Министерство сельского хозяйства РФ
Департамент научно – технологической политики и образования
ФГБОУ ВО «Иркутский государственный аграрный университет им. А.А. Ежевского»

Кафедра Математики

С.П. Голышева

МАТЕМАТИКА

Интегральное исчисление функций одной переменной. Числовые ряды. Дифференциальные уравнения

Учебное пособие
для студентов первых курсов
биологических направлений бакалавриата аграрных вузов
очной формы обучения

Часть 2
Издание второе, переработанное

Молодежный, 2019

УДК 51

Рекомендовано к изданию Научно-методическим Советом Иркутского государственного аграрного университета им. А.А. Ежевского (протокол № 2 от 25ноября 2019 г.).

Автор: доцент Голышева С.П.

Математика: учебное пособие для студентов первых курсов биологических направлений бакалавриата аграрных вузов очной формы обучения. В 2 ч. Ч. 2.Интегральное исчисление функций одной переменной. Числовые ряды. Дифференциальные уравнения. 2-е изд., перераб. Молодежный: ИрГАУ, 2019. 139 с.

Рецензенты:

доцент кафедры математики Иркутского ГАУ им. А.А. Ежевского Шумай Т.А.,

к.т.н., доцент кафедры автоматизированных систем ИрНИТУ Маланова Т.В.

Данное учебное пособие предназначено для студентов первых курсов биологических направлений бакалавриата очной формы обучения аграрных вузов. Содержит краткие теоретические сведения по каждому разделу, приведены примеры с решениями, контрольные вопросы, а также задания для контрольных работ, рассчитанных на 30 вариантов.

Содержание

ВВЕДЕНИЕ

В учебное пособие **«Математика. Интегральное исчисление функций одной переменной. Числовые ряды. Дифференциальные уравнения»** (часть вторая, издание второе, переработанное) включены понятия *неопределенного и определенного интеграла, их свойства* и некоторые *приложения определенного интеграла (вычисление площадей плоских фигур; несобственные интегралы); числового ряда и дифференциальных уравнений.*

В разделе «Числовые ряды» рассмотрены положительные числовые ряды и их достаточные признаки сходимости; а также признак Лейбница сходимости знакочередующихся рядов. Естественным образом включены свойства сходящихся числовых рядов, основные теоремы и следствия из них.

В раздел «Дифференциальные уравнения» вошли дифференциальные уравнения 1-го порядка и их типы, разрешаемые в квадратурах; 2-го порядка с постоянными коэффициентами: линейные однородные и неоднородные, а также уравнения, допускающие понижение порядка и их системы. Рассмотрены задачи прикладного характера, приводящие к понятию дифференциальных уравнений.

К каждой изученной теме предлагаются задания для аудиторной работы студентов, а также контрольные задания, состоящие из 30 вариантов для самостоятельной работы студентов, которые расположены в заключительной части данного пособия.

Представленный материал пособия соответствует содержанию действующего государственного образовательного стандарта и программы курса математики для биологических направлений бакалавриата ФГБОУ ВО «Иркутский государственный аграрный университет им. А.А. Ежевского».

Раздел I. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

1.1 Понятие первообразной и неопределенного интеграла

Определение 1. Функция $F(x)$ называется ***первообразной*** для функции $y = f(x)$ на интервале $X \in D_f$, если для каждой точки из этого интервала выполняется равенство:

$$F'(x) = f(x). \tag{1}$$

Например, функция $F(x) = sinx$ является первообразной для $f(x) = cosx$ на промежутке $X \in (-\infty; +\infty) \in D_f$, так как при любом $x \in (-\infty; +\infty)$ $F'(x) = (sinx)' = cosx = f(x)$, т.е. выполняется равенство (1).

Однако, функции $F(x) = sinx + 1$, $F(x) = sinx - 0{,}5$, $F(x) = sinx + 100$ и т.д., отличающиеся друг от друга только произвольной постоянной, также являются первообразными для данной функции $f(x) = cosx$ (в этом легко убедиться по ***определению 1***. Тогда встает вопрос: можно ли все первообразные $F(x)$ для данной функции $f(x)$ выразить одной формулой? Ответ на этот вопрос дает следующее определение.

Определение 2. Совокупность всех первообразных $F(x) + C$ функции $y = f(x)$ на промежутке $X \in D_f$ называется ***неопределенным интегралом*** от данной функции и обозначается: $\int f(x)dx$, т.е.

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \tag{2}$$

где знак $\int$ называется знаком неопределенного интеграла; $f(x)$ – подынтегральной функцией; $f(x)dx$ – подынтегральным выражением; x – переменной интегрирования функцией; $F(x)$ – одна из первообразных функции $f(x)$, $C = const$.

Таким образом, по ***определению 2*** из рассмотренного выше примера следует, что $\int cosxdx = sinx + C$, где C принимает любое числовое значение.

1.2 Основные свойства неопределенного интеграла

1. Производная неопределенного интеграла равна подынтегральной функции, т.е.

$$(\int f(x)dx)' = f(x).$$

2. Дифференциал от неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению, т.е.

$$d(\int f(x)dx) = f(x)dx.$$

3. В неопределенном интеграле постоянный множитель можно выносить за знак интеграла, т.е. если $k = const$, то

$$\int k \cdot f(x)dx = k \cdot \int f(x)dx.$$

4. Неопределенный интеграл от алгебраической суммы нескольких функций равен алгебраической сумме неопределенных интегралов от каждой функции, т.е.

$$\int \left[f(x) \pm g(x)\right]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx.$$

5. Неопределенный интеграл от дифференциала некоторой функции равен сумме этой функции и произвольной постоянной *C*, т.е.

$$\int d\left[f(x)\right] = f(x) + C.$$

Правило интегрирования: если $F(x)$ – первообразная для функции $f(x)$, то $\frac{1}{a} \cdot F(ax+в)$ является первообразной для функции $f(ax+в)$, где

$\frac{1}{a}$ называется ***компенсирующим множителем***$(a, в = const, a \neq 0)$.

Для справок приведем таблицу интегралов, в которой в левом столбце даны интегралы от простых функций, в правом – для сложных.

Таблица интегралов

Простая функция	***Сложная функция***
1. $\int dx = x + C; \int dt = t + C;$	1. $\int du = u + C; \int dv = v + C.$
2. $\int 0dx = C.$	2. $\int 0du = C.$
3. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C,\ n \in R,\ n \neq -1.$	3. $\int u^n dx = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C,\ n \in R,\ n \neq -1.$
3 а) $\int \sqrt{x} dx = \frac{2x^{3/2}}{3} + C.$	3а) $\int \sqrt{u} du = \frac{2u^{3/2}}{3} + C.$
3 б) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C.$	3б) $\int \frac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + C.$
3 в) $\int \frac{dx}{x^n} = \frac{1}{(1-n)x^{n-1}} + C,\ n \neq 1.$	3в) $\int \frac{du}{u^n} = \frac{1}{(1-n)u^{n-1}} + C,\ n \neq 1.$
3 г) $\int \sqrt[n]{x^m} dx = \frac{x^{\frac{m}{n}+1}}{\frac{m}{n}+1} + C,\ \frac{m}{n} \neq -1.$	3г) $\int \sqrt[n]{u^m} du = \frac{u^{\frac{m}{n}+1}}{\frac{m}{n}+1} + C,\ \frac{m}{n} \neq -1.$
4. $\int \frac{dx}{ax+в} = \frac{1}{a} ln\lvert ax+в \rvert + C.$	4. $\int \frac{du}{au+в} = \frac{1}{a} ln\lvert au+в \rvert + C.$
4 а) $\int \frac{dx}{x} = ln\lvert x \rvert + C.$	4а). $\int \frac{du}{u} = ln\lvert u \rvert + C.$
5. $\int e^x dx = e^x + C.$	5. $\int e^u du = e^u + C.$
6. $\int a^x dx = \frac{a^x}{lna} + C,$ $a > 0, a \neq 1, a = const.$	6. $\int a^u du = \frac{a^u}{lna} + C,$ $a > 0, a \neq 1, a = const.$
7. $\int sinxdx = -cosx + C.$	7. $\int sinudu = -cosu + C.$
8. $\int cosxdx = sinx + C.$	8. $\int cosudu = sinu + C.$
9. $\int tgxdx = -ln\lvert cosx \rvert + C.$	9. $\int tgudu = -ln\lvert cosu \rvert + C.$

10. $\int ctgxdx = ln\lvert sinx \rvert + C$.	10. $\int ctgudu = ln\lvert sinu \rvert + C$.
11. $\int \frac{dx}{cos^2 x} = tgx + C$.	11. $\int \frac{du}{cos^2 u} = tgu + C$.
12. $\int \frac{dx}{sin^2 x} = -ctgx + C$.	12. $\int \frac{du}{sin^2 u} = -ctgu + C$.
13 . $\int \frac{dx}{x^2 - 1} = \frac{1}{2} \cdot ln\left\lvert \frac{x-1}{x+1} \right\rvert + C$.	13 . $\int \frac{du}{u^2 - 1} = \frac{1}{2} \cdot ln\left\lvert \frac{u-1}{u+1} \right\rvert + C$.
14. $\int \frac{dx}{x^2 + 1} = \left[\begin{array}{l} arctgx + C \\ -arcctgx + C \end{array} \right.$.	14. $\int \frac{du}{u^2 + 1} = \left[\begin{array}{l} arctgu + C \\ -arcctgu + C \end{array} \right.$.
15. $\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \left[\begin{array}{l} arcsinx + C \\ -arccosx + C \end{array} \right.$.	15. $\int \frac{du}{\sqrt{1 - u^2}} = \left[\begin{array}{l} arcsinu + C \\ -arccosu + C \end{array} \right.$
16. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm 1}} = ln\left\lvert x + \sqrt{x^2 \pm 1} \right\rvert + C$.	16. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm 1}} = ln\left\lvert u + \sqrt{u^2 \pm 1} \right\rvert + C$
17 . $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \cdot ln\left\lvert \frac{x-a}{x+a} \right\rvert + C$, $a = const.$	17. $\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \cdot ln\left\lvert \frac{u-a}{u+a} \right\rvert + C$, $a = const.$
18. $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \left[\begin{array}{l} \frac{1}{a} \cdot arctg\frac{x}{a} + C \\ -\frac{1}{a} \cdot arcctg\frac{x}{a} + C \end{array} \right.$.	18 . $\int \frac{du}{u^2 + a^2} = \left[\begin{array}{l} \frac{1}{a} \cdot arctg\frac{u}{a} + C \\ -\frac{1}{a} \cdot arcctg\frac{u}{a} + C \end{array} \right.$,
19. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \left[\begin{array}{l} arcsin\frac{x}{a} + C \\ -arccos\frac{x}{a} + C \end{array} \right.$.	19. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \left[\begin{array}{l} arcsin\frac{u}{a} + C \\ -arccos\frac{u}{a} + C \end{array} \right.$.
20. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm m}} = ln\left\lvert x + \sqrt{x^2 \pm m} \right\rvert + C$, $m = const.$	20. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm m}} = ln\left\lvert u + \sqrt{u^2 \pm m} \right\rvert + C$.

1.3 Методы интегрирования в неопределенном интеграле

1.3.1 Непосредственное интегрирование

Интегрирование, основанное на применении таблицы основных интегралов, свойств неопределенного интеграла, а также простейших тождественных преобразований подынтегральной функции, принято называть ***непосредственным интегрированием***.

Пример 1. Найти интеграл: а) $\int\left(4x^3-\sqrt{x}+\frac{6}{x^2}\right)dx$; б) $\int\frac{dx}{25x^2-4}$;

в) $\int\left(\frac{1}{\sqrt{16-9x^2}}+\frac{5}{cos^2(6x-7)}-e^{-\frac{6}{7}x-8}\right)dx.$

Решение: а) Вводя дробные и отрицательные показатели и применяя формулы интегрирования для степенной функции (3), 3а, 3в соответственно, а также свойства 3 и 4 неопределенного интеграла, получим:

$$\int\left(4x^3-\sqrt{x}+\frac{6}{x^2}\right)dx=\int 4x^3dx-\int\sqrt{x}dx+\int\frac{6}{x^2}dx=$$

$$=4\int x^3dx-\int\sqrt{x}dx+6\int x^{-2}dx=\frac{4x^4}{4}-\frac{2x^{3/2}}{3}-\frac{6}{x}+C=x^4-\frac{2x^{3/2}}{3}-\frac{6}{x}+C.$$

б) Преобразуем выражение в знаменателе, применим формулу (17) и введенное выше правило интегрирования:

$$\int\frac{dx}{25x^2-4}=\int\frac{dx}{(5x)^2-2^2}=\frac{1}{2\cdot 2}\cdot\frac{1}{5}ln\left|\frac{5x-2}{5x+2}\right|+C=\frac{1}{20}ln\left|\frac{5x-2}{5x+2}\right|+C,$$

где $\frac{1}{5}$ – компенсирующий множитель.

в) Применив к слагаемым подынтегральной функции формулы (19), (11) и (5) соответственно для сложных функций, получим:

$$\int\left(\frac{1}{\sqrt{16-9x^2}}+\frac{5}{cos^2(6x-7)}-e^{-\frac{6}{7}x-8}\right)dx=\int\frac{1}{\sqrt{16-9x^2}}dx+\int\frac{5}{cos^2(6x-7)}dx-$$

$$-\int e^{-\frac{6}{7}x-8}dx=\frac{1}{3}arcsin\frac{3x}{4}+\frac{5}{6}tg(6x-7)+\frac{7}{6}e^{-\frac{6}{7}x-8}+C.$$

Задание № 1. Найти самостоятельно следующие интегралы.

1. $\int x^5dx$.
2. $\int \sqrt[4]{x^3}\left(3-\sqrt[4]{x^5}\right)dx$.
3. $\int tg(6x-3)dx$.
4. $\int\left(4e^{-2x}-3sinx+7\right)dx$
5. $\int\left(\frac{3}{\sqrt{36-4x^2}}+\frac{5}{sin^2(3x-1)}\right)dx.$
6. $\int\left(\frac{5}{25x^2-81}+\frac{5}{6x-7}\right)dx$.
7. $\int\left(8-2^{3-6x}-3\sqrt{x}\right)dx$.
8. $\int\left(x^5-7^{5x-2}+\frac{3}{7-9x}\right)dx$.
9. $\int\frac{3}{(3x-7)^5}dx$.
10. $\int\frac{3x^2-2}{x^3}dx$.
11. $\int\left(\frac{3}{9x^2+25}+\frac{4}{(2x-7)^3}\right)dx$
12. $\int\left(\frac{2}{\sqrt{4x^2+36}}+\frac{4}{\sqrt{4x-5}}\right)dx.$

1.3.2 Метод подстановки (или замены переменной) в неопределенном интеграле

Если данный интеграл $\int f(x)dx$ не является табличным и не может быть найден методом непосредственного интегрирования, то введение новой переменной интегрирования позволяет свести данный интеграл к табличному.

Положим $x=\varphi(t)$, где $\varphi(t)$ непрерывная и дифференцируемая функция на некотором промежутке. Если на указанном промежутке изменения переменной x функция $f(x)$ интегрируема, то имеет место ***формула замены переменной в неопределенном интеграле***:

$$\int f(x)dx=\int f\left[\varphi(t)\right]\cdot\varphi'(t)dt. \qquad (3)$$

После того, как интеграл найден с помощью подстановки $x=\varphi(t)$, следует вернуться к «старой» переменой *x*.

Иногда вместо указанной замены переменной применяют подстановку $t=\omega(x)$.

Нахождение интегралов методом подстановки значительно упрощается, если пользоваться следующими правилами:

Правило 1. Если под знаком интеграла стоит дробь, числитель которой равен производной знаменателя, отличающейся с точностью, хотя бы, до постоянного множителя, то за *t* обозначают знаменатель, т.е.

$$\int \frac{f'(x)dx}{f(x)} = \left\{ \begin{array}{c} f(x)=t \\ f'(x)dx=dt \end{array} \right\} = ln\left| f(x) \right| + C.$$

Правило 2. Если под знаком интеграла стоит дробь, в знаменателе которой – функция $f^n(x)$, а в числителе – производная основания степени $f'(x)$, отличающаяся с точностью, хотя бы, до постоянного множителя, то за *t* обозначают функцию $f(x)$, т.е.

$$\int \frac{f'(x)dx}{\left[f(x)\right]^n} = \left\{ \begin{array}{c} f(x)=t \\ f'(x)dx=dt \end{array} \right\} = \frac{1}{(1-n)\cdot\left[f(x)\right]^{n-1}} + C,\ n\in R,\ n\neq 1.$$

Правило 3. Если под знаком интеграла стоит функция $f^n(x)$, умноженная на производную от основания степени, т.е. на $f'(x)$, отличающаяся с точностью, хотя бы, до постоянного множителя, то за *t* обозначают функцию $f(x)$, т.е.

$$\int \left[f(x)\right]^n \cdot f'(x)dx = \left\{ \begin{array}{c} f(x)=t \\ f'(x)dx=dt \end{array} \right\} = \frac{\left[f(x)\right]^{n+1}}{n+1} + C,\ n\in R,\ n\neq -1.$$

Правило 4. Если под знаком интеграла стоит показательная функция $a^{f(x)}$, умноженная на производную от показателя степени, т.е. на $f'(x)$, отличающаяся с точностью, хотя бы до постоянного множителя, то за *t* обозначают функцию $f(x)$, т.е.

$$\int a^{f(x)} \cdot f'(x)dx = \left\{ \begin{array}{c} f(x)=t \\ f'(x)dx=dt \end{array} \right\} = \frac{a^{f(x)}}{lna} + C.$$

Частным случаем данного интеграла является интеграл вида $\int e^{f(x)} \cdot f'(x)dx$.

$$\int e^{f(x)}\cdot f'(x)dx=\left\{\begin{matrix} f(x)=t \\ f'(x)dx=dt \end{matrix}\right\}=e^{f(x)}+C.$$

Правило 5. Если под знаком интеграла стоит дробь, в знаменателе которой квадратный корень из функции $f(x)$, а в числителе – производная $f'(x)$, отличающаяся с точностью хотя бы до постоянного множителя, то за t обозначают функцию $f(x)$, т.е.

$$\int \frac{f'(x)dx}{\sqrt{f(x)}}=\left\{\begin{matrix} f(x)=t \\ f'(x)dx=dt \end{matrix}\right\}=2\sqrt{f(x)}+C.$$

Пример 2. Найти неопределенный интеграл методом подстановки:

а) $\int\frac{dx}{5x+1}$; б) $\int e^{x^2+1}\cdot xdx$; в) $\int(tg2x+1)^3\cdot\frac{dx}{cos^2 2x}$; г) $\int\sqrt[5]{4x+7}dx$.

Решение:

а) I способ: применим *правило 1*.

$$\int\frac{dx}{5x+1}=\left\{\begin{matrix} 5x+1=t \\ 5dx=dt \\ dx=\frac{dt}{5} \end{matrix}\right\}=\int\frac{dt}{5t}=\frac{1}{5}\int\frac{dt}{t}=\frac{1}{5}\cdot ln|t|+C=\frac{1}{5}ln|5x+1|+C.$$

II способ: применим табличную формулу (4) для простой функции.

$$\int\frac{dx}{5x+1}=\frac{1}{5}ln|5x+1|+C.$$

б) $\int e^{x^2+1}\cdot xdx=\{правило 4\}=\left\{\begin{matrix} x^2+1=t \\ 2xdx=dt \\ xdx=\frac{dt}{2} \end{matrix}\right\}=\int e^t dt=e^t+C=e^{x^2+1}+C.$

в) Здесь применим *правило 3*, где $n=3$. Тогда

$$\int(tg2x+1)^3\cdot\frac{dx}{cos^2 2x}=\left\{\begin{matrix} tg2x+1=t \\ \frac{dx}{cos^2 2x}=\frac{dt}{2} \end{matrix}\right\}=\int t^3\cdot\frac{dt}{2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{t^4}{4}+C=\frac{(tg2x+1)^4}{8}+C.$$

г) Аналогично, применим *правило 3*, где $f(x)=4x+7$; $n=\frac{1}{5}$.

$$\int\sqrt[5]{4x+7}\,dx=\int(4x+7)^{1/5}dx=\left\{\begin{array}{l}4x+7=t\\4dx=dt\\dx=\dfrac{dt}{4}\end{array}\right\}=\frac{1}{4}\int t^{1/5}dt=\frac{5t^{6/5}}{24}+C=$$

$$=\frac{5(4x+7)^{6/5}}{24}+C.$$

Задание № 2. Найти самостоятельно следующие интегралы:

1. $\int e^{sinx}\cdot cosxdx$.
2. $\int \frac{x^2dx}{x^3+1}$.
3. $\int \frac{dx}{x(1+lnx)}$.
4. $\int \frac{dx}{x(1+ln^2x)}$.
5. $\int e^{x^2+4x+3}\cdot(x+2)dx$.
6. $\int 4x\cdot cos(x^2+5)dx$.
7. $\int \frac{arcsin^3 2xdx}{\sqrt{1-4x^2}}$
8. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{arctgx}\cdot(1+x^2)}$.
9. $\int \frac{5x^2dx}{\sqrt{3-x^3}}$.
10. $\int \frac{dx}{(3x-4)\sqrt{ln(3x-4)}}$.
11. $\int \frac{sinxdx}{9+cos^2x}$.
12. $\int e^{\sqrt{2x}}\cdot\frac{dx}{\sqrt{2x}}$.

