

Министерство сельского хозяйства Российской Федерации  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
Иркутский государственный аграрный университет имени А.А. Ежевского  
Кафедра экономики АПК

Ким Т.Д., Труфанова С.В.

## **СТАТИСТИКА**

Учебное пособие по изучению курса «Общая теория статистики» и контрольные задания для студентов 2-го курса экономических специальностей очного и заочного форм обучения  
2-издание, исправленное

Молодежный, 2020

Печатается по решению научно-методического совета ФГОУ ВПО Иркутской государственной сельскохозяйственной академии (протокол № 4 от 25 января 2010 г.).

Печатается по решению методической комиссии ИЭУПИ ФГБОУ ВО Иркутского государственного аграрного университета имени А.А. Ежевского протокол № 2 от 27 октября 2020 г.

Рецензенты: к.э.н., доцент кафедры информатики и математического моделирования ФГОУ ВПО ИрГСХА Федурин Н.И.

к.э.н., доцент кафедры организации и управления ФГОУ ВПО ИрГСХА Федорова Т.П.

Ким, Т.Д. Учебное пособие по самостоятельному изучению курса «Общая теория статистики» и контрольные задания для студентов 2-го курса экономических специальностей очного и заочного форм обучения / Т.Д. Ким, С.В. Труфанова; Иркут. гос. аграр. у-т им. А.А. Ежевского. – Молодежный: Изд-во ИрГАУ, 2020. – Молодежный, 2020. – 140 с. (8,7 п.л.)

Учебное пособие охватывает все разделы курса «Общая теория статистики», являющегося базовым для студентов экономических специальностей очной и заочной форм обучения. Пособие включает два раздела: теоретическую часть, состоящую из 10 тем с решениями типовых примеров и контрольными вопросами; разработанные задания для выполнения контрольных работ студентами заочной формы обучения, и самостоятельной работы для студентов очной формы обучения при решении конкретных практических задач.

Издание окажет несомненную помощь при изучении данного курса по овладению методологией и практическими навыками обработки и анализа статистических данных. Для студентов экономических специальностей.

© Ким Т.Д., Труфанова С.В., 2020  
© ИрГАУ, 2020

## СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	4
РАЗДЕЛ 1. ОБЩИЕ МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ИЗУЧЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ	
1.1 Цели и задачи изучения дисциплины	5
1.2 Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине	6
1.3 Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины. Варианты контрольных работ	7
1.4 Методология изучения отдельных тем с контрольными вопросами и типологические задачи	
Тема 1. Предмет, метод, функции статистики	11
Тема 2. Статистическое наблюдение	11
Тема 3. Абсолютные и относительные величины	12
Тема 4. Статистическая сводка и группировка	15
Тема 5. Средние величины. Показатели вариации	23
Тема 6. Статистические таблицы и графики	38
Тема 7. Ряды динамики	39
Тема 8. Индексы	59
Тема 9. Выборочное наблюдение	74
Тема 10. Статистическое изучение взаимосвязей социально-экономических явлений.	79
РАЗДЕЛ 2. ВАРИАНТЫ ЗАДАЧ	100
ПРИЛОЖЕНИЕ	139

## ВВЕДЕНИЕ

В осуществлении задач по экономической реформе в АПК большая роль принадлежит статистике, так как основой решения любой проблемы является анализ, прогнозирование, оптимизация, экономическое обеспечение, что теснейшим образом связано с применением экономико-статистических методов при обработке цифровой информации.

Курс статистика знакомит студентов с тем, как собираются массовые данные, почему нельзя сделать умозаключение об уровне жизни населения, об изменениях погодных условий и т.д. на основе единичного явления, как данные обобщаются и анализируются. В курсе «Статистика» дается представление о сущности статистического метода и особенностях его применения к изучению социально-экономических явлений и процессов.

В учебном пособии рассмотрены основные методы статистического метода исследования (статистическое наблюдение, сводка и группировка, расчет обобщающих показателей, выборочный метод, анализ рядов динамики, индексный метод анализа, основы корреляционного и регрессионного анализа).

Теория статистической методологии подкреплена иллюстрацией применения статистических методов в исследовании конкретных социально-экономических процессов в АПК Иркутской области.

Учебное пособие состоит из двух разделов. В первом разделе рассмотрены вопросы организации самостоятельного изучения курса «Общая теория статистики» студентами 2-го курса экономических специальностей и методология изучения каждой темы с разработкой типологических примеров и контрольных вопросов. Во втором разделе разработаны варианты задач и примеров для выполнения контрольных заданий для заочной и очной форм обучения – самостоятельно.

При написании учебного пособия учитывались ранее опубликованные методические и нормативные материалы, учебники, практикумы, альбомы наглядных пособий.

# РАЗДЕЛ 1. ОБЩИЕ МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ИЗУЧЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ

## 1.1 Цели и задачи изучения дисциплины

Цель освоения дисциплины: познание методов статистического анализа, практическое овладение приемами экономико-статистического анализа для изучения тенденций и закономерностей развития массовых социально-экономических явлений.

Основные задачи освоения дисциплины:

освоение методов получения, обработки и анализа статистической информации;

ознакомление студентов с системой статистических показателей, отражающих состояние и развитие экономических и социальных явлений и процессов общественной жизни, методологией их построения и анализа.

Результатом освоения дисциплины «Статистика» является овладение бакалаврами по направлению подготовки 38.03.01 Экономика следующих видов профессиональной деятельности:

- расчетно-экономическая деятельность;
  - аналитическая, научно-исследовательская деятельность,
- в том числе компетенциями заданными ФГОС ВО.

Дисциплина «Статистика» находится в Базовой части блока 1 учебного плана. Приступая к изучению данной дисциплины, студент должен иметь базовые знания по Экономической информатике (ОПК-1, ПК-1), Микроэкономике (ОК-3), Макроэкономике (ОК-3).

Знания и умения, полученные в результате освоения дисциплины «Статистика», являются необходимыми для изучения следующих дисциплин: Деньги, кредит, банки (ОПК-2), Основы финансовых вычислений (ОПК-3, ПК-1), Бухгалтерский учет и анализ (ПК-14, 15, 16, 17), Планирование и прогнозирование на предприятиях АПК (ПК-3), Учебная практика по получению

первичных профессиональных умений и навыков, в том числе первичных умений и навыков научно-исследовательской работы (ОПК-1,2,3,4 ПК-7).

Дисциплина изучается на 2 курсе в 3-4 семестрах.

## 1.2 Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине

В результате освоения дисциплины обучающийся должен овладеть знаниями, умениями и навыками в целях приобретения следующих компетенций (табл. 1.1).

Таблица 1.1 – Компетенции и планируемые результаты обучения по дисциплине, характеризующие этапы формирования компетенции

Трудовое действие	Наименование компетенции, необходимой для выполнения трудового действия (планируемые результаты освоения ОП)	Планируемые результаты обучения по дисциплине, характеризующие этапы формирования компетенции
<b>Общепрофессиональные компетенции</b>		
-	ОПК-2 – способностью осуществлять сбор, анализ и обработку данных, необходимых для решения профессиональных задач	<b>В области знания и понимания (А)</b>
		<b>Знать:</b> методы сбора, анализа и обработки данных, необходимых для решения профессиональных задач
		<b>В области интеллектуальных навыков (В)</b>
		<b>Уметь:</b> осуществлять сбор, анализ и обработку данных, необходимых для решения профессиональных задач
<b>Профессиональные компетенции</b>		
<b>Обобщенная трудовая функция – Обработка статистических данных<sup>1</sup></b>		
<b>Трудовая функция – В/03.6Формирование систем взаимосвязанных статистических показателей</b>		
Трудовое действие – расчет агрегированных и производных статистических показателей	ПК-1 – способностью собрать и проанализировать исходные данные, необходимые для расчета экономических и социально-экономических показателей, характеризующих деятельность хозяйствующих субъектов	<b>В области знания и понимания (А)</b>
		<b>Знать:</b> методы сбора и анализа исходных данных, необходимых для расчета экономических и социально-экономических показателей, характеризующих деятельность хозяйствующих субъектов
		<b>В области интеллектуальных навыков (В)</b>
		<b>Уметь:</b> собрать и проанализировать исходные данные, необходимые для расчета экономических и социально-экономических показателей, характеризующих деятельность хозяйствующих субъектов
<b>В области практических умений (С)</b>		
<b>Владеть:</b> способностью собрать и проанализировать исходные данные, необходимые для расчета экономических и		

<sup>1</sup> Обобщенная трудовая функция взята из профессионального стандарта «Статистик»

		социально-экономических показателей, характеризующих деятельность хозяйствующих субъектов
<b>Трудовое действие</b> – подготовка аналитических материалов	<b>ПК-6</b> – способностью анализировать и интерпретировать данные отечественной и зарубежной статистики о социально-экономических процессах и явлениях, выявлять тенденции изменения социально-экономических показателей	<b>В области знания и понимания (А)</b>
		<b>Знать:</b> методы анализа и интерпретации данных отечественной и зарубежной статистики о социально-экономических процессах и явлениях, тенденции изменения социально-экономических показателей
		<b>В области интеллектуальных навыков (В)</b>
		<b>Уметь:</b> анализировать и интерпретировать данные отечественной и зарубежной статистики о социально-экономических процессах и явлениях, выявлять тенденции изменения социально-экономических показателей
		<b>В области практических умений (С)</b>
		<b>Владеть:</b> способностью анализировать и интерпретировать данные отечественной и зарубежной статистики о социально-экономических процессах и явлениях, выявлять тенденции изменения социально-экономических показателей

### 1.3 Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины. Варианты контрольных работ

#### Основная литература:

1. Балдин К. В. Общая теория статистики [Электронный учебник]: учеб. пособие / К. В. Балдин, А. В. Рукоусев. – Москва: Дашков и К, 2017. – 312 с. – Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/93403>
2. Годин А.М.. Статистика [Электронный учебник]: учебник: / А. М. Годин. – Москва: Дашков и К, 2017. – 459 с. – Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/93468>
3. Раевская А. В. Статистика [Электронный учебник]: учебное пособие / А. В. Раевская, Н. А. Каширина, Т. В. Иванюга. – Брянск: Брянская ГСХА, 2014. – 174 с. – Режим доступа: <http://ebs.rgazu.ru/index.php?q=node/4457>

#### Дополнительная литература:

1. Гуляева Т. И. Статистика сельского хозяйства и методология ее научного исследования : учебно-методическое пособие / Т.И. Гуляева, Е.В. Бураева. – ОрелГАУ, 2016. – 107 с. – Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/106927>
2. Статистика: Учебно-методическое пособие по выполнению курсовых работ

для студентов всех направлений подготовки ба-калавриата экономического факультета очного и заочного обучения [Электронный учебник] / сост. Труфанова С.В.; сост. Зверев А.Ф.. – 2013. – 159 с. – Режим доступа: <http://rucont.ru/efd/223997>

3. Аксянова А.В.. Теория и практика статистики : учеб. пособие для вузов : допущено Учеб.-метод. об-нием / А.В. Аксянова, Н.Н. Валеев, А.М. Гумеров. – М.: КолосС, 2021. – 284 с.
4. Статистика [Электронный ресурс]: терминолог. словарь / Я. М. Иваньо [и др.]. – Иркутск: ИрГСХА, 2011. – 1 эл. опт. диск
5. Эверитт Б.С. Большой словарь по статистике / Б. С. Эверитт; пер. с англ. Ф. А. Ущева, И. Ю. Чураковой; науч. ред. пер. И. И. Елисеева. – М.: Проспект, 2010. – 731 с.

Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети Интернет,  
необходимых для освоения дисциплины:

1. Электронная библиотечная система «IPRbooks» [Электронный ресурс]. – Электрон. дан. – Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/>
2. Научная электронная библиотека [Электронный ресурс]. – Электрон. дан. – Режим доступа : <http://www.elibrary.ru/>
3. Национальная электронная библиотека [Электронный ресурс]. – Электрон. дан. – Режим доступа: <http://www.nns.ru/>
4. Гарант – информационно-правовой портал. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: [www.garant.ru](http://www.garant.ru).
5. Официальный Интернет-портал правовой информации: Государственная система правовой информации. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: [www.pravo.gov.ru](http://www.pravo.gov.ru).
6. Официальный сайт компании «КонсультантПлюс». [Электронный ресурс]. – Режим доступа: [www.consultant.ru](http://www.consultant.ru).
7. Официальный сайт Министерства финансов Российской Федерации. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: [www.minfin.ru](http://www.minfin.ru).



8. Официальный сайт Счетной палаты Российской Федерации. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: [www.ach.gov.ru](http://www.ach.gov.ru).
9. Официальный сайт Федерального казначейства России. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: [www.roskazna.ru](http://www.roskazna.ru).
10. Официальный сайт Федеральной налоговой службы Российской Федерации. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: [www.nalog.ru](http://www.nalog.ru).
11. Официальный сайт Центрального банка Российской Федерации. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: [www.cbr.ru](http://www.cbr.ru).
12. Российская газета. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: [www.rg.ru](http://www.rg.ru).
13. Официальная статистика по России, госзакупки, публикации (сайт Федеральной службы государственной статистики). – [Электронный ресурс]. – Электрон. дан. – Режим доступа: <https://gks.ru>
14. Официальная статистика по Иркутской области, муниципальная статистика, отчетность, публикации (сайт Территориального органа Федеральной службы государственной статистики по Иркутской области). – [Электронный ресурс]. – Электрон. дан. – Режим доступа: <https://irkutskstat.gks.ru/>
15. Официальная статистика, новости, документы (сайт Продовольственной и сельскохозяйственной организации Объединенных наций). – [Электронный ресурс]. – Электрон. дан. – Режим доступа: <http://www.fao.org/>

В таблице 1.3 представлены варианты контрольной работы.

Таблица 1.3 – Варианты контрольной работы

Первая буква фамилии	Последняя цифра шифра									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
А, Б	1, 58, 82, 123	2, 63, 103, 124	3, 64, 104, 125	4, 65, 105, 126	5, 66, 106, 127	6, 67, 107, 128	7, 68, 108, 129	8, 69, 109, 130	9, 70, 110, 131	10, 71, 111, 132
В, Г	20, 59, 93, 133	11, 31, 62, 134	21, 60, 94, 135	12, 47, 81, 136	26, 72, 96, 137	48, 73, 97, 138	49, 74, 98, 139	50, 75, 99, 140	51, 76, 100, 141	52, 77, 101, 142
Д, Е, Ж	13, 30, 74, 143	14, 32, 78, 144	15, 46, 61, 145	16, 29, 76, 115	17, 33, 79, 116	18, 45, 78, 117	19, 79, 112, 118	22, 44, 80, 119	43, 59, 83, 120	6, 60, 84, 121
З, И	6, 34, 85, 122	7, 28, 63, 123	8, 40, 86, 124	4, 61, 87, 131	9, 62, 88, 131	10, 63, 89, 132	11, 64, 90, 133	12, 65, 91, 134	13, 66, 91, 135	14, 67, 92, 136
К	11, 35, 64, 92	12, 37, 95, 137	13, 30, 66, 138	14, 31, 67, 99	5, 32, 68, 100	15, 33, 81, 117	16, 34, 75, 120	17, 35, 63, 116	18, 36, 60, 114	9, 37, 59, 115
Л, М, Н	23, 38, 83, 115	24, 39, 84, 113	27, 42, 114, 119	5, 29, 65, 86	10, 29, 87, 118	6, 88, 112, 121	3, 47, 89, 125	5, 47, 90, 126	25, 61, 91, 125	9, 37, 59, 115
О, П	11, 59, 68, 137	12, 69, 84, 138	13, 70, 99, 139	14, 71, 90, 130	15, 72, 98, 131	16, 73, 99, 132	7, 17, 55, 102	8, 41, 59, 81	9, 20, 53, 81	10, 21, 85, 125
Р, С, Т	38, 60, 81, 129	3, 39, 61, 113	4, 40, 81, 133	5, 41, 90, 134	6, 42, 94, 135	7, 43, 80, 136	8, 44, 81, 137	9, 45, 83, 138	10, 46, 84, 139	10, 47, 85, 140
У, Ф, Х	11, 66, 112, 141	12, 67, 113, 142	13, 68, 114, 143	14, 69, 115, 144	15, 70, 116, 145	16, 71, 98 117	17, 72, 118, 121	18, 73, 119, 124	21, 85, 120, 130	25, 57, 112, 121
Ц, Ш, Щ	48, 91, 113, 136	3, 54, 85, 137	5, 50, 90, 138	4, 51, 85, 139	6, 52, 86, 140	7, 53, 97, 141	8, 54, 81, 142	9, 55, 82, 143	10, 34, 56, 144	11, 57, 82, 145
Остальные буквы	4, 19, 77, 126	5, 20, 77, 127	6, 21, 66, 128	7, 22, 99, 129	8, 23, 100, 130	9, 24, 55, 131	10, 25, 75, 132	11, 26, 55, 133	12, 27, 85, 134	13, 55, 102, 135

## **1.4 Методология изучения отдельных тем с контрольными вопросами и типологические задачи**

### **Тема 1. Предмет, метод, функции статистики**

Статистика – это общественная наука, изучающая количественную сторону общественных явлений в тесной связи с их количественной стороной в конкретных условиях места и времени.

Свой предмет статистика изучает при помощи определенных понятий и эти понятия должны отражать свойства, признаки, связи общественных явлений.

Статистика дает цифровое освещение изучаемых явлений, позволяет проверить различные утверждения и отдельные теоретические положения с помощью определенных методов (приемов).

Статистика является элементом управления производством (выполняет свои функции), используя свои специфические предмет и метод.

#### *Вопросы для самопроверки.*

1. Предмет и метод статистики.
2. Методы, которые используются в статистике для изучения общественных явлений.
3. Основные категории (понятия) в статистике.
4. Функции статистики.

### **Тема 2. Статистическое наблюдение**

Предоставление статистической информации – главная задача органов государственной статистики.

Структура органов государственной статистики соответствует административно-территориальному делению страны.

Основные функции всех статистических органов – это сбор, обработка, анализ и предоставление данных в удобном для пользователя виде.

Собираемые данные должны отвечать двум требованиям: достоверность и сопоставимость. Достоверность собранных данных обеспечивается полнотой

охвата наблюдаемого объекта и точностью регистрации данных по каждой единице наблюдения.

Важным условием сравнимости является сохранение времени проведения наблюдения, к которому относятся регистрируемые данные.

Статистическое наблюдение проводится определенной формы и вида согласно разработанной программе и постановленным задачам.

Развитие рыночных отношений в России обусловило необходимость реформирования государственной статистики – унификации форм статистической отчетности.

Разработанные показатели унифицированных форм статистической отчетности.

#### *Вопросы для самопроверки.*

1. Назовите последовательно стадии статического исследования.
2. Перечислите виды статистических наблюдений и их особенности.
3. Требования к составлению программы статистического наблюдения.
4. Охарактеризуйте структуру органов статистического наблюдения.

### **Тема 3. Абсолютные и относительные величины**

Результаты статистических наблюдений регистрируются в виде абсолютных величин, которые характеризуют состояние и развитие изучаемых общественных явлений. Эти величины являются именованными с конкретными натуральными, условно-натуральными и стоимостными единицами измерения.

Структуру явлений, соотношения отдельных частей, развитие во времени, степень выполнения плановых заданий, интенсивность явлений можно рассматривать с помощью определенных видов относительных величин. А относительная величина – это обобщающий показатель, который дает числовую меру соотношения двух сопоставляемых абсолютных величин. Должны соблюдаться сопоставимость сравниваемых показателей и наличие реальных связей между изучаемыми явлениями.

Относительные величины всегда производные, определяются в коэффициентах, в процентах, в промилле, в продицемилле и пр.

По содержанию выражаемых количественных соотношений выделяют разные относительные величины:

**1. Относительная величина динамики.** Получается в результате деления уровня признака в определенный период (момент) времени на уровень этого же показателя в предшествующий период (момент).

Так, по данным отчета ООО «Анга» Иркутской области в 2019 году среднегодовая численность работников сельскохозяйственного производства равна 165, а в 2020 году – 179 человек.

Индекс численности в динамике  $179 \div 165 = 1,085$ .

Численность работников увеличилась за 2 года в 1,085 раза, или составляет 108,5% ( $1,085 \times 100$ ). Прирост составляет 8,5%.

**2. Относительная величина планового задания.** Рассчитывается как отношение запланированного уровня на предстоящий период (момент) времени, к уровню фактическому в предшествующем периоде (момента). Выражается в коэффициентах и процентах.

Например, в ООО «Анга» численность работников сельскохозяйственного производства в 2020 году составляла 179 человек, плановая численность на 2021 год – 170 человек.

Это значит, по плану на 2021 год предполагалось уменьшить численность работников с/х по сравнению с фактической численностью в 0,949 раза ( $170 \div 179$ ) или на 5,1% ( $94,9 - 100,0$ ).

**3. Относительная величина выполнения плана.** Составляется отношение фактического уровня к запланированному за один и тот же период (момент) времени.

За 2020 год по плану работников сельскохозяйственного производства должно быть 170 человек, а фактически составляет 175 человек.

Следовательно, выполнение плана по численности работников сельского хозяйства составляет 102,9% ( $175 \div 170 \times 100$ ), или перевыполнение плана составляет 1,029 раза, что составляет 2,9 %.

**4. Относительная величина структуры.** Характеризует долю, удельные веса отдельных частей относительно общего итога. Если в долях, то база сравнения единица. Если отдельные части выражаются в %, то база сравнения 100.

В 2020 году в ООО «Анга» работников сельского хозяйства было 179 человек, в том числе: постоянных работников – 104 чел.; сезонных и временных – 48 чел.; служащих – 27 чел.

Данные представим в таблице 1.3.

Таблица 1.3 – Состав и структура работников с/х производства в ООО «Анга» Иркутской области за 2020 год

Категории работников	Количество, чел	Структура, %
Рабочие постоянные	104	58,10
Рабочие временные и сезонные	48	26,82
Служащие	27	15,08
Всего	179	100,00

$$104 \div 179 \times 100 = 58,10$$

$$48 \div 179 \times 100 = 26,82$$

$$27 \div 179 \times 100 = 15,08$$

Основная часть работников – это постоянные рабочие. На долю служащих приходится 15,08%.

**5. Относительные величины координации.** Это отношение частей данной совокупности к одной из них, принятой за базу сравнения. Показывает во сколько раз одна часть совокупности больше другой или сколько единиц одной части приходится на 1; 10; 100; 1000... единиц другой части.

По данным таблицы 1.3, приняв за базу сравнения временных и сезонных рабочих, увидим, что на каждого рабочего временного и сезонного приходится 2,17 рабочих постоянных, или на каждые 10 временных и сезонных рабочих приходится 21,7 рабочих постоянных.

**6. Относительные величины сравнения.** Характеризуют сравнительные размеры одноименных абсолютных величин за один и тот же период (момент) времени, но к различным объектам или территориям.

Например, по численности работников с/х производства в ООО «Анга» в 2020 г. превосходит ООО «Нива» Иркутской области в 1,432 раза ( $179 \div 125$ ) или на 43,2% ( $1143,2 - 100$ ). Иными словами, работники с.-х. производства в ООО «Анга» по отношению к ООО «Нива» составляют 143,2%.

**7. Относительная величина интенсивности.** Представляет собой отношение абсолютного значения одного показателя, свойственного изучаемой среде, к другому абсолютному показателю, также присущему данной среде (сопоставляются разноименные показатели). К примеру, относительными величинами интенсивности могут быть: средний уровень выработки, затраты труда на единицу продукции, плотность населения, плотность скота и пр.

В 2020 г. работников с.-х. производства в ООО «Анга» составляло 179 человек, площадь пашни 6343 га, стоимость основных производственных фондов 27164 тыс. руб.

$$6343 \div 179 = 35,4 \text{ га/чел.}$$

На каждого с.-х. работника приходится 35,4 га пашни.

$$27164 \div 6343 \times 100 = 428 \text{ тыс. руб.}$$

На каждые 100 га пашни основных средств приходится 428 тыс. руб.

#### *Вопросы для самоконтроля:*

1. Измерение абсолютных величин в зависимости от сущности исследуемого социально-экономического явления.
2. Виды относительных величин и формы их выражения.
3. Условия правильного определения относительных величин.

### **Тема 4. Статистическая сводка и группировка**

Одним из основных и наиболее распространенных методов обработки и анализа первичной статистической информации является сводка и группировка данных.

Элементами статистической сводки являются: группировка данных, расчет сводных показателей, составление таблиц. В программе статистической сводки предусматривается: выбор группировочных признаков для образования групп и

подгрупп, определение числа групп по совокупности, обозначение границ интервалов при разбиении совокупности по данному группировочному признаку, разработка системы статистических показателей для характеристики выделенных групп и объекта в целом, разработка макета статистических таблиц для представления результатов сводки. Сводка позволяет обобщить статистические показатели, которые отражают сущность социально-экономических явлений и определяют статистические закономерности.

Статистическая группировка – это метод разделения сложного массового явления на существенно различные группы. Она позволяет исчислить показатели для каждой группы и, таким образом, всесторонне охарактеризовать состояние, развитие и взаимосвязи изучаемого явления в целом. Одновременно группировка – это процесс объединения в группы однородных единиц, по которым возможна сводка значений варьирующих признаков и получение статистических показателей.

Применение метода статических группировок предполагает соблюдение определенных требований:

1. уяснить характер изучаемого массового явления, выделить основной процесс, определяющий его развитие и другие изменения;
2. установить, какие основные качества появляются в ходе развития данного явления, какие при этом формируются специфические группы единиц совокупности;
3. определить с учетом места и времени развития изучаемого явления, в каких формах развиваются специфические (типичные) группы;
4. установить наиболее существенные признаки, позволяющие отделить друг от друга группы (типичные или специфические) единиц в зависимости от конкретных условий.

По условиям задачи 1.4 рассматривается совокупность отдельных районов Иркутской области, ведущих товарное производство молока. Их развитие определяется действием различных природных и экономических условий.

В ходе развития формируются группы районов с более высоким уровнем продуктивности коров, которые зависят от конкретных условий.



Для выделения специфических (типичных) групп из приведенных в условии задачи признаков, необходимо выбрать наиболее существенный. Большинство признаков характеризуют условия производства молока, а о результатах деятельности можно судить по продуктивности коров (надой молока на одну корову). Поскольку абсолютные показатели несопоставимы, нами рассматриваются относительные показатели: затраты труда на 1 корову в год, затраты на корма в расчете на одну корову, надой молока на одну корову.

Таблица 1.4 – поголовье коров, производство молока и затраты на производство молока в ряде районов в Иркутской области за 2019 г.

Район	№ группы		Среднегодовое поголовье коров, гол.	Валовой надой молока за год, ц	Всего затрат труда на молоко, тыс. чел.-ч.	Всего затрат на корма на молоко, тыс.руб.	Затраты труда на 1 корову в год, чел.-ч.	Затраты на корма на 1 ц молока, руб.	Надой молока на 1 корову в год, ц
1	2	2а <sup>2</sup>	3	4	5	6	7=гр5:гр3 x1000	8=гр6:гр4 x1000	9=гр4: гр3
1. Качугский	2	1	1592	33814	260	10001	163	296	21,24
2. Балаганский	3	2	845	12549	165	4501	195	359	14,85
3. Эхирит-Булагатский	4	1	1008	43645	241	9049	239	207	43,30
4. Братский.	1	2	1004	22610	136	7786	135	344	22,52
5. Баяндаевский	4	3	366	5501	81	2165	221	396	15,03
6. Иркутский	3	3	3482	125359	631	54311	181	433	36,00
7. Усольский	1	2	6710	336168	755	120094	112	357	50,10
8. Зиминский	2	1	1379	54864	213	17745	154	323	39,78
9. Заларинский	4	2	519	10027	122	3420	235	341	19,32
10. Тулунский	1	3	342	11009	39	4879	114	443	32,19
11. Нижне-Удинский	3	1	1095	16730	208	5251	190	314	15,28
12. Боханский	4	2	2975	59370	636	23005	214	387	19,96
13. Тайшетский	2	2	2065	46788	310	17487	150	374	22,66
14. Нукутский	3	1	476	12512	96	3737	202	299	26,29
15. Куйтунский	1	1	3125	85909	432	24669	138	287	27,49
Всего	-	-	26983	876855	4325	308100	160	351	32,50

По данным таблицы 1.4 будет проводиться аналитическая и факторная группировка. В качестве группировочных признаков отобраны затраты труда на

<sup>2</sup> В графе 2 номера групп по затратам труда на одну корову. В графе 2а номера групп по затратам на корма на одну корову.

содержание одной коровы в год и затраты на корма в расчете на 1 ц молока в год, как условия производства молока.

По данным вариационных рядов – графы 7 и 8 таблицы 1.4 видно, что в совокупности 15 районов имеются большие различия в значениях группировочных признаков: по затратам труда на 1 корову от 112 до 239 и по затратам на корма в расчете на 1 ц молока от 207 до 443.

Далее важно правильно разделить единицы совокупности на группы. Здесь необходимо соблюдать 2 требования:

- состав групп должен быть качественно однородной, а сами группы – существенно различимыми;
- единиц в группе должно быть достаточно, чтобы проявились типичные черты и закономерности, свойственные рассматриваемым массовым явлениям.

В решаемой задаче группировочные признаки имеют количественное измерение и при группировке необходимо четко определить те границы, где заканчивается одна группа единиц и начинается другая.

Строятся ранжированные ряды для изучений интенсивности изменения значений группировочных признаков (табл. 1.5).

Таблица 1.5 – Ранжированные ряды по затратам труда на 1 корову и затраты на корма на 1 ц молока

Затраты труда на 1 корову в год, чел.-ч.	112	114	135	138	150	154	163	181
	190	195	202	214	221	235	239	
Затраты на корма в расчете на 1 ц молока, руб.	207	287	296	299	314	323	341	344
	357	359	374	387	396	433	443	

Резких изменений и большого отрыва ряда единиц от всей совокупности в том и другом признаках не наблюдается, чтобы выделить в особую группу.

При отсутствии качественных переходов в ранжированных рядах число групп «n» зависит от числа единиц совокупности «N» и определяется по формуле 4.1:

$$n = 1 + 3,322 \lg N \quad (4.1)$$

или приближенно можно определить по формуле 4.2:

$$n = \sqrt{N} = \sqrt{15} = 3,8 \approx 4 \quad (4.2)$$

Округляем дроби в большую сторону, т.е дробных групп не бывает.

