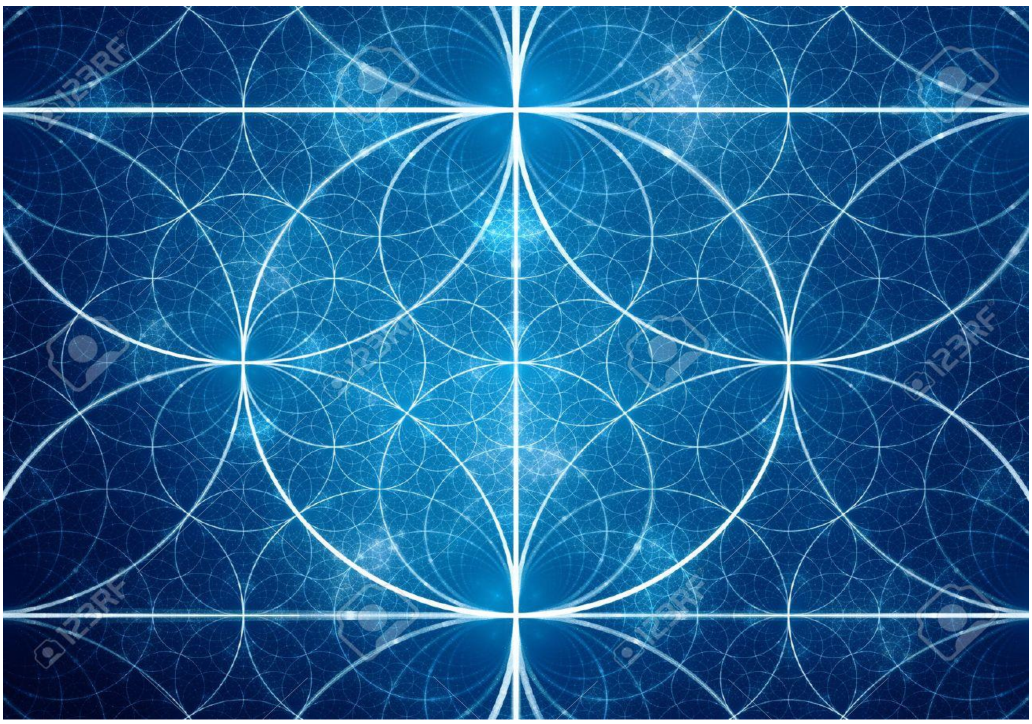
Министерство сельского хозяйства РФ
ФГБОУ ВО Иркутский государственный
аграрный университет им. А.А. Ежевского
Кафедра Математики

Овчиникова Н.И.

МАТЕМАТИКА.
ПРАКТИКУМ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ



Иркутск - 2020

УДК 510.2 (076)

Печатается по решению Методического Совета Иркутского государственного аграрного университета им. А.А. Ежевского от 25 мая 2020 г., протокол № 9.

Рецензенты:

Иваньо Я.М., д.т.н., профессор, проректор по научной работе ФГБОУ ВО Иркутского государственного аграрного университета им. А.А. Ежевского;

Новиков М.А., д.ф.-м.н., старший научный сотрудник Института динамики систем и теории управления СО РАН.

Н.И. Овчинникова Математика. Практикум по теории вероятностей: Учебное пособие - Иркутск: Изд-во Иркутского ГАУ им. А.А. Ежевского, 2020. - 108 с.

Содержание пособия охватывает следующие разделы: элементы комбинаторики, алгебра случайных событий, классическая вероятность, теоремы сложения и умножения вероятностей, формулы полной вероятности и Байеса, повторные независимые испытания, дискретные случайные величины и непрерывные случайные величины В каждом разделе приводятся теоретическая справка, решение типовых задач, задачи для самостоятельного решения. Подготовлены четыре контрольных работы по двадцати-вариантной системе, а также необходимые для решения вероятностные таблицы.

Учебное пособие предназначено для студентов аграрного университета им. А.А. Ежевского экономических направлений подготовки: 38.03.01 - Экономика, 38.05.01 - Экономическая безопасность, 38.03.02 - Менеджмент, 38.03.05 - Бизнес-информатика, 09.03.03 -Прикладная информатика (в экономике). Может быть полезно и для технических, биологических специальностей, а также для магистрантов, аспирантов и молодых ученых, использующих вероятностные методы в своих научных исследованиях.

С О Д Е Р Ж А Н И Е

	Стр.
Введение	4
I. Элементы комбинаторики	5
II. Алгебра случайных событий	8
III. Классическая вероятность	11
IV. Основные теоремы теории вероятностей	15
V. Формулы полной вероятности и Байеса	23
Контрольная № 1	29
VI. Повторные независимые испытания	41
Контрольная № 2	50
VII. Дискретные случайные величины	61
Контрольная № 3	75
VIII. Непрерывные случайные величины	82
Контрольная № 4	93
Приложение	101
Библиографический список	105

Введение

Каждому человеку в своей жизни приходится выполнять достаточно сложные расчеты, пользоваться вычислительной техникой, находить в справочниках и применять нужные формулы, читать информацию, представленную в виде таблиц, диаграмм, понимать вероятностный характер случайных событий, составлять несложные алгоритмы и модели, и др.

В связи с этим становятся актуальными такие качества мышления, как гибкость, критичность, глубина, адаптивность, динамизм, способность действовать в условиях конкуренции и ситуациях неопределенности.

Цель издания данного пособия определяется привитие студентам

- навыков проведения логических рассуждений;
- способности мыслить системными категориями;
- знаний комбинаторных и вероятностных;
- умений анализировать случайные факты, выдвигать гипотезы, оценивать риски, осуществлять прогнозы;
- владений методами принятия решений в условиях случайности и неопределенности,

а также формирование общекультурных и профессиональных компетенций.

Достижение этой цели возможно при освоении способов решения комбинаторных и вероятностных задач.

Содержание задач и методика их постановки подобрана в пособии таким образом, чтобы логика поисковой деятельности студентов, способы нахождения ответа на поставленный вопрос были связаны с мыслительными усилиями, разрешением какой-либо проблемной ситуации.

Для облегчения самостоятельных решений предлагаются ответы для таких задач и решение типовых задач из курса теории вероятностей. С целью закрепления навыков предложены 4 индивидуальных контрольных работы по 20-ти вариантной системе.

Представленный для издания практикум по теории вероятностей может быть использован для проведения практических занятий и контрольных работ по теории вероятностей, а также при выполнении студентами домашних заданий и подготовке к сдаче зачетов и экзаменов.

I. Элементы комбинаторики

Теоретическая справка [1], [2]

Правило суммы

$$N\,(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m) = N(A_1) + N\,(A_2) + \ldots + N\,(A_m). \tag{1}$$

Правило произведения

$$N(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_m) = N(A_1) \cdot N(A_2) \cdot \ldots \cdot N\,(A_m). \tag{2}$$

Размещения без повторений

$$A_m^k = \frac{m!}{(m-k)!}. \tag{3}$$

Сочетания без повторений

$$C_m^k = \frac{m!}{k!(m-k)!}. \tag{4}$$

Перестановки без повторений

$$P_m = m! \tag{5}$$

Решение типовых задач

Задача 1.1. Сколько существует способов выбора одного карандаша из коробки, содержащей 5 красных, 7 синих, 3 зеленых карандаша?

◀ Красный карандаш может быть выбран $N_1 = 5$ способами, синий карандаш $N_2 = 7$ способами, зеленый - $N_3 = 3$ способами. Один карандаш, по правилу суммы (1), можно выбрать $N_1 + N_2 + N_3 = 5 + 7 + 3 = 15$ способами.

Задача 1.2. Сколько существует способов составления в случайном порядке списка из 4 кандидатов, для выбора на руководящую должность?

◀ Первое место в списке может занять любой из 4 кандидатов, второе – любой из 3 оставшихся, третье - любой из 2 оставшихся, четвертое - оставшийся один кандидат. По правилу произведения (2) получим $N_1 \cdot N_2 \cdot N_3 \cdot N_4 = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ способа.

Задача 1.3. Расписание одного дня состоит из 5 дисциплин. Определить число вариантов расписания при выборе из 10 дисциплин.

◀ Каждый вариант расписания представляет выбор 5 дисциплин из 10, отличающийся от других вариантов как составом дисциплин, так и порядком их следования (или и тем и другим), т.е. является размещением из 10 элементов по 5. Число вариантов расписания находим по формуле (3)

$$A_{10}^{5}=\frac{10!}{(10-5)!}=\frac{10!}{5!}=\frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot10}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}=30240.$$

Задача 1.4. Владимир хочет пригласить в гости троих из семи лучших друзей. Сколькими способами он может выбрать приглашенных?

◀ Так как важен только состав гостей, то число способов выбора троих гостей из 7 представляет собой сочетание из 7 элементов по 3. Число способов выбора находим по формуле (4)

$$C_{7}^{3}=\frac{7!}{3!(7-3)!}=\frac{7!}{3!4!}=\frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot1\cdot2\cdot3}=35.$$

Задача 1.5. Порядок выступления 7 участников конкурса определяется жребием. Сколько различных вариантов жеребьевки при этом возможно?

◀ Каждый вариант жеребьевки отличается только порядком участников конкурса, т.е. является перестановкой из 7 элементов. Их число по формуле (5.1.3):

$$P_7=7!=5040.$$

Задача 1.6. В вазе стоят 9 красных и 7 розовых гвоздик. Сколькими способами можно выбрать из нее: а) 3 гвоздики; б) 6 гвоздик одного цвета; в) 4 красных и 3 розовых гвоздики?

◀ а) Так как порядок выбора цветов не имеет значения, то выбрать 3 гвоздики из вазы, в которой стоят 16 гвоздик, можно C_{16}^{3} способами. По формуле (1.1.2) находим:

$$C_{16}^{3}=\frac{16!}{3!\cdot13!}=\frac{14\cdot15\cdot16}{1\cdot2\cdot3}=560.$$

б) Выбрать 6 гвоздик красного цвета можно $C_9^6=84$ способами, а 6 гвоздик розового цвета $C_7^6=7$ способами. По правилу сложения выбрать 6 гвоздик одного цвета (красных или розовых) можно $C_9^6+C_7^6=84+7=91$ способом.

в) Выбрать 4 красных гвоздики из 9 имеющихся можно $C_9^4=126$ способами, а 3 розовых гвоздики из имеющихся 7 можно $C_7^3=35$ способами. Поэтому букет из 4 красных и 3 розовых гвоздик можно составить по правилу умножения $126\cdot35=4410$ способами.

Задача 1.7. В ящике 15 деталей, среди которых 6 бракованных. Наудачу выбирается комплект из 5 деталей. Сколько всего комплектов, в каждом из которых 2 детали бракованные?

◀ Всего имеется 15 деталей. Число небракованных деталей в ящике равно 9, а число бракованных равно 6. Отбирается комплект из 5 деталей. Среди отобранных 5 деталей имеются 3 небракованных и 2 бракованных детали. Число способов, которыми можно взять 2 бракованные детали из имеющихся 6 равно C_6^2, а число способов, которыми можно взять 3 небракованные детали из имеющихся 9 таких деталей равно C_9^3. К каждой комбинации 2 бракованных деталей из 6 можно присоединить любую из комбинаций 3 небракованных деталей из 9.

По правилу произведения общее число комплектов будет равно

$$C_6^2 \cdot C_9^3 = 1260.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. В студенческой столовой на первое можно заказать борщ, солянку, грибной суп, на второе - мясо с макаронами, рыбу с картошкой, курицу с рисом, а на третье - чай и компот. Сколько различных обедов можно составить из указанных блюд? (Ответ: 18).
2. Сколько четных двузначных чисел можно составить из цифр 0, 2, 3, 6, 7, 9? (15).
3. На с/х работы из трех бригад выделяют по одному человеку. Известно, что в первой бригаде 15 человек, во второй – 12, в в третьей – 10 человек. Определить число возможных групп по 3 человека, если известно, что на с/х работы может быть отправлен, каждый рабочий (1800).
4. Сколькими способами можно составить патруль из трех солдат и одного офицера, если имеется 80 солдат и 3 офицера (246480).
5. Сколькими способами можно разделить 6 различных книг между тремя учениками так, чтобы каждый получил 2 книги? (90).
6. Сколькими способами можно выставить на игру футбольную команду, состоящую из трех нападающих, трех полузащитников, четырех защитников и вратаря, если всего в команде 6 нападающих, 3 полузащитника, 6 защитников и 1 вратарь? (300).
7. Сколько перестановок можно сделать из букв слова «ракета», чтобы все они начинались с буквы «р»? (120).
8. Профсоюзное бюро факультета, состоящее из 9 человек, на своем заседании должно избрать председателя, его заместителя и казначея. Сколько различных случаев при этом может быть? (504).
9. На конференцию из трех групп студентов одной специальности выбирают по одному делегату. Известно, что в первой группе 25, во второй – 28 и в третьей 20 человек. Определить число возможных делегаций, если известно, что каждый студент из любой может войти в состав делегации (14000).
10. В колоде 32 карты. Раздаются 3 карты. Сколько может быть случаев появления одного туза среди розданных карт? (1512).

II. Алгебра случайных событий

Теоретическая справка [3], [4]

Случайное событие – это возможный исход, результат испытания (опыта, эксперимента). События обозначаются заглавными буквами латинского алфавита: $A, B, \mathrm{C}, \mathrm{D}, \ldots$.

Событие называется *достоверным* (обозначается через Ω), если в результате испытания оно обязательно произойдет.

Событие называется *невозможным* (обозначается Ø), если в результате испытания оно никогда не произойдет.

События называется *несовместными*, если наступление одного из них исключает наступление любого другого при одном и том же опыте; в противном случае события называются *совместными*.

Два события называются *противоположными*, если одно состоит в непоявлении другого. Событие, противоположное событию A обозначается через $\overline{A}$.

Несколько событий образуют *полную группу*, если они являются единственно возможными и несовместными исходами испытания (опыта), т.е. в результате опыта обязательно произойдет хотя бы одно из них.

Сумма событий A+B – это событие, состоящее в наступлении хотя бы одного из событий A и B.

Разность событий A-B - это событие, состоящее в наступлении только события A.

Произведение событий A·B – это событие, состоящее в одновременном наступлении событий A и B.

Решение типовых задач

Задача 2. 1. При каких событиях A и B возможно равенство A+B=A?

◄ Сумма событий A+B представляет событие, состоящее в наступлении хотя бы одного из событий A и B. Равенство A+B=A возможно, если событие $B \subset A$.

Задача 2.2. Взятая наудачу деталь может оказаться либо первого (событие A), либо второго (событие B), либо третьего (событие C) сорта. Что представляют собой следующие события: A+B; $\overline{A+C}$; AC; AB+C?

◄ A+B – это событие, состоящее в наступлении хотя бы одного из событий A и B, следовательно, в нашем случае A+B – деталь первого или второго сорта. Так как A+C – деталь первого или третьего сорта, то противоположное ему событие $\overline{A+C}$ - деталь второго сорта. AC=N, поскольку деталь не может быть одновременно и первого и третьего сорта. AB+C, как сумма невозможного события и события C равно C, т. е. AB+C – деталь третьего сорта.

Задача 2.3. Событие A = {хотя бы один из трех проверяемых приборов бракованный}; B = {все приборы доброкачественные}. Что означают события: а) A+B; б) AB?

◀ A+B=D; б) AB=N.

Задача 2.4. Три студента независимо друг от друга решают одну и ту же задачу. Пусть событие $A_1 =$ {первый студент решил задачу}, $A_2 =$ {второй студент решил задачу}, $A_3 =$ {третий студент решил задачу}. Выразить через события A_i (i=1, 2, 3) следующие события: 1) A={все студенты решили задачу}; 2) B={задачу решил только первый студент}; 3) C={задачу решил хотя бы один студент}; 4) E={задачу решил только один студент}.

◀ 1) Событие A состоит в совместном наступлении всех трех событий A_1, A_2, A_3, т. е. $A = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3$.

2) В этом случае событие A_1 произошло, а A_2 и A_3 не произошли, т. е. произошли события $\overline{A_2}$ и $\overline{A_3}$, следовательно, $B = A_1 \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_3}$.

3) Событие C означает, что произошло или событие A_1, или A_2, или A_3, или любые два из них, или все три события, т. е. имеем сумму событий $C = A_1 + A_2 + A_3$.

4) Задачу решил только первый студент ($A_1 \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_3}$), или только второй студент ($\overline{A_1} \cdot A_2 \cdot \overline{A_3}$), или только третий студент ($\overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot A_3$). В этом случае имеем сумму событий E= $A_1 \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_3} + \overline{A_1} \cdot A_2 \cdot \overline{A_3} + \overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot A_3$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Из таблицы случайных чисел наудачу взято одно число. Событие A={выбранное число делится на 5}; событие B={данное число оканчивается нулем}. Что означают события: $A - B$, $A \cdot \overline{B}$?

2. Два шахматиста играют одну партию. Событие A={выиграет первый игрок}, B={выиграет второй игрок}. Какое событие следует добавить к указанной совокупности, чтобы получилась полная группа событий? Совместны ли события A и $\overline{A+B}$?

3. События A={хотя бы одно из имеющихся четырех изделий бракованное}, событие B={бракованных изделий среди них не менее двух}. Что означают противоположные события $\overline{A}$ и $\overline{B}$?

4. Из корзины, содержащей красные, желтые и белые розы, выбирается один цветок. Пусть события A={выбрана красная роза}, B={выбрана желтая роза}, C={выбрана белая роза}. Что означают события: а) $\overline{A}$; б) A+B; в) AC; г) $\overline{A+B}$; д) $\overline{A}+\overline{B}$; е) AB+C?

5. Пусть A_1, A_2, A_3 - попадание в мишень соответственно первым, вторым и третьим стрелком при одном выстреле. События $\overline{A_1}, \overline{A_2}, \overline{A_3}$ - промахи этих стрелков. Найти выражения для событий: а) А={ни одного попадания в мишень}, б) В={только одно попадание}, в) С={только два попадания}, г) Е={три попадания}, д) F={хотя бы одно попадание}; е) К={хотя бы два попадания в результате этих трех выстрелов}.

6. Выделить полную группу несовместных событий в опыте с вбрасыванием одного игрального кубика. Выразить через события этой группы события: А={выпадение четного числа очков}; В={выпадение числа очков, кратного трем}.

7. Пусть А, В, С – три произвольных события. Найти выражения для событий, которые состоятся в следующих случаях: 1) произошло только событие А; 2) произошло одно и только одно событие; 3) произошло два и только два события; 4) все три события произошли; 5) произошло по крайней мере одно событие; 6) произошло не более двух событий.

8. Двое рабочих обслуживают 3 станка. Пусть события $А_к$ (к = 1, 2) означают работу к-го рабочего, $В_п$ (п = 1, 2, 3) – работа на п-м станке. Найти выражения для следующих событий: а) только один рабочий обслуживает первый станок; б) второй рабочий обслуживает только один станок; в) первый рабочий обслуживает хотя бы один станок; г) хотя бы один рабочий обслуживает третий станок; д) оба рабочих обслуживают по крайней мере два станка.

9. В баскетбольную корзину трижды бросается мяч. Пусть события $А_к$ (к = 1, 2, 3,) состоят в том, что при к-м бросании мяч попадет в корзину. Выразить через алгебру событий следующие события: а) мяч не попадет в корзину ни разу; б) мяч попадет в корзину при всех бросаниях; в) мяч попадет в корзину только один раз; г) мяч попадет в корзину ровно два раза; д) по крайней мере один раз мяч попал в корзину.

10. Стрелок, имея три патрона, стреляет до первого попадания в мишень, разделенную на две непересекающиеся части. Рассматриваются события: $А_к$ (к = 1, 2, 3,) – попадание при к-м выстреле, $В_n$ = (n = 1, 2) – попадание в n-ю часть. Выразить через алгебру событий следующие события: а) при втором выстреле попадает в первую часть; б) при первом выстреле попадает хотя бы в одну из частей; в) не попадает в мишень ни при одном выстреле; г) попадает только в первую часть; д) при третьем выстреле попадет во вторую часть.

III. Классическая вероятность

Теоретическая справка [4]- [6]

Вероятностью события А называется отношение числа m случаев, благоприятствующих этому событию, к общему числу n случаев, т.е.

$$P(A) = \frac{m}{n}. \tag{6}$$

Такое определение вероятности называется *классическим.*

Свойства вероятности события

1. $0 \le P(A) \le 1;$
2. $P(\Omega) = 1;$
3. P(∅) =0;
4. $P(A) + P(\overline{A}) = 1$ или $P(\overline{A}) = 1 - P(A).$

Решение типовых задач

Задача 3.1. Какова вероятность выпадения четного числа очков при одном бросании игральной кости?

◀ Пусть событие А – выпадение четного числа очков. Тогда число благоприятствующих ему исходов m = 3, число всех элементарных исходов n = 6. По формуле находим $\mathrm{P(A)} = \frac{m}{\mathrm{n}} = \frac{1}{2.}$.

Вероятность достоверного события равна единице, так как в этом случае m = n и $\mathrm{P(A)} = \frac{m}{\mathrm{n}} = 1$. Вероятность невозможного события равна нулю, так как в этом случае m = 0 и $\mathrm{P(A)} = \frac{m}{\mathrm{n}} = \frac{0}{\mathrm{n}} = 0$. Таким образом, в любом случае

$$0 \le \mathrm{P(A)} \le 1. \tag{7}$$

Задача 3.2. Найти вероятность того, что при бросании игральной кости выпадет «пятерка» или «шестерка».

◀ Событие А – появление «пятерки» или «шестерки». Число событий, благоприятствующих событию А, равно двум, т. е. m = 2. Число всех элементарных событий n = 6, поэтому

$$\mathrm{P(A)} = \frac{m}{\mathrm{n}} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Задача 3.3. Брошены две игральные кости. Найти вероятность того, что сумма выпавших очков равна 6.

◀ Пусть событие А – сумма очков на двух костях 6.

Благоприятствующими событию А будут следующие выпавшие пары очков: 1 и 5, 2 и 4, 3 и 3, 4 и 2, 5 и 1. Таким образом, m = 5.

В результате бросания двух игральных костей любая из шести граней кости (с соответствующим ей числом очков) может соединиться с любой из шести граней другой кости. Согласно правилу умножения, имеется $6 \times 6 = 36$ различных элементарных событий в результате бросания двух костей, т.е. n = 36. Таким образом, искомая вероятность $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{5}{36}$.

Задача 3.4. Из мешка с 33 жетонами, помеченными буквами русского алфавита, вынимают 6 жетонов и располагают их в порядке извлечения. Какова вероятность получить слово «Москва», если жетоны после извлечения обратно не возвращаются?

◀ Множество равновероятных исходов состоит из всех размещений
без повторений из 33 по 6. Их число равно $A_{33}^{6} = 33\cdot32\cdot31\cdot30\cdot29\cdot28 = 797\,448\,960$.Благоприятствует 1 исход. Поэтому искомая вероятность равна $\frac{1}{797448960}$.

Задача 3.5. На станцию прибыли 10 вагонов разной продукции. Вагоны помечены номерами от 1 до 10. Найти вероятность того, что среди пяти выбранных для контрольного вскрытия вагонов окажутся вагоны с номерами 2 и 5.

◀ Возьмём в качестве элементарного исхода вскрытие 5 вагонов. Общее число таких исходов даёт сочетание 5 вагонов из 10 (порядок вскрытия несущественен), т.е. C_{10}^{5}. Выбору 5 вагонов, из которых 2 имеют фиксированные номера, благоприятствуют такие исходы, в которых вскрываются любые $5 - 2 = 3$ вагона из $10 - 2 = 8$ оставшихся с нефиксированными номерами. Таким образом, число благоприятствующих исходов даёт сочетание 3 вагонов из 8, т.е. C_8^3. Тогда искомая вероятность равна $\frac{C_8^3}{C_{10}^5} = \frac{8!5!5!}{3!5!10!} = \frac{8!3!\cdot4\cdot5}{3!8!\cdot9\cdot10} = \frac{2}{9}$.

Задача 3.6. Из 20 акционерных обществ (АО) 4 являются банкротами. Гражданин приобрёл по одной акции шести АО. Какова вероятность того, что среди купленных акций 2 окажутся акциями банкротов?

◀ Возьмём в качестве элементарного исхода выбор 6 АО. Общее число таких исходов даёт сочетание 6 из 20 (порядок покупки акций несущественен), т.е. C_{20}^{6}. Выбрать 2 акции из 4 банкротных можно C_4^2 способами, выбрать 6–2=4 акции из 20–4=16 небанкротных можно C_{16}^4 способами, следовательно, выбрать одновременно 2 банкротных и 4 небанкротных акции можно (по правилу произведения) $C_4^2 C_{16}^4$ способами. Это и есть число благоприятствующих исходов. Тогда искомая вероятность равна

$$\frac{C_4^2 C_{16}^4}{C_{20}^6} = \frac{4!16!6!14!}{2!2!4!12!20!} = \frac{3\cdot 2\cdot 5\cdot 6\cdot 16!12!\cdot 13\cdot 14}{12!16!\cdot 17\cdot 18\cdot 19\cdot 20} = \frac{13\cdot 7}{17\cdot 19} = \frac{91}{323}.$$

Задача 3.7. В партии из N изделий имеется k стандартных. Для проверки наудачу выбрали l изделий. Найти вероятность того, что среди отобранных изделий ровно r стандартных.

◀ Обозначим событие

$A = \{$среди отобранных l изделий имеется r стандартных$\}$.Найдем вероятность события, применив формулу (6). Всего имеется N элементов - N изделий партии. Число стандартных изделий равно k, а число нестандартных изделий равно $N-k$. Общее число n возможных исходов испытания равно числу способов, которыми можно отобрать l изделий из N, т.е. $n = C_N^l$. Найдем число случаев, благоприятных событию A. Число способов, какими из k стандартных изделий можно выбрать r стандартных изделий равно C_k^r. Среди отобранных l изделий имеются $l-r$ нестандартных. Число способов, которыми можно взять $l-r$ нестандартных изделий из имеющихся $N-k$ таких изделий равно C_{N-k}^{l-r}. Каждая комбинация из r стандартных изделий может сочетаться с каждой комбинацией из $l-r$ нестандартных изделий. Следовательно, число исходов, благоприятствующих событию A, равно $C_k^r \cdot C_{N-k}^{l-r}$. Вероятность события A равна

$$P(A) = \frac{C_k^r \cdot C_{N-k}^{l-r}}{C_N^l}. \tag{8}$$

Задача 3.8. Дано шесть карточек с буквами Н, М, И, Я, Л, О. Найти вероятность того, что а) получится слово ЛОМ, если наугад одна за другой выбираются три карточки; б) получится слово МОЛНИЯ, если наугад одна за другой выбираются шесть карточек и располагаются в ряд в порядке появления.

◀ а) Обозначим событие: $A = \{$появление слова ЛОМ$\}$. Различные комбинации трех букв из имеющихся шести представляют размещения, т.к. могут отличаться как составом входящих букв, так и порядком их следования, т.е. общее число случаев $n = A_6^3$, из которых благоприятствует событию A $m = 1$ случай. Вероятность события A равна

$$P(A) = \frac{1}{A_6^3} = \frac{1}{120}.$$

б) Пусть событие $B = \{$появление слова "МОЛНИЯ"$\}$. Различные комбинации шести букв из имеющихся шести представляют собой перестановки, т.к. отличаются только порядком следования букв; т.е. общее число случаев $n = P_6$, из которых благоприятствует событию B $m = 1$ случай. Поэтому $P(B) = \frac{1}{P_6} = \frac{1}{720}$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Из партии втулок, изготовленных за смену токарем, случайным образом отбирается для контроля 10 шт. Найти вероятность того, что среди отобранных втулок две – второго сорта, если во всей партии 25 втулок первого сорта и пять – второго (0,3601).

2. В запасе ремонтной мастерской 10 поршневых колец, три из них восстановленные. Определить вероятность того, что среди взятых наугад четырех колец два окажутся восстановленными (0,3).

3. Из 30 студентов 10 имеют спортивные разряды. Какова вероятность того, что выбранные наудачу 3 студента – разрядники? $\left(\frac{61}{203}\right)$.

4. Устройство состоит из пяти элементов, из которых два изношены. При включении устройства включаются случайным образом два элемента. Найти вероятность того, что включенными окажутся неизношенные элементы (0,3).

5. Собрание на котором присутствует 25 человек, в том числе 5 женщин, выбирает делегацию из трех человек. Найти вероятность того, что в делегацию войдет две женщины и один мужчина (0,087).

6. Из букв разрезанной азбуки составлено слово «ремонт». Карточки с отдельными буквами тщательно перемешивают, затем наугад вытаскивают 4 карточки и раскладывают их в порядке извлечения. Какова вероятность получения при этом слова «море»? $\left(\frac{1}{360}\right)$.

7. На полке 6 радиоламп, из которых две негодные. Случайным образом отбираются две радиолампы. Какова вероятность того, что они годны для использования? (0,4).

8. В группе 10 юношей и 10 девушек. Для дежурства на вечере путем жеребьевки выделяют 5 человек. Какова вероятность того, что в число дежурных войдут 2 юноши и 3 девушки? (0,35).

9. Какова вероятность того, что два определенных студента будут посланы на практику в город С, если в наличии имеется 5 мест в город А, 8 – в город В и 7 – в город С? $\left(\frac{21}{190}\right)$.

10. Из 40 вопросов, входящих в экзаменационные билеты, студент знает 30. Найти вероятность того, что среди трех наудачу выбранных вопросов студент знает 2 вопроса (0,44).

IV. Теоремы сложения, умножения вероятностей

Теоретическая справка [4], [7]

Теорема 1 *сложения вероятностей*

Вероятность суммы двух *несовместных событий* равна сумме вероятностей этих событий

$$P(A+B)=P(A)+P(B). \tag{9}$$

Теорема 2 *сложения вероятностей*

Вероятность суммы двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их произведения:

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB). \tag{10}$$

Событие A называется *независимым* по отношению к событию B, если вероятность события A не зависит от того, произошло событие B или нет. В противном случае событие A называется *зависимым* от события B.

Вероятность события B при условии, что произошло событие A, называется *условной вероятностью* события B и обозначается так: $P_A(B)$ или $P(B/A)$.