1.3.3 Метод интегрирования по частям в неопределенном интеграле

Пусть функции $u=u(x)$ и $v=v(x)$ дифференцируемы по *x*. Известно, что $d(u\cdot v)=vdu+udv$. Выражая отсюда udv, получим:

$$udv=d(u\cdot v)-vdu.$$

Проинтегрируем обе части последнего выражения:

$$\int udv=u\cdot v-\int vdu. \qquad (4)$$

Формула (4) называется ***формулой интегрирования по частям в неопределенном интеграле.***

Рассмотрим три типа интегралов, к которым применяется эта формула.

Пусть дан интеграл $\int f(x)dx$. Если в нем функция $f(x)$ представляет собой произведение многочлена n-ой степени и одной из функций, указанных в квадратных скобках:

I тип: $f(x)=P_n(x)\cdot\left[sinx; cosx; tgx; ctgx; e^x; a^x\right]$, где $P_n(x)$ – многочлен n-ой степени, тогда $P_n(x)=u$; все остальное обозначают за dv.

IIтип: $f(x)=P_n(x)\cdot\left[arcsinx; arccosx; arctgx; arcctgx; lnx; log_a x\right]$, тогда многочлен обозначают за dv, т.е. $P_n(x)dx=dv$; все остальное – за u.

III тип: в интегралах $\int e^x\cdot sinx\,dx$, $\int e^x\cdot cosx\,dx$ и т.п. за u обозначают любую из функций, например, e^x. Далее, дважды интегрируя по частям, приходят к исходному интегралу, и из полученного равенства, как из уравнения, выражают данный интеграл.

Пример 3. Найти интегралы: а) $\int(3x+1)\cdot sin2xdx$; б) $\int ln(2x+5)dx$; в) $\int arctg2xdx$; г) $\int (x-2)^3\cdot ln(x-2)dx$.

Решение. а) $$\int\underbrace{(3x+1)\cdot sin2x}_{\text{I тип}}dx=\left\{\begin{matrix} 3x+1=u; & 3dx=du \\ sin2xdx=dv; & -\frac{1}{2}cos2x=v\end{matrix}\right\}=$$

$$=-\frac{1}{2}(3x+1)\cdot cos2x+\frac{3}{2}\int cos2xdx=-\frac{1}{2}(3x+1)\cdot cos2x+\frac{3}{4}sin2x+C.$$

б) $$\underbrace{\int ln(2x+5)dx}_{\text{II тип}}=\left\{\begin{matrix} ln(2x+5)=u; & \frac{2dx}{2x+5}=du \\ dx=dv; & x=v\end{matrix}\right\}=x\cdot ln(2x+5)-\int\frac{2xdx}{2x+5}=$$

$$=x\cdot ln(2x+5)-\int\frac{(2x+5)-5dx}{2x+5}=x\cdot ln(2x+5)-x+2{,}5ln|2x+5|+C.$$

в) $$\underbrace{\int arctg2xdx}_{\text{II тип}}=\left\{\begin{matrix} arctg2x=u; & \frac{2dx}{1+4x^2}=du \\ dx=dv; & x=v\end{matrix}\right\}=x\cdot arctg2x-2\int\frac{xdx}{1+4x^2}=$$

$$=x\cdot arctg2x-\frac{1}{4}\int\frac{8xdx}{\underbrace{1+4x^2}}=x\cdot arctg2x-\frac{1}{4}ln\left(1+4x^2\right)+C.$$

г) $\underbrace{\int (x-2)^3 \cdot ln(x-2)dx}_{\text{II тип}} = \left\{ \begin{matrix} ln(x-2)=u; & \dfrac{dx}{x-2}=du \\ (x-2)^3 dx = dv; & \dfrac{(x-2)^4}{4}=v \end{matrix} \right\} = \dfrac{(x-2)^4 ln(x-2)}{4} -$

$$-\frac{1}{4}\int (x-2)^3 dx = \frac{(x-2)^4 ln(x-2)}{4} - \frac{(x-2)^4}{16} + C.$$

Задание № 3: Найти самостоятельно следующие интегралы:

1. $\int x \cdot 3^x dx$. 2. $\int arcsin 4x dx$. 3. $\int x \cdot e^{2x+1} dx$.
4. $\int (4x-5) \cdot lnx dx$. 5. $\int x^2 \cdot e^{-x} dx$. 6. $\int ln(5-6x)dx$.
7. $\int (3-4x) \cdot sinx dx$. 8. $\int (3x+1)^5 \cdot ln(3x+1)dx$. 9. $\int arccos x dx$.
10. $\int 5x \cdot cosx dx$. 11. $\int ln(4x+9)dx$. 12. $\int (7x-3) \cdot e^{2x+5} dx$.

1.4 Интегралы, содержащие квадратный трехчлен и его иррациональность в знаменателе:

$\int \dfrac{dx}{ax^2+вx+c}$ **(A)**; $\int \dfrac{dx}{\sqrt{ax^2+вx+c}}$ **(B)**; $\int \dfrac{(Mx+N)dx}{ax^2+вx+c}$ **(C)**; $\int \dfrac{(Mx+N)dx}{\sqrt{ax^2+вx+c}}$ **(D)**,

где a, $в$, c, M, $N - const$, $a \neq 0$.

Правило нахождения интегралов* (A) – (D*): при нахождении интегралов вида **(A)– (D)** в знаменателе выделяют полный квадрат. В результате чего, ***интеграл вида* (A),** в зависимости от знака дискриминанта $D = в^2 - 4ac$ квадратного трехчлена $ax^2+вx+c$, приводят к табличному интегралу: $\left[\begin{matrix} если\ D>0, то\ (17); \\ если\ D<0, то\ (18); \\ если\ D=0, то\ (3в). \end{matrix} \right.$

В ***интегралах вида* (B)** после выделения полного квадрата в знаменателе, в зависимости от знака старшего коэффициента a квадратного трехчлена, получается табличный интеграл (формула): $\left[\begin{matrix} если\ \ a>0, то\ формула\ (20) \\ если\ \ a<0, то\ формула\ (19) \end{matrix} \right.$.

В ***интегралах вида*** **(С)**:

1) если выполняется равенство:

$$(ax^2+вx+c)'=Mx+N, \tag{5}$$

то данный интеграл будет равен $\alpha ln\left|ax^2+вx+c\right|+C$, где $\alpha=const$.

2) Если равенство (5) не выполняется, то следует преобразовать подынтегральную функцию. В результате данный интеграл разобъется на два интеграла, один из которых будет равен $\alpha ln\left|ax^2+вx+c\right|+C$, а другой будет являться интегралом вида **(А)**.

В ***интегралах вида*** **(D):**

1) если выполняется равенство (5), то исходный интеграл будет равен $2\alpha\sqrt{ax^2+вx+c}+C$.

2) Если равенство (5) не выполняется, то следует преобразовать подынтегральную функцию. В результате данный интеграл разобъется на два интеграла, один из которых будет равен $2\alpha\sqrt{ax^2+вx+c}+C$, а другой будет являться интегралом вида **(В)**.

Пример 4. Выделить полный квадрат в следующих выражениях: а) x^2-4x-5; б) $x^2+2x+10$; в) $x^2+10x+25$; г) $3x^2+2x-1$; д) $1-7x-4x^2$;

е) $x^2+6x+25$; ж) x^2+4x+3; з) $1-4x+5x^2$.

Решение. Выделение полного квадрата основывается на применении формул сокращенного умножения: $a^2\pm 2aв+в^2=(a\pm в)^2$.

а) $x^2-4x-5=(x^2-2\cdot x\cdot 2+4)-4-5=(x-2)^2-9$.

б) $x^2+2x+10=(x^2+2\cdot x\cdot 1+1)-1+10=(x+1)^2+9$.

в) $x^2+10x+25=x^2+2\cdot x\cdot 5+25=(x+5)^2$.

г) $3x^2+2x-1=\{умн.\ на\ 3\ и\ разд.\ на\ 3\}=\frac{1}{3}(9x^2+6x-3)=$

$$\frac{1}{3}\left((9x^2+2\cdot 3x\cdot 1+1)-4\right)=\frac{1}{3}\left((9x^2+2\cdot 3x\cdot 1+1)-4\right)=\frac{1}{3}\left((3x+1)^2-4\right).$$

д) $1-7x-4x^2=-(4x^2+7x-1)=-\left[\left(4x^2+2\cdot 2x\cdot\frac{7}{4}+\frac{49}{16}\right)-\frac{49}{16}-1\right]=$

$$=-\left[\left(2x+\frac{7}{4}\right)^2-\frac{65}{16}\right]=\frac{65}{16}-\left(2x+\frac{7}{4}\right)^2.$$

В примере 4(е – з) решить самостоятельно.

Пример 5. Найти интегралы, пользуясь разложениями квадратных трехчленов в ***примере 4***:

а) $\int\frac{dx}{x^2-4x-5}$; б) $\int\frac{dx}{x^2+2x+10}$; в) $\int\frac{dx}{x^2+10x+25}$; г) $\int\frac{(7x+8)dx}{5-7x-4x^2}$;

д) $\int\frac{dx}{\sqrt{1-7x-4x^2}}$; е) $\int\frac{(3x+5)dx}{x^2+6x+25}$; ж) $\int\frac{(3x-2)dx}{\sqrt{1-4x+5x^2}}$.

Решение.

а) $\int\frac{dx}{x^2-4x-5}=\{D=36>0\Rightarrow по\,(17)\}=\int\frac{dx}{(x-2)^2-3^2}=\frac{1}{6}ln\left|\frac{x-5}{x+1}\right|+C.$

б) $\int\frac{dx}{x^2+2x+10}=\{D<0\Rightarrow по\,(18)\}=\int\frac{dx}{(x+1)^2+3^2}=\frac{1}{3}arctg\left(\frac{x+1}{3}\right)+C.$

в) $\int\frac{dx}{x^2+10x+25}=\{D=0\Rightarrow по\,(3в)\}=\int\frac{dx}{(x+5)^2}=-\frac{1}{x+5}+C.$

г) $\int\frac{(7+8x)dx}{\sqrt{5-7x-4x^2}}=\left\{\left(5-7x-4x^2\right)'=-(7+8x)\right\}=-2\sqrt{5-7x-4x^2}+C.$

д)

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1-7x-4x^2}}=\{a=-4<0\Rightarrow по\,(19)\}=\int\frac{dx}{\sqrt{\frac{65}{16}-\left(2x+\frac{7}{4}\right)^2}}=\frac{1}{2}arcsin\left(\frac{8x+7}{\sqrt{65}}\right)+C.$$

е) $\int \frac{(3x+5)dx}{x^2+6x+25} = \left\{ \left(x^2+6x+25\right)' = 2x+6 \neq 3x+5 \right\} = \int \frac{\frac{3}{2}\cdot(2x+6)-4}{x^2+6x+25}dx =$

$$= \frac{3}{2}\int \frac{(2x+6)dx}{x^2+6x+25} - 4\int \frac{dx}{(x+3)^2+4^2} = \frac{3}{2} ln\left|x^2+6x+25\right| - arctg\left(\frac{x+3}{4}\right) + C.$$

ж) $\int \frac{(3x-2)dx}{\sqrt{1-4x+5x^2}} = \left\{ \left(1-4x+5x^2\right)' = 10x-4 \neq 3x-2 \right\} = \int \frac{\frac{3}{10}\cdot(10x-4)-\frac{4}{5}}{\sqrt{1-4x+5x^2}}dx =$

$$= \frac{3}{10}\int \frac{(10x-4)dx}{\sqrt{1-4x+5x^2}} - \frac{4}{5}\int \frac{dx}{\sqrt{1-4x+5x^2}} =$$

$$= \frac{3}{5}\sqrt{1-4x+5x^2} - \frac{4\sqrt{5}}{25} ln\left|5x-2+\sqrt{(5x-2)^2+1}\right| + C.$$

Задание № 4. Найти самостоятельно следующие интегралы:

1\. $\int \frac{dx}{x^2-2x+5}$. 2. $\int \frac{dx}{4x^2+4x+1}$. 3. $\int \frac{dx}{x^2-3x-2}$. 4. $\int \frac{(2x+5)dx}{x^2-6x+5}$.

5\. $\int \frac{(x-1)dx}{x^2+x+3}$. 6. $\int \frac{(4x-9)dx}{3x^2-5x+2}$ 7. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2-x+3}}$. 8. $\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2+3x}}$.

9\. $\int \frac{dx}{\sqrt{3-x-5x^2}}$. 10. $\int \frac{(7x+5)dx}{\sqrt{5-4x-x^2}}$ 11. $\int \frac{(4x+3)dx}{\sqrt{4x^2+x-1}}$ 12. $\int \frac{(5x-4)dx}{\sqrt{1-2x+x^2}}$.

Контрольные вопросы

1\. Что называется первообразной функцией?
2\. Что называется неопределенным интегралом?
3\. Перечислите основные свойства неопределенного интеграла.
4\. Каков геометрический смысл неопределенного интеграла?
5\. Что называется компенсирующим множителем?
6\. Что понимают под непосредственным интегрированием?
7\. В чем состоит метод подстановки в неопределенном интеграле? Записать ее формулу.

8. Записать формулу интегрирования по частям в неопределенном интеграле.
9. Как вычисляются интегралы видов (A), (B), (C), (D)?

1.5 Определенный интеграл

Задача, приводящая к понятию определенного интеграла. Задача о площади криволинейной трапеции

Определение 3. *Криволинейной трапецией* называется плоская фигура, ограниченная кривой $y = f(x)$, слева прямой $x = a$, справа прямой $x = в$ и снизу – осью Оx (рис. 1).

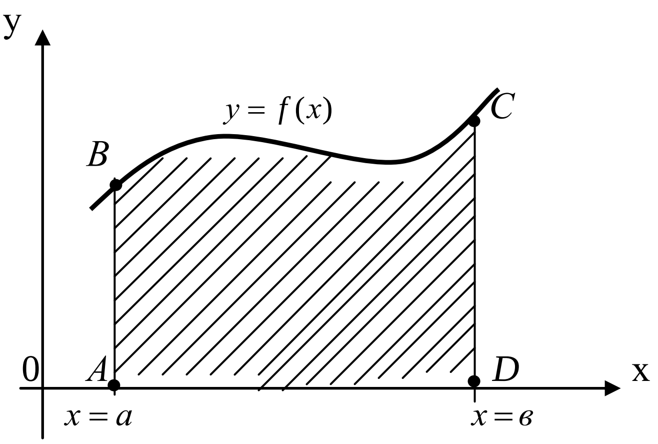


Рис.1 *ABCD* – криволинейная трапеция

Для определенности положим, что функция $y = f(x)$ определена и положительна на отрезке $[a; в]$. Пусть требуется вычислить площадь *S* указанной трапеции. Проделаем следующие операции:

1) Разобьем отрезок $[a; в]$ на n произвольных частей точками $x_0 = a$, $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}, x_n = в$ (рис.2).

2) В точках деления проведем прямые, параллельные оси Оу до пересечения с кривой. В результате трапеция разобьется на *n* частей (полос), каждая из которых – криволинейная трапеция;

3) Найдем длину каждого такого отрезка: $\Delta x_1 = x_1 - x_0$, $\Delta x_2 = x_2 - x_1$, $\Delta x_3 = x_3 - x_2, \ldots, \Delta x_n = x_n - x_{n-1}$.

4) На каждом из элементарных отрезков $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, где $i = \overline{1, n}$, выберем произвольно точку $\tilde{x}_i$ и определим значения функции в этих точках $f(\tilde{x}_i)$.

Если площадь каждой из полос заменить соответственно площадью прямоугольника со сторонами $f(\tilde{x}_i)$ и Δx_i, то сумма площадей всех *n* прямоугольников (ступенчатая фигура) даст приближенное значение площади *S* данной криволинейной трапеции, то есть

$$S_{ступ\,ф} \approx f(\tilde{x}_1)\cdot\Delta x_1 + f(\tilde{x}_2)\cdot\Delta x_2 + f(\tilde{x}_3)\cdot\Delta x_3 + \ldots + f(\tilde{x}_i)\cdot\Delta x_i + \ldots +$$

$$+ f(\tilde{x}_n)\cdot\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(\tilde{x}_i)\cdot\Delta\tilde{x}_i . \qquad (6)$$

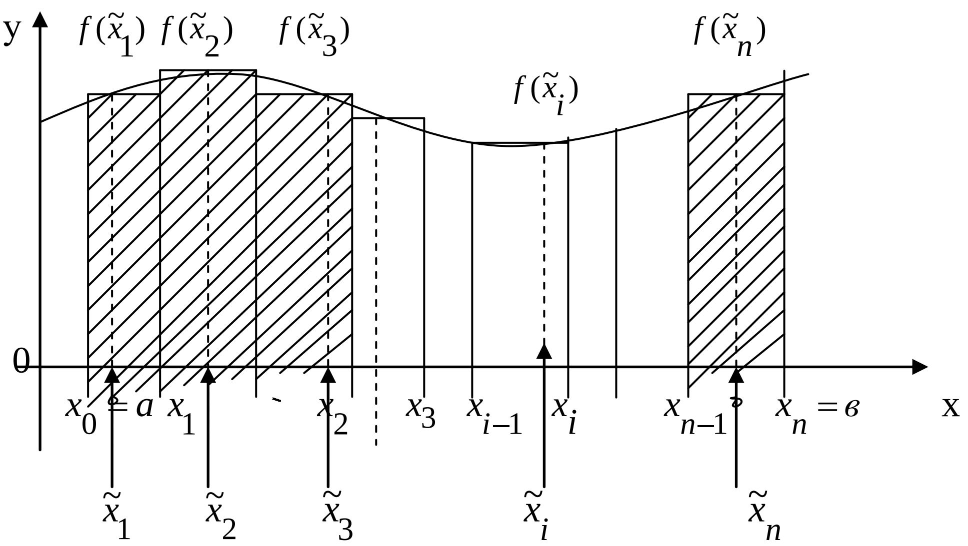


Рис. 2 Построение ступенчатой фигуры

Правая часть выражения (6) $\sum_{i=1}^{n} f\left(\tilde{x}_i\right)\cdot\Delta x_i$ называется *интегральной суммой Римана* для функции $f(x)$, составленной на отрезке $[a; в]$.

Очевидно, чем больше будет число *n*, тем точнее сумма (6) будет выражать площадь *S*. При этом отрезки Δx_i будут уменьшаться.

5) Обозначим через $max\Delta x_i$ наибольшую из длин отрезков Δx_i.

Тогда за величину площади криволинейной трапеции принимают предел, к которому стремится интегральная сумма при условии, что $n \to \infty$ и $max\Delta x_i \to 0$.

Таким образом,

$$S \approx \lim_{max\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f\left(\tilde{x}_i\right)\cdot\Delta x_i . \qquad (7)$$

Интегральная сумма зависит от способа разбиения данного отрезка $[a;в]$ на элементарные отрезки и от выбора точек $\tilde{x}_i$ на каждом из полученных элементарных отрезков. Следовательно, для данной функции на данном отрезке можно составить бесчисленное множество интегральных сумм.

Определение 4. Если существует предел интегральной суммы Римана при $max\Delta x_i \to 0$, не зависящий ни от способа разбиения отрезка на части, ни от выбора точки на частичных отрезках, то этот предел называется *определенным интегралом от функции* $f(x)$ *на отрезке* $[a;в]$ и обозначается: $\int_a^в f(x)dx$.

Таким образом, ***по определению 4*** имеем:

$$\int_a^в f(x)dx = \lim_{max\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\tilde{x}_i)\cdot \Delta x_i, \tag{8}$$

где $\int$ – знак интеграла, символизирующий сумму;
a – нижняя граница интегрирования;
$в$ – верхняя граница интегрирования;
x – переменная интегрирования;
$f(x)$ – подынтегральная функция;
dx – дифференциал переменной интегрирования;
$f(x)dx$ – подынтегральное выражение.

Далее, возвращаясь к задаче о площади криволинейной трапеции и применяя ***определение 4***, заключаем, что

$$S_{фиг} = \int_a^в f(x)dx. \tag{9}$$

В этом и состоит геометрический смысл определенного интеграла.

Определение 5. Функция, для которой на отрезке существует определенный интеграл, называется *интегрируемой* на этом отрезке.

Приведем теоремы, устанавливающие необходимые и достаточные условия интегрируемости функции [3].

Теорема 1. (*необходимое условие интегрируемости функции*) Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a;в]$, то она ограничена на $[a;в]$.

Теорема 2. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;в]$, то она и интегрируема на нем.

Теорема 3. Если функция $f(x)$ монотонна на отрезке $[a;в]$, то она интегрируема на $[a;в]$.