Для определения границ интервалов находится шаг интервала «h» по формуле 4.3:

$$h = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{n} = \frac{239 - 112}{4} = 32 \quad (4.3)$$

По второму группировочному признаку:

$$h = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{n} = \frac{443 - 207}{4} = 59 \approx 60$$

Шаг интервала также обычно округляется.

Далее к минимальному значению прибавляется величина шага в каждой группе и по максимальному значению принимается «включительно».

Интервальные ряды: по затратам труда на 1 корову:

112-144

144-175

175-209

209-241

по затратам на корма на 1 ц молока:

207-267

267-327

327-387

387-447

Если с интервальными рядами рассматривается число единиц в каждой группе, будут приведены вариационные ряды распределения (табл. 1.6).

Таблица 1.6 – Вариационные ряды распределения по затратам труда и по затратам на корма на содержание 1 коровы по ряду районов Иркутской области в 2019 году

Группы по затратам труда на содержание 1 коровы в год, чел.-ч.	Число районов	№ района по списку	Группы по затратам на корма на 1 ц молока, руб.	Число районов	№ района по списку
112-144	4	7,10,4,15	207-267	1	3
144-175	3	13,8,1	267-327	5	15,1,14,11,8
175-209	4	6,11,2,14	327-387	6	9,4,7,2,13,12
209-241	4	12,5,9,3	387-447	3	5,6,10
Всего	15	-	-	15	-

Как видно из таблицы 1.6 распределение районов по затратам на корма на 1 ц молока по группам неравномерно. Группа по затратам на корма в расчете на 1 ц молока от 207 до 267 совсем малочисленная (1 район), требуется объединить 1 и 2 группы, тогда по второму признаку будем иметь группировку с неравными интервалами.

Интервальный ряд по затратам на корма в расчете на 1 корову после перегруппировки примет следующий вид:

207-327

327-387

387-447

Данные сводки (сумм) по каждому признаку и средние относительные показатели по приведенным интервальным рядам приводятся в таблицах 1.7 и 1.8.

Таблица 1.7 – Продуктивность коров по группам районов Иркутской области в зависимости от затрат труда на 1 корову в 2019 г.

Группы по затратам труда на 1 корову в год, чел.-ч.	Районы		Поголовье коров, гол.	Валовой надой молока, ц	Всего затрат труда на производство молока, тыс.чел.-ч.	Затраты труда на 1 корову в год, чел.-ч.	Надой молока на 1 корову в год, ц
	Кол-во	%					
112-144	4	26,67	11181	455696	1362	122	40,76
144-175	3	20,00	5036	135466	783	155	26,90
175-209	4	26,67	5898	167150	1100	186	28,34
209-240	4	26,67	4868	118543	1080	222	24,35
Всего	15	100,00	26983	876855	4325	160	32,50

Распределение районов очень ровное, в трех группах по 4 района (26,67%).

Согласно аналитической группировке, с увеличением затрат труда на корову по группам надой на 1 корову снижается (связь между признаками проявилась обратная – с увеличением затрат труда надой на корову снижаются из-за неэффективного использования трудовых ресурсов).

По данным таблицы 1.8 видно, что в районах (40%) затраты на корма минимальные и надой, отсюда, самые низкие. В последующих группах затраты на корма растут, а надой в 4-ой группе по сравнению с 3-ей группой – снижаются

(корма используются неэффективно). Связь между затратами на корма и продуктивностью коров проявляется криволинейная – параболическая.

Таблица 1.8 –Продуктивность коров по группам районов Иркутской области в зависимости от затрат на корма в 2019 г.

Группы по затратам на корма на 1 ц молока в год, руб	Районы		Поголовье коров, гол.	Валовой надой молока, ц	Всего затрат на корма на молоко, тыс.руб.	Затраты на корма на 1 ц молока в год, руб.	Надой молока на 1 корову в год, ц
	Кол-во	%					
207-327	6	40	8675	247474	70452	285	28,53
327-387	6	40	14118	487512	176293	362	34,53
387-447	3	20	4190	141869	61355	432	33,86
Всего	15	100	26983	876855	308100	351	32,50

Чтобы выделенные группы различались только по величине группировочного признака, другие условия, влияющие на результат, должны быть выровнены. Это достигается проведением комбинационной группировки, когда все единицы в начале подразделяются по одному факторному признаку, а затем внутри полученных групп выделяются подгруппы по второму факторному признаку (табл. 1.9).

По районам Иркутской области (табл. 1.7) имеются данные по затратам труда на 1 корову в год и затратам на корма в расчете на 1 ц молока. Необходимо определить влияние на надой молока на 1 корову факторов затрат труда и затрат на корма. Изучение связи между признаками проводится с использованием аналитических группировок таблиц 1.7 и 1.8.

Группы по затратам на корма в расчете на 1 ц молока будут делиться на подгруппы по затратам труда на 1 корову и рассматривается зависимость продуктивности коров (надой молока на 1 корову в год) от группировочных признаков по районам Иркутской области за 2019 году в таблице 1.9.

Согласно данных граф 2 и 2а табл. 1.4 по группам и подгруппам проставляются суммовые выражения по графам 4,5,6,7.

Данные цифр в графе 2а показывают номер группы, а данные граф 2 – показывают номера подгрупп.

Таблица 1.9 – Продуктивность коров в зависимости от затрат на корма и затрат труда по группам и подгруппам районов Иркутской области за 2019 г.

Группы районов по затратам на корма на 1 ц молока, руб.	Подгруппы районов по затратам труда на 1 корову в год, чел.-ч.	Кол-во районов	Поголовье коров, гол.	Валовой надой молока, ц	Всего затрат труда на молоко, тыс. чел.-ч.	Всего затрат на корма на молоко, тыс.руб.	В среднем		
							Затраты труда на 1 корову, чел.-ч.	Затраты на корма на 1 ц молока, руб.	Надой молока на 1 корову, ц
1	2	3	4	5	6	7	8=6:4*1000	9=7:5*1000	10=5:4
207-327	-	6	8675	247474	1450	70452	167	285	28,53
	112-144	1	3125	85909	432	24669	138	287	27,49
	144-175	2	2971	88678	473	27746	159	313	29,85
	175-209	2	1571	29242	304	8988	193	307	18,61
	209-240	1	1008	43645	241	9049	239	207	43,30
327-387	-	6	14118	487512	2124	176293	150	362	34,53
	112-144	2	7714	358778	891	127880	115	356	46,51
	144-175	1	2065	46788	310	17487	150	374	22,66
	175-209	1	845	12549	165	4501	195	359	14,85
	209-240	2	3494	69397	758	26425	217	381	19,86
387-447	-	3	4190	141869	751	61355	179	432	33,86
	112-144	1	342	11009	39	4879	114	443	32,19
	144-175	-	-	-	-	-	-	-	-
	175-209	1	3482	125359	631	54311	181	433	36,00
	209-240	1	366	5501	81	2165	221	396	15,03
Всего	-	15	26983	876855	4325	308100	160	351	32,50

Распределение районов по группам и подгруппам очень ровное. С увеличением затрат труда на одну корову по группам и затрат на корма на 1 ц молока, продуктивность меняется не ровно. Связь закономерно не проявляется.

## **Тема 5. Средние величины. Показатели вариации**

Изучение средних величин определяется задачей статистики – выявлением закономерностей массовых явлений. Закономерности можно выявить, лишь обобщая однородные явления и давая обобщенную характеристику единицам явления. Например, что характерно в среднем для молочного скотоводства, которое даёт основную сумму выручки в деятельности района (области, страны)? Сколько приходится коров на 100 га сельскохозяйственных угодий? Сколько доярок приходится на 1000 коров? Каков средний процент жира в молоке? Каков средний надой на 1 корову? Ответы на эти вопросы позволяют создать количественный «портрет» предприятия с помощью системы средних величин.

Средние величины, к примеру, являются основой для определения нормативов, потребления продуктов питания и др. нормативов, средней продолжительности жизни.

Средние величины действительно будут типическими, если:

- изучаемое количество единиц совокупности достаточно большое;
- обеспечена однородность изучаемой совокупности, по которой определяется средняя;
- средняя данного признака должна рассматриваться во взаимосвязи с другими средними величинами (например, средняя цена реализации молока, средняя себестоимость молока, средний процент жира в молоке – все эти показатели взаимосвязаны).

Средняя отражает характерный, типичный, реальный уровень изучаемых явлений, характеризует эти уровни и их изменение во времени и пространстве.

Каждая средняя характеризует изучаемую совокупность по какому-либо одному признаку, но для характеристики любой совокупности, описания

типических черт и качественных особенностей нужна система средних показателей.

Выбор вида средней определяется экономическим содержанием определенного показателя и исходных данных.

К классу степенных средних относятся: арифметическая, гармоническая, геометрическая, квадратическая, кубическая и т.д.

К классу структурных средних относятся: мода, медиана.

Значение средней величины зависит от того, каков порядок её расчета.

Остановимся подробнее на всех видах средних.

**Средняя арифметическая** применяется в форме простой средней и взвешенной средней.

Средняя арифметическая простая применяется, когда изучается количественный признак (количество отработанного времени, количество работников, фонд заработной платы, общая сумма выручки и пр.) или качественный признак по не сгруппированным данным или сгруппированным данным с одинаковыми частотами (повторяемостью) данного признака (к примеру, выработка деталей за смену или на одного человека, заработная плата одного работника, сумма выручки на 1 га условной пашни и пр.).

**Средняя арифметическая простая** равна простой сумме значений изучаемого признака, деленной на общее число этих значений.

$$\bar{X} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{\sum x}{n}, \quad (5.1)$$

где  $x_1, x_2, \dots, x_n$  – варианты (индивидуальные значения изучаемого варьирующего признака);  $n$  – число единиц совокупности.

Например, требуется найти среднегодовое поголовье коров на 1 район Иркутской области по данным табл. 1.4, т.е. дан ряд индивидуальных значений количественного признака.

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{1592 + 845 + 1008 + 1004 + 366 + 3482 + 6710 + 1379 + 519 + 342 + 1095 + 2975 + 2065 + 476 + 3125}{15} \\ &= \frac{26983}{15} = 1799 \end{aligned}$$



Другой случай примера для использования средней арифметической простой (условный пример).

Таблица 1.10 – Посевная площадь и урожайность зерновых на фермерских хозяйствах Иркутской области за 2009 г.

Хозяйства	Площадь, га	Урожайность, ц/га
1	300	25
2	300	32
3	300	20
Всего	900	$\bar{x} = ?$

Определяется средняя урожайность (качественный признак) по 3 фермерским хозяйствам, у которых площади имеют одинаковые размеры (частоты).

$$\bar{x} = \frac{25 + 32 + 20}{3} = 25,7 \text{ ц/га}$$

Таблица 1.11 – Молочная продуктивность коров разных возрастов в ЗАО «Приморский» за 2018 г.

Лактация	Всего коров, гол.	Надой на 1 корову в год, кг
1	45	3828
2	35	4430
3	49	4868
4	23	5420
5	20	4628

В зависимости от числа лактаций, разное количество коров имеет разную продуктивность. В среднем надой на 1 корову по 5 группам составляет

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i m_i}{\sum m_i} = \frac{3828 \cdot 45 + 4420 \cdot 35 + 4868 \cdot 49 + 5420 \cdot 23 + 4628 \cdot 20}{45 + 35 + 49 + 23 + 20} = \frac{782712}{172} = 4551$$

Такая средняя называется средней арифметической взвешенной. В отличие от арифметической простой, когда признаки – варианты « $x_i$ » имеют равные частоты (табл. 1.10). Расчет среднего надоя молока на 1 корову по 5 группам по арифметической простой (сумма надоев по группам  $\sum x_i = 231,64$ ) деленной на число групп (5) и равной 46,33 кг ( $23164 \div 5$ ) неприемлем. Не учитывается тот факт, что самые высокие надои 54, 20 кг у 23 коров, а самые низкие надои – 3828 кг у 45 коров и т.д.

Аналогично по средней арифметической взвешенной рассчитываются данные средних затрат труда на 1 корову, затраты на корма в расчете на 1 корову в год, надои на 1 корову по совокупности (по 15 районам в среднем) в табл. 1.4.

**Формула средней арифметической взвешенной:**

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i m_i}{\sum m_i}, \quad (5.2)$$

где  $x_i$  – значения осредняемых признаков;  $m_i$  – частоты этих признаков.

Формула (5.2) применяется при изучении  $i$ -го ( $x_i$ ) признака с разными частотами ( $m_i$ ).

**Основные свойства средней арифметической:**

1. Если все индивидуальные значения признака ( $x_i$ ) уменьшить или увеличить в  $i$  раз, то среднее значение нового признака уменьшится или увеличится в  $i$  раз.
2. Если все индивидуальные значения признака – варианты увеличить или уменьшить на число  $A$ , то среднее значение увеличится или уменьшится на это же число  $A$ .
3. Если частоты ( $m_i$ ) всех осредняемых вариантов уменьшить или увеличить в « $k$ » раз, то средняя арифметическая не изменится.

**Формула степенной средней** в общем виде записывается следующим образом:

$$\bar{x}_k = \sqrt[k]{\frac{\sum X_j^k}{n}} \quad (5.3)$$

Вид средней зависит от показателя степени « $k$ ».

при  $k=1$  имеем среднюю арифметическую:

$$\bar{x}^1 = \frac{\sum X_i}{n}; \quad (5.4)$$

при  $k=2$  – среднюю квадратическую:

$$\bar{x}^2 = \frac{\sum X_i^2}{n}; \quad (5.5)$$

при  $k=0$  – среднюю геометрическую:

$$\bar{x}^0 = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n}; \quad (5.6)$$

при  $k = -1$  - среднюю гармоническую:

$$\bar{x}^{-1} = \frac{n}{\sum \frac{1}{x_i}}. \quad (5.7)$$

Когда статистическая информация не содержит частот ( $m_i$ ) по отдельным вариантам ( $x_i$ ) совокупности, а представлена как их произведение ( $x_i \cdot m_i$ ), применяется формула средней гармонической взвешенной:

$$\bar{x}_{\text{гар.}} = \frac{\sum Q}{\sum \frac{Q}{x}} = \frac{Q_1 + Q_2 + \dots + Q_n}{\frac{Q_1}{x_1} + \frac{Q_2}{x_2} + \dots + \frac{Q_n}{x_n}} \quad (5.8)$$

Чтобы исчислить среднюю обозначается  $x \times m = Q$ , откуда  $m = \frac{Q}{x}$ .

Средняя гармоническая взвешенная является преобразованной формой арифметической взвешенной.

Таким образом, средняя гармоническая взвешенная применяется тогда, когда неизвестны действительные частоты  $m_i$ , а известны  $x \times m = Q$ .

Например, по данным табл.1.11 требуется определить средний надой молока на 1 корову в год.

Таблица 1.11 – Производство молока по ряду районов Иркутской области за 2019 г.

Район	Валовой надой молока, ц	Надой молока на 1 корову за год, ц	Расчетная информация
			Частота (поголовье коров), голов
Обозначения	Q	x	m=Q:x
Нижне-Удинский	16730	15,28	16730: 15,28=1095
Тайшетский	46788	22,66	46788: 22,66=2065
Куйтунский	85909	27,49	85909: 27,49=3125

$$\text{Средний надой на корову} = \frac{\text{Валовой надой молока, ц}}{\text{Среднегодовое поголовье коров, гол.}}$$

Валовой надой молока Q известен (числитель), а среднегодовое поголовье коров (знаменатель) – неизвестно, но может быть найдено как частное от деления валового надоя молока на среднегодовое поголовье коров.

Тогда средний надой молока на одну корову в год по трем районам исчисляется по формуле (5.8) средней гармонической взвешенной:

$$\bar{x} = \frac{16730 + 46788 + 85909}{\frac{16730}{15,28} + \frac{46788}{22,66} + \frac{85909}{27,49}} = \frac{149427 \text{ ц}}{6285 \text{ гол}} = 23,77 \text{ ц/гол.}$$

Это же самое получится по средней арифметической взвешенной, если в качестве частот (весов) принять рассчитанное среднегодовое количество коров:

$$\bar{x} = \frac{15,28 \cdot 1095 + 22,66 \cdot 2065 + 27,49 \cdot 3125}{1095 + 2065 + 3125} = \frac{149427 \text{ ц}}{6285 \text{ гол}} = 23,77 \text{ ц/гол.}$$

Исчисление среднего надоя молока по гармонической взвешенной (5.8) освобождает от необходимости предварительно расчета частот (среднегодового поголовья коров), которые не заданы в качестве исходной информации.

В тех случаях, когда частота (вес) каждого вариант равен 1 (индивидуальное значение обратного признака встречаются по одному разу), применяется средняя гармоническая простая

$$\bar{x} = \frac{1+1+\dots+1}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}} = \frac{1}{\sum \frac{1}{x}}, \quad (5.9)$$

где  $\frac{1}{x}$  - отдельные варианты обратного признака, встречающиеся по одному разу; n – число вариантов.

Пример. У предпринимателя имеются 2 автомобиля различных моделей, работающих на бензине одинаковой марки. Расход бензина у первого автомобиля 0,05 л/км, у второго – 0,08 л/км. Каков средний расход бензина на 100 км (или 1 км) пути?

Если рассчитать по арифметической простой  $(0,05+0,008):2=0,065$ .

Такой расчет ошибочный.

Предположим, расход бензина на поездку составил 40 л (конкретная цифра значений не имеет). На 40 л бензина первая машина пройдёт 800 км, т.е.  $(40:0,05)$ , пробег второй составит 500 км, т.е.  $(40:0,08)$ , следовательно, общий пробег равен 1300 км. Если средняя исчислена правильно, то при замене индивидуальных

значений их средним не должен измениться определяющий показатель – в данном случае общий пробег.

Принимая  $\bar{x}_{ap}=0,065$  л/км общий пробег был бы меньше на 69,23 км, так как  $40:0,065 + 40:0,065 = 1230,77$  км.

Правильно определяется средний расход бензина на 1 км пройденного пути по гармонической взвешенной:

$$\bar{x}_{zap} = \frac{40+40}{\frac{40}{0,05} + \frac{40}{0,08}} = 0,0615 \quad \text{или } 6,15 \text{ л на } 100 \text{ км.}$$

При замене индивидуальных значений признака их средней ( $\bar{x}_{zap}$ ) общий пробег не изменится и составит:

$$\frac{40}{0,0615} + \frac{40}{0,0615} = 1300 \text{ км}$$

Средняя геометрическая исчисляется извлечением из квадратного корня произведений отдельных значений – вариантов признака «х» по формуле:

$$\bar{x} = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \dots \cdot x_n} = \sqrt[n]{\Pi_x}, \quad (5.10)$$

где  $n$  – число вариантов;  $\Pi$  – знак произведения.

Использование средней геометрической показано в теме «Ряды динамики».

В ряде случаев в экономической практике возникает потребность расчета среднего размера признака, выраженного в квадратных или кубических единицах измерения и применяется **средняя квадратическая простая**:

$$\bar{x} = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n}} = \sqrt{\frac{\sum x^2}{n}}; \quad (5.11)$$

**Средняя квадратическая взвешенная:**

$$\bar{x} = \sqrt{\frac{x_1^2 m_1 + x_2^2 m_2 + \dots + x_n^2 m_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}} = \sqrt{\frac{\sum x^2 m}{\sum m}}, \quad (5.12)$$

где  $x_1, x_2, \dots, x_n$  – значения вариант;

$m_1, m_2, \dots, m_n$  – частоты (веса).

**Средняя кубическая простая** исчисляется аналогично:

$$\sqrt{\frac{\sum x^3}{n}} \quad (5.13)$$

**взвешенная:**

$$\sqrt{\frac{\sum x^3 m}{\sum m}} \quad (5.14)$$

Из средних квадратических и средних кубических, шире применяются средние квадратические, но не из самих вариантов  $x$ , а из их отклонений от средней ( $x - \bar{x}$ ) при расчете показателя вариацию

Особым видом средних величин являются *структурные средние*, которые применяются для изучения внутреннего строения рядов распределения значений признака.

В качестве структурных средних чаще всего используются показатели моды ( $M_o$ ) – наиболее часто повторяющегося значения признака и медианы ( $M_e$ ) – величина признака, которая делит упорядоченную последовательность его значения на две равные по численности части.

Если изучаемый признак имеет дискретные значения, то особых сложностей при расчете моды и медианы не бывает (табл. 1.12).

Таблица 1.12 – Производство молока, его трудоемкость по районам Иркутской области за 2019 г.

№ п/п	Среднегодовое поголовье коров, гол.	Затраты труда на 1 корову в год, чел.-ч.	Накопленная частота
	$m$	$x$	$\sum m$
1	6710	112	6710
2	342	114	7052
3	1004	135	8056
4	3125	138	11181
5	2065	150	13246
6	1379	154	14625
7	1592	163	16217
8	3482	181	19699
9	1095	190	20794
10	845	195	21639
11	476	202	22115
12	2975	214	25090
13	366	221	25456
14	519	235	25975
15	1008	239	26983

Изучается признак – затраты труда на 1 корову в год (x). Чаще всего встречается признак 112 чел.-ч./гол. с частотой 6710 голов. Следовательно,  $M_o = 112$ , т.е. большая часть поголовья коров содержится с затратами труда в год 112 чел.-ч.

В случае с данными табл. 1.12  $M_e$  у изучаемого признака определяется по накопительной частоте. Первая накопительная частота, превышающая половину всех накоплений, определяет значение медианы.

$M_e = 154$  чел.-ч./гол., так как  $14625 > 26983:2$ . Это значит, 50% поголовья коров с затратами труда на 1 корову ниже 154 чел.-ч., а остальные 50% - выше 154 чел.-ч.

Если ряд состоит только из показателя изучаемого признака – затраты труда на 1 корову в год (табл. 1.12), то  $M_e = 181$ . Это свидетельствует о том, что 7 наблюдений (районов) с затратами труда на 1 корову ниже 181 чел.-ч., остальные 7 наблюдений (районов) – выше 181 чел.-ч.

В интервальных рядах распределения с равными интервалами мода вычисляется по формуле:

$$M_o = x_0 + i \frac{m_2 - m_1}{(m_2 - m_1) + (m_2 - m_3)}, \quad (5.15)$$

где  $x_0$  – нижняя граница модального интервала;  $i$  – модальный интервал;  $m_1, m_2, m_3$  – частоты в модальном, предыдущем и следующем за модальным интервалах, соответственно

По данным табл. 1.7 рассчитывается мода:

$$M_o = 112 + 32 \frac{11181 - 0}{(11181 - 0) + (11181 - 5036)} = 133$$

Итак, модальным значением затрат труда на 1 корову в год районов Иркутской области является 133 чел.-ч.

Большая часть коров в 15 районах Иркутской области содержится с затратами труда на 1 голову 133 чел.-ч.

В интервальных рядах распределения интервал характерен тем, что его накопленная сумма частот равна или превышает полусумму всех частот ряда и определяется по формуле:

$$M_e = x_0 + i \frac{\sum m - m_{\text{до.мед(накопл)}}}{m_{M_e}}, \quad (5.16)$$

где  $x_0$  – начало медианного интервала;  $i$  – медианный интервал;  $m_{\text{до.мед(накопл)}}$  – величина накоплений до медианного интервала;  $m_{M_e}$  – частота медианного интервала.

На примере данных табл. 1.7

$$M_e = 144 + 132 \frac{\frac{26983}{2} - 11181}{5036} = 159$$

Медианный интервал 144-175, так как  $11181 + 5036 = 16217$  больше половины всех накоплений  $(26983:2)$ .

$M_e = 159$  чел.-ч./гол., значит, у 50% процентов поголовья коров затраты труда на корову ниже 159 чел.-ч., у остальных 50% - выше 159 чел.-ч.

Мода и медиана, как правило, отличаются от значений средней ( $\bar{x}$ ), совпадает лишь в случае симметричного распределения частот вариационного ряда.

Поэтому соотношение моды, медианы и средней арифметической позволяет оценить асимметрию ряда распределения.

### Показатели вариации

Для всесторонней характеристики изменчивости признаков в совокупности, используются показатели вариации.

Вариация (отклонение) возникает в результате того, что индивидуальные значения признака складываются под совокупным влиянием разнообразных условий (факторов), которые по-разному сочетаются в каждом отдельном случае.



Средняя величина не показывает, как располагаются около неё варианты осредняемого признака, сосредоточены ли они вблизи средней или значительно отклоняются от неё. Для измерения отклонений вариацию каждой варианты от средней применяются показатели вариации.

Самым элементарным показателем вариации является **размах вариации (R)**:

$$R = x_{\max} - x_{\min} \quad (5.17)$$

По данным табл. 1.7 по затратам труда на содержание одной коровы в год в четырех группах составляет размах вариации 100 чел.-ч./гол. (222-122).

Однако размах вариации показывает лишь крайние отклонения признака и не отражает отклонений всех вариантов в ряду.

**Среднее линейное отклонение ( $\bar{d}$ )**

а) простое, для несгруппированных данных:

$$\bar{d} = \frac{\sum |x - \bar{x}|}{n} ; \quad (5.18)$$

б) взвешенная, для группированных данных:

$$\bar{d} = \frac{\sum |x - \bar{x}|m}{\sum m} . \quad (5.19)$$

В формулах (5.18) и (5.19) разности в числителе взяты по модулю (иначе в числителе будет ноль).

Поэтому данный показатель как мера вариации применяется редко. С его помощью анализируется, например, состав работающих, ритмичность производства, оборот внешней торговли.

**Дисперсия** признака представляет собой средний квадрат отклонений вариантов от их средней величины, она вычисляется по формулам простой и взвешенной (в зависимости от исходных данных):

Простая для несгруппированных данных:

$$\delta^2 = \frac{\sum (x - \bar{x})^2}{n} ; \quad (5.20)$$

Взвешенная для вариационного ряда и сгруппированных данных:

$$\delta^2 = \frac{\sum (x - \bar{x})^2 m}{\sum m} . \quad (5.21)$$

В математической статистике важную роль играет дисперсия для характеристики качества статистических оценок.

В экономическом анализе, разложение дисперсии на соответствующие элементы, позволяют оценить влияние отдельных факторов, обуславливающую вариацию изучаемого признака.

**Среднее квадратическое отклонение ( $\delta$ )** равно корню квадратному из дисперсии

простое для несгруппированных данных:

$$\delta = \sqrt{\frac{\sum (x - \bar{x})^2}{n}} ; \quad (5.22)$$

взвешенное для сгруппированных данных:

$$\delta = \sqrt{\frac{\sum (x - \bar{x})^2 m}{\sum m}} . \quad (5.23)$$

Среднее квадратическое отклонение показывает на сколько в среднем отклоняются конкретные варианты от их среднего значения и является абсолютной мерой колеблемости в тех же единицах измерения, что и варианты.

Чем меньше значение дисперсии и среднего квадратического отклонения, тем однороднее (количественно) совокупность и типичнее средняя величина.

**Коэффициент вариации** представляет собой выраженное в процентах отношение среднего квадратического отклонения к средней:

$$V = \frac{\delta}{\bar{x}} \times 100 \quad (5.24)$$

Совокупность считается количественно однородной, если коэффициент вариации не превышает 33%.

Показывается расчет различными способами показателей вариации на примере данных табл. 1.7.

Исчисляется средняя по затратам труда на 1 корову:

$$\bar{x} = \frac{\sum xm}{\sum m} = \frac{4325000 \text{ чел.} - \text{ч.}}{26983} = 160$$

Рассчитывается дисперсия по затратам труда на 1 корову:

$$\delta^2 = \frac{\sum (x - \bar{x})^2 m}{\sum m} = \frac{(122-160)^2 \cdot 11181 + (155-160)^2 \cdot 5036 + (186-160)^2 \cdot 5898 + (222-160)^2 \cdot 4868}{11181 + 5036 + 5898 + 4868} =$$

$$= \frac{38970904}{26983} = 1444$$

Определяется среднее квадратическое отклонение:

$$\delta = \sqrt{\delta^2} = \sqrt{1444} = \pm 38 \text{ чел.} - \text{ч.} / \text{гол.}$$

Исчисляется коэффициент вариации:

$$V = \frac{\delta}{\bar{x}} \times 100 = \frac{38}{160} \times 100 = \pm 23,75\%$$

Таким образом, данная группа районов достаточно однородна по затратам труда на 1 корову в год и отклонение от средней по группам составляет  $\pm 38$  чел.-ч./гол. или 23,75%.

Вариация надоя молока на 1 корову обусловлена различными факторами, некоторые из этих факторов можно выделить, если статистическую совокупность разбить на группы, еще и подгруппы, по каким-либо признакам. Тогда становится возможным изучить вариацию для каждой из составляющих её группы, а также между этими группами. В простейшем случае, когда совокупность расчленена на группы по 1 фактору и на подгруппы по другому фактору, изучение вариации достигается посредством исчисления трех видов дисперсий: общей, межгрупповой и внутригрупповой.

**Общая дисперсия ( $\delta^2$ )** измеряет вариацию признака по всей совокупности под влиянием всех факторов, обусловивших эту вариацию. Она равна среднему квадрату отклонений отдельных значений признака ( $x$ ) от общей средней ( $\bar{x}$ ) и может быть вычислена как по простой (5.20), так и по взвешенной (5.21)

**Межгрупповая дисперсия ( $\delta_{m/z}^2$ )** измеряет систематическую вариацию результативного признака (в данном случае надоя на 1 фуражную корову), обусловленную влиянием признаков-факторов, положенных в основание группировок, по формуле:

$$\delta_{m/z}^2 = \frac{\sum (\tilde{x} - \bar{x})^2 m}{\sum m}, \quad (5.25)$$

где  $\tilde{x}$  - средние значения надоя на 1 корову в группах;  $\bar{x}$  - среднее значение надоя на 1 корову по совокупности;  $m$  – поголовье коров или численность единиц в группах.

По данным табл. 1.9 межгрупповая дисперсия:

$$\delta_{m/z}^2 = \frac{(28,53 - 32,50)^2 \cdot 6 + (34,53 - 32,50)^2 \cdot 6 + (33,86 - 32,50)^2 \cdot 3}{15} = 8,42$$

**Внутригрупповая дисперсия** ( $\delta_{g/z}^2$ ) характеризует случайную вариацию, т.е. часть вариации, обусловленную влиянием неучтенных факторов и независящую от признаков-факторов, положенных в основание группировок и определяется по формуле:

$$\delta_{g/z}^2 = \frac{\sum (\tilde{x} - \bar{x})^2 m}{\sum m}, \quad (5.26)$$

где  $\tilde{x}$  - средние изучаемого признака по подгруппам (надой на 1 корову в год по подгруппам),  $m$  – число наблюдений в подгруппах.