Теорема 1 *умножения вероятностей*

Вероятность совместного наступления двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого при условии, что первое событие произошло

$$P(AB)=P(A)P_A(B). \tag{11}$$

Теорема 2 *умножения вероятностей*

Вероятность произведения двух независимых событий A и B равна произведению вероятностей каждого из них

$$P(AB)=P(A)P(B). \tag{12}$$

Решение типовых задач

Задача 4.1. В ящике лежат 10 шаров: 3 красных, 2 синих и 5 белых. Наугад вынимается один шар. Какова вероятность того, что этот шар цветной (не белый)?

◀ Пусть событие А – появление красного шара, В – появление синего шара, тогда А + В – появление цветного шара. Очевидно, что $\mathrm{P(A)} = \frac{3}{10}$.

$P(B) = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$. Так как события А и В несовместны, к ним применима теорема 1 сложения вероятностей:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) = \frac{3}{10} + \frac{1}{5} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}.$$

Задача 4.2. Вероятность попадания в мишень стрелком равна 0,6. Какова вероятность того, что он, выстрелив по мишени, промахнется?

◀ Если событие А - попадание в мишень, то, по условию Р(А) = 0,6. Промах – противоположное попаданию событие, и его вероятность:

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 – 0{,}6 = 0{,}4.$$

Задача 4.3. В роте из 100 солдат имеют высшее образование. Какова вероятность того, что случайным образом сформированном взводе из 30 солдат будет хотя бы один человек с высшим образованием?

◀ Пусть событие A – во взводе хотя бы один человек имеет высшее образование, тогда событие $\bar{A}$ - ни один человек во взводе не имеет высшего образования. В данной ситуации проще вычислить $P(\bar{A})$, чем $P(A)$. найдем $P(\bar{A})$. Число способов составления взвода в 30 человек из 100 солдат роты равно C_{100}^{30}. Число солдат, не имеющих высшего образования, равно 100 – 2 = 98. Из 98 человек составить взвод из 30 человек можно C_{100}^{30} способами. Вероятность того, что среди отобранных 30 человек нет ни одного с высшим образованием:

$$P(\bar{A}) = \frac{C_{98}^{30}}{C_{100}^{30}} = \frac{\frac{98}{30!68!}}{\frac{100!}{30!30!}} = \frac{98!70!}{68!100!} = \frac{69 \cdot 70}{99 \cdot 100} = \frac{161}{330}.$$

Отсюда находим

$$P(A) = 1 – P(\bar{A}) = 1 - \frac{161}{330} = \frac{169}{330} = 0{,}512.$$

Задача 4.4. Какова вероятность того, что наугад вынутая из полного набора кость домино окажется «дублем», если известно, что сумма очков на этой кости меньше, чем 5?

◀ В наборе домино 28 костей, из них 7 «дублей». На девяти костях сумма очков меньше, чем 5 (0 – 0, 0 – 1, 0 – 2, 0 – 3, 0 – 4, 1 – 1, 1 – 2, 1 – 3, 2 - 2). Пусть событие В – сумма очков на вынутой кости – меньше пяти, а событие А – вынутая кость есть «дубль», тогда событие АВ – на вынутой кости, являющейся «дублем», сумма очков меньше пяти (таких костей три: 0 – 0, 1 – 1, 2 - 2).

$$P(A/B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{\frac{3}{28}}{\frac{9}{28}} = \frac{1}{3}.$$

Значение Р(А/В) можно было найти и при использовании классического определения вероятности: из тех 9 случаев, к которым сводится событие В, событию А благоприятствуют три: $\frac{3}{9} = \frac{1}{3}$.

Задача 4.5. В ящике лежат 3 белых и 2 черных шара. Из ящика 2 раза вынимают по одному шару, не возвращая их обратно. Найти вероятность того, что: 1) первым был извлечен белый шар, а вторым – черный; 2) вторым был вынут черный шар при условии, что первым уже был извлечен белый.

◀ При решении задачи рассмотрим события:

A – первым вынут белый шар;

B – вторым вынут черный шар;

AB – последовательно извлечены белый, затем черный шары;

B/A – вторым вынут черный шар при условии, что первым был извлечен белый.

1) Число всех возможных вариантов извлечения двух шаров из ящика с пятью шарами (с учетом порядка их появления) равно $A_5^2 = 5 \times 4 = 20$. Благоприятствующими событию AB будут все возможные упорядоченные пары белый шар, черный шар, составленные из имеющихся трех белых и двух черных шаров. Таких соединений, согласно правилу умножения, будет $3 \times 2 = 6$ ($m = 6$). Таким образом, $P(AB) = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$.

2) После извлечения из ящика первым белого шара (произошло событие A) там останутся 2 белых и 2 черных шара. Появлению черного шара вторым из четырех оставшихся ($n = 4$) благоприятствуют два события ($m = 2$), поэтому

$$P(B/A) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

Значение P(B/A) можно получить и по формуле

$$P(B/A) = \frac{P(AB)}{P(A)}.$$

Действительно, $P(A) = \frac{3}{5}$, так как $n = 5$ (в ящике первоначально находилось 5 шаров) и $m = 3$ (белых было 3). Подставив в формулу

$P(AB) = \frac{3}{10}$ и $P(A) = \frac{3}{5}$, получим $P(B/A) = \frac{\frac{3}{10}}{\frac{3}{5}} = \frac{3\times5}{10\times3} = \frac{1}{2}$.

Задача 3.6. Найти вероятность того, что при первом бросании игральной кости появится 6 очков, а при втором – нечетное число очков.

◀ Событие A - появление 6 очков при первом бросании кости, событие B – появление четного числа очков при втором бросании – неизвестные события. Учитывая, что $P(A) = \frac{1}{6}$, $P(B) = \frac{1}{2}$, по формуле (2) найдем P(AB):

$$P(AB) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{12}.$$

Задача 4.7. В изготовленной партии детских мячей вероятность появления бракованного мяча равна 0,004. В красный цвет окрашены $\frac{3}{4}$ всех мячей, а остальные – в синий. Какова вероятность того, что наугад вынутый мяч будет небракованным и красным?

◀ Пусть событие A – появление бракованного мяча. По условию P(A) = 0,004. Появление небракованного мяча – событие $\overline{A}$ и

$$P(\overline{A}) = 1- 0{,}004 = 0{,}996.$$

Пусть B – появление красного мяча, тогда, согласно условию, $P(B) = \frac{3}{4}$.

Задача сводится к нахождению вероятности совместного появления независимых событий $\overline{A}$ и B, т.е. к нахождению вероятности событий $\overline{A}B$. Согласно формуле (2) имеем

$$P(\overline{A}B) = P(\overline{A}) \cdot P(B) = 0{,}996 \cdot \frac{3}{4} = 0{,}747.$$

Задача 4.8. Стрелок стреляет в мишень. Вероятность выбить 10 очков равна 0,3, а вероятность выбить 9 очков равна 0,6. Чему равна вероятность выбить не менее 9 очков?

◀ Событие A - «выбито не менее 9 очков» является объединением событий B - «выбито 10 очков» и C - «выбито 9 очков». События B и C несовместны, так как нельзя одним выстрелом выбить сразу и 9, и 10 очков. Поэтому $p(A) = p(B) + p(C) = 0{,}3 + 0{,}6 = 0{,}9$.

Задача 4.9. В каждом из трех ящиков находится по 30 деталей. В первом ящике 27, во втором 28, в третьем 25 стандартных деталей. Из каждого ящика наудачу вынимают по одной детали. Какова вероятность того, что все три вынутые детали окажутся стандартными?

◀ Рассмотрим события:

A = {все три вынутые детали - стандартные};

A_1 = {из 1-го ящика вынута стандартная деталь};

A_2 = {из 2-го ящика вынута стандартная деталь};

A_3 = {из 3-го ящика вынута стандартная деталь}.

Событие A состоит в том, что деталь, вынутая из 1-го ящика стандартная, из 2-го ящика – стандартная и из 3-го тоже стандартная. Это означает, что событие A является произведением событий $A = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3$. Т.к. события A_1, A_2, A_3 - независимые, то по формуле (12) получим

$P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3)$, где

$P(A_1) = \frac{27}{30} = \frac{9}{10}$; $P(A_2) = \frac{28}{30} = \frac{14}{15}$; $P(A_3) = \frac{25}{30} = \frac{5}{6}$.

Тогда $P(A) = \frac{9}{10} \cdot \frac{14}{15} \cdot \frac{5}{6} = 0{,}7$.

Задача 4.10. У сборщика имеется 14 деталей, изготовленных заводом № 1 и 6 деталей – заводом № 2. На сборку взяты 2 детали. Найти вероятность того, что хотя бы одна из них изготовлена заводом № 1.

◀ Введем обозначения:

A = {хотя бы одна из двух деталей, поступивших на сборку, изготовлена заводом № 1}

A_1 = {первая деталь изготовлена заводом № 1};

A_2 = {вторая деталь изготовлена заводом № 1}.

Событие Aсостоит в том, что первая деталь изготовлена заводом № 1, или вторая, или обе вместе. Это означает, что событие $A = A_1 + A_2$. Т.к. события A_1и A_2 совместные, то по формуле (10) получим

$$P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 A_2),$$

поскольку A_1и A_2 - зависимые события, а для них верна теорема 2 сложения вероятностей.

Учитывая, что $P(A_1) = \frac{14}{20}$, $P(A_2) = \frac{14}{20}$, а $P_{A_1}(A_2) = \frac{13}{19}$, имеем

$$P(A) = \frac{14}{20} + \frac{14}{20} - \frac{14}{20} \cdot \frac{13}{19} \approx 0{,}92 .$$

Задача 4.11. В хозяйстве 20% машин составляют полуторатонки, 50% - имеют грузоподъемность в 2 т и 30% - в 3т. Две случайно оказавшиеся свободными машины были посланы за грузом. Его оказалось 5 т. Какова вероятность того, что посланные машины сумели его полностью забрать?

◀ Событие A = {две посланные машины полностью заберут груз в 5 т} можно представить в виде суммы трех вариантов:

A_1 = {посланы одна машина грузоподъемностью в 2 т и вторая машина грузоподъемностью в 3 т};

A_2 = {посланы одна машина грузоподъемностью в 3 т и одна машина грузоподъемностью 2 т};

A_3 = {посланы две машины каждая из которых имеет грузоподъемность 3 т}.

Каждый из вариантов есть произведение двух событий:

$A_1 = B_1 \cdot B_2$; $A_2 = C_1 \cdot C_2$, $A_3 = D_1 \cdot D_2$, где

B_1 = {послана машина грузоподъемностью в 2 т};

B_2 = {послана машина грузоподъемностью в 3 т};

C_1 = {послана машина грузоподъемностью в 3 т};

C_2 = {послана машина грузоподъемностью в 2 т};

D_1 = {послана машина грузоподъемностью в 3 т};

D_2 = {послана машина грузоподъемностью в 3 т}.

События B_1; B_2 и C_1; C_2, и D_1; D_2 между собой независимы. Применяя теорему умножения для независимых событий получим:

$P(A_1) = P(B_1)P(B_2) = 0{,}5 \cdot 0{,}3 = 0{,}15$;

$P(A_2) = P(C_1)P(C_2) = 0{,}3 \cdot 0{,}5 = 0{,}15$;

$P(A_3) = P(D_1)P(D_2) = 0{,}3 \cdot 0{,}3 = 0{,}09$.

Т.к. варианты A_1, A_2 и A_3 несовместны, то по правилу сложения

$$P(A) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) = 0{,}15 + 0{,}15 + 0{,}09 = 0{,}39.$$

Задача 4.12. Производится n независимых опытов, в каждом из которых событие A может появиться с какой-то вероятностью; для i-го опыта эта вероятность равна p_i ($i = 1, 2, \ldots, n$). Найти вероятность того, что событие A появится хотя бы один раз.

◀ Переходя к противоположному событию $\overline{A}$ = {событие A не появится ни разу} и, применяя теорему умножения вероятностей для независимых событий, найдем $P(\overline{A}) = (1 - p_1)(1 - p_2)\ldots(1 - p_n)$. Тогда

$$P(A) = 1 - (1 - p_1)(1 - p_2)\ldots(1 - p_n). \qquad (13)$$

В частности, когда все вероятности $p_i = p$ одинаковы

$$P(A) = 1 - (1 - p)^n. \qquad (14)$$

Задача 4.13. Вероятность того, что студент сдаст первый экзамен, равна 0,9; второй – 0,9; третий – 0,8. Найти вероятность того, что студентом будут сданы: 1) только 2-й экзамен; 2) только один экзамен; 3) только два экзамена; 4) по крайней мере два экзамена; 5) хотя бы один экзамен.

◀ 1. Обозначим события:

A = {студент сдаст только 2-й экзамен};

A_1 = {студент сдаст 1-й экзамен};

A_2 = {студент сдаст 2-й экзамен};

A_3 = {студент сдаст 3-й экзамен}.

По условию $P(A_1) = 0{,}9$; $P(A_2) = 0{,}9$; $P(A_3) = 0{,}8$. Событие A означает совместное осуществление трех событий, состоящих в том, что студент сдаст 2-й экзамен и не сдаст 1-й и 3-й экзамены, т.е. $A = \overline{A_1} \cdot A_2 \cdot \overline{A_3}$. Учитывая, что события A_1, A_2, A_3 независимы, получим

$$P(A) = P(\overline{A_1} \cdot A_2 \cdot \overline{A_3}) = P(\overline{A_1}) \cdot P(A_2) \cdot P(\overline{A_3}) = (1 - 0{,}9) \cdot 0{,}9 \cdot (1 - 0{,}8) = 0{,}018.$$

2. Пусть событие B = {студент сдаст только один из трех экзаменов}. Событие B произойдет, если студент сдаст только 1-й экзамен из трех, или только 2-й, или только 3-й, т.е. событие B можно представить в виде суммы трех (вариантов) несовместных вариантов:

B ={студент сдаст только 1-й экзамен и не сдаст 2-й и 3-й экзамены} + {студент сдаст только 2-й экзамен и не сдаст 1-й и 3-й экзамены} + {студент сдаст только 3-й экзамен и не сдаст 1-й и 2-й экзамены}.

Применяя правило умножения для независимых событий и складывая вероятности вариантов, получим

$$P(B)=P\left(A_1\cdot\overline{A_2}\cdot\overline{A_3}+\overline{A_1}\cdot A_2\cdot\overline{A_3}+\overline{A_1}\cdot\overline{A_2}\cdot A_3\right)=$$
$$=0{,}9\cdot0{,}1\cdot0{,}2+0{,}1\cdot0{,}9\cdot0{,}2+0{,}1\cdot0{,}1\cdot0{,}8=0{,}044.$$

3. Пусть событие C = {студент сдаст только два экзамена из трех}. Событие C произойдет, если студент сдаст только 1-й и 2-й экзамены, или только 2-й и 3-й, или только 1-й и 3-й. Представим событие C в виде суммы трех несовместных вариантов:

C = {студентом сданы только 1-й и 2-й экзамены, но не сдан 3-й экзамен} + {студентом сданы только 2-й и 3-й экзамены, но не сдан 1-й экзамен} + {студентом сданы только 1-й и 3-й экзамены, но не сдан 2-й экзамен}.

Тогда
$$P(C)=P\left(A_1A_2\overline{A_3}+\overline{A_1}A_2A_3+A_1\overline{A_2}A_3\right)=$$
$$=0{,}9\cdot0{,}9\cdot0{,}2+0{,}1\cdot0{,}9\cdot0{,}8+0{,}9\cdot0{,}1\cdot0{,}8=0{,}506.$$

4. Пусть событие D= {студент сдаст по крайней мере два экзамена} (иначе: «хотя бы два экзамена или не менее двух» экзаменов). Событие D означает сдачу любых двух экзаменов из трех (событие C) либо всех трех экзаменов, т.е.

$D=C+A_1A_2A_3$ и $P(D)=P(C)+P(A_1A_2A_3)=0{,}306+0{,}9\cdot0{,}9\cdot0{,}8=0{,}95$.

5. Пусть событие E = {студент сдал хотя бы один экзамен} (иначе: «не менее одного» экзамена). Можно было бы событие E представить в виде суммы трех вариантов: {только один экзамен} + {только два экзамена} + {все три экзамена} и найти вероятности каждого из них подобно тому, как это было сделано выше. Но гораздо проще от события E перейти к противоположному событию: $\overline{E}$ = {студентом не будут сданы все три экзамена}. Событие $\overline{E}$ есть произведение трех независимых событий:

$\overline{E}$ = {студент не сдаст 1-й экзамен} $*$ {студент не сдаст 2-й экзамен} $*$ {студент не сдаст 3-й экзамен}.

По правилу умножения для независимых событий имеем

$$P\left(\overline{E}\right)=P\left(\overline{A_1}\cdot\overline{A_2}\cdot\overline{A_3}\right)=0{,}1\cdot0{,}1\cdot0{,}2=0{,}002\text{, откуда}$$

$$P(E)=1-P\left(\overline{E}\right)=1-0{,}002=0{,}998.$$

Задача 4.14. Вероятность хотя бы одного попадания в мишень при трех выстрелах равна 0,784. Найти вероятность промаха при одном выстреле.

◀ Пусть событие A = {хотя бы одно попадание в мишень при трех выстрелах}. Воспользуемся формулой (13), где p - вероятность попадания при одном выстреле; $(1-p)$ - вероятность промаха при одном выстреле.

По условию $P(A)=0{,}784$, $n=3$. Следовательно, $0{,}784=1-(1-p)^3$, или $1-0{,}784=(1-p)^3$ $0{,}216=(1-p)^3$, $1-p=\sqrt[3]{0{,}216}=0{,}6$.

Таким образом, вероятность промаха при одном выстреле равна 0,6.

Задачи для самостоятельного решения

1. Случайно смешаны кусты рассады двух сортов томатов: 9 кустов рассады Белый налив и 7 – сорта Верлиока. Найти вероятность того, что первые три, посаженные друг за другом куста томатов, являются рассадой сорта Белый налив (0,15).

2. В корзине 12 плодов, из них – три, пораженных болезнью в скрытой форме. Из корзины наудачу извлекается два плода. Найти вероятность того, что оба окажутся больными $\left(\frac{1}{22}\right)$.

3. В блок входят три радиолампы. Вероятности выхода из строя в течение гарантийного срока для них равны соответственно 0,3; 0,2; 0,4. Какова вероятность того, что в течение гарантийного срока выйдут из строя: а) не менее двух радиоламп; б) ни одной радиолампы; в) хотя бы одна радиолампа? (а) 0,212; б) 0,336; в) 0,664).

4. В первом ящике 20 деталей, 15 из них - стандартные, во втором ящике 30 деталей, 25 из них - стандартные. Из каждого ящика наугад берут по одной детали. Какова вероятность того, что: а) обе детали будут стандартными; б) хотя бы одна деталь стандартная; в) обе детали нестандартные? (а) 0,625; б) 0,9583; в) 0,04266).

5. Вероятность поражения цели первым стрелком равна 0,9, вторым - 0,7. Оба стрелка сделали по одному выстрелу. Какова вероятность того, что цель поражена: а) хотя бы один раз; б) два раза; в) один раз? (а) 0,97; б) 0,63; в) 0,34).

6. Вычислительная машина состоит из четырех блоков. Вероятность безотказной работы в течение времени Т первого блока равна 0,4, второго - 0,5, третьего - 0,6, четвертого - 0,4. Найти вероятность того, что в течение времени Т проработают: а) все четыре блока; б) три блока; в) менее трех блоков (а) 0,048; б) 0,224; в) 0,728).

7. Трое рабочих собирают подшипники. Вероятность того, что подшипник, собранный первым рабочим, - высшего качества, равна 0,7, вторым - 0,8, третьим - 0,6. Для контроля взято по одному подшипнику из собранных каждым рабочим. Какова вероятность того, что высшего качества будут: а) все подшипники; б) два подшипника; в) хотя бы один подшипник? (а) 0,336; б) 0,452; в) 0,976).

8. На сборку поступают детали с трех станков с ЧПУ. Первый станок дает 20 %, второй - 30 %, третий - 50 % однотипных деталей, поступающих на сборку. Найти вероятность того, что из трех наугад взятых деталей: а) три с разных станков; б) три с третьего станка; в) две с третьего станка (а) 0,03;

б) 0,125; в) 0,125).

9. Первый станок-автомат дает 1 % брака, второй -1,5 %, а третий - 2 %. Случайным образом отобрали по одной детали с каждого станка. Какова вероятность того, что стандартными окажутся: а) три детали; б) две детали; в) хотя бы одна деталь? (а) 0,9556; б) 0,0437; в) 0,999997).

10. В цехе имеется три резервных электродвигателя. Для каждого из них вероятность того, что в данный момент он включен, соответственно равна: 0,2; 0,3; 0,1. Найти вероятность того, что включены: а) два электродвигателя; б) хотя бы один электродвигатель; в) три электродвигателя (а) 0,092; б) 0,496; в) 0,006).

V. Формулы полной вероятности и Байеса

Теоретическая справка [8]-[10]

Вероятность P(A) появления события A, которое может произойти только совместно с одним из событий $H_1, H_2, ..., H_n$, образующих полную группу попарно несовместных событий, т. е. $H_i \cdot H_j \neq \phi,\ i \neq j$ и $\sum_{i=1}^{n} H_i = D$, вычисляется по *формуле полной вероятности*

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) P(A), \quad где \ \sum_{c=1}^{n} P(H_i) = 1. \qquad (15)$$

При этом события $H_1, H_2, ..., H_n$ обычно называют гипотезами, а числа $P(H_i)$ - вероятностями гипотез.

Условная вероятность гипотезы H_i в предположении, что событие A уже имеет место, определяется по *формуле Байеса*:

$$P(H_i/A) = \frac{P(AH_i)}{P(B)} = \frac{P(H_i)P(A/H_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A/H_i)}, \quad (i = 1, 2, ..., n). \qquad (16)$$

Вероятности $P(H_i/A)$, вычисленные по формуле Байеса, часто называют *вероятностями гипотез.*

Решение типовых задач

Задача 5.1. Имеется четыре одинаковых ящика с электрическими лампочками, причем первый ящик содержит 10 исправных и 2 бракованные лампочки, второй и третий ящики содержат по 5 исправных и по 5 бракованных лампочек, а четвертый ящик содержит только 10 исправных лампочек. Наудачу выбирается один ящик и из него одна лампочка. Какова вероятность того, что эта лампочка окажется исправной?

◀ Пусть событие A = {выбор исправной лампочки}, а гипотезы H_1= {выбор первого ящика}, H_2= {выбор второго ящика}, H_3= {выбор третьего ящика}, H_4= {выбор четвертого ящика}. События H_1, H_2, H_3, H_4 образуют полную группу несовместных равновероятных событий, при этом $P(H_1) = P(H_2) = P(H_3) = P(H_4) = \frac{1}{4}$. (Контроль: $\sum_{i=1}^{4} P(H_i) = 1$). Условные вероятности выбора исправной лампочки из первого, второго, третьего и четвертого ящиков соответственно равны $P(A/H_1) = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$, $P(A/H_2) = P(A/H_3) = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$, $P(A/H_4) = 1$. Следовательно, по формуле полной вероятности получим

$$P(A) = P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(AB/H_2) + P(H_3)P(A/H_3) + P(H_4)P(A) =$$
$$= \frac{1}{4}\cdot\frac{5}{6} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\cdot 1 = \frac{17}{24}.$$

Задача 5.2. Имеются две партии изделий по 12 и 10 штук, причем в каждой партии одно изделие бракованное. Изделие, взятое наудачу из первой партии, переложено во вторую, после чего выбирается наудачу изделие из второй партии. Определить вероятность извлечения бракованного изделия из второй партии.

◀ Пусть событие A = {извлечение бракованного изделия из второй партии}. В качестве гипотез примем события H_1= {из первой партии переложено во вторую бракованное изделие} и H_2= {из первой партии переложено во вторую небракованное изделие}, при этом, очевидно, $P(H_1) = \frac{1}{12}$, $P(H_2) = \frac{11}{12}$. (Контроль: $\sum_{i=1}^{2} P(H_i) = 1$). Условные вероятности события А при осуществлении каждой из гипотез соответственно равны $P(A/H_1) = \frac{2}{11}$, $P(A/H_2) = \frac{1}{11}$. Отсюда по формуле полной вероятности

$$P(A) = P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2) = \frac{1}{12}\cdot\frac{2}{11} + \frac{11}{12}\cdot\frac{1}{11} = \frac{13}{132}.$$

Задача 5.3. Три организации поставили в контрольное управление счета для выборочной проверки: первая 15 счетов, вторая – 10, третья – 25. Вероятности правильного оформления счетов у этих организаций соответственно таковы: 0,9; 0,8; 0,85. Был выбран один счет, и он оказался правильным. Определить вероятность того, что этот счет принадлежит второй организации.

◀ Пусть событие A = {выбран правильно оформленный счет}. Гипотезы: H_1 = {правильно оформленный счет поставила первая организация}, H_2= {правильно оформленный счет поставила вторая организация}, H_3={правильно оформленный счет поставила третья организация}. События H_1, H_2, H_3 образуют полную группу несовместных событий, при этом:

$$P(H_1) = \frac{15}{50} = \frac{3}{10}, \qquad P(H_2) = \frac{10}{50} = \frac{1}{5}, \qquad P(H_3) = \frac{25}{50} = \frac{1}{2}.$$

(Контроль: $\sum_{i=1}^{3} P(H_i) = \frac{3}{10} + \frac{1}{5} + \frac{1}{2} = 1$). По условию $P(A/H_1) = 0{,}9$; $P(A/H_2) = 0{,}8$; $P(A/H_3) = 0{,}85$. По формуле полной вероятности найдем $P(A) = 0{,}3 \cdot 0{,}9 + 0{,}2 \cdot 0{,}8 + 0{,}5 \cdot 0{,}85 = 0{,}855$. Для нахождения искомой вероятности, т. е. условной вероятности $P(H_2/A)$ - вероятности того, что правильно оформленный счет принадлежит второй организации, - найдем по формуле Байеса

$$P(H_2/A) = \frac{P(H_2)P(A/H_2)}{P(A)} = \frac{0{,}2 \cdot 0{,}8}{0{,}855} \approx 0{,}19.$$

Задача 5.4. Предположим, что 5% всех мужчин и 0,25% всех женщин дальтоники. Наугад выбранное лицо оказалось дальтоником. Считая, что мужчин и женщин одинаковое число, найти вероятность того, что этот человек: а) мужчина; б) женщина.

◀ Пусть событие A = {выбранный человек оказался дальтоником}. В качестве гипотез примем события H_1= {выбранный человек - мужчина} и событие H_2= {выбранный человек - женщина}. События H_1, H_2 несовместные, образуют полную группу, $P(H_1) = P(H_2) = 0{,}5$. Для нахождения искомых вероятностей, т. е. условных вероятностей $P(H_1/A)$ и $P(H_2/A)$, воспользуемся формулой Бейеса. По формуле полной вероятности сначала найдем Р(А). Так как по условию $P(A/H_1) = 0{,}05$; $P(A/H_2) = 0{,}0025$, то $P(A) = 0{,}5 \cdot 0{,}05 + 0{,}5 \cdot 0{,}0025 = 0{,}02625$. Следовательно, по формуле Байеса:

$$\text{а) } P(H_1/A) = \frac{P(H_1)P(A/H_1)}{P(A)} = \frac{0{,}5 \cdot 0{,}05}{0{,}02625} = \frac{20}{21},$$

$$\text{б) } P(H_2/A) = \frac{P(H_2)P(A/H_2)}{P(A)} = \frac{0{,}5 \cdot 0{,}0025}{0{,}02625} = \frac{1}{21}.$$

Отметим, что сумма условных вероятностей гипотез также равна единице $\left(\frac{20}{21} + \frac{1}{21} = 1\right)$.

Задача 5.5. Число грузовых автомашин проезжающих по шоссе, на котором стоит бензоколонка, относится к числу легковых, проезжающих по тому же шоссе, как 3:2. Известно, что в среднем одна из 30 грузовых и 2 из 45 легковых автомашин подъезжают к бензоколонке для заправки. Чему равна вероятность того, что подъехавшая к бензоколонке машина будет заправляться?

◀ Обозначим событие А={машина, подъехавшая к бензоколонке будет заправляться}. Событие А может произойти только с одним из несовместных событий (гипотез): или с H_1, или с H_2.

H_1= {к бензоколонке подъехала грузовая автомашина};

H_2= { к бензоколонке подъехала легковая автомашина}.

Учитывая, что число грузовых автомашин относится к числу легковых как 3:2, найдем вероятности гипотез H_1 и H_2:

$$P(H_1)=\frac{3}{3+2}=\frac{3}{5}=0{,}6, \quad P(H_2)=\frac{2}{3+2}=\frac{2}{5}=0{,}4.$$

Гипотезы составляют полную группу событий; сумма вероятностей этих событий равна 1.

Условная вероятность $P_{H_1}(A)=\frac{1}{30}$; $P_{H_2}(A)=\frac{2}{45}$. Найдем вероятность события А, применив формулу (1.7.1) при n = 2:

$$P(A)=0{,}6\cdot\frac{1}{30}+0{,}4\cdot\frac{2}{45}\approx 0{,}0378.$$

Задача 5.6. В откормочный комплекс поступают телята из трех хозяйств. Из первого хозяйства телят поступает в 2 раза больше, чем из второго, а из второго – в 3 раза больше, чем из третьего. Первое хозяйство поставляет 15% телят, имеющих живой вес более 300 кг. Второе и третье хозяйства поставляют соответственно 25% и 35% телят, живой вес которых превышает 300 кг. Наудачу отобранный теленок при поступлении в откормочный комплекс весит 320 кг. Какова вероятность того, что он поступил из третьего хозяйства?

◀ Введем обозначения событий:

A = {наудачу отобранный теленок имеет живой вес, превышающий 300 кг};

H_1 = {отобран теленок, поступивший из 1-го хозяйства};

H_2 = {отобран теленок, поступивший из 2-го хозяйства};

H_3 = {отобран теленок, поступивший из 3-го хозяйства}.