Теорема 4. Если функция ограничена на отрезке $[a;в]$ и непрерывна во всех точках $[a;в]$, кроме конечного числа точек, в которых она имеет разрыв первого рода, то она интегрируема на $[a;в]$.

Теоремы 2-4 устанавливают достаточные условия интегрируемости функции на отрезке $[a;в]$; примем их без доказательства.

1.6 Свойства определенного интеграла

1. При перестановке пределов интегрирования, где $a<в$ определенный интеграл меняет свой знак на противоположный, т.е.

$$\int_a^в f(x)dx = -\int_в^a f(x)dx.$$

2. Если пределы интегрирования равны, то определенный интеграл равен нулю, т.е.

$$\int_a^a f(x)dx = 0.$$

3. Постоянный множитель в определенном интеграле можно выносить за знак интеграла, т.е.

$$\int_a^в k\cdot f(x)dx = k\cdot\int_a^в f(x)dx, \text{ где } k - const.$$

4. Определенный интеграл от алгебраической суммы конечного числа функций равен алгебраической сумме определенных интегралов от слагаемых функций, т.е.

$$\int_a^в [f(x)\pm\varphi(x)]dx = \int_a^в f(x)dx \pm \int_a^в \varphi(x)dx.$$

5. Если для функции существуют интегралы $\int_a^в f(x)dx$, $\int_a^c f(x)dx$ и $\int_c^в f(x)dx$, то имеет место равенство

$$\int_a^в f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^в f(x)dx.$$

Это равенство верно, когда выполняются неравенства $a<c<в$ или $a<в<c$, или $c<a<в$.

6. Если на отрезке $[a;в]$, где $a<в$ функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ удовлетворяют условию $f(x)\le\varphi(x)$, то

$$\int_a^в f(x)dx \le \int_a^в \varphi(x)dx.$$

7. (***Оценка интеграла***). Если m– наименьшее значение, а М – наибольшее значение функции на отрезке $[a;в]$ и $a \le в$, то

$$m(в-a) \le \int_a^в f(x)dx \le M(в-a).$$

8. (***Теорема о среднем***). Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;в]$, то

$$\int_a^в f(x)dx = f(\xi)(в-a), \text{ где } a < \xi < в.$$

9. Если ограниченная функция интегрируема на отрезке $[a;в]$, то абсолютная величина ее также интегрируема на этом отрезке, причем

$$\left|\int_a^в f(x)dx\right| \le \int_a^в |f(x)|dx.$$

С доказательствами свойств определенного интеграла можно ознакомиться, например, в [14].

Контрольные вопросы

1. Что называется интегральной суммой Римана функции $f(x)$ на отрезке $[a;в]$?
2. Сформулируйте определение определенного интеграла.
3. Какая функция называется интегрируемой на отрезке?
4. Сформулируйте необходимое, достаточное условия интегрируемости функции.
5. В чем заключается геометрический смысл определенного интеграла?
6. Сформулируйте свойства определенного интеграла.
7. Назовите задачи, приводящие к понятию определенного интеграла.

1.7 Методы интегрирования в определенном интеграле

1.7.1 Метод непосредственного вычисления определенного интеграла

Метод непосредственного вычисления определенного интеграла заключается в том, что определенный интеграл $\int_a^в f(x)dx$ вычисляется по формуле Ньютона – Лейбница, зная одну из первообразных функции $f(x)$.

Теорема 5. Если функция $y = f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a;в]$ и $F(x)$ ее первообразная также непрерывная на данном отрезке, то

$$\int\limits_a^в f(x)dx = F(x)\Big|_a^в = F(в) - F(a). \qquad (10)$$

Формула (10) называется ***формулой Ньютона – Лейбница (или основной формулой интегрального исчисления)***.

Пример 6. Вычислить определенный интеграл $\int\limits_0^1 x^2 dx$.

Решение. Так как функция и ее первообразная непрерывны на отрезке $[0;1]$, то по формуле Ньютона – Лейбница: $\int\limits_0^1 x^2 dx = \dfrac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \dfrac{1}{3}$.

Пример 7. Вычислить интеграл $\int\limits_0^1 \dfrac{dx}{x^2+2x-8}$.

Решение. При вычислении определенных интегралов вида:

а) $\int\limits_a^в \dfrac{dx}{ax^2+вx+c}$; б) $\int\limits_a^в \dfrac{dx}{\sqrt{ax^2+вx+c}}$; в) $\int\limits_a^в \dfrac{(mx+n)dx}{ax^2+вx+c}$; г) $\int\limits_a^в \dfrac{(mx+n)dx}{\sqrt{ax^2+вx+c}}$

применяют соответствующие правила, указанные в п. 1.4.

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^2+2x-8} = \int\limits_0^1 \frac{dx}{(x^2+2x+1)-1-8} = \int\limits_0^1 \frac{dx}{(x+1)^2-3^2} = \frac{1}{6} ln\left|\frac{x+1-3}{x+1+3}\right|\Bigg|_0^1 =$$

$$= \frac{1}{6}\left(ln\left|-\frac{1}{5}\right| - ln\left|-\frac{1}{2}\right|\right) = \frac{1}{6}\left(ln\frac{1}{5} - ln\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{6} ln\frac{2}{5}.$$

Задание № 5. Вычислить самостоятельно следующие интегралы:

1. $\int\limits_{-1}^2 \left(2x^2+4x-3\right)dx$;

(Ответ: 3)

2. $\int\limits_1^{64} \dfrac{7\sqrt[3]{x}-11x+5}{6\cdot\sqrt[6]{x}}dx$;

(Ответ: -1889)

3. $\int\limits_{-2}^1 e^{2x-5}dx$;

(Ответ: $\dfrac{1}{2e^3}\left(1-\dfrac{1}{e^6}\right)$)

4. $\int\limits_{-2}^{1} 5^{-\frac{4}{5}x+2}dx$;

(Ответ: $\dfrac{-5^{11/5}1}{4ln5}\left(1-5^{12/5}\right)$)

5. $\int\limits_{0}^{2}\dfrac{dx}{4x+1}$;

(Ответ: $\dfrac{ln9}{4}$)

6. $\int\limits_{4}^{8}\dfrac{dx}{\sqrt[3]{2x+1}}+\int\limits_{0}^{1}\dfrac{dx}{\sqrt{2x+1}}$;

(Ответ: $\dfrac{3}{4}\left(17^{2/3}-9^{2/3}\right)$)

7. $\int\limits_{\pi/3}^{\pi/2} sin(3x-\pi)dx$;

(Ответ: $\dfrac{1}{3}$)

8. $\int\limits_{0}^{\pi/4}\dfrac{dx}{cos^2\left(\dfrac{\pi}{4}-2x\right)}$;

(Ответ: 1)

9. $\int\limits_{0}^{2}\dfrac{dx}{4+16x^2}$;

(Ответ: $\dfrac{1}{8}arctg4$)

10. $\int\limits_{0}^{1}\dfrac{dx}{\sqrt{3+2x-x^2}}$;

(Ответ: $\dfrac{\pi}{6}$)

11. $\int\limits_{-2}^{-1}\dfrac{dx}{x^2+4x+5}$;

(Ответ: $\dfrac{\pi}{4}$)

12. $\int\limits_{4}^{6}\dfrac{(3x-5)dx}{x^2+6x-5}$;

(Ответ: $\dfrac{3}{2}ln\dfrac{67}{35}+$ $+\dfrac{\sqrt{14}}{2}ln\left|\dfrac{49-2\sqrt{14}}{49+2\sqrt{14}}\right|$)

1.7.2 Метод подстановки (или замены переменной) в определенном интеграле

Здесь, также как в методе подстановки в неопределенном интеграле, если в данном интеграле $\int\limits_{a}^{в} f(x)dx$ первообразную $F(x)$ функции $f(x)$ определить по таблице интегралов невозможно, то следует ввести новую переменную. В результате данный интеграл сведется к табличному.

Теорема 6. Если функция $x=\varphi(t)$ удовлетворяет следующим условиям:

1) $x=\varphi(t)$ – непрерывная и однозначная функция, заданная на отрезке $|\alpha;\beta|$ и имеющая в нем непрерывную производную $\varphi'(t)$;

2) значения функции $x=\varphi(t)$при измененном t на отрезке $|\alpha;\beta|$ не выходят за пределы отрезка $[a;в]$;

3) $\varphi(\alpha)=a$; $\varphi(\beta)=в$, то для любой непрерывной на отрезке $[a;в]$ функции $f(x)$ справедлива ***формула замены переменной (***или ***подстановки)*** в определенном интеграле:

$$\int\limits_{a}^{в} f(x)dx=\int\limits_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t)dt. \qquad (11)$$

Замечание 1. При вычислении определенных интегралов методом подстановки можно не возвращаться к первоначальной переменной x, как это требовалось при вычислении неопределенных интегралов, нужно только пересчитать новые границы интегрирования α и β.

Замечание 2. Часто вместо подстановки $x=\varphi(t)$ применяют обратную подстановку $t=\psi(x)$. В этом случае пределы для новой переменной t α и β определяются непосредственно по формулам $\alpha=\psi(a)$ и $\beta=\psi(в)$.

Пример 8. Вычислить интеграл $\int\limits_3^8 \frac{xdx}{\sqrt{1+x}}$.

Решение. Применим подстановку $\sqrt{1+x}=t$, отсюда $1+x=t^2$ и $x=t^2-1$; $dx=2tdt$. Определим границы интегрирования: при $x=3$ $\alpha=\sqrt{1+3}=2$ (нижняя граница), при $x=8$ $\beta=\sqrt{1+8}=3$ (верхняя граница). Функция $x=t^2-1$ удовлетворяет всем условиям ***теоремы 6***.

Следовательно, применяя формулу (11), получим:

$$\int\limits_3^8 \frac{xdx}{\sqrt{1+x}}=\int\limits_2^3 \frac{(t^2-1)\cdot 2tdt}{t}=2\int\limits_2^3 (t^2-1)dt=2\left(\frac{t^3}{3}-t\right)\Bigg|_2^3=10\frac{2}{3}.$$

Пример 9. Вычислить интеграл $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{cosx\,dx}{\sqrt{sin^3x}}$.

Решение. Применим ***правило 2*** метода подстановки, обозначив $sinx=t$; тогда $cosx\,dx=dt$. Найдем новые границы интегрирования:

x	t
$\pi/6$	0,5
$\pi/2$	1

Тогда

$$\int\limits_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{cosx\,dx}{\sqrt{sin^3x}}=\int\limits_{0,5}^{1} \frac{dt}{\sqrt{t^3}}=\int\limits_{0,5}^{1} t^{-3/2}dt=-\frac{2}{\sqrt{t}}\Bigg|_{0,5}^{1}=2\sqrt{2}-2.$$

Пример 10. Вычислить интеграл $\int\limits_1^2 \frac{ln^4(3x-1)\,dx}{3x-1}$.

Решение. Применим ***правило 3*** метода подстановки, не находя новые границы интегрирования.

$$\int_1^2 \frac{ln^4(3x-1)\,dx}{3x-1} = \left\{ \begin{aligned} &ln(3x-1)=t \\ &\frac{dx}{3x-1}=\frac{dt}{3} \end{aligned} \right\} = \frac{1}{3}\cdot\int_1^2 t^4 dt = \frac{ln^5 5 - ln^5 2}{15}.$$

Задание № 6. Вычислить самостоятельно следующие интегралы:

1. $\int_0^{1/2} \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$;

(Ответ: $\frac{2-\sqrt{3}}{2}$)

2. $\int_3^5 e^{2x^2-5x+3}\cdot(4x-5)dx$;

(Ответ: $e^6\left(e^{22}-1\right)$)

3. $\int_0^4 x\cdot\sqrt{9+x^2}dx$;

(Ответ: $32\frac{2}{3}$)

4. $\int_0^{\pi} 5^{sin(2x-\pi)}\cdot cos(2x-\pi)dx$;

(Ответ: 0)

5. $\int_2^5 \frac{dx}{(3x-2)\cdot ln^2(3x-2)}$;

(Ответ: $\frac{1}{3}\left(\frac{1}{ln4}-\frac{1}{ln13}\right)$)

6. $\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{5-lnx}}$;

(Ответ: $2\sqrt{5}-4$)

7. $\int_0^1 \frac{x^2\cdot dx}{\sqrt{1+4x^3}}$;

(Ответ: $\frac{\sqrt{5}-1}{6}$)

8. $\int_{\pi/6}^{\pi/2} sinx\cdot cos^3 x dx$;

(Ответ: 9/64)

9. $\int_0^{\ln 5} \frac{e^x\cdot\sqrt{e^x-1}}{e^x+3}dx$;

(Ответ: $4-\pi$)

10. $\int_3^{29} \frac{\sqrt[3]{(x-2)^2}}{\sqrt[3]{(x-2)^2}+3}dx$;

(Ответ: $8+\frac{3\sqrt{3}\pi}{2}$)

11. $\int_0^{\sqrt{\pi}/2} \frac{xdx}{cos^2 x^2}$;

(Ответ: 1/2)

12. $\int_0^{1/5} \frac{arctg^3 5x dx}{1+25x^2}$;

(Ответ: $\pi^4/5120$)

1.7.3 Метод интегрирования по частям в определенном интеграле

Если $u=u(x)$ и $v=v(x)$ непрерывные функции на отрезке $[a;в]$, имеющие непрерывные производные на этом отрезке, то имеет место ***формула интегрирования по частям*** в определенном интеграле:

$$\int_a^в f(x)dx = \int_a^в u\cdot dv = u\cdot v\Big|_a^в - \int_a^в vdu. \qquad (12)$$

Здесь, также как и в методе интегрирования по частям в неопределенном интеграле, в заданном интеграле $\int_a^в u \cdot dv$ множитель, включающий dv, должен быть легко интегрируемым.

Формулой (12) пользуются тогда, когда подынтегральная функция $f(x)$ представляет собой произведение:

I тип: $f(x) = P_n(x) \cdot \lfloor sinx, cosx, tgx, ctgx,\ e^x,\ a^x \rfloor$, где $P_n(x)$ – многочлен n – ой степени, тогда $P_n(x) = u$; все остальное обозначают за dv.

II тип: $f(x) = P_n(x) \cdot \lfloor arcsinx, arccosx, arctgx, arcctgx,\ lnx, log_a x \rfloor$, тогда $P_n(x)dx = dv$; все остальное обозначают за u.

III тип: В интегралах $\int_a^в e^x \cdot sinx\, dx$, $\int_a^в e^x \cdot cosx\, dx$ и т.п. за u обозначают любую из этих функций, например, $e^x = u$. Далее, дважды интегрируя по частям, приходят к исходному интегралу и, из полученного равенства, как из уравнения, выражают исходный интеграл.

Пример 11. Вычислить интеграл $\int_0^{\pi/2} x \cdot sinx\, dx$.

Решение. Данный интеграл является интегралом ***I типа***, где $x = P_1(x)$ – многочлен 1- ой степени. Поэтому по формуле (12) получим:

$$\int_0^{\pi/2} x \cdot sinx\, dx = \left\{\begin{matrix} x = u; & dx = du \\ sinxdx = dv; & -cosx = v \end{matrix}\right\} =$$

$$= \left(-x \cdot cosx \right)\Big|_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} cosxdx = sinx \Big)\Big|_0^{\pi/2} = 1.$$

Пример 12. Вычислить интеграл $\int_0^1 arcsinx\, dx$.

Решение. Данный интеграл является интегралом ***II типа***. Поэтому

$$\int_0^1 arcsinx\, dx = \left\{\begin{matrix} arcsinx = u; & \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = du \\ dx = dv; & x = v \end{matrix}\right\} =$$

$$=\left(x\cdot arcsinx \right)\Big|_0^1-\int_0^1\frac{x\cdot dx}{\sqrt{1-x^2}}=arcsin1-0+\sqrt{1-x^2}\Big|_0^1=\frac{\pi}{2}-1.$$

Задание № 7. Вычислить самостоятельно следующие интегралы:

1. $\int_0^1 x\cdot e^{-x}dx$; (Ответ: $1-2/e$)

2. $\int_0^{1/4} arccos2x\,dx$; (Ответ: $\frac{\pi}{12}-\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-1\right)$

3. $\int_0^{2\pi} x\cdot cosxdx$; (Ответ: 0)

4. $\int_0^1 x\cdot ln\left(x^2+1\right)dx$; (Ответ: $ln2-0,5$)

5. $\int_1^2 x\cdot lnx\,dx$; (Ответ: $ln4-0,75$)

6. $\int_1^2 ln(3x-2)\,dx$; (Ответ: $\frac{2}{3}ln16-1$)

7. $\int_1^4 arctg\sqrt{x}\,dx$; (Ответ: $5arctg2-\pi/2-1$)

8. $\int_0^{\pi} e^x\cdot sinx\,dx$; (Ответ: $(1+e^{\pi})/2$)

9. $\int_{-1}^0 e^{-2x}\cdot(2x+3)\,dx$; (Ответ: e^2-2)

10. $\int_0^{\pi/2} x^2\cdot cos2xdx$. (Ответ: $-\pi/4$)

11. $\int_0^1 (5x+1)\cdot ln(5x+1)\,dx$ (Ответ: $3,6ln6-1,75$)

12. $\int_0^{\pi} x\cdot cos\frac{x}{2}dx$ (Ответ: $2\pi-4$)

1.8 Интегрирование четных и нечетных функций на отрезке, симметричном относительно начала координат

1. Если функция $f(x)$ четная на отрезке $[-a;a]$, то

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx=2\int_0^a f(x)dx. \qquad (13)$$

2. Если функция $f(x)$ нечетная на отрезке $[-a;a]$, то

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx=0. \qquad (14)$$

Формулы (13) и (14) доказываются на основании геометрического смысла определенного интеграла.

Напомним свойства операций сложения и умножения четных и нечетных функций.

1. Сумма четных функций есть функция четная.
2. Сумма нечетных функций есть функция нечетная.
3. Произведение четной и нечетной функций есть функция нечетная.
4. Произведение четных функций есть функция четная.
5. Произведение четного числа нечетных функций есть функция четная.
6. Произведение нечетного числа нечетных функций есть функция нечетная.

Контрольные вопросы

1. Записать формулу Ньютона – Лейбница. При каких условиях она применима?
2. В чем состоит метод непосредственного интегрирования в определенном интеграле?
3. В чем состоит метод подстановки в определенном интеграле?
4. Найдя новые границы интегрирования, следует ли переходить к первоначальной переменной интегрирования?
5. Сформулировать условия, при которых применима формула метода подстановки в определенном интеграле.
6. Записать формулу интегрирования по частям в определенном интеграле. В каком случае применима эта формула?
7. Чему равен интеграл от четной функции, заданной на отрезке $[-a;a]$.
8. Чему равен интеграл от нечетной функции, заданной на отрезке $[-a;a]$.
9. Чему равен интеграл: а) $\int_{-4}^{4} x^3dx$; б) $\int_{-\pi}^{\pi} x^4 sinxdx$; в) $\int_{-\pi}^{\pi} x^2 cosxdx$.

Пример 13. Вычислить интеграл $\int_{-1}^{1}(sinx+5x^4+3x\cdot e^{x^2})dx$.

Решение. Данный интеграл представим в виде суммы 3-х интегралов. Далее, учитывая, что подынтегральные функции $sinx$ и $3x\cdot e^{x^2}$ – нечетные, а функция $5x^4$ – четная, по формулам (13) и (14) получим:

$$\int_{-1}^{1}(sinx+5x^4+3x\cdot e^{x^2})dx=\int_{-1}^{1}sinxdx+\int_{-1}^{1}5x^4dx+\int_{-1}^{1}3x\cdot e^{x^2}dx=2x^5\Big|_0^1=2.$$

Пример 14. Вычислить интеграл $\int_{-\pi}^{\pi}(sin^3x-x\cdot cosx+3)dx$.

Решение. Аналогично, представим данный интеграл в виде суммы 3-х интегралов. Далее, учитывая, что подынтегральные функции sin^3x и $x\cdot cosx$ – нечетные, а функция 3 – четная, по формулам (13) и (14) получим:

$$\int_{-\pi}^{\pi}(sin^3x - x\cdot cosx + 3)dx = \int_{-\pi}^{\pi} sin^3x dx - \int_{-\pi}^{\pi} x\cdot cosx dx + \int_{-\pi}^{\pi} 3dx = 6x\Big|_0^{\pi} = 6\pi .$$

1.9 Приложения определенного интеграла: вычисление площадей плоских фигур

Геометрически определенный интеграл представляет собой площадь криволинейной трапеции.