Поскольку в табл. 1.9 три группы, будут рассчитываться три внутригрупповых дисперсии

$$\delta_{g/z(1)}^2 = \frac{(27,49 - 28,53)^2 \cdot 1 + (29,85 - 28,53)^2 \cdot 2 + (18,61 - 28,53)^2 \cdot 2 + (43,30 - 28,53)^2 \cdot 1}{6} = 69,92$$

$$\delta_{g/z(2)}^2 = \frac{(46,51 - 34,53)^2 \cdot 2 + (22,66 - 34,53)^2 \cdot 1 + (14,85 - 34,53)^2 \cdot 1 + (19,86 - 34,53)^2 \cdot 2}{6} = 207,61$$

$$\delta_{g/z(3)}^2 = \frac{(32,19 - 33,86)^2 \cdot 1 + (36,00 - 33,86)^2 \cdot 1 + (15,03 - 33,86)^2 \cdot 1}{3} = 120,646$$

Поскольку три внутригрупповых дисперсии, определяется средняя из внутригрупповых по формуле:

$$\bar{\delta}_{g/z}^2 = \frac{\sum \delta_{g/z(i)}^2 \cdot n_i}{\sum n_i}, \quad (5.27)$$

где  $\delta_{\bar{x}/z}^2$  - значения внутригрупповых дисперсий;  $n_i$  – число наблюдений в  $i$ -й группе.

$$\bar{\delta}_{\bar{x}/z}^2 = \frac{69.92 \cdot 6 + 207.61 \cdot 6 + 120.646 \cdot 3}{15} = 135,14$$

Согласно правилу сложения дисперсий общая дисперсия равна сумме средней из внутригрупповых и межгрупповой дисперсий.

$$\delta_o^2 = \delta_{\bar{x}/z}^2 + \bar{\delta}_{\bar{x}/z}^2 \quad (5.28)$$

$$\delta_o^2 = 8,42 + 135,14 = 143,56$$

Так же общую дисперсию можно определить по данным табл. 1.4 по формуле:

$$\delta_o^2 = \frac{(x - \bar{x})^2}{n} = \frac{(21,24 - 32,50)^2 + (14,85 - 32,50)^2 + (43,40 - 32,50)^2 + (22,52 - 32,50)^2 + (15,03 - 32,50)^2 + \dots + (27,49 - 32,50)^2}{15} = 143,56$$

Очевидно, чем больше доля межгрупповой дисперсии, тем сильнее влияние группировочных признаков (затрат труда, на одну корову и затрат на корма) на изучаемый результативный признак (надой на одну корову).

Поэтому, определяется показатель эмпирического коэффициента корреляции ( $\eta$ ), или эмпирический коэффициент детерминации ( $\eta^2$ ) по формуле

$$\eta^2 = \frac{\delta_{\bar{x}/z}^2}{\delta_o^2} \quad (5.29)$$

В нашем случае:

$$\eta^2 = \frac{8,42}{143,56} = 0,058.$$

Для качественной оценки тесноты связи на основе показателя эмпирического корреляционного отношения можно воспользоваться соотношением Чеддока:

$\eta^2$	0,1-0,3	0,3-0,5	0,5-0,7	0,7-0,9	0,9-0,99
Сила связи	слабая	умеренная	заметная	тесная	очень тесная

Связь между надоем молока на 1 корову, затратами труда на 1 корову, затратами на корма на 1 корову очень слабая, почти никак не проявилась.

### *Вопросы для самоконтроля*

1. Дайте определение средней.
2. Какие виды средних величин применяются в статистике?
3. Как исчисляются средние величины в дискретных и интервальных рядах (степенные и структурные)?
4. В каких случаях применяются те или иные виды средних?
5. Показатели вариации, что каждый из показателей характеризует?
6. Что характеризует межгрупповая дисперсия, её формула?
7. Как определяются внутригрупповые дисперсии, средняя из внутригрупповых дисперсии, их формулы?
8. Правило сложения дисперсии и что называется эмпирическим коэффициентом детерминации?

### **Тема 6. Статистические таблицы и графики**

**Статистическая таблица** – это рассказ об изучаемой совокупности, об особенностях составляющих ее групп.

В статистической таблице выделяют две составляющие: подлежащее и сказуемое. Подлежащее – это то, о чем говорится в таблице (объект изучения); сказуемое – то, что говорится о подлежащем, его характеристика с помощью системы показателей. Подлежащее располагается в левой части таблицы в виде названия граф.

Статистическая таблица обязательно имеет нумерацию и заголовок. Заголовок должен соответствовать содержанию таблицы, должны быть указаны территория и время, к которым относятся данные. Если у показателей единицы измерения все одинаковые, то они указываются в заголовке таблицы, а если разные – то, проставляются, через запятую, рядом с названием показателей.

Наименования показателей приводятся без сокращений, кроме общепринятых (например, можно сказать «СХПК» без расшифровки этой

аббревиатуры). Может быть приведен и порядок расчета показателя как в таблице 1.4 (например,  $гр.7=гр5:гр3 \cdot 1000$ ).

Статистическая таблица, как правило, включает итоговую строку или графу.

Если данные заимствованы, то под таблицей указывается источник. Может быть примечание к таблице, в котором раскрывается методика расчета показателей, а также даются подтверждающие пояснения по тем показателям, которые могут вызвать вопросы, показаться сомнительными.

Вид статистической таблицы зависит от построения и бывает, простая, групповая, комбинационная.

В простой таблице дается перечень по совокупности в целом или по каждой единице наблюдений (табл. 1.4).

**Групповая таблица** – это таблица, в которой объект исследования подразделяется на группы по какому-либо признаку (табл. 1.7 и табл. 1.8).

**Комбинационная таблица** – это таблица, в которой объект исследования разделен на группы по двум или более признакам. Например, табл. 1.7 станет комбинационной, если группа по затратам труда на 1 корову будет подразделена на подгруппы по затратам на корма в расчете на одну корову (табл. 1.9).

Практически любой пакет прикладных программ, предназначенный для статистической обработки данных на ПК, содержит графические методы представления данных.

Эта форма представления данных отличается большей наглядностью, чем статистические таблицы.

Статистический график включает нумерацию, заголовок с указанием содержания графика, территории и времени, куда относятся данные.

Так же, приводятся условные обозначения или дается указанные масштабной единицы.

По способу построения графики подразделяются на диаграммы и картограммы.

По графическому образу диаграммы могут быть:

- линейные;

- секторные;
- круговые, треугольные, прямоугольные;
- столбиковые;
- ленточные;
- фигурные.

Линейные графики используются в анализе рядов распределения (полигон распределения) и временных рядов.

Секторные диаграммы используются для представления структуры (удельных весов) совокупности.

Круговые диаграммы (треугольные, прямоугольные, квадратные) представляют значения показателя в виде площади какой-либо геометрической фигуры.

Столбиковые диаграммы используются для представления состава какого-либо показателя (например, структура населения по национальности).

Ленточные диаграммы решают те же задачи, что и столбиковые, только изображение показателя дается в горизонтальном виде.

Фигурные диаграммы обычно используются для изображения изменения показателя в виде определения фигур (например, выпуск автомобилей – это может быть фигура автомобиля, валовой сбор зерна – снопы зерновых).

#### *Вопросы для самоконтроля.*

1. Дайте определение группировки. Поясните, в чем состоит назначение группировок, чем вызвана их необходимость.
2. Приведите примеры всех видов группировок.
3. В чем заключается сущность сводки?
4. Какие требования предъявляются к группировкам?
5. Сущность определения числа групп и интервалов в группах.
6. Виды статистических таблиц по построению и требования к ним.
7. Элементы статистических графиков. Виды статистических графиков и случаи их применения.



## Тема 7. Ряды динамики

Одной из важнейших задач статистики является изучение изменений анализируемых показателей во времени, т.е. их динамика.

**Динамический ряд** – это ряд расположенных в хронологическом порядке числовых значений показателя, изменяющихся в уровнях во времени.

В каждом ряду динамики имеются два основных элемента: время ( $t$ ) и конкретное значение показателя ( $y$ ).

Построение рядов динамики позволяют выявить и измерить закономерности развития изучаемого явления. Эти закономерности не проявляются четко на каждом конкретном уровне, а лишь в тенденции, в достаточно длительной динамике.

На основную закономерность динамики накладываются другие, прежде всего случайные, иногда сезонные влияния.

Ряды динамики подразделяются на моментные и интервальные (периодические).

Примером моментного ряда могут служить численность скота на первое число каждого месяца в 2020 г. (к примеру), голов.

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII
200	198	202	205	203	198	195	200	205	210	215	210

Примером интервального (периодического) ряда могут служить данные численности работников сельскохозяйственного производства за 2014-2020 гг. в ООО «Анга» Иркутской области.

Годы	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020
Численность, чел.	276	252	202	205	178	175	190

Этот ряд характеризует уменьшения численности работников сельскохозяйственного производства за 2014-2020 гг.

Значения уровней периодического ряда в отличие от уровней моментного ряда не содержатся в предыдущих или последующих показателях, что позволяет суммирование уровней для определения численности в среднем за год.

Уровни в динамическом ряду могут быть представлены абсолютными, средними и относительными величинами (в случаях наших примеров представлены абсолютными величинами).

По расстоянию между уровнями ряды динамики подразделяются с равностоящими и неравностоящими уровнями во времени.

При построении рядов динамики уровни должны быть сопоставимы: по территории, по кругу охватываемых объектов, по времени регистрации, по ценам, по методологии расчета.

**Сопоставимость по территории** предполагает что данные в ряду по территории должны быть в одних и тех же границах. Например, в связи с различными реорганизациями предприятия (присоединение; разъединение), уровни социально-экономических показателей будут меняться.

**Сопоставимость по кругу охватываемых объектов** означает сравнение совокупность с равным числом элементов. Пример. При характеристике динамики численности студентов высших учебных заведений по годам нельзя в одни годы учитывать только численность одного факультета, в другие годы – численность студентов всех факультетов или нескольких факультетов.

**Сопоставимость по времени регистрации** для периодических рядов обеспечивается равенством периодов времени, за которые приводятся данные.

**Сопоставимость по ценам** с учетом существования различных видов цен (текущие, сопоставимые, розничные и др.).

**Сопоставимость по методологии расчета**, например, в одни годы среднюю урожайность рассчитывали с засеянной площади, а в другие с убранной. Для того, чтобы обеспечить сравнимость такого ряда данных, необходимо выразить их в одних и тех же единицах измерения. К примеру, количество произведенного молока могут быть выражены в литрах и килограммах, или зерна – пуды и тонны).

Если сопоставимость данных в динамическом ряду соблюдена, интенсивность изменения явления во времени осуществляется с помощью показателей: **абсолютный прирост, темп роста, темп прироста, абсолютное значение одного процента прироста.** Могут иметь средние уровни.

Приведенные показатели динамики могут определяться на постоянной и переменной базах сравнения. Если база сравнения постоянная, показатели динамики называются базисные, если переменная (каждый последующий год сравнивается с предыдущим) – цепными.

Для изучения интенсивности изменения изучаемого признака во времени, приводится табл. 1.13.

Таблица 1.13 – Численность работников сельскохозяйственного производства в ООО «Анга» Иркутской области за 2012-2020 гг.

Годы	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020
Численность, чел.	276	252	202	205	178	175	190	185	180

### Абсолютный прирост (сокращения):

цепной

$$\Delta Y_{\text{ц}} = Y_i - Y_{i-1} \quad (7.1)$$

базисный

$$\Delta Y_{\text{б}} = Y_i - Y_0 \quad (7.2)$$

где  $Y_i$  – уровень сравниваемого периода;  $Y_{i-1}$  – уровень предшествующего периода;  $Y_0$  – уровень базисного периода.

$\Delta Y_{\text{ц}}$  и  $\Delta Y_{\text{б}}$  показывают абсолютные изменения уровня текущего периода по сравнению с предшествующим или базисным, соответственно.

Показатель интенсивности изменения уровней ряда, выраженный в долях единицы, называется коэффициентом роста (снижения), а в процентах – темпом роста (снижения).

**Коэффициент прироста** характеризует изменение уровней в количество раз, а **темпы роста** – сколько процентов составляет.

### Коэффициент прироста (снижения)

цепной

$$K_p^{\text{ц}} = \frac{Y_i}{Y_{i-1}}; \quad (7.3)$$

базисный

$$K_p^{\text{б}} = \frac{Y_i}{Y_0}; \quad (7.4)$$

### Темп роста (снижения)

$$\text{цепной } T_p^u = \frac{Y_i}{Y_{i-1}} \times 100; \quad (7.5)$$

$$\text{базисный } Y_p^b = \frac{Y_i}{Y_0} \times 100; \quad (7.6)$$

$$\text{Или } T_p = K_p \times 100$$

Между цепным и базисным коэффициентами роста существует взаимосвязь (если базисные коэффициенты исчислены по отношению к начальному уровню динамики):

а) произведение последовательных цепных коэффициентов роста равно базисному коэффициенту роста за весь период;

б) частное от деления последующего базисного коэффициента на предыдущий равно соответствующему цепному темпу роста:

$$\frac{Y_{2013}}{Y_{2012}} \times \frac{Y_{2014}}{Y_{2013}} \times \frac{Y_{2015}}{Y_{2014}} \times \frac{Y_{2016}}{Y_{2015}} \times \frac{Y_{2017}}{Y_{2016}} \times \frac{Y_{2018}}{Y_{2017}} \times \frac{Y_{2019}}{Y_{2018}} \times \frac{Y_{2020}}{Y_{2019}} = \frac{Y_{2020}}{Y_{2012}}$$

**Темп прироста (сокращения)** показывает, на сколько процентов сравниваемый уровень больше или меньше уровня, принятого за базу сравнения, и вычисляется как отношение абсолютного прироста к абсолютному уровню, принятому за базу сравнения. Выражается в процентах, может быть отрицательным, положительным или равным нулю

#### Темп прироста

$$\text{цепной } T_{np}^u = \frac{\Delta Y_u}{Y_{i-1}} \times 100; \quad (7.7)$$

$$\text{базисный } Y_{np}^b = \frac{\Delta Y_b}{Y_0} \times 100; \quad (7.8)$$

**Темп прироста (сокращения)** определяется и из темпа роста, если из него вычесть 100%:

$$T_{np} = T_p - 100 \quad (7.9)$$

Темп прироста (сокращения) определяется и из коэффициента прироста (снижения) путем вычитания единицы из коэффициента.

$$T_{np} = [(K_p - 1) \times 100] - 100 \quad (7.10)$$

Чтобы правильно оценить значение полученного темпа прироста (снижения), его рассматривают в сопоставлении с показателем абсолютного прироста. Результат сопоставления называют **абсолютным значением одного процента прироста (снижения)** и выражается этот показатель в единице измерения изучаемого признака.

Значение одного процента прироста (снижения) показывает, какое абсолютное значение скрывается за одним процентом и определяется по формуле:

$$z_n = \frac{\Delta Y}{T_{np}} \quad (7.11)$$

Для обобщающей характеристики динамики исследуемого признака определяются средние показатели динамики: средний уровень ряда ( $\bar{y} = \frac{\sum Y}{n}$ ); средний абсолютный прирост ( $\Delta \bar{Y} = \frac{\sum \Delta Y}{n}$ ); средний коэффициент прироста ( $\bar{k} = \sqrt[n]{k_1 \cdot k_{n2} \cdot \dots \cdot k_n}$ ); средний темп роста ( $\bar{T}_p = \bar{K} \times 100$ ); средний темп прироста ( $\bar{T}_{пр} = T_p - 100$ ); среднее значение одного процента прироста ( $z_n = \frac{\Delta Y}{\bar{T}_{np}}$ ).

По данным табл. 1.13 согласно приведенных формул (7.1-7.11) цепным и базисными способами рассчитываются показатели динамики и приводятся в таблице 1.14.

В среднем за 2012-2020 гг. численность работников сельскохозяйственного производства составляет 205 чел. Если сравнить каждый последующий год с предыдущим (цепные показатели), работников с.-х. больше ста процентов составляет только в 2015 г. и в 2018 г., то есть увеличение на 15 человек или 8,6% (1,086 раза).

В остальные годы происходило сокращение численности и больше всего в 2014 г. по отношению к 2013г. – на 50, или на 19,8% (0,802 раза).

Если рассматривается каждый последующий год относительно базисного 2012 г. наблюдается сокращение численности работников цепным способом составляет 12 чел. Или 0,948 раз (-5,2%), базисным способом ежегодное сокращение составляет 80 человек или 26,6%.

Таблица 1.14 – Численность работников с.-х. производства и показатели динамики а ООО «Анга» Иркутской области за 2012-2020 гг.

Годы	Численность работников с.-х., чел.	Абсолютный прирост (снижение), чел.		Коэффициент роста (снижения)		Темп роста (снижения), %		Темп прироста (снижения), %		Значение одного процента прироста (снижения)
		цепной	базисный	цепной	базисный	цепной	базисный	цепной	базисный	
2012	276	-	-	-	-	-	-	-	-	-
2013	252	-24	-24	0,913	0,913	91,3	91,3	-8,7	-8,7	0,36
2014	202	-50	-74	0,802	0,732	80,2	73,2	-19,8	-26,8	0,39
2015	205	3	-71	1,015	0,743	101,5	74,3	1,5	-25,7	0,50
2016	178	-27	-98	0,868	0,645	86,8	64,5	-13,2	-35,5	0,49
2017	175	-3	-101	0,983	0,634	98,3	63,4	-1,7	-36,6	0,57
2018	190	15	-86	1,086	0,688	108,6	68,8	8,6	-31,2	0,57
2019	185	-5	-91	0,974	0,670	97,4	67,0	-2,6	-33,0	0,52
2020	180	-5	-96	0,973	0,652	97,3	65,2	-2,7	-34,8	0,54
В среднем	$\bar{y} = \frac{\sum y}{n} = 205$	$\bar{\Delta}^y = \frac{\sum \Delta^y}{n} = -12$	$\bar{\Delta}^o = \frac{\sum \Delta^o}{n} = -80$	$\bar{K}^y = \sqrt[3]{0,652} = 0,948$	$\bar{K}^o = \sqrt[3]{0,0821} = 0,734$	94,8	73,4	-5,2	-26,6	0,43

Проверяется взаимосвязь цепных и базисных коэффициентов роста на нашем примере (цепным способом):

$$0,913 \times 0,802 \times 1,015 \times 0,868 \times 0,983 \times 1,086 \times 0,974 \times 0,973 = 0,652$$

(Произведение цепных индексов равняется базисному).

### **Методы анализа основной тенденции развития в рядах динамики**

Одной из важнейших задач статистики является определение в рядах динамики *общей тенденции развития явления*.

Часто приходится встречаться, где общая тенденция развития того или иного явления явно и отчетливо не отражается уровнями динамического ряда, а уровни ряда претерпевают самые различные изменения, то возрастают, то убывают – общая тенденция развития не ясна.

На развитие явления во времени оказывают влияние факторы, различные по характеру и силе воздействия. Одни из них оказывают практически постоянное воздействие и формируют в рядах динамики определенную тенденцию развития. Воздействие же других факторов может быть кратковременным или носить случайный характер.

Следовательно, при анализе динамики речь идет об основной тенденции, достаточно устойчивой на протяжении всего этапа развития.

Одним из наиболее простых методов изучения основной тенденции в рядах динамики является *укрупнение интервалов*, основанный на укрупнении периодов времени. Например, ряд ежемесячного надоя молока (табл. 1.15).

Таблица 1.15 – Объем надоя молока (по месяцам), т.

Месяц	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII
Надой молока	125	120	120	125	120	130	140	145	142	141	135	130

Различные направления изменений уровня ряда по отдельным месяцам затрудняют выводы об основной тенденции производства молока.

Укрупнение интервалов путем объединения в квартальные и вычисление среднемесячных надоев молока по кварталам упростить решение задачи об определении основной тенденции в изменении уровней надоя (табл. 1.16)

Таблица 1.16 – Объем надоя молока (по кварталам), т.

Квартал	За квартал (всего)	В среднем за месяц
I	365	122
II	375	125
III	427	142
IV	406	135

После укрупнения интервалов основная тенденция роста (в среднем) стала очевидной:  $122 < 125 < 142 > 135$

Основная тенденция изменения уровней данных численности работников с.-х. производства в ООО «Анга» (табл. 1.16) будет рассматриваться путем укрупнения интервалов за период 2014-2009 гг. (по 3 года).

Таблица 1.17 – Численность работников с.-х. производства в ООО «Анга» по укрупненным периодам за 2012-2020 гг.

Периоды времени	Численность работников за три года (сумма), чел.	В среднем за год, чел.
2012-2014	730	243
2015-2017	558	186
2018-2020	555	185

Численность работников с.-х. за 2012-2020 гг. имеет тенденцию к сокращению.

Выявление основной тенденции может осуществляться также методом скользящей средней. Сущность в том, что средний уровень определяется, обычно, из нечетного числа.

Первых по счету уровней ряда, затем – из такого же числа уровней, но начиная со второго по счету, далее – начиная с третьего и т.д. Это значит, средняя как бы «скользит» по ряду динамики, передвигаясь на один срок.

Расчет средней по данным о численности работников с.-х. производства по скользящей средней приведен в табл. 1.18.



Таблица 1.18 – Исходные данные и основная тенденция изменения уровней численности работников с.-х. производства по скользящей средней в ООО «Анга» Иркутской области за 2014-2009 гг.

Годы	Фактический уровень численности работников с.-х., чел.	Скользящая средняя	
		трехлетняя	пятилетняя
2012	276	-	-
2013	252	$\frac{276 + 252 + 202}{3} = 243$	-
2014	202	$\frac{252 + 202 + 205}{3} = 220$	223
2015	205	$\frac{202 + 205 + 178}{3} = 195$	202
2016	178	$\frac{205 + 178 + 175}{3} = 186$	190
2017	175	$\frac{178 + 175 + 190}{3} = 181$	187
2018	190	$\frac{175 + 190 + 185}{3} = 183$	182
2019	185	$\frac{190 + 185 + 180}{3} = 185$	-
2020	180	-	-

Как трехлетние, так и пятилетние скользящие средние показывают тенденцию уменьшения численности работников с.-х. в ООО «Анга».

Для того чтобы дать количественную модель, выражающую основную тенденцию изменения уровней динамического ряда во времени, используется *аналитическое выравнивание ряда динамики*.

В итоге выравнивания временного ряда получают наиболее общий, проявляющийся во времени результат действия всех причиненных факторов. В результате используется трендовая модель выравнивания:

$$y_t = f(t) + \varepsilon,$$

где  $f(t)$  – уровень, определяемый тенденцией развития;  $\varepsilon$  – случайное и циклическое отклонение от тенденции.

Выбор типа модели зависит от цели исследования и должен быть обоснован характером развития уровней исходного динамического ряда изучаемого признака. (например, с помощью графического изображения).

Простейшими моделями, выражающими тенденция развития, являются:

линейная функция  $f(t) = a_0 + a_1 t$ ;  
(7.12)

параболическая функция  $f(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$ ;  
(7.13)

показательная функция  $f(t) = a_0 a_1^t$   
(7.14)

В случаях, если модель тренда требуется для прогнозирования, делается проверка функции на адекватность.

Оценка параметров функции обычно производится методом наименьших квадратов. Решается система нормальных уравнений (при использовании линейной функции) по системе (7.15):

$$\begin{cases} \sum y = n a_0 + a_1 \sum t \\ \sum yt = a_0 \sum t + a_1 \sum t^2, \end{cases} \quad (7.15)$$

где  $y$  – фактические уровни ряда;  $t$  – время (порядковый номер периода или момента времени).

При четном числе уровней (например, 8), значения  $t$  могут принимать условные значения:

Год	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020
Условное значение	-7	-5	-3	-1	+1	+3	+5	+7

При нечетном числе уровней (например, 9), значения устанавливаются по другому:

Год	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020
Условное значение	-4	-3	-2	-1	0	+1	+2	+3	+4

В обоих случаях  $\sum t = 0$ , тогда система нормальных уравнений принимает вид:  $\sum y = n a_0$ ;

$$\sum yt = a_1 \sum t^2. \quad (7.16)$$

Отсюда:  $a_0 = \frac{\sum y}{n}$  и  $a_1 = \frac{\sum yt}{\sum t^2}$  (7.17)

Выравнивание численности работников с.-х. производства с использованием линейной функции (7.12) и формул (7.16 и 7.17) приводится ниже:

Таблица 1.19 – Выравнивание ряда динамики численности работников с.-х. производства в ОАО «Анга» Иркутской области за 2014-2009 гг.

Годы	Численность, чел. « $y_i$ »	t	$t^2$	$y_i t$	$\tilde{y}_t$	$y_i - \tilde{y}_t$	$(y_i - \tilde{y}_t)^2$
2012	276	-4	16	-1104	247	29	841
2013	252	-3	9	-756	237	15	225
2014	202	-2	4	-404	226	-24	576
2015	205	-1	1	-205	215	-10	100
2016	178	0	0	0	205	-27	729
2017	175	1	1	175	194	-19	361
2018	190	2	4	380	183	7	49
2019	185	3	9	555	173	12	144
2020	180	4	16	720	163	17	289
Всего	$\sum y = 1843$	$\sum t = 0$	$\sum t^2 = 60$	$\sum yt = -639$	$\sum \tilde{y}_t = 1843$	$\sum (y_i - \tilde{y}_t) = 0$	$\sum (y_i - \tilde{y}_t)^2 = 3314$

$$a_0 = \frac{1843}{9} = 204,78; \quad a_1 = \frac{-639}{60} = -10,65$$

Параметры уравнения  $\tilde{y}_t = 204,78 - 10,65t$  можно интерпретировать следующим образом:  $a_0 = 204,78 \approx 205$  – это исходный уровень численности работников с.-х. в ООО «Анга» за период до 2009 г.;  $a_1 = -10,65 \approx -11$  показывает,

что ежегодное изменение численности за период с 2012 до 2020 составляет примерно 11 человек.

Отсюда, трендовая модель численности работников  $\tilde{Y}_t = 204,79 - 10,65t$ .

При «t» равном: -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4, выровненные уровни численности составят:

$$\tilde{Y}_{2012} = 204,79 - 10,65 \cdot (-4) = 247,39 \approx 247$$

$$\tilde{Y}_{2013} = 204,79 - 10,65 \cdot (-3) = 236,74 \approx 237$$

$$\tilde{Y}_{2014} = 204,79 - 10,65 \cdot (-2) = 226,09 \approx 226$$

и т.д. (см. таблицу 1.19)

Расчеты в таблице 1.19 сделаны верно, так как  $\sum Y = \sum \tilde{Y}_t$ .

Основная тенденция (тренд) показывает, как воздействуют систематические факторы на уровень ряда динамики работников сельскохозяйственного производства в ООО «Анга» за 2014 – 2009гг, а колебания уровней около тренда служит мерой остаточных факторов. Ее можно измерить по формуле среднего квадратического отклонения:

$$\delta_t = \sqrt{\frac{\sum (Y_t - \tilde{Y}_t)^2}{n}} \quad (7.18)$$

В нашем случае:

$$\delta_t = \sqrt{\frac{3314}{10}} = 19,18$$

В среднем, колебания работников сельскохозяйственного производства по годам за период 2012-2020 гг. составляет  $\pm 19$  человек или 9,68%  $[(19,18 \div 205) \times 100]$ .

На рисунке 1.1 можно представить графическое изображение фактических и выровненных уровней динамики, численности работников с использованием электронной таблицы Excel.

Для создания графиков можно воспользоваться пиктограммой панели инструментов «Мастер диаграмм». Предварительно выделяют блок данных со значениями X и Y.

В примере адреса интервалов соответствуют A3: B12 (таблица 1.19).

Активизируя «Мастер диаграмм», на первом этапе определяется тип диаграммы «Точечная». Для конкретного случая выбран второй из предлагаемых вариантов. Щелчок по кнопке «Далее» позволяет перейти во второе окно. Здесь устанавливают диапазон исходных данных для диаграммы. Поскольку на предварительном этапе ряды X и Y выделены, то в поле

Активизированной вкладки «Диапазон данных», нет необходимости вводить или изменять данные щелчком по кнопке «Далее». Переходят к третьему этапу.

Таблица 1.19 – Численность работников сельского хозяйства в ООО «Анга» за 2012-2020 гг.

№ п/п	А	В
1	Годы	Численность, чел.
2	2012	276
3	2013	252
4	2014	202
5	2015	205
6	2016	178
7	2017	175
8	2018	190
9	2019	185
10	2020	180

Окно «Параметры диаграммы» содержит в себе шесть вкладок. Во вкладке «Заголовки» заполняют «Название диаграммы», «Ось X» и «Ось Y». В нашем примере введено имя диаграммы «Изменение численности работников сельскохозяйственного производства в ООО «Анга» Иркутской области за 2012-2020 гг.», оси X и Y названы «год» и «человек». Во вкладке «Линии сетки» активизированы основные линии оси X. Из диаграммы удалена легенда путем исключения опции «Добавить легенду» из вкладки «Легенда». После этого переходят к четвертому шагу (кнопка «Далее»).

В окне «Размещение диаграммы» выбирают один из вариантов расположения диаграммы: имеющийся или отдельный лист с названием «Диаграмма 1». В нашем примере указывается опция размещения и графиков на отдельном листе. Щелчком кнопки «Готово» диаграмма выводится на экран.

Название диаграммы переносится с верхней части рисунка под заголовки оси X (путем щелчка левой клавиши мыши активизируется имя диаграммы и перетаскивается объект).

Для добавления линии тренда используется меню «Диаграммы» с названием «Добавить линию тренда».

В одноименном окне (вкладка «Тип») активизируется, в нашем примере, линейная зависимость. При необходимости применяется логарифмическая, полиномиальная, степенная и другие функции. Во вкладке «Параметры»

выбирается пункт «Показать уравнение регрессии». Щелчок кнопки «ОК» позволяет получить на диаграмме линию тренда.

