение. $(\neg \mathbf{X} \vee \mathbf{Z}) \wedge (\mathbf{Y} \vee \mathbf{Z}) \approx (\neg \mathbf{X} \wedge \mathbf{Y}) \vee \mathbf{Z}$. В конъюнктивном одночлене $(\neg \mathbf{X} \wedge \mathbf{Y})$ отсутствует переменная **Z**. Введение ее осуществляется следующим образом:

$$(\neg \mathbf{X} \wedge \mathbf{Y}) \approx \neg \mathbf{X} \wedge \mathbf{Y} \wedge \mathbf{1} \approx (\neg \mathbf{X} \wedge \mathbf{Y}) \wedge (\mathbf{Z} \vee \neg \mathbf{Z}) \approx (\neg \mathbf{X} \wedge \mathbf{Y} \wedge \mathbf{Z}) \vee (\neg \mathbf{X} \wedge \mathbf{Y} \wedge \neg \mathbf{Z}).$$

В одночлене **Z** отсутствуют две переменные **X** и **Y**. Введем сначала в этот одночлен переменную **Y**:

$$\mathbf{Z} \approx \mathbf{1} \wedge \mathbf{Z} \approx (\mathbf{Y} \vee \neg \mathbf{Y}) \wedge \mathbf{Z} \approx (\mathbf{Y} \wedge \mathbf{Z}) \vee (\neg \mathbf{Y} \wedge \mathbf{Z}).$$

Наконец, в каждый из конъюнктивных одночленов $\mathbf{Y} \wedge \mathbf{Z}$ и $\neg \mathbf{Y} \wedge \mathbf{Z}$ введем отсутствующую в них переменную **X**:

$$(\mathbf{Y} \wedge \mathbf{Z}) \vee (\neg \mathbf{Y} \wedge \mathbf{Z}) \approx (\mathbf{1} \wedge \mathbf{Y} \wedge \mathbf{Z}) \vee (\mathbf{1} \wedge \neg \mathbf{Y} \wedge \mathbf{Z}) \approx$$
$$\approx ((\mathbf{X} \vee \neg \mathbf{X}) \wedge \mathbf{Y} \wedge \mathbf{Z}) \vee ((\mathbf{X} \vee \neg \mathbf{X}) \wedge \neg \mathbf{Y} \wedge \mathbf{Z}) \approx$$
$$\approx (\mathbf{X} \wedge \mathbf{Y} \wedge \mathbf{Z}) \vee (\neg \mathbf{X} \wedge \mathbf{Y} \wedge \mathbf{Z}) \vee (\mathbf{X} \wedge \neg \mathbf{Y} \wedge \mathbf{Z}) \vee (\neg \mathbf{X} \wedge \neg \mathbf{Y} \wedge \mathbf{Z}).$$

Итак, данная формула имеет следующую СДН – форму

$$(\neg \mathbf{X} \vee \mathbf{Z}) \wedge (\mathbf{Y} \vee \mathbf{Z}) \approx (\neg \mathbf{X} \wedge \mathbf{Y} \wedge \mathbf{Z}) \vee (\neg \mathbf{X} \wedge \mathbf{Y} \wedge \neg \mathbf{Z}) \vee (\mathbf{X} \wedge \mathbf{Y} \wedge \mathbf{Z}) \vee$$
$$\vee (\neg \mathbf{X} \wedge \mathbf{Y} \wedge \mathbf{Z}) \vee (\mathbf{X} \wedge \neg \mathbf{Y} \wedge \mathbf{Z}) \vee (\neg \mathbf{X} \wedge \neg \mathbf{Y} \wedge \mathbf{Z}) \approx (\neg \mathbf{X} \wedge \mathbf{Y} \wedge \mathbf{Z}) \vee$$
$$\vee (\neg \mathbf{X} \wedge \mathbf{Y} \wedge \neg \mathbf{Z}) \vee (\mathbf{X} \wedge \mathbf{Y} \wedge \mathbf{Z}) \vee (\mathbf{X} \wedge \neg \mathbf{Y} \wedge \mathbf{Z}) \vee (\neg \mathbf{X} \wedge \neg \mathbf{Y} \wedge \mathbf{Z}).$$

3.4. ПРИМЕНЕНИЕ НОРМАЛЬНЫХ ФОРМ

3.4.1. Логическое следование

Опр. 3.8 Формула **F** называется *логическим следствием* формул F_1, F_2, …, F_n, если при всех значениях переменных, входящих в эти формулы, при которых F_1, F_2, …, F_n одновременно истинны, формула **F** тоже истинна, [9].

Утверждение 6. Формула **F** является логическим следствием формул F_1, F_2, …, F_n тогда и только тогда, когда формула $\mathbf{F_1 \wedge F_2 \wedge \ldots \wedge F_n \to F}$ является тождественно истинной (тавтологией).

F_1, F_2, …, F_n называются *посылками* (высказывания, из которого состоит рассуждение); F – *заключением* (следствие, вывод).

Пример 5. Является ли формула **F** логическим следствием формул $\mathbf{F_1}$ и $\mathbf{F_2}$, где $\mathbf{F = \neg Y \to \neg X}$, $\mathbf{F_1 = X \wedge Z}$, $\mathbf{F_2 = X \to (Y \vee Z)}$?

Решение. Воспользуемся утверждением 6. Составим формулу $\mathbf{F_1 \wedge F_2 \to F}$ и применим к ней критерий тождественной истинности формул. Эквивалентными преобразованиями приведем формулу к КНФ:

$$\mathbf{(X \wedge Z) \wedge (X \to (Y \vee Z)) \to (\neg Y \to \neg X) \approx \neg((X \wedge Z) \wedge (\neg X \vee (Y \vee Z)) \vee}$$
$$\mathbf{\vee (Y \vee \neg X) \approx (\neg X \vee \neg Z) \vee (X \wedge (\neg Y \wedge \neg Z)) \vee (Y \vee \neg X) \approx (\neg X \vee \neg Z \vee X) \wedge}$$
$$\mathbf{\wedge (\neg X \vee \neg Z \vee \neg Y) \wedge (\neg X \vee \neg Z \vee \neg Z) \vee (Y \vee \neg X) \approx (\neg X \vee \neg Z \vee X \vee Y \vee \neg X) \wedge}$$
$$\mathbf{\wedge (\neg X \vee \neg Z \vee \neg Y \vee Y \vee \neg X) \wedge (\neg X \vee \neg Z \vee \neg Z \vee Y \vee \neg X).}$$

В полученной конъюнктивной форме в каждой дизъюнктивном одночлене содержится два вхождения переменной одно с отрицанием, другое без, что подтверждает критерий тождественной истинности формулы и утверждение 6. На основании чего заключаем, что данная формула **F** является логическим следствием формул $\mathbf{F_1}$ и $\mathbf{F_2}$.

3.4.2. Нахождение следствий из посылок

Утверждение 7. Для того, чтобы формула **F** была логическим следствием формул $\mathbf{F_1}$, $\mathbf{F_2}$, …, $\mathbf{F_n}$ необходимо и достаточно, чтобы в совершенной конъюнктивной нормальной форме формулы **F** входили только дизъюнкции, входящие в СКНФ формулы $\mathbf{F_1 \wedge F_2 \wedge \ldots \wedge F_n}$, [10].

Из этого утверждения следует *алгоритм построения следствий из заданных посылок* (формул) $\mathbf{F_1, F_2, \ldots, F_n}$:

I этап. Построить формулу $\mathbf{F_1 \wedge F_2 \wedge \ldots \wedge F_n}$.

II этап. Привести формулу $\mathbf{F_1 \wedge F_2 \wedge \ldots \wedge F_n}$ к СКНФ.

III. этап. Построить всевозможные конъюнкции из дизъюнкций, входящих СКНФ для $\mathbf{F_1 \wedge F_2 \wedge \ldots \wedge F_n}$.

IV этап. Упростить полученные формулы, используя эквивалентные преобразования.

Пример 6. Найдите все следствия из посылок: "Если сумма цифр целого числа делится на 3, то это число делится на 3 или на 9"; "Если целое число делится на 9. то оно делится на 3". Найденным следствиям придайте содержательный смысл.

Решение. Введем обозначения для простых высказываний:

X: " Сумма цифр целого числа делится на 3";

Y: "Целое число делится на 3";

Z: " Целое число делится на 9".

Тогда первая посылка символически запишется в виде формулы

$\mathbf{F_1 = X \to (Y \vee Z)}$, а вторая – в виде формулы $\mathbf{F_2 = Z \to Y}$. Задача сводится к тому, чтобы из этих формул (посылок) получить все формулы, являющиеся их логическими следствиями. Составляем конъюнкцию посылок и равносильными преобразованиями приводим ее к совершенной конъюнктивной нормальной форме:

$$\mathbf{(X \to (Y \vee Z)) \wedge (Z \to Y) \approx (\neg X \vee Y \vee Z) \wedge (\neg Z \vee Y) \approx (\neg X \vee Y \vee Z) \wedge}$$

$\wedge ((X \wedge \rceil X) \vee (\rceil Z \vee Y)) \approx (\rceil X \vee Y \vee Z) \wedge (X \vee \rceil Z \vee Y) \wedge (\rceil X \vee \rceil Z \vee Y)$.