Найдем вероятности гипотез – событий H_1, H_2, H_3 до проведения испытания, которое состоит во взвешивании наудачу отобранного теленка из числа поступивших в откормочный комплекс. Полагая, что из 3-го хозяйства поступает х % телят, получим, что из 2-го и 1-го хозяйств поступает соответственно 3х% и 6х%. Т.к. общее количество телят, поступающих из этих трех хозяйств, составляет 100%, то будем иметь $10x=100$, $x=10$. Итак, число телят, поступающих из 1-го, 2-го и 3-го хозяйств составляет 60%, 30% и 10% от их общего количества. Учитывая это, найдем вероятности гипотез:

$$P(H_1)=0{,}6;\ P(H_2)=0{,}3;\ P(H_3)=0{,}1.$$

Из 1-го хозяйства поступает 15% телят, живой вес которых превышает 300 кг, поэтому $P_{H_1}(A)=0{,}15$. Аналогично найдем: $P_{H_2}(A)=0{,}25$; $P_{H_3}(A)=0{,}35$. Событие A может произойти или вместе с событием H_1, или с событием H_2, или событием H_3. Применяя формулу (15) при $n=3$, найдем вероятность события A:

$$P(A)=0{,}6\cdot 0{,}15+0{,}3\cdot 0{,}25+0{,}1\cdot 0{,}35=0{,}2.$$

Пусть событие A произошло. Переоценим вероятность третьей гипотезы-события H_3. По формуле Байеса найдем

$$P_A(H_3)=\frac{P(H_3)P_{H_3}(A)}{P(A)}=\frac{0{,}1\cdot 0{,}35}{0{,}2}=0{,}175.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Среди поступивших на сборку деталей 30 % - с завода № 1, остальные - с завода № 2. Вероятность брака для завода № 1 равна 0,02, для завода № 2 - 0,03. Найти: а) вероятность того, что наугад взятая деталь стандартная; б) вероятность изготовления наугад взятой детали на заводе № 1, если она оказалась стандартной (а) 0,973; б) 0,302).

2. Три автомата изготавливают однотипные детали, которые поступают на общий конвейер. Производительности первого, второго и третьего автоматов соотносятся как 2:3: 5. Вероятность того, что деталь с первого автомата - высшего качества, равна 0,8, для второго - 0,6, для третьего -0,7. Найти вероятность того, что: а) наугад взятая с конвейера деталь окажется высшего качества; б) взятая наугад деталь высшего качества изготовлена первым автоматом (а) 0,69; б) 0,2319).

3. Комплектовщик получает для сборки 30 % деталей с завода № 1, 20 % - с завода № 2, остальные - с завода № 3. Вероятность того, что деталь с завода № 1 - высшего качества, равна 0,9, для деталей с завода № 2 - 0,8, для деталей с завода № 3 - 0,6. Найти вероятность того, что: а) случайно взятая деталь - высшего качества; б) наугад взятая деталь высшего качества изготовлена на заводе № 2 (а) 0,73; б) 0,2192).

4. Заготовка может поступить для обработки на один из двух станков с вероятностями 0,4 и 0,6 соответственно. При обработке на первом станке вероятность брака составляет 2 %, на втором - 3 %. Найти вероятность того, что: а) наугад взятое после обработки изделие - стандартное; б) наугад взятое после обработки стандартное изделие обработано на первом станке (а) 0,974; б) 0,402).

5. На двух станках обрабатываются однотипные детали. Вероятность брака для станка № 1 составляет 0,03, для станка № 2 - 0,02. Обработанные детали складываются в одном месте, причем деталей, обработанных на станке № 1, вдвое больше, чем на станке № 2. Найти вероятность того, что: а) взятая наугад деталь будет стандартной; б) наугад взятая стандартная деталь изготовлена на первом станке (а) 0,0266; 6) 0,7518).

6. В дисплейном классе имеется 10 персональных компьютеров первого типа и 15 второго типа. Вероятность того, что за время работы на компьютере первого типа не произойдет сбоя, равна 0,9, а на компьютере второго типа - 0,7. Найти вероятность того, что: а) на случайно выбранном компьютере за время работы не произойдет сбоя; б) компьютер, во время работы на котором не произошло сбоя, - первого типа (а) 0,78; б) 0,4615).

7. В пяти ящиках с 30 шарами в каждом содержится по 5 красных шаров, в шести других ящиках с 20 шарами в каждом — по 4 красных шара. Найти вероятность того, что: а) из наугад взятого ящика наудачу взятый шар будет красным; б) наугад взятый красный шар содержится в одном из первых пяти ящиков (а) 0,1848; б) 0,4099).

8. По линии связи передано два сигнала типов А и В с вероятностями соответственно 0,8 и 0,2. В среднем принимается 60 % сигналов типа *А* и 70 % типа *В*. Найти вероятность того, что: а) посланный сигнал будет принят; б) принятый сигнал - типа А (а) 0,62; б) 0,7742).

9. Для сигнализации о том, что режим работы автоматической линии отклоняется от нормального, используются индикаторы двух типов. Вероятности того, что индикатор принадлежит к одному из двух типов, равны соответственно 0,4 и 0,6. При нарушении работы линии вероятность срабатывания индикатора первого типа равна 0,9, второго - 0,7. а) Найти вероятность того, что наугад выбранный индикатор сработает при нарушении нормальной работы линии, б) Индикатор сработал. К какому типу он вероятнее всего принадлежит? (а) 0,78; б) ко второму).

10. Резистор, поставленный в телевизор, может принадлежать к одной из двух партий с вероятностями 0,6 и 0,4. Вероятности того, что резистор проработает гарантийное число часов, для этих партий равны соответственно 0,8 и 0,7. а) Найти вероятность того, что взятый наугад резистор проработает гарантийное число часов, б) Резистор проработал гарантийное число часов. К какой партии он вероятнее всего принадлежит? (а) 0,76; б) к первой).

Контрольная работа № 1

Студент выполняет тот вариант контрольной работы, который совпадает с последней цифрой его учебного шифра. При этом, если предпоследняя цифра учебного шифра есть число нечетное (1, 3, 5, 7, 9), то номера задач для соответствующего варианта даны в столбце № 1. Если же предпоследняя цифра четная (2, 4, 6, 8, 0), то номера задач даны в столбце № 2. Например, если шифр студента 194138, то он должен выполнять задания варианта 8 из столбца № 1. Или, если учебный шифр 194286, то он выполняет задания под вариантом 6 из столбца № 2.

№ варианта (последняя цифра учебного шифра)	Предпоследняя цифра учебного шифра есть число нечетное	Предпоследняя цифра учебного шифра есть число четное
	1	2
1	1, 21, 41, 61, 81, 101	11, 31, 51, 71, 91, 111
2	2, 22, 42, 62, 82, 102	12, 32, 52, 72, 92, 112
3	3, 23, 43, 63, 83, 103	13, 33, 53, 73, 93, 113
4	4, 24, 44, 64, 84, 104	14, 34, 54, 74, 94, 114
5	5, 25, 45, 65, 85, 105	15, 35, 55, 75, 95, 115
6	6, 26, 46, 66, 86, 106	16, 36, 56, 76, 96, 116
7	7, 27, 47, 67, 87, 107	17, 37, 57, 77, 96, 117
8	8, 28, 48, 68, 88, 108	18, 38, 58, 78, 98, 118
9	9, 29, 49, 69, 89, 109	19, 39, 59, 79, 99, 119
0	10,30, 50, 70, 90, 110	20, 40, 60, 80, 100, 120

1. Сколькими способами можно расположить в ряд 5 черных и 5 белых шашек?

2. Имеется 6 пар перчаток различных размеров. Сколькими способами можно выбрать из них одну перчатку на левую руку и одну перчатку на правую руку так, чтобы эти перчатки были разных размеров?

3. Из колоды, содержащей 52 карты, вынули 10 карт. В скольких случаях среди этих карт окажется ровно один туз?

4. На железной дороге от A до B 50 станций. Сколько всего можно отпечатать различных билетов с указанием станции отправления и станции назначения?

5. Отмечаются вершины треугольника большими буквами латинского алфавита (26 букв). Сколько таких треугольников получится, если буквы не повторяются?

6. В письменном столе имеется три ящика. Сколькими способами можно разложить по ним 5 различных тетрадок?

7. Имеется 3 различных кресла и 5 рулонов обивочной ткани разных цветов. Сколькими способами можно осуществить обивку кресел?

8. Свете на день рождения подарили 4 плюшевых игрушки, 2 мяча и 5 кукол. Мама положила все игрушки в большую коробку. Сколькими способами Света сможет достать из коробки 1 плюшевую игрушку, 1 мяч и 1 куклу?

9. Сколько четных двузначных чисел можно составить из цифр 0, 2, 3, 6, 7, 9?

10. Саша, Петя, Денис, Оля, Настя часто ходят в кафе. Каждый раз, обедая там, они рассаживаются по-разному. Сколько дней друзья смогут это сделать без повторения?

11. Из учащихся пяти 11 классов нужно выбрать двоих дежурных. Сколько пар дежурных можно составить (ученики в паре не должны быть из одного класса)?

12. Пете на день рождения подарили 7 новых дисков с играми, а Вале папа привез 9 дисков из командировки. Сколькими способами они могут обменять 4 любых диска одного на 4 диска другого?

13. В классе три человека хорошо поют, двое других играют на гитаре, а еще четверо любят читать стихи. Сколько различных концертных бригад можно составить из певца, гитариста и чтеца?

14. Сколько нечетных трёхзначных чисел можно составить из цифр 3, 4, 2, 6? (Цифры в записи числа не могут повторяться).

15. В отделе работают 9 ведущих и 12 старших научных сотрудников. В командировку надо послать двух ведущих и трех старших научных сотрудников. Сколькими способами может быть сделан выбор сотрудников, которых надо послать в командировку?

16. В турнире участвовали семь шахматистов, и каждый из них сыграл с каждым из остальных по одной партии. Сколько всего было сыграно партий?

17. Из десяти врачей поликлиники три хирурга, три терапевта и четыре окулиста. Необходимо отправить мобильную бригаду из трех разных врачей к месту землетрясения. Сколькими способами это можно сделать?

18. Человек забыл код, открывающий замок на его чемодане, но вспомнил, что код состоит их трех разных цифр, каждая из которых не больше трех. Кроме того, в код точно не входит сочетание 13. Сколько вариантов кода в худшем случае ему придется перебрать, чтобы открыть свой чемодан?

19. В спортивной команде 12 человек. Необходимо выбрать капитана и его заместителя. Сколькими способами это можно сделать?

20. При встрече каждый из друзей пожал другому руку. Сколько всего было рукопожатий, если встретились 12 друзей?

21. Вычислить $3P_6 + C_6^2 - 2A_7^4$.

22. Вычислить $2P_6 - 3C_7^3 + A_{11}^8$.

23. Вычислить $A_8^5 - 4C_7^3 + 2P_6$.

24. Вычислить $2A_9^3 - 2C_7^3 + P_4$.

25. Решить уравнение $\frac{P_{n+2}}{P_n} = 6$.

26. Решить уравнение $A_{n-1}^5 = 2A_{n-2}^5$.

27. Решить уравнение $\frac{P_{n-4}}{P_1} = \frac{P_{n-2}}{20}$.

28. Решить уравнение $A_{n+1}^2 = 156$.

29. Решить уравнение $\frac{C_{n+1}^3}{C_n^4} = \frac{8}{5}$.

30. Решить уравнение $A_{n-1}^5 = 2A_{n-2}^5$.

31. Упростить $\frac{(\kappa+4)!}{(\kappa+2)!(k+3)}$.

32. Упростить $\frac{(\kappa+3)!(k+4)}{(\kappa+5)!}$.

33. Упростить $\frac{(к+1)!}{(к-1)!k}$.

34. Упростить $\frac{(к+1)!}{(к-2)!(k-1)}$.

35. Упростить $\frac{(к+4)!}{(к+2)!(k+3)}$.

36. Вычислить $P_5 + 3C_7^2 - 5A_6^4$.

37. Вычислить $3A_7^5 - 2C_5^3 + 2P_4$.

38. Вычислить $A_8^6 - 4C_7^2 + 2P_3$.

39. Вычислить $P_3 - 5C_5^3 + A_{10}^6$.

40. Вычислить $2P_4 + 3C_9^3 - 2A_{12}^9$.

41. Двое рабочих обслуживают 3 станка. Пусть события $A_к$ (к = 1, 2) означают работу к-го рабочего, $B_п$ (п = 1, 2, 3) – работа на п-м станке. Выразить через алгебру событий следующие события: а) только один рабочий обслуживает первый станок; б) второй рабочий обслуживает только один станок; в) первый рабочий обслуживает хотя бы один станок; г) хотя бы один рабочий обслуживает третий станок; д) оба рабочих обслуживают по крайней мере два станка.

42. В корзину трижды бросается мяч. Пусть события $A_к$ (к = 1, 2, 3,) состоят в том, что при к-м бросании мяч попадет в корзину. Выразить через алгебру событий следующие события: а) мяч не попадет в корзину ни разу; б) мяч попадет в корзину при всех бросаниях; в) мяч попадет в корзину только один раз; г) мяч попадет в корзину ровно два раза; д) по крайней мере один раз мяч попал в корзину.

43. Взятая наудачу деталь может оказаться либо первого (событие A), либо второго (событие B), либо третьего (событие C) сорта. Что представляют собой следующие события: $A+B$; $\overline{A+C}$; АС; $AB+C$?

44. Три студента независимо друг от друга решают одну и ту же задачу. Пусть событие $A_1=\{$первый студент решил задачу$\}$, $A_2=\{$второй студент решил задачу$\}$, $A_3=\{$третий студент решил задачу$\}$. Выразить через события A_i (i=1, 2, 3) следующие события: а) A={все студенты решили задачу}; б) B={задачу решил только первый студент}; в) C={задачу решил хотя бы один студент}; г) E={задачу решил только один студент}; д) M=={задачу решили не менее двух студентов}.

45. Из корзины, содержащей красные, желтые и белые розы, выбирается один цветок. Пусть события A={выбрана красная роза}, B={выбрана желтая роза}, C={выбрана белая роза}. Что означают события: а) $\overline{A}$; б) A+B; в) AC; г) $\overline{A+B}$; д) $\overline{A}+\overline{B}$?

46. Пусть A_1, A_2, A_3 - попадание в мишень соответственно первым, вторым и третьим стрелком при одном выстреле. События $\overline{A_1}, \overline{A_2}, \overline{A_3}$ - промахи этих стрелков. Найти выражения для событий: а) A={ни одного попадания в мишень}, б) B={только одно попадание}, в) C={только два попадания}, г) F={хотя бы одно попадание}; д) K={хотя бы два попадания в результате этих трех выстрелов}.

47. Пусть A, B, C – три произвольных события. Найти выражения для событий, которые состоятся в следующих случаях: а) произошло только событие A; б) произошло одно и только одно событие; в) произошло два и только два события; г) произошло по крайней мере одно событие; д) произошло не более двух событий.

48. Производится профилактический осмотр технического устройства, состоящего из **k** узлов (k=1,2,3,4). Пусть событие A_k состоит в том, что в результате осмотра потребует ремонта k-ый узел. После осмотра сделано

заключение: а) ни один узел не придется ремонтировать; б) только второй узел потребует ремонта; в) не менее двух узлов необходимо ремонтировать; г) хотя бы один потребует ремонта; д) необходимо ремонтировать все узлы. Описать эти события.

49. Машинно-котельная установка состоит из 3-х котлов и одной машины. Следующие события означают: А - машина исправна, $B_к$ (к=1,2,3) – исправен к - ый котел. За время работы произошли события: а) исправна машина и хотя бы один котел; б) исправна машина и только один из котлов; в) неисправны машина и не менее двух котлов; г) неисправны машина и ровно один котел; д) машинно-котельная установка неработоспособна. Описать их.

50. Прибор состоит из двух блоков I типа и трех блоков II типа. Пусть события $A_к$ (к=1,2) – исправен к-ый блок I типа, B_n (n=1,2,3) – исправен n-ый блок II типа. Выразить следующие события: а) исправны хотя бы один блок I типа и два блока II типа; б) исправны только два блока II типа; в) исправны только второй блок I типа и не менее двух блоков II типа; г) неисправен один блок I типа или один блок II типа; д) блоки I и II типов исправны.

51. 4 пассажира могут обратиться за получением билета в одну из двух касс. События $A_к$ (к=1,2,3,4) состоят в том, что нуждается в билете к-ый пассажир, B_n (n=1,2) – билет покупается в n-ой кассе. Описать следующие события: а) все пассажиры купят билет во второй кассе; б) хотя бы один пассажир купит билет в первой кассе; в) третий пассажир купит билет в одной из касс; г) ни один из пассажиров не купит билета во второй кассе; д) не более, чем 2 пассажира приобретут билеты в первой кассе.

52. По каналу связи передаются последовательно три сообщения. Рассматриваются события $A_к$ (к=1,2,3) – к-ое сообщение передано правильно. Выразить события: а) не менее двух сообщений передано правильно; б) первое правильно переданное сообщение – третье по порядку; в) только одно сообщение искажено; г) хотя бы одно сообщение передано правильно; д) все три сообщения искажены.

53. Судно имеет одно рулевое устройство, 4 котла и 2 турбины. События А – рулевое устройство исправно, $B_к$ (к=1,2,3,4) – исправен к-ый котел, C_n (n=1,2) исправна n-ая турбина. Выразить события: а) исправно рулевое устройство и хотя бы один котел; б) исправно рулевое устройство и только одна из турбин; в) не менее трех котлов исправны; г) неисправно рулевое устройство и два котла; д) судно неуправляемо.

54. Два шарика разбрасываются случайно по четырем ячейкам, расположенными одна за другой по прямой. События A_n (n=1,2) – бросается n-ый шарик, $B_к$ (к=1,2,3,4) – попадание в к-ую ячейку. Описать следующие события: а) шарики попадут в первую и вторую ячейки; б) только один шарик попадет в третью ячейку; в) ни один шарик не попадет в четвертую

ячейку; г) хотя бы один шарик попадет во вторую ячейку; д) второй шарик попадет в одну из ячеек.

55. В лифт пятиэтажного дома на первом этаже вошли три человека. Рассматриваются события $A_к$ (к=1,2,3) - к-ый пассажир выйдет на каком-либо этаже; B_n (n=1,2,3,4,5) – пассажир выйдет на n-ом этаже. Описать события: а) все пассажиры выйдут на четвертом этаже; б) только один выйдет на пятом этаже; в) хотя бы двое выйдут на одном и том же этаже; г) ни один не выйдет на втором этаже; д) два пассажира выйдут на третьем этаже.

56. На курсе события: А – множество студентов, знающих английский язык, В – немецкий, С – французский. Выразить через алгебру событий следующие события, состоящие в том, что студенты, знают: а) только английский и немецкий; б) все три языка; в) хотя бы один из языков; г) по крайней мере два языка; д) только один язык.

57. Опыт состоит в бросании двух монет. Рассматриваются следующие события: А – выпадение герба на первой монете, В – цифры на первой монете, С – герба на второй монете, Д – цифры на второй монете. Выразить через алгебру событий события, состоящие в том, что при бросании выпадает: а) хотя бы один герб ; б) один герб и одна цифра; в) ни одного герба ; г) хотя бы одна цифра; д) два герба.

58. В урне 5 красных, 2 синих и три белых шара. Все они пронумерованы от 1 до 10. Рассматриваются события: А – шар с черным номером, В – с номером, кратным 3, С – красного цвета, Д – синего цвета, Е – белого цвета. Вынимается один шар. Выразить через алгебру событий следующие события: шар будет а) с четным номером, кратным 3; б) синего цвета с четным номером; в) красного или синего цвета с номером, не кратным 3; г) белого цвета с нечетным номером.

59. Завод изготовляет детали, каждая из которых может оказаться дефектной. Для контроля из продукции завода отбирается три детали. События $A_к$ (к = 1, 2, 3) – обнаружение дефекта у к-й детали. Осуществляется контроль. Выразить через алгебру событий следующие события; а) обнаружен дефект не более, чем у одной детали; б) обнаружен дефект ровно у двух деталей; в) обнаружен дефект по крайней мере у одной детали; г) обнаружен дефект у всех деталей; д) ни у одной из деталей не обнаружено дефекта.

60. Для лечения некоторой хронической болезни применяются четыре вида лекарств А, В, С, Д. врач проводит сравнительное исследование этих лекарств. Описать события, состоящие в том, что будут исследованы: а) только три лекарства; б) по крайней мере одно; в) не более трех; г) не менее двух; д) только А и В или только С и Д.

61. В первом ящике находятся шары с номерами от 1 до 5, а во втором – с номерами от 6 до 10. Из каждого ящика вынули по одному шару. Какова

вероятность того, что сумма номеров вынутых шаров: а) не меньше 7; б) равна 11; в) не больше 11?

62. Числа 1, 2, 3, 4, 5 написаны на пяти карточках. Наугад последовательно выбираются три карточки, и вынутые таким образом цифры ставятся слева направо. Найти вероятность того, что полученное при этом трехзначное число будет четным.

63. В партии из 50 деталей 5 нестандартных. Определить вероятность того, что среди выбранных наудачу для проверки 6 деталей 2 окажутся нестандартными.

64. Из колоды карт (36 карт) наудачу вынимаются 3 карты. Найти вероятность того, что среди них окажется хотя бы одна “дама”.

65. В урне 3 белых, 6 красных и 5 синих шаров. Из нее наудачу вынимают 3 шара. Какова вероятность того, что: а) все они одного цвета; б) все они разных цветов; в) среди них 1 белый и 2 синих шара.

66. Наудачу взятый телефонный номер состоит из 5 цифр. Как велика вероятность, что в нем: 1) все цифры различные; 2) все цифры нечетные?

67. Из 20 акционерных обществ (АО) 4 являются банкротами. Гражданин приобрел по одной акции шести АО. Какова вероятность того, что среди купленных акций две окажутся акциями банкротов.

68. Из десяти лотерейных билетов выигрышными являются два. Определить вероятность того, что среди взятых наудачу пяти билетов: а) один выигрышный; б) оба выигрышных; в) хотя бы один выигрышный.

69. В магазине было продано 21 из 25 холодильников трех марок, имеющихся в количествах 5,7 и 13 штук. Полагая, что вероятность быть проданным для холодильника каждой марки одна и та же, найти вероятность того, что остались нераспроданными холодильники одной марки.

70. На полке стоят 10 книг, среди которых 3 книги по теории вероятностей. Наудачу берутся три книги. Какова вероятность, что среди отобранных хотя бы одна книга по теории вероятностей?

71. Среди 25 студентов, из которых 15 девушек, разыгрываются четыре билета, причем каждый может выиграть только один билет. Какова вероятность того, что среди обладателей билета окажутся: а) четыре девушки; б) четыре юноши; в) три юноши и одна девушка?

72. Из 20 сбербанков 10 расположены за чертой города. Для обследования случайным образом отобрано 5 сбербанков. Какова вероятность того, что среди отобранных окажется в черте города: а) 3 сбербанка; б) хотя бы один?

73. Студент знает 20 из 25 вопросов программы. Зачет считается сданным, если студент ответит не менее чем на 3 из 4 поставленных в билете вопросов. Взглянув на первый вопрос билета, студент обнаружил,

что он его знает. Какова вероятность того, что студент: а) сдает зачет; б) не сдает зачет?

74. Из 100 изготовленных деталей 10 имеют дефект. Для проверки были отобраны 5 деталей. Какова вероятность того, что среди отобранных деталей две окажутся бракованными?

75. В коробке 5 синих, 4 красных и 3 зеленых карандаша. Наудачу вынимают 3 карандаша. Какова вероятность того, что: а) все они одного цвета; б) все они разных цветов; в) среди них 2 синих и 1 зеленый карандаш?

76. В подгруппе 12 студентов, среди которых один отличник. На собрание отбирается 3 человека. Найти вероятность того, что среди них не будет отличника.

77. Наудачу выбирают 5 военнослужащих из группы, состоящей из 4 офицеров и 12 солдат. Какова вероятность того, что в группе будет не более двух офицеров?

78. В мешке содержится шары, пронумерованные от 1 до 90. Из мешка наудачу вынимают 5 шаров. Какова вероятность, что среди этих шаров один помечен числом 90?

79. В цехе работают 6 мужчин и 4 женщины. По табельным номерам отобраны 7 человек. Найти вероятность того, что среди отобранных лиц окажутся три женщины.

80. В бригаде 23 студента, среди которых 10 девушек. Избирается делегация в составе 6 человек. Найти вероятность того, что среди членов делегации будет 2 девушки.

81. В первом ящике 2 белых и 10 красных шаров; во втором ящике 8 белых и 4 красных шара. Из каждого ящика вынули по шару. Какова вероятность, что оба шара белые?

82. 32 буквы русского алфавита написаны на карточках разрезной азбуки. Пять карточек вынимаются наугад одна за другой и укладываются на стол в порядке появления. Найти вероятность того, что получится слово “Москва”.

83. В магазине продаются 10 телевизоров, 3 из них имеют дефекты. Какова вероятность того, что посетитель купит телевизор, если для выбора телевизора без дефекта понадобится не более трех попыток.

84. Один студент выучил 20 из 25 вопросов программы, а второй – только 15. Каждому из них задают по одному вопросу. Найти вероятность того, что правильно ответят: а) оба студента; б) только первый студент; в) только один из них; г) хотя бы один из студентов.

85. Достаточным условием сдачи коллоквиума является ответ на один из двух вопросов, предлагаемых преподавателем студенту. Студент не знает

ответов на 8 вопросов из 40 вопросов, которые могут быть предложены. Какова вероятность, что студент сдаст коллоквиум?

86. Вероятности того, что каждый из трех друзей придет в условленное место, соответственно равны: $p_1 = 0,8$, $p_2 = 0,4$, $p_3 = 0,7$. Определить вероятность того, что встреча состоится, если для этого достаточно явиться двум из трех друзей.

87. Вероятности своевременного выполнения задания тремя независимо работающими предприятиями соответственно равны 0,5; 0,6; 0,7. Найти вероятность своевременного выполнения задания хотя бы одним предприятием.

88. Группе студентов для прохождения производственной практики выделено 30 мест: 15 – в Туле, 8 – во Владимире, 7 – в Калуге. Какова вероятность того, что студент и студентка, которые в скором времени собираются справить свадьбу, будут посланы для прохождения практики в один и тот же город, если декан ничего не знает об их “семейных делах”?

89. Студент разыскивает нужную ему формулу в 3-х справочниках. Вероятность того, что формула содержится в первом, во втором, в третьем справочниках равна соответственно 0,6; 0,7; 0,8. Найти вероятность того, что эта формула содержится не менее, чем в двух справочниках.

90. Вероятность своевременного выполнения студентом контрольной работы по каждой из трех дисциплин равна соответственно 0,6; 0,5; 0,8. Найти вероятность своевременного выполнения контрольной работы студентом: а) по двум дисциплинам; б) хотя бы по двум дисциплинам.

91. Из букв разрезной азбуки составлено слово “статистика”. Какова вероятность того, что, перемешав буквы и укладывая их в ряд по одной (наудачу), получим слово: а) тиски, б) киска, в) кит, г) статистика.

92. Три орудия стреляют в цель независимо друг от друга. Вероятность попадания в цель каждого равна 0,7. Найти вероятность попадания в цель: а) только одного из орудий; б) хотя бы одного.

93. Рабочий обслуживает 3 станка, работающих независимо друг от друга. Вероятность того, что за смену первый станок не потребует внимания рабочего, равна 0,9, второй – 0,8, третий – 0,75. Найти вероятность того, что за смену: а) только один станок потребует внимания; б) хотя бы один станок потребует внимания; в) только третий станок потребует внимания рабочего.

94. В корзине 12 плодов, 5 из которых поражены болезнью в скрытой форме. Из корзины последовательно извлекаются два плода. Найти вероятность того, что оба окажутся больными.

95. Для контроля за некоторым сельскохозяйственным технологическим процессом установлено два независимо работающих устройства. Первое устройство срабатывает в 80% случаях, второе – в 90%.

Найти вероятность того, что в необходимом случае сработает хотя бы одно устройство.

96. На искусственном спутнике Земли установлено три дублирующих прибора. Для первого прибора вероятность безотказной работы в течение месяца равна 0.9, для второго – 0.8, для третьего – 0.95. Определить вероятность того, что в течение месяца не более, чем один прибор выйдет из строя.

97. Для производственной практики на 30 студентов предоставлено 8 мест в Иркутске, 10 – в Ангарске и 12 – в Усолье. Какова вероятность того, что два определенных студента попадут на практику в один город?

98. Прибор состоит из 3-х элементов. Вероятность выхода из строя каждого элемента соответственно равна 0.08, 0.06, 0.1. Найти вероятность того, что при включении прибора только один элемент откажет.

99. На 20 одинаковых жетонах написаны двузначные числа от 11 до 30. Жетоны помещены в пакет и тщательно перемешаны. Какова вероятность вынуть жетон с номером кратным 3 или 2?

100. Коэффициент использования рабочего времени у двух комбайнов соответственно равны 0.8 и 0.7. Найти вероятность того, в период уборочных работ время простоя будет не более, чем у одного комбайна.

101. Имеется четыре одинаковых ящика с электрическими лампочками, причем первый ящик содержит 10 исправных и 2 бракованные лампочки, второй и третий ящики содержат по 5 исправных и по 5 бракованных лампочек, а четвертый ящик содержит только 10 исправных лампочек. Наудачу выбирается один ящик и из него одна лампочка. Какова вероятность того, что эта лампочка окажется исправной?

102. Три организации поставили в контрольное управление счета для выборочной проверки: первая 15 счетов, вторая – 10, третья – 25. Вероятности правильного оформления счетов у этих организаций соответственно таковы: 0,9; 0,8; 0,85. Был выбран один счет, и он оказался правильным. Определить вероятность того, что этот счет принадлежит второй организации.

103. В группе спортсменов 20 лыжников, 6 велосипедистов и 4 бегуна. Вероятность выполнить квалификационную норму такова: для лыжника – 0,9, для велосипедиста – 0,8 и для бегуна – 0,75. Найти вероятность того, что спортсмен, выбранный наудачу, выполнит норму.

104. Для участия в студенческих отборных спортивных соревнованиях выделено из первой группы 4, из второй – 6, из третьей – 5 студентов. Вероятности того, что студент первый, второй и третьей группы попадает в сборную института, соответственно, равны 0,9; 0,7 и 0,8. Наудачу выбранный студент в итоге соревнования попал в сборную. К какой из групп вероятнее всего принадлежал этот студент?

105. В тире имеются пять ружей, вероятности попадания из которых равны соответственно 0,5; 0,6; 0,7; 0,8 и 0,9. Определить вероятность попадания при одном выстреле, если стреляющий берет одно из ружей наудачу.