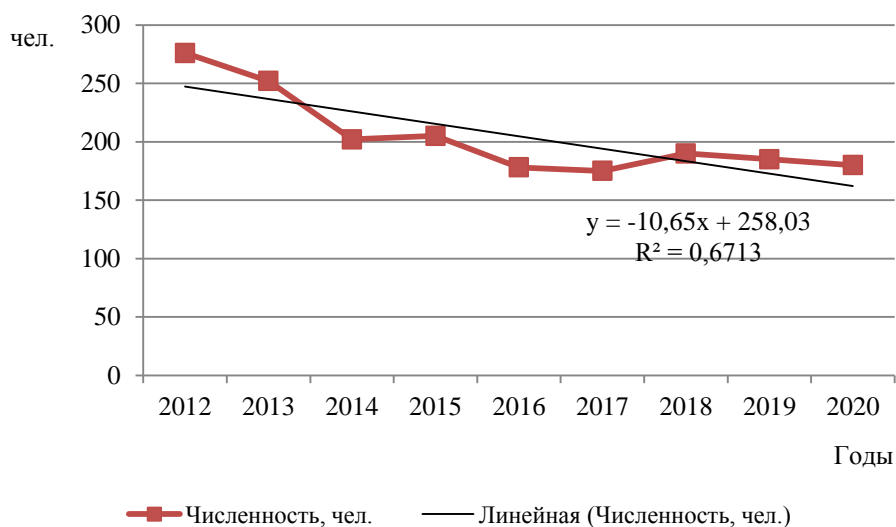


Рисунок 1.1 – Изменение численности работников с.-х. производства в ООО «Анга» Иркутской области

Графики показывают явную тенденцию к уменьшению численности работников сельскохозяйственного производства в ООО «Анга» за 2012- 2020 гг.

### Экстраполяция в рядах динамики и прогнозирование

Выявление и характеристика трендов и моделей взаимосвязи создают базу для прогнозирования, то есть для определения ориентировочных размеров явлений в будущем.

Для этого может быть использован метод экстраполяции – это продление уровней за пределы динамического ряда. Экстраполяция уровней ряда в нашем случае производится выравниванием по аналитическим формулам. Зная уравнение для теоретических уровней и подставляя в него значение  $t$  за пределами исследуемого ряда, рассчитываются для теоретические  $\tilde{Y}_t$ .

Так, по данным таблицы 1.18, на основе исчисленного ранее уравнения  $\tilde{Y}_t = 204,78 - 10,65t$  экстраполяцией при  $t=5$  можно определить ожидаемую

численность работников сельскохозяйственного производства в ООО «Анга» Иркутской области в 2010г., человек

$$\tilde{Y}_t = 204,78 - 10,65 \times 5 = 151,53 \text{ чел.}$$

На практике, результат экстраполяции прогнозируемых явлений обычно получают не точечными (дискретными), а интервальными оценками.

Для определения границ интервалов используется формула:

$$\tilde{Y}_t \pm t_\alpha \times S_{\tilde{Y}_t}, \quad (7.19)$$

где  $t_\alpha$  - коэффициент доверия по распределения Стьюдента

$$S_{\tilde{Y}_t} = \sqrt{\frac{\sum (y_t - \tilde{Y}_t)^2}{n - m}}, \quad (7.20)$$

где  $n$  – число уровней ряда динамики;  $m$  – число параметров адекватной модели тренда (в нашем случае, для уравнения прямой  $m=2$ ).

Следовательно, вероятные границы интервала прогнозируемого явления:

$$(\tilde{Y}_t - t_\alpha S_{\tilde{Y}_t}) \leq Y_{np} \leq (\tilde{Y}_t + t_\alpha S_{\tilde{Y}_t})$$

Рассчитываются прогнозируемые доверительные интервалы численности работников сельского хозяйства на 2021 г.

Если  $n=9$  и  $m=2$ , то число степеней свободы (число элементов статистической совокупности, вариация которых неограниченна) составляет  $7=(9-2)$ . Тогда, при доверительной вероятности, равной 0,95 (то есть при уровне значимости случайностей  $\alpha = 0,05$ ), коэффициент доверия  $t_\alpha = 2,306$  (пересечение  $\nu = 8$  и  $\alpha = 0,05$  по таблице t - Стьюдента),  $\sum (Y_t - \tilde{Y}_t)^2 = 3314$  (смотреть таблицу 1.19).

В этом случае:

$$S_{\tilde{Y}_t} = \sqrt{\frac{\sum 3314}{9 - 2}} = \pm 21,76$$

Зная точечную (дискретную) оценку прогнозируемого значения численности работников  $\tilde{Y}_t = 151,53$  человек, определяются вероятные границы интервала по формуле (1.53)

$$151,53 - 2,306 \times 21,76 \leq Y_{np} \leq 151,53 + 2,306 \times 21,76$$

$$101,35 \leq Y_{np} \leq 201,71$$

Следовательно, с вероятностью 0.95 можно утверждать, что численность работников сельского хозяйства в ООО «Анга» Иркутской области в 2020 г. не меньше 101, но не больше 202 человек.

Экстраполяция носит условный характер, поэтому, при составлении прогноза должна быть привлечена дополнительная информация, не содержащаяся в самом динамическом ряду.

Помимо экстраполяции существуют другие методы прогнозирования.

### **Изучение сезонных колебаний**

При сравнении месячных и квартальных данных многих социально-экономических явлений часто обнаруживаются периодические колебания, которые возникают под влиянием смены времени года.

К сезонным, относят все явления, в которых более или менее устойчиво повторяются из года в год колебания уровней.

Сезонные колебания наблюдаются в различных отраслях экономики: при производстве ряда сельскохозяйственных продуктов; их переработке; в транспорте; строительстве; в торговле и прочее.

Спрос на многие виды услуг, товаров и продуктов колеблется по сезонам, что отрицательно сказывается на результатах производственной деятельности – нарушается ритмичность производства.

Комплексное регулирование сезонных изменений в тех или иных отраслях экономики должно основываться на исследовании сезонных колебаний путем расчета показателей сезонности. Простейший прием расчета – определение среднего уровня динамического ряда, свободного от сезонных колебаний и являющегося типичной величиной для каждого периода. Затем уровень каждого периода сопоставляется со средним уровнем, приравненным к 100% - вычисляются индексы сезонности.

Для того, чтобы выявить устойчивую сезонную волну, на которой не отражались бы случайные условия одного года, индексы сезонности



вычисляются по данным за несколько лет (не менее трех лет), распределенным по месяцам.

Для каждого месяца рассчитывается средняя величина, например за три года ( $\bar{Y}_t$ ), затем вычисляется среднемесячный уровень для всего ряда ( $\bar{Y}$ ).

Процентное соотношение средних для каждого месяца к общему среднемесячному уровню характеризует индекс сезонности ( $I_s$ ) в %.

$$I_s = \frac{\bar{Y}_i}{\bar{Y}} \times 100, \quad (7.22)$$

где  $\bar{Y}_i$  - средний уровень для каждого месяца;  $\bar{Y}$  - среднемесячный уровень для всего ряда.

Расчет индексов сезонности приводится на примере объема реализации молока по месяцам за 2019-2021 гг. (табл. 1.20).

Таблица 1.20 – Объем реализации молока по месяцам в ц. за 2019-2021 гг. и индекс сезонности в СХТ «Иркутский»

Месяц	Год			В среднем по месяцам за 2019 - 2021гг. $\bar{Y}_i$	Индекс сезонности, % $I_s = \bar{Y}_i \div \bar{Y} \times 100$	$U = \bar{Y}_i - \bar{Y}$	$U^2 = (\bar{Y}_i - \bar{Y})^2$
	2019	2020	2021				
Январь	499	460	480	480	84,9	-85	7225
Февраль	406	525	465	465	82,3	-100	10000
Март	501	496	460	486	86,0	-79	6241
Апрель	462	445	470	459	81,2	-106	11236
Май	490	505	490	495	87,6	-70	4900
Июнь	505	575	586	555	98,2	-10	100
Июль	650	620	650	640	113,3	75	5625
Август	810	725	755	763	135,0	198	39204
Сентябрь	725	805	830	787	139,3	221	48841
Октябрь	582	603	640	608	107,6	42	1764
Ноябрь	610	470	535	538	95,2	-28	784
Декабрь	515	485	520	507	89,7	-58	3364
Сумма	6755	6714	6881	6783	-	-	139284
В среднем	563	559	573	$\bar{Y} = 565$	100	0	-

Колебания уровней объемов реализации молока связаны с сезонными условиями производства молока.

Данные таблицы 1.20 позволяют сделать ряд выводов:

- объем реализации молока в одноименные месяцы разных лет неодинаков, следовательно, в уровнях отдельного года отражены не только закономерности сезонных колебаний, но и случайные колебания;
- по данным одного только года нельзя точно измерить сезонные колебания, так как они будут смешаны со случайными колебаниями.

Обобщающим показателем сезонных колебаний является среднее квадратическое отклонение средних объемов реализации молока по месяцам от среднемесячного за год в течение трех лет.

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum U^2}{n}} = \sqrt{\frac{139284}{12}} = 108$$

В среднем за 2019-2021 гг. по месяцам отклонение объема реализации от средней за месяц в течение трех лет составляет  $\pm 108$  ц.

Сезонные колебания объемов реализации молока можно изобразить графически (рис. 1.2).

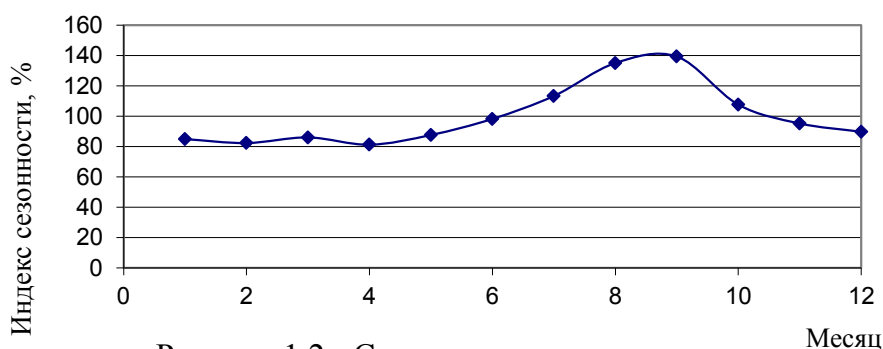


Рисунок 1.2 - Сезонная волна численности работников с.-х. производства в ООО "Анга" Иркутской области за 2019-2020 гг.

Существуют и другие методы определения сезонных колебаний.

#### *Вопросы для самоконтроля*

1. Назовите важнейшие условия правильного построения динамического ряда?
2. Какие показатели динамики рассчитываются по динамическому ряду?

3. Какие приемы определения основной тенденции изменения уровней в динамическом ряду?
4. В чем суть метода экстраполяции при прогнозировании?
5. Что представляют собой сезонные колебания, в чем практическое значение их изучения?
6. Охарактеризуйте нахождение точечных и интервальных прогнозируемых значений.

## **Тема 8. Индексы**

**Индексом** в статистике называют относительный показатель, характеризующий изменение величины какого – либо явления (простого или сложного, состоящего из соизмеримых элементов) во времени, пространстве или по сравнению с любым эталоном (нормативом, планом, прогнозом и т.д.).

Когда рассматривается сопоставление уровней изучаемого явления во времени, то говорят об индексах динамики, в пространстве – о территориальных индексах, при составлении с уровнем, например, договорных обязательств и пр.

Индексы выполняют две функции: синтетическую – используется как обобщающая характеристика изменения уровней изучаемого явления; аналитическую – служит для изучения влияния отдельных факторов на изменение уровней явления.

### **Индексы классифицируют по трем признакам:**

- по содержанию изучаемых объектов;
- степени охвата элементов совокупности;
- методам расчета общих индексов.

По содержанию изучаемых величин индексы разделяются на индексы количественных признаков (количества продукции, численности работников, численности животных, количество инвентаря и т.д.) и индексы

количественных признаков (цен, себестоимости, урожайности культур, жирности молока, производительности труда и пр.).

По степени охвата единиц совокупности индексы делятся на индивидуальные и общие (сводные).

**Индивидуальные индексы** характеризуют изменение уровней отдельных элементов совокупности или однородных групп, сводные (общие) индексы – для определения изменения уровней множества элементов, которые непосредственно не подлежат суммированию.

По методам расчета общих индексов различают индексы агрегатные и средние.

Каждая **индексируемая величина** имеет свое обозначение:

q – количество какого – либо продукта (товара) в натуральном выражении;

p – цена единицы товара (продукции);

t – трудоемкость производства единицы продукции;

z – себестоимость единицы продукции;

T – общие затраты времени;

$\omega$  – выработка продукции в единицу времени или на одного работника;

i – индивидуальный индекс;

I – общий (сводный) индекс и т.д.

В динамических индексах предыдущее значение величины, принимаемой за базу сравнения, обозначаются подстрочным знаком «0», а текущее, оценочное значение – «1».

В территориальных индексах база сравнения произвольная. Например,

индивидуальный индекс динамики цен  $i_p = \frac{p_1}{p_0}$ , а территориальный индекс цен

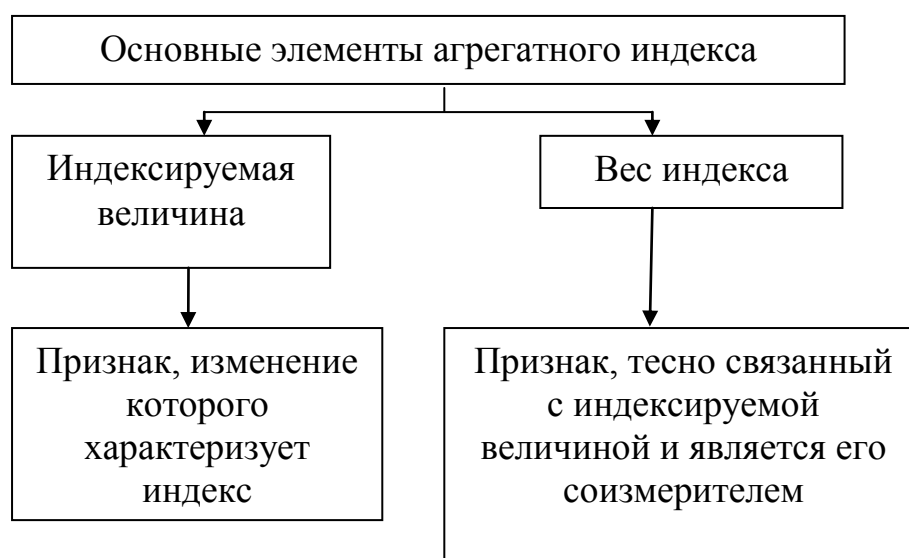
$$i_p = \frac{p_A}{p_B} .$$

Методика расчетов общих индексов сложнее и зависит от характера индексируемых признаков, наличия исходных данных и цели исследования.

Любые общие индексы могут быть построены как агрегатные и как средние из индивидуальных.

Агрегатные индексы качественных признаков могут быть рассчитаны как индексы переменного состава (например, индексы товарооборота или индекс средних цен) и индекс постоянного состава (например, индекс цен или индекс объема).

В агрегатном индексе числитель и знаменатель представляют набор непосредственно несоизмеримых и не поддающихся соизмерению элементов, одна из которых меняется (индексируется), а другая остается неизменной в числителе и знаменателе (вес индекса).



Разнородные продукты или товары из-за различия натуральной формы и свойств бессмысленно непосредственно суммировать (молоко, зерно, рыба и т.д.) в связи с чем нельзя построить и вычислить отношение простых сумм  $(\sum q_1 : \sum q_0)$ .

Каждый продукт или товар имеет соизмеритель в виде цены (р), себестоимость (z), трудоемкость (t) и пр.

При умножении объема товара (продукции, услуги, работы) на соответствующую цену (себестоимость или трудоемкость), получают соизмеренные показатели, которые можно суммировать  $(\sum qp, \sum qz, \sum qt)$ .

Отношение стоимости продукции (товаров, услуг, работ) текущего периода в текущих ценах  $(\sum q_1 p_1)$ , к стоимости базисного периода в базисных ценах  $(\sum q_0 p_0)$ , представляет собой индекс товарооборота переменного состава:

$$I_{\text{qp}} = \frac{\sum q_1 p_1}{\sum q_0 p_0} \quad (8.1)$$

где  $q_1 p_1$  - объем продукции (товара, услуг) в текущем и базисном периодах, соответственно;  $q_0 p_0$  - цена единицы продукции (товара, услуги) в текущем и базисном периодах, соответственно.

Этот индекс показывает, во сколько раз увеличивается (уменьшается) товарооборот или сколько процентов составляет увеличение (уменьшение) в отчетном (текущем периоде) относительно базисного периода).

Абсолютный прирост (уменьшение) определяется разностью числителя и знаменателя в формуле (8.1)

На величину индекса товарооборота оказывают влияние изменение цен на продукты (работы, услуги) и изменение объемов.

Чтобы оценить изменение только цен (индексируемой величины), объем фиксируется как «вес» на каком-либо постоянном уровне.

Если исследуются качественные признаки (например, цена или себестоимость единицы товара), количественные признаки выступают в качестве «вес» и фиксируется на уровне текущего периода с оценочным значением «1», например, общий индекс цен Пааше (8.2):

$$I_p = \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_1} \quad (8.2)$$

Данный индекс постоянного состава с переменным весом, индексируемой величиной является цена товара ( $p$ ), а в качестве веса выступает объем ( $q$ ).

Абсолютное отклонение суммы товарооборота за счет изменения цен определяется по формуле:

$$\Delta \sum p q_{(p)} = \sum p_1 q_1 - \sum p_0 q_1 \quad (8.3)$$

Для того чтобы индекс охарактеризовал изменение уровней количественного признака (объемы), устраняется в формуле (8.3) влияние цены ( $p$ ), зафиксировав её как в числителе, так и в знаменателе на уровне одного и того же периода (например, базисные цены « $p^0$ »). Такой индекс представляет

собой агрегатный индекс физического объема – индекс постоянного состава постоянного веса:

$$I_q = \frac{\sum q_1 p_0}{\sum q_0 p_0} \quad (8.4)$$

Разность числителя и знаменателя:

$$\Delta \sum p q_{(q)} = \sum q_1 p_0 - \sum q_0 p_0$$

Характеризует, на сколько изменилась сумма товарооборота в результате отклонения объема (q) текущем периоде по сравнению с базисным.

Заметим, что применённые в формулах 8.2 и 8.4 последовательность записей символов q и p распределяются так, что первым сомножителем в индексных отношениях являются индексируемые величины, а вторым сомножителем – их вес (соизмеритель).

При построении агрегатных индексов физического объема  $I^q$  и цен  $I^p$  могут быть использованы базисно-взвешенные индекс цен Ласпейреса:

$$I_p = \frac{\sum p_1 q_0}{\sum p_0 q_0} \quad (8.5)$$

и текущие взвешенные индексы физического объема:

$$I_q = \frac{\sum q_1 p_1}{\sum q_0 p_1} \quad (8.6)$$

Учитывая мультипликационную связь между соизмерителями и весами, указанные индексы связываются в систему:

$$I_{qp} = I_p \times I_q \quad (8.7)$$

Эта связь обеспечивается, если индексы-сомножители разновзвешенные:

$$I_p = \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_1} \quad \text{и} \quad I_q = \frac{\sum q_1 p_0}{\sum q_0 p_0}, \quad (8.8)$$

$$\text{или} \quad I_p = \frac{\sum p_1 q_0}{\sum p_0 q_0} \quad \text{и} \quad I_q = \frac{\sum q_1 p_1}{\sum q_0 p_1} \quad (8.9)$$

Выше приведенные индексы будут рассматриваться на примере данных таблицы 1.21

Таблица 1.21 – Посевная площадь и валовой сбор зерна за 2019 г. на предприятии

Культура	План			Факт		
	Посевная площадь, га	Урожайность, ц/га	Валовой сбор, ц	Посевная площадь, га	Урожайность, ц/га	Валовой сбор, ц
	$S_0$	$P_0$	$S_0 P_0$	$S_1$	$P_1$	$S_1 P_1$
Ячмень	385	19,6	7546	396	18,5	7326,0
Овес	805	18,5	14911	805	20,1	16180,5
Горох	50	13,9	695	60	15,2	912,0
Горох	100	14,5	1450	90	16,1	1449,0
Всего	1314	18,3	24602	1351	19,2	25867,5

Рассматриваются индивидуальные индексы по одной культуре – ячменю (фактические уровни сравниваются с плановыми):

$$i_s = \frac{S_1}{S_0} = \frac{369}{385} = 1,029 \text{ или } 102,9\%;$$

$$i_y = \frac{Y_1}{Y_0} = \frac{18,5}{19,6} = 0,944 \text{ или } 94,4\%;$$

$$i_{sy} = \frac{S_1 Y_1}{S_0 Y_0} = \frac{7326}{7546} = 0,971 \text{ или } 97,1 \%$$

Посевная площадь ячменя фактически больше планируемой в 1,029 раза или на 2,9%, урожайность составляет 94,4% от планируемого уровня, а по валовому сбору ячменя выполнение плана составляет 97% - не выполнили задание на 2,9%.

Мультипликативная модель:  $0,971 = 0,944 \times 1,029$

Для изучения всех четырех зерновых культур вместе, используются свободные (общие) индексы.

Изучаются выполнение плана по валовому сбору зерновых.

$$J_{sy} = \frac{\sum S_1 Y_1}{\sum S_0 Y_0} = \frac{25867,5}{24602} = 1,0514 \text{ или } 105,14\%$$

Фактический валовой сбор зерновых относительно плана составляет 105,14%, то есть план по валовому сбору перевыполнен на 5,14% в абсолютном выражении перевыполнение составило 1265,5 ц. (25867,5ц -24602ц).

Перевыполнение плана валового сбора объясняется:



а) урожайностью культур, кроме ячменя

$$J_Y = \frac{\sum Y_1 S_1}{\sum Y_0 S_1} = \frac{25867,5}{19,6 * 396 + 18,5 * 805 + 13,9 * 60 + 14,5 * 90} = \frac{25867,5}{24793} = 1,0433$$

или

104,33%

б) посевными площадями

$$J_S = \frac{\sum S_1 Y_0}{\sum S_0 Y_0} = \frac{24793}{24602} = 1,0078$$

или 100,78%

В абсолютном выражении отклонение величины валовых сборов фактически от плана за счет того или иного фактора определяется путем вычитания знаменателя от числителя:

$$\Delta \sum SY(Y) = \sum Y_1 S_1 - \sum Y_0 S_1 = 25867,5 - 24793 = 1074,5 \text{ ц}$$

$$\Delta \sum SY(S) = \sum S_1 Y_0 - \sum S_0 Y_0 = 24793 - 24602 = 191 \text{ ц}$$

Взаимосвязь индексов

Мультипликативная модель:  $J_{SY} = J_S \cdot J_Y$ ;  $1,0514 = 1,0078 * 1,0433$

Аддитивная модель:  $\Delta \sum SY = \Delta \sum SY(S) + \Delta \sum SY(Y)$ ;  $1265,5 = 191 + 1074,5$ .

Перевыполнен план по валовому сбору зерновых на 1265,5 ц. или на 5,14% (1,0514 раза). Перевыполнением плана по урожайности, кроме ячменя, объясняется на 0,78% или 191 ц.

### Средние индексы

Нами рассматриваются однородные культуры (соизмеренные) в табл.1.21, следовательно, могут быть рассчитаны средние урожайности по плану и фактически (по арифметической взвешенной).

Средняя урожайность зерновых:

$$\text{плановая } \bar{y}_0 = \frac{\sum S_0 Y_0}{\sum S_0} = \frac{24602}{1341} = 18,346 \text{ ц/га}$$

$$\text{фактическая } \bar{y}_1 = \frac{\sum S_1 Y_1}{\sum S_1} = \frac{25867,5}{1351} = 19,147 \text{ ц/га}$$

$$\overline{y}_{усл} = \frac{\sum S_1 Y_0}{\sum S_1} = \frac{24793}{1351} = 18,352 \text{ ц/га}$$

С помощью индекса средней урожайности переменного веса определяется выполнение плана средней урожайности по формуле (8.10) :

$$J_{\bar{y}} = \frac{\sum Y_1 S_1}{\sum S_1} : \frac{\sum Y_0 S_0}{\sum S_0} = \overline{y}_1 : \overline{y}_0$$

$$J_{\bar{y}} = \frac{25867,5}{1351} : \frac{24602}{1341} = 19,147 : 18,346 = 1,0437 \text{ или } 104,37 \%$$

В абсолютном выражении:

$$\Delta \bar{y} = \overline{y}_1 - \overline{y}_0 = 19,147 - 18,346 = 0,801 \text{ ц/га}$$

План по средней урожайности перевыполнен на 0,801 ц/га или в 1,0437 раза (на 4,37%).

На отклонение уровней средней урожайности влияют урожайность каждой культуры и структурные сдвиги (структура посевов зерновых).

1) Влияние урожайности отдельных культур рассматривается с помощью индекса урожайности постоянного состава.

$$V_{\bar{y}(cmp.S)} = \frac{\sum Y_1 S_1}{\sum Y_0 S_1} = \frac{25867,5}{24793} = 1,0433 \text{ или } 104,33 \%$$

В абсолютном выражении определяется отклонение различными способами:

а) через коэффициенты (индексы):

$$\Delta \bar{y}(y) = \overline{y}_0 (? - 1) = 18,346(1,0433 - 1) = 0,794 \text{ ц/га;}$$

б) через пропорции:

$$X = \frac{0,801 * 4,33}{4,37} = 0,794 \text{ ц/га}$$

0,801 ц/га - 4,37%

X ц/га - 4,33%

2) Влияние структуры посевов (индекс постоянного состава) на отклонение средней урожайности.

$$Y_{\bar{y}(cmp.S)} = \frac{\sum Y_0 S_1}{\sum S_1} : \frac{\sum Y_0 S_0}{\sum S_0} = \bar{y}_{ycl} - \bar{y}_0 = 18,352 : 18,346 = 1,0003 \quad \text{или } 100,03\%$$

В абсолютном выражении составляет:

$$a) \Delta \bar{y}(cmp.S) = \bar{y}_{ycl} - \bar{y}_0 = 18,352 - 18,346 = 0,006 \quad \text{ц/га}$$

$$б) \Delta \bar{Y}(cmp.S) = \bar{Y}_0 \cdot Y_{\bar{y}(y)} \cdot [(Y_{\bar{y}(cmp.S)} - 1)] = 18,346 \cdot 1,0433 \cdot (1,0003 - 1) = 0,006 \text{ц/га}$$

Взаимосвязь индексов

$$Y_{\bar{y}} = Y_{\bar{y}(y)} \times Y_{\bar{y}(стр.S)}; \quad 1,0437 = 1,0433 \times 1,0003$$

$$\Delta \bar{Y} = \Delta \bar{Y}(y) + \Delta \bar{Y}(стр.S); \quad 0,801 \text{ ц/га} = 0,794 \text{ ц/га} + 0,006 \text{ ц/га}$$

Незначительное отклонение за счет округлений.

Перевыполнение плана средней урожайности зерновых на 0,801 ц/га или 4,37% (1,0437 раза), за счет роста урожайности культур (кроме ячменя) – перевыполнение составляет 0,794 ц/га или 4,33%, а за счет улучшения структуры посевов (больше посеяли овес с высокой урожайностью) – урожайность выше всего на 0,03% или 0,006 ц/га (практически, структура посевов зерновых осталась без изменения).

### Сводные индексы в средней арифметической и средней гармонической формах

Наряду с агрегатными индексами общие индексы могут быть построены средние взвешенные из индивидуальных, тождественные агрегатным.

**Средневзвешенный индекс** – это средний из индивидуальных индексов, взвешенные на объемы, имеющие одинаковую размерность и зарегистрированные на неизменном уровне.

Таковыми объемами являются, в частности:  $\sum p_1 q_1$ ;  $\sum p_0 q_0$ ;  $\sum S_0 Y_0$ ;  $\sum S_1 Y_1$ ;  $\sum t_1 q_1$ ;  $\sum t_0 q_0$  и т.д.

Уровень, на котором фиксируются объемы, выбирается исходя из агрегатной формулы соответствующего индекса.

Средневзвешенный индекс цен, тождественный агрегатному индексу Пааше:

$$J_p = \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_1 q_0}$$

Определяется по формуле средней гармонической взвешенной:

$$J_p = \frac{\sum p_1 q_1}{\sum \frac{p_1 q_1}{i_p}} \quad \text{из расчета} \quad i_p = \frac{p_1}{p_0} \quad (8.11)$$

Формула (8.11) используется, когда неизвестны отдельные значения  $p_1$  и  $q_1$ , но, имеются значения товарооборота ( $p_1 q_1$ ) и индивидуальные индексы цен  $i_p = p_1 : p_0$  (см. данные табл. 1.22)

Таблица 1.22 – Валовые сборы зерновых и индексы выполнения плана урожайности зерновых в Иркутской области

Культура	Факт. валовой сбор зерна, ц	Процент выполнения плана урожайности, %
Ячмень	7326	94,5
Овес	13685	91,9
Горох	846	101,4
Горох	1343	102,8
Всего	23200	93,6

Средневзвешенный индекс урожайности зерновых определяется по формуле (5.8).

$$J_y = \frac{\sum S_1 Y_1}{\sum \frac{S_1 Y_1}{i_y}} = \frac{7326 + 13685 + 846 + 1343}{\frac{7326}{0,945} + \frac{13685}{0,919} + \frac{846}{1,014} + \frac{1343}{1,028}} = \frac{23200}{24783} = 0,936$$

или 93,6 %

В целом по зерновым культурам в Иркутской области за 2020 г. фактическая урожайность ниже плановой в 0,936 раза или 6,4 %.

Средневзвешенный индекс физического объема вычисляется по формуле средней арифметической взвешенной

$$J_q = \frac{\sum q_0 p_0 \cdot i_q}{\sum q_0 p_0}, \quad \text{при} \quad i_q = \frac{q_1}{q_0}. \quad (8.12)$$

Используется формула (8.12), когда неизвестны отдельные значения  $P_0$  и  $Q_0$ , но задано их произведение ( $P_0Q_0$  - товарооборот базисного периода) и индивидуальные индексы объема  $i_q$ .

Пример расчета средневзвешенной посевной площади приводится в табл. 1.23.