Логическими следствиями из данных посылок будут все совершенные дизъюнктивные одночлены, входящие в полученную СКН-форму, а также всевозможные конъюнкции этих одночленов по два, по три и т.д. Выписываем получающиеся формулы, придав им более удобную равносильную форму:

$\rceil X \vee Y \vee Z \approx X \to (Y \vee Z)$ (первая посылка);

$X \vee \rceil Z \vee Y \approx Z \to (X \vee Y)$;

$\rceil X \vee \rceil Z \vee Y \approx (X \wedge Z) \to Y$;

$(\rceil X \vee Y \vee Z) \wedge (X \vee \rceil Z \vee Y) \approx (X \leftrightarrow Z) \vee Y$;

$(\rceil X \vee Y \vee Z) \wedge (\rceil X \vee \rceil Z \vee Y) \approx (\rceil X \vee Y) \vee (Z \wedge \rceil Z) \approx$

$\approx (\rceil X \vee Y \vee 0) \approx \rceil X \vee Y \approx X \to Y$;

$(X \vee \rceil Z \vee Y) \wedge (\rceil X \vee \rceil Z \vee Y) \approx Z \to Y$ (вторая посылка);

$(\rceil X \vee Y \vee Z) \wedge (X \vee \rceil Z \vee Y) \wedge (\rceil X \vee \rceil Z \vee Y) \approx$

$\approx (X \to (Y \vee Z) \wedge (Z \to Y) \approx (X \vee Z) \to Y$.

Придадим полученным следствиям содержательный смысл.

$X \to (Y \vee Z)$: "Если сумма цифр делится на 3, то число делится на 3 или на 9".

$Z \to (X \vee Y)$: "Если число делится на 9, то оно делится на 3 или сумма цифр делится на 3".

$(X \wedge Z) \to Y$: "Если сумма цифр делится на 3 и число делится на 9, то оно делится на 3".

$(X \leftrightarrow Z) \vee Y$: "Сумма цифр делится на 3 тогда и только тогда, когда число делится на 9 или число делится на 3".

$X \to Y$: "Если сумма цифр числа делится на 3, то число делится на 3".

$Z \to Y$: "Если число делится на 9, то оно делится на 3".

$(X \vee Z) \to Y$: "Если сумма цифр числа делится на 3 или число делится на 9, то число делится на 3".

3.4.3. Нахождение посылок для следствий

Чтобы определить, логическим следствием каких посылок является данная формула $F(x_1,x_2,\ldots x_n)$ ее необходимо привести к совершенной конъюнктивной нормальной форме и затем составить конъюнкции формулы F с недостающими в ее СКНФ совершенными дизъюнктивными одночленами вида $\mathbf{X_1^* \vee X_2^* \vee\ldots \ldots\vee X_n^*}$*, где* $\mathbf{X_i^*}$ - *есть либо* $\mathbf{X_i}$*, либо* $\mathbf{\urcorner X_i}$*, взятыми по одному, по 2 и т.д,* [10].

Пример 7. В следующем рассуждении найдите недостающую посылку, связывающую высказывания "Прямые a и b лежат в одной плоскости" и "Прямые a и b скрещиваются" так, чтобы рассуждение было правильным:

1. Прямые a и b либо параллельны, либо пересекаются, либо скрещиваются.

2. Прямые a и b лежат в одной плоскости и не пересекаются.

3. ???

Следовательно, прямые a и b лежат в одной плоскости и параллельны.

Решение. Введем обозначения для простейших высказываний, входящих в рассуждение: A: "Прямые a и b параллельны"; B: " Прямые a и b пересекаются"; C: " Прямые a и b скрещиваются"; D: " Прямые a и b лежат в одной плоскости". Тогда задача сводится к отысканию такой формулы F(C, D), зависящей от переменных C и D, что справедливо логическое следование

$$\mathbf{(A \vee B \vee C)} \wedge (\mathrm{D} \wedge \mathbf{\urcorner B)} \wedge \mathrm{F(C, D)} \rightarrow \mathbf{(D \wedge A)}.$$

Составим таблицы истинности для формул, являющихся посылками и заключением.

A	B	C	D	$A \vee B \vee C$	$D \wedge \urcorner B$	$D \wedge A$
1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	0	1	0
1	2	3	4	5	6	7
0	0	1	0	1	0	0
0	0	1	1	1	1	0 *
1	2	3	4	5	6	7
0	1	0	0	1	0	0
0	1	0	1	1	0	0
0	1	1	0	1	0	0
0	1	1	1	1	0	0
1	0	0	0	1	0	0
1	0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	1	0	0
1	0	1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	0	0
1	1	0	1	1	0	1
1	1	1	0	1	0	0
1	1	1	1	1	0	1

Далее, в правом столбце отметим символом * те строки, в которых обе данные посылки принимают значение 1, а следствие принимает значение 0. Этому требованию отвечает лишь четвертая строка, в которой значения истинности переменных C и D равны 1, т.е. $\lambda(C) = 1$, $\lambda(D) = 1$. Ясно, что при этих значениях C и D искомая посылка F(C, D) должна принять значение 0, так как в противном случае формула $D \wedge A$ не будет логическим следствием формул $A \vee B \vee C$, $D \wedge \urcorner B$ и F(C, D), потому что на значениях $\lambda(A) = 0$, $\lambda(B) =$

0, $\lambda(C) = 1$, $\lambda(D) = 1$ все посылки примут значение 1, а формула $D \wedge A$ примет значение 0. Будем считать, что на других наборах значений переменных C и D формула F(C, D) принимает значение 1. Итак, для искомой посылки F(C, D) получаем следующую таблицу истинности:

C	D	F(C, D)
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Находим СКН - форму для искомой формулы

$$\mathbf{F(C, D) \approx \rceil C \vee \rceil D \approx C \to \rceil D}.$$

Придадим этой формуле содержательный смысл: "Если прямые *a* и *b* скрещиваются, то они не лежат в одной плоскости".

3.5. УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Приведите по 3 примера от трех переменных ДН и КН – формы.
2. Приведите по 3 примера от трех переменных СДН и СКН – формы.
3. Равносильными преобразованиями привести формулу к ДНФ

а) $\mathbf{(A\wedge B)\leftrightarrow(\rceil B\wedge A)}$; б) $\mathbf{C\to(A\vee B)}$; в) $\mathbf{(A\wedge \rceil B)\to C}$;

г) $\mathbf{\rceil(A\vee B)\wedge(\to C)}$; д) $\mathbf{(A\leftrightarrow B)\wedge \rceil C}$; е) $\mathbf{(A\vee (B\wedge \rceil C))\to \rceil B}$;

ж) $\mathbf{(\rceil A\vee B)\leftrightarrow C}$.

4. Равносильными преобразованиями привести формулу к КНФ.

а) $\mathbf{((A\to \rceil B) \wedge C)\vee \rceil A}$; б) $\mathbf{(A\vee \rceil B)\wedge(\rceil B\to A)}$;

в) $\mathbf{A\vee ((B\wedge \rceil C)\to A)}$; г) $\mathbf{\rceil(\rceil A\vee B)\wedge(A\to B)}$;

д) $(B\wedge(A\vee\neg C))\to\neg B$; е) $A\leftrightarrow(\neg B\wedge C)$; ж) $C\vee(A\leftrightarrow\neg B)$.

5. Проверить выполнение критерия тождественной истинности формул.

а) $(A\to B)\wedge(\neg B\vee\neg A)$; б) $(A\wedge\neg B)\leftrightarrow\neg A$; в) $A\to(B\to A)$;

г) $(A\wedge(B\vee\neg A))\wedge((\neg B\to A)\vee A)$; д) $(A\leftrightarrow B)\to(A\to B)$;

е) $(\neg A\to B)\leftrightarrow(B\to A)$; ж) $((A\to B)\to B)\to B$.

6. Проверить выполнение критерия тождественной ложности формул.

а) $((A\to B)\wedge(B\to C))\to\neg(A\to C)$; б) $A\wedge(A\to\neg B)\wedge(A\to B)$;

в) $(\neg A\vee\neg B\vee\neg C)\to C$; г) $\neg(A\wedge C)\to(A\to B)\wedge(B\to C)$;

д) $\neg B\vee(A\wedge(C\vee\neg A))\to B$; е) $(A\leftrightarrow B)\wedge(\neg B\to A)$; ж) $(\neg A\wedge\neg B)\to(A\wedge B)$.

7. Какие из формул являются СДНФ или СКНФ?

а) $(A\vee B\vee\neg C)\wedge(A\vee\neg B\vee\neg C)\wedge(\neg A\vee B\vee C)$;

б) $(\neg A\wedge\neg B\wedge\neg C)\vee(\neg A\wedge B\wedge C)\vee(A\wedge\neg B\wedge C)\vee(A\wedge B\wedge\neg C)$;

в) $(\neg A\vee\neg B\vee C)\wedge(\neg A\vee\neg B\vee C)\wedge(A\vee B\vee C)$;

г) $(\neg A\vee\neg B\vee C)\wedge(\neg A\vee\neg B\vee C)\wedge(A\vee B\vee C)$;

д) $(A\wedge B\wedge C)\vee(\neg A\wedge\neg B\wedge\neg C)$; е) $(A\wedge\neg B)\vee(\neg A\wedge B)$;

ж) $(\neg A\wedge\neg B\wedge C)\vee(A\wedge B\wedge C)\vee(A\wedge\neg B\wedge C)\vee(A\wedge B\wedge\neg C)$.

8. Даны утверждения

А: «Треугольник равнобедренный».

В: «Два внутренних угла треугольника равны между собой».

С: «Три внутренних угла треугольника равны между собой».

Д: «Два внешних угла треугольника равны между собой».