106. В цехе работают 20 станков. Из них 10 марки А, 6 марки В и 4 марки С. Вероятность того, что качество детали окажется отличным, для этих станков соответственно равна: 0,9; 0,8 и 0,7. Какой процент отличных деталей выпускает цех в целом?

107. На предприятии, изготавливающем болты, первая машина производит 25 %, вторая – 35 %, третья – 40 % всех изделий. В их продукции брак составляет соответственно 5, 4 и 2 %. а) Какова вероятность того, что случайно выбранный болт дефектный? б) Случайно выбранный из продукции болт оказался дефектным. Какова вероятность того, что он был произведен первой, второй, третьей машиной?

108. Турист, заблудившись в лесу, вышел на поляну, откуда вело 5 дорог. Известно, что вероятности выхода из леса за час для различных дорог равны соответственно 0,6; 0,3; 0,2; 0,1; 0,1. Чему равна вероятность того, что заблудившийся турист пошел по первой дороге, если известно, что он вышел из леса через час?

109. Группа студентов состоит из a - отличников, b – хорошо успевающих и c – занимающихся слабо. Отличники на предстоящем экзамене могут получить только отличные оценки. Хорошо успевающие студенты могут получить с равной вероятностью хорошие и отличные оценки. Слабо занимающиеся студенты могут получить с равной вероятностью хорошие, удовлетворительные и неудовлетворительные оценки. Для сдачи экзамена вызывается наугад один студент. Найти вероятность того, что он получит хорошую или отличную оценку.

110. В группе из 10 студентов, пришедших на экзамен, 3 - подготовлены отлично, 4 – хорошо, 2 – посредственно и 1 – плохо.. В экзаменационных билетах имеется 20 вопросов. Отлично подготовленный студент может ответить на все 20 вопросов, хорошо подготовленный - на 16, посредственно – на 10, плохо – на 5. Вызванный наугад студент ответил на три произвольно заданных вопроса. Найти вероятность того, что этот студент подготовлен: а) отлично; б) плохо.

111. Пассажир может обратиться за получением билета в одну из трех касс. Вероятности обращения в каждую кассу зависят от их местонахождения и равны соответственно p_1, p_2, p_3. Вероятность того, что к моменту прихода пассажира имеющиеся в кассе билеты будут распроданы, равна для первой кассы P_1, для второй - P_2, для третьей - P_3. Пассажир направился за билетом в одну из касс и приобрел билет. Найти вероятность того, что это была первая касса.

112. У рыбака имеется три излюбленных места для ловли рыбы, которые он посещает с равной вероятностью каждое. Если он закидывает удочку на первом месте, рыба клюет с вероятностью $\frac{1}{3}$; на втором месте – с вероятностью $\frac{1}{2}$; на третьем – с вероятностью $\frac{1}{4}$. Известно, что рыбак, выйдя на ловлю рыбы, три раза закинул удочку, и рыба клюнула только один раз. Найти вероятность того, что он удил рыбу на первом месте.

113. При разрыве снаряда образуются осколки трех весовых категорий: крупные, средние и мелкие, причем число крупных, средних и мелких осколков составляет соответственно 0,1; 0,3; 0,6 общего числа осколков. При попадании в броню крупный осколок пробивает ее с вероятностью 0,9, средний – с вероятностью 0,2 и мелкий – с вероятностью 0,05. В броню попал один осколок и пробил ее. Найдите вероятности того, что эта пробоина причинена крупным, средним и мелким осколком.

114. В обувную мастерскую для ремонта приносят сапоги и туфли в соотношении 2:3. Вероятность качественного ремонта для сапог равна 0,9, а для туфель – 0,85. Проведена проверка качества одной пары обуви. Оказалось, что эта пара обуви отремонтирована качественно. Какова вероятность того, что это а) сапоги, б) туфли?

115. На предприятии, изготавливающем замки, первый цех производит 25 %, второй - 35 %, третий – 40 % всех замков. Брак составляет соответственно 5 %, 4 %, 2%. а) Найти вероятность того, что случайно выбранный замок является дефектным; б) Случайно выбранный замок является дефектным. Какова вероятность того, что он был изготовлен в первом, втором, третьем цехе?

116. В данный район изделия поставляются тремя фирмами в соотношении 5:8:7. Среди продукции первой фирмы стандартные изделия составляют 90 %, второй – 85 %, третьей – 75 %. Найти вероятность того, что: а) приобретенное изделие окажется нестандартным; б) приобретенное изделие оказалось стандартным. Какова вероятность, что оно изготовлено третьей фирмой?

117. В студенческой группе 70 % - юноши. 20 % юношей и 40 % девушек имеют сотовый телефон. После занятий в аудитории был найден кем – то забытый телефон. Какова вероятность того, что он принадлежал: а) юноше; б) девушке?

118. В торговую фирму поставляются телевизоры тремя фирмами в соотношении 5:2:3. Телевизоры, поступающие от этих фирм, не требуют ремонта в течение гарантийного срока соответственно в 96 %, 92 % и 94 % случаев. Найти вероятность того, что купленный наудачу телевизор не потребует ремонта в течение гарантийного срока. Какая фирма вероятнее всего поставила данный телевизор?

119. Известно, что 90 % изделий, выпускаемых данным предприятием, отвечает стандарту. Упрощенная схема проверки качества продукции признает пригодной стандартную деталь с вероятностью 0,96 и нестандартную с вероятностью 0,06. Определить вероятность того, что: а) взятое наудачу изделие пройдет контроль; б) изделие, прошедшее контроль качества, отвечает стандарту.

120. Заявки работодателей на специалистов инженерных, экономических и юридических направлений поступают набиржу в отношении 6:3:1. Вероятность того, что претендент на вакансию инженера удовлетворит требованиям работодателя, равна 0,8, на вакансию экономиста – 0,8, на вакансию юриста – 0,5. Найти вероятность того, что: а) случайно выбранный на бирже претендент устроится на работу по своей специальности;

VI. Повторные независимые испытания

Теоретическая справка [8], [11], [12]

Формула Бернулли

$$P_n(k) = C_n^k p^n q^{n-k} \ . \tag{17}$$

где p – вероятность появления события A в одном испытании; $q = 1 - p$ - вероятность непоявления события A в одном испытании; n – общее число производимых испытаний; k – число испытаний, в которых появится событие A; $P_n(k)$ - вероятность того, что событие A появится ровно k раз в n испытаниях.

Формула Бернулли применяется в тех случаях, когда число испытаний не велико ($n \le 15$)*, а вероятность наступления события А достаточна большая* ($p \ge 0{,}1$) В частности, вероятность того, что в n испытаниях, удовлетворяющих схеме Бернулли, событие A наступит:

а) *менее k раз*:

$$P_n(0) + P_n(1) + \ldots + P_n(k-1);$$

б) *более k раз*:

$$P_n(k+1) + P_n(k+2) + \ldots + P_n(n);$$

в) *не менее k раз*:

$$P_n(k) + P_n(k+1) + \ldots + P_n(n); \tag{18}$$

г) *не более k раз*:

$$P_n(0) + P_n(1) + \ldots + P_n(k);$$

д) *хотя бы один раз*:

$$P_n(k \ge 1) = 1 - P_n(0) = 1 - q^n .$$

Наивероятнейшее число k_0 наступления события A в n независимых испытаниях, в каждом из которых оно может наступить с вероятностью p (и не наступить с вероятностью $q=1-p$), находят из двойного неравенства

$$np-q \le k_0 \le np+p. \qquad (19)$$

Формула Пуассона

Если число испытаний велико, а вероятность p *очень мала,* то искомую оценку для $P_n(k)$ дает *формула Пуассона*

$$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, \qquad (20)$$

где $\lambda = np$. *Формулу Пуассона можно применять для приближенного определения* $P_n(k)$ *при* $p<0{,}1$*;* $npq<10$.

Локальная формула Муавра-Лапласа

Если число испытаний достаточно велико, то вероятность наступления события A ровно k раз, приближенно может быть найдена по *локальной формуле Муавра-Лапласа*:

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x), \qquad (21)$$

где $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$; $x=\frac{k-np}{\sqrt{npq}}$.

Практически этой формулой можно пользоваться при $npq \ge 20$. Таблица значений функции $\varphi(x)$ для некоторых $x \ge 0$ приводится в приложении домашней контрольной работы по теории вероятностей. Поскольку функция $\varphi(x)$ четная, то для определения ее значений для $x<0$ нужно воспользоваться равенством: $\varphi(-x)=\varphi(x)$. Для $x>4$ имеем $\varphi(x)\approx 0$.

Интегральная формула Муавра-Лапласа

Если вероятность наступления события A в каждом из n независимых испытаний постоянна и равна p, а число n повторных независимых испытаний достаточно велико, то вероятность того, что событие A наступит не менее k_1 и не более k_2 раз, приближенно равна

$$P(k_1 \le k \le k_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1), \qquad (22)$$

где $x_1 = \dfrac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}$, $x_2 = \dfrac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$, $q = 1 - p$, $\Phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ - функция Лапласа.

Практически указанную формулу можно применить при $n > 10$ и при значениях p, не слишком близких к нулю или к единице. Таблица значений функции $\Phi(x)$ для $x \ge 0$ приводится в приложениях. Поскольку функция $\Phi(x)$ нечетная, то при определении ее значений для $x < 0$ нужно воспользоваться равенством: $\Phi(-x) = -\Phi(x)$. Для значений $x > 5$ имеем $\Phi(x) \approx 0{,}5$.

Отклонение относительной частоты от постоянной вероятности в независимых испытаниях

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \le \varepsilon\right) = 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right). \qquad (23)$$

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \rangle\, \varepsilon\right) = 1 - 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right). \qquad (24)$$

Вероятность того, что в n независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события равна p, абсолютная величина отклонения относительной частоты $\frac{m}{n}$ появления события от вероятности появления события не превышает положительного числа ε, приближенно равна удвоенной функции Лапласа $\Phi(x)$ при $x = \varepsilon\sqrt{\dfrac{n}{pq}}$:

Формула (23) позволяет:

1) при известной вероятности отклонения, заданных ε и p узнать число испытаний n, которое будет достаточным для замены постоянной вероятности относительной частотой;

2) узнать величину отклонения относительной частоты события от постоянной его вероятности при известных n, p и $P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \le \varepsilon\right)$, или границы интервала, в которой с заданной вероятностью будет попадать относительная частота.

Решение типовых задач

Задача 6.1. Игральную кость подбрасывают 10 раз. Найти вероятность того, что шестерка выпадет: а) два раза; б) хотя бы один раз.

◀ Проводится 10 независимых испытаний. Каждое испытание имеет два исхода: шестерка выпадет, шестерка не выпадет. Вероятность выпадения шестерки в каждом испытании постоянна и равна $p=\frac{1}{6}$. Таким образом, мы имеем дело со схемой Бернулли.

Для нахождения искомых вероятностей воспользуемся формулой Бернулли и формулой (д) соответственно.

а) Здесь n = 10, m = 2, $p=\frac{1}{6}$, $q=1-p=\frac{5}{6}$. Тогда по формуле Бернулли

$$P_{10}(2)=C_{10}^{2}\left(\frac{1}{6}\right)^{2}\left(\frac{5}{6}\right)^{10-2}=45\cdot\frac{1}{36}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{8}\approx 0{,}291.$$

б) По случаю (18 д) найдем, что вероятность того, что шестерка выпадет хотя бы один раз

$$P_{10}(m\geq 1)=1-\left(\frac{5}{6}\right)^{10}\approx 0{,}838..$$

Задача 6.2. Исследование инкубации яиц яичного кросса Беларусь-9 показало, что цыплята выводятся в среднем из 70% заложенных в инкубатор яиц. Из общего количества заложенных в инкубатор яиц случайным образом отобраны и помечены шесть. Найти вероятность того, что из помеченных яиц выведутся:

1) три цыпленка;
2) менее трех цыплят;
3) более трех цыплят;
4) не менее трех цыплят;
5) не более трех цыплят;
6) хотя бы один цыпленок.

◀ Проводятся испытания по выведению цыплят. Каждое испытание имеет два исхода: из заложенного в инкубатор яйца выведется цыпленок (успех), цыпленок не выведется (неудача). Вероятность того, что из заложенного в инкубатор яйца выведется цыпленок (событие A) постоянна и равна $p=0{,}7$. Таким образом, имеем дело со схемой Бернулли. Итак, вероятность наступления события A в одном испытании равна $P(A)=p=0{,}7$, не наступления - $P(\overline{A})=1-p=q=0{,}3$. Общее число независимых испытаний $n=6$.

1. Вероятность того, что из 6-ти яиц выведется ровно три цыпленка найдем по формуле Бернулли (16):

$$P_6(3) = C_6^3 \cdot p^3 \cdot q^3 = 20 \cdot (0,7)^3 \cdot (0,3)^3 = 0,18522.$$

2. Для нахождения вероятности того, что из 6-ти яиц выведутся менее трех цыплят, воспользуемся формулой (18 а)

$$P_6(k<3) = P_6(0) + P_6(1) + P_6(2), \text{ где}$$

$$P_6(0) = C_6^0 \cdot p^0 \cdot q^6 = (0,3)^6 = 0,000729;$$

$$P_6(1) = C_6^1 \cdot p^1 \cdot q^5 = C_6^1 \cdot (0,7)^1 (0,3)^5 = 0,010206;$$

$$P_6(2) = C_6^2 \cdot p^2 \cdot q^4 = C_6^2 \cdot (0,7)^2 (0,3)^4 = 0,059535.$$

Тогда, $P_6(k<3) = P_6(0) + P_6(1) + P_6(2) = 0,07047$.

3. Вероятность того, что из 6-ти яиц выведутся более трех цыплят по формуле (18 б) равна:

$$P_6(k>3) = P_6(4) + P_6(5) + P_6(6), \text{ где}$$

$$P_6(4) = C_6^4 \cdot p^4 \cdot q^2 = C_6^4 \cdot (0,7)^4 (0,3)^6 = 0,324135;$$

$$P_6(5) = C_6^5 \cdot p^5 \cdot q^1 = C_6^5 \cdot (0,7)^5 (0,3) = 0,302526;$$

$$P_6(6) = C_6^6 \cdot p^6 \cdot q^0 = (0,7)^6 = 0,117649$$

Искомая вероятность равна $P_6(k>3) = P_6(4) + P_6(5) + P_6(6) = 0,74431$.

4. По формуле (18 в) найдем вероятность того, что из 6-ти яиц выведутся не менее трех цыплят

$$P_6(k \ge 3) = P_6(3) + P_6(4) + P_6(5) + P_6(6),$$

т.к. значения слагаемых этого равенства найдены в предыдущих пунктах, то $P_6(k \ge 3) = 0,92953$.

5. Применяя формулу (18 г), вычислим вероятность того, что из 6-ти яиц выведутся не более трех цыплят

$$P_6(k \le 3) = P_6(0) + P_6(1) + P_6(2) + P_6(3) = 0,25569.$$

6. Найдем вероятность того, что из 6-ти яиц выведется хотя бы один цыпленок, применив формулу (18 д)

$$P_6(k \ge 1) = 1 - P_6(0) = 1 - 0,000729 = 0,999271.$$

Задача 6. 3. Всхожесть семян данного сорта растений составляет 70 %. Найти наивероятнейшее число всхожих семян в партии из 240 семян.

◀ Наивероятнейшее число k_0 всхожих семян находим из условия двойного неравенства. Поскольку n = 240, p = 0,7 и q = 0,3, то $240\cdot 0{,}7-0{,}3\le k_0\le 240\cdot 0{,}7+0{,}7$, т.е. $167{,}7\le k_0\le 168{,}7$. Отсюда следует, что $k_0=168$.

Задача 6. 4. В урне 10 красных и 40 синих шаров. Вынимают подряд 14 шаров, причем цвет вынутого шара регистрируют, а затем шар возвращают в урну. Определить наивероятнейшее число появлений красного шара

◀ Здесь $n=14$, $p=\frac{10}{50}=\frac{1}{5}$, $q=1-p=\frac{4}{5}$. Используя двойное неравенство при указанных значениях n, p и q, получим $\frac{14}{5}-\frac{4}{5}\le k_0\le\frac{14}{5}+\frac{1}{5}$, т.е. $2\le k_0\le 3$. Таким образом, задача имеет два решения: $k_0^{'}=2$, $k_0^{''}=3$.

Задача 6.5. Сколько нужно посеять семян, всхожесть которых 70%, чтобы наивероятнейшее число невзошедших семян было равно 60?

◀ Имеет место схема Бернулли, т.к. проводятся испытания по посеву семян. В каждом испытании два исхода: зерно не взойдет и зерно прорастет. Вероятность события A (зерно не прорастет) в каждом испытании постоянна и равна $p=0{,}3$. Вероятность того, что зерно взойдет, равна $q=0{,}7$. Дано наивероятнейшее число появлений события A в n испытаниях: $k_0=60$. Нужно узнать число испытаний n. Воспользуемся формулой (19)

$$n\cdot 0{,}3-0{,}7\le 60\le n\cdot 0{,}3+0{,}3.$$

Отсюда:

$$\begin{cases}0{,}3n-0{,}7\le 60\\ 0{,}3n+0{,}3\ge 60\end{cases}\qquad \begin{cases}n\le\dfrac{60{,}7}{0{,}3}\\ n\ge\dfrac{59{,}7}{0{,}3}\end{cases}\qquad \begin{cases}n\le 202{,}3\\ n\ge 199.\end{cases}$$

Получим, что нужно посеять или 199, или 200, или 201, или 202 семени.

Задача 6.6. Среди семян пшеницы 0,6% сорняков. Какова вероятность при случайном отборе 1000 семян обнаружить ровно 6 семян сорняков?

◀ Производятся независимые испытания – отбор семян. В каждом испытании два исхода: появление семени сорняка (событие A) и появление семени. Вероятность события A в каждом испытании постоянна и равна 0,006. Условия схемы Бернулли выполняются: $p=0{,}006$, $q=0{,}994$, $n=1000$. Т.к. вероятность события близка к 0, число испытаний велико и $npq<10$, то для вычисления вероятности того, что при отборе 1000 семян обнаружится 6 семян сорняков, применим формулу Пуассона (20)

$$P_{1000}(6) \approx \frac{6^6}{6!} e^{-6} \approx 0{,}16 \cdot$$

Задача 6.7. Имеется 1000 клубней картофеля, из которых 400 - нового сорта. Случайным образом отбирается 100 клубней. Определить вероятность того, что в этой выборке окажется 37 клубней нового сорта.

◀ Производятся независимые испытания по отбору клубней картофеля. В каждом испытании может появиться или не появиться событие A = {клубень нового сорта}. Вероятность наступления события A в каждом испытании постоянна и равна $p = 0{,}4$. Имеет место схема Бернулли: т.к. число испытаний n достаточно велико и $npq = 24 \geq 20$, то для определения вероятности того, что из 100 отобранных клубней окажется 37 клубней нового сорта нужно воспользоваться локальной формулой Муавра-Лапласа (21). Произведем необходимые вычисления:

а) Запишем кратко условие задачи.

Дано: $n = 100$, $p = 0{,}4$, $q = 0{,}6$, $k = 37$. Определить $P_{100}(37)$.

б) Вычислим $\sqrt{npq} = \sqrt{100 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}6} = \sqrt{24} \approx 4{,}9$.

в) Определим $x = \dfrac{k - np}{\sqrt{npq}} = \dfrac{37 - 40}{4{,}9} = -0{,}612 \cdot$

г) По таблице значений функции $\varphi(x)$ и, используя свойство четности, имеем φ(-0,61) = φ(0,61) = 0,3312 Искомая вероятность $P_{100}(37) \approx \dfrac{0{,}3312}{4{,}9} \approx 0{,}068.$

Задача 6.8. В течение года град приносит значительный ущерб примерно одному хозяйству из 50. Определить вероятность того, что из 200 хозяйств, имеющихся в области, пострадает: 1) не более двух хозяйств; 2) не менее восьми хозяйств.

◀ Производится испытания по проверке о нанесении градом ущерба хозяйствам области. В каждом испытании может произойти или не произойти событие A= {пострадает от града одно хозяйство}. Вероятность события A в каждом испытании постоянна и равна $p = \dfrac{1}{50} = 0{,}02 \cdot$

Следовательно, имеем дело со схемой Бернулли.

1. а) Кратко запишем условие задачи.

Дано: $n = 200$, $p = 0{,}02$, $q = 0{,}98$, $k_1 = 0$, $k_2 = 2$.

Найти $P(0 \leq k \leq 2)$.

б) Вычислим $\sqrt{npq} = \sqrt{200 \cdot 0{,}02 \cdot 0{,}98} = \sqrt{3{,}92} \approx 2$.

в) Вычислим $x_2 = \dfrac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \dfrac{2 - 4}{2} = -1 \cdot$

г) Вычислим $x_1 = \dfrac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = \dfrac{0 - 4}{2} = -2 \cdot$

д) По таблице значений функции Лапласа в приложениях найдем $\Phi(2)\approx 0{,}4772$; $\Phi(1)\approx 0{,}3413$.

е) По интегральной формуле Муавра-Лапласа получаем

$$P(0\le k\le 2)\approx \Phi(-1)-\Phi(-2)=\Phi(2)-\Phi(1)\approx$$
$$\approx 0{,}4772-0{,}3413=0{,}1359.$$

2. Дано: $n=200$, $p=0{,}02$, $q=0{,}98$, $k_1=8$, $k_2=200$.

Найти $P(8\le k\le 200)$.

Проводя такую же последовательность, как и в пункте 1, получим

$x_2=98$; $x_1=2$; $\Phi(x_2)=\Phi(98)=0{,}5$; $\Phi(x_1)=\Phi(2)=0{,}4772$.

Отсюда: $P(8\le k\le 200)\approx 0{,}5-0{,}4772=0{,}0228$.

Задача 6.9. Вероятность того, что наугад взятое изделие окажется стандартным, равна 0,9. Какова вероятность того, что из 100 случайно отобранных изделий доля (относительная частота) стандартных отклонится от своей вероятности не более, чем на 0,05?

◀ Отбор ста изделий принимаем за проведение независимых повторных испытаний. Событие A= {изделие стандартное}. Вероятность этого события в каждом испытании постоянна и равна $p=0{,}9$, поэтому $q=1-p=0{,}1$. В условии известно отклонение относительной частоты от вероятности. Вероятность этого отклонения вычислим по формуле (23). Последовательность этапов решения:

а) Дано: $n=100$, $p=0{,}9$, $q=0{,}1$, $\varepsilon=0{,}05$.

Определить $P\left(\left|\dfrac{m}{100}-0{,}9\right|\le 0{,}05\right)$.

б) Вычислим аргумент функции Лапласа

$$x=\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}=0{,}05\sqrt{\frac{100}{0{,}9\cdot 0{,}1}}=0{,}05\cdot\frac{10}{0{,}3}=1{,}67\cdot$$

в) Найдем значение функции Лапласа по таблице в приложениях на вычисленное значение аргумента $\Phi(1{,}67)=0{,}4525$.

г) Искомая вероятность $P\left(\left|\dfrac{m}{100}-0{,}9\right|\le 0{,}05\right)=2\Phi(1{,}67)=0{,}9050\cdot$

Задача 6.10. Всхожесть семян пшеницы составляет 80%. Сколько нужно посеять семян, чтобы с вероятностью 0,997 можно было ожидать, что относительная частота взошедших семян отклонится по абсолютной величине от вероятности, с которой всходит каждое семя, не более, чем на 0,01?

◀ Вероятность, с которой всходит семя (событие A) постоянна и равна $p=0{,}8$. Известны: величина отклонения $\varepsilon=0{,}01$ и вероятность этого отклонения (близкая к единице). Нужно найти соответствующее последней вероятности количество семян n, подлежащих посеву.

а) Дано: $p=0{,}8$; $q=0{,}2$; $\varepsilon=0{,}01$; $P\left(\left|\frac{m}{n}-0{,}8\right|\le 0{,}01\right)=0{,}997$.

Найти n.

б) Задано, что $2\Phi(x)=0{,}997$, тогда $\Phi(x)=0{,}4985$. По таблице значений функции Лапласа найдем значение аргумента x на заданное значение функции: $x=2{,}96$.

в) Вычислим n, используя формулу $x=\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}$, откуда

$n=\frac{x^2pq}{\varepsilon^2}=\frac{2{,}96^2\cdot 0{,}8\cdot 0{,}2}{0{,}01^2}=14018{,}65$. Т.к. n должно быть целым числом, то принимаем $n=14019$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Всхожесть семян некоторого растения составляет 80%. Найти вероятность того, что из пяти посеянных семян взойдут: а) пять семян; б) не более одного (а) 0,3277; б) 0,0067).

2. Численность работников предприятия составляет 500 человек. Вероятность невыхода на работу из-за болезни равна 0,01 для каждого работника предприятия. Определить вероятность того, что в ближайший день не выйдет на работу хотя бы один из работников (0,993).

3. При социологических опросах граждан каждый человек, независимо от других, может дать неискренний ответ с вероятностью 0,2. Найти вероятность того, что из 1000 опросов число неискренних ответов будет не более 950 (0,1057).

4. В автопарке 70 машин. Вероятность поломки машины равна 0,2. Найти наивероятнейшее число исправных машин и вероятность этого числа (56; 0,119).

5. Сколько нужно взять деталей, чтобы наивероятнейшее число годных было равно 50, если вероятность того, что наудачу взятая деталь будет бракованной, равна 0,1? (55).

6. В инкубатор заложено 784 яйца. Вероятность того, что из яйца вылупится петушок, равна 0,5. Какова вероятность того, что из 784 яиц вылупится 400 петушков? (0,0242).

7. Вероятность оказаться стандартным для данного изделия 0,8. Найти вероятность того, что среди 900 изделий число стандартных будет находиться в границах от 690 до 740 (0,9463).

8. Производятся 400 независимых испытаний. Вероятности наступления события *A* в каждом испытании $P(A) = p = 0{,}2.$ Найти вероятность того, что в 400 испытаниях событие *A* наступит 100 раз (0,0021).

9. Всхожесть зерна равна 90%. Определить вероятность того, что для отобранных случайным образом 100 зерен относительная частота всхожести по абсолютной величине будет отличаться от вероятности взойти p не более, чем на 0,1 (0,999)

10. Проверяется всхожесть семян кукурузы. Сколько семян необходимо посеять с вероятностью всхожести 0,99, чтобы частота всхожести отличалась от 0,95 меньше, чем на 0,01? (3162)

Контрольная работа № 2

Задачи выполняются согласно учебному шифру студента, по аналогии с контрольной № 1

1. Вероятность того, что расход электроэнергии в продолжение одних суток не превысит установленной нормы, равна p=0,75. Найти вероятность того, что в ближайшие 6 суток расход электроэнергии в течение 4 суток не превысит нормы.

2. Всхожесть семян данного сорта растений оценивается с вероятностью, равной 0,8. Какова вероятность того, что из пяти посеянных семян взойдут не менее четырех.

3. В семье 5 детей. Найти вероятность того, что среди этих детей: а) два мальчика; б) не более двух мальчиков; в) более двух мальчиков; г) не менее двух и не более трех мальчиков. Вероятность рождения мальчика принять равной 0,51.

4. Монету подбрасывают 10 раз. Какова вероятность того, что герб выпадет (появится): а) 4 раза; б) ни разу; в) хотя бы один раз.

5. Вероятность малому предприятию быть банкротом за время t равна 0,2. Найти вероятность того, что из шести малых предприятий за время t сохранятся: а) два; б) более двух.

6. Производится залп из шести орудий по некоторому объекту. Вероятность попадания в объект из каждого орудия равна 0,6. Найти вероятность ликвидации объекта, если для этого необходимо не менее четырех попаданий.

7. По мишени, состоящей из внутреннего круга и двух концентрических колец, производится десять выстрелов из спортивного пистолета. Вероятности попадания в указанные области при каждом выстреле равны соответственно 0,15; 0,22 и 0,13. Определить вероятность

того, что при этом будет шесть попаданий в круг, три – в первое кольцо и одно попадание во второе кольцо.

8. В электропоезд, состоящий из шести вагонов, садится двенадцать человек, причем выбор каждым пассажиром вагона равновозможен. Определить вероятность того, что: а) в каждый вагон вошло по два человека; б) в один вагон никто не вошел, в другой – вошел один человек, в два вагона – по два человека, а в оставшиеся два вагона соответственно три и четыре человека.

9. Вероятность банкротства одной из 6 фирм к концу года равна 0,3. Какова вероятность того, что к концу года обанкротится не более двух фирм?

10. В среднем 20% акций на аукционе продается по первоначально заявленной стоимости. Найти вероятность того, что из 10 пакетов акций в результате торгов будут проданы не менее двух пакетов акций.

11. Среди изделий, подвергавшихся термической обработке, в среднем 80% высшего сорта. Найти вероятность того, что среди пяти изделий не более четырех высшего сорта.

12. Вероятность попадания в цель равна 0,5. Сбрасывают по одной из 5 бомб. Определить вероятность того, что будет не менее одного попадания в цель.

13. В среднем пятая часть поступающих в продажу автомобилей некомплектны. Найти вероятность того, что среди 10 автомобилей имеют некомплектность менее трех.

14. По каналу связи передаются 7 сообщений, каждое из которых, независимо от других, может быть искажено с вероятностью 0,15. Найти вероятность того, что будет правильно принято не менее двух сообщений.

15. Вероятность взятия вратарем одиннадцатиметрового штрафного удара равна 0,25. Найти вероятность того, что из 5 штрафных ударов вратарь возьмет: а) ровно 3; б) хотя бы 1; в) не менее 4-х.

16. Устройство состоит из 5-ти независимо работающих элементов. Вероятность отказа каждого элемента в одном опыте равна 0,1. Найти вероятность того, что число отказавших элементов в течении опыта составит не более 2-х.

17. Для студенческих общежитий приобретено 5 телевизоров. Для каждого из них вероятность выхода из строя в течение гарантийного времени, равна 0,2. Найти вероятность того, что за время гарантийного срока не менее 4-х телевизоров будут работать исправно.

18. Для прядения смешаны поровну белый и окрашенный хлопок. Случайно отбираются 5 волокон. Найти вероятность того, что обнаружится: а) хотя бы одно; б) не менее 2-х; в) ровно одно окрашенных волокон.