Таблица 1.23 – Данные валового сбора и изменения посевной площади зерновых в Иркутской области

Культура	Валовой сбор зерна в 2019 г., ц	Площадь зерновых в 2020 г. относительно 2019 г., %
Ячмень	7546	105
Овес	14911	95
Горох	695	88
Всего	23152	98

$$J_s = \frac{\sum S_0 Y_0 \times i_s}{\sum S_0 Y_0} = \frac{7546 \times 1,05 + 14911 \times 0,95 + 695 \times 0,88}{7546 + 14911 + 695} = \frac{22700}{23152} = 0,980$$

или 98,0%

По зерновым площадь в 2020 г. относительно 2019г. сократилась на 2% (98-100), в результате валовой сбор зерна сократился на 452 ц. (23152ц-22700ц).

### Базисные и цепные индексы

Часто в ходе экономического анализа изменение индексируемых величин изучается не за два периода, а за ряд последовательных периодов или моментов времени.

В зависимости от базы сравнения индексы бывают базисные и цепные, как индивидуальные, так и сводные.

Например, обозначив пять последовательных периодов подстрочными значениями 0,1,2,3,4 исчисляются индексы цен следующим образом:

базисные индивидуальные индексы:

$$i_{\%} = \frac{P_1}{P_0}; \quad i_{\%} = \frac{P_2}{P_0}; \quad i_{\%} = \frac{P_3}{P_0}; \quad i_{\%} = \frac{P_4}{P_0};$$

цепные индивидуальные индексы:

$$i_{1/0} = \frac{p_1}{p_0}; \quad i_{2/1} = \frac{p_2}{p_1}; \quad i_{3/2} = \frac{p_3}{p_2}; \quad i_{4/3} = \frac{p_4}{p_3}.$$

Между цепными и базисными индивидуальными индексами существует взаимосвязь:

а) произведение последовательных цепных индексов дает базисный индекс последнего периода

$$i = \frac{p_1}{p_0} \times \frac{p_2}{p_1} \times \frac{p_3}{p_2} \times \frac{p_4}{p_3}; \quad (8.13)$$

б) отношение базисного индекса отчетного периода к базисному индексу предшествующего периода дает цепной индекс отчетного периода:

$$i_{p_{1/0}} = i_{p_{1/0}} : i_{p_{1/0}}; \quad i_{p_{2/1}} = i_{p_{2/1}} : i_{p_{2/1}}; \quad i_{p_{3/2}} = i_{p_{3/2}} : i_{p_{3/2}}$$

С помощью формул 8.13 и 8.14 определяются неизвестные величины в рядах динамики базисных индексов по известным цепным и наоборот.

Для агрегатных общих индексов построение цепных и базисных индексов следующее:

- базисные индексы цен с переменными весами (Пааше):

$$J_{p_{1/0}} = \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_1}; \quad J_{p_{2/1}} = \frac{\sum p_2 q_2}{\sum p_0 q_2}; \quad J_{p_{3/2}} = \frac{\sum p_3 q_3}{\sum p_0 q_3} \quad \text{и т.д.}; \quad (8.15)$$

- базисные индексы цен с постоянными весами (Ласпейреса):

$$J_{p_{1/0}} = \frac{\sum p_1 q_0}{\sum p_0 q_0}; \quad J_{p_{2/1}} = \frac{\sum p_2 q_0}{\sum p_0 q_0}; \quad J_{p_{3/2}} = \frac{\sum p_3 q_0}{\sum p_0 q_0} \quad \text{и т.д.}; \quad (8.16)$$

- базисные индексы физического объема:

$$J_{q_{1/0}} = \frac{\sum q_1 p_0}{\sum q_0 p_0}; \quad J_{q_{2/1}} = \frac{\sum q_2 p_0}{\sum q_0 p_0}; \quad J_{q_{3/2}} = \frac{\sum q_3 p_0}{\sum q_0 p_0} \quad \text{и т.д.}; \quad (8.17)$$

- цепные индексы цен с переменными весами (Пааше):

$$J_{p_{1/0}} = \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_1}; \quad J_{p_{2/1}} = \frac{\sum p_2 q_2}{\sum p_1 q_2}; \quad J_{p_{3/2}} = \frac{\sum p_3 q_3}{\sum p_2 q_3} \quad \text{и т.д.}; \quad (8.18)$$

- цепные индексы цен с постоянными весами (Ласпейреса):

$$J_{p_{\%}} = \frac{\sum p_1 q_0}{\sum p_0 q_0}; \quad J_{p_{\%}} = \frac{\sum p_2 q_0}{\sum p_1 q_0}; \quad J_{p_{\%}} = \frac{\sum p_3 q_0}{\sum p_2 q_0} \quad \text{и т.д.}; \quad (8.19)$$

- цепные индексы физического объема с постоянными весами:

$$J_{q_{\%}} = \frac{\sum q_1 p_0}{\sum q_0 p_0}; \quad J_{q_{\%}} = \frac{\sum q_2 p_0}{\sum q_1 p_0}; \quad J_{q_{\%}} = \frac{\sum q_3 p_0}{\sum q_2 p_0} \quad \text{и т.д.}; \quad (8.20)$$

Ряды агрегатных индексов с постоянными весами взаимосвязаны между собой, как в случаях 8.13 и 8.14.

В рядах динамики агрегатных индексов качественных показателей с переменными весами (случай 8.18), перемножение цепных индексов не дает базисных.

Базисных и цепные индексы рассматриваются на примере данных табл. 1.24.

Таблица 1.24 – Динамика цен на зерно за период с 2016-2021 гг.

Год	2016	2017	2018	2019	2020	2021
Цена 1 ц зерна, руб.	150	145	200	250	240	300

Цепные индексы цен:

$$i_{04/03} = \frac{145}{150} = 0,967; \quad i_{05/04} = \frac{200}{145} = 1,379; \quad i_{06/05} = \frac{250}{200} = 1,25; \quad i_{07/06} = \frac{240}{250} = 0,96;$$

$$i_{08/07} = \frac{300}{240} = 1,25$$

$$\frac{145}{150} \times \frac{200}{145} \times \frac{250}{200} \times \frac{240}{250} \times \frac{300}{240} = \frac{300}{150}; \quad i_{08/03} = \frac{300}{150} = 2,00$$

Таким образом, произведение цепных индексов характеризует базисный индекс, равный 2,00 (цены на зерно повысились в 2021 г. относительно 2016 г. в два раза).

Базисные индексы цен:

$$i_{04/03} = \frac{145}{150} = 0,967; \quad i_{05/03} = \frac{200}{150} = 1,333$$

$$i_{05/04} = i_{05/03} : i_{04/03}; \quad i_{05/04} = \frac{200}{150} : \frac{145}{150} = 1,3793$$

Это значит, в 2018 г. относительно 2017 г. цены повысились в 1,3793 (37,93 %).

$$i_{07/03} = \frac{240}{150} = 1,60 ; i_{08/03} = \frac{300}{150} = 2,00$$

$$i_{08/07} = i_{08/03} : i_{07/03} ; \frac{300}{150} : \frac{240}{150} = 1,25$$

В 2021 г. по сравнению с 2020 г. цены на зерно повысились в 1,25 раза или 25%.

### Система взаимосвязанных индексов

Многие статистические показатели находятся между собой в определенной связи (часто в виде произведения). Так, объем выработанной продукции связан с уровнем производительности труда и с численностью занятых на предприятии работников; товарооборот является произведением количества проданной продукции на цену; валовой сбор той или иной культуры - произведением урожайности и посевной площади; общие затраты труда (затраты времени) являются результатом произведения трудоемкости единицы продукции на количество произведенной продукции; сумма материальных затрат является произведением себестоимости единицы продукции и количества продукции и т.д.

Все соотношения в таких произведениях могут рассматриваться как факторы, определяющие значение результативного признака. Так, товарооборот может изменяться за счет изменения количества (объема) продажи и за счет изменения цен и т.д.

Факторы тесно связаны между собой и образуют систему индексов.

Нами выше рассматривались построение взаимосвязанных индексов на примере индексов урожайности зерновых, посевных площадей зерновых и индекса валового сбора зерна:

$$J_{SY} = J_S \times J_Y, \text{ или } \frac{\sum S_1 Y_1}{\sum S_0 Y_0} = \frac{\sum S_1 Y_0}{\sum S_0 Y_0} \times \frac{\sum Y_1 S_1}{\sum Y_0 S_1}$$



Аналогичную взаимосвязь между индексом затрат на производство продукции  $Y_{zq}$ , индексом себестоимости единицы продукции ( $Y_z$ ) и индексом физического объема продукции ( $Y_q$ ) записывается в виде следующей системы:

$$J_{zq} = J_z \times J_q, \text{ или } \frac{\sum z_1 q_1}{\sum z_0 q_0} = \frac{\sum z_1 q_1}{\sum z_0 q_1} \times \frac{\sum q_1 z_0}{\sum q_0 z_0} \quad (8.21)$$

Индекс изменения общего фонда оплаты труда ( $\Phi$ ) в связи с изменением общей численности работающих ( $T$ ) и заработной платы одного работника ( $Z$ ):

$$J_\Phi = J_T \times J_Z, \text{ или } \frac{\sum T_1 Z_1}{\sum T_0 Z_0} = \frac{\sum T_1 Z_0}{\sum T_0 Z_0} \times \frac{\sum Z_1 T_1}{\sum Z_0 T_1} \quad (8.22)$$

Индекс изменения общих затрат рабочего времени ( $T$ ) в связи с изменением трудоемкости продукции – затраты труда на единицу продукции ( $t$ ) и объема производственной продукции ( $q$ ):

$$J_T = J_t \times J_q, \text{ или } \frac{\sum t_1 q_1}{\sum t_0 q_0} = \frac{\sum t_1 q_1}{\sum t_0 q_1} \times \frac{\sum q_1 t_0}{\sum q_0 t_0} \quad (8.23)$$

Индекс объема производственной продукции (работ, услуг) «Q» в связи с изменением стоимости основных фондов ( $\Phi$ ) и эффективностью использования основных фондов – фондоотдачей ( $f$ ):

$$J_Q = J_\Phi \times J_f, \text{ или } \frac{\sum \Phi_1 q_1}{\sum \Phi_0 q_0} = \frac{\sum \Phi_1 f_0}{\sum \Phi_0 f_0} \times \frac{\sum f_1 \Phi_1}{\sum f_0 \Phi_1} \quad (8.24)$$

Рассмотренные системы представляют собой двухфакторные системы, а связь может быть трехфакторная и четырехфакторная и т.д.

### *Вопросы для самоконтроля*

1. Дайте определение «индексы».
2. Какие задачи решаются с помощью индексов?
3. Что характеризуют индивидуальные и общие индексы?
4. В чем различия построения индексов постоянного состава с постоянными и переменными весами?
5. В каком случае используются средний арифметический и средний гармонический индексы?

6. В чем различия построения индексов цен Пааше и Ласпейреса?
7. Что называется индексом переменного состава, как он исчисляется?
8. Какая взаимосвязь существует между индексами переменного состава, постоянного состава и структурных сдвигов?
9. В чем выражается взаимосвязь индексов?

## **Тема 9. Выборочное наблюдение**

Выборочное наблюдение - это такой вид статистического наблюдения, при котором обследованию подвергается не вся совокупность, а лишь часть ее единиц, отобранных в определенном порядке. При этом вся исследуемая совокупность называется генеральной ( $N$ ), а единицы, подлежащие наблюдению, составляют выборочную совокупность ( $n$ ).

Целью выборочного наблюдения является определение параметров генеральной совокупности (генеральной средней -  $\bar{x}$ , и генеральной доли -  $\omega$ ). Разница между генеральными и выборочными параметрами называется ошибкой выборки или ошибкой репрезентативности. Формулы ее определения, разработанные теорией вероятности и математической статистикой, дифференцированы в зависимости от видов и способов отбора.

Различают два вида отбора - повторный и бесповторный. Первый соответствует схеме «возвращенного шара» и второй – «невозвращенного шара».

В социально-экономических исследованиях, как правило, не применяют повторный отбор.

При проведении выборочного наблюдения возможны три способа отбора: случайный; отбор единиц по определенной схеме; сочетание первого и второго.

Различают следующие виды выборки: собственно-случайная; механическая; типическая (районированная); серийная (гнездовая); серийная (гнездовая); многоступенчатая и т.д.

Одна из задач, решаемая на основе выборочного метода,- определение ошибки выборки. В статистике принято разделять среднюю (стандартную), предельную и относительную ошибки выборочного наблюдения.

Доказано, что при случайном и механическом отборе средней ошибки выборки для средней величины ( $\mu_x$ ) определяется по формулам:

при повторном отборе:

$$\mu_x = \sqrt{\frac{\delta^2}{n}}$$

при бесповторном отборе:

$$\mu_x = \sqrt{\frac{\delta^2}{n} \left(1 - \frac{n}{N}\right)}$$

где  $\sigma^2$  - дисперсия признака в генеральной совокупности;  $n$  - численность выборочной совокупности;  $N$  - численность генеральной совокупности.

Величина  $\left(1 - \frac{n}{N}\right)$  всегда меньше единицы, поэтому применение бесповторного отбора обеспечивает меньшую ошибку выборки.

При практическом использовании данных формул учитывается, что дисперсия альтернативного признака (доли) рассчитывается как производственных долей.

$$\sigma_\omega^2 = \omega(1 - \omega), \quad (9.3)$$

где  $\omega = \frac{m}{n}$  доля единиц, обладающих данным признаком в выборочной совокупности и определяется отношением количества соответствующих единиц к объему выборки.

Отсюда, средняя ошибка для доли при повторной выборки:

$$\mu_p = \sqrt{\frac{\omega(1 - \omega)}{n}} \quad (9.4)$$

При бесповторной выборке средняя ошибка для доли:

$$\mu_p = \sqrt{\frac{\omega(1-\omega)}{n} \times \left(1 - \frac{n}{N}\right)} \quad (9.5)$$

Далее рассчитывается предельная (максимально возможная) ошибка выборки для средней:

при повторном отборе:

$$\Delta_{\bar{x}} = t \times \mu_x = t \times \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}, \quad (9.6)$$

при бесповторном отборе:

$$\Delta_{\bar{x}} = t \times \mu_x = t \times \sqrt{\frac{\sigma^2}{n} \times \left(1 - \frac{n}{N}\right)}, \quad (9.7)$$

В формулах 9.6. и 9.7,  $t$  - коэффициент доверия определяется по таблице интегральной функции Лапласа при заданной доверительной вероятности.

В таблице 1.25 приводятся часто употребляемые уровни доверительной вероятности и соответствующие им значения  $t$ .

Таблица 1.25 – Таблица доверительной вероятности

P(t)	0.683	0.950	0.954	0.990	0.997
t	1.00	1.96	2.00	2.58	3.00

Зная величину выборочной средней ( $\bar{x}$ ) или доли ( $\omega$ ), а также предельную ошибку выборок ( $\Delta$ ), определяются доверительные интервалы, в которых находятся значения генеральных параметров:

$$\bar{x} - \Delta \leq \bar{\mu} \leq \bar{x} + \Delta \quad (9.8)$$

$$\omega - \Delta \leq p \leq \omega + \Delta \quad (9.9)$$

Пример. Для определения среднего срока пользования кредитом в банке была произведена 5 %-я механическая выборка, в которую попали 100 счетов. По результатам отбора, установили средний срок пользования краткосрочным кредитом 50 дней при среднеквадратическом отклонении 17 дней. В 10 счетах срок пользования кредитом превышал 4 месяца. Необходимо с вероятностью 0,997 определить пределы, в которых находятся срок пользования краткосрочными кредитами банка и доля краткосрочных кредитов сроком пользования более 4 месяцев.

Средняя ошибка выборки при бесповторном отборе:

$$\mu = \sqrt{\frac{\sigma^2}{n} \left(1 - \frac{n}{N}\right)} = \sqrt{\frac{17^2}{100} (1 - 0,05)} = 2,7 \quad \text{дня } (0,05=5\%; \frac{n}{N})$$

При доверительной вероятности 0,997 значение t составляет 3.

Отсюда, предельная ошибка выборки при определении среднего срока пользования краткосрочным кредитом составляет:

$$\Delta = t \times \mu = 2,7 \times 3 = 8,1 \approx 8 \text{ дней}$$

Средний срок пользования краткосрочным кредитом в банке в пределах:

$$50 - 8 \leq \bar{x} \leq 50 + 8$$

С вероятностью 0,99 утверждается, что средний срок пользования краткосрочным кредитом составляет от 42 до 58 дней.

Доля кредитов со сроком пользования более 4 месяцев:

$$\omega = \frac{12}{200} = 0,06 \quad \text{или } 6\%.$$

Средняя ошибка доли:

$$\mu = \sqrt{\frac{\omega(1-\omega)}{n} \left(1 - \frac{n}{N}\right)} = \sqrt{\frac{0,06(1-0,06)}{150} (1 - 0,05)} = 0,0189$$

Предельная ошибка доли:

$$\Delta = t \times \mu = 3 \times 0,0189 = 0,0567 \quad \text{или } 5,67\%$$

Отсюда, доля кредитов со сроком пользования более 4 месяцев в генеральной совокупности находится в пределах  $\omega \pm 5,67\%$ , т.е.  $6\% - 5,67\% \leq p \leq 6\% + 5,67\%$

В результате, доля кредитов сроком пользования более 4 месяцев с вероятностью 0,997 составляет от 0,33 % до 11,67 %.

При проектировании выборочного наблюдения с заранее заданным значением допустимой ошибки выборки, важно правильно определить минимально допустимый объем выборки. Формулы для определения необходимой численности выборки (n) легко получается непосредственно из формулы определения ошибок (9.1 и 9.2), (9.6 и 9.7).

для повторного отбора:  $n = \frac{t^2 \times \sigma^2}{\Delta^2}$ , (9.10)

для бесповторного отбора:  $n = \frac{t^2 \sigma^2 N}{\Delta^2 N + t^2 \sigma^2}$  (9.11)

При определенно объеме выборки величина допустимой предельной ошибки и уровень вероятности, гарантирующей точность оценок бедующей выборки, задаются исследователем. Для её оценки используется:

- дисперсия, найденная из соотношения для среднего квадратического

отклонения  $\sigma = \frac{1}{3} \bar{x}$  ;

- выборочная дисперсия по данным прошлых или пробных исследований;

- дисперсия, определенная из соотношения для ассиметричного

распределения  $\sigma = \frac{1}{5}(x_{\max} - x_{\min})$  ;

- дисперсия, вычисленная из соотношения для нормального распределения

$\sigma = \frac{1}{6}(x_{\max} - x_{\min})$

В качестве оценки генеральной дисперсии доли используется максимально возможная дисперсия альтернативного признака

$\sigma_{\text{доли}}^2 = 0,5 \times 0,5 = 0,25$

*Пример 1.* Для определения среднего возраста 1200 студентов необходимо провести выборочное обследование методом случайного бесповторного отбора. Предварительно установлено, что среднее квадратическое отклонение возраста студентов равно 10 годам. Сколько студентов нужно обследовать, чтобы с вероятностью 0,954 средняя ошибка выборки не превышала 3 года?

Решение. Рассчитывается необходимая численность выборки по формуле бесповторного отбора (9.11), учитывая, что  $t=2$  при  $p=0,954$ .

$$n = \frac{t^2 \sigma^2 N}{\Delta_x^2 N + t^2 \sigma^2} = \frac{2^2 \times 10^2 \times 1200}{3^2 \times 1200 + 2^2 \times 10^2} = 43$$

Следовательно, выборка численностью 43 человек обеспечивает заданную точность при бесповторном отборе.

*Пример 2.* Определить численность выборки при повторном отборе. Для определения средней цены говядины на рынках города предполагается произвести выборочную регистрацию цен. Известно, что цены на говядину колеблются от 140 до 200 руб. за 1 кг. Сколько торговых точек необходимо обследовать, чтобы с вероятностью 0,954 ошибка выборки при определении средней цены не превышала 5 руб. за 1 кг?

Предположим, что распределение цен соответствует нормальному распределению.

$$\text{Тогда, } \sigma = \frac{1}{6}(x_{\max} - x_{\min}) = \frac{1}{6}(200 - 140) = 9,999 \approx 10 \text{ руб}$$

При вероятности 0,954  $t=2$

Численность выборок для повторного отбора

$$n = \frac{t^2 \sigma^2}{\Delta^2} = \frac{2^2 \times 10^2}{2^2} = 26 \text{ торговых точек.}$$

Отсюда, чтобы с вероятностью 0,954 гарантировать, что ошибка при определении средней цены говядины не превысит 5 руб. за 1 кг, необходимо обследовать 26 торговых точек на рынках города.

## **Тема 10. Статистическое изучение взаимосвязей социально-экономических явлений**

Общественная жизнь состоит из большого количества сложных явлений, которые формируются под влиянием многочисленных, разнообразных и взаимосвязанных факторов.

В статистике различают факторные и результативные признаки. Факторные признаки (x) – это признаки, обслуживающие изменение уровней других, связанных с ним признаков. Результативные признаки (y) – это признаки, уровни которых изменяются под воздействием факторных признаков.

Между различными явлениями и их признаками различают два вида связей: функциональную и статистическую (стохастическую).

Связь признака  $y$  с признаком  $x$  называется *функциональной*, если каждому возможному значению независимого признака  $x$  соответствует одно или несколько строго определенных значений зависимого признака  $y$ . Функциональную связь можно представить уравнением

$$y_i = f(x_i), \quad (10.1)$$

где  $y_i$  – результативный признак ( $i=1,2,3,\dots,n$ );  $f(x_i)$  – известная функция связи результативного и факторного признаков;  $x_i$  – факторный признак ( $i=1,2,3,\dots,n$ ).

Примером *функциональной* связи может служить связь между оплатой труда и качеством произведенной продукции при сдельной оплате труда. Так, если расценка за единицу продукции составляет 500 руб., то связь между признаками выразится уравнением  $y=500x$ . Для каждого допустимого значения  $x$  можно указать вполне определенное значение  $y$ . Если, положим,  $x=100$ , то  $y=50000$  руб.

В реальной общественной жизни, ввиду *неполная статистическая (стохастическая)* связь между признаками. Это обуславливается тем, что зависимая переменная (результативный признак), кроме рассматриваемых независимых, подвержена влиянию ряда неучтенных или неконтролируемых (случайных) факторов, а также некоторых неизбежных ошибок.

Характерной особенностью стохастических связей является то, что они проявляются во всей совокупности, а не в каждой её единице.

*Модель стохастической связи* может быть представлена уравнением

$$\tilde{y}_i = f(x_i) + \varepsilon_i, \quad (10.2)$$

$\tilde{y}_i$  – расчетное значение результативного признака;  $f(x_i)$  – часть результативного признака, сформировавшаяся под воздействием учтенных факторных признаков (одного или множества), находящихся в стохастической связи с признаком;  $\varepsilon_i$  – часть результативного признака, возникшая вследствие действия неучтенных факторов и случайных ошибок.



*Корреляционная* связь – частный случай статистической связи, при котором разным значениям переменной соответствуют разные средние значения другой переменной.

Корреляционная связь предполагает, что изучаемые переменные имеют количественное выражение.

В зависимости от направления действия функциональные и корреляционные связи делят на *прямые и обратные*; по аналитическому выражению – на *прямолинейные и криволинейные*.

При прямой связи направление изменения результативного признака совпадает с направлением изменения признака-фактора, т.е. с увеличением факторного признака увеличивается и результативный, и наоборот, с уменьшением факторного признака уменьшается и результативный.

В противном случае между рассматриваемыми величинами существуют обратные связи. Например, чем выше квалификация рабочего, тем выше уровень производительности – *прямая связь*. А чем выше производительность труда, тем ниже себестоимость единицы продукции – *обратная связь*. Или, другой пример. Чем выше цена реализации продукции, тем больше сумма прибыли – связь прямая. А чем выше себестоимость единицы продукции, тем меньше сумма прибыли – связь обратная.

При *прямолинейной* связи, с возрастанием величины факторного признака происходит равномерное возрастание (или убывание) величин результативного признака. Прямолинейные связи выражаются уравнением прямой.

При *криволинейной* связи, с возрастанием величины факторного признака возрастании  $e$  (или убыванием) результативного признака происходит неравномерно или направление его изменения в уровнях меняется на обратное. Связи выражаются уравнениями кривых линий (гиперболой, параболой, др.).

Корреляционные связи в зависимости от количества признаков, включенных в модель, делятся на *парные и множественные*.

При парной (однофакторной) связи изучается связь между одним признаком-фактором и одним результативным признаком.

При множественной (многофакторной) связи изучается связь между результивным признаком и несколькими факторными признаками.

### Парная корреляция и регрессия

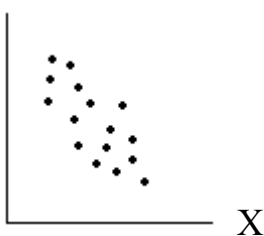
Прежде всего, чтобы проверить, как проявляется связь между двумя переменными, нужно построить график – поле корреляции.

Поле корреляции – это поле точек, на котором каждая точка соответствует единицы совокупности, её координаты определяются значениями признаков  $x$  и  $y$ .

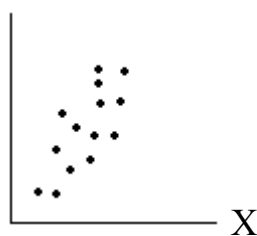
По характеру распределения точек на поле корреляции делают вывод о наличии или отсутствии связи, о характере связи (линейная или нелинейная, а если связь линейная – это прямая или обратная).



а) Связь между  $Y$  и  $X$  отсутствует.



б) Связь между  $X$  и  $Y$  линейная и обратная.



в) Связь между  $X$  и  $Y$  линейная и прямая



г) Связь между  $Y$  и  $X$  нелинейная.

Парная связь изучается на примере данных таблицы 1.26 (Данные трех районов исключены из таблицы 1.4)

Таблица 1.26 – Затраты на корма и продуктивность коров по ряду районов Иркутской области за 2019 г.

Номера районов	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Затраты на корма в расчете на одну корову в год, руб	296	351	299	344	396	433	323	341	443	314	387	374
Надой молока на одну корову в год, ц	21,24	32,50	26,26	22,52	15,03	36,00	39,78	19,32	32,19	15,28	19,96	22,66

Для определения связи между затратами на корма и продуктивностью коров, для начала, строителя на рис.1.2 корреляционное поле:

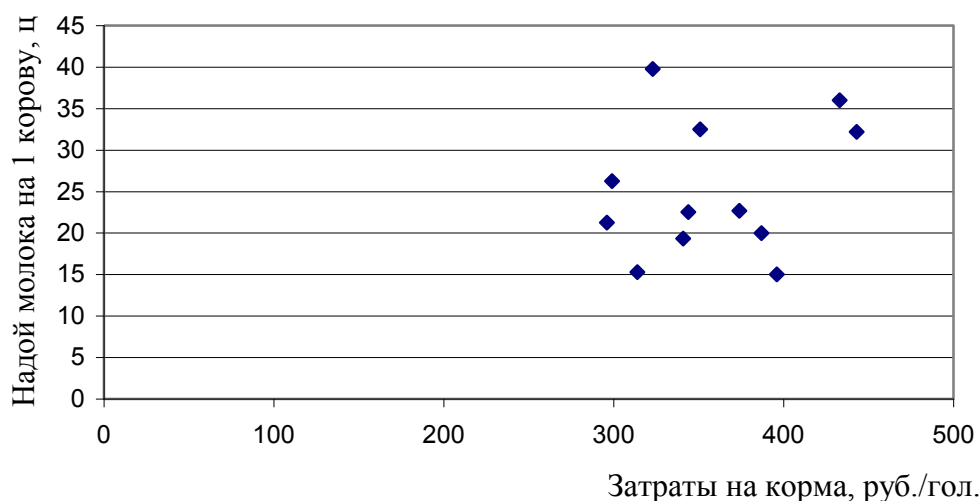


Рисунок 1.2. – Связь между затратами на корма и продуктивностью коров по ряду районов Иркутской области за 2019 г.

Корреляционное поле характеризует прямолинейную прямую связь между продуктивностью коров и затратами на корма в 2019 г. По ряду районов Иркутской области (слабо проявляется).

Теснота связи определяется с помощью коэффициента корреляции, который лежит в интервале от -1 до 1. В случае, если значение коэффициента корреляции находятся в интервале от 0,7 до 1 по модулю, отмечаются сильная корреляционная связь; если от 0,5 до 0,7 – умеренная; 0,3 – 0,5 – слабая; если до 0,3, то говорят об отсутствии корреляционной зависимости или очень слабой.

Если знак у коэффициента корреляции положительный – связь прямая, если отрицательный – связь обратная.

Существуют различные способы вычисления корреляции (R), в частности, для двух переменных по формулам:

1) линейный коэффициент корреляции:

$$R_{yx} = \frac{\overline{yx} - \bar{y} \cdot \bar{x}}{\delta_y \cdot \delta_x}, \text{ или} \quad (10.3)$$

$$R_{yx} = \frac{\sum_1^n (x_j - \bar{x})(y_j - \bar{y})}{\sqrt{\sum_1^n (x_j - \bar{x})^2 \cdot \sum_1^n (y_j - \bar{y})^2}} \quad (10.4)$$

где  $x_j$  и  $y_j$  - значение  $x$  и  $y$  рядов длиной « $n$ »,  $\bar{x}$  и  $\bar{y}$  - средние арифметические величины.

Существуют для определения парного коэффициента корреляции множество других формул.

Вычисляется коэффициент ковариации (корреляционного множества):

$$K_{yx} = \frac{\sum_1^n \Delta x_j \cdot \Delta y_j}{n-1} = \frac{\Delta x_1 \Delta y_1 + \Delta x_2 \Delta y_2 + \dots + \Delta x_n \Delta y_n}{n-1}, \quad (10.5)$$

отсюда, коэффициент корреляции вычисляется по формуле:

$$R_{yx} = \frac{K_{yx}}{\delta_y \cdot \delta_x} \quad (10.6)$$

Таким образом, с помощью формул (10.3; 10.4; 10.6) характеризуется характер и степень тесноты связи между случайными величинами.

*Регрессионный анализ* позволяет определить среднее изменение результативного признака (функции) при изменении факторных признаков (аргументов) на одну единицу своего измерения в абсолютном или относительном измерении. Уравнение регрессии позволяет найти значение зависимой переменной, если величина независимой или независимых переменных известна.