Е: «Две высоты треугольника равны между собой».

К: «Один из углов треугольника равен 45°».

Какие из перечисленных утверждений и из каких логически следуют?

9. Найдите все следствия из посылок и выразите их в содержательной форме:

а) «Если последняя цифра целого числа четна, число делится на 2 или на 4»; «Если целое число делится на 4, то оно делится на 2».

б) "Если у четырехугольника две противоположные стороны параллельны и они же равны, то этот четырехугольник – параллелограмм"; "У данного четырехугольника две противоположные стороны равны и параллельны".

в) "Если целое число делится на 2 и на 5, то оно делится на 10"; "Целое число делится на 2 и не делится на 5".

10. Какая связь между высказываниями "Данный четырехугольник – ромб" и "Данный четырехугольник – квадрат", которые следуют из четырех посылок: "Если данный четырехугольник – ромб, то его диагонали взаимно перпендикулярны"; "Если диагонали данного четырехугольника не взаимно перпендикулярны, то он не является квадратом"; "Если данный четырехугольник – квадрат, то его можно вписать в окружность"; "Неверно, что данный четырехугольник имеет взаимно перпендикулярные диагонали или не может быть вписан в окружность"?

11. В следующем рассуждении найти недостающую посылку так, чтобы рассуждение было правильным и посылка выражала связь между высказываниями:

а) «Целое число оканчивается нулем»; «Целое число делится на 5»; «Целое число оканчивается цифрой 5».

1. Целое число делится на 5 и не оканчивается нулем.

2. ???

Следовательно, целое число оканчивается цифрой 5.

IV. ДЕДУКТИВНЫЕ РАССУЖДЕНИЯ

4.1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Опр. 4.1 *Рассуждением* (или *умозаключением*) называется логическая операция, посредством которой из одного или нескольких высказываний получается новое по отношению к исходному высказывание, [11].

Структура рассуждения такова:

1) *посылки* – высказывания, из которого состоит рассуждение;
2) слова: "следовательно", "значит";
3) *заключение* – следствие, вывод.

Опр. 4.2 Рассуждение, состоящее из одной посылки называется *непосредственным* ("Если студент выполнил контрольную работу, то он будет допущен к экзамену"). Если рассуждение содержит две и более посылок, то оно называется *опосредованным* ("Этот треугольник или прямоугольный, или косоугольный; он не прямоугольный, следовательно он косоугольный").

Различают *дедуктивные* (правильные) и *недедуктивные* (неправильные) рассуждения.

Опр. 4.3 Рассуждение называется *правильным* или *дедуктивным*, если заключение логически следует из посылок, т.е., если истинность посылок гарантирует истинность заключения ("Если последовательность монотонна и ограничена, то она имеет предел").

Опр. 4.4 Рассуждение называется *неправильным* или *недедуктивным*, если заключение логически не следует из посылок. Отсутствие логического следования означает, что в процессе рассуждения можно получить ложный вывод при истинных посылках ("Все квадраты – прямоугольники. ABCD – прямоугольник. Следовательно, ABCD – квадрат").

Правильность рассуждения определяется формой (структурой), а не истинностью входящих в него утверждений (посылок).

4.2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРАВИЛЬНОСТИ РАССУЖДЕНИЙ

Определение правильности рассуждений выполняют следующими способами, [11].

I способ

1. Рассуждение составляется в виде формулы $\mathbf{F_1 \wedge F_2 \wedge \ldots \wedge F_n \rightarrow F}$, где $\mathbf{F_i}$ (i=1,2,…n)– посылки, $\mathbf{F}$ – заключение.

2. Определяется таблица истинности полученной формулы.

3. Если последний столбец таблицы состоит из одних истинных значений - 1, то формула является тождественно истинной, а рассуждение правильным. Если же в этом столбце содержится хоть одна ложь, она не является таковой и рассуждение неправильное.

II способ

Этот способ состоит в преобразовании формулы рассуждения по теореме равносильности.

1. Рассуждение составляется в виде формулы $\mathbf{F_1 \wedge F_2 \wedge \ldots \wedge F_n \rightarrow F}$, где $\mathbf{F_i}$ (i=1,2,…n)– посылки, $\mathbf{F}$ – заключение.

2. Все операции в формуле выразить через дизъюнкцию, конъюнкцию и отрицание.

3. Привести полученную формулу к конъюнктивной нормальной форме.

4. Проверить критерий тождественной истинности формул. Если в каждой элементарной дизъюнкции содержится какая-нибудь переменная вместе с ее отрицанием, то данная формула является тождественно истинной, а рассуждение правильным. Если же существует хотя бы одна дизъюнкция, не содержащая ни одной переменной вместе с ее отрицанием, то данная формула не является тождественно истинной и рассуждение неправильное.

III способ(от противного)

Суть метода состоит в следующем. Допускается, что рассуждение неправильное, т.е. данная формула не является тождественно истинной. Это значит, что существует хотя бы один набор значений переменных, входящих в эту формулу, при котором она принимает значение ложь. Если такой набор значений удается найти, то данная формула не является тождественно истинной. Если же допущение о существовании такого набора значений переменных ведет к противоречию, то данная формула является тождественно истинной, а рассуждение правильным.

Пример. 8. Установить правильность или неправильность рассуждения, используя три способа: "Этот треугольник или прямоугольный, или косоугольный; он не прямоугольный, следовательно, он косоугольный".

Решение. Составим логическую формулу по данному высказыванию, для чего введем простые высказывания:

A: "Этот треугольник – прямоугольный",

B: " Этот треугольник – косоугольный".

Формула будет иметь вид: $F = ((\mathbf{A} \vee \mathbf{B}) \wedge \urcorner\mathbf{A}) \rightarrow \mathbf{B}$.

1 способ. Составим таблицу истинности для полученной формулы.

$\mathbf{A}$	$\mathbf{B}$	$\mathbf{A} \vee \mathbf{B}$	$\urcorner\mathbf{A}$	$(\mathbf{A} \vee \mathbf{B}) \wedge \urcorner\mathbf{A}$	$((\mathbf{A} \vee \mathbf{B}) \wedge \urcorner\mathbf{A}) \rightarrow \mathbf{B}$
1	1	1	0	0	1
1	0	1	0	0	1
0	1	1	1	1	1
0	0	0	1	0	1

Последний столбец таблицы представляет собой только истинные значения, что свидетельствует о том, что данная формула является тождественно истинной, а рассуждение – правильным.

2 способ. Проверим критерий тождественной истинности, приведя формулу к конъюнктивной нормальной форме.

$$((\mathbf{A} \vee \mathbf{B}) \wedge \neg\mathbf{A}) \rightarrow \mathbf{B} \sim \neg((\mathbf{A} \vee \mathbf{B}) \wedge \neg\mathbf{A}) \vee \mathbf{B} \sim (\neg\mathbf{A} \wedge \neg\mathbf{B}) \vee \mathbf{A} \vee \mathbf{B}.$$

Заменим знак конъюнкции на сложение, а знак дизъюнкции на умножение

$$(\neg\mathbf{A} + \neg\mathbf{B}) \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \sim \neg\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \neg\mathbf{B} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$$

Произведем обратную замену $(\neg\mathbf{A} \vee \mathbf{A} \vee \mathbf{B}) \wedge (\neg\mathbf{B} \vee \mathbf{A} \vee \mathbf{B})$**.** Получена конъюнктивная нормальная форма из двух элементарных дизъюнкций, в каждой из которых содержится переменная со своим отрицанием. Это говорит о том, что критерий тождественной истинности выполняется, т.е. данная формула является тождественно истинной, а рассуждение – правильным.

3 способ. Проведем рассуждение от противного. Предположим, что данная формула не является тождественно истинной и принимает значение "ложь". Тогда на основании таблицы истинности для импликации **B** должно принимать значение "ложь", а конъюнкция в скобках – "истина". Конъюнкция принимает истинное значение только в том случае, когда каждый конъюнкт истинен. Значит $\neg\mathbf{A}$ – "И", тогда **A** – "Л". В таком случае дизъюнкция $\mathbf{A} \vee \mathbf{B}$ примет значение "ложь", так как **B** – "Л" и **A** – "Л". Таким образом, пришли к противоречию: первый конъюнкт принимает ложное значение, что ведет к истинности импликации. Значит наше предположение о том, что данная формула не является тождественно истинной, неверно. Что и доказывает правильность рассуждения.

4.3. УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Какие из следующих рассуждений являются непосредственными или опосредованными? Выделить в рассуждениях посылки и заключение.

а) Если прямоугольник является квадратом, то его диагонали взаимно перпендикулярны.

б) Величины бывают постоянные или переменные. Данная величина переменная. Следовательно, данная величина – не постоянная.

в) Вашу курсовую работу просматривали А, В и С. Вы установили, что А правил простым карандашом, В – красной пастой. Следовательно С делал поправки синей пастой.

г) Ни один комбайнер не вышел на работу. Н – не комбайнер. Значит – Н. вышел на работу.

д) Число 60 делится без остатка на 1, 2, 4, 5, 6. Ученик сделал вывод, что 60 делится на все числа без остатка.

е) Если аспирант привел неудачные аргументы в защиту основного тезиса своей диссертации, значит его тезис не верен.

ж) Все птицы имеют крылья. Значит, все животные, имеющие крылья, - птицы.

2. Какие из рассуждений являются дедуктивными (правильными) или недедуктивными (неправильными)? Определить одним из 3-х способов.