19. Рабочий обслуживает 12 однотипных станков. Вероятность того, что станок потребует к себе внимания рабочего в течение промежутка T, равна $\frac{1}{3}$.

Найти вероятность того, что во время работы число, потребовавших внимание рабочего, составит: а) ровно 4; б) хотя бы один; в) не более 3-х.

20. Склады семенного картофеля перед посадкой проверяют на отсутствие очагов гниения. В проверенном складе оказалось 20% клубней с пятнами. Найти вероятность того, что число клубней без пятен из 9 отобранных случайным образом, составит: а) не менее 3-х; б) ровно 5; в) ни одного.

21. Вероятность выпуска бракованного изделия равна 0.4. Найдите вероятность того, что среди 104 выпущенных изделий ровно 62 изделий без брака.

22. При данном технологическом процессе в среднем 98% изделий не имеет дефектов. Определить вероятность того, что среди 10000 выбранных наугад и проверенных изделий дефектными окажутся 207 изделий.

23. Известно, что в среднем 60% всего числа изготовляемых заводом телефонных аппаратов является продукцией первого сорта. Чему равна вероятность того, что в изготовленной партии окажется 120 аппаратов первого сорта, если партия содержит 200 аппаратов?

24. Птицефабрика поставляет в магазин 90% яиц первой категории. Найти вероятность того, что в партии из 10000 яиц число яиц первой категории будет ровно 9800 штук.

25. Вероятность того, что среднегодовой удой молока от одной коровы превзойдет 2500 кг, равна 0,6. Какова вероятность того, что 350 из 600 коров фермы дадут за год более, чем по 2500 кг молока?

26. Известно, что на поле у 2% кустов картофеля стебли поражены фитофторой. Найти вероятность того, что из 300 кустов картофеля этого поля фитофторой будут поражены не более 4 кустов.

27. При эпидемии гриппа 40% населения заражены вирусом. В лаборатории числятся 34 сотрудника. Какова вероятность того, что 10 из них будут носителями вируса?

28. В результате проверки качества приготовленного для посева зерна было установлено, что 80% всхожи. Определить вероятность того, что из отобранных и высаженных 1200 зерен прорастет 1000 штук.

29. Найти вероятность одновременного останова 30 машин из 100 работающих, если вероятность останова для каждой машины равна 0,2.

30. Производятся испытания новой марки цемента. Вероятность появления образца с заданной прочностью при каждом испытании равна

0,9. Определить вероятность того, что из 400 испытываемых образцов будут иметь заданную прочность ровно 360.

31. Вероятность появления успеха в каждом испытании равна 0,25. Произведено 300 испытаний. Определить вероятность того, что успех наступит ровно 90 раз.

32. В автобусном парке 100 автобусов. Вероятность выхода из строя мотора в течение дня равна 0,1. Определить вероятность того, что в течение дня окажутся неисправными моторы у 12 автобусов.

33. Вероятность поражения мишени при одном выстреле равна 0,8. Производится 100 выстрелов. Определить вероятность того, что мишень будет поражена ровно 75 раз.

34. Вероятность выпуска нестандартной электролампы равна 0,1. Отбирается партия из 2000 ламп. Определить вероятность того, что в этой партии окажется стандартных 1810 штук.

35. Вероятность того, что абонент правильно наберет телефонный номер, принимается равной 0,98. Найти вероятность того, что среди 500 вызовов правильно набранных номеров окажется ровно 495.

36. При социологических опросах граждан каждый человек, независимо от других, может дать неискренний ответ с вероятностью 0,2. Найти вероятность того, что из 1000 опросов число искренних ответов будет ровно 850.

37. Численность работников предприятия составляет 350 человек. Вероятность невыхода на работу из-за болезни равна 0,12 для каждого работника предприятия. Определить вероятность того, что в ближайший день не выйдет на работу хотя бы один из работников.

38. Найти вероятность того, что из 700 посеянных семян не взойдет 150, если всхожесть семян оценивается вероятностью 0,75.

39. Вероятность того, что саженец ели прижился и будет успешно расти, равна 0,85. Посажено 300 елочных саженцев. Какова вероятность того, что нормально вырастут 250 деревьев?

40. В инкубатор заложено 840 яиц. Вероятность того, что из яйца вылупится петушок, равна 0,55. Какова вероятность того, что из 780 яиц вылупится 420 петушков?

41. Определить наиболее вероятное число пораженных самолетов в группе из 13 бомбардировщиков, если самолеты поражаются независимо друг от друга и вероятность поражения одного самолета равна $\frac{4}{7}$.

42. В урне 100 белых и 80 синих шаров. Из урны извлекают n шаров (с возвратом каждого вынутого шара). Наивероятнейшее число появлений белого шара равно 11. Найти n.

43. Сколько следует провести повторных независимых испытаний, чтобы наивероятнейшее число появлений некоторого события оказалось равным 51, если вероятность появления этого события в отдельном испытании $p = 0{,}64$?

44. Число коротких волокон в партии хлопка составляет 25 % всего количества волокон. Сколько волокон должно быть в отдельно взятом пучке, если наивероятнейшее число коротких волокон в нем равно 114?

45. Каждая из 6 палок разламывается на две части – длинную и короткую. Затем 12 полученных обломков n раз объединяются в 6 пар, каждая из которых образует новую палку. Чему равно n, если наивероятнейшее число объединений обломков в первоначальном порядке равно 6?

46. Было посажено 28 семян ячменя с одной и той же вероятностью всхожести для каждого. Как велика эта вероятность, сели наиболее вероятные числа положительных результатов 17 и 18?

47. На станке-автомате изготовили 90 деталей. Чему равна вероятность изготовления на этом станке детали первого сорта, если наивероятнейшее число таких деталей в данной партии равно 82?

48. Сколько нужно взять деталей, чтобы наивероятнейшее число годных деталей было равно 50, если вероятность того, что наудачу взятая деталь будет бракованной, равна 0,1?

49. В автопарке 60 машин. Вероятность поломки машины равна 0,15. Найти наивероятнейшее число исправных машин и вероятность этого числа.

50. Известно, что при посадке в среднем четвертая часть саженцев погибает. Найти наивероятнейшее число прижившихся саженцев среди 80 пересаженных и вычислить соответствующую этому событию вероятность.

51. Вероятность того, что автомат при опускании одной монеты правильно сработает, равна 0,98. Найти наиболее вероятное число случаев неправильной работы автомата и вероятность этого числа случаев, если будет опущено 1200 монет.

52. Тигры-альбиносы встречаются в природе с вероятностью 0,02. Каково наиболее вероятное число альбиносов среди 200 тигров, живущих в Уссурийской тайге? Найти вероятность этого числа.

53. Вероятность того, что пассажир опоздает к отправлению поезда, равна 0,01. Найти наиболее вероятное число опоздавших из 800 пассажиров и вероятность такого числа опоздавших.

54. Испытывается некоторое устройство из n элементов. Вероятность того, что элемент выдержит испытание равна 0,85. Из скольких элементов

состоит устройство, если наивероятнейшее число элементов, которые выдержат испытание равно 14?

55. Вероятность попадания стрелком в мишень равна 0,7. Сделано 30 выстрелов. Определить наивероятнейшее число попаданий в цель и его вероятность.

56. При автоматической наводке орудия вероятность попадания по быстро вращающейся цели равна 0,9. Найти наивероятнейшее число попаданий в цель и его вероятность.

57. Произведено 46 бросков игральной кости. Каково наивероятнейшее число выпаданий шестерки?

58. Чему равна вероятность p наступления события в каждом из 39 независимых испытаний, если наивероятнейшее число наступлений события в этих испытаниях равно 25?

59. Товаровед осматривает 24 образца товаров. Вероятность того, что каждый из образцов будет признан годным к продаже, равна 0,6. Найти наивероятнейшее число образцов, которые товаровед признает годными к продаже и вероятность этого числа.

60. Чему равна вероятность p наступления события в каждом из 49 независимых испытаний, если наивероятнейшее число наступлений события в этих испытаниях равно 30?

61. При данном технологическом процессе в среднем 98% изделий не имеет дефектов. Определить вероятность того, что среди 10000 выбранных наугад и проверенных изделий дефектными окажутся 207 изделий.

62. В банк отправлено 4000 пакетов денежных знаков. Вероятность того, что пакет содержит недостаточное или избыточное число денежных знаков равна 0,0001. Найти вероятность того, что при проверке будет обнаружено три ошибочно укомплектованных пакета.

63. В пчелиной семье 5000 пчел. Вероятность заболевания в течение дня равна 0,001 для каждой пчелы. Найти вероятность того, что в течение дня заболеет хотя бы одна пчела.

64. В банк прибыло 1000 стодолларовых купюр. Какова вероятность того, что среди них окажется 5 фальшивых купюр, если 0,1% купюр фальшивые?

65. Доля зараженности зерна в скрытой форме составляет 0,01. найти вероятность того, что в выборе из 100 зерен окажется ровно три зараженных зерна.

66. Вероятность того, что абонент правильно наберет телефонный номер, принимается равной 0,998. Найти вероятность того, что среди 500 вызовов окажется менее двух ошибочных.

67. Вероятность обрыва нити в течение минуты на каждом веретене прядильного станка равно 0,001. Найти вероятность того, что на 100 веретенах нить оборвется хотя бы один раз.

68. Завод отправил на базу 500 изделий. Вероятность повреждения изделия в пути равна 0,002. Найти вероятность того, что в пути повредится менее трех изделий.

69. На основании статистических данных установлена вероятность того, что пятилетний ребенок перенесет заболевание А, равная 0,001. В детской поликлинике зарегистрировано 400 детей. Опеделить вероятность того, что перенесут заболевание А менее 4-х детей.

70. После радиоактивного облучения выживает 0,04% бактерий. Облучается 5000 бактерий. Опеделить вероятность того, что выживет не более одной бактерии.

71. Вероятность попадания в быстро движущуюся мишень, если произведен один выстрел, равна – 0,001. Какова вероятность того, что будет два попадания, если по мишени будет сделано 5000 выстрелов.

72. Вероятность малому предприятию быть банкротом за время t равна 0,08. Найти вероятность того, что из 100 малых предприятий сохранится не более трех.

73. Семена пшеницы содержат 0,2 % сорняков. Найти вероятность того, что в 1000 семян будет менее трех семян сорняков.

74. Учебник издан тиражом 10 000 экземпляров. Учебник издан тиражом 10000 экземпляров. Вероятность того, что экземпляр учебника сброшюрован неверно, равна 0,0001. Найти вероятность того, что тираж содержит менее двух бракованных книг.

75. Прядильщица обслуживает 800 веретен. Вероятность обрыва нити в течение часа равна 0,005. Какова вероятность того, что в течение часа нитка оборвется не больше, чем на 3-х веретенах?

76. Некачественные сверла составляют 2% всей продукции фабрики. Изготовленные сверла упаковываются в ящики по 100 штук. Какова вероятность того, что в ящике окажется не более трех некачественных сверл.

77. Среди семян ржи имеется 0,4% семян сорняков. Какова вероятность при случайном отборе 5000 семян обнаружить менее 5 сорняков?

78. Производство дает 1% брака. На исследование берутся 1100 изделий. Какова вероятность того, что среди них будет выбраковано ровно 16?

79. Какова вероятность того, что среди 500 наугад выбранных лиц ни один не родился 17 сентября?

80. Известно, что на поле у 2% кустов картофеля стебли поражены фитофторой. Найти вероятность того, что из 300 кустов картофеля этого поля фитофторой будут поражены не более, чем у 4 кустов.

81. При данном технологическом процессе в среднем 96% изделий не имеет дефектов. Определить вероятность того, что среди 10 000 выбранных наугад и проверенных изделий, без дефектов окажутся от 8900 до 9200 изделий.

82. Установлено, что предприятие бытового обслуживания выполняет в срок в среднем на 60% заказов. Какова вероятность того, что из 150 заказов, принятых в течение некоторого времени, будут выполнены в срок от 93 до 107 заказов?

83. Птицефабрика поставляет в магазин 90% яиц первой категории. Найти вероятность того, что в партии из 10 тыс. яиц не менее 4 тыс. будет первой категории.

84. Вероятность того, что среднегодовой удой молока от одной коровы превзойдет 2500 кг, составляет 0,6. Какова вероятность того, что из 600 коров, отобранных случайным образом, не менее 150 и не более 500 из них дадут более 2500 кг молока в год?

85. Электронная система состоит из 30 блоков, каждый из которых может отказать в течение года с вероятностью 0,15. Найти вероятность того, что не менее 20 и не более 25 откажут в работе в течение года.

86. В результате проверки качества приготовленного для посева зерна было установлено, что 80% всхожи. Определить вероятность того, что из отобранных и высаженных ста зерен прорастет не менее 70 штук.

87. Аудиторную работу по теории вероятностей с первого раза успешно выполняют 50 % студентов. Найти вероятность того, что из 400 студентов работу успешно выполнят от 180 до 230 студентов.

88. При обследовании уставных фондов банков установлено, что пятая часть банков имеют уставной фонд свыше 100 млн. руб. Найти вероятность того, что среди 1800 банков имеют уставный фонд свыше 100 млн. руб. от 300 до 400 банков включительно.

89. Вероятность появления событий в каждом из 10000 независимых испытаний постоянна и равна 0,8. Найти вероятность того, что события произойдет не более 7400 раз.

90. Фабрика выпускает 70 % изделий высшего сорта. Найти вероятность того, что в партии из 1000 изделий число первосортных заключено между 652 и 760.

91. Вероятность того, что бревно, привезенное на лесопилку, стандартно, равна 0,8. Найти вероятность того, что из 100 бревен не менее 75 и не более 90 – стандартные.

92. Вероятность того, что шестерня механических часов имеет заусеницы, равна 0,3. Найти вероятность того, что из 2100 шестерен, поступивших на сборку, не более 1470 имеют заусеницы.

93. 10 000 шариков произвольно распределяются по девяти ящикам. Какова вероятность того, что в первом ящике не менее 1100 и не более 1200 шариков?

94. Игральную кость бросают 12 000 раз. Какова вероятность того, что шестерка появится не менее 900 и не более 2100 раз?

95. Вероятность рождения мальчика равна 0,515. Какова вероятность того, что среди тысячи новорожденных не менее 470 и не более 540 мальчиков?

96. Вероятность появления события в каждом из 100 независимых испытаний постоянна и равна 0,8. Найти вероятность того, что событие появится не менее 75 и не более 90 раз.

97. Монета брошена 2500 раз. Найти вероятность того, что герб выпадет от 1800 до 2000 раз.

98. Из 100 вагонов зерна 96 содержат зерно необходимого качества. Найти вероятность того, что из 2000 вагонов, отправленных за месяц, окажутся от 1600 до 1800 вагонов с доброкачественным товаром.

99. Производятся испытания новой марки цемента. Вероятность появления образца с заданной прочностью при каждом испытании равна 0,9. Найти вероятность того, что из 400 испытываемых образцов будут иметь заданную прочность от 320 до 360.

100. В результате проверки качества приготовленного для посева зерна было установлено, что 90% зерен всхожи. Найти вероятность того, что в выборке из 1000 зерен прорастет от 880 до 920 зерен.

101. Сколько раз надо бросить монету, чтобы с вероятностью p = 0,9544 утверждать, что относительная частота выпадения герба отклонилась от 0,5 не более, чем на 0,05?

102. Вероятность появления события в каждом из 900 независимых испытаний равна 0,5. Найти вероятность того, что относительная частота появления события отклонится от его вероятности по абсолютной величине не более, чем на 0,02.

103. Отдел контроля проверяет на стандартность 900 деталей. Вероятность того, что деталь стандартна, равна 0,9. С вероятностью 0,9544 найти границы, в которых будет заключено число стандартных деталей.

104. Вероятность того, что рабочий стаж трактористов совхозов некоторой области более 15 лет, равна 0,4. Сколько трактористов надо опросить, чтобы с вероятностью 0,9 можно было бы ожидать, что

относительная частота трактористов со стажем более 15 лет не превзойдет вероятность этого события более, чем на 0,04?

105. Вероятность заражения поля сорняками равна 0,5. С вероятностью 0,9836 какое можно ожидать отклонение относительной частоты зараженных полей от вероятности появления зараженного поля среди 160 обследуемых?

106. Французский ученый Бюффон (XVIII в.) бросил монету 4040 раз, причем «герб» появился 2048 раз. Найти вероятность того, что при повторении опыта Бюффона относительная частота появления «герба» по абсолютной величине не более, чем в опыте Бюффона.

107. Сколько раз нужно бросить игральную кость, чтобы вероятность неравенства $\left|\frac{m}{n}-\frac{1}{6}\right| \le 0{,}01$ была не меньше, чем вероятность противоположного неравенства, где m – число появлений одного очка в n бросаниях игральной кости?

108. Сколько раз надо бросить монету, чтобы с вероятностью 0,6 можно было ожидать, что отклонение относительной частоты появлений «решки» от вероятности $p = 0{,}5$ окажется по абсолютной величине не более 0,01?

109. Вероятность появления события в каждом из независимых испытаний равна 0,2. Найти наименьшее число испытаний n, при котором с вероятностью 0,99 можно ожидать, что относительная частота появления события отклонится от его вероятности по абсолютной величине не более чем на 0,04.

110. Вероятность появления события в каждом из 400 независимых испытаний равна 0,8. Найти такое положительное число ε, чтобы с вероятностью 0,99 абсолютная величина отклонения относительной частоты появления события от его вероятности 0,8 не превысила ε.

111. Вероятность появления события в каждом из 900 независимых испытаний равна 0,5. Найти такое положительное число ε, чтобы с вероятностью 0,77 абсолютная величина отклонения относительной частоты появления события от его вероятности 0,5 не превысила ε.

112. Отдел технического контроля проверяет на стандартность 920 деталей. Вероятность того, что деталь стандартна, равна 0,93. С вероятностью 0,95 найти границы, в которых будет заключено число m стандартных деталей среди проверенных.

113. Вероятность появления события в каждом из 10 000 независимых испытаний равна 0,75. Найти такое положительное число ε, чтобы с вероятностью 0,98 абсолютная величина отклонения относительной частоты появления события от его вероятности 0,75 не превысила ε.

114. Игральную кость бросают 80 раз. Найти с вероятностью 0,99 границы, в которых будет заключено число m выпадений шестерки.

115. Отдел технического контроля проверяет 475 изделий на брак. Вероятность того, что изделие бракованное, равна 0,05. Найти с вероятностью 0,95 границы, в которых будет заключено число m бракованных изделий среди проверенных.

116. Вероятность появления события в каждом из независимом испытании равна 0,2. Найти, какое отклонение относительной частоты появления события от его вероятности может произойти с вероятностью 0,9128 при 5-ти тысячах повторений независимых испытаний.

117. В автопарке имеется 400 автомобилей. Вероятность безотказной работы каждого из них равна 0,9. С вероятностью 0,95 определить границы, в которых будет находиться доля безотказно работавших машин в определенный момент времени.

118. Известно, что 10% делянок под овощами плохо обработаны. Сколько нужно проверить делянок, чтобы с вероятностью 0,9973 можно было утверждать, что относительная частота засоренных делянок будет отличаться от вероятности засоренности по модулю не более, чем на 0,01?

119. Проверяется всхожесть кукурузы. Сколько семян необходимо посеять с вероятностью 0,98, чтобы частота всхожести отличалась от 0,95 меньше, чем на 0,01?

120. Для определения степени поражения винограда вредителями было обследовано 400 кустов. Вероятность поражения куста виноградника равна 0,03. Определить границы, в которых с вероятностью 0,9545 будет заключено число кустов, не пораженных вредителями.

VII. Дискретные случайные величины

Теоретическая справка [4], [13], [14]

Случайной величиной называется величина, которая в результате опыта принимает то или иное числовое значение, причем заранее, до опыта, неизвестно, какое именно. Случайные величины обозначаются заглавными буквами латинского алфавита – X, Y, Z, …, а принимаемые ими значения - соответствующими малыми буквами $x_1, x_2, \dots, y_1, y_2, y_3, \dots$.

Дискретная случайная величина (ДСВ) – величина, принимающая конечное или счетное множество значений.

Закон распределения ДСВ - соотношение, устанавливающее связь между возможными значениями случайной величины и соответствующими им вероятностями. Простейшей формой задания закона распределения дискретной случайной величины *X* является таблица, в которой в порядке возрастания перечислены все возможные значения случайной величины и соответствующие их вероятности, т.е.

x_i	x_1	x_2	x_3	$\cdots$	x_n
p_i	p_1	p_2	p_3	$\cdots$	p_n

, (25)

где $$p_i = P(X = x_i)\,; \ \sum_i p_i = 1. \qquad (26)$$

Такая таблица называется *рядом распределения* дискретной случайной величины *X*. Графическое изображение ряда распределения (см. рис. 1) называется *многоугольником* (или *полигоном*) *распределения.*

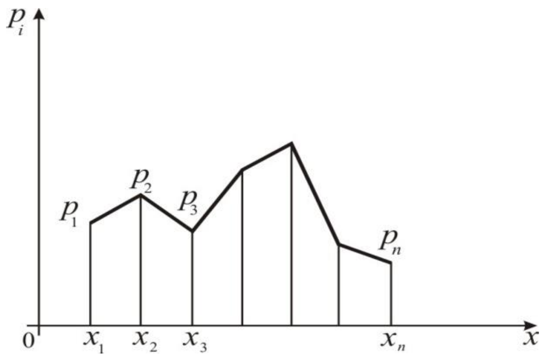


Рисунок 1 – Многоугольник распределения ДСВ

Функцией распределения (или *интегральной функцией распределения)* случайной величины *X* называется функция $F(x)$, которая для любого числа $x \in R$ равна вероятности события, состоящего в том, что случайная величина X примет значение, меньшее, чем x, т. е.

$$F(x) = P(X < x). \tag{27}$$

Функция распределения *дискретной* случайной величины имеет вид

$$F(x) = \sum_{x_i < x} P(X = x_i), \tag{28}$$

где суммирование ведется по всем индексам i, для которых $x_i < x$. Для дискретной случайной величины функция распределения есть *разрывная ступенчатая функция, непрерывная слева* (рис. 2).

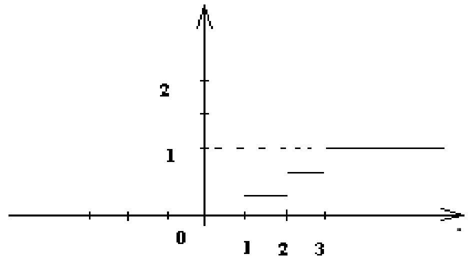


Рисунок 2 – График функции распределения дискретной случайной величины

Функция распределения обладает следующими *свойствами*:

1. $0 \le F(x) \le 1$;
2. $F(x)$ - неубывающая функция, т. е. $F(x_2) \ge F(x_1)$, если $x_2 > x_1$;
3. $F(-\infty) = 0$, $F(+\infty) = 1$;
4. $F(x)$ - непрерывна слева в любой точке x, т. е. $F(x-0) = F(x)$, $x \in R$;
5. $P(a \le X < b) = F(b) - F(a)$.

Числовые характеристики дискретной случайной величины

Математическое ожидание ДСВ - сумма произведений всех ее возможных значений на их вероятности

$$M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i = x_1p_1 + x_2p_2 + \ldots + x_np_n. \tag{29}$$

Математическое ожидание приближенно равно (тем точнее, чем больше число испытаний) среднему арифметическому наблюдаемых значений случайной величины

$$\overline{X} \approx M(X). \tag{30}$$

Свойства математического ожидания

1. $M(C) = C$, C - const; 2. $M(CX) = C \cdot M(X)$;

3. $M(X \cdot Y) = M(X) \cdot M(Y)$; 4. $M(X \pm Y) = M(X) \pm M(Y)$.

Дисперсия (рассеяние) ДСВ - математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания

$$D(X) = M\,[(x - M(X))^2] = \sum_i (x_i - M(X))^2 p_i = M\left(X^2\right) - M^2(X). \quad (31)$$

Свойства дисперсии

1. $D(C) = 0$; 2. $D(CX) = C^2 \cdot D(X)$; 3. $D(X \pm Y) = D(X) + D(Y)$.

Среднее квадратическое отклонение - квадратный корень из дисперсии

$$\sigma(x) = \sqrt{D(x)}. \quad (32)$$

Размерность $\sigma(X)$ совпадает с размерностью X.

Свойство среднего квадратического отклонения

$$\sigma(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = \sqrt{\sigma^2(X_1) + \sigma^2(X_2) + \cdots + \sigma^2(X_n)}.$$

Законы распределения дискретной случайной величины

Биномиальное распределение

Пусть проводится серия из n независимых испытаний, в каждом из которых событие A может появиться с одинаковой вероятностью p и не появиться с вероятностью q. Случайная величина X есть число появлений события A в этой серии испытаний. Вероятность того, что событие X наступит k раз в n испытаниях определяется *формулой Бернулли*:

$$P_n(k) = C_n^k p^n q^{n-k}.$$

Числовые характеристики биномиального распределения находятся по формулам

$$M(X) = np,\ D(X) = npq. \quad (33)$$

Геометрическое распределение

Пусть производятся независимые испытания, в каждом из которых событие A наступает с вероятностью p и не наступает с вероятностью q

$(p+q=1)$. Испытания заканчиваются, как только появится событие *A*. Случайная величина *X* есть число испытаний, проведенных до первого появления события *A*. Вероятность того, что *X* примет значение *k* вычисляется по формуле

$$P(X=k)=q^{k-1}\cdot p. \tag{34}$$

Вероятность появления события *A не менее, чем в k опытах* представляет собой геометрическую прогрессию. Для достаточно большого количества опытов ее можно считать бесконечно убывающей, тогда должно выполняться

$$\sum_1^{\infty} pq^{k-1}=\frac{p}{1-q}=1. \tag{35}$$

Легко показать, что

$$M(X)=\frac{q}{p} \text{ и } D(X)=\frac{q}{p^2}. \tag{36}$$

Гипергеометрическое распределение

Пусть имеем *N* изделий, из которых *M* обладают некоторым свойством. Наугад извлекают *n* изделий. Случайная величина *X* есть число изделий в выборке, обладающих данным свойством. Вероятность того, что *X* примет значение *k*, вычисляется по формуле

$$P(X=k)=\frac{C_M^k\cdot C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}. \tag{37}$$

Числовые характеристики гипергеометрического распределения находятся по формулам

$$M(X)=\frac{Mn}{N},\ D(X)=\frac{Mn(N-n)(N-M)}{N^2(N-1)}. \tag{38}$$

Распределение Пуассона

Пусть проводится серия из *n* независимых испытаний (*n* – достаточно велико), в каждом из которых вероятность появления события *A* постоянная и равна *p* (*p* достаточно мала). Дискретная случайная величина *X* - число появлений события *A* в этой серии испытаний, которая принимает целые неотрицательные значения $0,1,2,3,\ldots n$, где $n\to\infty$. Вероятность того, что *X* примет значение *k*, вычисляется по *формуле Пуассона* (20)

$$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda},$$

где величина $\lambda = np$ ограничена. Числовые характеристики распределения Пуассона определяются по формуле

$$M(X) = D(X) = \lambda. \tag{39}$$

Простейший поток событий

Потоком событий называют последовательность событий, которые наступают в случайные моменты времени, например, поступление сигналов вызова на автоматическую телефонную станцию. *Простейшим* (*пуассоновским*) *потоком* называют поток событий, обладающий тремя свойствами: стационарности, «отсутствия последействия» и ординарности. Поток называется *стационарным*, если вероятность появления k событий за интервал времени t есть функция только k и t и не зависит от начала отсчета времени. Свойство «*отсутствие последействия»* состоит в том, вероятность появления k событий в любом промежутке времени не зависит от того, появлялись или не появлялись события в момент времени, предшествующий началу рассматриваемого промежутка. Если вероятность появления более одного события за малый промежуток времени значительно меньше вероятности появления только одного события, то поток обладает свойством *ординарности*. *Интенсивностью потока* λ называется среднее число событий, которые появляются в единицу времени, где λ - параметр распределения Пуассона. Если $\lambda = const$, то вероятность появления k событий за время t будет определяться по формуле Пуассона

$$P_t(k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}. \tag{40}$$

Решение типовых задач

Задача 7.1. Дискретная случайная величина задана рядом распределения

x_i	2	5	8
p_i	p_1	0,2	0,5

Найти: значение вероятности p_1; числовые характеристики $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$; функцию распределения $F(x)$ и построить ее график.

◀ Так как $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$, то $p_1 + 0{,}2 + 0{,}5 = 1$, $\Rightarrow$ $p_1 = 0{,}3$.

Найдем математическое ожидание

$$M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i = 2 \cdot 0{,}3 + 5 \cdot 0{,}2 + 8 \cdot 0{,}5 = 5{,}6.$$

Далее определим дисперсию

$$D(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i - M^2(X) = 4 \cdot 0{,}3 + 25 \cdot 0{,}2 + 64 \cdot 0{,}5 - 5{,}6^2 = 6{,}8.$$

Найдем среднее квадратическое отклонение $\sigma(X) = \sqrt{D(X)} \cong 2{,}6.$.
Для функции распределения $F(x)$, определения, имеем

$F(x) = 0$, если $x \le 2$;
$F(x) = 0{,}3$, если $2 < x \le 5$;
$F(x) = 0{,}5$, если $5 < x \le 8$;
$F(x) = 1$, если $x > 8$.

Строим функцию распределения (рис.).

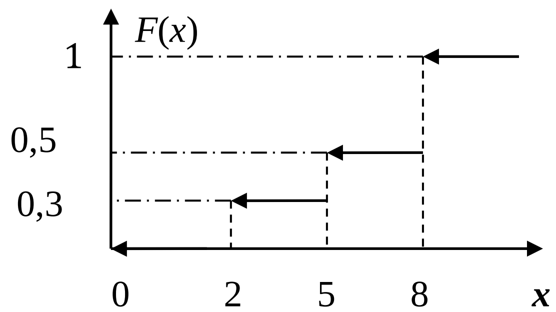


Рисунок к задаче 7.1 – График функции распределения

Задача 7.2. Производится 4 независимых испытания, в каждом из которых событие A появляется с вероятностью p = 3/4. Рассматривается случайная величина X - число появлений события A в серии из четырех испытаний. Составить закон распределения вероятностей случайной величины X и построить многоугольник распределения, найти функцию распределения вероятностей $F(x)$ и построить её.