1. Если функция $y = f(x) \geq 0$ на отрезке $[a;в]$ (рис.1), то площадь фигуры находится по формуле:

$$S_{фиг} = \int_a^в f(x)dx. \qquad (15)$$

2. Если функция $y = f(x) \leq 0$ на отрезке $[a;в]$ (рис. 3), то площадь фигуры находится по формуле:

$$S_{фиг} = -\int_a^в f(x)dx. \qquad (16)$$

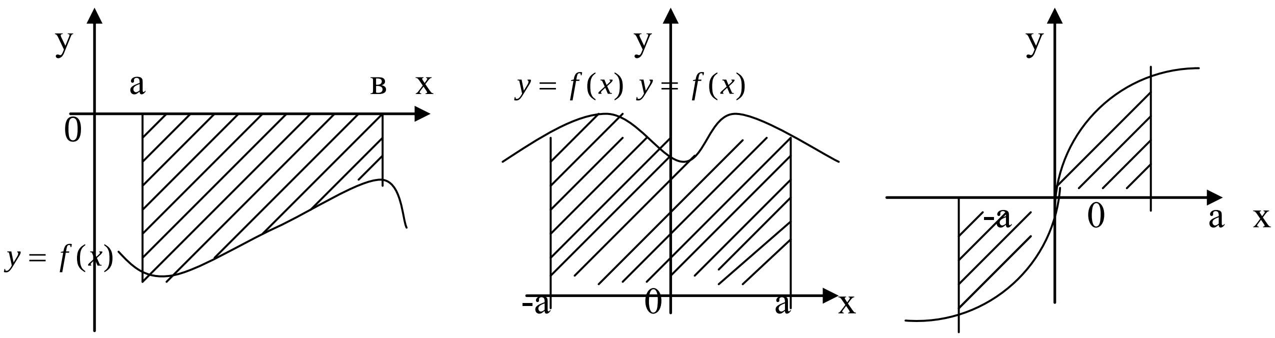


Рис. 3 Плоская фигура расположена под Ох

Рис. 4 Плоская фигура симметрична относительно Оу

Рис. 5 Плоская фигура ограничена нечетной функцией

3. Если функция $y = f(x)$ четная на отрезке $[-a;a]$ (рис. 4), то площадь фигуры, ограниченной данной кривой, прямыми $x = \pm a$, находится по формуле:

$$S_{фиг} = \int_{-a}^{a} |f(x)| dx = 2\int_{0}^{a} |f(x)| dx. \qquad (17)$$

Если функция $y = f(x)$ нечетная на $[-a;a]$ (рис. 5), то $S_{фиг}$ будет также вычисляться по формуле (17).

4. Если фигура ограничена двумя кривыми $y = f(x)$, $y = \varphi(x)$ и прямыми $x = a$, $x = в$, причем $f(x) \geq \varphi(x)$ на отрезке $[a;в]$ (рис. 6), то ее площадь вычисляется по формуле:

$$S_{фиг} = \int_{a}^{в} [f(x) - \varphi(x)] dx. \qquad (18)$$

5. Если левая граница (или правая граница) есть точка пересечения кривых $y = f(x)$ и $y = \varphi(x)$ (рис. 7), то в этом случае, площадь фигуры вычисляется также по формуле (18).

Чтобы найти точку пересечения кривых $y = f(x)$ и $y = \varphi(x)$, нужно решить уравнение: $f(x) = \varphi(x)$, корни которого и определят абсциссы точек пересечения данных кривых.

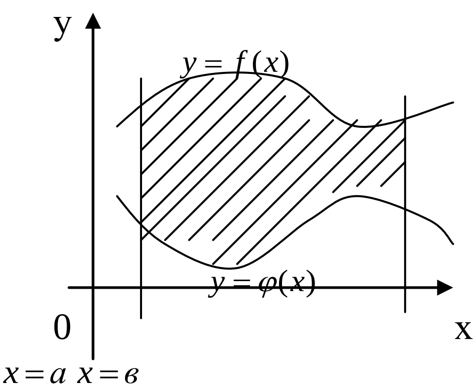


Рис. 6 Плоская фигура ограничена кривыми $y = f(x)$ и $y = \varphi(x)$

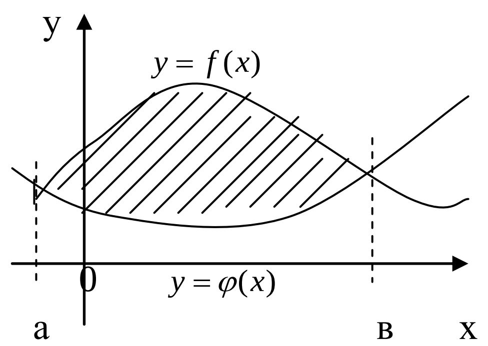
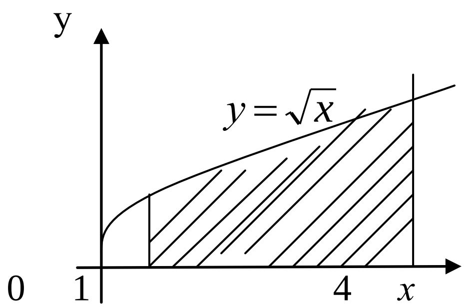


Рис. 7 Плоская фигура ограничена пересекающимися кривыми $y = f(x)$ и $y = \varphi(x)$

Пример 15. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривой $y = \sqrt{x}$, прямыми $x = 1, x = 4$ и осью О*x* (рис. 8).

Решение. Так как $y = \sqrt{x} \geq 0$ на отрезке $[1; 4]$, то по формуле (15):



$$S_{фиг} = \int_1^4 \sqrt{x}dx = \frac{2}{3}x^{3/2}\Big|_1^4 =$$

$$= \frac{2}{3}\left[\left(\sqrt{4}\right)^3 - 1\right] = \frac{2}{3}[8-1] = 4\frac{2}{3}(ед^2.).$$

Рис. 8 Фигура, ограниченная
сверху кривой $y = \sqrt{x}$

Пример 16. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой $y = -0{,}5x^2 + 2x + 6$ и прямой $y = x + 2$ (рис. 9).

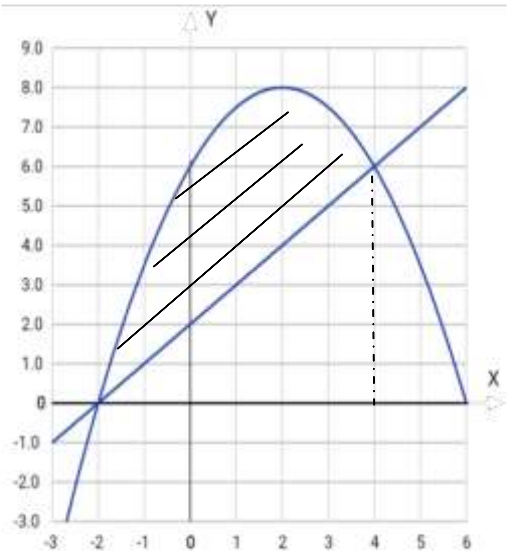


Рис. 9 Фигура, ограниченная
$y = -0{,}5x^2 + 2x + 6$, $y = x + 2$.

Найдем точки пересечения прямой и параболы, решив квадратное уравнение: $-\frac{x^2}{2} + 2x + 6 = x + 2$, корни которого $x = -2$ и $x = 4$. Следовательно, по формуле (7) искомая площадь фигуры будет равна:

$$S_{фиг} = \int_{-2}^{4}\left(x - \frac{x^2}{2} + 6 - 2\right)dx = 18(ед.^2).$$

Пример 17. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривой $y = x^2 + 2$, прямыми $y = 1$, $x = -2$ и $x = 2$ (рис.10).

Решение. Функция $y = x^2 + 2$ четная. Площадь фигуры по формуле (17) будет равна:

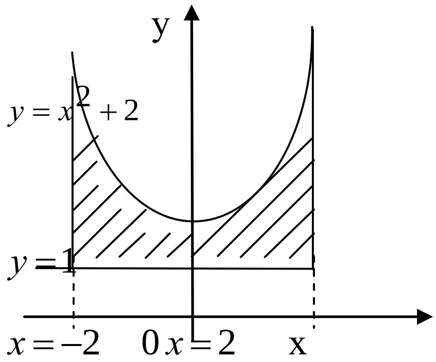


Рис.10 Фигура, ограниченная кривой $y = x^2 + 2$

$$S_{фиг} = \left| \int_{-2}^{2} (x^2 + 2 - 1)dx \right| = 2\int_{0}^{2}(x^2 + 1)dx =$$

$$= 2\left(\frac{x^3}{3} + x\right)\Bigg|_0^2 = 2\left(\frac{8}{3} + 2\right) = 2 \cdot \frac{14}{3} = 9\frac{1}{3}(ед.^2).$$

Пример 18 . Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболами $y = 2x^2 - 4x + 1$ и $y = -x^2 + 3x + 3$.

Решение. Для того, чтобы изобразить графики данных парабол, найдем у каждой из них вершину по формуле $x_0 = \frac{-в}{2a}$.

Для параболы $y = 2x^2 - 4x + 1$:

$x_0 = \frac{-в}{2a} = \frac{4}{4} = 1$. Тогда

$y_0 = f(x_0) = f(1) = 2 - 4 + 1 = -1.$

Найдем еще одну дополнительную точку графика:

$f(0) = 1.$

Для параболы $y = -x^2 + 3x + 3$:

$x_0 = \frac{-3}{-2} = 1{,}5$. Тогда

$y_0 = f(1{,}5) = -2{,}25 + 4{,}5 + 3 = 5{,}25.$

Найдем еще одну дополнительную точку графика:

$f(0) = 3.$

Далее найдем точки пересечения кривых, решив уравнение:

$$2x^2 - 4x + 1 = -x^2 + 3x + 3$$
$$3x^2 - 7x - 2 = 0$$
$$D = 49 - 4 \cdot 3 \cdot (-2) = 49 + 24 = 73$$
$$x_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{73}}{6} \approx -0{,}25;\ 2{,}6.$$

Теперь строим данные параболы в одной системе координат. Вычислим площадь фигуры (рис. 11) по формуле (18).

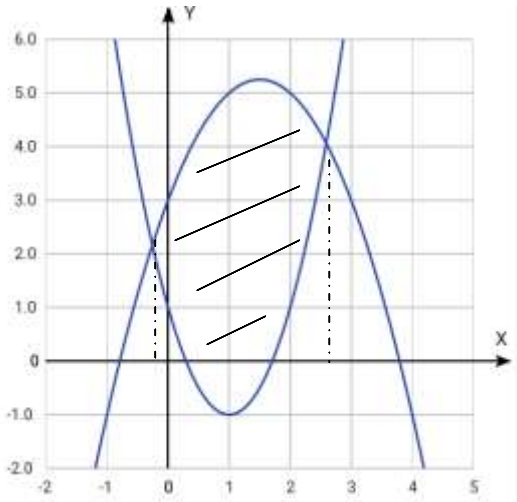


Рис. 11 Графики функций
$y=2x^2-4x+1$ и $y=-x^2+3x+3$

$$S_{фиг}=\int_{-0,25}^{2,6}\left(-3x^2+7x+2\right)dx=$$

$$=\left(-x^3+\frac{7x^2}{2}+2x\right)\Bigg|_{-0,25}^{2,6}=$$

$$=-2,6^3+3,5\cdot 2,6^2+5,2-$$

$$-\left(-(-0,25)^3+3,5\cdot 0,25^2-0,5\right)\approx$$

$$\approx 11,5(ед^2).$$

Задание № 8. Вычислить площадь фигуры, ограниченной указанными кривыми:

1. $y=4-x^2,\ y=x^2+2.$

(Ответ: $2\frac{2}{3}$)

2. $3y=x^2,\ y=4-\frac{2x^2}{3}.$

(Ответ: $10\frac{2}{3}$)

3. $y^2=4x,\ x^2=4y.$

(Ответ: $5\frac{1}{3}$)

4. $y=x^2-4x+3,\ x=0,\ y=0.$

(Ответ: $2\frac{2}{3}$)

Раздел II. НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

2.1 Несобственные интегралы с бесконечными пределами интегрирования от непрерывных функций

В п.1.5 понятие определенного интеграла $\int_a^в f(x)dx$ было дано для случая, когда границы интегрирования a и $в$ –const, а подынтегральная функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;в]$. В этом разделе обобщим понятие определенного интеграла.

Определение 6. Определенный интеграл от непрерывной функции с бесконечным промежутком интегрирования называется ***несобственным интегралом I рода***.

Пусть функция $y = f(x)$ определена для всех $x \geq a$ и интегрируема на любом отрезке $[a; B]$. Тогда несобственный интеграл I рода $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ от функции $y = f(x)$ в пределах от a до $+\infty$ (рис. 12) будет определяться равенством:

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{B \to +\infty} \int\limits_a^{B} f(x)dx = \begin{cases} \partial = const, \, сходится \\ \pm\infty \, или \, не \, сущ.-ет, \, расходится. \end{cases} \tag{19}$$

Аналогично определяются интегралы $\int\limits_{-\infty}^{в} f(x)dx$ (рис.13), $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ (рис.14).

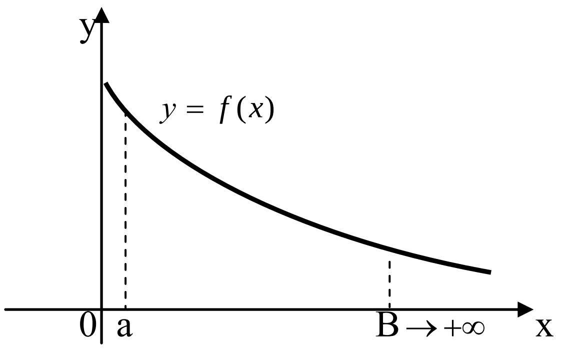


Рис. 12 График функции, заданной на бесконечном правом конце

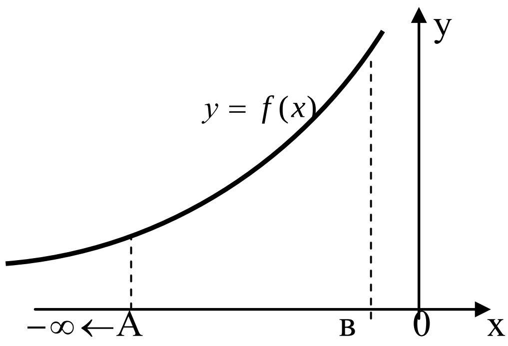


Рис. 13 График функции, заданной на бесконечном левом конце

$$\int\limits_{-\infty}^{в} f(x)dx = \lim_{A \to -\infty} \int\limits_{A}^{в} f(x)dx = \begin{cases} \partial = const, \, сходится \\ \pm\infty \, или \, не \, сущ.-ет, \, расходится. \end{cases} \tag{20}$$

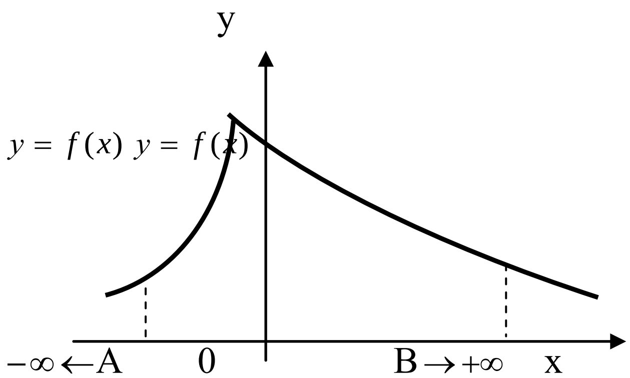


Рис. 14График функции, заданной на бесконечном промежутке

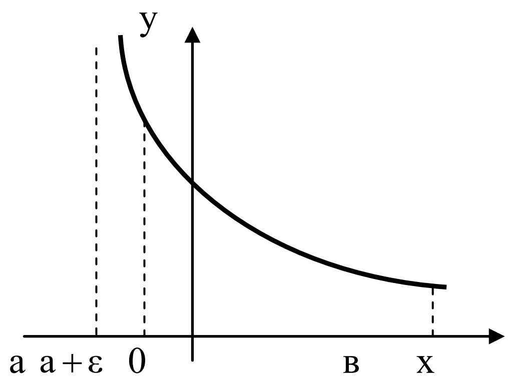


Рис.15 График функции, разрывной в точке $x = a$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int\limits_{c}^{+\infty} f(x)dx =$$

$$= \lim_{A\to-\infty}\int_A^c f(x)dx + \lim_{B\to+\infty}\int_c^B f(x)dx, \qquad (21)$$

$-\infty < c < +\infty$. Интеграл (20) сходится, если оба предела существуют. (Вместо c можно взять любое конечное значение оси Ox).

Контрольные вопросы

1. Дать определение несобственного интеграла I рода.
2. Записать формулу вычисления несобственного интеграла I рода с левым бесконечным пределом интегрирования. Приведите примеры.
3. Записать формулу вычисления несобственного интеграла I рода с правым бесконечным пределом интегрирования. Приведите примеры.
4. Записать формулу вычисления несобственного интеграла I рода, у которого оба предела интегрирования бесконечны. Приведите примеры.
5. Указать геометрический смысл несобственного интеграла I рода.
6. Может ли при вращении бесконечно протяженной кривой вокруг какой – либо прямой образоваться тело конечного объема? Рассмотрите пример

кривой $y = e^{-x}$ $(0 \le x < +\infty)$, вращающееся вокруг оси Ox.

Пример 19. Вычислить несобственные интегралы (или установить их сходимость):

1) $\int_0^{+\infty} cosxdx$; 2) $\int_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{x^2}$; 3) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2}$; 4) $\int_0^{+\infty} x\cdot sinxdx$; 5) $\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{(2-x)ln^2(2-x)}$.

Решение. 1) По формуле (19) получим:

$$\int_0^{+\infty} cosxdx = \lim_{B\to+\infty}\int_0^B cosxdx = \lim_{B\to+\infty} sinx\Big|_0^B = \lim_{B\to+\infty}(sinB - sin0) = \lim_{B\to+\infty} sinB$$

Предел не существует. Следовательно, данный интеграл расходится.

2) $$\int_{-\infty}^{-1}\frac{dx}{x^2} = \lim_{A\to-\infty}\int_A^{-1}\frac{dx}{x^2} = \lim_{A\to-\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_A^{-1} = \lim_{A\to-\infty}\left(1+\frac{1}{A}\right) = 1 + \frac{1}{-\infty} = 1 - 0 = 1.$$

Следовательно, интеграл сходится.

3) Воспользовавшись формулой (21) и выбирая $c = 0$, т.к. в этой точке подынтегральная функция $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 2x + 2}$ непрерывна, получим:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2} = \int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{x^2+2x+2} + \int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2} = \lim_{A\to-\infty} \int_{A}^{0} \frac{dx}{(x+1)^2+1} +$$

$$+ \lim_{B\to+\infty} \int_{0}^{B} \frac{dx}{(x+1)^2+1} = \lim_{A\to-\infty} \left[arctg(x+1)\right]_{A}^{0} + \lim_{B\to+\infty} \left[arctg(x+1)\right]_{0}^{B} =$$

$$= \lim_{A\to-\infty} \left[arctg1 - arctg(A+1)\right] + \lim_{B\to+\infty} \left[arctg(B+1) - arctg1\right] = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi .$$

Данный несобственный интеграл сходится.

4) По формуле (19) имеем:

$$\int_{0}^{+\infty} x \cdot sinxdx = \lim_{B\to+\infty} \int_{0}^{B} x \cdot sinxdx.$$

Применим правило интегрирования по частям, полагая: $\begin{Bmatrix} x = u; & dx = du \\ sinxdx = dv; & cosx = v \end{Bmatrix}$,

будем иметь:

$$\int_{0}^{+\infty} x \cdot sinxdx = \lim_{B\to+\infty} \int_{0}^{B} x \cdot sinxdx = \lim_{B\to+\infty} \left(-x\ cosx\Big|_{0}^{B} + \int_{0}^{B} cosxdx\right) =$$

$$= \lim_{B\to+\infty} \left(-BcosB + sinB\right) = -\lim_{B\to+\infty} BcosB + \lim_{B\to+\infty} sinB .$$

Пределы не существуют, следовательно, интеграл расходится.

5) Прежде вычислим неопределенный интеграл от подынтегральной функции при помощи метода подстановки.

$$\int \frac{dx}{(2-x)ln^2(2-x)} = \begin{Bmatrix} ln(2-x) = t \\ \dfrac{dx}{2-x} = -dt \end{Bmatrix} = -\int \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{t} + C .$$

Подставим в формулу (20), тогда искомый интеграл будет равен:

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{(2-x)ln^2(2-x)} = \lim_{A\to-\infty} \int_{A}^{0} \frac{dx}{(2-x)ln^2(2-x)} = \lim_{A\to-\infty} \frac{1}{ln(2-x)}\Bigg|_{A}^{0} =$$

$$= \lim_{A\to-\infty}\left(\frac{1}{ln2} - \frac{1}{ln(2-A)}\right) = \frac{1}{ln2} - \frac{1}{ln\infty} = \frac{1}{ln2} - 0 = \frac{1}{ln2}.$$

Следовательно, интеграл сходится.

Задание № 9. Вычислить самостоятельно несобственные интегралы I рода (или установить их сходимость).

1) $\int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+4}$;

(Ответ: $\pi/4$ (сход.)

2) $\int_{-\infty}^{1} \frac{(x+3)dx}{\sqrt{2-x}}$;

(Ответ: расход.)

3) $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x}dx$;

(Ответ: расход.)