а) Если студент много занимается, то он успешно сдает экзамены. Следовательно, студент, получивший на экзамене «неуд.», занимался мало.

б) Если треугольник равнобедренный, то две его стороны равны. Если 2 стороны треугольника равны. Следовательно, если треугольник равнобедренный, то два угла его равны.

в) Андрей или переутомился, или болен. Если он переутомился, то он раздражается. Он не раздражается. Следовательно, он не болен.

г) Анна и Антон одного возраста, или Анна старше Антона. Если Анна и Антон одного возраста, то Наташа и Антон не одного возраста. Если Анна старше Антона, то Антон стершее Николая. Следовательно, либо Наташа и Антон не одного возраста, либо Антон старше Николая.

д) Если число рациональное, то оно представимо в виде отношения двух целых чисел. Следовательно, если число не представимо в виде отношения двух целых чисел, то оно не является рациональным.

е) Если система линейных уравнений совместна, то она имеет единственное решение. Следовательно, она не имеет множества решений.

ж) Если человек принял какое-то решение, и он правильно воспитан, то он преодолеет все конкурирующие желания. Человек принял решение, но не преодолел некоторые конкурирующие желания. Следовательно, он неправильно воспитан.

V. АЛГЕБРА ПРЕДИКАТОВ

5.1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Опр. 5.1. Предложение, содержащее одну или несколько переменных, при подстановке любого из значений которых образуется истинное или ложное высказывание, называется *предикатом*. Количество входящих в предложение переменных определяет *местность предиката*, т.е. если предложение содержит одну переменную, то его называют *одноместным предикатом*, если 2 переменные – *двухместным* и т.д.

Например, предложение "Студент x учится на 2-м курсе факультета механизации" является одноместным предикатом и обозначается $A(x)$, а предложение "Река x протекает через город y" - двухместным предикатом $B(x,y)$.

Опр. 5.2. Множество значений переменных, при которых предикат обращается в высказывание, называется *областью определения предиката* и обозначается $X=\{x_i\}$ или $X=\{(x_i,y_i)\}$ и т.д.

Опр. 5.3. *Множеством истинности* предиката называется множество значений тех переменных из области определения, при которых предикат обращается в истинное высказывание. Обозначается $\mathbf{T_A}$.

Например, множеством истинности предиката A(x): "x + 2 = 8" является одноэлементное множество $T_A = \{6\}$.

Опр. 5.4. Два предиката $A(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ и $B(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, заданные на одном и том же множестве X, называются *равносильными* или *эквивалентными*, если один из них обращается в истинное высказывание на тех и только тех наборах значений переменных из соответствующих множеств, на которых в истинное высказывание обращается другой предикат, т.е. они имеют одинаковые множества истинности $T_A = T_B$ (Например, предикаты A(x) : "Число x кратно 2" и B(x): "Число x - четное" являются равносильными).

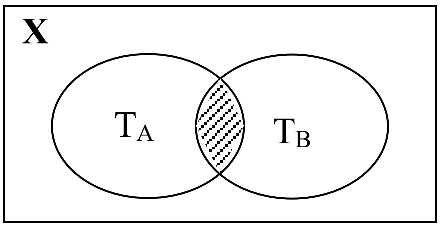
На предикаты переносятся все операции, которые имели место над высказываниями.

5.2. ОПЕРАЦИИ НАД ПРЕДИКАТАМИ

Опр. 5.5. *Конъюнкцией* двух предикатов называется новый предикат, который обращается в истинное высказывание при тех значениях переменных, при которых исходные предикаты обращаются в истинное высказывание, при остальных значениях переменных он обращается в ложное высказывание.

Обозначается конъюнкция предикатов **A(x) ∧ B(x)**. Множество истинности предиката конъюнкции есть пересечение множеств истинности исходных предикатов $T_{A(x) \wedge B(x)} = T_A \cap T_B$.

Кругами Эйлера множество истинности предиката конъюнкции можно представить в виде



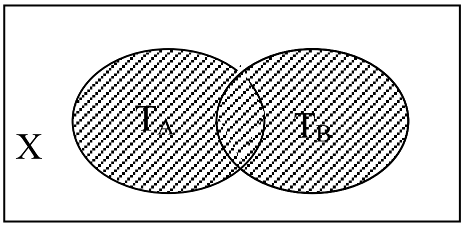
Пример 9. Найти множество истинности конъюнкции предикатов

A(x): "x – четное число", B(x): "x кратно 3", если $x \in N$ (N – множество натуральных чисел).

Решение. Составим конъюнкцию данных предикатов A(x) ∧ B(x): " x - четное сило **и** кратно 3". Множества истинности данных предикатов определятся $T_A = \{2, 4, 6, 8 \ldots\}$, $T_B = \{3, 6, 9, 12, \ldots\}$. Тогда множество истинности предиката конъюнкции будет равно $T_{A(x) \wedge B(x)} = \{6, 12, 18, \ldots\}$.

Опр. 5.6. *Дизъюнкцией* двух предикатов называется новый предикат, который обращается в ложное высказывание при тех значениях переменных, при которых исходные предикаты обращаются в ложное высказывание, при остальных значениях переменных он обращается в истинное высказывание.

Обозначается дизъюнкция предикатов **A(x) ∨ B(x)**. Множество истинности предиката конъюнкции есть объединение множеств истинности исходных предикатов $T_{A(x)\ \vee\ B(x)} = T_A \cup T_B$. Кругами Эйлера множество истинности предиката конъюнкции можно представить в виде

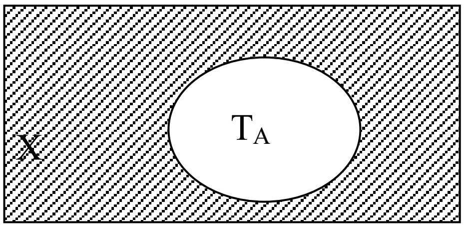


Пример 10. Найти множество истинности дизъюнкции предикатов $A(x)$: "$x > 5$", $B(x)$: "$x > 3$", если $x \in N$ (N – множество натуральных чисел).

Решение. Составим дизъюнкцию данных предикатов $A(x) \vee B(x)$: " $x > 5$ **или** $x > 3$". Множества истинности данных предикатов определятся $T_A = \{6, 7, 8, 9, \ldots\}$, $T_B = \{4, 5, 6, 7, \ldots\}$. Тогда множество истинности предиката дизъюнкции будет равно $T_{A(x) \vee B(x)} = \{4, 5, 6, 7, 8, 9, \ldots\}$.

Опр. 5.7. *Отрицанием* предиката называется новый предикат, который обращается в истинное высказывание при тех значениях переменных, при которых исходный предикат обращается в ложное высказывание и наоборот.

Обозначается отрицание предиката $\rceil$ **A(x)**. Множество истинности отрицания предиката является дополнение к множеству истинности данного предиката $T_{\rceil A(x)} = T'_{A(x)}$. Кругами Эйлера множество истинности отрицания предиката можно представить в виде

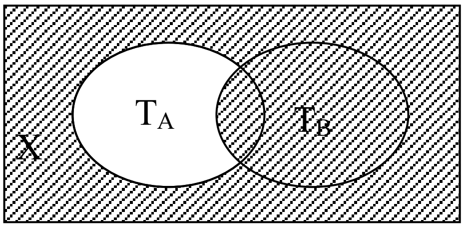


Пример 11. Найти множество истинности отрицания предиката $A(x)$:"x оканчивается цифрой 3) на множестве определения $X = \{0, 3, 6, 13, 20, 33\}$.

Решение. Отрицание предиката $\rceil A(x)$: "x не оканчивается цифрой 3". Множество истинности отрицания предиката определится $T_{\rceil A(x)} = \{0, 6, 20\}$.

Опр. 5.8. *Импликацией* двух предикатов называется новый предикат, который обращается в ложное высказывание лишь при тех значениях переменных, при которых первый предикат принимает истинное значение, а второй – ложное. При остальных значениях переменных он обращается в истинное высказывание.

Обозначается импликация предикатов **A(x) ⇒ B(x)** и читается "если A(x), то B(x). Множество истинности предиката импликации есть объединение множества истинности предиката B(x) и дополнения к множеству истинности предиката A(x), т.е. $T_{A(x) \Rightarrow B(x)} = T_B \cup T_{A'}$. Кругами Эйлера множество истинности предиката импликации можно представить в виде



Пример 12. Найти множество истинности импликации предикатов A(x): "число x кратно 4", B(x): "число x – четное" на области определения X = {1, 2, 3, 8, 14, 20, 37}.

Решение. Предикат импликации запишется A(x) ⇒ B(x): "Если число кратно 4, то оно четное". Множества истинности предикатов равны $T_A = \{8, 20\}$, $T_B = \{2, 8, 14, 20\}$, $T_{A'} = \{1, 2, 3, 14, 37\}$. Тогда множество истинности импликации предикатов равно $T_{A(x) \Rightarrow B(x)} = \{1, 2, 3, 8, 14, 20, 37\}$ и совпадет с областью определения.

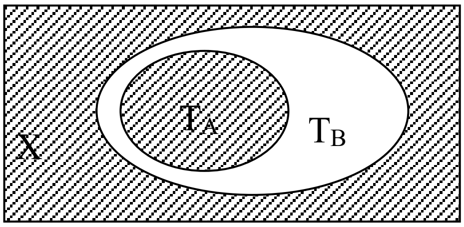
Опр. 5.9. *Эквиваленцией* двух предикатов называется новый предикат, который обращается в истинное высказывание при тех значениях переменных, при которых исходные предикаты истинны, и обращается в ложное высказывание, когда исходные предикаты ложны.