Практически, анализируя множество точек на графике (т.е. множество данных), можно найти линию, отражающую заключенную в этом множестве закономерность (тренд, тенденцию), - линию регрессии.

Пусть у нас имеются данные табл. 1.26 и предположим, что между  $x$  и  $y$  существующая линейная взаимосвязь:

$$\tilde{y}_x = a_0 + a x_1, \quad (10.7)$$

где  $x$  – независимая переменная;  $y$  – зависимая (результативная) переменная;  $a_0$  – свободный член уравнения;  $a_1$  – коэффициент регрессии, который показывает, на сколько единиц в среднем изменяется уровень результативного признака при изменении уровня факторного признака на одну единицу своего измерения.

При такой интерпретации коэффициента, что сила воздействия  $X$  на  $Y$  постоянна при любых значениях  $X$ .

Знак при коэффициенте регрессии ( $a_1$ ) соответствует направлению зависимости  $Y$  от  $X$ :

$a_1 > 0$  – зависимость прямая;

$a_1 < 0$  – зависимость обратная.

В нашем случае:

$X_1$  – совокупность значений по затратам на корма в расчете на одну корову в год – факторного признака;

$Y$  – совокупность значений по надою молока на корову в год – результативного признака;

$n$  – количество районов в Иркутской области.

Параметры уравнения регрессии (10.7) находятся методом наименьших квадратов при условии:

$$f(a_0, a_1) = \sum_1^n (y_j - \tilde{y}_j)^2 = \sum_1^n [y_j - (a_0 + a_1 x)]^2 \rightarrow \min \quad (10.8)$$

После преобразований, получается система нормальных уравнений для прямой:

$$\begin{cases} \sum_1^n y_j = n a_0 + a_1 \sum_1^n x_j \\ \sum_1^n y_j x_j = a_0 \sum_1^n x_j + a_1 \sum_1^n x_j^2 \end{cases} \quad (10.9)$$

Параметр  $a_1$  может быть выражен:

$$a_1 = \frac{\overline{yx} - \bar{y} \cdot \bar{x}}{\overline{x^2} - (\bar{x})^2}; \quad (10.10)$$

а параметр  $a_0$  по формуле:

$$a_0 = \bar{y} - a_1 \bar{x} \quad (10.11)$$

По данным нашего примера в табл.1.26 вычисляются параметры уравнения линейной парной регрессии.

Таблица 1.27 – Расчетная таблица

Номера районов	Затраты корма в расчете на одну корову в год, руб.	Надой молока на одну корову в год, ц	$x_1^2$	$yx_1$	$y^2$	Теоретические значения $\tilde{y}_x = 11,25 + 0,039x_1$	$y - \tilde{y}_x$	$(y - \tilde{y}_x)^2$
	$X_1$	$y$						
1	296	21,24	87616	6287,04	451,14	22,79	-1,55	2,40
2	351	32,50	123201	11407,50	1056,25	24,94	7,56	57,15
3	299	26,29	89401	7851,74	689,59	22,91	3,38	11,42
4	344	22,52	118336	7746,88	507,15	24,67	-2,15	4,62
5	396	15,03	156816	5951,88	225,90	26,69	-11,66	135,96
6	433	36,00	187489	15588,00	1296,00	28,14	7,86	61,78
7	323	39,78	104329	12848,94	1582,45	23,85	15,93	253,76
8	341	19,32	116281	6588,12	373,26	24,55	-5,23	27,35
9	443	32,19	196249	14260,17	1036,20	28,53	3,66	13,40
10	314	15,28	98596	4797,92	233,48	23,50	-8,22	67,57
11	387	19,96	149769	7724,52	398,40	26,34	-6,38	40,70
12	374	22,66	139876	8474,84	513,48	25,84	-3,18	10,11
Сумма	4301	302,77	1567959	109527,55	8363,30	302,75	-	686,24
В среднем	$\bar{x}_1 = 358,42$	$\bar{y} = 25,288$	$\overline{x_1^2} = 130663,25$	$\overline{yx_1} = 9127,926$	$\overline{y^2} = 696,94$	-	-	-

по формуле (10.10)  $a_1 = \frac{9127,926 - 25,288 \cdot 358,42}{130663,25 - 358,42^2} = \frac{85,076}{2198,35} = 0,039;$

по формуле (10.11)  $a_0 = 25,288 - 0,039 \cdot 358,42 = 11,25$

Получается уравнение парной регрессии для описания зависимости надоя молока на одну корову в год от затрат на корма:

$$\tilde{y}_{x1} = 11,25 + 0,039x_1$$

Параметр  $a_0$  выполняет роль доводки до соотношения между средними  $\bar{x}$  и  $\bar{y}$ . Можно предположить, параметр  $a_1$  (коэффициент регрессии) показывает, что с увеличением затрат на корма на 1 корову за год на 1 руб. в среднем надой на корову возрастут на 0,0309 ц.

По данным этой же таблице 1.27 определяется среднее квадратическое отклонение по формулам:

$$\delta_{x1} = \sqrt{\bar{x}_1^2 - (\bar{x}_1)^2}; \quad \delta_y = \sqrt{\bar{y}^2 - (\bar{y})^2} \quad (10.12)$$

$$\delta_{x1} = \sqrt{1300663,25 - 358,42^2} = \sqrt{2198,354} = \pm 46,89;$$

$$\delta_y = \sqrt{696,94 - 25,228^2} = \sqrt{64,488} = \pm 7,78$$

Отклонение уровней затрат на корма и надоев в расчете на одну корову в год по районам в средней по совокупности, соответственно, составляют  $\pm 7,78$  ц и  $\pm 46,89$  руб.

Коэффициент парной корреляции по формуле (10.3) составляет:

$$R_{yx1} = \frac{9127,296 - 25,228 \cdot 358,42}{7,78 \cdot 46,89} = \frac{85,076}{364,80} = 0,233$$

Полученное значение коэффициента корреляция показывает, что связь между надоем молока и затратами на корма проявляется очень слабая.

Критические значения коэффициентов корреляции зависит и от объема выборки. Так, при 3 наблюдениях можно утверждать наличие связи лишь при очень высоких значениях коэффициентах корреляции ( $R_{yx} \geq 0,997$ ), а при 100 наблюдениях то же утверждения можно делать при  $R_{yx} \geq 0,19$ .

Квадрат коэффициент представляет собой коэффициент детерминации, которой может быть выражен процентах. В рассматриваемом примере  $R^2 = 0,233^2 = 0,054$ , или на 5,4% ( $0,054 \cdot 100$ ) надой молока зависят от затрат труда на корма.

Коэффициент регрессии можно найти и на основе коэффициента корреляции.

$$R_{yx} = \frac{\overline{yx} - \bar{y} \cdot \bar{x}}{\delta_x \cdot \delta_y}, \quad a_1 = \frac{yx - \bar{y} \cdot \bar{x}}{\delta_x^2}, \quad a_1 = R_{yx} \cdot \frac{\delta_y}{\delta_x} \quad (10.13)$$

В нашем случае

$$\delta_y = 7,78; \quad \delta_{x1} = 46,89; \quad a_1 = 0,233 \cdot \frac{7,78}{46,89} = 0,039$$

По уравнению регрессии  $\tilde{y}_{x1} = 11,25 + 0,039x_1$  рассчитывается теоретическое значение надоев молока на одну корову в год и представляются в табл. 1.29.

$$\tilde{y}_1 = 11,25 + 0,039 \cdot 296 = 22,79$$

$$\tilde{y}_2 = 11,25 + 0,039 \cdot 351 = 24,94$$

$$\tilde{y}_3 = 11,25 + 0,039 \cdot 299 = 22,91$$

.....

$$\tilde{y}_{12} = 11,25 + 0,039 \cdot 374 = 25,84$$

Если параметры  $a_1$   $a_0$  определены верно, то должно соблюдаться равенство сумм теоретических и эмпирических значений, в нашем случае:

$$\sum y = \sum \tilde{y}_{x1} = 302,74$$

Наряду с именованными коэффициентами регрессии ( $a_1$ ) определяют также относительный показатель связи – коэффициент эластичности по формуле:

$$\varepsilon = a_j \cdot \frac{\bar{x}_j}{y} = 0,039 \cdot \frac{358,42}{25,228} = 0,55$$

Коэффициент показывает, что при увеличении факторного признака (в данном случае, затраты на корма) на 1%, результативный признак (надой на одну корову в год, в данном случае) повысится на 0,55%.

Корреляционный и регрессионный анализ обычно (особенно в условиях малого и среднего бизнеса) проводится для ограниченной по объему совокупности. Поэтому показатели регрессии, корреляции, детерминации, могут быть искажены действием случайных факторов.

При численности наблюдений до 30 единиц возникает необходимость проверки значимости (существенности) каждого коэффициента регрессии.



Выясняется, не являются ли полученные значения параметров ( $a_j$ ) результатами случайных причин.

Значимость коэффициентов простой линейной регрессии (применительно к совокупности при  $n < 30$ ) – проверяется с помощью t- критерия Стьюдента. Вычисляются расчетные (фактические) значения t- критерия:

для параметра  $a_0$ ,

$$t_{a_0} = |a_0| \cdot \frac{\sqrt{n-2}}{\delta_{ocm}}; \quad (10.14)$$

для параметра  $a_1$ ,

$$t_{a_1} = |a_1| \cdot \frac{\sqrt{n-2}}{\delta_{ocm}} \cdot \delta \quad (10.15)$$

где  $\delta_{ocm} = \sqrt{\frac{\sum (y - \tilde{y})^2}{n}}$  - среднее квадратическое отклонение

результативного признака ( $y_j$ ) от выровненных ( $\tilde{y}_x$ );  $n$ - число наблюдений.

В нашем примере, по данным табл. 1.27

$$\delta_{ocm} = \sqrt{\frac{686,02}{12}} = 7,56; \quad \delta_{x1} = \sqrt{130663,25 - 358,42^2} = 46,89$$

Рассчитанные значения t- критерия Стьюдента:

$$t_{a_0} = 11,25 \cdot \frac{\sqrt{12-2}}{7,56} = 4,71; \quad t_{a_1} = 0,039 \cdot \frac{\sqrt{12-2}}{7,56} = 0,016$$

Вычисленные значения  $t_{a_0}$  и  $t_{a_1}$ , сравниваются с критическими по таблице Стьюдента с учетом принятого уровня значимости  $\xi$  и числом степеней свободы. Число степеней свободы вариации представляет собой число неограниченно варьирующих элементов совокупности  $\gamma = n - k - 1$ , где

$K$  - число факторных признаков в уравнении (при парной связи  $k=1$ ). В нашем случае  $\gamma = 12 - 1 - 1 = 10$ .

Уровень значимости  $\xi$  обычно принимают равным 0,05.

Параметр признается значимым при условии, если  $t_{расч} > t_{табл}$ .

По таблице распределения Стьюдента для  $\gamma = 10$  критическое значение  $t$  при  $\xi = 0,05$  составляет 2,2281.

Поскольку  $t_{a_1} < t_{\text{табл}}$  ( $0,016 < 2,2281$ ), параметр  $a_1$  признается в уравнении  $\tilde{y}_x = 11,25 + 0,039x_1$

Следовательно, фактор – затраты на корма в расчете на одну корову в год при формировании величин надоев, незначимы.

Аналогично рассматривается связь между надоем молока на корову и затратами труда на одну корову в год (данные табл. 1.4 трех районов).

Приводятся в табл. 1.28 параллельные данные, где по затратам труда на одну корову ( $x_2$ ) уровни приводятся в порядке возрастания, а данные надоя на одну корову ( $y$ ) проставляются в соответствии с значениями  $x_2$  в табл. 1.4.

Таблица 1.28 – Параллельные ряды

Затраты труда на одну корову в год, чел. час (x)	114	135	150	154	160	163	181	190	202	214	221	235
Надой молока на одну корову в год, ц (y)	32,19	22,52	22,66	39,78	32,90	21,24	36,00	15,28	26,29	19,96	15,03	19,32

Данные параллельных рядов характеризуют, в среднем с увеличением затрат труда надой снижаются (связь проявляется прямолинейная и обратная).

Для корреляционно-регрессионного анализа парной связи между затратами труда ( $x_2$ ) на одну корову в год и надоями молока на корову ( $y$ ) приводится в табл. 1.29.

$$\text{По формуле (10.10) } a_2 = \frac{\overline{yx_2} - \bar{y} \cdot \bar{x_2}}{\overline{x_2^2} - (\bar{x_2})^2} = \frac{4313,35 - 25,23 \cdot 176,58}{32427,75 - 176,58^2} = \frac{-141,76}{1247,25} = -0,114$$

$$\text{По формуле (10.11) } a_0 = \bar{y} - a_2 \bar{x_2} = 25,32 - (-0,114) \cdot 176,56 = 45,371$$

Поскольку по корреляционному полю определили прямую связь, согласно вычисленных значений  $a_0$  и  $a_1$ , получено уравнение регрессии:

$$\tilde{y}_{x_2} = 45,371 - 0,114x_2$$

Можно предположить, что параметр  $a_2$  показывает, что с увеличением затрат труда на одну корову в год на 1 чел. час, надой на корову в год снизятся на 0,114 ц.

Таблица 1.29- Данные для изучения связи между затратами труда и надоем молока на корову по ряду районов Иркутской области за 2019 год.

Номер района	Затраты труда на одну корову в год, чел. час.	Надой молока на одну корову в год, ц	$x_2^2$	$yx_2$	$y^2$	Теоретическое значение $\tilde{y}_{x_2} = 45,371 - 0,114x_2$	$y - \tilde{y}_2$	$(y - \tilde{y}_2)^2$
	$X_2$	$y$						
1	163	21,24	26569	3462,12	451,14	26,789	-5,55	30,80
2	135	22,52	18225	3040,20	507,15	29,981	-7,46	55,65
3	221	15,03	48841	3321,63	225,90	20,177	-5,15	26,52
4	181	36,00	32761	6516,00	1296,00	24,737	11,26	126,79
5	154	39,78	23716	6126,12	1582,45	27,815	11,97	143,04
6	235	19,32	55225	4540,20	373,26	18,581	0,74	0,55
7	114	32,19	12996	3669,66	1036,20	32,375	-0,19	0,03
8	190	15,28	36100	2903,20	233,48	23,711	-8,43	71,06
9	214	19,96	45796	4271,44	398,40	20,975	-1,02	1,02
10	150	22,66	22500	3399,00	513,48	28,271	-5,61	31,47
11	202	26,29	40804	5310,58	691,16	22,343	3,95	15,60
12	160	32,50	25600	5200,00	1056,25	27,131	5,37	28,83
Сумма	2119	302,8	389133	51760,15	8364,87	302,9	-0,12	531,36
В среднем	$\bar{x}_2 = 176,58$	$\bar{y} = 25,23$	$\bar{x}_2^2 = 32427,75$	$\overline{yx_2} = 4313,35$	$\bar{y}^2 = 697,07$			

Определяются средние квадратические отклонения по затратам труда на одну корову в год:

$$\delta_{x_2} = \sqrt{\overline{x_2^2} - (\overline{x_2})^2} = \sqrt{32427,75 - 176,58^2} = \pm 35,32 \text{ чел. час./гол};$$

по надою молока:

$$\delta_y = \pm 7,78 \text{ ц/гол.}$$

Отклонение уровней затрат труда на корову в год по каждому наблюдению от совокупности (176,58) составляет  $\pm 35,32$  чел. час, а надои на корову на  $\pm 7,78$  ц.

Коэффициент парной корреляции по формуле (10.3)

$$R_{yx_2} = \frac{\overline{yx_2} - \overline{y} \cdot \overline{x_2}}{\delta_{x_2} \cdot \delta_y} = \frac{4313,35 - 25,32 \cdot 176,58}{35,32 \cdot 7,78} = \frac{-141,76}{274,79} = -0,516$$

Коэффициент детерминации  $0,516^2 \times 100 = 26,63\%$

Связь между затратами труда и надоем молока проявляется средняя и обратная и эта зависимость проявляется на 26,63 %

Теоретические значения определяются путем подстановки данных  $x_2$  из табл. 1.29 в уравнение

$$\begin{aligned} \tilde{y}_{x_2} &= 45,371 - 0,114x_2 \\ y_1 &= 45,371 - 0,114 \cdot 163 = 26,789 \\ y_2 &= 45,371 - 0,114 \cdot 135 = 29,981 \\ y_3 &= 45,371 - 0,114 \cdot 221 = 20,177 \\ &\dots\dots\dots \\ y_{12} &= 45,371 - 0,114 \cdot 160 = 27,131 \\ \sum y &= \sum \tilde{y} = 302,9 \end{aligned}$$

Коэффициент эластичности:

$$\mathcal{E}_2 = a_2 \cdot \frac{\overline{x_2}}{\overline{y}} = -0,114 \cdot \frac{176,58}{25,23} = -0,798$$

Коэффициент показывает, что при увеличении затрат на 1%, надои на корову снижаются на 0,798%

Проверяется полученная регрессии на значимость, для чего определяется остаточная дисперсия по данному изучаемому признаку по данным таблицы 1.29

$$\delta_{\text{ост}} = \sqrt{\frac{502,53}{12}} = 6,47$$

Отсюда, рассчитанные значения t- критерия Стьюдента по формулам 10.14 и 10.15

$$t_{a0} = 45,371 \cdot \frac{\sqrt{12-2}}{6,47} = 22,17; \quad t_{a1} = 0,114 \cdot \frac{\sqrt{12-2}}{6,47} = 0,056$$

В нашем случае ,  $\gamma=12-1-1=10$  при  $\alpha=0,05$   $t_{\text{табл}} = 2,2281$

Так как  $0,056 < 2,2281$ , параметр  $a_2$  признается незначимым.

Таким образом, в нашем примере, оба рассматриваемых признаков- факторов (затраты на корма ( $x_1$ ) и затраты труда ( $x_2$ ), признаны незначимыми.

При прогнозировании надоев молока на корову, в этом случае, этими факторами можно не считаться.

В практических задачах должны изучаться дополнительные условия, которые сказались на незначимости затрат труда и затрат на корма – важных факторов.

Для дальнейшего изучения взаимосвязей между явлениями изучается межфакторная связь  $r_{x_1x_2}$

$$r_{x_1x_2} = \frac{\overline{x_1x_2} - \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2}{\delta_{x_1} \cdot \delta_{x_2}}; \quad \text{где: } \delta_{x_1}=46,89; \delta_{x_2}=35,52. \quad (10.16)$$

По данным таблиц 1.27 и 1.29:

$$\overline{x_1x_2} = \frac{\sum x_1x_2}{n} = \frac{756092}{12} = 63007,67$$

$$r_{x_1x_2} = \frac{63007,67 - 358,42 \cdot 176,58}{46,78 \cdot 35,32} = \frac{-282,131}{1656,15} = 0,170$$

Поскольку  $r_{x_1x_2} < 0,8$ , мультиколлениарность (связь между факторами  $x_1$  и  $x_2$ ) отсутствует.

В дальнейшем составляется корреляционная матрица по парным коэффициентам корреляции (табл. 1.30).

Таблица 1.30 – Общий вид матрицы коэффициентов парной корреляции

Признаки	y	X <sub>1</sub>	X <sub>2</sub>	X <sub>3</sub>	....	X <sub>k</sub>
y	1	r <sub>x<sub>1</sub>y</sub>	r <sub>x<sub>1</sub>y</sub>	r <sub>x<sub>1</sub>y</sub>	....	r <sub>x<sub>1</sub>y</sub>
X <sub>1</sub>		1	r <sub>x<sub>1</sub>x<sub>2</sub></sub>	r <sub>x<sub>1</sub>x<sub>2</sub></sub>	....	r <sub>x<sub>1</sub>x<sub>2</sub></sub>
X <sub>2</sub>			1	r <sub>x<sub>1</sub>x<sub>2</sub></sub>	....	r <sub>x<sub>1</sub>x<sub>2</sub></sub>
X <sub>3</sub>				1	...	r <sub>x<sub>1</sub>x<sub>2</sub></sub>
....	....	....	....	...	....	...
X <sub>k</sub>						1

По диагонали матрицы расположены единицы, это коэффициенты корреляции каждой переменной с самой собой:

$$r_{yy}; r_{x_1x_1}; r_{x_2x_2}; r_{x_3x_3}; \dots r_{x_kx_k}$$

На основе такой матрицы по верхней строке парные коэффициенты корреляции связи результата с факторами ( $r_{yx}$ ), а ниже – межфакторные парные коэффициенты корреляции. В анализ совместно включаются те факторы, для которых их корреляция ( $r_{xx}$ ) слабее корреляции с результативным признаком,  $r_{xx} < r_{yx}$

В нашем случае, матрица коэффициентов парной корреляции в табл.1.31

Таблица 1.31 – Матрица коэффициентов парной корреляции затрат труда (x<sub>2</sub>), затрат корма (x<sub>1</sub>), надоем (y)

Признаки	y	X <sub>1</sub>	X <sub>2</sub>
y	1	0,233	-0,516
X <sub>1</sub>		1	0,444
X <sub>2</sub>			1

Связь между затратами труда и надоем молока более тесная, чем между факторами. Следовательно, по данным матрицы факторов X<sub>2</sub> – затраты труда на одну корову в год может быть включен в анализ вариации уровней надоев.

Измеряется теснота связи У с X<sub>1</sub> и X<sub>2</sub>, т.е. вычисляется коэффициент множественной корреляции. Сначала определяется коэффициент множественной детерминации по формуле

$$R_{yx_1x_2}^2 = \frac{R_{yx_1}^2 + R_{yx_2}^2 - 2R_{yx_1} \cdot R_{yx_2} \cdot R_{x_1x_2}}{1 - R_{x_1x_2}^2}; \quad (10.17)$$

В нашем случае:

$$R_{y x_1 x_2}^2 = \frac{0,054 + 0,266 - 2 \cdot 0,233 \cdot 0,516 \cdot 0,170}{1 - 0,170^2} = \frac{0,279}{0,971} = 0,287$$

Отсюда коэффициент множественной корреляции составляет  $0,536 = \sqrt{0,287}$ .

Несмотря на то, что связь затрат труда с продуктивностью коров невысока, всё таки, учет второй объясняющей причины (затраты на корма), повысил величину совокупной корреляции. Можно сказать, что на 28,7 % надои молока на корову в год определяется учтенными факторами.

Следует иметь в виду, что коэффициент множественной корреляции должен быть не меньше максимального из парных коэффициентов

$$R_{y x_1 x_2 \dots x_k} \geq \max \left\{ r_{y x_1}, r_{y x_2}, \dots, r_{y x_k} \right\} \quad (10.18).$$

Математически корреляционная зависимость результативного признака от нескольких факторных (объясняющих) признаков описывается уравнением множественной регрессии (чаще всего, линейного уравнение) вида:

$$\tilde{y}_{x_1 x_2 \dots x_k} = a_0 + a_1 x_1 + \dots + a_k x_k \quad (10.19).$$

При значительной вариации признаков используется степенное уравнение множественной регрессии:

$$\tilde{y}_{x_1 x_2 \dots x_k} = a_0 x_1^{a_1} \cdot x_2^{a_2} \cdot \dots \cdot x_k^{a_k} \quad (10.20).$$

которое легко линеаризуется путем логарифмирования:

$$Lg \tilde{Y} = Lg a_0 + a_1 Lg x_1 + \dots + a_k Lg x_k \quad (10.21)$$

Параметры линейного уравнения множественной регрессии оцениваются методом наименьших квадратов, при условии:

$$\sum (y_i - \tilde{y}) \longrightarrow \min$$

Решение системы нормальных уравнений, даст значение параметров множественной регрессии.

Система нормальных уравнений:

$$\begin{cases} \sum y = a_0 n + a_1 \sum x_1 + \dots + a_k \sum x_k \\ \sum y x_1 = a_0 \sum x_1 + a_1 \sum x_1^2 + a_2 \sum x_1 x_2 + \dots + a_k \sum x_1 x_k \\ \sum y x_2 = a_0 \sum x_1 x_2 + a_2 \sum x_2^2 + \dots + a_k \sum x_2 x_k \\ \dots \\ \sum y x_k = a_0 \sum x_k + a_1 \sum x_1 x_k + a_2 \sum x_2 x_k + \dots + a_k \sum x_k^2 \end{cases} \quad (10.22)$$

В нашем случае, рассматривается двухфакторная линейная регрессия

$$\tilde{y}_{x_1, x_2} = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 \quad (10.23)$$

Параметры уравнения легко определяются на основе парных коэффициентов корреляции и средних квадратических отклонений по формулам:

$$a_0 = \bar{y} - a_1 \bar{x}_1 - a_2 \bar{x}_2; \quad (10.24)$$

$$a_1 = \frac{R_{y x_1} - R_{y x_2} \cdot R_{x_1 x_2}}{1 - R_{x_1 x_2}^2} \cdot \frac{\delta_y}{\delta_{x_1}}; \quad (10.25)$$

$$a_2 = \frac{R_{y x_2} - R_{y x_1} \cdot R_{x_1 x_2}}{1 - R_{x_1 x_2}^2} \cdot \frac{\delta_y}{\delta_{x_2}}; \quad (10.26)$$

В нашем примере известны парные коэффициенты корреляции:

$$R_{y x_1} = 0,233; \quad R_{y x_2} = -0,516; \quad R_{x_1 x_2} = 0,170; \quad R_{y x_1 x_2} = 0,536.$$

Средние квадратические отклонения:

$$\delta_{x_1} = 46,89; \quad \delta_{x_2} = 35,32; \quad \delta_y = 7,78.$$

Отсюда:

$$a_0 = 25,228 - 0,039 \cdot 358,42 - (-0,114) \cdot 176,58 = 31,38;$$

$$a_1 = \frac{0,233 - 0,233 \cdot 0,170}{1 - 0,170^2} \cdot \frac{7,78}{46,89} = 0,032;$$

$$a_2 = \frac{-0,516 - (-0,516) \cdot 0,170}{1 - 0,170^2} \cdot \frac{7,78}{35,32} = -0,096.$$

Теоретическое уравнение двухфакторной регрессии:

$$\tilde{y}_{x_1, x_2} = 31,38 + 0,032 x_1 - 0,095 x_2$$



Из расчетов с увеличением затрат на корма на 1 руб и затрат труда на 1 чел.-ч. в расчете на одну корову в год, надой на корову повышается на 0,032 ц и снижается на 0,096ц, соответственно.

Проверяется значимость коэффициентов регрессии при линейной зависимости  $y$  от  $x_1$  и  $x_2$  используется  $t$  – критерий Стьюдента при  $n- m-1$  степенях свободы:

где  $n$  – число единиц совокупности;  $m$  - число факторных признаков.

$$t_{a_1} = \frac{a_1 \cdot \delta_{x_1} \cdot \sqrt{1 - R_{x_1 x_2}^2} \times \sqrt{n - m - 1}}{\delta_y \cdot \sqrt{1 - R_{y x_1 x_2}^2}}; \quad (10.27)$$

$$t_{a_2} = \frac{a_2 \cdot \delta_{x_2} \cdot \sqrt{1 - R_{x_1 x_2}^2} \times \sqrt{n - m - 1}}{\delta_y \cdot \sqrt{1 - R_{y x_1 x_2}^2}}. \quad (10.28)$$

$$t_{a_1} = \frac{0,032 \cdot 46,89 \cdot \sqrt{1 - 0,170^2} \times \sqrt{12 - 2 - 1}}{7,78 \cdot \sqrt{1 - 0,170^2}} = \frac{3,34}{7,66} = 4,434;$$

$$t_{a_2} = \frac{0,096 \cdot 35,32 \cdot \sqrt{1 - 0,170^2} \times \sqrt{12 - 2 - 1}}{7,78 \cdot \sqrt{1 - 0,170^2}} = \frac{10,02}{7,663} = 1,307.$$

Существенность множественного коэффициента корреляции:

$$t_{R_{yx_1x_2}} = \frac{R_{y x_1 x_2} \sqrt{n - m - 1}}{1 - R_{y x_1 x_2}^2} = \frac{0,538 \sqrt{12 - 2 - 1}}{1 - 0,536^2} = 2,258$$

Табличное значение  $t$ - критерия при 5 % - номинальном уровне значимости и 9 степенях свободы (12-2-1), составляет 2,2622.

Поскольку  $t_{a_1}$  и  $t_{R_{yx_1x_2}}$  расчетные меньше  $t_{табл.}$ , фактор – затраты на корма и совокупный коэффициент корреляции следует признать несущественным.

Таким образом, построенная теоретическая регрессионная модель надоев молока на корову в год не пригодна для практического применения.

На основе коэффициентов регрессии нельзя сказать, какой из факторных признаков оказывает наибольшее влияние на результативный признак, так как коэффициенты регрессии между собой не сопоставимы, поскольку признаки измерены в разных единицах измерения.

Чтобы судить о сравнительной силе влияния отдельных факторов на результат, вычисляются частные коэффициенты эластичности  $\varepsilon_j$ , бета – коэффициенты ( $\beta_j$ ) и дельта - коэффициенты ( $\Delta_j$ ).

Различия в единицах измерения факторных признаков устраняются с помощью частных коэффициентов эластичности по формуле:

$$\varepsilon_j = a_j \cdot \frac{\bar{x}_j}{\bar{y}}, \quad (10.29)$$

где  $a_j$  - коэффициент регрессии при j- м факторе;  $\bar{x}_j$  - среднее по совокупности j- го фактора;  $\bar{y}$  - среднее значение результативного признака.

$$\beta_j = a_j \cdot \frac{\delta_{x_j}}{\delta_y}, \quad (10.30)$$

где  $\delta_{x_j}$  - среднее квадратическое отклонение j- го фактора;  $\delta_y$  - среднее квадратическое отклонение результативного признака.

$$\Delta_j = \frac{\beta_j \cdot R_{yx_j}}{R_{yx_1, x_2, \dots, x_n}^2}. \quad (10.31)$$

Определяются  $\varepsilon_j$ ,  $\beta_j$ ,  $\Delta_j$  в нашем примере :

$$\varepsilon_1 = a_1 \cdot \frac{\bar{x}_1}{\bar{y}} = 0,032 \cdot \frac{358,42}{25,228} = 0,454;$$

$$\varepsilon_2 = a_2 \cdot \frac{\bar{x}_2}{\bar{y}} = -0,096 \cdot \frac{176,58}{25,228} = -0,672.$$

По абсолютному приросту наибольшее влияние на надой молока оказывает фактор  $x_2$ .