4) $\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$;

(Ответ: расход.)

5) $\int_{-\infty}^{2} \frac{xdx}{\sqrt[3]{x^2+4}}$;

(Ответ: расход.)

6) $\int_{1}^{+\infty} \frac{\sqrt{x}dx}{(1+x)^2}$;

(Ответ: $\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}$ (сход.))

7) $\int_{1}^{+\infty} \frac{arctgxdx}{x^2}$;

(Ответ: $\pi/4 + ln\sqrt{2}$ (сход.)

8) $\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x(1+x)}$;

(Ответ: $ln2$ (сход.))

9) $\int_{0}^{+\infty} x^2 \cdot e^{-x^3}dx$;

(Ответ: 1/3 (сход.))

10) $\int_{2}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{(x-1)^3}}$;

(Ответ: 2 (сход.))

11) $\int_{-\infty}^{+\infty} e^x \cdot sinxdx$;

(Ответ: расход.)

12) $\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^2(1+x^2)}$.

(Ответ: $1-\frac{\pi}{4}$ (сход.))

2.2 Несобственные интегралы от неограниченных функций

Определение 7. Определенный интеграл с конечным промежутком интегрирования от функции, имеющей бесконечный разрыв в промежутке интегрирования, называется ***несобственным интегралом II рода.***

Пусть дан интеграл $\int_a^в f(x)dx$. Если подынтегральная функция $y = f(x)$ непрерывна при $a < x \le в$ и имеет бесконечный разрыв в точке $x = a$ (рис. 14), т.е. $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$, то по определению:

$$\int_a^в f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to +0} \int_{a+\varepsilon}^в f(x)dx = \begin{cases} \partial = const, \, сходится \\ \pm\infty \, или \, не \, сущ.-ет, \, расходится. \end{cases} \tag{22}$$

где $\varepsilon > 0$.

Аналогично определяется интеграл от функции, имеющей бесконечный разрыв в точке $x = в$ (рис.15) ($\varepsilon > 0$).

$$\int_a^в f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to +0} \int_a^{в-\varepsilon} f(x)dx = \begin{cases} \partial = const, \, сходится \\ \pm\infty \, или \, не \, сущ.-ет, \, расходится. \end{cases} \tag{23}$$

Если функция $y = f(x)$ непрерывна при $a \le x < c$ и $c < x \le в$ и имеет бесконечный разрыв в точке $x = c$ (рис.16), то

Интеграл (23) сходится, если оба предела указанных в формуле существуют, и расходится, если хотя бы один из пределов не существует.

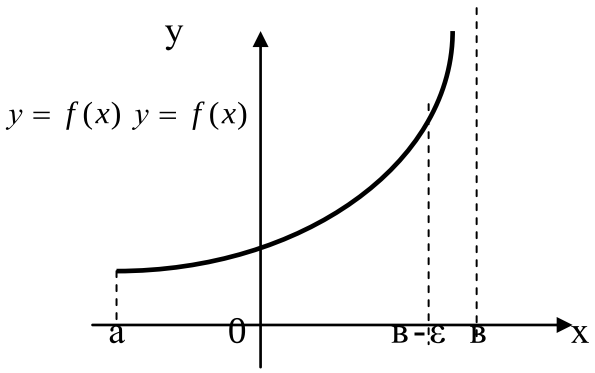


Рис. 16 График функции, разрывной в точке $x = в$

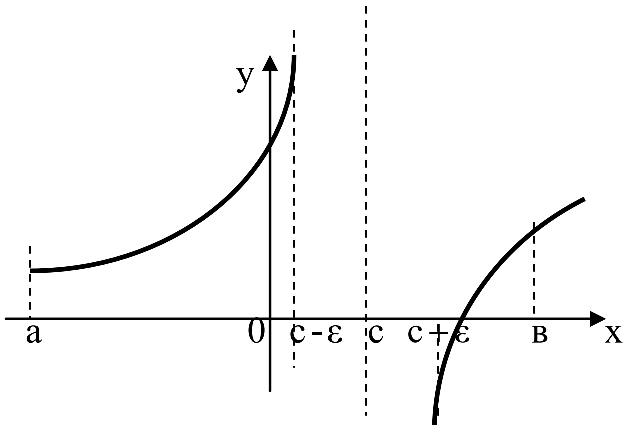


Рис. 17 График функции, разрывной во внутренней точке $(a;в)$

$$\int\limits_a^в f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^в f(x)dx =$$

$$= \lim_{\varepsilon_1 \to +0} \int\limits_a^{c-\varepsilon_1} f(x)dx + \lim_{\varepsilon_2 \to +0} \int\limits_{c+\varepsilon_2}^в f(x)dx, \quad (\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0) \tag{24}$$

Контрольные вопросы

1. Дать определение несобственного интеграла II рода.

2. Сформулировать понятие несобственного интеграла от функции, разрывной на левом конце промежутка (а; в]- в точке $x = a$. Приведите примеры.

3. Сформулировать понятие несобственного интеграла от функции, разрывной на правом конце промежутка [а; в) – в точке $x = в$. Приведите примеры.

4. Сформулировать понятие несобственного интеграла от функции, имеющей бесконечный разрыв во внутренней точке $x = c$ интервала (а; в). Приведите примеры.

5. Указать геометрический смысл несобственного интеграла II рода.

6. Какие из приведенных интегралов являются несобственными:

1) $\int\limits_0^{+\infty} x \cdot \sin x dx$; 2) $\int\limits_0^1 \frac{2}{x+1} dx$; 3) $\int\limits_{-4}^5 \frac{x-3}{x^2-16} dx$; 4) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x \cdot \sin x dx$;

5) $\int\limits_{-\infty}^1 \frac{sinx}{x-5} dx$; 6) $\int\limits_{-1}^0 \frac{x-3}{x^3+1} dx$; 7) $\int\limits_{-2}^3 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2+1}}$; 8) $\int\limits_{-1}^3 \frac{dx}{x^2-2x-3}$?

Пример 20. Вычислить несобственные интегралы II рода (или установить их сходимость).

1) $\int\limits_2^5 \frac{dx}{(x-2)^2}$; 2) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$; 3) $\int\limits_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}$; 4) $\int\limits_1^2 \frac{x-2}{\sqrt{x-1}} dx$; 5) $\int\limits_{-1}^2 \frac{dx}{x}$.

Решение. 1) Подынтегральная функция $f(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$ непрерывна во всех точках полуинтервала (2; 5] и терпит разрыв при $x = 2$. Пользуясь формулой (22), получим:

$$\int_2^5 \frac{dx}{(x-2)^2} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{2+\varepsilon}^5 \frac{dx}{(x-2)^2} = \lim_{\varepsilon\to 0}\left[-\frac{1}{x-2}\right]\Bigg|_{2+\varepsilon}^5 = \lim_{\varepsilon\to 0}\left[-\frac{1}{3}+\frac{1}{\varepsilon}\right] = -\frac{1}{3}+\frac{1}{0} = \infty.$$

Следовательно, интеграл расходится.

2) Подынтегральная функция $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ непрерывна при $0 \le x < 1$ и имеет бесконечный разрыв в точке $x = 1$. Поэтому, в силу формулы (23) получим:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon\to 0}(arcsinx)\Big|_0^{1-\varepsilon} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}[arcsin(1-\varepsilon) - arcsin0] = \lim_{\varepsilon\to 0} arcsin(1-\varepsilon) = \frac{\pi}{2}.$$

Следовательно, интеграл сходится.

3) Подынтегральная функция терпит разрыв во внутренней точке отрезка [0; 2] – в $x = 1$. Следовательно, по формуле (24) получим:

$$\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}} + \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}} = \lim_{\varepsilon_1\to 0}\int_0^{1-\varepsilon_1}(x-1)^{-2/3}dx +$$

$$+ \lim_{\varepsilon_2\to 0}\int_{1+\varepsilon_2}^2 (x-1)^{-2/3}dx = \lim_{\varepsilon_1\to 0} 3(x-1)^{-1/3}\Big|_0^{1-\varepsilon_1} + \lim_{\varepsilon_2\to 0} 3(x-1)^{-1/3}\Big|_{1+\varepsilon_2}^2 =$$

$$= 3\cdot \lim_{\varepsilon_1\to 0}\left[(1-\varepsilon_1-1)^{1/3} - (-1)^{1/3}\right] + 3\cdot \lim_{\varepsilon_2\to 0}\left[1-(1+\varepsilon_2-1)^{1/3}\right] = 3+3 = 6.$$

Следовательно, несобственный интеграл сходится.

4) Сначала вычислим неопределенный интеграл от подынтегральной функции.

$$\int \frac{x-2}{\sqrt{x-1}}dx = \begin{cases} \sqrt{x-1}=t \ \Rightarrow \ x-1=t^2 \\ x=1+t^2 \ \Rightarrow \ dx=2tdt \end{cases} = \int \frac{t^2-1}{t}\cdot 2tdt = 2\left(\frac{t^3}{3}-t\right)+C=$$

$$=2\left[\frac{\left(\sqrt{x-1}\right)^3}{3}-\sqrt{x-1}\right]+C\,.$$

Тогда искомый интеграл будет равен:

$$\int_1^2 \frac{x-2}{\sqrt{x-1}}dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{1+\varepsilon}^2 \frac{x-2}{\sqrt{x-1}}dx = 2\cdot\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{(\sqrt{x-3})^3}{3}-\sqrt{x-1}\right)\Bigg|_{1+\varepsilon}^2 = -\frac{2}{3}$$

$\Rightarrow$ несобственный интеграл сходится.

5) Функция $f(x)=\dfrac{1}{x}$ непрерывна во всех точках промежутка $[-1;2]$, кроме точки $x=0$. В силу формулы (24) получим:

$$\int_{-1}^{2}\frac{dx}{x} = \int_{-1}^{0}\frac{dx}{x} + \int_{0}^{2}\frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon_1\to 0}\int_{-1}^{0-\varepsilon_1}\frac{dx}{x} + \lim_{\varepsilon_2\to 0}\int_{0+\varepsilon_2}^{2}\frac{dx}{x} =$$

$$= \lim_{\varepsilon_1\to 0} ln|x|\,\Bigg|_{-1}^{0-\varepsilon_1} + \lim_{\varepsilon_2\to 0} ln|x|\,\Bigg|_{0+\varepsilon_2}^{2} = -\infty$$

Следовательно, данный интеграл расходится.

Задание № 10. Вычислить самостоятельно несобственные интегралы

(или установить их сходимость).

1) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$;

(Ответ: 2 (сход.))

2) $\int_0^2 \frac{dx}{x^3}$;

(Ответ: расход.)

3) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$;

(Ответ: $\frac{\pi}{2}$ (сход.))

4) $\int_2^3 \frac{3x\cdot dx}{\sqrt[4]{x^2-4}}$;

5) $\int_1^2 \frac{x\cdot dx}{\sqrt{x-1}}$;

6) $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$;

(Ответ: $2\sqrt[4]{125}$ (сход.)) (Ответ: $2\frac{2}{3}$ (сход.)) (Ответ: 6(сход.))

7) $\int\limits_2^6 \frac{dx}{\sqrt[3]{(4-x)^2}}$; 8) $\int\limits_0^1 \frac{(x+1)dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}$; 9) $\int\limits_0^2 \frac{dx}{(x-1)^2}$;

(Ответ: $6\sqrt[3]{2}$ (сход.)) (Ответ: $5\frac{1}{4}$ (сход.)) (Ответ: расходится)

10) $\int\limits_0^{3a} \frac{2xdx}{\sqrt[3]{(x^2-a^2)^2}}$; 11) $\int\limits_0^2 \frac{dx}{x^2-4x+3}$; 12) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x-1}}$.

(Ответ: $9\sqrt[3]{a^2}$ (сход.)) (Ответ: расход.) (Ответ: π (сход.))

Раздел III. ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

3.1 Основные понятия и определения

Рассмотрим бесконечную числовую последовательность

$u_1,\ u_2,\ u_3,\ldots,u_n,\ldots$

с общим членом $u_n \in R$, где $n=1,2,3,\ldots$ (или кратко $n=\overline{1,\infty}$).

Соединим знаком «+» члены последовательности, не переставляя их местами. В результате получим выражение

$$u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}u_n\ . \tag{25}$$

Выражение (25) называется ***числовым рядом***, где $u_1,\ u_2,\ u_3,\ldots,u_n,\ldots$ называются членами ряда, а u_n, являющийся функцией от n – общим или n-ым членом числового ряда (25).

В выражении (25) $\sum$ – знак суммы, индексы внизу и вверху указывают, в каких пределах ведется суммирование.

Ряд считается заданным, если указан его общий член u_n, из которого находят любой член данного ряда.

Пример 21. По формуле общего члена $u_n = \dfrac{n}{n+2}$ найти u_1, u_3 и u_{100} члены.

Решение. Чтобы найти u_1, u_3 и u_{100} члены, подставим в u_n вместо n числа 1, 3 и 100 соответственно. Тогда получим: $u_1 = \dfrac{1}{3}$, $u_3 = \dfrac{3}{5}$, $u_{100} = \dfrac{100}{102}$.

Иногда, зная несколько первых членов ряда, можно предположительно найти его общий член.

Пример 22. Зная первые четыре члена ряда

$$\frac{1}{3}+\frac{3}{6}+\frac{5}{9}+\frac{7}{12}+\ldots,$$

найти его общий член u_n.

Решение. Для определения общего члена данного ряда, применим формулу *n*–го члена арифметической прогрессии для числителя и знаменателя поотдельности: $a_n = a_1 + d(n-1)$, где a_1 – первый член; *d* – разность арифметической прогрессии. Итак, для числителя: $a_n = 1 + 2(n-1) = 2n-1$, где $a_1 = 1$, $d = 2$. Для знаменателя: $a_n = 3 + 3(n-1) = 3n$. Следовательно, общий член данного ряда будет иметь вид: $u_n = \dfrac{2n-1}{3n}$.

Отметим, что четные числа можно выражать формулой: $2n$ или $2n+2$, а нечетные: $2n-1$ или $2n+1$.

Введем определение сходящегося ряда. Пусть

$S_1 = u_1$ – I-ая частичная сумма ряда (25);

$S_2 = u_1 + u_2$ – II-ая частичная сумма;

$S_3 = u_1 + u_2 + u_3$ – III-ая частичная сумма;

…………………………….

$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n$ – *n*-ая частичная сумма;

……………………………..

Составим последовательность из частичных сумм

$$S_1,\ S_2,\ S_3, \ldots, S_n, \ldots \tag{26}$$

Определение 8. Если существует конечный предел последовательности частичных сумм (26), т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, то ряд (25) называется ***сходящимся*** (или *сходится*), а *S* – *суммой* ряда (25) .

Если предел S_n при $n \to \infty$ бесконечный или не существует, то ряд (25) называется ***расходящимся*** (или *расходится*) и он суммы не имеет.

В теории числовых рядов особое место занимают ряды с членами геометрической прогрессии. Пусть дан такой ряд:

$$a + aq + aq^2 + aq^3 + \ldots + aq^{n-1} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}, \tag{27}$$

где $a \neq 0$, q – знаменатель геометрической прогрессии.

В зависимости от значения знаменателя q геометрической прогрессии, можно установить сходимость ряда.

$$\sum_{n=1}^{\infty} aq^n : \left[\begin{array}{l} |q| < 1,\ \text{то ряд}\ (27)\ \text{сходится},\ S = \dfrac{u_1}{1-q}; \\ |q| \geq 1,\ \text{то ряд}\ (27)\ \text{расходится},\ S\ \text{нет}. \end{array} \right. \tag{28}$$

К примеру, ряд с членами геометрической прогрессии $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \ldots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{3^{n-1}} + \ldots$, у которого $|q| = \left| -\frac{1}{3} \right| = \frac{1}{3} < 1$, сходится; сумма $S = \dfrac{1}{1 - \left(-\frac{1}{3} \right)} = \dfrac{3}{4}$.

А ряд $\frac{3}{2} - \frac{9}{4} + \frac{27}{8} + \ldots + (-1)^{n-1} \cdot \left(\frac{3}{2} \right)^n + \ldots$ со знаменателем $|q| = \left| -\frac{3}{2} \right| = \frac{3}{2} \geq 1$, расходится.

Теорема 7. (Необходимое условие сходимости ряда) Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится, то предел его общего члена u_n при $n \to \infty$, равен нулю, т.е. $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = 0$.

Замечание 3 .Обратная теорема неверна, т.е. из условия $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = 0$ не всегда следует, что числовой ряд сходится.

Следствие из теоремы 7. (Достаточный признак расходимости ряда) Если предел общего члена ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ при $n \to \infty$ не равен нулю, т.е. $\lim\limits_{n \to \infty} u_n \neq 0$, то ряд расходится.

Например, для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+5}{4n-1}$ выполняется достаточный признак расходимости числового ряда, т.к. $\lim_{n\to\infty} \frac{3n+5}{4n-1} = \frac{3}{4} \neq 0$, следовательно, данный ряд расходится.

Пример 23. Рассмотрим ряд $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, который называется ***гармоническим***. Очевидно, что для него выполнено необходимое условие сходимости, т.к. $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. Доказано, что этот ряд расходится.

Пример 24. Найти сумму ряда: $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$.

Решение. Сумму данного ряда найдем, применяя ***определение 8***. Для чего разложим общий член u_n на простейшие дроби: $u_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{A}{n} - \frac{B}{n+1}$, где $A, B - const$; их следует определить.

$$\frac{A}{n} - \frac{B}{n+1} = \frac{A(n+1) - Bn}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)}.$$

Методом частных значений находим коэффициенты A и B из выражения $A(n+1) - Bn = 1$.

Если $n=-1$, $B=-1$; если $n=1$, $A=1$.

Следовательно, $u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$. Найдем несколько первых членов данного ряда:

$$u_1 = 1-\frac{1}{2};\, u_2 = \frac{1}{2}-\frac{1}{3};\, u_3 = \frac{1}{3}-\frac{1}{4};\ldots$$

Тогда последовательность частичных сумм ряда представится в виде:

$$S_1 = u_1 = 1-\frac{1}{2};\quad S_2 = u_1+u_2 = 1-\frac{1}{3};\quad S_3 = 1-\frac{1}{4};\ \ldots\ ,\ S_n = 1-\frac{1}{n+1};\ \ldots\ .$$

Перейдем к пределу частичной суммы S_n при $n \to \infty$.

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right) = 1.$$

Следовательно, данный ряд сходится и имеет сумму $S = 1$.

3.2 Свойства сходящихся числовых рядов

1. Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится и имеет сумму *S*, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda \cdot u_n$, полученный умножением данного ряда на число λ, также сходится и имеет сумму $\lambda \cdot S$.

2. Если ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ сходятся и имеют суммы соответственно S_1 и S_2, то и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(u_n \pm v_n\right) = \left(u_1 \pm v_1\right) + \left(u_2 \pm v_2\right) + \ldots + \left(u_n \pm v_n\right) + \ldots$ также сходится и имеет сумму $S = S_1 \pm S_2$.

3. Если сходится ряд, то сходится и ряд, полученный из данного путем отбрасывания или приписывания конечного числа его членов.

Отметим, что не всегда сходимость ряда можно установить с помощью определения сходящегося ряда (***определение 8***) в силу сложности вычисления предела *n*-ой частичной суммы S_n данного ряда. Поэтому применяют специальные признаки сходимости.

3.3 Достаточные признаки сходимости положительных числовых рядов

Определение 9. Числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ называется ***положительным***, если $u_n > 0$ для всех $n = \overline{1, \infty}$.

I. Признак сравнения.

Пусть даны два положительных ряда: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ (I) и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ (II).

Ряд (II) называется ***рядом сравнения*** для ряда (I); его сходимость известна либо легко можно установить. Тогда справедлива следующая теорема.

Теорема 8.

а) Если ряд (II) сходится и выполняется неравенство $u_n \le v_n$, начиная с некоторого номера *n*, то ряд (I) также сходится.

б) Если ряд (II) расходится и выполняется неравенство $u_n \ge v_n$, начиная с некоторого*n*, то ряд (I) также расходится.

Пример 25. Применяя признак сравнения, исследовать ряд на сходимость:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(n+1)2^n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{ln(n+1)}{n}$.

Решение. а) <u>1 шаг</u>: за ряд сравнения возьмем гармонический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots$ (II); он расходится.

<u>2 шаг</u>: сравним члены данного ряда (I) с членами ряда сравнения (II):
при $n=1$: $u_1=1=v_1=1$;

при $n=2$: $u_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\approx 0{,}709>v_2=0{,}5$;

при $n=3$: $u_3=\frac{1}{\sqrt{3}}\approx 0{,}577>v_3=0{,}333$;

……………………….

Таким образом, начиная с номера $n=2$ ряд (I) > ряда (II).

<u>3 шаг:</u> вывод: по ***теореме 8*** (*случай б*) исходный ряд расходится.

б) <u>1 шаг</u>: за ряд сравнения примем ряд с членами геометрической прогрессии $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ (II) со знаменателем $|q|=\frac{1}{2}<1$, а значит, сходящийся.