Обозначается эквиваленция предикатов **A(x) ⇔ B(x)** и читается "предикат A(x) имеет место тогда и только тогда, когда существует предикат B(x)". Множество истинности предиката эквиваленции совпадает с множествами истинности предикатов A(x) и B(x), т.е. $T_{A(x) \Leftrightarrow B(x)} = T_A = T_B$.

5.3. ОТНОШЕНИЕ ЛОГИЧЕСКОГО СЛЕДОВАНИЯ И РАВНОСИЛЬНОСТИ МЕЖДУ ПРЕДИКАТАМИ

Опр. 5.10. Если импликация $A(x) \Rightarrow B(x)$ истинна для всех значений переменных из области определения X, то говорят, что между предикатами A(x) и B(x) имеет место *отношение логического следования* или *предикат* B(x) *логически следует из предиката* A(x), [7].

Предикат импликации $A(x) \Rightarrow B(x)$ истинен для всех значений переменных из области определения X тогда и только тогда, когда множество истинности предиката A(x) содержится в множестве истинности предиката B(x), т.е. $T_A \subset T_B$. Кругами Эйлера это можно представить



Для того, чтобы показать, что предикаты A(x) и B(x) не находятся в отношении логического следования, достаточно указать такое значение $a \in X$, при котором высказывание $A(a)$ –истинно, а $B(a)$ - ложно.

Пример 13. Имеет ли место отношение логического следования между предикатами A(x): "x > 8" и B(x): "x > 6", если $x \in N$ (N – множество натуральных чисел)?

Решение. Запишем множества истинности данных предикатов $T_A = \{9, 10, 11, 12, 13, \ldots\}$, $T_B = \{7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, \ldots\}$. Так как $T_A \subset T_B$, то из предиката A(x) следует предикат B(x), т.е. отношение логического следования имеет место $A(x) \Rightarrow B(x)$.

Опр. 5.11. Если из предиката A(x) следует предикат B(x) и из предиката B(x) следует предикат A(x), то говорят, что *предикаты* A(x) и B(x) *находятся в отношении равносильности.*

Если предикаты равносильны, то их множества истинности совпадают, т.е. $T_A = T_B$ и $T_A \subset T_B$, а $T_B \subset T_A$. При таком отношении между множествами истинности предикатов эквиваленция A(x) $\Leftrightarrow$ B(x) обращается в истинное высказывание при всех значениях переменных из области определения. Для того, чтобы показать, что предикаты A(x) и B(x) не равносильны на множестве определения X, достаточно указать такое значение $a \in$ X, при котором высказывание A(a) и B(a) принимают противоположные значения истинности.

Пример 14. Имеет ли место отношение равносильности между предикатами A(x): " x – равнобедренный треугольник" и B(x): "x – равносторонний треугольник"?

Решение. Отношение равносильности запишется A(x) $\Leftrightarrow$ B(x): "треугольник x – равнобедренный тогда и только тогда, когда он равносторонний". Определим множества истинности данных предикатов. T_A – множество всех равнобедренных треугольников, T_B – множество всех равносторонних треугольников. Условие $T_A \subset T_B$ не выполняется, так как множество всех равнобедренных треугольников не является подмножеством равносторонних треугольников, хотя $T_B \subset T_A$ в силу того, что множество всех равносторонних треугольников является подмножеством всех равнобедренных. Таким образом, предикаты A(x) и B(x) не равносильны.

5.4. НЕОБХОДИМОЕ И ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЯ

Опр. 5.11. Если предикат B(x) логически следует из предиката A(x), то предикат B(x) называют *необходимым условием* для существования предиката A(x), а предикат A(x) называют *достаточным условием* для существования предиката B(x), [9].

Схематично это определение можно представить

$$\underset{\text{достаточное}}{\overset{\text{необходимое}}{A(x) \Rightarrow B(x)}}$$

Определение необходимого и достаточного условий можно сформулировать следующим образом.

Для того, чтобы существовал предикат A(x) *необходимо существование предиката* B(x) *или для того, чтобы существовал предикат* B(x) *достаточно существование предиката* A(x).

В жизни мы определяем эти понятия так: "Условие называется *необходимым* для данного события (ситуации, действия и т.д.), если при его отсутствии событие не происходит". Например, наличие атмосферы является необходимым условием для существования живых веществ на Земле, так как в случае отсутствия атмосферы эти существа не могли бы возникнуть. "Условие называется *достаточным* для данного события, если всякий раз, когда имеется это условие событие происходит". Например, выпадения дождя является достаточным условием для того, чтобы крыши домов были мокрыми.

<u>Пример 15.</u> Вместо многоточия вставить термины: "необходимо", "достаточно", "необходимо и достаточно" в высказывании "Для того, чтобы четырехугольник был прямоугольником …, чтобы его диагонали были равны".

<u>Решение.</u> Введем предикаты: A(x): "четырехугольник x – прямоугольник", B(x): " диагонали четырехугольника x равны". Выясним, каким условием является предикат A(x) для предиката B(x), т.е. определим находятся ли данные предикаты в отношении логического следования A(x) $\Rightarrow$ B(x): "Если четырехугольник x – прямоугольник, то диагонали в нем равны". Действительно, в любом прямоугольнике диагонали равны. Нельзя указать такого прямоугольника, в котором диагонали не равны. Таким образом, для того, чтобы четырехугольник был прямоугольником, необходимо, чтобы его диагонали были равны. Проверим, выполняется ли логическое следование B(x) $\Rightarrow$ A(x): "Если диагонали равны, то этот четырехугольник является

прямоугольником". Предикаты B(x) и A(x) не находятся в отношении логического следования, так как можно указать такой четырехугольник $a \in$ X, представляющий собой равнобочную трапецию, в которой диагонали равны, но она не является прямоугольником, т.е. B(a) –истинно, а A(a) - ложно. Значит вставить нужно только термин "*необходимо*".

5.5. ТЕОРЕМЫ, ИХ ВИДЫ И СТРОЕНИЕ

Опр. 5.12. Под *теоремой* будем понимать высказывание, истинность которого устанавливается с помощью доказательства (рассуждения), [1].

В любой теореме можно выделить *условие*, *заключение* (что требуется доказать) и *разъяснительную часть* (доказательство). Разъяснительная часть обычно не присутствует явно в формулировке теоремы, а подразумевается. Теорема записывается A(x) $\Rightarrow$ B(x), или в записи импликации содержатся двух и более-местные предикаты. Например, в формулировке теоремы "Внутренние накрест лежащие углы при параллельных прямых и секущей, равны" условием является предикат A(x,y): "x, y – внутренние накрест лежащие углы при параллельных прямых и секущей", а заключением предикат B(x, y): "углы x, y равны".

Рассмотрим виды теорем.

Опр. 5.13. Если в теореме поменять местами условие и заключение, то получим *теорему обратную данной*, т.е. B(x) $\Rightarrow$ A(x). Теоремы A(x) $\Rightarrow$ B(x) и B(x) $\Rightarrow$ A(x) называются *обратными* друг к другу.

Для предыдущего примера обратная теорема будет сформулирована следующим образом: "Если углы равны, то они являются внутренними накрест лежащими при параллельных прямых и секущей".

Опр. 5.14. Если заменить условие и заключение исходной теоремы их отрицаниями, то получим *противоположную теорему к данной*. Запись противоположной теоремы выглядит следующим образом $\neg A(x) \Rightarrow \neg B(x)$.

Для предыдущего примера противоположная теорема будет сформулирована: "Если углы не внутренние накрест лежащие при параллельных прямых и секущей, то они и не равны.".

Опр. 5.15. Если заменить условие и заключение исходной теоремы их отрицаниями и одновременно поменять местами, то получим *теорему обратную к противоположной*, символическая запись которой $\neg B(x) \Rightarrow \neg A(x)$.

Для нашего примера теорема обратная к противоположной звучит: "Если углы не равны, то они не являются внутренними накрест лежащими при параллельных прямых и секущей".

Опр. 5.16. *Теоремы* $A(x) \Rightarrow B(x)$ и $\neg B(x) \Rightarrow \neg A(x)$ *равносильны*. Читается: "Из A(x) следует B(x) тогда и только тогда, когда из не B(x) следует не A(x)", т.е. выполняется закон контрапозиции $(A(x) \Rightarrow B(x)) \Leftrightarrow (\neg B(x) \Rightarrow \neg A(x))$.

5.6. КВАНТОРЫ

Превращение предиката в высказывание осуществляется не только подставлением значений переменных, но и подставлением перед предложением слов "все", "некоторые" и их синонимами, которые в математике называются *кванторами*.

Опр. 5.17. *Квантор* показывает о скольких (всех или некоторых) объектах говорится в том или ином высказывании, [8].

Слово "квантор" латинского происхождения и означает "сколько". Различают два вида кванторов: *общности* и *существования.*

<u>Опр. 5.18.</u> *Квантор общности* выражается с помощью слов "каждый", "всякий", "любой" и обозначается $\forall$. *Квантор существования* выражается словами "некоторый", "найдется", "существует" и обозначается $\exists$.

<u>Опр. 5.19.</u> Операция получения высказывания с помощью квантора называется *операцией связывания кванторами* или *квантификацией*.