Увеличение затрат на корма и затрат труда на одну корову на 1 %, надой повышаются на 0,454 % и снижаются на 0,672% соответственно.

$$\beta_1 = 0,032 \cdot \frac{46,89}{7,78} = 0,193 \quad \beta_2 = -0,096 \cdot \frac{35,32}{7,78} = -0,436.$$

На надой молока большее влияние оказывает затраты труда на корову ( $x_2$ ), так как ему соответствует большее значение  $\beta$  - коэффициента:

$$\Delta_1 = \frac{0,193 \cdot 0,233}{0,536^2} = 0,157 ; \quad \Delta_2 = \frac{-0,436 \cdot (-0,516)}{0,536^2} = 0,738.$$

Наибольшая доля прироста надоев молока из двух рассматриваемых факторов может быть обеспечена более эффективным использованием трудовых ресурсов (затрат времени).

## РАЗДЕЛ 2. ВАРИАНТЫ ЗАДАЧ

Студент решает 4 задачи в соответствии с заданием своего варианта (табл. 1.2 на стр. 8).

Контрольная работа должна быть оформлена в соответствии с требованиями.

Результаты решения тех или иных задач должны сопровождаться соответствующими выводами.

**При решении задач 1-18** студенты должны использовать цифровую информацию Приложения и руководствоваться методическими рекомендациями в теме «Сводка и группировка».

Поскольку в Приложении в совокупности 16 районов, рекомендуется выделить 3 или 4 группы, т.е. разбить всю совокупность районов не более чем на 4 группы в зависимости от вариации признаков.

**Задача 1.** Сгруппируйте районы по качеству почвы и выявите влияние этого фактора на урожайность зерновых.

**Задача 2.** Сгруппируйте районы по удельному весу сортовых семян картофеля и выявите влияние данного фактора на урожайность картофеля.

**Задача 3.** Сгруппируйте районы по продолжительности уборки и выявите влияние этого фактора на урожайность зерновых.

**Задача 4.** Сгруппируйте районы по дозе внесения органических удобрений и выявите влияние этого фактора на урожайность картофеля.

**Задача 5.** Сгруппируйте районы по дозе внесения минеральных удобрений в действующем веществе и выявите влияние этого фактора на урожайность зерновых.

**Задача 6.** Сгруппируйте районы по качеству почвы и выявите влияние этого фактора на урожайность картофеля.

**Задача 7.** Сгруппируйте районы по урожайности зерновых и выявите влияние этого фактора на себестоимость зерна.

**Задача 8.** Сгруппируйте районы по урожайности картофеля и выявите влияние этого фактора на себестоимость картофеля.

**Задача 9.** Сгруппируйте районы по расходу кормовых единиц на одну корову и выявите влияние этого фактора на среднегодовой удой молока с 1 коровы.

**Задача 10.** Сгруппируйте районы по расходу кормовых единиц на 1 ц молока и выявите влияние этого фактора на продуктивность коров (среднегодовой удой).

**Задача 11.** Сгруппируйте районы по среднегодовому удою с одной коровы и выявите влияние этого фактора на себестоимость молока.

**Задача 12.** Сгруппируйте районы по затратам труда на 1 ц молока и выявите влияние этого фактора на среднегодовой удой с одной коровы.

**Задача 13.** Сгруппируйте районы по затратам труда на 1 ц зерна и выявите влияние этого фактора на урожайность зерновых.

**Задача 14.** Сгруппируйте районы по затратам труда на 1 ц картофеля и выявите влияние этого фактора на урожайность картофеля.

**Задача 15.** Сгруппируйте районы по затратам труда на 1 ц живой массы и выявите влияние этого фактора на прирост живой массы на одну голову скота на выращивание и откорм.

**Задача 16.** Сгруппируйте районы по расходу кормовых единиц на 1 ц живой массы крупного рогатого скота и выявите влияние этого фактора на среднегодовой привес и прирост живой массы на одну голову скота.

**Задача 17.** Сгруппируйте районы по приросту и привесу живой массы крупного рогатого скота и выявите влияние этого фактора на себестоимость 1 ц живой массы.

**Задача 18.** Сгруппируйте районы по расходу кормовых единиц на одну голову молодняка и скота на откорме и выявите влияние этого фактора на прирост и привес живой массы на 1 голову скота.

**При решении задач 19-27** студент руководствуется методическими рекомендациями в теме «**Статистические таблицы и статистические графики**».

**Задача 19.** Розничный товарооборот во всех каналах реализации составил в 2021 г. 213 430 млн. руб., в том числе в государственной форме собственности 31597 млн. руб., в негосударственной – 181833 млн. руб., что составило, соответственно, 15 и 85% общего объема розничного товарооборота. Представьте эти данные в виде статистической таблицы. Сформулируйте заголовок, укажите её подлежащее и сказуемое, вид таблицы.

**Задача 20.** В крестьянском хозяйстве 118 коров, 50 телочек, 32 бычков. Затраты кормов составляют: всего 5000 ц кормовых единиц, из них: коровам – 3186, телочкам – 1100, бычкам – 714. Представьте эти данные в виде статистической таблицы.

**Задача 21.** В предприятии 3 подразделения с качеством почвы в баллах (до 50 и св.50). Дозы внесения удобрений в действующем веществе на 1 га зерновых в пределах: до 100 кг; 101-150 кг; св. 150 кг и урожайности зерновых в соответствии с качеством почвы и внесением удобрений по подразделениями, ц/га:

1-е подразделение: 12;15;20.

2-е подразделение: 14;17;19.

3-е подразделение: 18;20;25.

Разработайте таблицу и охарактеризуйте вид таблицы по разработке подлежащего и сказуемого.

**Задача 22.** В Иркутском районе на начало 2020 г. зерновой продукции было 162532 т. Поступило в течение года, всего – 275604 т, в т.ч. произведено – 258653 и приобретено 16441. Израсходовано, всего – 280863, в т.ч. на: корм скоту – 4984; продано – 68947; на семена 67003 и т.д.

В Усольском районе, соответственно, данные следующие: на начало года – 797188 т. Поступило в течение года, всего – 1805934 т, в т.ч. произведено – 1383384 и приобретено 422550. Израсходовано, всего – 1720367, в т.ч. на: корм скоту – 27645; продано – 94861; на семена 239418 и т.д.

Разработайте таблицу и охарактеризуйте её по подлежащему и сказуемому.

**Задача 23.** В Иркутском районе в 2020 г. среднегодовая численность работников с.-х. составляла, всего – 1924 человек, в том числе постоянных – 1422, из них трактористов-машинистов – 224; операторов машинного доения – 161; скотников – 180 и прочие.

В Усольском районе в этой же последовательности названия показателей, данные следующие: 4213; 3537; 487; 263; 242 и прочие.

Разработайте таблицу, сформулируйте заголовок.

#### Задача 24.

Таблица 1 – Себестоимость живой массы крупного рогатого скота в Баяндаевском районе за 2012-2021 гг.

Годы	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021
Руб./ц	1200	1638	1574	1787	1692	1522	1939	2179	2373	2343

Изобразите динамику себестоимости 1 ц живой массы графически с названием рисунка.

**Задача 25.** По Иркутскому району в 2020 г. затраты на животноводство (в тыс. руб.), всего – 215138, в том числе на: оплату труда – 34437; корма – 99487; содержание основных средств – 15646; прочие – 65568. Определите структуру затрат (в %) и изобразите графически с формулировкой названия рисунка.

**Задача 26.** Имеются следующие данные о средней яйценоскости одной курицы за три года (штук):

Годы	Месяцы												Итого за год
	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	
2019	10,2	14,3	14,8	15,9	21,1	26,7	27,8	24,5	20,9	17,1	9,4	12,3	215,0
2020	11,5	16,3	15,8	16,3	20,8	25,9	28,1	26,7	20,1	18,2	13,1	12,4	225,2
2021	13,8	15,9	16,3	15,5	19,9	26,1	29,8	27,1	23,4	19,1	10,2	13,5	230,6

Определите показатели сезонных колебаний средней яйценоскости (индекс сезонности, см. тему «Ряды динамики») и изобразите графически изменение сезонных колебаний.

**Задача 27.** Имеются данные площади зерновых по ряду районов Иркутской области за 2021 г.

Районы	Жигаловский	Киренский	Чунский	Усть-Кутский
Площадь посева зерновых культур, га	1025	880	1900	380



Изобразите графически в виде столбиковых диаграмм и дайте название рисунку.

**При решении задач 28-45** студент руководствуется методическими рекомендациями в теме «Средние величины».

**Задача 28.** Имеются данные о посевных площадях зерновых культур и урожайности зерновых в ряде районов Иркутской области за 2020 г.:

Район	Посевная площадь зерновых, га	Урожайность зерновых, ц/га
Иркутский	16493	15,68
Усольский	55049	25,13
Зиминский	21077	14,10

Определите:

- 1) средний размер посевной площади зерновых на один район;
- 2) среднюю урожайность зерновых по 3 районам;
- 3) размах вариации и среднее квадратическое отклонение.

Необходимо обосновать применение той или иной формулы. По данным расчетов сделать выводы.

**Задача 29.** Имеются данные валового сбора зерна и урожайности зерновых по ряду районов Иркутской области за 2020 г.

Район	Валовой сбор зерна, ц	Урожайность зерновых, ц/га
Иркутский	258610	15,68
Усольский	138338	25,13
Зиминский	197186	14,10

Определите:

- 1) среднюю урожайность зерновых по трем районам;
- 2) среднее квадратическое отклонение и коэффициент вариации;
- 3) сделайте выводы.

**Задача 30.** Имеются следующие данные по выполнению плана продажи продукции по ряду районов Иркутской области за 2020 г.

Район	Продано зерна, ц	% выполнения плана продажи
Иркутский	85029	109
Усольский	114917	115
Зиминский	22124	92
Заларинский	85772	85

Определить:

- 1) средний процент выполнения плана продажи зерна по 3 районам;
- 2) среднее квадратическое отклонение по % выполнения плана;
- 3) выводы.

**Задача 31.** Имеются данные по продаже зерна и цене реализации зерна по ряду районов Иркутской области за 2020 г.

Район	Продано зерна, ц	Цена 1 ц зерна, руб.
Иркутский	85029	372
Усольский	114917	381
Зиминский	22124	277
Заларинский	85772	314
Боханский	68093	318
Усть-Удинский	10608	342
Тулунский	182483	292
Нижнеудинский	59753	391

Определите структурные средние (моду и медиану) и дайте обоснование данному значению  $M_0$  и  $M_e$ .

**Задача 32.** Имеются данные по числу хозяйств в % в разрезе групп по качеству почв (в баллах):

Группы по бюджету почв, балл	Число хозяйств в % к итогу
54-57	5,2
58-61	21,1
62-65	57,9
66-69	15,8
Всего	100

Определите моду и медиану в интервальном ряду и сделайте соответствующие выводы.

**Задача 33.** Проверка качества молока на содержание в них жира дала следующие результаты:

Содержание жира в молоке, %	2,7	3,5	3,1	3,2	3,4	Всего
Количество проб	1	4	8	3	5	21

Определите: 1) Средний процент жира в молоке;

2) Все показатели вариации;

3) Выводы.

**Задача 34.** По данным задачи 33 определите:

а) средний процент жира в молоке;

б) моду и медиану в дискретном ряду по проценту жира в молоке;

в) сделайте выводы.

**Задача 35.** Имеются данные статистического наблюдения по ряду районов Иркутской области за 2021 г.

Район	Поголовье коров, гол	Затраты на одну корову в год, тыс. руб.
Иркутский	3482	34,1
Усольский	6710	39,3
Зиминский	1379	29,4

Определите затраты на одну корову в год в среднем по трём районам и среднее квадратическое отклонение. Сделайте соответствующие выводы.

**Задача 36.** По результатам наблюдения изучалось качество семян зерновых и получено распределение семян по проценту всхожести.

Процент всхожести	72	76	80	84	93	95	св. 95	Всего
Число проб	3	10	17	25	42	2	1	100

Рассчитайте: а) средний процент всхожести;

б) модальное и медианное значения % всхожести.

**Задача 37.** Имеются данные по бонитету почв и урожайности зерновых по группам районов Иркутской области за 2021 г.:

Группы по бонитету почв, балл	Число районов	В среднем	
		бонитет почв, балл	урожайность зерновых, ц/га
54-57	1	54	4,1
58-61	4	60	6,7
62-65	11	64	9,2
66-69	3	67	8,7
Всего	19	64	9,0

Общая дисперсия 2.25. Определите межгрупповую дисперсию и эмпирическое корреляционное отношение. Сделайте выводы.

**Задача 38.** Имеются данные комбинационной группировки по затратам труда и расходу кормовых единиц в расчете на одну корову в год в ОПХ «Сибирь» за 2011-2020 гг.

Группы по затратам труда на одну корову в год, чел.-ч.	Подгруппы по расходу корм.единиц на 1 корову в год, ц.	Число лет	В среднем		
			затраты труда на 1 корову, чел.-ч.	расход кормовых единиц на 1 корову, ц	надой на 1 корову, ц
142,09–166,46	-	7	146,8	52,6	39,8
	43,17-57,38	4	149,8	45,6	37,3
	57,38-73,32	3	143,8	59,4	42,2
166,46-190,83	-	3	187,9	60,2	40,0
	43,17-57,38	1	185,9	47,5	34,4
	57,38-73,32	2	188,5	64,1	41,7
Всего	-	10	156,4	54,4	39,8

Определить межгрупповую, среднюю из внутригрупповых, общую дисперсии и рассчитать эмпирическое корреляционное отношение. Сделайте соответствующие выводы.

**Задача 39.** Имеются данные о реализации картофеля, выполнении плана реализации и цене реализации:

Район	Фактически реализовано картофеля, ц	Выполнение плана реализации, %	Средняя цена реализации картофеля, руб/ц
Тайшетский	5342	85	629
Черемховский	3692	105	583
Куйтунский	480	95	750
Зиминский	22124	110	277

- Определите: 1) средний объем реализации картофеля;  
 2) средний процент выполнения плана;  
 3) среднюю цену реализации картофеля.

Объясните, какие виды средних величин вы использовали и почему.

**Задача 40.** Имеются данные о количестве произведенного зерна и затратах на его производство в районах Иркутской области за 2020 г.:

Район	Валовое производство зерна, ц	Затраты труда на производство зерна, тыс. чел.-ч.
Жигаловский	10758	40
Киренский	6708	19
Чунский	15492	29
Качугский	96447	76

- По каждому району определить затраты труда на 1 ц зерна и средние затраты труда на 1 ц зерна по 4 районам вместе.
- Определить среднее квадратическое отклонение затратам труда на 1 ц зерна.
- Сделать выводы.

**Задача 41.** Закупленные мясокомбинатом 200 голов крупного рогатого скота на мясо распределились как в таблице:

Масса одной головы, ц	до 3,2	3,2-3,6	3,6-4,0	4,0-4,4	более 4,4	Всего
Количество голов	10	40	85	50	15	200

1. Определите среднюю массу одной головы закупленного скота по 200 голов в целом, для этого определяются средняя масса 1 головы по каждой группе.

2. Вычислите среднее квадратическое отклонение и коэффициент вариации.

3. Сделайте выводы.

**Задача 42.** Сроки использования нематериальных активов фирмы, защищенных патентами, лицензиями и т.п., на конец года составляли:

Срок использования, год	1	2	3	4	5	6	Всего
% к общей сумме нематериальных активов	2,6	10,2	39,2	40,0	6,8	1,2	100

1. Определите медианное и модальное значение срока использования нематериальных активов фирмы.

2. Сделайте выводы.

**Задача 43.** Кредитные ставки коммерческих банков под краткосрочные займы составляли:

Группы кредитных ставок, %	Суммы предоставленных займов, млрд. ден. ед.	
	I квартал	II квартал
До 30	1	5
30-40	4	11
40-50	9	8
Св. 50	6	6
Всего	20	30

За каждый квартал определите среднюю кредитную ставку и среднее линейное отклонение. Как изменились средний уровень и коэффициенты вариации кредитной ставки?

**Задача 44.** Распределение предприятий региона по стоимости основных производных фондов дано в таблице:

Группы предприятий по стоимости основных производственных фондов, млн. руб.	Число предприятий	Середина интервала
14-16	2	15
16-18	6	17
18-20	10	19
20-22	4	21
22-24	3	22
Всего	25	-

Определить среднюю стоимость основных фондов на одно предприятие и рассчитать показатели вариации.

**Задача 45.** Распределение рабочих по среднечасовой выработке изделий дано в таблице:

№ п/п	Рабочие IV разряда			№ п/п	Рабочие V разряда		
	Выработка рабочего, штук (y)	$y - \bar{y}$	$(y - \bar{y})^2$		Выработка рабочего, штук (y)	$y - \bar{y}$	$(y - \bar{y})^2$
1	7	-3	9	1	14	-1	1
2	9	-1	1	2	14	-1	1
3	9	-1	1	3	15	0	0
4	10	0	0	4	17	-2	4
5	12	2	4	-	-	-	-
6	13	3	9	-	-	-	-
Сумма	$\sum y = 60$	-	24	Сумма	$\sum y = 60$	-	6

Определите все виды дисперсии и сделайте выводы.

**При решении задача 46-57** студент руководствуется методическими рекомендациями в теме «**Выборочный метод**».

**Задача 46.** При контрольной стрижке 160 овец из общего числа 1600 голов имеющих в хозяйстве, был установлен средний настриг шерсти 4 кг, с одной овцы при среднем квадратическом отклонении 1,6 кг. Определите с

вероятностью 0,954 предельную ошибку выборки и величину генеральной средней.

**Задача 47.** Механическим бесповторным отбором взято 256 голов из 5000 голов родившихся поросят для определения их живой массы при рождении. Результаты взвешивания представлены следующими данными:

Живая масса поросят, кг	Число поросят, гол
0,7-0,8	20
0,8-0,9	146
0,9-1,0	55
Св. 1,0	35
Всего	256

Определите:

1. Среднюю живую массу одного поросенка при рождении и среднее квадратическое отклонение в данной выборочной совокупности;
2. В каких пределах заключается средняя живая масса поросенка в генеральной совокупности с вероятностью 0,997. Сделайте выводы.

**Задача 48.** В результате анализа 484 проб, отобранных в случайном порядке, получены следующие данные о процентах влажности зерна:

Влажность зерна, %	Число проб
2-4	38
4-6	62
6-8	70
8-10	150
10-12	89
12-14	75
Всего	484

Определите:

1. Средний процент влажности и среднее квадратическое отклонение в данной выборочной совокупности;
2. Среднюю и предельную ошибки выборки с вероятностью 0,954. Сделайте выводы.



**Задача 49.** По данным 5%-го выборочного наблюдения по сроку службы оборудования распределяются следующим образом:

Срок службы, лет	До 4	4-8	8-12	12 и более	Всего
Количество оборудований	25	40	20	15	100

Определите:

1. средний срок службы оборудований с доверительный интервал для средней с вероятностью 0,954;
2. с той же вероятностью определите предельную ошибку и доверительный интервал доли оборудований, имеющих срок службы 12 и более лет.

**Задача 49.** Проектируется опрос предпринимателей по поводу оценки правовых условий их деятельности. Определить объем выборочной совокупности, чтобы с вероятностью 0,954 относительная ошибка выборки не превысила 10%. По результатам предварительного опроса, 80% предпринимателей считали условия деятельности неблагоприятными.

**Задача 50.** Урожайность нового сорта пшеницы посеянной на 10 опытных участках, составляла, ц/га: 25,5; 28,0; 27,4; 25,6; 23,9; 24,8; 26,4; 29,2; 27,8; 31,4.

Определите:

1. среднюю урожайность пшеницы и доверительный интервал для средней с вероятностью 0,95;
2. согласуются ли выборочные данные с предположением что урожайность нового сорта пшеницы составляет не менее 26 ц/га?

**Задача 51.** Химический анализ 10 партий молока дал следующие показатели кислотности (в градусах Тернера): 18; 21; 17; 19; 20; 23; 16; 22; 23; 21.

Определите: а) средний уровень кислотности молока и предельную ошибку выборки для средней с вероятностью 0,95.

**Задача 52.** По данным 20% выборочного обследования 100 семей переселенцев из зоны строгого радиационного контроля, количество детей в семьях составляет:

Количество детей	0	1	2	3	4	Всего
Количество семей	11	32	30	20	7	100

Определите среднее количество детей в семьях переселенцев и доверительный интервал для средней с вероятностью 0,954.

**Задача 53. Урожайность** нового сорта пшеницы посеянной на 12 опытных участках, составляла: 22,4; 19,5; 21,4; 23,2; 24,5; 21,9; 23,9; 22,8; 23,8; 25,1; 22,9; 23,5.

Определите:

1. среднюю урожайность пшеницы и доверительный интервал для средней с вероятностью 0,954;
2. среднее квадратическое отклонение;
3. среднюю и предельную ошибки выборки.

**Задача 54.** Для обследования всхожести семян, они были распределены на 55 равномерных серий. На основе механического отбора было проверено 11 серий, в которых удельный вес взошедших семян поставил 85%. С вероятностью 0,950 установите границы доли всхожести семян во всей партии, если межсерийная дисперсия равна 852.

**Задача 55.** На площади в 100 га, занятой овсом, определяется с помощью выборочного метода доля посева, пораженная насекомыми-вредителями. Сколько проб следует взять в выборку, чтобы при вероятности 0,997 определить искомую величину с точностью до 3%, если пробная выборка показывает, что доля пораженной посевной площади составляет 6%?

**Задача 56.** Площадь, занятая посевами зерновых культур в хозяйствах района, составляет 10000 га, среднее квадратическое отклонение урожайность  $\delta=2$  ц/га. Выборка была случайной и бесповторной. Определите необходимый объем выборки при исчислении средней урожайности с вероятностью 0,954, чтобы ошибка для средней не превышала на 0,5 ц/га.

**Задача 57.** поголовье коров в хозяйстве 3500 голов. Среднее квадратическое отклонение надоев на корову в год в генеральной совокупности  $\delta=3,2$  ц. Выборка была случайной и бесповторной. Определите необходимый объем выборки при исчислении среднего надоя молока на корову ( $\bar{x}$ ) с вероятностью 0,954, чтобы ошибка для средней не превышала 0,4 ц/голову?

**При решении задач 58-61** студент руководствуется методическими рекомендациями в теме «**Абсолютные и относительные величины**».

**Задача 58.** Имеются данные численности работников и площадь сельскохозяйственных угодий в 2020 г. (факт.)

Показатель	Иркутский район	Усольский район
1. Среднегодовая численность работников сельского хозяйства	1924	4213
в т.ч. трактористы	224	487
операторы машинного доения	161	263
скотники КРС	180	242
работники свиноводства	5	432
2. Площадь с.х. угодий, га эк	5761	101276

По плану на 2021 г. численность трактористов-машинистов в Иркутском районе 230 человек, а в Усольском районе – 480 человек.

Определите:

1. относительные величины: структуры, координации, интенсивности, планового задания.

2. изобразите графически структуру работников в виде столбиковой диаграммы;

3. сделайте выводы.

**Задача 59.** Имеются следующие данные:

Показатель	2020 (факт)	2019		2021 (план)
		план	факт	
Стоимость валовой продукции в тек.ценах, млн.руб.	25	28	27	30
в том числе: растениеводства	12	10	5	6
животноводства	5	15	18	20
Прочая	8	3	4	4
Среднегодовая численность работников с.-х., чел.	1450	1455	1452	1460

Определите относительные показатели: динамики, выполнения плана, планового задания, координации, интенсивности, структуры.

**Задача 60.** Имеется следующая информация.

Определите, какие из перечисленных ниже статистических показателей являются первичными и производными, интервальными (периодическими), и моментными.

Для приведенных показателей укажите вид и форму выражений:

1. производство электроэнергии на душу населения за год, кВт/ч;
2. длина электрифицированных железнодорожных линий на конец года, км;
3. количество врачей на 10000 населения на начало года;
4. введение в действие общей (полезной) площади жилых домов за год, м<sup>2</sup>;
5. урожайность зерновых, ц/га;
6. доля инвестиций на охрану окружающей среды в общем объеме капиталовложений;
7. рост затрат на мероприятия по охране труда в текущем году по сравнению с прошлым, %;

8. размер основных производственных фондов на 100 га сельскохозяйственных угодий на начало года, тыс.руб.;
9. на каждые 100 телят в стаде крупного рогатого скота приходится 108 бычков;
10. в 2009 г. урожайность картофеля в Иркутском районе 108 ц/га, а в Усольском районе – 120;
11. в Иркутском районе выполнение плана по продуктивности коров составляет в 2021 г. 110%.

### **Задача 61.**

1) Объем продаж в регионе в первом полугодии 2009 г. составил 250 млн. руб. В целом же за год регион планировал реализовать товаров (услуг) на 60 млн. руб. Вычислите относительный показатель плана на второе полугодие.

2) Предприятие планировало увеличить выпуск продукции в 2021 г. по сравнению с 2020 г. на 18%. Фактически же объем продукции составил 112,3% от прошлогоднего уровня. Определить относительный показатель реализации плана.

3) Имеются данные о внешнеторговом обороте, млн. долларов за IV квартал 2021 г: экспорт – 22761; импорт – 18274. Вычислите относительные показатели структуры и координации.

**При решении задач 62 – 72 студенты руководствуются методическими рекомендациями в теме «Ряды динамики».**

На основе ниже приведенной таблицы произведите выравнивание ряда динамики и с помощью экстраполяции рассчитайте прогнозируемый уровень изучаемого признака с учетом ошибки.

Данные для изучения рядов динамики уровней изучаемых явлений в ООО «Анга» Иркутской области:

Показатель	Годы								
	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020
Удой молока на корову, ц	26,80	22,76	31,13	28,48	32,75	37,36	38,07	37,00	38,35
Себестоимость 1 ц живой массы кр. рог. скота, руб.	1200	1638	1574	1787	1692	1539	1939	2179	2373
Урожайность зерновых, ц./га	12,30	11,86	11,83	17,00	17,38	14,60	16,40	14,85	18,57
Валовой надой молока, ц	7895	8620	12017	15697	12758	14615	14645	14646	15890
Валовой прирост и привес живой массы крупного рогатого скота, ц	2785	2810	2772	2317	2428	2107	2134	2307	2205
Валовой сбор зерна, тыс. ц	35,4	41,8	42,2	35,9	46,3	46,8	41,9	42,9	44,3
Себестоимость зерна, руб./ц	75	82	80	79	111	120	139	156	205
Затраты труда на 1 ц зерна, чел.-ч.	1,75	1,28	1,52	1,37	0,25	0,21	0,19	0,25	0,12
Площадь сельскохозяйственных угодий, тыс. га	16,91	16,62	5,77	5,72	5,65	7,57	7,52	7,21	7,11
Численность работников сельхоз. производства, чел.	288	274	215	202	205	165	175	190	185
Всего энергетических мощностей, л. с.	14205	14410	13127	13558	13959	13495	13203	13956	13102

**Задача 62.** Произведите выравнивание ряда динамики удоя молока на корову и экстраполяцию.

**Задача 63.** Произведите выравнивание себестоимости 1 ц живой массы крупного рогатого скота и экстраполяцию.

**Задача 64.** Произведите выравнивание ряда динамики урожайности зерновых и экстраполяцию.

**Задача 65.** Произведите выравнивание ряда динамики валового надоя молока и экстраполяцию.

**Задача 66.** Произведите выравнивание валового прироста живой массы крупного рогатого скота и экстраполяцию.

**Задача 67.** Произведите выравнивание ряда динамики валового сбора зерна и экстраполяцию.

**Задача 68.** Произведите выравнивание ряда динамики себестоимости зерна и экстраполяцию.

**Задача 69.** Произведите выравнивание ряда динамики затрат труда на 1 ц зерна и экстраполяцию.

**Задача 70.** Произведите выравнивание ряда динамики площади сельскохозяйственных угодий и экстраполяцию.

**Задача 71.** Произведите выравнивание ряда динамики численности работников сельскохозяйственного производства и экстраполяцию.

**Задача 72.** Произведите выравнивание ряда динамики энергетических ресурсов и экстраполяцию.

**По задачам 73-79** студент должен определить:

- 1) среднее значение признака за весь период;
- 2) все показатели динамики базисным и цепным способами;
- 3) средние значения показателей динамики.

Студенты руководствуются методическими рекомендациями в теме «**Ряды динамики**».

**Задача 73.** По признаку: «Удой молока на корову».

**Задача 74.** По признаку: «Себестоимость 1 ц живой массы крупного рогатого скота».

**Задача 75.** По признаку: «Урожайность зерновых».

**Задача 76.** По признаку: «Валовой надой молока».

**Задача 77.** По признаку: «Валовой прирост живой массы крупного рогатого скота».

**Задача 78.** По признаку: «Валовой сбор зерна».

**Задача 79.** По признаку: «Численность работников сельскохозяйственного производства».

**При решении задач 80-96** студент руководствуется методическими рекомендациями в теме «**Корреляция и регрессия**».

Постройте параллельные данные (ряды), корреляционные поля и рассчитайте парные коэффициенты корреляции. Сделайте соответствующие выводы. Изучается связь между двумя признаками.

**Задача 80.** Связь между качеством почвы и урожайностью зерновых.

**Задача 81.** Связь между удельным весом сортовых семян картофеля и урожайностью картофеля.

**Задача 82.** Связь между продолжительностью уборки и урожайностью зерновых.



**Задача 83.** Связь между дозой внесения органических удобрений и урожайностью картофеля.

**Задача 84.** Связь между внесением минеральных удобрений и урожайностью зерновых.

**Задача 85.** Связь между урожайностью картофеля и качеством почвы.

**Задача 86.** Связь между себестоимостью зерна и урожайностью зерновых.

**Задача 87.** Связь между себестоимостью и урожайностью картофеля.

**Задача 88.** Связь между расходом кормовых единиц на 1 корову и удоем молока на корову.

**Задача 89.** Связь между расходом кормовых единиц на 1 ц молока и удоем молока на 1 корову.

**Задача 90.** Связь между себестоимостью молока и удоем на 1 корову.

**Задача 91.** Связь между затратами труда на 1 ц молока и удоем на одну корову.

**Задача 92.** Связь между затратами труда на 1 ц зерна и урожайностью зерновых.

**Задача 93.** Связь между затратами труда на 1 ц картофеля и урожайностью картофеля.

**Задача 94.** Связь между затратами труда на 1 ц живой массы крупного рогатого скота и приростом на 1 голову.

**Задача 95.** Связь между себестоимостью 1 ц живой массы и приростом живой массы на 1 голову скота.

**Задача 96.** Связь между расходом кормовых единиц на 1 голову скота на откорме и приростом живой массы на 1 голову скота.