<u>2 шаг</u>: сравним члены данного ряда (I) с членами ряда сравнения (II): при $n=1$: $\frac{1}{4}<\frac{1}{2}$; при $n=2$: $\frac{1}{12}<\frac{1}{4}$ и т.д., т.е. ряд (I) > ряда (II).

<u>3 шаг:</u> вывод: по ***теореме 8*** (*случай а*) исходный ряд сходится.

в) <u>1 шаг</u>: за ряд сравнения возьмем гармонический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots$ (II); он расходится.

<u>2 шаг</u>: сравним члены данного ряда (I) с соответствующими членами ряда сравнения (II): при $n=1$: $u_1=ln2\approx 0{,}693\geq v_1=1$; при $n=2$: $u_2=\frac{ln3}{2}\approx 0{,}549\geq v_2=0{,}500$; при $n=3$: $u_3=\frac{ln4}{3}\approx 0{,}462\geq v_3=0{,}333$; и т.д.

<u>3 шаг:</u> заключаем, что по *случаю б* ***теоремы 8*** исходный ряд также расходится.

Замечание 4. Трудностью применения данного признака является выбор ряда сравнения (II), так как в теореме не указывается способ его выбора. Поэтому за ряд сравнения принимают ряд, который ранее был исследован на сходимость. Например, это может быть гармонический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, который расходится; *обобщенный гармонический ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$, где $p=const$:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{p}}:\left[\begin{array}{l} при\ \ p>1\ \ сходится; \\ при\ \ p\le 1\ \ расходится. \end{array}\right. \qquad (29)$$

или ряд с членами геометрической прогрессии (27), сходимость которого определяется условием (28).

Пример 26. Исследовать ряд на сходимость.

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{5}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{1/3}+5}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n^{4}+2n+1}}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n+2}{n^{3}-2n+5}$.

Решение. а) Согласно условию (29): $p=5>1$, то ряд сходится.

б) Здесь $p=\dfrac{1}{3}<1$, то ряд расходится.

в) В данном случае, $p=2>1$, то ряд сходится.

г) Так как $p=3-1=2>1$, то ряд сходится.

Иногда легче бывает применить предельный признак сравнения, суть которого заключается в следующей теореме.

Теорема 9. (Предельный признак сравнения) Если $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_{n}$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_{n}$ – положительные ряды ($u_{n}>0$, $v_{n}>0$) и существует конечный предел отношения их общих членов $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n}}{v_{n}}\neq\left[\begin{array}{l}0;\\ \infty,\end{array}\right.$ то ряды одновременно либо сходятся, либо расходятся.

Пример 27. Применяя предельный признак сравнения, исследовать ряд на сходимость: а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{3n^{2}+2n-1}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{3}+2}$.

Решение. а) Для данного ряда с общим членом $u_{n}=\dfrac{n}{3n^{2}+2n-1}$ возьмем ряд сравнения с общим членом $v_{n}=\dfrac{1}{n}$ (гармонический ряд; расходится). Так как $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n}}{v_{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{3n^{2}+2n-1}:\dfrac{1}{n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^{2}}{3n^{2}+2n-1}=\dfrac{1}{3}\neq\left[\begin{array}{l}0;\\ \infty,\end{array}\right.$ следовательно, и данный ряд также расходится.

б) В качестве ряда сравнения возьмем обобщенный сходящийся гармонический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$, так как $p=3>1$. Вычисляя предел $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^3+2}:\frac{1}{n^3}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^3}{n^3+2}=1\neq\left[\begin{array}{l}0;\\ \infty,\end{array}\right.$ заключаем, что исходный ряд также сходится.

Задание № 11. Исследовать ряд на сходимость, применяя признаки сравнения:

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 3^n}$ (сход.);
2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^3}$ (сход.);
3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$ (сход.);
4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}sin\frac{1}{n}$ (расход.);
5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n^2+1}$ (сход.);
6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{4n^2+n-10}$ (расход.);
7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3n}{n^2-1}$ (расход.);
8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{e^n}{n^3}$ (расход.);
9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+2}}{n}$ (расход.);
10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3+5}$ (сход.);
11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}sin\frac{\pi}{2^n}$ (сход.);
12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}tg\frac{\pi}{4n}$ (расход.).

II. Признак Даламбера.

Теорема 10. Пусть дан положительный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ ($u_n>0$) и существует предел отношения последующего члена к предыдущему при $n\to\infty$: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=q$.

Тогда: а) при $q<1$ ряд сходится; б) при $q>1$ ряд расходится; в) при $q=1$ вопрос о сходимости ряда остается нерешенным.

При $q=1$ к данному ряду следует применить другой признак.

Таким образом,

$$q=\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}:\left[\begin{array}{l}\textit{при } q<1 \textit{ ряд сходится};\\ \textit{при } q>1 \textit{ ряд расходится};\\ \textit{при } q=1 \textit{ применить другой признак}.\end{array}\right. \tag{30}$$

Замечание 5. Признаком Даламбера, как правило, пользуются тогда, когда общий член u_n данного ряда содержит либо факториалы, либо показательные функции переменной *n*, либо комбинации первых со вторыми.

Определение 10. Факториалом называется произведение натуральных чисел, начиная от 1 до *n* включительно и обозначается: $n!$, т.е $n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n$.

Например, $3! = 1\cdot 2\cdot 3 = 6$.

Пример 28. Исследовать ряд на сходимость, применяя признак Даламбера:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{3n+1}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{6^n}{n^2}$.

Решение. а) Общий член ряда содержит факториал, значит будем применять признак Даламбера.

Зная *n*-ый член ряда, находим следующий за ним ($n+1$)-ый член, заменяя в формуле общего члена *n* на $n+1$, т.е.

$$u_n = \frac{n!}{3n+1}; \; u_{n+1} = \frac{(n+1)!}{3n+4}.$$

Находим предел отношения u_{n+1} к u_n члену:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+1)!}{3n+4} : \frac{n!}{3n+1}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+1)!}{3n+4} \cdot \frac{3n+1}{n!}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n!(n+1)}{3n+4} \cdot \frac{3n+1}{n!}\right) = \infty$$

Так как $q = \infty > 1$, то данный ряд расходится.

б) Здесь общий член $u_n = \frac{6^n}{n^2}$ содержит показательную функцию 6^n. Следовательно, для исследования на сходимость указанного ряда применим признак Даламбера. Найдем $u_{n+1} = \frac{6^{n+1}}{(n+1)^2} = \frac{6^n \cdot 6}{(n+1)^2}$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{6^n \cdot 6}{(n+1)^2} : \frac{6^n}{n^2}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{6^n \cdot 6}{(n+1)^2} \cdot \frac{n^2}{6^n}\right) = 6 > 1,$$

следовательно, исходный ряд расходится.

Задание № 12. Исследовать ряд на сходимость, применяя признак Даламбера:

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{3^n}$ (сход.); 2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{n^2}$ (расход.); 3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4n-1}{n!}$ (сход.);

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{(2n)!}$ (сход.); 5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4^n}{(n+1)!}$ (сход.); 6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n(n+1)}$ (расход.);

7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3n(n+1)}{4^n}$ (сход.); 8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{2^n\cdot\sqrt{n}}$ (расход.); 9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n!}$ (сход.);

10. $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{3^n}{(2n-5)}$ (расход.); 11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{2^n(n+1)}$ (расх.); 12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^{n-1}}$ (сход.).

III. Радикальный признак Коши.

Теорема 11 . Если для положительного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ ($u_n>0$) существует предел корня n-ой степени из общего члена при $n\to\infty$, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=k$. Тогда: а) при $k<1$ ряд сходится; б) при $k>1$ ряд расходится; в) при $k=1$ вопрос о сходимости ряда остается нерешенным.

При $k=1$ к данному ряду следует применить другой признак.

Таким образом,

$$q=\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}:\left[\begin{array}{l}\text{при } q<1 \text{ ряд сходится;}\\ \text{при } q>1 \text{ ряд расходится;}\\ \text{при } q=1 \text{ применить другой признак.}\end{array}\right. \qquad (31)$$

Замечание 6. Радикальным признаком Коши, как правило, пользуются тогда, когда общий член ряда u_n можно представить в виде: $u_n=\left(\tilde{u}_n\right)^n$, т.е. u_n находится в степени, кратной числу n.

Пример 29. Исследовать ряд на сходимость, применяя радикальный признак Коши: а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n+1}{3n+2}\right)^{2n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^{2n}}{3^{3n}}$.

Решение. а) Так как общий член ряда можно представить как $u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} = \left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^n$. Тогда, применяя указанный признак, получим:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^n} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \{II\ замеч.\ предел\} = e \approx 2{,}7172\ldots > 1.$$

Следовательно, данный ряд расходится.

б) Общий член исследуемого ряда стоит в степени, кратной n. Поэтому по ***теореме 11*** имеем:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left[\left(\frac{3n+1}{3n+2}\right)^2\right]^n} = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{3n+2}\right)^2 = 1??$$

Вопрос о сходимости ряда остается открытым. Применим достаточный признак расходимости ряда.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n+1}{3n+2}\right)^{2n} = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{3n+2}\right)^{2n} = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{3n+2}\right)^{-\frac{3n+2}{1}\cdot\left(-\frac{1}{3n+2}\right)\cdot 2n} =$$

$$= e^{\lim\limits_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{3n+2}\right)\cdot 2n} = \frac{1}{\sqrt[3]{e^2}} \approx 1{,}9 > 1 \Rightarrow\ ряд\ расходится\,.$$

в) Общий член ряда представим в виде: $u_n = \frac{2^{2n}}{3^{3n}} = \left(\frac{2^2}{3^3}\right)^n = \left(\frac{4}{27}\right)^n$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{4}{27}\right)^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{4}{27} = \frac{4}{27} < 1 \Rightarrow\ ряд\ сходится\ .$$

Задание № 13. Исследовать ряд на сходимость, применяя радикальный признак Коши:

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} arctg^n\frac{1}{n}$ (сход.);
2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$ (расход.);
3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{7^n}{5^n(3n-1)^n}$ (сход.);

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{10^n}{3^n}$ (расход.); 5. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{ln^n\sqrt{n}}$ (сход.); 6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)^n$ (сход.);

7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^{2n+1}}{8^n}$ (расход.); 8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}e^{n-1}$ (расход.); 9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n}{2n+1}\right)^n$ (сход.);

10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{n^2}}{3^n}$ (сход.); 11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n}{2^n}$ (сход.); 12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(2n-1)^n}{n^n}$ (расход.).

IV. Интегральный признак Коши.

Определение 11. Функция $f(x)$ называется ***производящей*** функцией ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$, если $f(n)=u_n$.

Теорема 12. Пусть для положительного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ ($u_n>0$) производящая функция $f(x)$ положительна, непрерывна и монотонно убывает на полуотрезке $[1;+\infty)$. Если несобственный интеграл $\int\limits_{1}^{+\infty}f(x)dx$ сходится, то сходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$; если $\int\limits_{1}^{+\infty}f(x)dx$ расходится, то данный ряд также расходится.

Замечание 7. Этим признаком, как правило, пользуются тогда, когда легко можно вычислить несобственный интеграл от производящей функции $f(x)$ на промежутке $[1;+\infty)$.

Пример 30. Исследовать ряд на сходимость, применяя интегральный признак Коши: а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt[3]{n+3}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(n+1)\cdot ln^2(n+1)}$.

Решение. а) <u>1 шаг:</u> составим производящую функцию $f(x)$, заменив в общем члене u_n n на x, т.е. $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x+3}}$. Для $f(x)$ выполняются три условия: она положительна на $[1;+\infty)$, т.к. x принимает значения натурального ряда: 1, 2, 3 и т.д.; непрерывна, т.к. определена и непрерывна на всей числовой прямой, кроме $x=-3\notin[1;+\infty)$; и, наконец, монотонно убывает, т.к. при $x\to+\infty$ $f(x)\to 0$.

<u>2 шаг:</u> вычислим несобственный интеграл I рода:

$$\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x+3}} = \lim_{B\to+\infty} \int\limits_{1}^{B} \frac{dx}{\sqrt[3]{x+3}} = \lim_{B\to+\infty} \frac{3}{2}(x+3)^{2/3}\Big|_1^B = \infty \Rightarrow \textit{расходится},$$

<u>3 шаг:</u> заключаем, что и данный ряд также расходится (по ***теореме 12***).

б) <u>1 шаг:</u> производящей функцией данного ряда будет

$f(x) = \dfrac{1}{(x+1)\cdot ln^2(x+1)}$, которая также положительна, непрерывна и монотонно убывает на $[1;+\infty)$.

<u>2 шаг:</u> Исследуем на сходимость несобственный интеграл I рода

$\int\limits_{1}^{+\infty} \dfrac{dx}{(x+1)\cdot ln^2(x+1)}$. Вычисляя сначала неопределенный интеграл $\int \dfrac{dx}{(x+1)\cdot ln^2(x+1)}$ методом подстановки, положив $ln^2(x+1) = t$, получим:

$$\int \frac{dx}{(x+1)\cdot ln^2(x+1)} = -\frac{1}{ln(x+1)} + C.$$

Тогда несобственный интеграл:

$$\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)\cdot ln^2(x+1)} = -\lim_{B\to+\infty} \frac{1}{ln(x+1)}\Big|_1^B = -\frac{1}{\infty} + \frac{1}{ln2} = \frac{1}{ln2} \Rightarrow \textit{сходится},$$

<u>3 шаг:</u> исходный ряд также сходится.

Задание № 14. Исследовать ряд на сходимость, применяя интегральный признак Коши:

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{3n+5}}$ (расход.);
2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(n+4)^3}$ (сход.);
3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{arctgn}{1+n^2}$ (сход.);
4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{n+1}$ (расход.);
5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{4n^2-1}}$ (расход.);
6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{4n^2+9}$ (сход.);

7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+4}}$ (расход.); 8. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot ln n}$ (расход.); 9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{ln(n+1)}{n+1}$ (расход.);

10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}$ (расход.); 11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2}{n^3+2}$ (расход.); 12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{1+n^4}$ (сход.).

3.4 Знакочередующиеся ряды

Определение 12. Числовой ряд называется ***знакочередующимся,*** если в нем после каждого положительного члена идет отрицательный или наоборот.

Знакочередующийся ряд имеет вид:

$$u_1 - u_2 + u_3 - \ldots + (-1)^{n-1} \cdot u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n, \qquad (32)$$

где $u_n > 0$.

Для исследования на сходимость ряда (32) применяют признак Лейбница.

Теорема 13. (Признак Лейбница) Если члены знакочередующегося ряда (32) убывают по абсолютной величине, начиная с некоторого номера $k = \overline{1,\infty}$, т.е. $u_k > u_{k+1} > \ldots > u_n > \ldots$ и предел его общего члена при $n \to \infty$ равен нулю, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$, то ряд (32) сходится, а его сумма *S* по абсолютной величине не превосходит абсолютной величины первого члена, т.е. $S \le u_1$.

Замечание 8. Если хотя бы одно из условий признака Лейбница не выполняется, то знакочередующийся ряд будет расходящимся.

Замечание 9. На практике, в применении рядов (сходящихся) обычно ограничиваются несколькими их первыми членами. Ошибка при замене суммы знакочередующегося ряда, удовлетворяющего условиям признака Лейбница, суммой нескольких первых членов, меньше абсолютного значения первого из отброшенных членов.

Для знакочередующегося ряда (32) составим ряд из абсолютных величин:

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n. \qquad (33)$$

Примем следующую теорему без доказательства.

Теорема 14. Если сходится ряд (33), то сходится и ряд (32).

Определение 13. Если сходится ряд (33), то ряд (32) называется ***абсолютно сходящимся***.

Определение 14. Если ряд (33) сходится, а ряд (32) расходится, то ряд (32) называется ***условно сходящимся***.

Пример 31. Исследовать на абсолютную и условную сходимость знакочередующийся ряд:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^2}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}\cdot n}{n+1}$.

Решение. а) Данный ряд называется ***рядом Лейбница***. Проверим условия ***теоремы 13***. Для начала составим ряд из абсолютных величин:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right| = |1| + \left|-\frac{1}{2}\right| + \left|\frac{1}{3}\right| + \left|-\frac{1}{4}\right| + \ldots + \left|-\frac{1}{n}\right| + \ldots = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}.$$

Члены ряда из абсолютных величин убывают, так как $1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \ldots$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$. Следовательно, данный ряд, согласно признаку Лейбница, сходится.

Чтобы установить, какая эта сходимость, абсолютная или условная, необходимо исследовать на сходимость ряд из абсолютных величин.

Поскольку, ряд из абсолютных величин $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ является гармоническим рядом, который, как известно, расходится, то по ***определению 14*** ряд Лейбница сходится условно.

б) Составим ряд из абсолютных величин. Ясно, что он будет иметь те же члены, что и данный ряд, только со знаками «+», т.е.

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}.$$

Члены ряда из абсолютных величин убывают: $1 > \frac{1}{4} > \frac{1}{9} > \ldots$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2} = 0$.

Следовательно, исходный ряд сходится по признаку Лейбница. Так как ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ является обобщенным гармоническим и сходится ($p = 2 > 1$), то данный ряд сходится абсолютно.

в) Рядом из абсолютных величин для данного знакочередующегося ряда будет:

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\ldots+\frac{n}{n+1}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1},$$

члены которого монотонно возрастают, так как $\frac{1}{2}<\frac{2}{3}<\frac{3}{4}<\ldots$. Условие признака Лейбница не выполняется, значит исследуемый ряд расходится.

Задание № 15. Исследовать на абсолютную / условную сходимость знакочередующийся ряд:

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$; (сход. условно)

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{n^4}$; (сход. абсолютно)

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{n^3+1}$; (сход. абсолютно)

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2^n}$; (сход. абсолютно)

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{n!}$; (сход. абсолютно)

6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}\cdot n}{3^n}$; (сход. абсолютно)

7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt[4]{n}}$; (сходится условно)

8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}\cdot 2^n}{3^n}$; (сход. абсолютно)

9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}\cdot\sqrt{n}}{2^n}$; (сход. абсолютно)

10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{ln(n+1)}$; (Ответ: сход. условно)

11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n\cdot 5^n}$; (сход. абсолютно)

12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}\cdot n^2}{2n^2+1}$. (расходится)

Контрольные вопросы

1. Что называется числовым рядом?
2. Какой ряд называется сходящимся? Расходящимся?
3. Что называется суммой сходящегося числового ряда?
4. Сформулировать необходимый признак сходимости ряда.
5. Что называется положительным числовым рядом?
6. Сформулировать достаточный признак расходимости ряда.
7. Сформулировать достаточные признаки сходимости положительных числовых рядов: признаки сравнения; Даламбера; радикальный и интегральный признаки Коши.
8. Какой ряд называется знакочередующимся?
9. Сформулировать признак Лейбница сходимости знакочередующихся рядов?
10. Что называется абсолютной и условной сходимостью ряда?

Раздел IV. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

4.1 Задачи, приводящие к понятию дифференциального уравнения

Пример 32. (Модель развития популяции) Пусть имеется некоторая популяция рыб (совокупность особей одного вида), биомасса которой равна $y(t)$, в начальный момент времени биомасса равна $y(0)=y_0$. Предположим, что биомасса популяции пропорциональная имеющейся биомассе, т.е. $v_+ = k\cdot y(t)$, k – коэффициент пропорциональности. Скорость уменьшения биомассы происходит за счет возникающих явлений самоотравления и пропорциональная квадрату наличной биомассе, т.е. $v\_ = -\alpha\cdot y^2(t)$, α – коэффициент пропорциональности.

Тогда суммарная скорость изменения количества биомассы будет равна $y' = k\cdot y - \alpha\cdot y^2$. Найдем закон изменения биомассы популяции рыб.

$$y' = k\cdot y - \alpha\cdot y^2 \Rightarrow -\alpha\left(y^2 - 2y\cdot\frac{k}{2\alpha} + \left(\frac{k}{2\alpha}\right)^2 - \left(\frac{k}{2\alpha}\right)^2\right) = -\alpha\left(\left(y-\frac{k}{2\alpha}\right)^2 - \left(\frac{k}{2\alpha}\right)^2\right)$$

Интегрируя ДУ, получим

$$\int \frac{dy}{\left(y-\frac{k}{2\alpha}\right)^2 - \left(\frac{k}{2\alpha}\right)^2} = -\alpha\int dt \;\Rightarrow\; \frac{\alpha}{k} ln\left|\frac{y-\frac{k}{\alpha}}{y}\right| = -\alpha t + C$$

По понятным соображениям $0 \le y < \dfrac{k}{\alpha}$, следовательно, $y = \dfrac{k}{\alpha}\left(Ce^{-kt}+1\right)$ есть закон изменения биомассы.

Ответ: $y = \dfrac{k}{\alpha}\left(Ce^{-kt}+1\right)$.