Утверждение: "для всякого x свойство A выполнено" символически запишется $(\forall x)A(x)$, а для утверждения : "существует предмет x, обладающий свойством A" запись высказывания с квантором будет иметь вид $(\exists x)A(x)$.

<u>Опр. 5.20.</u> Переменную, к которой относится квантор, называют *связанной*, остальные переменные – *свободными*.

Например, символическая запись $(\forall x)(x + y = 7)$ означает: "Для любого числа x найдется такое число y, сумма которого с первым дает число 7", где x – связанная переменная, а y – свободная. В записи $(\exists y)(x + y = 7)$: "Существует такое число y, для которого сумма с другим числом x дает 7" y – связанная переменная, а x – свободная.

<u>Опр. 5.21.</u> Символ $\forall A(x)$ называется *ограниченным квантором общности*, а символ $\exists B(x)$ называется *ограниченным квантором существования.*

Квантор общности можно рассматривать как обобщение конъюнкции, например, высказывание "Каждое натуральное число является целым" можно интерпретировать: "1 – целое и 2 – целое, и 3 - целое и т.д." Так как все высказывания истинны, то и вся конъюнкция истинна. Таким образом, высказывание, содержащее квантор общности считается истинным, когда предикат A(x) обращается в истинное высказывание для всех значений переменных, например, "всякий человек смертен". *Квантор общности согласуется с логической связкой импликацией*. Символическая запись $\forall x(A(x) \rightarrow B(x))$ читается: "Все A есть B".

Квантор существования можно рассматривать как обобщение дизъюнкции, например "Среди чисел {2, 7, 10, 11} найдется простое число": 2 - простое число, или 7 – простое, или 11 – простое. Для доказательства истинности дизъюнкции достаточно истинности одного из высказываний. Таким образом, высказывание, содержащее квантор существования, считается истинным, когда предикат А(х) обращается в истинное высказывание хотя бы при одном значении х, например, "существуют неблагоприятные для здоровья человека дни". *Квантор существования согласуется со связкой конъюнкцией.* Символическая запись $\exists x\big(A(x) \wedge B(x)\big)$ читается: "Некоторые А есть В".

5.7. ФОРМУЛЫ АЛГЕБРЫ ПРЕДИКАТОВ

Понятие формулы алгебры предикатов вводится аналогичным образом, как это было сделано в алгебре высказываний. Определение формулы имеет индуктивный характер:

Опр. 5.17. а) всякий 0-местный предикат есть формула;

б) всякий n-местный предикат $A(x_1,x_2,\ldots x_n)$, где x_i $(i=1, \ldots,n)$ – свободные предикатные переменные, есть формула;

в) если F_1 и F_2 – формулы, то и цепочка символов $\rceil F_1$, $\rceil F_2$, $F_1 \wedge F_2$, $F_1 \vee F_2$, $F_1 \rightarrow F_2$, $F_1 \leftrightarrow F_2$ также являются формулами;

г) если *F(x)* – формула, в которую предикатная переменная x входит свободно, то $(\forall x)F(x)$ и $(\exists x)F(x)$ - формулы, в которых предикатные переменные связаны (предикатные переменные, кроме *x*, которые были свободны в *F(x)*, свободны и в новых формулах, а те предикатные переменные, которые были связаны в *F(x)*, связаны и в новых формулах);

д) других формул, кроме тех, которые получаются по правилам а) – г) в алгебре предикатов нет, [11].

Пример 16. Ввести предикаты на соответствующих областях определения и с их помощью записать высказывание: " Всякий студент является или юношей или девушкой" в виде формулы алгебры предикатов.

Решение. Введем следующие одноместные предикаты: A(x): " x – студент", B(x): "x – юноша", тогда высказывание запишется формулой $\forall x\,(\mathbf{A}(x) \to (\mathbf{B}(x) \vee \rceil\mathbf{B}(x)))$.

5.7.1. ОТРИЦАНИЕ ВЫСКАЗЫВАНИЙ, СОДЕРЖАЩИХ КВАНТОРЫ

На основании раннее изложенного факта, что квантор общности можно рассматривать как обобщение конъюнкции, а квантор существования – как обобщение дизъюнкции, правило для построения отрицания высказывания с квантором можно получить из законов де Моргана.

Правило. *Для того, чтобы построить отрицание высказывания с квантором, нужно заменить квантор общности на квантор существования (или наоборот), а предложение, стоящее после квантора – на его отрицание*, [12].

Пример 17. Записать высказывание с квантором и составить его отрицание "Некоторые студенты – отличники или спортсмены".

Решение. Введем одноместные предикаты: A(x): " x – студент", B(x): "x – отличник", C(x): " x – спортсмен". Тогда высказывание запишется формулой $\exists x\,(\mathbf{A}(x) \wedge (\mathbf{B}(x) \vee \mathbf{C}(x)))$. Используя правило составления отрицания с квантором, получим высказывание "Все студенты – не отличники и не спортсмены". Формулой алгебры предикатов это высказывание запишется $\forall x\,(\mathbf{A}(x) \to (\rceil\mathbf{B}(x) \wedge \rceil\mathbf{C}(x)))$.

5.8. УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Какие из следующих выражений являются предикатами? И скольки – местными?

а) «Река **Х** впадает в озеро Байкал»; б) «**Х** есть брат **У**»;

в) «ctg $45^0 = 1$»; г) «натуральное число делится на 7»;

д) «прямые Х и У лежат по разные стороны от плоскости Z»;

е) «А. С. Пушкин – великий русский поэт»; ж) «$X^2 + 2X + 1 > 0$».

2. Определить множества истинности предикатов.

а) « **Х** кратно 3», Х= {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10};

б) «точка А равноудалена от точек А и В»;

в) «$X^2 + У^2 - 4X + 6У + 14^4 = 0$»;

г) «точка С лежит на прямой между точками А и В»;

д) «Х < У», Х={1, 2, 3, 4, 5}, У={3, 4, 5, 7};

е) «город находится на берегу реки **У**»; ж) «$X^2 + 5X – 6 > 0$».

3. Над множеством R всех действительных чисел заданы 2 предиката «Х > 2» и «Х < 2».

а) Выясните, для каких действительных чисел истинна конъюнкция этих предикатов «$(X > 2) \wedge (X < 2)$».

б) Найти множество истинности предиката, являющегося дизъюнкцией этих предикатов «$(X > 2) \vee (X < 2)$».

в) Найти множество всех действительных чисел, которые превращают в истинное высказывание предикат, являющийся импликацией данных предикатов «$(X > 2) \rightarrow (X < 2)$».

г) Для каких действительных чисел истинна эквиваленция данных предикатов «$(X > 2) \leftrightarrow (X < 2)$»?

4. Изобразить на координатной плоскости множества истинности следующих предикатов:

а) $(X\geq 0)\vee(У\leq 0)$; в) $(X\geq 0)\leftrightarrow(У\leq 0)$; г) $(X^2+У^2=1)\vee(У<0)$;

д) $(|X|>2)\rightarrow(|X|<3)$; е) $(X^2+У^2>1)\leftrightarrow(XУ<0)$;

ж) $(|X-2|<5)\wedge(\lg X<1)$.

5. Определить, является ли один из предикатов, заданных на множестве действительных чисел, следствием другого?

а) «$|X|<-3$», «$X^2-3X+2=0$»; б) «$X^4=16$», «$X=-2$»;

в) «$X-1>0$», «$(X-2)(X+5)=0$»; г) «$\sin X=3$», «$X^2+5=0$»;

д) «$X^2+5X-6>0$», «$X+1\geq 0$»; е) «$X^2-8=0$», «$|X-3|=1$».

6. В следующих высказываниях вместо многоточия вставьте одно из выражений: «необходимо, но недостаточно», «достаточно, но не необходимо», «необходимо и достаточно» - так, чтобы получилось истинное высказывание.

а) Наличие аттестата зрелости … для поступления в вуз.

б) Для существования действительного логарифма числа …, чтобы это число было действительным и положительным.

в) Периодичность … условие всякой тригонометрической функции.

г) Для того, чтобы медиана треугольника была равна половине стороны, которую она делит пополам …, чтобы треугольник был прямоугольным.

д) Для делимости произведения на некоторое число …, чтобы один из сомножителей делился на это число.

е) Для того, чтобы пирамида была правильной …, чтобы вершина пирамиды проецировалась в центр окружности, вписанной в основание.

ж) Для того, чтобы катет в прямоугольном треугольнике равнялся половине гипотенузы …, чтобы угол, противолежащий катету, был равен 30^o.

7. Для каждой из следующих теорем найдите все теоремы, т.е. верные утверждения, обратные и противоположные (если они есть), и теорему, противоположную обратной. Записать каждую теорему формулой.

а) Если два угла вписаны в окружность и опираются на одну и ту же дугу, то они равны между собой.

б) Если в четырехугольнике две противоположные стороны равны и параллельны, то этот четырехугольник параллелограмм.

в) Если $\alpha^2 + b^2 \neq 0$, то $\alpha \neq 0$ или $b \neq 0$.

г) Если две прямые лежат в оной плоскости, и две из них перпендикулярны третьей, то эти две прямые параллельны.

д) Если прямая a, лежащая вне плоскости α, параллельна прямой b, лежащей в плоскости α, то прямая a и плоскость α параллельны.

е) Если четырехугольник вписывается в окружность, то он правильный или суммы его противоположных углов равны.

ж) Если плоскость α перпендикулярна к одной из параллельных прямых, то она перпендикулярна и к другой.

8. Ввести предикаты на соответствующих областях и записать при их помощи высказывания с квантором в виде формул алгебры предикатов и составить его отрицание.