◀ Дискретная случайная величина X может принимать значения: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$, $x_4 = 3$, $x_5 = 4$. Так как испытания независимы одно от другого и вероятности появления события A в каждом испытании одинаковы, то случайная величина X имеет биномиальное распределение. По условию имеем $n = 4$, $p = 3/4$, $q = 1 - p = 0{,}6$. Вероятности вычисляются по формуле Бернулли:

$$P_4(X=k)=C_4^k p^k q^{4-k}, \quad k=1,2,3,4.$$

$$P(X=0)=(1/4)^4=\frac{1}{256}, \quad P(X=1)=4(3/4)(1/4)^3=\frac{12}{4^4}=\frac{12}{256},$$

$$P(X=2)=6(3/4)^2(1/4)^2=\frac{54}{4^4}=\frac{54}{256},$$

$$P(X=3)=4(3/4)^3(1/4)=\frac{108}{4^4}=\frac{108}{256}, \quad P(X=5)=(3/4)^4=\frac{81}{4^5}=\frac{81}{256},$$

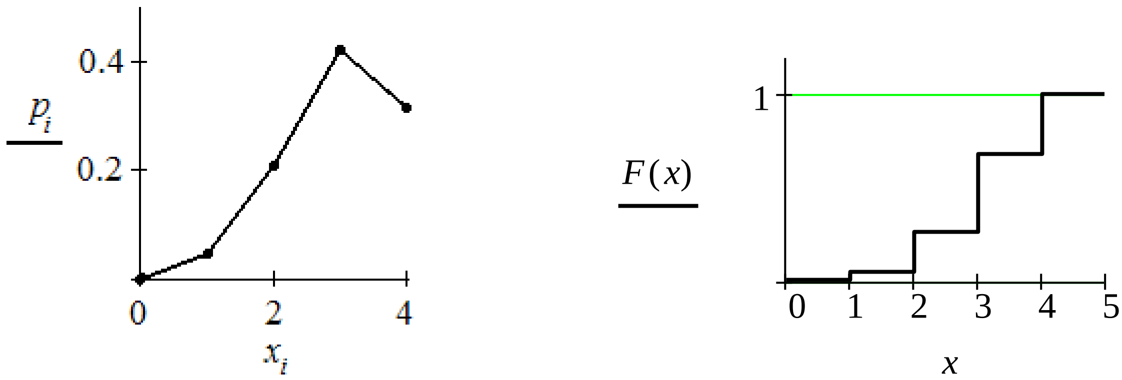
которым соответствует ряд распределения:

x_i	0	1	2	3	4
p_i	$\frac{1}{256}$	$\frac{12}{256}$	$\frac{54}{256}$	$\frac{108}{256}$	$\frac{81}{256}$

Правильность составленного закона распределения проверяем по формуле (26)

$$\sum_i p_i=\frac{1}{256}+\frac{12}{256}+\frac{54}{256}+\frac{108}{256}+\frac{81}{256}=1.$$

График, построенный по этой таблице, т.е. *многоугольник распределения* представлен на рисунке а) к задаче.



а) б)

Рисунок к задаче 7.2 – а) многоугольник распределения;
б) график функции распределения

Построим функцию распределения $F(x)$ случайной величины X:

при $x \le 0$ имеем $F(x)=0$,

при $0<x\le 1$ имеем $F(x)=1/256$,

при $1<x\le 2$ имеем $F(x)=1/256+12/256=13/256$,

при $2<x\le 3$ имеем $F(x)=13/256+54/256=67/256$,

при $3<x\le 4$ имеем $F(x)=67/256+108/256=175/256$,

при $x>4$ имеем $F(x)=175/256+81/256=1$.

График функции распределения $F(x)$ представлен на рисунке б).

Задача 7.3. Банк выдает 5 кредитов. Вероятность невозврата кредита равна 0,2 для каждого из заемщиков. Составьте таблицу биноминального распределения количества заемщиков, не вернувших кредит. Постройте многоугольник распределения. Найдите числовые характеристики распределения. Чему равна вероятность того, что не вернут кредит не более двух заемщиков?

◀ Примем за A событие невозврата кредита. Так как заемщики действуют независимо, то выдачу 5 кредитов можно считать за 5 независимых испытаний. Вероятность невозврата m кредитов из 5 описывается биноминальным распределением, где p = 0,2, n = 5, $q = 1 - p = 0{,}8$, k = 0, 1, 2, 3, 4, 5. Вычислим искомые вероятности:

$$P_5(k=0) = P_5(0) = q^5 = 0{,}8^5 = 0{,}32768;$$

$$P_5(1) = \frac{5!}{1!\cdot(5-1)!}\cdot 0{,}2\cdot 0{,}8^{5-1} = 5\cdot 0{,}2\cdot 0{,}8^4 = 0{,}8^4 = 0{,}4096;$$

$$P_5(2) = \frac{5!}{2!\cdot(5-2)!}\cdot 0{,}2^2\cdot 0{,}8^3 = \frac{3!\cdot 4\cdot 5}{2\cdot 3!}\cdot 0{,}2^2\cdot 0{,}8^3 = 10\cdot 0{,}04\cdot 0{,}8^3 = 0{,}2048;$$

$$P_5(3) = \frac{5!}{3!\cdot(5-3)!}\cdot 0{,}2^3\cdot 0{,}8^2 = 10\cdot 0{,}008\cdot 0{,}8^2 = 0{,}08\cdot 0{,}64 = 0{,}0512;$$

$$P_5(4) = \frac{5!}{4!\cdot(5-4)!}\cdot 0{,}2^4\cdot 0{,}8 = 5\cdot 0{,}0016\cdot 0{,}8 = 4\cdot 0{,}0016 = 0{,}0064;$$

$$P_5(5) = p^5 = 0{,}2^5 = 0{,}00032.$$

Составим таблицу закона распределения

x_i	0	1	2	3	4	5
p_i	0,3277	0,4096	0,2048	0,0512	0,0064	0,00032

Выполним контроль

$$\sum_i p_i = 0{,}3277 + 0{,}4096 + 0{,}2048 + 0{,}0512 + 0{,}0064 + 0{,}00032 = 1.$$

Найдем числовые характеристики данного распределения

$$M(X) = np = 5\cdot 0{,}2 = 1;\ D(X) = npq = 0{,}8,\ \sigma(X) = \sqrt{0{,}8} = 0{,}8944.$$

Вероятность того, что не вернут кредит не более двух заемщиков – это вероятность суммы событий: а) не вернут кредит 2 заемщика, б) не вернет кредит 1 заемщик, в) вернут все. Так как эти события несовместны, то вероятность их суммы равна сумме их вероятностей:

$$P(X \le 2) = 0{,}2048 + 0{,}4096 + 0{,}32768 = 0{,}94208.$$

Многоугольник распределения представлен на рисунке.

Рисунок к задаче 7.3. – Многоугольник распределения

Задача 7.4. В партии из 10 деталей имеется 7 стандартных. Наудачу отобраны 3 детали. Составить закон распределения вероятностей дискретной случайной величины X - числа стандартных деталей среди отобранных. Найти математическое ожидание и дисперсию.

◀ Случайная величина X - число стандартных деталей среди отобранных деталей - имеет гипергеометрическое распределение с параметрами N = 10, M = 7, n = 3. Найдем вероятности возможных значений $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$, $x_4 = 3$ случайной величины X по формуле (37), в которой

N - число деталей в партии; M - число стандартных деталей в партии; n- число отобранных деталей; k - число стандартных деталей среди отобранных;

$$P(X=0)=\frac{C_7^0\cdot C_3^3}{C_{10}^3}=\frac{1}{120};\qquad P(X=1)=\frac{C_7^1\cdot C_3^2}{C_{10}^3}=\frac{7\cdot 3}{120}=\frac{21}{120};$$

$$P(X=2)=\frac{C_7^2\cdot C_3^1}{C_{10}^3}=\frac{21\cdot 3}{120}=\frac{63}{120};\qquad P(X=3)=\frac{C_7^3\cdot C_3^0}{C_{10}^3}=\frac{35}{120}.$$

Ряд распределения случайной величины X имеет вид:

x_i	0	1	2	3
p_i	1/120	21/120	63/120	35/120

Найдем математическое ожидание $M(X)$ по общей формуле (29):

$$M(X)=0\cdot\frac{1}{120}+1\cdot\frac{21}{120}+2\cdot\frac{63}{120}+3\cdot\frac{35}{120}=\frac{252}{120}\cong 2{,}1.$$

Найдем M(X^2)

$$M\left(X^2\right)=0\cdot\frac{1}{120}+1\cdot\frac{21}{120}+4\cdot\frac{63}{120}+9\cdot\frac{35}{120}=\frac{588}{120}\cong 4{,}9.$$

Дисперсию найдем по формуле (31)

$$D(X)=M(X^2)-M^2(X)=4{,}9-(2{,}1)^2=4{,}9-4{,}41=0{,}49.$$

Те же результаты можно получить, используя формулу (38)

$$M(X)=\frac{M\cdot n}{N}=\frac{7\cdot 3}{10}=2{,}1;$$

$$D(X)=\frac{Mn\cdot(N-n)(N-M)}{N^2(N-1)}=\frac{7\cdot 3\cdot(10-3)(10-7)}{10^2(10-1)}=0{,}49.$$

Задача 7.5. В населенном пункте три рынка. Вероятность того, что на рынке есть необходимый для господина *N* товар, равна 0.6. Он пытается купить этот товар. Если на очередном рынке отсутствует данный товар, господин отправляется за ним на следующий рынок. Поиски прекращаются либо с приобретением товара, либо после того как посещены все рынки. Составить закон распределения числа посещенных рынков. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение числа посещенных рынков.

◄ X – число посещенных рынков. A_i – событие, состоящее в том, что на *i*-том посещенном рынке есть необходимый товар, $\overline{A_i}$ - отсутствует. Вероятности этих событий: $P(A_i)=0.6=p$, $P\left(\overline{A_i}\right)=0.4=q$, $i=\overline{1,3}$.

Закон распределения и рабочие расчеты по характеристикам случайной величины:

x_i	$p_i=P(X=x_i)$	$x_i p_i$	$x_i^2 p_i$
1	$p_1=P(X=1)=P(A_1)=0.6$	0,6	0,6
2	$p_2=P(X=2)=P\left(\overline{A_1}A_2\right)=P(A_1)\cdot P(A_2)=0.4\cdot 0.6=0.24$	0,48	0,96
3	$p_3=P(X=3)=P\left(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\right)=P(A_1)\cdot P\left(\overline{A_2}\right)=0.4\cdot 0.4=0.16.$	0,48	1,44
$\sum$	1.0	1,56	3,0

Характеристики случайной величины X– числа посещенных рынков:

Математическое ожидание - $M(X)=\sum_i x_i p_i=1{,}56$.

Дисперсия - $D(X)=M\left(X^2\right)-M^2\left(X\right)=3-1.56^2=0.5664$.

Среднее квадратическое отклонение - $\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{0.5664}=0.7526$

.

Задача 7.6. После удачного выстрела по мишени стрелку выдается новый патрон. Если стрелок промахнется, то ему больше не разрешают стрелять. Вероятность попадания стрелком в мишень при одном выстреле равна 0,8. Составить закон распределения случайной величины X – числа выданных патронов.

◀ Случайная величина X может принимать значения 1, 2, 3, 4, … . Вероятность попадания при одном выстреле одинакова и испытания прекращаются, как только стрелок промахнется. Это геометрическое распределение. Для определения вероятностей воспользуемся формулой (34)

$$P(X = k) = q^{k-1} \cdot p .$$

Согласно условию задачи p = 1- 0,8 = 0,2, а q = 0,8, тогда

$P(X = 1) = 0{,}8^0 \cdot 0{,}2 = 0{,}2$ – вероятность того, что стрелок промахнется в первый же раз и ему больше не будут давать патроны;

$P(X = 2) = 0{,}8 \cdot 0{,}2 = 0{,}16$ - вероятность того, что в первый раз стрелок попадет, ему выдадут еще один патрон и во второй раз он промахнется;

$P(X = 3) = 0{,}8^2 \cdot 0{,}2 = 0{,}128$ - вероятность того, что первые два раза стрелок попадет, ему выдадут еще один патрон, и в третий раз он промахнется. И так далее. В результате закон распределения числа выданных патронов примет следующий вид

x_i	1	2	3	…	k	…
p_i	0,2	0,16	0,128	…	$0{,}8^k \cdot 0{,}2$	…

Задача 7.7. Дискретные независимые случайные величины заданы распределениями:

X	1	3	Y	2	4
P	0,4	0,6	P	0,8	0,2

Составить распределение случайной величины $Z = X + Y$.

◀ Возможные значения Z есть суммы каждого возможного значения X со всеми возможными значениями Y:

$$z_1 = 1 + 2 = 3; z_2 = 1 + 4 = 5; z_3 = 3 + 2 = 5; z_4 = 3 + 4 = 7 .$$

Найдем вероятности этих возможных значений.

Для того чтобы $Z = 4$, достаточно, чтобы величина X приняла значение $x_1 = 1$ и величина Y - значение $y_1 = 3$. Вероятности этих возможных значений, как следует из данных законов распределения, соответственно равны 0,4 и 0,8.

Аргументы X и Y независимы, поэтому события $X=1$ и $Y=2$ независимы и, следовательно, вероятность их совместного наступления (т.е. вероятность события $Z=1+2=3$) по теореме умножения вероятностей равна $0{,}4\cdot 0{,}8=0{,}32$. Аналогично найдем:

$$P(Z=1+4=5)=0{,}4\cdot 0{,}2=0{,}08;\ P(Z=3+2=5)=0{,}6\cdot 0{,}8=0{,}48;$$
$$P(Z=3+4=7)=0{,}6\cdot 0{,}2=0{,}12.$$

Запишем искомое распределение, сложив предварительно вероятности несовместных событий $Z=z_2, Z=z_3$ $(0{,}08+0{,}48=0{,}56)$

Z	3	5	7
P	0,32	0,56	0,12

Контроль: $0.32+0.56+0.12=1$.

Задача 7.8. Заданы законы распределения двух независимых *ДСВ* X и Y таблицей:

x_i	-5	2	3	4	y_i	1	4
p_i	0,4	0,3	0,1	0,2	p_i	0,2	0,8

Найти математическое ожидание $M(2X-7Y)$, дисперсию $D(2X-7Y)$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma(2X-7Y)$.

◀ По свойствам математического ожидания имеем

$$M(2X-7Y)=M(2X)-M(7Y)=2M(X)-7M(Y).$$

Определив $M(X)$ и $M(Y)$ и подставив их в указанное выражение, найдем искомое математическое ожидание $M(2X-7Y)$.

$$M(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i p_i=-5\cdot 0{,}4+2\cdot 0{,}3+3\cdot 0{,}1+4\cdot 0{,}2=-0{,}3\cdot$$

$$M(Y)=1\cdot 0{,}2+4\cdot 0{,}8=3{,}4.$$

Итак, $\qquad M(2X-7Y)=2\cdot(-0{,}3)-7\cdot 3{,}4=-24{,}4$.

Применяя свойства дисперсии для $D(2X-7Y)$, получим:

$$D(2X-7Y)=4\cdot D(X)+49\cdot D(Y).$$

Напишем законы распределения для случайных величин X^2 и Y^2:

x_i^2	25	4	9	16	y_i^2	1	16
p_i	0,4	0,3	0,1	0,2	p_i	0,2	0,8

Тогда

$$M(X^2) = 25 \cdot 0{,}4 + 4 \cdot 0{,}3 + 9 \cdot 0{,}1 + 16 \cdot 0{,}2 = 15{,}3.$$

$$M(Y^2) = 1 \cdot 0{,}2 + 16 \cdot 0{,}8 = 13.$$

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2 = 15{,}3 - (-0{,}3)^2 = 15{,}21.$$

$$D(Y) = M(Y^2) - [M(Y)]^2 = 13 - (3{,}4)^2 = 1{,}44.$$

Наконец, подставив в $D(2X - 7Y)$ найденные значения $D(X)$ и $D(Y)$, получим искомую дисперсию

$$D(2X - 7Y) = 4 \cdot 15{,}21 + 49 \cdot 1{,}44 = 131{,}4.$$

Тогда

$$\sigma(2X - 7Y) = \sqrt{D(2X - 7Y)} = \sqrt{131{,}4} \approx 11{,}46..$$

Задача 7.9. Для пуассоновской случайной величины X отношение $\frac{P(X=10)}{P(X=9)} = 6$. Найдите математическое ожидание $M(X)$.

◀ Используем формулу Пуассона (20)

$$P(X = 10) = \frac{\lambda^{10} \cdot e^{-\lambda}}{10!}; \qquad P(X = 9) = \frac{\lambda^{9} \cdot e^{-\lambda}}{9!};$$

$$\frac{P(X = 10)}{P(X = 9)} = \frac{\lambda^{10} \cdot e^{-\lambda}}{10!} \cdot \frac{9!}{\lambda^{9} \cdot e^{-\lambda}} = \frac{\lambda}{10} = 6 \Rightarrow \lambda = 10 \cdot 6 = 60. \; M(X) = \lambda = 60.$$

Задача 7.10. Среднее число вызовов, поступающих на АТС в одну минуту равно 2. Найти вероятность, что за пять минут поступит 3 вызова.

◀ По условию $\lambda = 2$, $t = 5$, $k = 3$. Тогда $\lambda \cdot t = 10$. Применяя формулу (40), получим

$$P_5(3) = \frac{10^3}{3!} e^{-10} \cong 0{,}016.$$

Заметим, что вероятность поступления, допустим, 10 вызовов будет значительно больше $P_5(10) = \frac{10^{10}}{10!} e^{-10} \cong 0{,}3$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Клиенты банка, не связанные друг с другом, не возвращают кредиты в срок с вероятностью 0,1. Составить закон распределения случайной величины X - числа возвращенных в срок кредитов из 5 выданных. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое

отклонение этой случайной величины ($M(X)$ = 4,5; $D(X)$ = 0,45; $\sigma(X) \approx 0{,}67$)..

2. В 20% стручках гороха сорта А содержится по 5 горошин, 50% - по 6 горошин и 30% - по 7 горошин. Наугад берется три стручка. Составить закон распределения числа горошин в трех стручках и построить многоугольник распределения. Ответ:

x_i	15	16	17	18	19	20	21
p_i	0,008	0,060	0,186	0,305	0,279	0,135	0,027

3. Из партии, содержащей 100 изделий, среди которых имеется 10 дефектных, выбраны случайным образом пять изделий для проверки их качества. Найти математическое ожидание дискретной случайной величины X – числа дефектных изделий, содержащихся в выборке ($M(X)$ = 0,501).

4. Производятся последовательно независимые испытания пяти технических систем на надежность. Каждая следующая система испытывается только в том случае, если предыдущая система оказалась надежной. Вероятность выдержать испытания для каждой системы равна 0,9. Найти функцию распределения числа испытанных систем. Ответ:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ 0{,}1, & 1 \le x < 2 \\ 0{,}19, & 2 \le x < 3 \\ 0{,}271, & 3 \le x < 4 \\ 0{,}3439, & 4 \le x < 5 \\ 1, & x > 5 \end{cases}.$$

5. Согласно правилам лотереи размер выигрыша определяется тем, куда направлен конец упавшего волчка. Если он направлен на юг выигрыш равен 0, когда на север 10 руб., на запад – 30 руб. и на восток – 70 руб. волчок запускают 2 раза. Составить закон распределения случайной величины X- сумм выигрышей. Ответ:

x_i	0	1	2	3	4	6	7	8	10	14
p_i	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

6. Приборы испытываются на перегрузочных режимах. Вероятности для каждого прибора пройти испытание равны $\frac{4}{5}$ и независимы. Испытания заканчиваются после первого же прибора, не выдержавшего испытания.

Записать формулу, определяющую вероятности числа испытаний $\left(P(X=k)=\frac{1}{5}\left(\frac{4}{5}\right)^{k-1} \right)$.

7. В результате испытаний двух приборов (A и B) установлена вероятность появления помех, оцениваемых по трехбальной системе (см. табл.).

Уровень помех		1	2	3
Вероятность появления помех данного уровня	уровень A	0,20	0,06	0,04
	уровень B	0,06	0,04	0,10

В случае отсутствия помех их уровень принимается равным нулю. Указать лучший прибор (Прибор A).

8. Математическое ожидание наружного радиуса цилиндра равно 4,6 м при среднем квадратическом отклонении 0,08, а внутреннего – 3,8 м при среднем квадратическом отклонении 0,06. Определить среднее квадратическое отклонение толщины его стенок $(\sigma(X)=0{,}1\text{м.})$.

9. Вероятность выигрыша по одному лотерейному билету равна 0,01. Сколько нужно купить билетов, чтобы выиграть хотя бы по одному из них с вероятностью P, не меньшей, чем 0,95? (Не менее 300 билетов).

10. Среднее число заказов такси, поступающих на диспетчерский пункт в одну минуту, равно трем. Найти вероятность того, что за 2 минуты поступит не менее 4-х вызовов (0,8475).

Контрольная работа № 3

Задачи выполняются согласно учебному шифру студента с № 1 по № 80, согласно таблицы, приведенной к контрольной № 1

1. Производится испытание n = 5 приборов на надежность. Вероятность отказа для каждого прибора равна p = 0,3. Случайная величина X - число приборов, выдержавших испытание. Построить ряд распределения случайной величины X. Найти математическое ожидание $M(X)$ и дисперсию $D(X)$.

2. В урне 4 белых и 3 черных шара. Из нее наугад извлекли 3 шара. Дискретная случайная величина X - число черных шаров. Построить ряд распределения и многоугольник распределения X. Найти $M(X)$ и $D(X)$.

3. Найти математическое ожидание дискретной случайной величины X — числа появлений события A в четырёх независимых испытаниях, если вероятности появления события в этих испытаниях одинаковы и $D(X)$ = 0,5.

4. Имеем 10 деталей, среди которых 4 дефектных. Пять деталей отбирают случайным образом. Пусть X - число дефектных деталей среди

отобранных. Найти закон распределения X, вычислить $M(X)$ и $D(X)$, написать выражение для функции распределения $F(x)$.

5. Завод отправил на базу 500 изделий. Вероятность повреждения изделия в пути равна 0,002. Найти закон распределения случайной величины X, равной числу поврежденных изделий. Чему равно $M(X)$ и $D(X)$, построить функцию распределения $F(x)$.

6. В ходе проверки предприятия независимый эксперт случайным образом отбирает 4 отчета. При условии, что 87% отчетов не содержат ошибок, составить закон распределения числа неправильных отчетов, обнаруженных экспертом. Вычислить математическое ожидание и среднее квадратичное отклонение. Найти функцию распределения и построить её график. Построить многоугольник распределения.

7. Баскетболист забрасывает мяч в корзину до первого попадания. Построить ряд распределения случайного числа броской, если вероятность попадания равна 0,6, а число бросков не превосходит 6. Построить многоугольник распределения, найти математическое ожидание и дисперсию.

8. Для рыночного исследования необходимо проведение интервью с людьми, которые добираются на работу общественным транспортом. В районе, где проводится исследование, 75% людей добираются на работу общественным транспортом. У 3 человек берут интервью. Составить закон распределения дискретной случайной величины X — количество человек (из тех опрошенных), добирающихся на работу общественным транспортом. Найти математическое ожидание, дисперсию с среднее квадратическое отклонение X.

9. Среднее число самолетов, взлетающих с полевого аэродрома за одни сутки, равно 10. Найти вероятность того, что за 6 часов взлетят: а) три самолета; б) не менее двух самолетов.

10. На автовокзале время прибытия автобусов различных рейсов объявляет дежурный. Появление информации о различных рейсах происходит случайно и независимо друг от друга. В среднем на автовокзал прибывает 5 рейсов каждые полчаса. Составьте ряд распределения числа сообщений о прибытии автобусов в течение получаса. Найдите числовые характеристики этого распределения. Запишите функцию распределения вероятностей и постройте ее график. Чему равна вероятность того, что в течение получаса прибудут не менее трех автобусов?

11. АТС получает в среднем за час 480 вызовов. Определить вероятность того, что за данную минуту она получит: ровно 3 вызова; от 2 до 5 вызовов.

12. Автомобиль проходит технический осмотр и обслуживание. Число неисправностей, обнаруженных во время техосмотра, распределяется по закону Пуассона с параметром 0,63. Если неисправностей не обнаружено, техническое обслуживание автомобиля продолжается в среднем 2 ч. Если

обнаружены одна или две неисправности, то на устранение каждой из них тратится в среднем еще полчаса. Если обнаружено больше двух неисправностей, то автомобиль становится на профилактический ремонт, где он находится в среднем 4 ч. Определите закон распределения среднего времени технического обслуживания и ремонта автомобиля и его математическое ожидание M(T).

13. В тексте учебника по математике содержатся опечатки: в среднем, одна на десять страниц. Пусть X – число опечаток на одной странице. Определить закон распределения для X. Найти вероятность, что на странице есть хотя бы одна опечатка.

14. В магазине имеется 15 автомобилей определенной марки. Среди них 7 черного цвета, 6 серого и 2 белого. Представители фирмы обратились в магазин с предложением о продаже им 3 автомобилей этой марки, безразлично какого цвета. Составьте ряд распределения числа проданных автомобилей черного цвета при условии, что автомобили отбирались случайно.

15. Составить закон распределения числа карт трефовой масти среди четырех взятых наугад из колоды карт. Построить многоугольник распределения. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины.

16. В стопке из 6 книг 3 книги по математике и 3 по информатике. Выбирают наудачу три книги. Составить закон распределения числа книг по математике среди отобранных. Найти математическое ожидание и функцию распределения этой случайной величины.

17. В коробке 20 одинаковых клубков ниток, из них – 4 клубка с красными нитками. Наудачу вынимают 2 клубка. Найти закон распределения числа клубков с красными нитками.

18. В сборной команде института по стрельбе 16 человек, из них 6 перворазрядников. Наудачу выбирают двух членов сборной. Составьте закон распределения дискретной случайной величины X – числа перворазрядников среди выбранных. Найдите числовые характеристики этой случайной величины, функцию $F(x)$ и постройте ее график.

19. Для поиска корабля, терпящего бедствие, совершает полеты самолет. Вероятность обнаружения корабля в одном полете равна 0,4. Определить закон распределения случайной величины X - число поисковых полетов. Определить математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение величины X. Определить вероятность того, что корабль будет обнаружен в третьем полете.

20. Экзаменатор задает студенту, прогулявшему весь семестр, дополнительные вопросы. Вероятность того, что студент ответит на любой из заданных вопросов равна 0, 8. Преподаватель прекращает экзамен, как только студент не отвечает на очередной вопрос. Случайная величина X −

число дополнительно заданных вопросов. Составьте закон распределения *X*, постройте многоугольник распределения и найдите *M*(*X*).

В задачах 21- 40 а) построить многоугольник распределения; б) найти математическое ожидание *M(X)*, дисперсию *D(X)* и среднее квадратическое отклонение σ; в) определить функцию распределения *F*(*x*) и построить ее график.

21.

X	23	25	28	29
p	0,3	0,2	0,4	0,1

22.

X	17	21	25	27
p	0,2	0,4	0,3	0,1

23.

	24	26	28	30
p	0,2	0,2	0,5	0,1

24.

X	12	16	19	21
p	0,1	0,5	0,3	0,1

25.

X	25	27	30	32
p	0,2	0,4	0,3	0,1

26.

X	30	32	35	40
p	0,1	0,5	0,2	0,2

27.

X	12	14	16	20
p	0,1	0,2	0,5	0,2

28.

X	21	25	28	31
p	0,1	0,4	0,2	0,3

29.

X	60	64	67	70
p	0,1	0,3	0,4	0,2

30.

X	45	47	50	52
p	0,2	0,4	0,3	0,1

31.

X	46	49	51	55
p	0,2	0,3	0,1	0,4

32.

X	18	22	23	26
p	0,2	0,3	0,4	0,1

33.

X	78	80	84	85
p	0,2	0,3	0,1	0,4

34.

X	37	41	43	45
p	0,2	0,1	0,5	0,2

35.

X	25	28	30	33
p	0,1	0,2	0,4	0,3

36.

X	56	58	60	64
p	0,2	0,3	0,4	0,1

37.

X	31	34	37	40
p	0,3	0,5	0,1	0,1

38.

X	17	20	23	27
p	0,1	0,4	0,3	0,2

39.

X	28	32	34	36
p	0,1	0,2	0,2	0,5

40.

X	35	39	42	46
p	0,1	0,3	0,2	0,4

В задачах 41 - 60 две независимые дискретные случайные величины X и Y заданы своими законами распределения. Вычислить числовые характеристики $M(Z)$, $D(Z)$, $\sigma(Z)$ случайной величины $Z = 2X - 3Y$. Построить многоугольник распределения вероятностей Z.