Пример 33. (Случай в заповеднике)

При обходе заповедника егерь обнаружил тушу убитого кабана. Ее осмотр показал, что выстрел браконьера был точным и кабан убит наповал. Рассудив, что браконьер должен вернуться за добычей, егерь решил дождаться его, укрывшись недалеко от того места, где лежала туша. Вскоре показался человек, прямо направляющийся к убитому животному. Задержанный всячески отрицал свою причастность к браконьерству. Однако у егеря уже были косвенные улики их виновности, но для ее полного доказательства следовало еще уточнить время, когда был убит кабан, если известно, что в момент задержания неизвестного температура туши кабана была равна $34°C$, а спустя через час составляла $30°C$; в момент выстрела кабана его температура была равна $37°C$, а температура воздуха – $20°C$.

Решение. Определить время, когда был убит кабан, можно с помощью закона охлаждающегося тела и составления дифференциальной модели. Дифференциальная модель – это дифференциальное уравнение, описывающее реальное природное явление или процесс.

Обозначим через $Q(t)$ – температуру туши в момент времени t, T_0 – температуру окружающей среды, k – положительный коэффициент пропорциональности. Тогда согласно указанному закону: скорость охлаждения тела в воздухе пропорциональна разности между температурой тела и температурой воздуха. Пусть за время Δt, температура туши кабана охладилась на $\Delta Q = -k(Q - T_0)\Delta t$. Переходя к пределу при бесконечно малом $\Delta t \to 0$, получим дифференциальное уравнение (ДУ)

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = -\lim_{\Delta t \to 0} \frac{k(Q - T_0)\Delta t}{\Delta t} \quad \Rightarrow \quad Q'(t) = -k(Q - T_0) \;\Rightarrow$$

$$\frac{dQ}{dt} = -k(Q - T_0) \;\Rightarrow dQ = -k(Q - T_0)dt.$$

Полученное выражение является дифференциальной моделью изменения температуры убитого кабана. Следует отметить, что в данном процессе температура воздуха могла оставаться неизменной, а могла меняться с течением времени. Возьмем во внимание первый вариант, т.е. $T_0 = 20°C$. Тогда общим решением ДУ будет являться функция $Q(t) = 20 + Ce^{-kt}$. Началом отсчета времени примем время задержания неизвестного; определим начальные условия: $Q(0) = 34,\ Q(1) = 30$.

Решив систему $\begin{cases} 20 + C = 34 \\ 20 + Ce^{-k} = 30, \end{cases}$ получим $C = 14$ и $k = 0{,}34$. Тогда частным решением будет $Q(t) = 20 + 14e^{-0{,}34t}$. Поскольку температура туши кабана в момент выстрела была равна $37°C$, то $37 = 20 + 14e^{-0{,}34t}$, откуда определяем время выстрела в кабана $t \approx 1{,}3$ *ч*.

Ответ: $\approx 1{,}3$.

Пример 34. На молочно-товарной ферме используется доильный аппарат (рис. 17), состоящий из четырех стаканов с присосками и емкости для конечного сбора молока, куда стекается молоко по млечным трубкам при помощи поршневого насоса. Определить, через какое время наполнится третья часть бидона, если диаметр нижнего основания равен 40*см*, верхнего – 20 *см*, высота цилиндрической части – 40*см*, а общая высота составляет 60 см, при этом молоко стекается в бидон через отверстие радиусом 0,8*см*?

Решение.

Рис. 17 Доильный аппарат

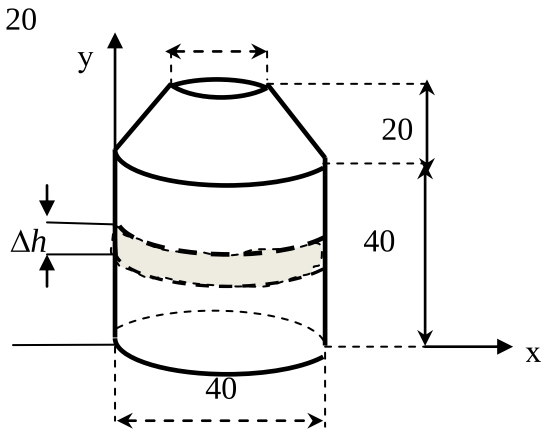


Рис. 18 Сечение доильного аппарата

Для начала найдем объем бидона. Так как он состоит из двух частей: цилиндра и усеченного конуса (рис. 18), то нужно найти сумму объемов частей.

$$V_ц = \pi R^2 h_1 = 3{,}14 \cdot 20^2 \cdot 40 \approx 50240\, см^3.$$

$$V_{ус/к} = \frac{\pi h_2}{3}\left(R^2 + Rr + r^2\right) = \frac{3{,}14 \cdot 20}{3}(400 + 200 + 100) \approx 14653\, см^3.$$

Следовательно, объем бидона равен $\approx 64893\, см^3$.

Пусть $V = V(t)$ – объем молока в бидоне в момент времени t. Предположим, что через t мин уровень молока в бидоне стал на отметке h *м*, спустя бесконечно малое время Δt *с* $(\Delta t \to 0)$ отметка поднялась на Δh *м* (рис. 26).

С одной стороны, за время Δt объем молока будет равен объему цилиндра радиусом R и высотой Δh, т.е.

$$\Delta V = \Delta V_{цил} = \pi R^2 \Delta h.$$

С другой стороны, по формуле Бернулли $\Delta V = -\pi r_0^2 \sigma \sqrt{2gh}\Delta t$, где – радиус отверстия, через которое поступает молоко в бидон.

Приравняв одинаковые величины и перейдя к пределу при $\Delta t \to 0$, получим дифференциальное уравнение

$$\pi R^2 \Delta h = \pi r_0^2 \sigma \sqrt{2gh}\Delta t \;\;\Rightarrow\;\; \frac{dh}{\sqrt{h}} = \frac{r_0^2 \sigma \sqrt{2g}\,dt}{R^2} \;\;\Rightarrow\;\; 2\sqrt{h} - \frac{r_0^2 \sigma \sqrt{2g}\,t}{R^2} = C.$$

При начальном условии $h(0)=0$ $C=0$. Тогда $\sqrt{h}=\dfrac{r_0^2\sigma\sqrt{2g}t}{2R^2} \Rightarrow \quad t=\dfrac{2\sqrt{h}R^2}{r_0^2\sigma\sqrt{2g}}$.

Бидон наполняется на третью часть, что составляет $21631 см^3$ при уровне молока на высоте $h\approx 17$ *см*.

Используя данные: $r=20см=0{,}2м$, $r_0=0{,}8\,см=0{,}008\,м$, σ – для молока получают экспериментально, т.к. зависит от свойств молока, $g\approx 9{,}8$ *м/с*^{2}, найдем

$$t=\frac{2\sqrt{0{,}17}\cdot 0{,}2^2}{0{,}008^2\cdot\sigma\sqrt{19{,}6}}\approx\frac{116с}{\sigma}\approx\frac{2}{\sigma}мин.$$

Ответ: $\approx\dfrac{2}{\sigma}мин$.

Пример 35. Популяция некоторого вида рыбы увеличивается на 3 % в год. Определите, во сколько раз увеличится численность популяции рыб через 100 лет?

Решение. Обозначим через – численность популяции рыб, тогда скорость изменения ее можно описать с помощью дифференциального уравнения

$$y'(t)=0{,}03y.$$

Общим решением ДУ является функция $y(t)=Ce^{0{,}03t}$. Подставив в нее вместо $t=0$, найдем численность рыб $y(0)=C$ в начальный момент времени. Тогда через 100 лет численность рыб станет равной $y(100)=Ce^3$.

Следовательно, найдя отношение двух величин $\dfrac{y(100)}{y(0)}=\dfrac{Ce^3}{c}=e^3\approx 20$, определим, что через 100 лет численность рыб увеличится примерно в 20 раз.

Ответ: $\approx$ *в* 20 раз.

Решая задачи физического смысла на применение законов Ньютона, в которых материальная точка совершает поступательное или колебательное движение, на которую действуют несколько сил, например, сила тяжести, сила трения, сила упругости, сила натяжения нити (пружины), центростремительная сила и т.д., то нужно:

1) сделать физический чертеж, согласно условию задачи, указав силы действия на материальную точку;

2) записать закон Ньютона к данной системе;

3) проектировать на оси координат рассматриваемые силы;

4) составить математическую модель по условиям данной задачи и найти неизвестные.

Пример 36. Камень массой 40 *г* брошен с высоты 9*м*. Найдите закон движения камня, если на него действует тормозящая сила сопротивления воздуха, пропорциональная скорости движения; коэффициент пропорциональности γ (рис. 19).

Решение. Выполним рис. к задаче.

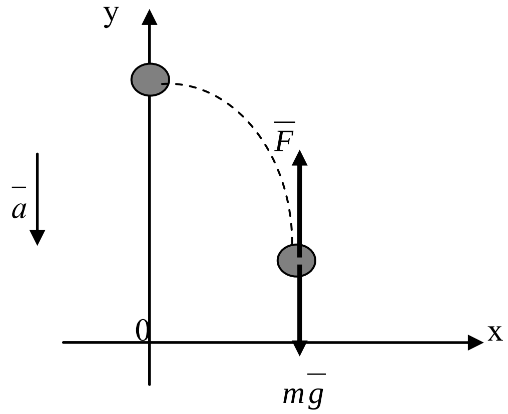


Рис. 19 Движение вертикально брошенного вниз тела

По второму закону Ньютона:

$$m\overline{a} = m\overline{g} + \overline{F}.$$

Спроектируем силы на оси координат:

$$\begin{cases} Oy: \quad ma = mg - F \\ Ox: \quad 0 = 0. \end{cases}$$

Так как $F = kv$, то получим ДУ

$$mS'' = mg - \gamma S' \text{ или}$$

$$S'' + \frac{\gamma}{m} S' = g.$$

Характеристическое уравнение $k^2 + \frac{\gamma}{m} k = 0$ имеет корни $k_{1,2} = 0; \ -\frac{\gamma}{m}$. Тогда общим решением соответствующего ЛОДУ будет функция $S(t) = C_1 + C_2 e^{-\gamma t/m}$. Какое-либо частное решение ЛНДУ найдем по формуле $S_ч = At$, откуда заключаем, что $S_ч = \frac{mg}{\gamma}$, тогда общее решение ЛНДУ будет иметь вид: $S(t) = C_1 + C_2 e^{-\gamma t/m} + \frac{mg}{\gamma}$. Легко определить скорость падения камня по формуле $v(t) = S'(t) = -\frac{\gamma}{m} C_2 e^{-\gamma t/m}$. Поскольку $S(0) = 9$, то $C_2 = 9 - C_1 - \frac{0{,}294}{\gamma}$.

Таким образом, $S(t) = C_1 + \frac{0{,}294}{\gamma} + \left(9 - C_1 - \frac{0{,}294}{\gamma}\right) e^{-\gamma t/0{,}04}$.

Ответ: $S(t) = C_1 + \frac{0{,}294}{\gamma} + \left(9 - C_1 - \frac{0{,}294}{\gamma}\right) e^{-\gamma t/0{,}04}$.

4.2 Основные понятия и определения

Определение 15. Дифференциальным уравнением называется уравнение, связывающее независимые переменные, неизвестную функцию и ее производные или дифференциалы.

Если неизвестная функция зависит от одной переменной, то дифференциальное уравнение называется ***обыкновенным***, в противном случае, называется уравнением ***в частных производных***.

В дальнейшем, мы будем рассматривать только обыкновенные дифференциальные уравнения (ОДУ).

Определение 16. Наивысший порядок производной, входящей в данное дифференциальное уравнение, называется ***порядком*** дифференциального уравнения.

Замечание 10. В ОДУ независимая переменная x и неизвестная функция yв явном виде могут и не входить, но присутствие производной обязательно.

Например: а) $y' = 4x + ycos3x$ – ОДУ I порядка;

б) $y'' + 2y' - 15y = 0$ – ОДУ II порядка;

в) $\frac{dy}{dx} - 6x = 0$ – ОДУ I порядка;

г) $y''' = 5$ – ОДУ III порядка;

д) $3x^2 dy = ydx$ – ОДУ I порядка.

Решить дифференциальное уравнение – значит найти неизвестную функцию y. Дифференциальное уравнение обладает множеством решений. Наша задача заключается в том, чтобы найти аналитическое выражение решения данного дифференциального уравнения, которое бы охватывало все множество его решений.

Дифференциальным уравнением n-го порядка называется уравнение вида

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0. \qquad (34)$$

Если из уравнения (34) удастся выразить старшую производную $y^{(n)}$, то полученное уравнение

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) \qquad (35)$$

будет называться ***дифференциальным уравнением, разрешенным относительно старшей производной*** $y^{(n)}$.

Определение 17. Решением дифференциального уравнения называется такая функция, которая при подстановке в данное дифференциальное уравнение, обращает его в тождество.

Определение 18. Общим решением дифференциального уравнения (35) называется такое решение $y=\varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$, содержащее nпроизвольных постоянных C.

Если общее решение представить в неявном виде, то функция $\Phi(x, y, C_1, C_2, \ldots, C_n)=0$ будет называться ***общим интегралом*** уравнения (35).

Пример 37. Проверить, является ли функция $y=sinx$ решением дифференциального уравнения $y'-cosx=0$.

Решение. Для того чтобы данная функция являлась решением уравнения, необходимо чтобы она обращала его в тождество.

Найдя производную этой функции $y'=cosx$ и подставив ее в левую часть дифференциального уравнения, заключаем, что эта функция обращает уравнение в тождество. Следовательно, по определению 17, она является его решением: $cosx-cosx=0 \Rightarrow 0\equiv 0$.

4.3 Дифференциальные уравнения I порядка

Если в уравнении (34) положить $n=1$, то полученное уравнение

$$F(x, y, y')=0 \tag{36}$$

будет называться дифференциальным уравнением I порядка.

Уравнение

$$y'=f(x, y) \tag{37}$$

называется ***дифференциальным уравнением I порядка, разрешенным относительно производной*** y'.

Иногда требуется из всех решений дифференциального уравнения I порядка найти такое решение, которое бы удовлетворяло условию:

$$y(x_0)=y_0. \tag{38}$$

Условие (38) называется ***начальным условием*** или ***условием Коши*** для уравнения (37).

Определение 19. Общим решением уравнения (37) называется функция $y=\varphi(x, C)$, содержащая одну произвольную постоянную C и удовлетворяющая условиям: 1) $y=\varphi(x, C)$ является решением уравнения (37) при каждом фиксированном C; 2) каково бы ни было начальное условие (38), можно найти такое значение $C=c_0$, что функция $y=\varphi(x, c_0)$ будет удовлетворять условию (38).

Если общее решение представить в неявном виде, то функция $\Phi(x, y, C)=0$ будет называться ***общим интегралом*** уравнения (37).

При наличии условия (38) получаем *задачу Коши* – задачу нахождения частного решения дифференциального уравнения (35), удовлетворяющего условию: при $x = x_0$, $y = y_0$.

Задача Коши для дифференциального уравнения (37) имеет вид:

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0. \end{cases} \tag{39}$$

Определение 20. Частным решением дифференциального уравнения (37) называется такое решение, которое получается из общего $y = \varphi(x, C)$ при некотором вполне определенном значении постоянной *С*.

Чтобы найти частное решение уравнения (37), нужно сначала найти общее решение, а затем, воспользовавшись условием Коши, найти произвольную постоянную *С*. Найденное значение *С* подставить в общее решение.

График частного решения дифференциального уравнения называется ***интегральной кривой***. Графики общего решения дифференциального уравнения образуют ***семейство интегральных кривых***.

Найти частное решение, удовлетворяющее начальным условиям, геометрически означает, что из семейства интегральных кривых, которое соответствует общему решению $y = \varphi(x, C)$, надо найти ту единственную кривую, которая проходит через точку $M_0(x_0; y_0)$ плоскости xOy.

Пример 38. Найти частное решение дифференциального уравнения $y' = -\frac{y}{x}$, удовлетворяющее начальному условию: $y(2) = 3$.

Решение. Непосредственной подстановкой убеждаемся, что функция $y = \frac{C}{x}$ является его общим решением. Чтобы найти частное решение, воспользуемся условием Коши: $y(2) = 3$, т.е. при $x = 2$ функция $y = 3$. Подставив эти значения в формулу общего решения, получим уравнение: $3 = \frac{C}{2}$, откуда $C = 6$. Следовательно, $y = \frac{6}{x}$ есть частное решение, которое удовлетворяет начальному условию. Общему решению $y = \frac{C}{x}$ соответствует семейство гипербол, а частному решению соответствует одна из них, которая проходит через точку $M_0(2; 3)$ (рис. 20).

Одним из способов решения дифференциального уравнения является интегрирование.

Если решение дифференциального уравнения удалось найти с помощью интегрирования, то говорят, что оно найдено *в квадратурах*.

Рассмотрим некоторые типы дифференциальных уравнений I порядка, разрешаемых в квадратурах.

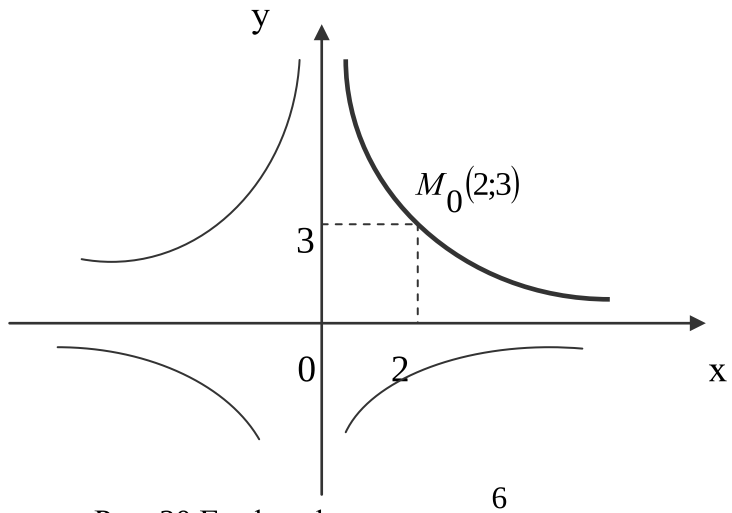


Рис. 20 График функции $y = \frac{6}{x}$

4.3.1 Дифференциальные уравнения I порядка с разделенными переменными

Рассмотрим дифференциальное уравнение (37). Пусть функцию $f(x,y)$ можно подобрать так, чтобы выполнялось равенство:

$$f(x,y) = -\frac{M(x,y)}{N(x,y)}. \tag{40}$$

Известно, что

$$y' = \frac{dy}{dx}. \tag{41}$$

Подставляя в уравнение (37) правые части выражений (40) и (41), получим

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{M(x,y)}{N(x,y)}$$

или

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0. \tag{42}$$

Уравнение (42) называется ***дифференциальным уравнением I порядка в симметрической форме***, соответствующим уравнению (37).

Определение 21. Если в уравнении (42) функция $M(x,y)$ зависит только от переменной *x*, а $N(x,y)$ зависит только от переменной *y*, т.е. $M(x,y) = f_1(x)$ и $N(x,y) = f_2(y)$, то уравнение вида

$$f_1(x)dx + f_2(y)dy = 0. \qquad (43)$$

называется ***дифференциальным уравнением I порядка с разделенными переменными.***

Интегрируя обе части уравнения (43), получим общий интеграл

$$\int f_1(x)dx + \int f_2(y)dy + C = 0.$$

Пример 39. Найти общее (или частное) решение дифференциального уравнения с разделенными переменными:

а) $y^2 \cdot y' = \frac{1}{x}$, $y(1) = 2$; б) $\frac{y'}{3-4y} = \frac{1}{2x-1}$; в) $\frac{y'}{\sqrt{y}} = \frac{1}{cos^2 x}$, $y(1) = 1$.

Решение. а) Заменяя в данном уравнении y' на $\frac{dy}{dx}$ и умножая обе части его на dx, получим:

$$y^2 \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \Rightarrow y^2 dy = \frac{dx}{x}.$$

Полученное выражение есть дифференциальное уравнение с разделенными переменными. Интегрируя его, найдем общее решение.

$$\int y^2 dy = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow \frac{y^3}{3} = ln|x| + C \Rightarrow y = \sqrt[3]{3ln|x| + C}.$$

Воспользовавшись начальными значениями: $x = 1$, $y = 2$, найдем вполне определенное значение *C*. Подставив его в общее уравнение, получим искомое частное. Итак,

$$2 = \sqrt[3]{3ln|1| + C} \Rightarrow C = 8 \Rightarrow \quad y = \sqrt[3]{3ln|x| + 8}$$ – частное решение.

б) Заменяя y' на $\frac{dy}{dx}$ и умножая обе части на dx, получим:

$$\frac{1}{3-4y} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2x-1} \Rightarrow \frac{dy}{3-4y} = \frac{dx}{2x-1}.$$

Интегрируя обе части последнего выражения, найдем общий интеграл. Итак,

$$\int \frac{dy}{3-4y} = \int \frac{dx}{2x-1} \Rightarrow -\frac{1}{4} ln|3-4y| = \frac{1}{2} ln|2x-1| + C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{1}{4}ln|3-4y|-\frac{1}{2}ln|2x-1|=C.$$

Воспользовавшись начальным условием: $y(1)=1$, определим C.

$$-\frac{1}{4}ln|3-4|-\frac{1}{2}ln|2-1|=C \Rightarrow C=0.$$

Следовательно, $-\frac{1}{4}ln|3-4y|-\frac{1}{2}ln|2x-1|=0$ есть частный интеграл.