а) Каждый студент выполнил, по меньшей мере, одну лабораторную работу.

б) Между любыми двумя различными точками на прямой, найдется по меньшей мере одна точка, с ними не совпадающая.

в) Некоторые рациональные числа не являются действительными.

г) Каждое четное число, больше четырех, является суммой двух простых чисел.

д) Всякое натуральное число, делящееся на четное число, само будет четным.

е) Если число **Х** простое, то все числа **У** – четные.

ж) Некоторые комплексные числа, отличные от нуля и являющиеся значениями функции **У=f(Х)** – не положительны и не отрицательны.

VI. КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

1. Записать составное высказывание в виде формулы

1.1. Система линейных однородных уравнений с n неизвестными имеет единственное решение тогда и только тогда, когда определитель системы отличен от нуля. И, если определитель равен нулю, то система может иметь множество решений или не иметь решения.

1.2. Если прямоугольник – квадрат, то его диагонали взаимно перпендикулярны и делят углы пополам, и в точке пересечения делятся пополам.

1.3. Если две прямые не параллельны, то либо одна из них, либо другая не параллельна третьей.

1.4. Если два угла вписаны в окружность и опираются на одну и ту же дугу, то они равны между собой.

1.5. Если одно из двух действительных чисел не равно нулю, то, либо и другое не равно нулю, либо сумма квадратов этих чисел не равна нулю.

1.6. Прямая a перпендикулярна плоскости β тогда и только тогда, когда a пересекает β и существуют две не параллельные прямые, принадлежащие плоскости β и перпендикулярные прямой a.

1.7. Если треугольники не равны, то они не подобны или треугольники подобны тогда и только тогда, когда они равны.

1.8. Действительное число a больше 2 или меньше -1 тогда и только тогда, когда из того, что a не больше 2 следует, что a меньше -1.

1.9. Медианы треугольника равны половине стороны, которую они делят пополам, в том и только том случае, когда треугольник прямоугольный. Или, если треугольник – равнобедренный, то медианы являются высотами и биссектрисами.

1.10. Если два отрезка равны и параллельны, и некоторые две прямые параллельны, то они заключают данные отрезки.

2. Как можно расставить скобки в выражении, чтобы получилась формула и как изменится ее смысл, если А: "число а – четное", В: " число а делится на 5", С: "число а – рациональное"?

2.1. $\neg A \to B \wedge \neg C$.

2.2. $B \leftrightarrow \neg C \wedge \neg A$.

2.3. $\neg B \to C \vee A$.

2.4. $\neg A \leftrightarrow C \to \neg B$.

2.5. $C \vee \neg A \leftrightarrow \neg B$.

2.6. $C \leftrightarrow \neg A \to B$.

2.7. $A \leftrightarrow \neg B \to \neg C$.

2.8. $\neg C \to A \vee B$.

2.9. $C \wedge B \leftrightarrow \neg A$.

2.10. $\neg A \vee B \to C$.

3. Установить тип формулы

3.1. $(\neg C \vee A) \leftrightarrow (\neg B \to (A \wedge C))$.

3.2. $\neg(A \wedge B) \to (A \vee C)$.

3.3. $\neg B \to ((A \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge B)$.

3.4. $((A \to (B \wedge C)) \to ((\neg B \leftrightarrow \neg A) \vee \neg B)$.

3.5. $((A \leftrightarrow B) \wedge (B \to C)) \vee \neg B$.

3.6. $((A \leftrightarrow B) \to (\neg B \wedge \neg C)) \vee \neg A$.

3.7. $((A \wedge B) \leftrightarrow C) \to (A \to (\neg B \vee C))$.

3.8. $(A \to B) \leftrightarrow C) \to (\neg A \wedge (\neg B \vee C))$.

3.9. $\neg(A \vee B) \to (C \wedge \neg B)) \leftrightarrow C$

3.10. $(A \to B) \wedge ((C \leftrightarrow \neg B) \vee \neg A)$.

4. Преобразовать формулу так, чтобы она содержала только операции конъюнкции, дизъюнкции и отрицания $\vee, \wedge, \neg$

4.1. $((A \vee \neg B) \leftrightarrow (A \to B)) \to (\neg A \wedge B)$.

4.2. $(A \to B) \leftrightarrow ((\neg A \wedge B) \to (A \vee \neg B))$.

4.3. $((A \to B) \wedge (B \to \neg A)) \to (A \leftrightarrow \neg B)$.

4.4. $((A \leftrightarrow B) \wedge (\neg A \leftrightarrow \neg B)) \to ((A \vee B) \wedge (\neg A \vee \neg B))$.

4.5. $\neg(\neg(A \leftrightarrow B)) \to \neg(B \to A)$.

4.6. $(A \to lB) \leftrightarrow (lA \wedge B)$.

4.7. $\neg((A \leftrightarrow \neg B) \vee C)) \to A$.

4.8. $(A \leftrightarrow B) \to \neg(\neg A \to B)$.

4.9. $(A \to \neg B) \to (\neg(A \vee B) \to B)$.

4.10. $(A \wedge B) \to ((\neg A \wedge B) \to A)$.

5. Равносильными преобразованиями привести формулу к

ДНФ

5.1. $(A \vee \neg B) \to (\neg(A \vee B \vee C) \wedge \neg C)$.

5.2. $(\neg A \vee B) \leftrightarrow (A \vee C)$.

5.3. $(A \vee (B \wedge \neg C) \wedge (A \vee C)$.

5.4. $((A \wedge B) \to (C \vee \neg A)) \vee (\neg B \to \neg C)$.

5.5. $\neg(A \wedge (B \vee C)) \to ((A \wedge B) \vee C)$.

КНФ

5.6. $(A \vee (B \to \neg C) \vee (A \to C)$.

5.7. $\neg(A \leftrightarrow B) \wedge (A \to B)$.

5.8. $\neg((A \wedge B) \to \neg A) \wedge \neg((A \wedge B) \to \neg B)$.

5.9. $((A \leftrightarrow \neg B) \vee C) \to (\neg A \vee C)$.

5.10. $(A \leftrightarrow (B \vee \neg C)) \vee (A \vee (B \to C))$.

6. Записать формулой высказывание с квантором и составить его отрицание

6.1. Любая функция, непрерывная на отрезке [0;1], сохраняет знак или принимает нулевое значение.

6.2. Если некоторая функция имеет точку разрыва, то она не может быть непрерывной.

6.3. Любое действительное число равно самому себе тогда и только тогда, когда оно больше 1 или меньше 2.

6.4. Всякое минимальное значение функции $f(x)$ больше максимального значения функции $g(x)$.

6.5. Некоторые геометрические фигуры подобны или равны.

6.6. Всякое натуральное число, делящееся на 12, делится на 2, 4 и 6.

6.7. Существует такое значение аргумента, при котором функция имеет экстремум.

6.8. Некоторые формулы алгебры высказываний являются тавтологиями или выполнимыми.

6.9. Все убывающие и возрастающие функции монотонны.

6.10. Любая функция F(x), имеющая разрыв в точке x_o, не определена.

7. Вставить пропущенные слова (необходимо, достаточно, необходимо и достаточно) так, чтобы получилось верное высказывание.

7.1. Чтобы квадратный трехчлен разлагался на множители над R … , чтобы его дискриминант был не меньше нуля.

7.2. Чтобы плоскость α проходила через прямую a, перпендикулярную плоскости β …, чтобы плоскости α и β были перпендикулярными.

7.3. Для того, чтобы два треугольника были подобны …, чтобы они были равны.

7.4. Чтобы четырехугольник был ромбом …, чтобы его диагонали были взаимно перпендикулярны.

7.5. Для того, чтобы произведение (x-3)(x-5)(x+2) было равно нулю …, чтобы x=3.

7.6. Чтобы углы были равны …, чтобы их стороны были попарно параллельны.

7.7. Чтобы центры вписанной и описанной около треугольника окружностей совпадали … , чтобы треугольник был правильным.

7.8. Чтобы четырехугольник был прямоугольником …, чтобы его диагонали были равны.

7.9. Для того, чтобы две прямые были параллельны…, чтобы они были перпендикулярны третьей прямой.

7.10. Чтобы дифференцируемая функция возрастала на (а;в) …, чтобы ее производная на этом промежутке была неотрицательной.

8. Сформулируйте теоремы: обратную к данной, противоположную и обратную к противоположной.

8.1. Если функция непрерывна, то она дифференцируема.

8.2. Если последовательность сходится, то она ограничена.

8.3. Если каждое слагаемое является четным числом, то и сумма – четное число.

8.4. Если две хорды принадлежат равным кругам и равны между собой, то они одинаково удалены от центров этих кругов.

8.5. Если последовательность монотонна и ограничена, то она имеет предел.

8.6. Если свободный член с квадратного уравнения $ax^2 + вx + c = 0$ $(a \neq 0)$ равен нулю, то один из корней этого уравнения равен нулю.

8.7. Если точка М – есть точка пересечения диагоналей параллелограмма, то она является центром его симметрии.

8.8. Если матрица невырожденная, то она имеет обратную матрицу.

8.9. Если перпендикуляр, проведенный к отрезку, проходит через его середину, то он является геометрическим местом точек, равноудаленных от концов этого отрезка.

8.10. Если функция имеет точку перегиба, то при переходе через эту точку производная второго порядка этой функции меняет знак.