41.

x_i	-6	8	9	0	y_i	-8	2
p_i	0,1	0,1	0,6	0,2	p_i	0,4	0,6

42.

x_i	-3	2	y_i	-2	-1	0	3
p_i	0,3	0,7	p_i	0,2	0,5	0,1	0,2

43.

x_i	-5	-4	-2	3	y_i	-8	-6	1
p_i	0,1	0,5	0,2	0,2	p_i	0,1	0,7	0,2

44.

x_i	-6	-3	2	1	y_i	-2	4
p_i	0,3	0,3	0,2	0,2	p_i	0,2	0,8

45.

x_i	-4	-2	-1	3	y_i	-3	-1	5
p_i	0,1	0,3	0,2	0,4	p_i	0,4	0,1	0,5

46.

x_i	-2	0	1	4	y_i	1	2	4
p_i	0,5	0,1	0,2	0,2	p_i	0,1	0,3	0,6

47.

x_i	-7	-6	-2	1	y_i	-8	-5	5
p_i	0,4	0,4	0,1	0,1	p_i	0,7	0,2	0,1

48.

x_i	-1	2	4	8	y_i	-4	-2	1
p_i	0,2	0,5	0,1	0,2	p_i	0,4	0,1	0,5

49.

x_i	-8	-6	-1	5	y_i	2	4	6
p_i	0,5	0,1	0,2	0,2	p_i	0,1	0,3	0,6

50.

x_i	-4	-1	0	7	y_i	8	10	15
p_i	0,2	0,4	0,3	0,1	p_i	0,2	0,1	0,7

51.

x_i	-8	-4	-2	0	y_i	-5	-3	1
p_i	0,1	0,1	0,1	0,7	p_i	0,5	0,3	0,2

52.

x_i	-2	-1	0	1	y_i	-2	1	4
p_i	0,2	0,1	0,2	0,5	p_i	0,4	0,3	0,3

53.

x_i	-6	-4	1	3	y_i	-4	-2	1
p_i	0,4	0,3	0,1	0,2	p_i	0,5	0,1	0,4

54.

x_i	-7	-6	-5	-3	y_i	1	3	7
p_i	0,1	0,3	0,2	0,4	p_i	0,4	0,2	0,4

55.

x_i	-3	-2	1	3	y_i	-4	-2	0
p_i	0,1	0,1	0,1	0,7	p_i	0,2	0,7	0,1

56.

x_i	-4	-2	-1	3	y_i	-3	-1	5
p_i	0,1	0,3	0,2	0,4	p_i	0,4	0,1	0,5

57.

x_i	-4	-2	-1	3	y_i	-3	-1	5
p_i	0,1	0,3	0,2	0,4	p_i	0,4	0,1	0,5

58.

x_i	-8	-5	2	5	y_i	-6	-4	1
p_i	0,2	0,1	0,2	0,5	p_i	0,1	0,5	0,4

59.

x_i	-7	-8	-9	3	y_i	-5	-2	2
p_i	0,3	0,1	0,2	0,4	p_i	0,5	0,1	0,4

60.

x_i	-14	-12	-10	0	y_i	3	4	5
p_i	0,1	0,3	0,2	0,4	p_i	0,2	0,7	0,1

В задачах 61 – 80 дано, что при работе программного комплекса в случайные моменты времени возникают технические неисправности. Будем считать, что *поток неисправностей – простейший*. Среднее число неисправностей за t часов непрерывной работы комплекса равно m. Найти вероятность того, что за n часов работы комплекса возникнет: а) k неисправностей; б) менее k неисправностей; в) не менее k неисправностей.

61	$t = 5$	$m = 2$	$n = 10$	$k = 3$
62	$t = 6$	$m = 1$	$n = 12$	$k = 5$
63	$t = 7$	$m = 5$	$n = 15$	$k = 4$
64	$t = 8$	$m = 4$	$n = 13$	$k = 2$
65	$t = 4$	$m = 2$	$n = 8$	$k = 1$
66	$t = 9$	$m = 6$	$n = 15$	$k = 3$
67	$t = 5$	$m = 3$	$n = 18$	$k = 6$
68	$t = 6$	$m = 4$	$n = 10$	$k = 2$
69	$t = 7$	$m = 2$	$n = 12$	$k = 4$
70	$t = 9$	$m = 5$	$n = 14$	$k = 5$
71	$t = 5$	$m = 1$	$n = 7$	$k = 2$
72	$t = 7$	$m = 4$	$n = 16$	$k = 3$
73	$t = 6$	$m = 5$	$n = 10$	$k = 4$
74	$t = 8$	$m = 3$	$n = 9$	$k = 1$
75	$t = 9$	$m = 6$	$n = 15$	$k = 5$
76	$t = 4$	$m = 4$	$n = 8$	$k = 2$
77	$t = 5$	$m = 2$	$n = 12$	$k = 3$
78	$t = 7$	$m = 5$	$n = 16$	$k = 5$
79	$t = 6$	$m = 3$	$n = 14$	$k = 1$
80	$t = 8$	$m = 4$	$n = 10$	$k = 4$

VIII. Непрерывные случайные величины

Теоретическая справка [5], [13], [14]

Непрерывной называют случайную величину (НСВ), которая может принимать все значения из некоторого конечного или бесконечного промежутка. Число возможных значений непрерывной случайной величины бесконечно. Примерами могут служить время безотказной работы ситемы, рост человека, масса животного, дальность полета снаряда и др.

График функции распределения непрерывной случайной величины, возможные значения которой принадлежат интервалу (a, b) изображен на рис. 3.

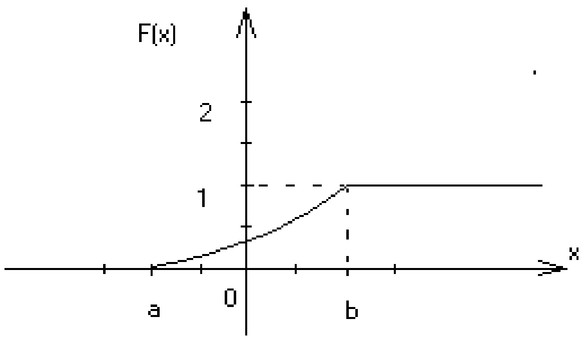


Рисунок 3 – График функции распределения непрерывной случайной величины

Плотностью распределения вероятностей непрерывной, случайной величины X называют функцию $f(x)$ - первую производную от функции распределения $F(x)$

$$f(x) = F'(x), \tag{41}$$

Вероятность того, что непрерывная случайная величина X примет значение, принадлежащее интервалу (a, b) равна

$$P(a < x < b) = \int_a^b f(x)dx. \tag{42}$$

Если $f(x)$ - чётная функция, то

$$P(-a < x < a) = P(|x| < a) = 2\int_0^a f(x)dx. \tag{43}$$

Зная плотность распределения $f(x)$, можно найти функцию распределения

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx. \quad (44)$$

График плотности распределения НСВ *X* называют кривой распределения.

Свойства плотности распределения

1. Плотность распределения неотрицательная функция $f(x) \geq 0$.
2. Несобственный интеграл от плотности распределения в пределах от -∞ до +∞ равен единице:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1. \quad (45)$$

3) Если все возможные значения случайной величины принадлежат интервалу (a, b), то

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = 1. \quad (46)$$

Числовые характеристики непрерывных случайных величин

Математическое ожидание непрерывной случайной величины *X*, возможные значения которой принадлежат всей оси *Ox*, определяется по формуле

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx. \quad (47)$$

Дисперсией непрерывной случайной величины называют математическое ожидание квадрата её отклонения

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M(X))^2 f(x)dx = M(X^2) - M^2(X).. \quad (48)$$

Среднее квадратическое отклонение НСВ определяется так же как и для дискретной случайной величины, т.е. $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$.

Законы распределения непрерывных случайных величин

1. *Нормальный закон распределения*

Непрерывная случайная величина *X* имеет нормальный закон распределения, если ее плотность вероятности задается *функцией Гаусса*

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in R. \quad (49)$$

График функции Гаусса называют *нормальной кривой или кривой Гаусса.* Нормальная кривая $y = f(x)$ изображена на рис. 4.

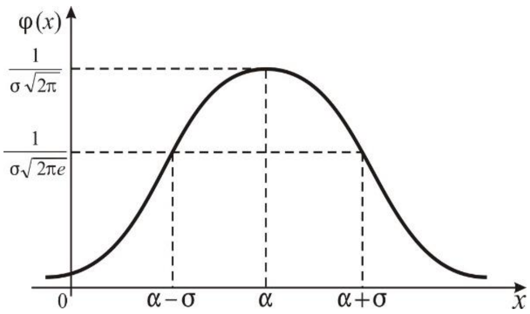


Рисунок 4 – Нормальная кривая

Тот факт, что случайная величина X распределена по нормальному закону с параметрами a *и* σ, коротко записывают так: $X \sim N(a, \sigma)$.

Математическое ожидание случайной величины X, распределенной по нормальному закону, равно параметру a этого закона, т. е. $M(X) = a$*, а дисперсия – параметру* σ^2*, т. е.* $D(X) = \sigma^2$.

Нормальный закон распределения случайной величины с параметрами $a = 0$ и $\sigma = 1$, т. е. случайной величины $X \sim N(0, 1)$ называется *стандартным* или *нормированным.*

Функция распределения

$$F(x) = 0{,}5 + 0{,}5\Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right), \text{ где } \Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_0^x e^{-0{,}5t^2}\,dt. \tag{50}$$

Вероятность попадания в интервал (α, β) случайной величины X, подчиненной нормальному закону, определяется формулой

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right), \tag{51}$$

где функция $\Phi(x)$ - *функция Лапласа* (или *интеграл вероятности*).

Вероятность попадания случайной величины $X \sim N(\alpha, \sigma)$ в интервал $(\alpha - \delta, \alpha + \delta)$, симметричный относительно центра рассеяния a, находится по формуле

$$P(a - \delta < X < \alpha + \delta) = P(|X - \alpha| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right). \tag{52}$$

В частности,

$$P(|X - a| < 3\sigma) = 2\Phi_0(3) \approx 0{,}9973, \tag{53}$$

т. е. практически достоверно, что случайная величина $X \sim N(\alpha, \sigma)$ принимает свои значения в интервале $(\alpha - 3\sigma, \alpha + 3\sigma)$. Это утверждение называется *“правилом трех сигм”*.

2. *Равномерное распределение* (*закон равномерной плотности*)

Равномерным называется распределение вероятностей непрерывной случайной величины *X*, если на интервале (α,β), которому принадлежат все возможные значения *X*, плотность сохраняет постоянное значение, т.е. все значения случайной величины равновероятны

$$f(x) = \begin{cases} C = \dfrac{1}{\beta - \alpha}, \ \alpha \le x \le \beta, \\ 0, \ x < \alpha, x > \beta. \end{cases} \tag{54}$$

График функции функции плотности равномерно распределенной случайной величины, представляет собой прямую, параллельную оси *Ox*, проходящей через значение $y = \dfrac{1}{\beta - \alpha}$

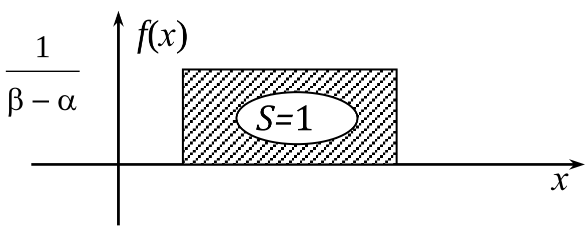


Рисунок 5 – График функции плотности равномерно распределенной случайной величины

Функция распределения закона равномерной плотности определяется по формуле

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \frac{x - \alpha}{\beta - \alpha}. \tag{55}$$

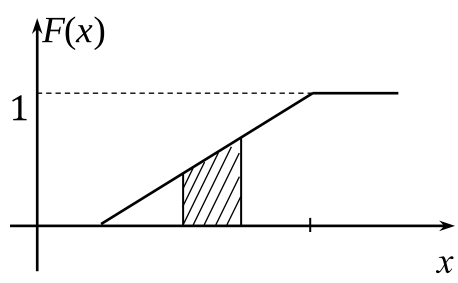


Рисунок 6 – График функции распределения равномерно распределенной случайной величины

Вероятность попадания X в интервал $[a,b]$ определяется по формуле

$$P(a \le x \le b) = \frac{b-a}{\beta-\alpha}. \tag{56}$$

и проиллюстрирована на рис.6 заштрихованной областью.

Числовые характеристики для равномерного распределения определяются по формулам

$$M(X) = \frac{\alpha+\beta}{2};\ D(X) = \frac{(\beta-\alpha)^2}{12}. \tag{57}$$

3. *Показательное* (*экспоненциальное*) *распределение*

Плотность распределения *показательного закона* задается формулой

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & \text{при } x \ge 0 \\ 0, & \text{при } x < 0 \end{cases}. \tag{58}$$

Функция распределения показательно распределенной непрерывной величины определяется по формуле

$$F(x) = \lambda \int_{-\infty}^{x} e^{-\lambda x} dx = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & \text{при } x \ge 0 \\ 0, & \text{при } x < 0 \end{cases}. \tag{59}$$

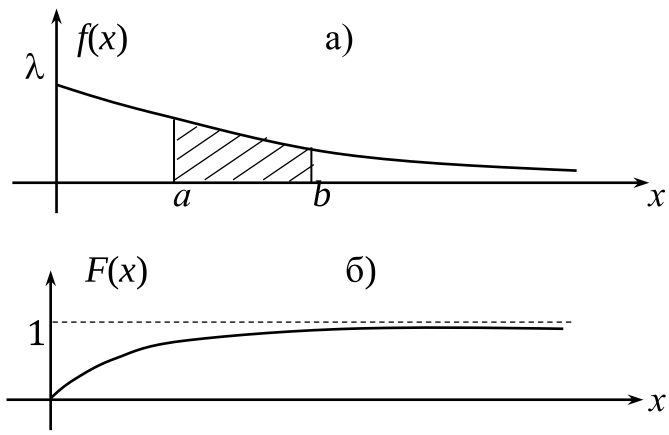


Рисунок 7 – Графики функций: а) плотности вероятности; б) функции распределения показательно распределенной случайной величины

Вероятность попадания случайной величины в интервал $\alpha < x \le \beta$ находится по формуле

$$P(a < x \le b) = F(b) - F(a) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}, \qquad (60)$$

и проиллюстрирована на рис. 7 а) заштрихованной областью.

Основные характеристики показательного распределения находятся по формулам:

$$M(X) = \frac{1}{\lambda};\ D(X) = \frac{1}{\lambda^2}. \qquad (61)$$

Решение типовых задач

Задача 8.1. Непрерывная случайная величина X задана функцией распределения $F(x) = \begin{cases} 0, & x \le -2 \\ 0{,}2(x+2), & -2 < x \le 3 \\ 1, & x > 3 \end{cases}$. Найти дисперсию.

◀ Для нахождения дисперсии непрерывной случайной величины X воспользуемся формулой (48). Определим сначала функцию плотности, как производную от функции распределения

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le -2 \\ 0{,}2, & -2 < x \le 3 \\ 0, & x > 3 \end{cases}.$$

Найдем математическое ожидание $M(X)$ согласно формуле (37)

$$M(X) = \int_{-2}^{3} x \cdot 0{,}2dx = 0{,}2 \cdot \left.\frac{x^2}{2}\right|_{-2}^{3} = 0{,}1(9-4) = 0{,}5.$$

Тогда дисперсия определится

$$D(X) = \int_{-2}^{3} (x-0{,}5)^2 \cdot 0{,}2dx = 0{,}2 \cdot \left.\frac{(x-0{,}5)^2}{2}\right|_{-2}^{3} = \frac{0{,}2}{3}(15{,}625 + 15{,}625) = 2{,}083.$$

Задача 8.2. Непрерывная случайная величина X задана функцией плотности вероятности $f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0,\ x > 2 \\ x, & 0 < \mathrm{x} \le 1 \\ 2-x, & 1 < x \le 2 \end{cases}$. Найти функцию распределения $F(x)$.

◀ Чтобы найти функцию распределения, воспользуемся формулой (44)

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx.$$

При $x \le 0$ получаем $F(x)=\int_{-\infty}^{0} 0dt = 0$.

При $0 < x \le 1$ находим $F(x)=\int_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{x} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_{0}^{x} tdt = 0 + \left.\frac{t^2}{2}\right|_0^x = \frac{x^2}{2}$

Когда $1 < x \le 2$, то

$$F(x)=\int_{-\infty}^{0} f(t)dt + \int_{0}^{1} f(t)dt + \int_{0}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{0} 0dt + \int_{0}^{1} tdt + \int_{0}^{x} (2-t)dt = 0 + \left.\frac{t^2}{2}\right|_0^1 + \left.\left(2t-\frac{t^2}{2}\right)\right|_0^x =$$

$$= \frac{1}{2} + \left(2x - \frac{x^2}{2}\right) - \left(2 - \frac{1}{2}\right) = -\frac{x^2}{2} + 2x - 1.$$

При $x > 2$ получаем

$$F(x)=\int_{-\infty}^{2} f(t)dt + \int_{2}^{x} f(t)dt = F(2) + \int_{2}^{x} 0dt = 1.$$

Таким образом, искомая интегральная функция $F(x)$ имеет вид:

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x \le 0 \\ \dfrac{x^2}{2}, & 0 < x \le 1 \\ \dfrac{-x^2}{2} + 2x - 1, & 1 < x \le 2 \\ 1, & x > 2 \end{cases}.$$

Задача 8.3. Функция плотности вероятности непрерывной случайной величины X имеет вид

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x \notin [0,2] \\ Cx^2, & x \in [0,2] \end{cases}.$$ Определить константу С.

◀ Константа C находится из условия (45)

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1.$$

Имеем $1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{0}^{2} Cx^2 dx = C\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^2 = \frac{8C}{3}$, откуда C = 3/8.

Задача 8.4. Задана функция распределения непрерывной случайной

величины X $$F(x)=\begin{cases} 0 & при \quad x < 0 \\ Ax^3 & при \quad 0 \le x \le 4 \\ 1 & при \quad x > 4 \end{cases}$$ Требуется:

$\alpha = 2 \qquad \beta = 3$

1) найти плотность распределения вероятностей $f(x)$;
2) определить коэффициент A;
3) схематично построить графики $F(x)$ и $f(x)$;
4) найти математическое ожидание и дисперсию X;
5) найти вероятность того, что X примет значение из интервала (α, β)

◀ 1. Используя равенство $F'(x) = f(x)$, получаем

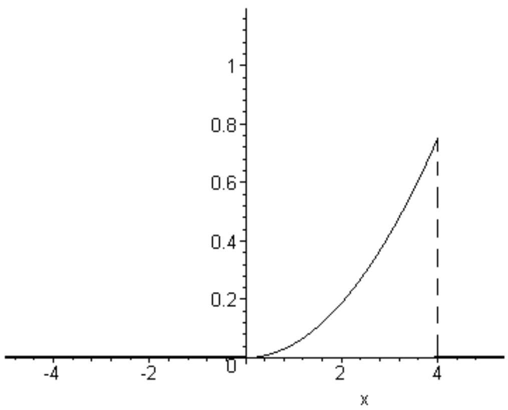
$$f(x) = \begin{cases} 0 \quad при \quad x < 0 \\ 3Ax^2 \quad при \quad 0 \le x \le 4 \\ 0 \quad при \quad x > 4 \end{cases}$$

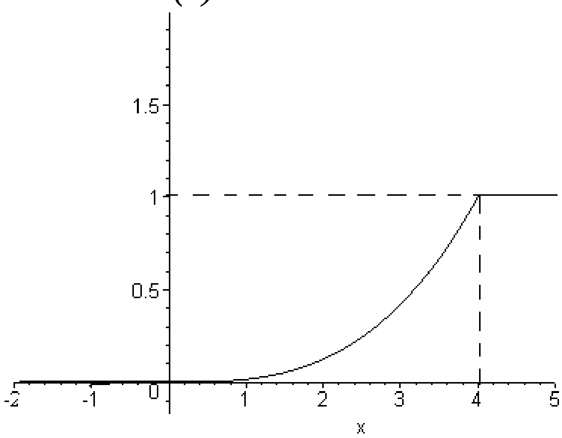
2. Используем свойство $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

$$\int_0^4 3Ax^2 dx = Ax^3 \Big|_0^4 = 64A = 1; \quad \to \quad A = \frac{1}{64}.$$

3. Ниже показаны графики функции распределения и плотности вероятности.

f(x) *F(x)*





4. Определим математическое ожидание:

$$M(x) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_0^4 \frac{3}{64}x^3 dx = \frac{3}{64}\cdot\frac{x^4}{4}\Big|_0^4 = \frac{3}{64}(64-0) = 3.$$

Дисперсия находится по формуле (48). Предварительно найдем $M(X^2)$

$$M(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx = \int_0^4 \frac{3}{64}x^4 dx = \frac{3}{64}\cdot\frac{x^5}{5}\Big|_0^4 = \frac{3}{64\cdot 5}(1024-0) = \frac{48}{5} = 9{,}6.$$

Тогда

$$D(x) = M(X^2) - M^2(X) = 9{,}6 - 9 = 0{,}6.$$

5. Определим вероятность того, что X примет значение из интервала (0,3)

$$P(0 < X < 3) = F(3) - F(0) = \frac{27}{64} \approx 0{,}4219.$$

Задача 8.5. Торговая точка имеет в продаже большое количество различных товаров. Средняя выручка в день составляет 5 д.е., а среднее квадратическое отклонение 0.9 д.е. Составить плотность вероятности и функцию распределения выручки торговой точки. Найти вероятность того, что выручка торговой точки в случайно выбранный день: а) составит от 4 до 7 д.е., б) будет отличаться от средней выручки не более чем на 2 д.е.

◀ X - выручка торговой точки, случайная величина, представляющая собой сумму большого количества случайных величин – выручек от продажи различных товаров, т.е. имеет нормальный закон распределения.

Средняя выручка является хорошей оценкой математического ожидания данной случайной величины. Следовательно,

$$M(X) = 5 \text{ д.е.}; \ \sigma(X) = \sqrt{D(X)} = 0.9 \text{ д.е.}$$

Плотность вероятности определится согласно выражению функции Гаусса

$$f(x) = \frac{1}{0{,}9\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-5)^2}{2\cdot 0{,}81}}, \quad x \in R.$$

Функция распределения примет вид, на основании формулы (50),

$$F(x) = 0{,}5 + 0{,}5\Phi\left(\frac{x-5}{0{,}9}\right), \quad x \in R.$$

Вероятность того, что выручка торговой точки составит от 4 до 7 д.е. найдется по формуле (51) при использовании таблицы 2 из Приложенияи свойства нечетности функции Лапласа

$$P(4 \le X \le 7) = \Phi\left(\frac{7-5}{0{,}9}\right) - \Phi\left(\frac{4-5}{0{,}9}\right) = \Phi(2{,}22) - \Phi(-1{,}11) = 0{,}4846 + 0{,}3686 = 0{,}8532.$$

Вероятность того, что выручка будет отличаться от средней выручки не более чем на 2 д.е., определится по формуле (52)

$$P(|X-5| \le 2) = \Phi\left(\frac{2}{0{,}9}\right) = \Phi(2{,}22) = 0{,}4846.$$

Задача 8.6. Чтобы выполнить определенное задание, лабораторной крысе требуется по меньшей мере 2 мин, но никогда не требуется более 10 мин. Определить вероятность того, что задание выполняется: а) менее, чем 5 мин; б) не менее 3 мин.

◀ Если любое время между 2 и 10 мин одинаково вероятно, то T является непрерывной случайной величиной, распределенной по равномерному закону, с функцией распределения

$$F(T) = P(T < t) = \frac{t-2}{8} \text{ при } 2 \le t \le 10.$$

а) Вероятность того, что задание выполняется менее чем за 5 мин, равна

$$P(X < 5) = F(5) = \frac{5-2}{8} = \frac{3}{8}.$$

б) Вероятность того, что потребуется не менее 3 мин, определится

$$1 - F(3) = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8},$$

т.к. $F(3) = P(X < 3) = \frac{1}{8}$ есть вероятность того, что потребуется менее 3 мин.

Задача 8.7. (*Распределение жизненных циклов*) Продолжительность жизни растений данного вида в определенной среде представляет собой непрерывную случайную величину *X*. Пусть функцией плотности вероятности для X является $f(x) = \frac{1}{120} e^{-x/120}$. Найти: а) функцию распределения $F(x)$; б) долю растений данного вида, которые умирают за период в 100 дней; в) вероятность того, если некоторое растение живет в течение 100 дней, то что оно проживет еще 100 дней?

◀ Данная функция является функцией плотности экспоненциального распределения с параметром $\lambda = \frac{1}{120}$.. Средняя продолжительность жизни растений этого вида составляет $M(X) = \frac{1}{\lambda} = 120$ дней.

а) Функцией распределения для X определится по формуле (59)

$$F(x) = 1 - e^{-x/120}.$$

б) Доля растений, которые умирают за период в 100 дней, выражается вероятностью

$$P(0 \le X \le 100) = F(100) = 1 - e^{-100/120} \approx 0{,}7.$$

в) Искомая вероятность определится

$$P\left(\frac{X \ge 200}{X \ge 100}\right) = \frac{P(X \ge 200)}{P(X \ge 100)} = \frac{1 - F(200)}{1 - F(100)} = \frac{e^{-200/120}}{e^{-100/120}} = 1 - e^{-100/120} \approx 0{,}3.$$

Другими словами, примерно 30% из тех растений, которые не умирают за 100 дней, будут жить по крайней мере и в следующие 100 дней.

Задачи для самостоятельного решения

1. Непрерывная случайная величина задана функцией плотности вероятности

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0, x>1\\ C(x^2+2x), & 0<x\le 1\end{cases}.$$

Найти неизвестную константу *C*, *M*(*X*), *D*(*X*), $\sigma(X)$ и вероятность того, что в результате испытания случайная величина *X* попадет в интервал (0,2;0,6) (¾; 0,69; 0,052; 0,23; 0,29).

2. Заданы математическое ожидание a = 4 и среднеквадратическое отклонение σ = 6 нормально распределенной случайной величины. Требуется

а) написать плотность распределения вероятностей и схематично построить ее график

б) найти вероятность того, что X примет значение из интервала (5; 9).

(а) $f(x)=\frac{1}{6\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-(x-4)^2}{72}}$; б) 0,2292).

3. Цен деления делени шкалы амперметра 0,1А. Показания округляют до ближайшего целого значения. Найти вероятность того, что при отсчете будет сделана ошибка, превышающая 0,02 А (0,6).

4. Требуется разработать математическую модель распределения птичьих гнезд в некотором местообитании. Вероятность того, что в круг радиуса *r* (с центром в любой случайно выбранной точке) попадает хотя бы одно гнездо, оценивается как $1-e^{-5r^2}$, где *r* выражается в км. Чему равна в этой модели вероятность того, что в пределах 100 м от случайно выбранной точки окажется хотя бы одно гнездо? (0,0049).

5. Непрерывная случайная величина задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le -2\\ \frac{x}{4}+\frac{1}{2}, & -2<x\le 2\\ 1, & x>2\end{cases}$$. Найти дисперсию (1,333).

6. Пакеты с удобрениями упаковываются автоматически. В среднем масса одного пакета равна 1,06 кг. Предполагая, что масса пакетов распределена по нормальному закону и в 5% - случаях пакет имеет массу меньше 1 кг, найти среднее квадратическое отклонение ($\sigma=0{,}0365$ кг.).

7. При работе некоторой технической системы время от времени возникают неисправности. Время, необходимое на настройку системы

подчиняется показательному закону распределения с параметром $\lambda = 0{,}5$. Найти вероятность того, что время устранения неисправности будет колебаться от 1 до 3 часови среднее время на устранение одной неисправности технической системы (0,383; 2 часа).

8. Автобусы подходят к остановке с интервалом в 5 мин. Считая, что случайная величина Х – время ожидания автобуса – распределена равномерно, найти среднее время ожидания (математическое ожидание) и среднее квадратическое отклонение случайной величины Х для случайно подошедшего на остановку пассажира $\left(M(X) = 2{,}5\, ч.; \sigma(X) = \frac{5\sqrt{3}}{6}\text{ мин.} \right)$.

9. Студент помнит, что плотность показательного распределения имеет вид $f(x) = \begin{cases} Ce^{-3x}, & \text{при } x \ge 0 \\ 0, & \text{при } x < 0 \end{cases}$, но забыл чему равна постоянная С. Требуется найти C ($C = 3$).

10. Случайная величина Х распределена нормально с математическим ожиданием $a = 10$. Вероятность попадания Х в интервал (10,20) равна 0,3. Чему равна вероятность попадания в интервал (0,10)? (0,3).

Контрольная работа № 4

Задачи выполняются согласно учебному шифру студента с № 1 по № 100, согласно таблицы, приведенной к контрольной № 1

В задачах 1-20 случайная величина X задана функцией распределения вероятностей $F(x)$. Найти: а) вероятность попадания с.в. X в интервал $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$; б) плотность распределения вероятностей с.в. X и построить графики дифференциальной и интегральной функций X; в) математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$

1 $$F(x) = \begin{cases} 0, \; при\; x \le -1, \\ \frac{1}{4}(x+1)^2, \; при -1 < x \le 1 \\ 1, \; при\; x > 1. \end{cases}$$

2 $$F(x) = \begin{cases} 0, \; при\; x \le 0, \\ \frac{1}{5}x^2 + \frac{4}{5}x, \; при\; 0 < x \le 1, \\ 1, \; при\; x > 1. \end{cases}$$

3 $$F(x) = \begin{cases} 0, \; при\; x \le -2, \\ \frac{1}{9}(x+2)^2, \; при - 2 < x \le 1 \\ 1, \; при\; x > 1. \end{cases}$$

4 $$F(x) = \begin{cases} 0, \; при\; x \le 0, \\ \frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{4}x, \; при\; 0 < x \le 1 \\ 1, \; при\; x > 1. \end{cases}$$

5 $$F(x)=\begin{cases}0,\ при\ x\le 0,\\ \frac{1}{7}x^2+\frac{6}{7}x,\ при\ 0<x\le 1\\ 1,\ при\ x>1.\end{cases}$$

6 $$F(x)=\begin{cases}0,\ при\ x\le -2,\\ \frac{1}{16}(x+2)^2,\ при -2<x\le 2\\ 1,\ при\ x>2.\end{cases}$$

7 $$F(x)=\begin{cases}0,\ при\ x\le -1,\\ \frac{1}{9}(x+1)^2,\ при -1<x\le 2\\ 1,\ при\ x>2.\end{cases}$$

8 $$F(x)=\begin{cases}0,\ при\ x\le 0,\\ \frac{1}{6}x^2+\frac{5}{6}x,\ при\ 0<x\le 1\\ 1,\ при\ x>1.\end{cases}$$

9 $$F(x)=\begin{cases}0,\ при\ x\le \frac{1}{5},\\ \left(x-\frac{1}{5}\right)^2,\ при\ \frac{1}{5}<x\le \frac{6}{5}\\ 1,\ при\ x>\frac{6}{5}.\end{cases}$$

10 $$F(x)=\begin{cases}0,\ при\ x\le \frac{1}{4},\\ \left(x-\frac{1}{4}\right)^2,\ при\ \frac{1}{4}<x\le \frac{5}{4}\\ 1,\ при\ x>\frac{5}{4}.\end{cases}$$

11 $$F(x)=\begin{cases}0,\ при\ x\le 0,\\ \frac{1}{3}x^2+\frac{2}{3}x,\ при\ 0<x\le 1\\ 1,\ при\ x>1.\end{cases}$$

12 $$F(x)=\begin{cases}0,\ при\ x\le 0,\\ \frac{1}{27}x^2+\frac{2}{9}x,\ при\ 0<x\le 3\\ 1,\ при\ x>3.\end{cases}$$

13 $$F(x)=\begin{cases}0,\ при\ x\le -2,\\ \frac{1}{49}(x+2)^2,\ при -2<x\le 5\\ 1,\ при\ x>5.\end{cases}$$

14 $$F(x)=\begin{cases}0,\ при\ x\le -1,\\ \frac{1}{16}(x+1)^2,\ при -1<x\le 3\\ 1,\ при\ x>3.\end{cases}$$

15 $$F(x)=\begin{cases}0,\ при\ x\le 0,\\ \frac{1}{8}x^2+\frac{1}{4}x,\ при\ 0<x\le 2\\ 1,\ при\ x>2.\end{cases}$$

16 $$F(x)=\begin{cases}0 & x\le -4.1\\ \frac{(x+4{,}1)^2}{36} & -4{,}1<x\le 1{,}9\\ 1 & x>1{,}9\end{cases}$$

17 $$F(x)=\begin{cases}0 & x\le -2{,}1\\ \frac{(x+2{,}1)^2}{49} & -2{,}1<x\le 4{,}9\\ 1 & x>4{,}9\end{cases}$$

18 $$F(x)=\begin{cases}0 & x\le -5\\ \frac{(x+5)^2}{64} & -5<x\le 3\\ 1 & x>3\end{cases}$$

19 $F(x)=\begin{cases} 0 & x\le -2 \\ \dfrac{(x+2)^2}{16} & -2<x\le 2 \\ 1 & x>2 \end{cases}$

20 $F(x)=\begin{cases} 0 & x\le -1{,}5 \\ \dfrac{(x+1{,}5)^2}{9} & -1{,}5<x\le 1{,}5 \\ 1 & x>1{,}5 \end{cases}$

В задачах 21-40 непрерывная случайная величина X задана своей плотностью распределения $f(x)$. Требуется:

1) определить коэффициент A;
2) найти функцию распределения $F(x)$;
3) построить графики функций $f(x)$ и $F(x)$;
4) вычислить математическое ожидание и дисперсию X;
5) определить вероятность того, что X примет значение из интервала (α,β).