**В задачах 97-114** постройте параллельные ряды (данные) и определите аналитическое выражение связи. Решите соответствующие уравнения регрессии и проверьте на значимость параметр регрессии.

**Задача 97.** Изучите аналитическое выражение связи между качеством почвы и урожайностью зерновых, проверьте на значимость параметр регрессии.

**Задача 98.** Изучите аналитическое выражение связи между качеством почвы и урожайностью картофеля, проверьте на значимость параметр регрессии.

**Задача 99.** Изучите аналитическое выражение связи между удельным весом сортовых семян картофеля и урожайностью картофеля, проверьте на значимость параметр регрессии.

**Задача 100.** Изучите аналитическое выражение связи между продолжительностью уборки и урожайностью зерновых, проверьте на значимость параметр регрессии.

**Задача 101.** Изучите аналитическое выражение связи между дозой внесения органических удобрений и урожайностью картофеля, проверьте на значимость параметр регрессии.

**Задача 102.** Изучите аналитическое выражение связи между дозой внесения минеральных удобрений и урожайностью зерновых, проверьте на значимость параметр регрессии.

**Задача 103.** Изучите аналитическое выражение связи между урожайностью зерновых и себестоимостью зерна, проверьте на значимость параметр регрессии.

**Задача 104.** Изучите аналитическое выражение связи между урожайностью картофеля и себестоимостью картофеля, проверьте на значимость параметр регрессии.

**Задача 105.** Изучите аналитическое выражение связи между себестоимостью молока и приростом живой массы на 1 голову скота, проверьте на значимость параметр регрессии.

**Задача 106.** Изучите аналитическое выражение связи между себестоимостью молока и удоем на 1 корову, проверьте на значимость параметр регрессии.

**Задача 107.** Изучите аналитическое выражение связи между расходом кормовых единиц на 1 корову и удоем молока на 1 корову, проверьте на значимость параметр регрессии.

**Задача 108.** Изучите аналитическое выражение связи между расходом кормовых единиц на 1 голову скота и привесом живой массы на 1 голову, проверьте на значимость параметр регрессии.

**Задача 109.** Изучите аналитическое выражение связи между расходом кормовых единиц на 1 ц молока и удоем молока на 1 корову, проверьте на значимость параметр регрессии.

**Задача 110.** Изучите аналитическое выражение связи между расходом кормовых единиц на 1 ц живой массы крупного рогатого скота и привесом живой массы на 1 голову скота, проверьте на значимость параметр регрессии.

**Задача 111.** Изучите аналитическое выражение связи между затратами труда на 1 ц зерна и урожайностью зерновых, проверьте на значимость параметр регрессии.

**Задача 112.** Изучите аналитическое выражение связи между затратами труда на 1 ц картофеля и урожайностью картофеля, проверьте на значимость параметр регрессии.

**Задача 113.** Изучите аналитическое выражение связи между затратами труда на 1 ц молока и удоем молока на 1 корову, проверьте на значимость параметр регрессии.

**Задача 114.** Изучите аналитическое выражение связи между привесом живой массы на 1 голову скота и затратами труда на 1 ц привеса и прирост дивой массы крупного рогатого скота, проверьте на значимость параметр регрессии.

**При решении задач 115-145** студент руководствуется методическими рекомендациями в теме «**Индексы**».

**Задача 115.** Имеются данные по двум районам Иркутской области за 2020 г:

Вид продукции	Затраты труда на 1 ц, чел.-ч.		Количество продукции, ц	
	Иркутский район	Усольский район	Иркутский район	Усольский район
Зерно	0,86	0.34	258563	1383384
Молоко	5,03	2.24	125359	336168
Картофель	1,13	0.30	100580	157988
Обозначения	$t_0$	$t_1$	$q_0$	$q_1$

Определите отклонение общих затрат труда на производство зерна, молока, картофеля вместе в сравнении Усольского района с Иркутским районом в процентах (%) и в абсолютном выражении (чел.-ч.).

Изучите влияние затрат труда на 1 ц каждого вида продукции и количества на данное отклонение общих затрат труда в % и чел.-ч.

Сделайте соответствующие выводы.

**Задача 116.** Имеются данные по двум районам Иркутской области за 2020 г:

Вид продукции	Продано, ц		Цена 1ц, руб.	
	Иркутский р-он	Усольский р-он	Иркутский р-он	Усольский р-он
Обозначения	$q_1$	$q_0$	$p_1$	$p_0$
Молоко	98787	20149	896	1025
Живая масса крупного рогатого скота	5781	7058	5309	5886

Сравните Иркутский район с Усольским районом. Вычислите отклонение суммы выручки в % и абсолютном выражении и определите данное отклонение за счёт: а) объема продажи молока и живой массы крупного рогатого скота; б) цены реализации того и другого продукта.

Рассмотрите каждый вид продукции в отдельности и в целом (по двум видам продукции).

**Задача 117.** Имеются данные по двум районам Иркутской области за 2020 г.:

Вид продукции	Иркутский район		Усольский район	
	Валовой сбор, тыс.ц.	Себестоимость 1 ц, руб.	Валовой сбор, тыс.ц.	Себестоимость 1 ц, руб.
Обозначения	$q_1$	$Z_0$	$p_1$	$Z_0$
Зерно	258,6	319	1383,4	232
Картофель	100,6	156	157,9	205

Определите отклонение уровней валового сбора и себестоимости 1 ц по каждому виду продукции в сравнении Усольского района с Иркутским районом.

Определите отклонение общей суммы затрат на производство картофеля и зерна вместе и выявите влияние себестоимости 1 ц и объема производства. Сравните Усольский район с Иркутским.

Сделайте соответствующие выводы.

**Задача 118.** Имеются данные по двум районам Иркутской области за 2020 г.

Вид продукции	Расход кормовых единиц на 1 ц продукции, ц		Производство продукции, ц	
	Усольский р-он	Иркутский р-он	Усольский р-он	Иркутский р-он
Обозначения	$k_0$	$k_1$	$q_0$	$q_1$
Молоко	2,3	1,9	336168	125359
Привес и прирост живой массы крупного рогатого скота	8,9	8,1	19682	9252

Сравните Иркутский район с Усольским районом.

Определить:

- 1) отклонение уровней расхода кормовых единиц на 1 ц и производства продукции по каждому виду продукции в % и в абсолютном выражении;
- 2) отклонение общего расхода кормовых единиц на производство молока и живой массы крупного рогатого скота в % и в ц;
- 3) изучите влияние объема производства и расхода кормовых единиц на 1 ц продукции на отклонение общего расхода кормовых единиц;
- 4) сделайте выводы.

**Задача 119.** Имеются данные по двум районам Иркутской области:

Район	Всего расход кормовых единиц на производство молока, ц	Расход кормовых единиц на 1 ц молока в 2020 г., ц		
	2021 (факт)	План	Факт	Индекс выполнения плана
	$q_1$	$k_0$	$k_1$	$i_k = k_1 / k_0$
Иркутский	238182	1,5	1,9	1,267
Усольский	773186	1,8	2,3	1,278
Боханский	100929	1,5	1,7	1,133

Определите:

- 1) средний уровень отклонений расхода кормовых единиц на 1 ц молока по 3 районам в целом, в %;

2) вычислите абсолютное отклонение общего расхода кормовых единиц на производство молока в 3 районах в результате превышения плановых уровней.

3) сделайте выводы.

**Задача 120.** Имеются данные по двум районам Иркутской области за 2020 год:

Половозрастная группа крупного рогатого скота	Иркутский район		Усольский район	
	Затраты труда на 1 голову в год, чел.-ч.	Поголовье, голов	Затраты труда на 1 голову в год, чел.-ч.	Поголовье, голов
	$t_0$	$S_0$	$t_1$	$S_0$
Коровы	180	3482	110	6710
Молодняк и скот на откорме	61	5301	31	9397

Определите:

1) индивидуальные индексы затрат труда на одну голову в год и поголовья коров в Усольском районе по сравнению с Иркутским районом;

2) отклонение общих затрат труда на поголовье коров и молодняка и скота на откорме за год в сравнении Усольского района с Иркутским районом в процентах и в чел.-ч., в том числе за счёт:

3) влияния затрат труда на одну голову; влияния поголовья коров и скота на откорме.

4) сделайте соответствующие выводы.

**Задача 121.** Имеются данные по двум районам Иркутской области за 2019-2020 гг.:

Район	Сумма выручки от реализации зерна в 2020 г.	Отклонение цены реализации зерна в 2020 г. по сравнению с 2019 г.
	$p_1q_1$	$i_p$
Иркутский	30035	0,952
Усольский	43728	1,109

Определите:

1) отклонение средней цены реализации по двум районам в целом с помощью общего индекса средних цен в %;

2) отклонение суммы выручки в 2020 г. по сравнению с 2019 г. по двум районам (вместе) за счёт влияния;

3) сделайте выводы.

**Задача 122.** Имеются данные о реализации зерна в ряде районов Иркутской области за 2019-2020 гг.:

Район	Реализовано зерна, ц		Выручка от реализации зерна, тыс. руб.	
	2019 г.	2020 г.	2019 г.	2020 г.
	$q_0$	$q_1$	$p_0q_0$	$p_1q_1$
Иркутский	79645	85029	32016	31640
Усольский	115002	114917	40192	43728
Боханский	67415	68093	20215	21654

1) Определите цену реализации зерна за 2020 г. и 2019 г. по каждому району и индивидуальные индексы цен в сравнении.

2) Изучите отклонение цены реализации зерна в 2020 г по отношению в 2019 г. с помощью общего индекса цен Пааше, в % и в тыс. руб.

3) Сделайте выводы.

**Задача 123.** Имеются данные о реализации зерна в ряде районов Иркутской области за 2019-2020 гг.:

Район	Реализовано зерна, ц		Выручка от реализации зерна, тыс. руб.	
	2019 г.	2020 г.	2019 г.	2020 г.
	$q_0$	$q_1$	$p_0q_0$	$p_1q_1$
Иркутский	79645	85029	32016	31640
Усольский	115002	114917	40192	43728
Боханский	67415	68093	20215	21654

1) Определите цену реализации зерна за каждый год и по каждому району.

2) Определите средние цены реализации по трем районам ( $\bar{p}_0; \bar{p}_1$ ).

3) Вычислите отклонение средней цены реализации в 2020 г. по сравнению с 2019 г. (индекс цен переменного состава), в % и в руб.

4) Сделайте соответствующие выводы.

**Задача 124.** Имеются данные о реализации зерна в ряде районов Иркутской области за 2019-2020 гг.:



Район	2019		2020	
	Реализовано зерна, ц	Выручка от реализации зерна, тыс. руб.	Реализовано зерна, ц	Выручка от реализации зерна, тыс. руб.
	$q_0$	$p_0q_0$	$q_1$	$p_1q_1$
Иркутский	79645	85029	32016	31640
Усольский	115002	114917	40192	43728
Боханский	67415	68093	20215	21654

1) Определите отклонение суммы выручки от реализации зерна в трех районах (вместе) в 2020 г. по сравнению с 2019 г.

2) Выявите влияние цены реализации зерна в каждом районе на отклонение суммы выручки в 2020 г. по сравнению с 2019 (общий индекс цен постоянного состава), в % и в абсолютном выражении.

3) Сделайте соответствующие выводы.

**Задача 125.** Имеются данные о реализации зерна в ряде районов Иркутской области за 2020-2021 гг.

Район	2020		2021	
	Реализовано зерна, ц	Выручка от реализации зерна, тыс. руб.	Реализовано зерна, ц	Выручка от реализации зерна, тыс. руб.
	$q_0$	$p_0q_0$	$q_1$	$p_1q_1$
Иркутский	79645	85029	32016	31640
Усольский	115002	114917	40192	43728
Боханский	67415	68093	20215	21654

1) Определите отклонение товарооборота в % и в тыс. по трем районам вместе, в том числе под влиянием:

- а) объема реализации (общий индекс физического объема);
- б) средней цены реализации (индекс цен переменного состава).

2) сделайте соответствующие выводы.

**Задача 126.** Имеются данные о реализации зерна в ряде районов Иркутской области за 2020-2021 гг.

Район	2020		2021	
	Реализовано зерна, ц	Выручка от реализации	Реализовано зерна, ц	Выручка от реализации

	зерна, тыс. руб.		зерна, тыс. руб.	
	$q_0$	$p_0q_0$	$q_1$	$p_1q_1$
Иркутский	79645	85029	32016	31640
Усольский	115002	114917	40192	43728
Боханский	67415	68093	20215	21654

1) Определить средние цены реализации за 2020 г и 2021 г и отклонение их в % и в руб. в 2021 г. относительно 2020 г.

2) Рассчитать в % и в руб. степень влияния на отклонение средней цены:

а) структуры продажи;

б) цен в каждом из районов.

3) сделайте соответствующие выводы.

**Задача 127.** Имеются данные о реализации зерна в ряде районов Иркутской области за 2020-2021 гг.:

Район	Реализовано зерна, ц		Выручка от реализации зерна, тыс. руб.	
	2020	2021	2020	2021
	$q_0$	$q_1$	$p_0q_0$	$p_1q_1$
Иркутский	79645	85029	32016	31640
Усольский	115002	114917	40192	43728
Боханский	67415	68093	20215	21654

1) Определить отклонение товарооборота (суммы выручки\_ в 2021 г. по сравнению с 2020 г. в % и в абсолютном выражении (общий индекс товарооборота переменного состава) по трем районам в целом.

2) Определить влияние на это отклонение в % и в руб. факторов:

а) цены реализации в каждом районе;

б) структуры продажи (структурных сдвигов);

в) объема продажи.

3) сделайте выводы.

**Задача 128.** Имеются данные о реализации зерна в ряде районов Иркутской области за 2020-2021 гг.:

Район	Фактическая сумма выручки от реализации зерна в 2021 г., тыс. руб.	Отклонение цены реализации в 2021 г. по сравнению с 2020г.
	$q_1p_1$	$i_p = p_1/p_2$

Иркутский	31640	0,925
Усольский	43728	1,089
Боханский	21654	1,100

1) Используя индексный метод, определите изменения уровня цен реализации зерна в 2021 году по сравнению с 2020г. (по 3 районам вместе).

2) Вычислите абсолютное изменение суммы выручки от реализации зерна (в 3 районах) в результате изменения цен.

3) сделайте соответствующие выводы.

**Задача 129.** Уровень трудоемкости производства 1 ц зерна по КФК «Красный бор» Иркутской области снизился в 2016 г. по сравнению с 2015 г. на 24%, в 2017 г. – на 19,5%, в 2019 по сравнению с 2018г. – на 27,3%, в 2020 по сравнению с 2016 г. – на 27,9%. Используя взаимосвязь цепных и базисных индексов, определите, на сколько процентов снизилась трудоемкость производства 1 ц зерна в 2020 г. по сравнению с 2015 г.

Сделайте краткие выводы.

**Задача 130.** Имеются данные о количестве произведенной продукции и затратам труда на единицу продукции по Иркутскому району Иркутской области:

Район	Производство продукции в 2021, ц	Затраты труда на 1 ц, чел.-ч.	
		2020	2021
	$q_1$	$t_0$	$t_1$
Зерно	258563	1,2	0,9
Картофель	100580	1,4	1,1
Молоко	125359	5,9	5,0

1) Определите изменения в уровне трудоемкости производства единицы продукции (всех 3 видов) в 2021 г. по сравнению с 2020 г. (общий трудовой индекс производительности труда).

2) Найдите абсолютную сумму экономии (перерасхода) человеко-часов на производство всех видов продукции за счёт изменения трудоемкости производства каждого вида продукции в 2021 г. по сравнению с 2020 г.

3) сделайте краткие выводы.

**Задача 131.** Имеются данные о реализации молока, цен реализации и суммы выручки по ряду районов Иркутской области за 2020-2021 гг.:

Район	Выручка от реализации молока, тыс. руб.		Отклонение объема реализации молока, %
	$q_0p_0$	$q_1p_1$	$i_p=q_1/q_0$
Иркутский	86985	88517	95
Усольский	19246	20533	105
Боханский	48915	47156	110

Определите:

1) с помощью среднего арифметического индекса отклонение объема реализации молока по 3 районам в целом в коэффициентах и процентах в 2021 г.;

2) вычислите отклонение суммы выручки от реализации молока (в 3 районах в целом) из-за отклонения объемов реализации в 2021 г. по сравнению с 2020 г.;

3) сделайте соответствующие выводы.

**Задача 132.**

Район	Валовой надой молока, ц		Надой молока на 1 корову в год в 2021 г. к 2020 г.
	2020	2021	
Иркутский	126095	125359	0,905
Усольский	335285	336168	1,108
Боханский	60180	59370	1,009

Определите:

1) сводный индекс физического объема продажи (по 3 каналам реализации вместе) в коэффициентах и процентах;

2) сводный индекс цен при условии, что товарооборот в отчетном периоде по сравнению с базисным увеличился на 15,2%;

3) абсолютный прирост товарооборота за счет изменения объема продажи и изменения цен;

4) сделайте соответствующие выводы.

**Задача 133.** Объемы продажи товаров по разным каналам реализации следующие:

Каналы реализации	Сумма выручки (товарооборота) в базисном периоде, тыс. руб.	Индекс объема продажи
	$q_0p_0$	$i_p=q_1/q_0$
1	31640	0,925
2	43728	1,089
3	21654	1,100

Определите:

- 1) с помощью среднего арифметического индекса отклонение объема реализации молока по 3 районам в целом в коэффициентах и процентах в 2021 г.;
- 2) вычислите отклонение суммы выручки от реализации молока (в 3 районах в целом) из-за отклонения объемов реализации в 2021 г. по сравнению с 2020 г.;
- 3) сделайте соответствующие выводы.

**Задача 134.** Цены и тарифы на отдельные виды услуг по плану и фактически за 2021 г. характеризуются данными:

Вид услуги	Сумма оплаченных услуг в ценах отчетного периода, тыс. руб.		Надой молока на 1 корову в год в 2021 г. к 2020 г.
	по плану	фактически	
	$q_0p_0$	$q_1p_1$	$i_p=p_1/p_0$
А	440	600	1,510
В	160	180	1,202
С	500	420	0,805

Определите:

- 1) сводный гармонический индекс цен и тарифов (по 3 видам услуг);
- 2) сводный индекс физического объема услуг при условии, что общий объем оплаченных услуг увеличился на 30%;
- 3) результаты расчетов объясните.

**Задача 135.** По приведенным в таблице данным определите:

1) средние закупочные цены на скот в 2020-2021 гг. и индекс средних цен (индекс цен переменного состава);

2) сводный индекс цен фиксированного (постоянного) состава;

3) сводный индекс цен структурных сдвигов.

Объясните экономическое содержание вычисленных индексов и покажите их взаимосвязь.

Категории упитанности скота	Объем закупок живого веса, ц		Средняя цена за 1 ц, тыс. руб.	
	Базисный период	Текущий период	Базисный период	Текущий период
1	1800	2300	6,7	6,9
2	1400	1200	5,8	6,0
3	800	500	4,1	4,3

**Задача 136.** Динамика эффективности производственно-финансовой деятельности малых предприятий с разной формой собственности характеризуется данными:

Форма собственности	Затраты на производство, тыс. руб.		Окупаемость затрат на производство, %	
	Базисный период	Текущий период	Базисный период	Текущий период
Государственная	4500	7000	80	86
Коллективная	4500	5800	68	72
Частная	3250	8000	99	90

Определите:

1) среднюю окупаемость затрат на производство по трем формам собственности вместе за базисный и отчетный периоды;

2) индекс средней окупаемости затрат переменного состава;

3) индекс средней окупаемости затрат структурных сдвигов;

4) индекс средней окупаемости затрат постоянного состава;

5) покажите взаимосвязь индексов и объясните их экономическое содержание.

**Задача 137.** Динамика депозитных процентных ставок для физических и юридических лиц характеризуется следующими данными:

Вкладчики	Сумма привлеченных депозитов, тыс. ден.зн.		Средняя депозитная ставка, %	
	Базисный период	Отчетный период	Базисный период	Отчетный период
	$d_0$	$d_1$	$c_0$	$c_1$
Юридические лица	820	950	40	26
Физические лица	180	450	25	20

Определите:

- 1) среднюю депозитную ставку в базисном и отчетных периодах;
- 2) индексы депозитной ставки: переменного состава (сводный индекс изменения средней ставки), постоянного состава (как индекс цен постоянного состава), структурных сдвигов;
- 3) объясните экономическое содержание каждого индекса.

**Задача 138.** По приведенным в таблице данным определите территориальные индексы производительности труда одного работника (в целом по сельскому хозяйству) переменного и постоянного составов. Объясните их экономическое содержание.

Отрасль	Производительность труда одного работника по районам, тыс. руб.		Численность работников по районам, чел.	
	Иркутский район	Усольский район	Иркутский район	Усольский район
	$v_0$	$v_1$	$ч_0$	$ч_1$
Растениеводство	85,2	156,2	3088	3735
Животноводство	54,1	158,1	3973	10619
Всего	$\bar{v}_0$	$\bar{v}_1$	7061	14354

**Задача 139.** Имеются данные о реализации продуктов на рынке в 2009 году:

Продукты	Количество реализованной продукции, кг			Цена 1 кг, руб.		
	июль	август	сентябрь	июль	август	сентябрь
	$q_1$	$q_2$	$q_3$	$p_1$	$p_2$	$p_3$
Мясо	500	450	550	180	200	215
Молоко	4200	4500	4700	16	17	18
огурцы	305	330	360	80	60	40

Определите:

- 1) общие цепные и базисные индексы цен и изучите взаимосвязь цепных и базисных индексов;
- 2) общие цепные и базисные индексы физического объема;
- 3) Сделайте краткие выводы.

**Задача 140.** Имеются данные о реализации овощей в одном из районов Иркутской области в 2009 г.:

Вид продукции	Сумма выручки от реализации в сентябре, тыс. руб.	Снижение цен в сентябре по сравнению с июнем, %
	$q_1 p_1$	$i_p = p_1/p_0$
Капуста свежая	560	35,1
Лук репчатый	85	18,9
Морковь	200	38,4
Укроп	10	40,1

Определите:

- 1) общий индекс товарооборота по 4 видам овощей вместе с учетом того, что товарооборот в сентябре увеличился на 45% по сравнению с июнем;
- 2) общий индекс цен с учетом заданных индивидуальных индексов цен;
- 3) общий индекс физического объема в %;
- 4) абсолютное выражение отклонения суммы выручки от реализации овощей в результате отклонения цен реализации в сентябре по сравнению с июнем, тыс. руб.;
- 5) Сделайте выводы по результатам индексного анализа.

**Задача 141.** Имеются данные о реализации продуктов в Усольском районе Иркутской области за 2009 г.:

Вид продукции	Сумма выручки от реализации продукции по плану, тыс. руб.	Темп отклонения выполнения плана реализации, %
	$q_0 p_0$	$i_q = q_1/q_0$
Живая масса КРС	39901	1,15
Молоко	21054	1,05
Зерно	43009	0,92



1) Используя индексный метод, определите отклонение от плана суммы выручки от реализации всех трех видов продукции за счет увеличения (уменьшения) количества реализации;

2) вычислите абсолютное отклонение суммы выручки под влиянием объемов реализации;

3) сделайте краткие выводы.

**Задача 142.** Имеются данные по разным товарам:

Вид продукта	Базисный период		Отчетный период		Индивидуальные индексы, %	
	Цена за 1 кг, руб.	Количество, кг	Цена за 1 кг, руб.	Количество, кг	цен	количества
	$p_0$	$q_0$	$p_1$	$q_1$	$i_p=p_1/p_0$	$i_q=q_1/q_0$
А	150	?	147	285	?	105,7
В	72	?	83	170	?	110,2
С	?	335	137	?	90,2	130,1

Определите:

- 1) недостающие числа в таблице;
- 2) общие индексы цен по 3 видам продукции вместе;
- 3) общие индексы физического объема по трем видам продукции вместе;
- 4) общие индексы товарооборота;
- 5) сделайте соответствующие выводы.

**Задача 143.** Имеются следующие данные по Иркутскому району Иркутской области:

Вид продукции	2020		2021	
	Производство продукции, ц	Себестоимость 1 ц, руб.	Производство продукции, ц	Себестоимость 1 ц, руб.
	$q_0$	$z_0$	$q_1$	$z_0$
Овощи	70115	320	68634	346
Картофель	95412	342	100580	356
Зерно	261314	282	258563	319

Используя индексный метод, определите:

1) отклонение уровней производства продукции и себестоимости 1 ц по каждому виду продукции;

2) изменение общих затрат на производство овощей, картофеля и зерна вместе в абсолютном выражении (для этого используйте общий индекс товарооборота переменного состава);

3) с помощью индексов себестоимости 1 ц и объема произведенной продукции (постоянного состава), изучите влияние каждого из признаков на изменение общих затрат;

4) сделайте соответствующие выводы.

**Задача 144.** Выручка в одном из перерабатывающих предприятий АПК Иркутской области от продажи продукции сельского хозяйства составила:

Вид продукта	Сумма выручки, тыс. руб.	
	3 квартал	4 квартал
Мясные	1150	1204
Молочные	1250	1300

В четвертом квартале по сравнению с третьим кварталом цены на мясные продукты повысились на 15%, а на молочные продукты цены снизились на 3%. Определите общий индекс цен, выручки и объема реализации по двум видам продукции. Покажите взаимосвязь индексов в коэффициентах и в тыс. руб.

**Задача 145.** Объем реализации продукции по предприятию (в постоянных – сопоставимых ценах) увеличился в 2021 г. по сравнению с 2020 г. на 10%, в 2020 г. по сравнению с 2019 г. – на 5%, в 2019 г. по сравнению с 2018 г. – сократился на 7%, а в 2018 г. по сравнению с 2017 г. – увеличился на 3%. Используя взаимосвязь цепных и базисных индексов, определите на сколько процентов увеличился объем реализации товаров в 2021 г. по сравнению с 2017 г.

Сделайте краткие выводы.

Таблица 1 – Исходные данные для решения задач по ряду районов Иркутской области за 2020 год

№ района	Качество почвы, балл	Продолжительность уборки зерновых, дней	Удельный вес сортовых семян картофеля, %	Внесение удобрений		Посевная площадь, га		Поголовье, голов		Урожайность, ц/га		среднегодовой удой от одной коровы, ц	среднегодовой привес и прирост живой массы на 1 голову скота, ц
				Органических под картофель, т/га	Действующего вещества под зерновые, кг/га	зерновых	картофеля	коров	молодняка и скота на откорм	зерновых	картофеля		
1	68	20	70	40	130	880	3	553	694	7,6	80	22,86	1,35
2	55	25	65	35	110	2900	18	266	160	5,3	53	22,38	1,38
3	60	21	80	55	150	10355	10	1592	3010	9,3	100	21,24	1,45
4	50	30	50	50	100	10437	10	845	1201	6,3	10	14,85	1,35
5	70	18	50	42	100	7550	37	1008	1608	14,9	37	43,3	1,07
6	65	22	45	35	70	800	10	136	261	15	12	40,12	1,36
7	60	15	55	60	120	7196	62	1004	1218	9,2	52	22,52	1,51
8	75	14	70	68	180	550	12	303	287	10	131	17,4	2,39
9	90	13	93	80	220	16493	500	3482	5301	15,7	201	36	1,74
10	87	10	100	90	230	55049	573	6710	9397	25,1	276	50,1	2,09
11	62	25	30	35	50	12536	3	2975	4226	9,4	20	19,96	1,17
12	89	17	90	85	250	9863	1	1095	1454	10,1	180	15,28	1,21
13	70	21	50	75	60	258	5	99	154	11,8	69	22,61	1,45
14	94	12	99	95	240	4543	105	104	204	17	252	28,53	1,22
15	75	26	60	75	50	23524	75	2065	3577	11,2	69	22,66	1,58
16	80	19	75	80	70	21575	80	3125	3242	14,5	95	27,49	1,88

№ района	Себестоимость 1 ц, руб				Расход кормовых единиц, ц				Затраты труда на 1 ц, чел.-ч.			
	зерна	картофеля	молока	живой массы крупного рогатого скота	на одну корову	на одну голову молодняка и скота на откорме	на 1 ц молока	на 1 ц живой массы крупного рогатого скота	зерна	картофеля	молока	привеса и прироста живой массы крупного рогатого скота
1	509	779	743	7145	41,5	29,5	1,3	7,8	2,8	12,5	7,6	74,0
2	445	192	674	5448	38,4	34,5	1,4	7,1	1,9	3,2	4,9	33,6
3	210	700	623	4805	3936	34,5	1,5	7,8	0,8	10	7,9	33,1
4	399	600	800	6089	35,1	32,4	1,2	6,9	5,1	10	13,1	40,4
5	302	770	462	8660	48,8	28,5	1,8	6,8	0,7	10,7	5,5	57,4
6	376	900	463	2955	45,5	40,1	2,1	7,5	2,1	13,3	3,5	39,4
7	323	487	760	6160	40,7	35,4	1,8	8,8	1,7	3,4	6,0	43,4
8	340	493	1092	6357	32,4	30,7	1,5	9,1	1,6	1,9	8,9	64,0
9	319	356	948	8723	45,7	39,6	1,9	8,1	0,9	1,1	5,0	35,1
10	232	205	785	8980	50,4	32,4	2,3	8,9	0,3	3,0	2,2	24,6
11	359	680	848	6961	37,1	26,8	1,7	6,9	3,2	4,1	10,7	69,0
12	246	278	731	6781	35,9	29,9	1,4	6,8	1,0	5,5	12,4	86,1
13	364	279	844	6771	41,2	31,4	1,4	7,8	1,0	2,9	3,6	22,4
14	325	332	1126	2086	23,4	28,9	1,3	3,0	1,0	1,0	11,5	84,3
15	303	289	778	6333	45,0	36,5	1,5	7,8	1,5	4,6	6,6	57,5
16	217	350	621	5958	42,4	35,0	1,7	8,0	1,7	4,1	5,0	48,5