9. Установить правильность или неправильность рассуждения

9.1. Если цех №2 не будет участвовать в выпуске деталей нового образца, то не будет участвовать и цех № 1. Если же цех № 2 будет участвовать в выпуске деталей нового образца, то должны быть задействованы цеха № 1 и № 3. Следовательно, если участвует в выпуске деталей нового образца цех № 3, то и участвует цех № 1.

9.2. Если завтра будет холодно, то я надену теплое пальто, если рукав будет починен. Завтра будет холодно, а рукав не будет починен. Следовательно, я не надену теплое пальто.

9.3. Два комплексных числа равны тогда и только тогда, когда равны их действительные и мнимые части соответственно. Следовательно, если два комплексных числа не равны, то не равны их действительные и мнимые части соответственно.

9.4. Или числа a и b равны, или число a больше числа b. Если числа a и b равны, то числа c и b не равны. Если число a больше числа b, то число c больше числа k. Следовательно числа k и c не равны, либо число b больше c.

9.5. Если последняя цифра целого числа четна, то число делится на 2 или на 4. Целое число четное и делится на 4. Следовательно оно делится на 2.

9.6. Если 6 – составное число, то 12 - составное число. Если 12 – составное число, то существует простое число, большее 12. Если 6 делится на 2, то 6 – составное число. Число 12 – составное. Следовательно, 6 – составное число.

9.7. В четырехугольнике АВСД диагонали в точке пересечения делятся пополам или взаимно перпендикулярны. Установлено, что диагонали четырехугольника АВСД не делятся пополам. Следовательно, диагонали четырехугольника взаимно перпендикулярны.

9.8. Если число делится на 3 и делится на 5, то оно делится на 15. Следовательно, если число делится на 3 и не делится на 15, то оно не делится на 5.

9.9. Если целое число делится на 12, то оно делится на 3 и на 4. Если целое число не делится на 3 или на 12, то оно не делится на 4. Целое число делится на 4, следовательно, оно делится на 12.

9.10. Если четырехугольник – прямоугольник, то его углы прямые. Если четырехугольник – квадрат, то его углы прямые. Следовательно, если четырехугольник – квадрат, то он – прямоугольник.

10. Решить логическую задачу

10.1. Один из трех братьев Витя, Толя, Коля разбил окно. В разговоре участвуют еще двое братьев – Андрей и Дима.

- Это мог сделать только или Витя, или Коля, - сказал Андрей.

- Я окно не разбивал, - возразил Витя, - и Коля тоже.

Нет, Толя, один из них сказал правду, а другой сказал неправду, - возразил Дима.

-Ты, Дима, не прав, - вмешался Коля.

Их отец, которому, конечно, можно доверять, уверен, что трое братьев сказали правду. Кто разбил окно?

10.2. Один из четырех студентов испортил выключатель. На вопрос: "Кто это сделал?" – были получены такие ответы: 1) Это сделал или Миша или Коля; 2) Это сделал или Витя, или Коля; 3) Это не могли сделать ни Толя, ни Миша; 4) Это сделал или Витя, или Миша. Можно ли по этим данным установить, кто виновен в поломке выключателя, если из четырех высказываний три высказывания истинны?

10.3. При составлении расписания уроков на один день учителя математики, истории и литературы высказали следующие пожелания: математик просил поставить ему или первый, или второй урок; историк – или первый, или третий; учитель литературы – или второй или третий. Как составить расписание уроков, чтобы учесть все пожелания?

10.4. Один из трех братьев поставил на скатерть кляксу.

- Витя не ставил кляксу, - сказал Алеша. – Это сделал Боря.

-Ну, а ты, что скажешь? – спросила бабушка Борю.

- Это Витя поставил кляксу, - сказал Боря. – А Алеша не пачкал скатерть.

- Я знаю, что Боря не мог это сделать. А я сегодня не готовил уроки, - сказал Витя.

Оказалось, что двое мальчиков в каждом из двух случаев сказали правду, а один оба раза сказал неправду. Кто поставил на скатерть кляксу?

10.5. Для четырех дружинников, фамилии которых начинаются буквами А, Е, Р, С, необходимо составить график дежурств на четыре вечера подряд, учитывая, что:

1) С и Р не могут дежурить в первый вечер в связи с командировкой;
2) Если С выйдет во второй вечер или Р – в третий, то Е сможет подежурить в четвертый;
3) Если А не будет дежурить в третий вечер, то Е согласен дежурить во второй вечер;
4) Если А или Р будут дежурить во второй вечер, то С сможет пойти в четвертый вечер;
5) Если Р в четвертый вечер уедет на конференцию, то А придется дежурить в первый, а С – в третий вечер.

10.6. Четыре друга – Антонов (А), Вехов (В), Сомов (С) и Деев (Д) – решили провести свой отпуск в четырех различных городах – Москве, Санкт-Петербурге, Киеве и Ташкенте. В какой город должен поехать каждый из них, если имеются следующие ограничения:

1) Если А не едет в Москву, то С не едет в Санкт-Петербург;
2) Если В не едет ни в Москву, ни в Ташкент, то А едет в Москву;
3) Если С не едет в Ташкент, то В едет в Киев;
4) Если Д не едет в Москву, то В едет в Москву;
5) Если Д не едет в Санкт-Петербург, то В не едет в Москву?

10.7. На вопрос, кто из пяти студентов А, В, С, Д и Е играет в шахматы, получены следующие ответы:

1) Если А играет, то и В играет;
2) Д и Е играют оба или один из них играет;
3) Из двух студентов В и С только один играет;
4) С и Д или оба играют, или оба не играют;
5) Если Е играет, то А и Д тоже играют.

Определить, кто из пяти студентов играет в шахматы.

10.8. Три студента различных вузов города Иркутска приехали на отдых в один спортивный лагерь. На вопрос тренера, в каких вузах они учатся, каждый дал ответ:

- Петя: "Я учусь в ИрГСХА, а Леня – в ИрГТУ".
- Леня: "Я учусь в ИрГСХА, а Петя – в ИГУ".
- Коля: " Я учусь в ИрГСХА, а Петя - в ИрГТУ".

Тренер, удивленный противоречиями в ответах студентов, попросил их объяснить, где правда, а где ложь. Тогда студенты признались, что в ответах каждого из них одно утверждение верно, а другое – ложно. В каком вузе учится каждый из студентов?

10.9. Четыре спортсменки Аня, Валя, Галя и Даша заняли первые четыре места в соревновании по гимнастике, причем никакие две из них не делили между собой эти места. На вопрос, какое место заняла каждая из спортсменок, трое болельщиков ответили:

1. Аня – второе место, а Даша – третье место.
2. Аня – первое место, а Валя – второе место.
3. Галя – второе место, а Даша – четвертое место.

Оказалось, что каждый из болельщиков ошибся один раз. Какое место заняла каждая из спортсменок?

10.10. Один из пяти братьев разбил хрустальную вазу. Андрей сказал: "Это или Витя, или Толя". Витя сказал: "Это сделал не я и не Юра". Дима сказал: "Нет, один из них сказал правду, а другой неправду". Юра сказал: "Нет, Дима, ты неправ". Их мать, которой, конечно, можно доверять, уверена, что не менее трех братьев сказали правду. Кто разбил вазу?

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Абачиев С. К. Логика. Учебник и практикум для академического бакалавриата. М.: Юрайт. 2019. - 402 с.
2. Агапов Е. П. Логика. Учебное пособие для бакалавров. 3-е издание. М.: Дашков и К. 2021. - 160 с.
3. Демидов И.В. Логика. Учебник для бакалавров. 9-е изд. М: Дашков и К, 2020. - 346 с.
4. Дюк В. А. Логический анализ данных. М.: Лань. 2020. - 80 с.
5. Зюзьков В. М. Введение в математическую логику. Учебное пособие. М: Лань, 2018. - 268 с.
6. Ивин А. А. Логика. Учебник и практикум. М: Юрайт, 2018. - 388 с.
7. Игошин В. И. Математическая логика и тория алгоритмов. Сборник задач. Учебное пособие. М: Инфра-М, КУРС, 2017. - 392 с.
8. Колмогоров А. Н., Драгалин А. Г. Математическая логика. Введение в математическую логику. М.: Ленанд. 2017. - 240 с.
9. Матросов В. Л., Мирзоев М. С. Математическая логика. Учебник для бакалавриата. М.: Прометей. 2020. - 228 с.
10. Михалкин Н. В. Основы логики. Учебник и практикум. М.: Юрайт. 2019. - 366 с.
11. Скорубский В. И., Поляков В. И., Зыков А. Г. Математическая логика. Учебник и практикум. М: Юрайт, 2017. - 212 с.
12. Швецкий М. В., Демидов М. В., Голанова А. В. Программирование. Математическая логика. Учебное пособие для вузов. М.: Юрайт. 2020. - 676 с.

Н.И. Овчинникова

Элементы математической логики

Учебно-методическое пособие

Элементы математической логики. Учебно-методическое пособие для студентов направления подготовки 44.03.04 - «Профессиональное обучение (по отраслям)» – Иркутск: Изд-во Иркутский ГАУ им. А.А. Ежевского, 2021. - 69 с.

Компьютерный набор и верстка Овчинниковой Н.И.

Редактор Тесля В.И.

Лицензия ЛР № 070444 от 11.03.98 г.
Подписано к печати
Формат 60×84. Печ. 4,3 л. Тираж 50 экз.

664038, Иркутская обл., Иркутский р-он, п. Молодежный,
Иркутский ГАУ им. А.А. Ежевского