21 $f(x)=\begin{cases} 0 & при & x<0, \\ Ax^2 & при & 0\le x\le 2, \\ 0 & при & x>2. \end{cases}$

$\alpha=1,\quad \beta=1{,}7.$

22 $f(x)=\begin{cases} 0 & при & x<1, \\ A\sqrt{x} & при & 1\le x\le 4, \\ 0 & при & x>4. \end{cases}$

$\alpha=2,\quad \beta=3.$

23 $f(x)=\begin{cases} 0 & при & x<1, \\ Ax^3 & при & 1\le x\le 2, \\ 0 & при & x>2. \end{cases}$

$\alpha=1{,}1\quad \beta=1{,}5.$

24 $f(x)=\begin{cases} 0 & при & x<2, \\ A(x+1) & при & 2\le x\le 4, \\ 0 & при & x>4. \end{cases}$

$\alpha=3,\quad \beta=3{,}5.$

25 $f(x)=\begin{cases} 0 & при & x<1, \\ Ax & при & 1\le x\le 5, \\ 0 & при & x>5. \end{cases}$

$\alpha=2,\quad \beta=3.$

26 $f(x)=\begin{cases} 0 & при & x<-1, \\ Ax^4 & при & -1\le x\le 1, \\ 0 & при & x>1. \end{cases}$

$\alpha=0{,}5,\quad \beta=1.$

27 $f(x)=\begin{cases} 0, & x\le -\dfrac{1}{2},\quad x>\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{A\sqrt{1-x^2}}, & -\dfrac{1}{2}<x\le\dfrac{1}{2}. \end{cases}$

$\alpha=0,\quad \beta=1/3.$

28 $f(x)=\begin{cases} 0 \text{ при } x\le 1, x\ge 2, \\ a\left(x-\dfrac{1}{2}\right) \text{ при } 1<x\le 2. \end{cases}$

$\alpha=-1,\quad \beta=3.$

29 $f(x)=\begin{cases} 3x^2+A, & 0<x\le 1 \\ 0, & x\le 0,\quad x>1 \end{cases}$

$\alpha=-1,\quad \beta=1/4.$

30 $f(x)=\begin{cases} 0, & x\le -4,\quad x>0 \\ A(x+4), & -4<x\le 0 \end{cases}$

$\alpha=-5,\quad \beta=1.$

31 $f(x)=\begin{cases} A\sin 3x, & \frac{\pi}{6}<x\le\frac{\pi}{3} \\ 0, & x\le\frac{\pi}{6},\ x>\frac{\pi}{3}. \end{cases}$

$\alpha = -\frac{\pi}{6};\ \beta = \frac{\pi}{3}.$

32 $f(x)=\begin{cases} A\sin 2x & при\ 0\le x\le\frac{\pi}{4}, \\ 0\ при\ x<0\ или\ x>\frac{\pi}{4}. \end{cases}$

$\alpha = \frac{\pi}{6};\ \beta = \pi.$

33 $f(x)=\begin{cases} A\cos 2x & при\ 0\le x\le\frac{\pi}{4}, \\ 0\ при\ x<0\ или\ x>\frac{\pi}{4}. \end{cases}$

$\alpha = \frac{\pi}{6};\ \beta = \frac{\pi}{2}.$

34 $f(x)=\begin{cases} 0, x<0, \\ Ae^{-3x}, x\ge 0. \end{cases}$

$\alpha=1,\quad \beta=3.$

35 $f(x)=\begin{cases} Ae^{-2x} & при\ x\ge 0, \\ 0\ при\ x<0. \end{cases}$

$\alpha=1,\quad \beta=2.$

36 $f(x)=\begin{cases} Ax^2e^{-x}, & x>0 \\ 0, & x\le 0 \end{cases}$

$\alpha=1,\quad \beta=4.$

37 $f(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0,\ x>1 \\ A(x+3), & 0<x\le 1. \end{cases}$

$\alpha=-2,\quad \beta=3.$

38 $f(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0,\ x>1 \\ A(2x+5), & 0<x\le 1. \end{cases}$

$\alpha=1,\quad \beta=2.$

39 $f(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0 \\ A(2x+1), & 0<x\le 1. \end{cases}$

$\alpha=-1,\quad \beta=7.$

40 $f(x)=\begin{cases} 0, & x\le -4,\ x>0 \\ A(x+4), & -4<x\le 0 \end{cases}$

$\alpha=-5,\quad \beta=1.$

41. Еженедельный выпуск продукции на заводе приблизительно распределен по нормальному закону со средним значением, равным 148780 ед. продукции в неделю, и стандартным отклонением 11000 единиц. Предположим, что возникли трудовые споры, и недельный выпуск продукции стал ниже 80000 единиц. Менеджеры обвиняют профсоюз в беспрецедентном падении выпуска продукции, а профсоюз утверждает, что выпуск пр Еодукции находится в пределах принятого уровня ($\pm 3\sigma$). Можно ли доверять профсоюзу?

42. Предположим, что в течение года цена на акции некоторой компании есть случайная величина, распределенная по нормальному закону с математическим ожиданием, равным 48 у.е., стандартным отклонением, равным 6 у.е. Определите вероятность того, что в случайно выбранный день обсуждаемого периода цена была: а) более 60 у.е. за акцию; б) ниже 60 у.е. за акцию; в) между 40 и 50 у.е. за акцию.

43. Дневная добыча угля в некоторой шахте распределена по нормальному закону с математическим ожиданием 785т и стандартным отклонением 60т. Найдите вероятность того, что в определенный день будут добыты, по крайней мере, 800т угля. Определите долю рабочих дней, в которые будет добыто от 750т до 850т угля. Найдите вероятность того, что в данный день добыча угля окажется ниже 665т.

44. Размер мужских сорочек является случайной величиной с нормальным законом распределения, математическим ожиданием 39 и дисперсией 9. Какой процент от общего объема заказа следует предусмотреть магазину для сорочек 40-го размера при условии, что этот размер находится в интервале (39,5; 40,5)?

45. Урожайность овощей по участкам является нормально распределенной случайной величиной с математическим ожиданием 300 *ц/га* и средним квадратическим отклонением 30 *ц/га*. С вероятностью 0,9545 определить границы, в которых будет находиться средняя урожайность овощей на участках.

46. Вес пойманной рыбы подчиняется нормальному закону распределения с параметрами $a = 375\,г,\ \sigma = 25\,г$. Найти вероятность того, что вес одной рыбы будет: а) от 300 до 425 г; б) не более 450 г; в) больше 300г.

47. Предположим, что вес яиц – нормально распределенная случайная величина X с параметром $\sigma = 7\,г$. В заготовку идут яйца, отклонение веса которых от математического ожидания не превышает по модулю 10 г. Каково наиболее вероятное число идущих в заготовку яиц из 1000?

48. Станок-автомат изготавливает валики, контролируя их диаметры *X*. Считая, что случайная величина *X* распределена нормально, с параметрами $a = 10\,мм,\ \sigma = 0{,}1\,мм$, найти интервал, в котором с вероятностью 0,9973 будут заключены диаметры изготовленных валиков.

49. Случайная величина *X* распределена по нормальному закону с математическим ожиданием $a = 25$. Вероятность попадания *X* в интервал (10, 15) равна 0,2. Найти вероятность попадания *X* в интервал (35, 40)..

50. Найти вероятность того, что нормальная случайная величина с математическим ожиданием, равным 3, дисперсией, равной 4, примет значения: а) в интервале (- 1; 5); б) не более 8; в) не менее 5.

51. Известно, что вес некоторых плодов, выращиваемых в совхозе, подчиняется нормальному закону с математическим ожиданием 175г и $\sigma = 25$. Определить вероятность того, что вес наудачу взятого плода будет: а) заключен в пределах от 125 до 250 г; б) не менее 250г; в) не более 300г.

52. Изготовленные цехом детали по размерам диаметра распределяются по нормальному закону с математическим ожиданием 4,9 см. и средним квадратическим отклонением 0,5 см. Определить вероятность того, что диаметр взятой наудачу детали отклонится от математического ожидания менее чем на 1 см.

53. При измерении расстояний до удаленных предметов ошибка подчинена нормальному закону со средним значением, равным 20 м. и средним квадратическим отклонением 40 м. Определить вероятность того, что измеренное расстояние отклоняется от действительного в ту или иную сторону не более чем на 30 м.

54. Изделия, выпускаемые цехом, по своим линейным размерам распределяются по нормальному закону с математическим ожиданием равным 5 см. Известна вероятность, равная 0,9758,что наудачу взятое одно изделие будет иметь размеры в границах от 4,95 см. до 5,05 см. Найти дисперсию этой случайной величины.

55. Длина изготовляемой автоматом детали, представляет собой случайную величину, распределённую по нормальному закону с параметрами $a=15$ см и $\sigma= 0,2$ см. Найти вероятность брака, если допустимые размеры детали должны быть $15 \pm 0,3$ см. Какую точность длины изготовленной автоматом детали можно гарантировать с вероятностью 0,97?

56. На автомате изготавливают заклёпки. Диаметр их головок представляет собой случайную величину, распределённую по нормальному закону и имеет среднее значение, равное 2 мм, и дисперсию, равную 0,01 мм^2 Какие размеры диаметра головок заклёпки можно гарантировать с вероятностью 0,95?

57. Вес вылавливаемых в пруду рыб подчиняется нормальному закону распределения со средним квадратическим отклонением 150 *г* и математическим ожиданием 1000 *г*. найти вероятность того, что вес пойманной рыбы будет: а) от 900 до 1300 г; б) отличаться от среднего веса по абсолютной величине не более, чем на 200 *г*.

58. Выборочным методом измеряется засоренность зерна, случайные ошибки измерения подчинены нормальному закону распределения со средним квадратическим отклонением 0,2 *г* и математическим ожиданием равным 0. найти вероятность того, что из четырех независимых измерений ошибка, хотя бы одного из них, не превзойдет по абсолютной величине 0,3 *г*.

59. Количество зерна, собранного с каждой делянки опытного поля, есть нормально распределенная случайная величина X с математическим

ожиданием 60 *кг* и средним квадратическим отклонением 1,5 *кг*. Найти симметричный относительно математического ожидания интервал, в котором с вероятностью 0,9906 будет заключена величина X. Написать функцию плотности величины X.

60. Средняя дальность полета снаряда 1200 *м*. Дальность полета снаряда распределена по нормальному закону со средним квадратическим отклонением 40 *м*. Какую точность дальности полета снаряда можно гарантировать с вероятностью 0,96.

В задачах 61-80 время ожидания автомобиля для разгрузки зерна из железнодорожных вагонов является равномерно распределенной непрерывной случайной величиной. Машины для отвозки зерна подходят с интервалом Δt мин. Найти: 1) дифференциальную и интегральную функции распределения данной случайной величины; 2) вероятность того, что время ожидания автобуса не превзойдет t минут; 3) вероятность того, что время ожидания автобуса превысит t_1 минут; 4) среднее время ожидания и дисперсию времени ожидания.

61. $\Delta t = 12$, $t = 7$, $t_1 = 8$

62. $\Delta t = 15$, $t = 8$, $t_1 = 10$

63. $\Delta t = 8$, $t = 6$, $t_1 = 7$

64. $\Delta t = 25$, $t = 15$, $t_1 = 18$

65. $\Delta t = 20$, $t = 14$, $t_1 = 15$

66. $\Delta t = 10$, $t = 6$, $t_1 = 7$

67. $\Delta t = 11$, $t = 7$, $t_1 = 9$

68. $\Delta t = 9$, $t = 5$, $t_1 = 8$

69. $\Delta t = 10$, $t = 6$, $t_1 = 8$

70. $\Delta t = 8$, $t = 4$, $t_1 = 5$

71. $\Delta t = 9$, $t = 5$, $t_1 = 6$

72. $\Delta t = 12$, $t = 7$, $t_1 = 10$

73. $\Delta t = 15$, $t = 10$, $t_1 = 12$

74. $\Delta t = 13$, $t = 11$, $t_1 = 12$

75. $\Delta t = 12$, $t = 9$, $t_1 = 10$

76. $\Delta t = 7$, $t = 5$, $t_1 = 6$

77. $\Delta t = 25$, $t = 15$, $t_1 = 17$

78. $\Delta t = 20$, $t = 12$, $t_1 = 15$

79. $\Delta t = 35$, $t = 25$, $t_1 = 32$

80. $\Delta t = 18$, $t = 14$, $t_1 = 16$.

В задачах 81-100 Известно, что время T (час.), необходимое на устранение неисправности в радиоаппаратуре подчиняется показательному распределению с параметром λ. Определить: а) вероятность того, что на устранение некоторой неисправности потребуется от t_1 до t_2 часов; б) вероятность того, что время устранения некоторой неисправности не превысит t часов; в) количество часов в среднем, затрачиваемое на устранение одной неисправности в радиоаппаратуре.

81. $\lambda = 0{,}3$, $t_1 = 2$, $t_2 = 4$, $t = 6$

82. $\lambda = 0{,}25$, $t_1 = 1$, $t_2 = 3$, $t = 4$

83. $\lambda = 0{,}5$, $t_1 = 1{,}5$, $t_2 = 2{,}5$, $t = 3$

84. $\lambda = 0{,}45$, $t_1 = 2{,}5$, $t_2 = 4{,}5$, $t = 6$

85. $\lambda = 0{,}15$, t_1 =1,4 3, $t_2 = 2{,}6$, t = 5

86. $\lambda = 0{,}35$, $t_1 = 0{,}4$, $t_2 = 1{,}2$, $t = 4$

87. $\lambda = 0{,}45$, $t_1 = 2{,}1$, $t_2 = 3{,}5$, $t = 4$

88. $\lambda = 0{,}18$, $t_1 = 1{,}8$, $t_2 = 2{,}4$, $t = 7$

99. $\lambda = 0{,}25$, $t_1 = 2{,}4$, $t_2 = 4$, $t = 6$

90. $\lambda = 0{,}8$, $t_1 = 0{,}6$, $t_2 = 2{,}5$, $t = 4$

91. $\lambda = 0{,}35$, $t_1 = 1{,}6$, $t_2 = 2,\ 5$, $t = 4$

92. $\lambda = 0{,}4$, $t_1 = 2{,}4$, $t_2 = 3$, $t = 5$

93. $\lambda = 0{,}19$, $t_1 = 3{,}5$, $t_2 = 4{,}5$, $t = 5$

94. $\lambda = 0{,}2$, $t_1 = 1{,}5$, $t_2 = 2{,}3$, $t = 3$

55. $\lambda = 0{,}16$, $t_1 = 1$, $t_2 = 2{,}5$, $t = 3$

96. $\lambda = 0{,}18$, $t_1 = 0{,}8$, $t_2 = 1{,}6$, $t = 2$

97. $\lambda = 0{,}55$, $t_1 = 2$, $t_2 = 3{,}5$, $t = 4$

98. $\lambda = 0{,}35$, $t_1 = 2{,}4$, $t_2 = 3{,}6$, $t = 5$

99. $\lambda = 0{,}45$, $t_1 = 1{,}8$, $t_2 = 2{,}5$, $t = 3$

100. $\lambda = 0{,}28$, $t_1 = 1{,}5$, $t_2 = 2{,}5$, $t =$

Приложение

Таблица 1

Значение функции $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3653	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	2420	2396	2371	2347	2323	22989	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2331	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

Таблица 2

Значение функции $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$

x	*Φ(x)*	*x*	*Φ(x)*	*x*	*Φ(x)*	*x*	*Φ(x)*
0,00	0,0000	0,20	0,0793	0,40	0,1554	0,60	0,2257
0,01	0,0040	0,21	0,0832	0,41	0,1591	0,61	0,2291
0,02	0,0080	0,22	0,0871	0,42	0,1628	0,62	0,2324
0,03	0,0120	0,23	0,0910	0,43	0,1664	0,63	0,2357
0,04	0,0160	0,24	0,0948	0,44	0,1700	0,64	0,2389
0,05	0,0199	0,25	0,0987	0,45	0,1736	0,65	0,2422
0,06	0,0239	0,26	0,1026	0,46	0,1772	0,66	0,2454
0,07	0,0279	0,27	0,1064	0,47	0,1808	0,67	0,2486
0,08	0,0319	0,28	0,1003	0,48	0,1844	0,68	0,2517
0,09	0,0359	0,29	0,1141	0,49	0,1879	0,69	0,2549
0,10	0,0398	0,30	0,1179	0,50	0,1915	0,70	0,2580
0,11	0,0438	0,31	0,1217	0,51	0,1950	0,71	0,2611
0,12	0,0478	0,32	0,1255	0,52	0,1985	0,72	0,2642
0,13	0,0517	0,33	0,1293	0,53	0,2019	0,73	0,2673
0,14	0,0557	0,34	0,1331	0,54	0,2054	0,74	0,2703
0,15	0,0596	0,35	0,1368	0,55	0,2088	0,75	0,2734
0,16	0,0636	0,36	0,1406	0,56	0,2123	0,76	0,2764
0,17	0,0675	0,37	0,1443	0,57	0,2157	0,77	0,2794
0,18	0,0714	0,38	0,1480	0,58	0,2190	0,78	0,2823
0,19	0,0753	0,39	0,1515	0,59	0,2224	0,79	0,2852
0,80	0,2881	1,15	0,3749	1,50	0,4332	1,85	0,4678
0,81	0,2910	1,16	0,3770	1,51	0,4345	1,86	0,4686
0,82	0,2939	1,17	0,3790	1,52	0,4357	1,87	0,4693
0,83	0,2967	1,18	0,3810	1,53	0,4370	1,88	0,4699
0,84	0,2995	1,19	0,3830	1,54	0,4382	1,89	0,4706
0,85	0,3023	1,20	0,3849	1,55	0,4394	1,90	0,4713
0,86	0,3051	1,21	0,3869	1,56	0,4406	1,91	0,4719
0,87	0,3078	1,22	0,3883	1,57	0,4418	1,92	0,4726
0,88	0,3106	1,23	0,3907	1,58	0,4429	1,93	0,4732
0,89	0,3133	1,24	0,3925	1,59	0,4441	1,94	0,4738
0,90	0,3159	1,25	0,3944	1,60	0,4452	1,95	0,4744
0,91	0,3186	1,26	0,3962	1,61	0,4463	1,96	0,4750
0,92	0,3213	1,27	0,3980	1,62	0,4474	1,97	0,4756
0,93	0,3238	1,28	0,3997	1,63	0,4484	1,98	0,4761
0,94	0,3264	1,29	0,4015	1,64	0,4495	1,99	0,4767
0,95	0,3289	1,30	0,4032	1,65	0,4055	2,00	0,4772
0,96	0,3315	1,31	0,4049	1,66	0,4515	2,02	0,4783
0,97	0,3340	1,32	0,4066	1,67	0,4525	2,04	0,4793
0,98	0,3365	1,33	0,4082	1,68	0,4535	2,06	0,4803
0,99	0,3389	1,34	0,4099	1,69	0,4545	2,08	0,4812

Продолжение таблицы 2

x	*Ф(x)*	*x*	*Ф(x)*	*x*	*Ф(x)*	*x*	*Ф(x)*
1,00	0,3413	1,35	0,4115	1,70	0,4554	2,10	0,4821
1,02	0,3461	1,37	0,4147	1,72	0,4573	2,14	0,4838
1,03	0,3485	1,38	0,4162	1,73	0,4582	2,16	0,4846
1,04	0,3508	1,39	0,4177	1,74	0,4591	2,18	0,4854
1,05	0,3531	1,40	0,4192	1,75	0,4599	2,20	0,4861
1,06	0,3554	1,41	0,4207	1,76	0,4608	2,22	0,4868
1,07	0,3577	1,42	0,4222	1,77	0,4616	2,24	0,4875
1,08	0,3599	1,43	0,4236	1,78	0,4625	2,26	0,4881
1,09	0,3621	1,44	0,4251	1,79	0,4633	2,28	0,4887
1,10	0,3643	1,45	0,4265	1,80	0,4641	2,30	0,4893
1,11	0,3665	1,46	0,4279	1,81	0,4649	2,32	0,4898
1,12	0,3686	1,47	0,4292	1,82	0,4656	2,34	0,4904
1,13	0,3708	1,48	0,4306	1,83	0,4664	2,36	0,4909
1,14	0,3729	1,49	0,4319	1,84	0,4671	2,38	0,4913
2,40	0,4918	2,60	0,4953	2,80	0,4974	3,00	0,49865
2,42	0,4922	2,62	0,4956	2,82	0,4976	3,20	0,49931
2,44	0,4927	2,64	0,4959	2,84	0,4977	3,40	0,49966
2,46	0,4931	2,66	0,4961	2,86	0,4979	3,60	0,499841
2,48	0,4934	2,68	0,4963	2,88	0,4980	3,80	0,499928
2,50	0,4938	2,70	0,4965	2,90	0,4981	4,00	0,499968
2,52	0,4941	2,72	0,4967	2,92	0,4982	4,50	0,499997
2,54	0,4945	2,74	0,4969	2,94	0,4984	5,00	0,49999997
2,56	0,4948	2,76	0,4971	2,96	0,4985	∞	0,5
2,58	0,4951	2,78	0,4973	2,98	0,4986		

Таблица 3

Значение функции e^{-x}

x	e^{-x}	x	e^{-x}	x	e^{-x}	x	e^{-x}
0,00	1,000	0,40	0,670	0,80	0,449	3,00	0,050
0,01	0,990	0,41	0,664	0,81	0,445	3,10	0,040
0,02	0,980	0,42	0,657	0,82	0,440	3,20	0,041
0,03	0,970	0,43	0,650	0,83	0,436	3,30	0,037
0,04	0,961	0,44	0,644	0,84	0,432	3,40	0,033
0,05	0,951	0,45	0,638	0,85	0,427	3,50	0,030
0,06	0,942	0,46	0,631	0,86	0,423	3,60	0,027
0,07	0,932	0,47	0,625	0,87	0,419	3,70	0,025
0,08	0,923	0,48	0,619	0,88	0,415	3,80	0,022
0,09	0,914	0,49	0,613	0,89	0,411	3,90	0,020
0,10	0,905	0,50	0,606	0,90	0,407	4,00	0,0183
0,11	0,896	0,51	0,600	0,91	0,403	4,10	0,0166
0,12	0,887	0,52	0,595	0,92	0,399	4,20	0,0150
0,13	0,878	0,53	0,589	0,93	0,395	4,30	0,0136
0,14	0,869	0,54	0,583	0,94	0,391	4,40	0,0123
0,15	0,861	0,55	0,577	0,95	0,387	4,50	0,0111
0,16	0,852	0,56	0,571	0,96	0,383	4,60	0,0101
0,17	0,844	0,57	0,565	0,97	0,379	4,70	0,0091
0,18	0,835	0,58	0,560	0,98	0,375	4,80	0,0082
0,19	0,827	0,59	0,554	0,99	0,372	4,90	0,0074
0,22	0,819	0,60	0,549	1,00	0,368	5,00	0,0067
0,21	0,811	0,61	0,543	1,10	0,333	5,10	0,0061
0,22	0,803	0,62	0,538	1,20	0,302	5,20	0,0055
0,23	0,795	0,63	0,533	1,30	0,273	5,30	0,0050
0,24	0,787	0,64	0,527	1,40	0,247	5,40	0,0045
0,25	0,779	0,65	0,522	1,50	0,223	5,50	0,0041
0,26	0,771	0,66	0,517	1,60	0,202	5,60	0,0037
0,27	0,763	0,67	0,512	1,70	0,183	5,70	0,0033
0,28	0,756	0,68	0,507	1,80	0,165	5,80	0,0030
0,29	0,748	0,69	0,502	1,90	0,150	5,90	0,0027
0,30	0,741	0,70	0,497	2,00	0,135	6,00	0,0025
0,31	0,733	0,71	0,492	2,10	0,122	6,10	0,0022
0,32	0,726	0,72	0,487	2,20	0,111	6,20	0,0020
0,33	0,719	0,73	0,482	2,30	0,100	6,30	0,0018
0,34	0,712	0,74	0,477	2,40	0,091	6,40	0,0017
0,35	0,705	0,75	0,472	2,50	0,082	6,50	0,0015
0,36	0,698	0,76	0,468	2,60	0,074	6,60	0,0014
0,37	0,691	0,77	0,463	2,70	0,067	6,70	0,0012
0,38	0,684	0,78	0,458	2,80	0,061	6,80	0,0011
0,39	0,677	0,79	0,454	2,90	0,055	7,00	0,0009

Библиографический список

1. Панюкова, Т. А. Комбинаторика и теория графов / Т.А. Панюкова. - Москва: Гостехиздат, 2014. - 216 с.

2. Райгородский, А. М. Вероятность и алгебра в комбинаторике / А.М. Райгородский. - М.: МЦНМО, 2010. - 48 сТишин, В. И. Информатика и математика. В 3 частях. Часть 1. Решение задач комбинаторики и теории вероятностей / В.И. Тишин. - Москва: СИНТЕГ, 2014. - 240 с.

3. Карлов А. М. Теория вероятностей и математическая статистика для экономистов. Учебное пособие / А.М. Карлов. - М.: КноРус, 2015. - 268 с.

4. Кремер Н. Ш. Теория вероятностей и математическая статистика : учебник и практикум для академического бакалавриата / Н. Ш. Кремер. — 5-е изд., перераб. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2019. — 538 с.

5. Мятлев В. Д. Теория вероятностей и математическая статистика. Математические модели : учебник для академического бакалавриата / В. Д. Мятлев, Л. А. Панченко, Г. Ю. Ризниченко, А. Т. Терехин. — 2-е изд., испр. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2019. — 321 с.

6. Малугин В. А. Теория вероятностей : учебное пособие для бакалавриата и магистратуры / В. А. Малугин. — Москва : Издательство Юрайт, 2019. — 266 с.

7. Горлач Б. А. Теория вероятностей и математическая статистика / Б.А. Горлач. - М.: Лань, 2013. - 320 с.

8. Палий И. А. Теория вероятностей. Задачник: учебное пособие для среднего профессионального образования / И. А. Палий. — 3-е изд., испр. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2019. — 236 с.

9. Балдин К. В. Основы теории вероятностей и математической статистики / К.В. Балдин, В.Н. Башлыков, А.В. Рукосуев. - М.: Флинта, НОУ ВПО МПСИ, 2010. - 488 с.

10. Вентцель Е. С. Задачи и упражнения по теории вероятностей / Е.С. Вентцель, Л.А. Овчаров. - М.: Высшая школа, 2006. - 448 с.

11. Гмурман В. Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике / В.Е. Гмурман. - М.: Юрайт, 2013. - 416 с.

12. Кибзун А. И. Теория вероятностей и математическая статистика. Базовый курс с примерами и задачами / А.И. Кибзун, Е.Р. Горяинова, А.В.

Наумов. - Москва: Огни, 2014. - 232 с.

13. Крупин В.Г. Теория вероятностей / В.Г. Крупин. - М.: Факториал Пресс, 2006. - 557 с.

14. Курс высшей математики. Теория вероятностей / И.М. Петрушко и др. - М.: Лань, 2008. - 352 с.

15. Мхитарян В.С. Теория вероятностей и математическая статистика / В.С. Мхитарян. - М.: Академия (Academia), 2012. - 356 с.

16. Попов А. М. Математика для экономистов (комплект из 3 книг) / А.М. Попов, В.Н. Сотников. - М.: Юрайт, 2014. - 562 с.

17. Практикум и индивидуальные задания по курсу теории вероятностей (типовые расчеты). Учебное пособие. - М.: Лань, 2010. - 288 с.

18. Шумай Т. А. Теория вероятностей: учеб. пособие для студентов аграр. вузов, обучающихся по экон. и биол. направлениям бакалавриата: допущено М-вом сел. хоз-ва Рос. Федерации/Т. А. Шумай, А. И. Мартыненко: Иркут. гос. с.-х. акад. - Иркутск : Изд-во ИрГСХА, 2013. - 174 с.

Овчинникова Наталья Ивановна

Математика. Практикум по теории вероятностей

Учебное пособие

Редактор Тесля В.И.

Подготовка оригинал-макета: Овчинникова Н.И.

Лицензия на издательскую деятельность

ЛР № 070444 от 11.03.98 г.

Подписано в печать 19.12.2018.

Тираж 150 экз.

Издательство Иркутского государственного

аграрного университета им. А.А. Ежевского

664038, Иркутская обл., Иркуский р-он,

пос. Молодежный