в) После аналогичных действий, указанных в п. а) и б), данное уравнение представится в виде: $\frac{dy}{\sqrt{y}}=\frac{dx}{cos^2 x}$. Проинтегрировав обе части, найдем его общее решение.

$$\int\frac{dy}{\sqrt{y}}=\int\frac{dx}{cos^2 x} \Rightarrow 2\sqrt{y}=tgx+C \Rightarrow y=\frac{(tgx+C)^2}{4}.$$

Задание № 16: Найти общее (или частное) решение дифференциального уравнения I порядка с разделенными переменными:

1. $(1+y)y'=(1-2x)$.
2. $\frac{y'}{y}-\sqrt{x}=0$.
3. $(1+x^2)dx-\sqrt{y}dy=0$.
4. $\frac{1+x^2}{x}-2y'=0$.
5. $y'=e^{2x+5}$.
6. $\frac{y'}{\sqrt[3]{y}}-\frac{sinx}{cos^2 x}=0$.
7. $yy'=1-x^2$, $y(1)=2$.
8. $(1+y)^3 dy-(5x-2)^2 dx=0$, $y(2/5)=0$.
9. $ln(y')=6-2x$, $y(3)=1/2$.
10. $\frac{y'}{1-y}-xcosx=0$, $y(0)=2$.
11. $y^2y'+2x-1=0$, $y(0)=1$.
12. $x^2+\frac{y'}{sin^2 y}=0$, $y(1)=\pi/2$.

4.3.2 Дифференциальные уравнения I порядка с разделяющимися переменными

Определение 22. Если в дифференциальном уравнении I порядка в симметрической форме $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ функции $M(x;y)$ и $N(x;y)$ являются произведениями функций, зависящих от одной переменной, т.е. $M(x;y)=f_1(x)\cdot\varphi_1(x)$, $N(x;y)=f_2(x)\cdot\varphi_2(x)$, то уравнение вида

$$f_1(x)\cdot\varphi_1(y)dx+f_2(x)\cdot\varphi_2(y)dy=0, \tag{44}$$

называется ***дифференциальным уравнениемI порядка с разделяющимися переменными***.

Уравнение (44) приводится к уравнению с разделенными переменными с помощью *разделяющего множителя* $\dfrac{1}{\varphi_1(y)\cdot f_2(x)}$, причем $\varphi_1(y)\neq 0$ и $f_2(x)\neq 0$ и, как следствие, становится разрешимым в квадратурах.

Итак, в результате умножения на разделяющий множитель обеих частей уравнения (44), будет получено:

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx+\frac{\varphi_2(y)}{\varphi_1(y)}dy=0. \tag{45}$$

Тогда общий интеграл уравнения (42) будет равен:

$$\int\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx+\int\frac{\varphi_2(y)}{\varphi_1(y)}dy+C=0. \tag{46}$$

Если правая часть уравнения (37) может быть представлена в виде произведения двух сомножителей, один из которых не содержит переменной *x*, а другой – переменной *y*, т.е. $f(x;y)=\varphi(x)\cdot\varphi(y)$, то уравнение

$$y'=\varphi(x)\cdot\varphi(y) \tag{47}$$

также является уравнением с разделяющимися переменными с общим интегралом

$$\int\frac{dy}{\varphi(y)}dy=\int\varphi(x)dx+C.$$

Замечание 11. Деление уравнения (44) на произведение $\varphi_1(y)\cdot f_2(x)$ может привести к потере его частных решений, обращающих это произведение в нуль. Поэтому после нахождения общего интеграла, следует отдельно рассмотреть уравнения $\varphi_1(y)=0$ и $f_2(x)=0$; установить те решение, которые не могут быть получены из общего. Такие решения называются особыми.

Определение 23. Решение дифференциального уравнения, которое не может быть получено из общего решения ни при одном численном значении произвольной постоянной *C*, включая $\pm\infty$, называется ***особым***.

Пример 40. Решить уравнение: а) $y' = y^2 x$; б) $xydx + \sqrt{1+x^2}(1+y^2)dy = 0$
.

Решение. а) Умножим обе части уравнения на разделяющий множитель $\frac{1}{y^2}$, причем $y^2 \neq 0$. В результате получим уравнение: $\frac{y'}{y} = x$. Заменим y' на $\frac{dy}{dx}$ и умножим полученное выражение на dx.

$$\frac{dy}{y^2} = xdx\,.$$

Интегрируя последнее выражение, найдем искомое общее решение.

$$-\frac{1}{y} = \frac{x^2}{2} + C \Rightarrow \quad y = -\frac{2}{x^2 + C}\,.$$

Далее следует решить уравнение $y^2 = 0$. Функция $y = 0$ является частным решением заданного дифференциального уравнения, которое получается из общего при $C = \infty$. Следовательно, данное уравнение особых решений не имеет.

б) Приведем данное уравнение к уравнению с разделяющимися переменными, умножив на разделяющий множитель $\frac{1}{\sqrt{1+x^2} \cdot y}$, $\sqrt{1+x^2} \neq 0$ (при любом действительном x) и $y \neq 0$.

В результате уравнение примет вид: $\frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}} + (\frac{1}{y} + y)dy = 0$.

Интегрируя последнее выражение, получим общий интеграл данного дифференциального уравнения.

$$\sqrt{1+x^2} + ln|y| + \frac{y^2}{2} + C = 0\,.$$

Согласно ***замечанию 11***, выясним вопрос о существовании особых решений.

Из последнего уравнения определяем, что функция $y = 0$ удовлетворяет данному уравнению, т.е. является его частным решением, но ни при каком C не получается из общего интеграла. Следовательно, оно является его особым решением.

Пример 41. Решить дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными: а) $1 + y^2 = xyy'$, $y(1) = 0$; б) $(1+\sqrt{y})\sqrt{x} \cdot y' - y = 0$.

Решение. а) Заменим y' на $\dfrac{dy}{dx}$ и умножим обе части уравнения на dx:

$$(1+y^2)dx = xydy.$$

Разделяя переменные *x* и *y*с помощью разделяющего множителя $\dfrac{1}{x\cdot(1+y^2)}$, ($x\neq 0$ и $1+y^2\neq 0$ при любом действительном *y*) и интегрируя выражение, найдем общее решение.

$$\frac{dx}{x}=\frac{ydy}{1+y^2} \Rightarrow \int\frac{dx}{x}=\int\frac{ydy}{1+y^2} \Rightarrow ln|x|=\frac{1}{2}ln\left(1+y^2\right)+C \Leftrightarrow ln|x|=ln\sqrt{1+y^2}+lnC$$

$$\sqrt{1+y^2}=x\cdot C \Rightarrow y=\pm\sqrt{Cx^2-1}.$$

Используя условие Коши: $y(1)=0$, подставляем в общее решение $x=1$ и $y=0$, определяем значение произвольной постоянной *C*: $0=\pm\sqrt{C-1} \Rightarrow C=1$.
Подставляя $C=1$ в общее решение, находим частное решение $y=\pm\sqrt{x^2-1}$.

б) Заменим y' на $\dfrac{dy}{dx}$ и умножим обе части уравнения на dx:

$$(1+\sqrt{y})\sqrt{x}\cdot dy - ydx = 0.$$

При помощи разделяющего множителя $\dfrac{1}{\sqrt{x}\cdot y}$ ($x\neq 0$ и $y\neq 0$) приведем данное уравнение к виду:

$$\frac{1+\sqrt{y}}{y}dy-\frac{dx}{\sqrt{x}}=0.$$

Интегрируя, последнее выражение, найдем общий интеграл.

$$\int\frac{1+\sqrt{y}}{y}dy-\int\frac{dx}{\sqrt{x}}=0 \Rightarrow ln|y|+2\sqrt{y}-2\sqrt{x}+C=0.$$

Далее определим особые решения. Функция $y=0$ является частным решением данного дифференциального уравнения, т.к. она обращает его в тождество, но ни при каком значении *C* не получается из общего интеграла, следовательно, оно является его особым решением.

Задание № 17: Найти общее (или частное) решение дифференциального уравнения I порядка с разделяющимися переменными:

1. $\begin{cases}(1+y)dx-(1-x)dy=0\\ y(0)=1.\end{cases}$

2. $y'-xy=0$.

3. $\begin{cases}(1+x^2)dy-\sqrt{y}dx=0\\ y(0)=4.\end{cases}$

4. $(1+x^2)y'-2xy=0$.

5. $\begin{cases}y^2+xy'=0\\ y(-1)=1.\end{cases}$

6. $y'cosx-(y+1)sinx=0$.

7. $\begin{cases}x^4yy'=1-x^2\\ y(1)=2.\end{cases}$

8. $\begin{cases}(1+2x)^3dy-(y-2)^2dx=0\\ y(0)=4.\end{cases}$

9. $\begin{cases}siny\cdot cosxdy-sinx\cdot cosydx=0\\ y(0)=\pi/3.\end{cases}$

10. $\begin{cases}y'-(2y+1)ctgx=0\\ y(\pi/4)=0.\end{cases}$

11. $\begin{cases}x^2\sqrt{y}y'+\dfrac{2x-1}{y}=0\\ y(1)=4.\end{cases}$

12. $y'=e^{x+y}$.

4.3.3 Однородные дифференциальные уравнения I порядка

Рассмотрим ДУ (37).

Определение 24. Функция $f(x;y)$ называется ***однородной*** функцией *n*-го измерения, если при умножении переменных x и y на произвольный параметр t выполняется равенство:

$$f(xt;yt)=t^n\cdot f(x;y). \qquad (48)$$

Например, функция $f(x;y)=2x^3-x^2y+y^3$ является однородной функцией 3-го измерения, т.к.

$$f(xt;yt)=2(xt)^3-(xt)^2(yt)+(yt)^3=t^3\cdot(2x^3-x^2y+y^3)=t^3\cdot f(x;y).$$

Определение 25. Дифференциальное уравнение (37) называется ***однородным дифференциальным уравнением I порядка***, если функция $f(x;y)$ является однородной функцией нулевого измерения, т.е. если для функции $f(x;y)$ выполняется равенство:

$$f(xt;yt)=t^0\cdot f(x;y). \qquad (49)$$

Например, функция $f(x;y)=\dfrac{2xy}{x^2+y^2}$ является однородной функцией нулевого измерения, т.к.

$$f(xt;yt)=\frac{2(xt)(yt)}{(xt)^2+(yt)^2}=\frac{t^2 2xy}{t^2(x^2+y^2)}=t^0\cdot\frac{2xy}{(x^2+y^2)}=t^0\cdot f(x;y).$$

Дифференциальное уравнение I порядка в симметрической форме $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ будет однородным, если в нем функции $M(x,y)$ и $N(x,y)$ будут являться однородными функциями одного и того же измерения.

Метод решения. Однородные дифференциальные уравнения I порядка решаются с помощью подстановки:

$$\begin{cases}\dfrac{y}{x}=t; \quad y=xt\\ dy=xdt+tdx; \quad y'=t+xt'\end{cases}. \tag{50}$$

Пример 42. Решить дифференциальное уравнение $(x^2-y^2)dx+xydy=0$.

Решение. Данное уравнение представлено в симметрической форме, в которой обе функции $M(x;y)=x^2-y^2$, $N(x;y)=xy$ являются однородными функциями 2-го измерения, т.к.

$$M(xt;yt)=(xt)^2-(yt)^2=t^2(x^2-y^2)=t^2\cdot M(x;y);$$

$$N(xt;yt)=(xt)\cdot(yt)=t^2\cdot xy=t^2\cdot N(x;y).$$

Следовательно, данное уравнение является однородным. Применим для него выше указанную подстановку (50). Тогда уравнение примет вид:

$$(x^2-x^2t^2)dx+x^2t(xdt+tdx)=0 \quad\Rightarrow\quad x^2(1-t^2)dx+x^3tdt+x^2t^2dx=0$$

$$\Rightarrow\quad x^2(1-t^2+t^2)dx+x^3tdt=0 \quad\Rightarrow\quad x^2dx+x^3tdt=0$$

получили уравнение с разделяющимися переменными. Умножим на разделяющий множитель $\dfrac{1}{x^3}$, $x\neq 0$.Получим

$$\frac{dx}{x}+tdt=0 \quad\Rightarrow\quad \frac{dx}{x}=-tdt \quad\Rightarrow\quad \int\frac{dx}{x}=-\int tdt \quad\Rightarrow\quad ln|x|=-\frac{t^2}{2}+C.$$

Заменим t на $\frac{y}{x}$. Тогда $ln|x| + \frac{y^2}{2x^2} = C$ – общий интеграл данного ДУ.

Пример 43. Решить дифференциальное уравнение $4x^2y' - 4xy + y^2 = 0$.

Решение. Представим данное уравнение в виде уравнения (37): $y' = \frac{4xy}{4x^2} - \frac{y^2}{4x^2} = \frac{4xy - y^2}{4x^2}$. Для того чтобы определить, является ли уравнение однородным, необходимо проверить, является ли его правая часть $f(x;y) = \frac{4xy - y^2}{4x^2}$ однородной функцией нулевого измерения.

$$f(xt;yt) = \frac{4(xt)(yt) - (yt)^2}{4(xt)^2} = \frac{t^2(4xy - y^2)}{4x^2 \cdot t^2} = t^0 \cdot \frac{(4xy - y^2)}{4x^2} = t^0 \cdot f(x;y).$$

Таким образом, функция $f(x;y) = \frac{4xy - y^2}{4x^2}$ – однородная функция нулевого измерения, а значит данное дифференциальное уравнение является однородным. Применив подстановку (50) и заменив y' выражением $\frac{dy}{dx}$, получим:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4x^2t - x^2t^2}{4x^2} = \frac{x^2(4t - t^2)}{4x^2} = \frac{4t - t^2}{4} \quad (\textit{умножим на } dx).$$

$$dy = \frac{4t - t^2}{4}dx \quad \Rightarrow \quad xdt + tdx = \left(t - \frac{t^2}{4}\right)dx \quad \Rightarrow \quad xdt = \left(t - \frac{t^2}{4} - t\right)dx \Rightarrow$$

$$xdt = -\frac{t^2}{4}dx \, (\textit{умножим на } \frac{1}{x \cdot t^2}, x \neq 0, t \neq 0).$$

$$\frac{dt}{t^2} = -\frac{dx}{4x} \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dt}{t^2} = -\int \frac{dx}{4x} \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{t} = -\frac{1}{4}ln|x| + C \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{y} = \frac{ln|x| - C}{4} \quad \Rightarrow$$

$$y = \frac{4x}{ln|x| - C} \text{ – общее решение.}$$

4.3.4 Линейные дифференциальные уравнения I порядка

Определение 26. Дифференциальное уравнение I порядка называется ***линейным***, если оно содержит искомую функцию y и ее производную в первой степени.

Общий вид такого уравнения:

$$y' + P(x)y = Q(x), \tag{51}$$

где функции $P(x)$ и $Q(x)$ известные непрерывные на некотором промежутке $x \in (a; в)$ функции (в частности, они могут быть постоянными).

Метод решения. Линейные ДУ I порядка решаются с помощью подстановки:

$$y = u \cdot v, \quad y' = u' \cdot v + u \cdot v'. \tag{52}$$

$$u' = \frac{du}{dx}, \; v' = \frac{dv}{dx}$$

Выполнив соответствующую подстановку для y и y' в уравнении (51), получим

$$u'v + uv' + P(x)uv = Q(x) \Rightarrow u'v + u\left(v' + P(x)v\right) = Q(x).$$

Поскольку одна из функций u или v может быть выбрана произвольно, так как лишь произведение uv должно удовлетворять данному ДУ (51), в данном случае, за v принимают любое частное решение уравнения $v' + P(x)v = 0$.

Тогда получим систему двух уравнений.

$$\begin{cases} v' + P(x)v = 0 \\ u'v = Q(x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v = e^{-\int P(x)dx} \\ u = \int Q(x)e^{-\int P(x)dx} + C. \end{cases}$$

Таким образом, общее решение ДУ (51) имеет вид

$$y = e^{-\int P(x)dx}\left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C\right). \tag{53}$$

Пример 44. Решить уравнение: а) $y'x - y = x^3$; б) $y' - 2xy = 2xe^{x^2}$.

Решение. а) Разделим обе его части уравнения на x:

$$y' - \frac{y}{x} = x^2.$$

В нем $P(x) = -\frac{1}{x}$, $Q(x) = x^2$. К полученному уравнению применим подстановку (52). В результате чего оно примет вид:

$$u' \cdot v + u \cdot v' - \frac{uv}{x} = x^2$$

Группируя второе и третье слагаемые, получим:

$$u' \cdot v + u(v' - \frac{v}{x}) = x^2.$$

Выберем функцию v так, чтобы выражение в скобке равнялось нулю, т.е.

$$v' - \frac{v}{x} = 0. \qquad (**)$$

Тогда уравнение примет вид:

$$u' \cdot v = x^2. \qquad (***)$$

Решим уравнение (**). Оно является уравнением с разделяющимися переменными, где $v' = \frac{dv}{dx}$. Его частным решением является функция $v = x$, получающееся из общего при конкретном значении $C = 1$.

Подставляя $v = x$ в уравнение (***), находим вторую неизвестную функцию u.

$$u' \cdot x = x^2 \Rightarrow u' = x \Rightarrow \frac{du}{dx} = x \Rightarrow \int du = \int x dx \Rightarrow u = \frac{x^2}{2} + C.$$

Таким образом, искомое общее решение заданного уравнения примет вид:

$$y = x \cdot \left(\frac{x^2}{2} + C \right) = \frac{x^3}{2} + Cx.$$

б) Данное уравнение является линейным. Поэтому, применяя подстановку (52), получим

$$u'v + uv' - 2xuv = 2xe^{-x^2}$$

или

$$u'v + u(v' - 2xv) = 2xe^{-x^2}.$$

Последнее уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} v' - 2xv = 0 \\ u'v = 2xe^{-x^2} \end{cases}.$$

Решая первое уравнение системы, получим $v = e^{x^2}$, которое получается из его общего решения при $C = 1$.

Подставляя $v = e^{x^2}$ во второе уравнение системы, получим:

$$u' \cdot e^{x^2} = 2xe^{x^2}.$$

Отсюда, разделив обе части на $e^{x^2} \neq 0$, будем иметь уравнение с разделенными переменными, имеющее общее решение $u = x^2 + C$.

Следовательно, искомым общим решением данного уравнения будет $y = e^{x^2} \cdot (x^2 + C)$.

4.3.5 Уравнение Бернулли

Определение 27. Дифференциальное уравнение I порядка называется ***уравнением Бернулли***, если оно представимо в виде:

$$y' + P(x)y = Q(x) \cdot y^n, \tag{54}$$

где $P(x)$ и $Q(x)$ известные непрерывные функции на некотором промежутке $(a;в)$ функции; $n \in (-\infty; +\infty) \setminus \{0; 1\}$.

При $n = 0$ получим линейное ДУ (51), а при $n = 1$ – уравнение с разделяющимися переменными.

Метод решения.

1 способ. Уравнение (54) решается так же, как и линейное ДУ 1-го порядка с помощью подстановки (52).

2 способ. Уравнение (54) можно решить и с помощью подстановки

$$t = y^{n-1}. \tag{55}$$

Пример 45. Найти частное решение дифференциального уравнения $xy' + y = (x+1)y^2$, удовлетворяющее условию: $y(1) = 1$.

Решение. Приведем данное уравнение к виду (51), разделив обе части его на *x*. Тогда получим:

$$y' + \frac{y}{x} = \frac{x+1}{x} y^2.$$

К получившемуся уравнению применив подстановку (52):

$$u'v+uv'+\frac{uv}{x}=\frac{x+1}{x}u^2v^2 \;\Rightarrow\; u'v+u(v'+\frac{v}{x})=\frac{x+1}{x}u^2v^2.$$

Последнее уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} v'+\dfrac{v}{x}=0 \\ u'v=\dfrac{x+1}{x}u^2v^2. \end{cases}$$

Решив первое уравнение системы, получим его частное решение $v=\frac{1}{x}$. Подставив его во второе уравнение системы вместо v , получим:

$$u'\frac{1}{x}=\frac{x+1}{x}\cdot\frac{1}{x^2}\cdot u^2 \;\Rightarrow\; \frac{u'}{u^2}=\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2} \;\Rightarrow\; \frac{du}{u^2}=\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)dx.$$

Интегрируя последнее выражение, найдем функцию u.

$$\int\frac{du}{u^2}=\int\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)dx \;\Rightarrow\; -\frac{1}{u}=ln|x|-\frac{1}{x}+C \;\Rightarrow\; u=\frac{x}{1-xln|x|-Cx}.$$

Таким образом, общим решением данного дифференциального уравнения будет функция $y=\frac{1}{1-xln|x|-Cx}$. Подставляя в него начальные значения: $x=1$ и $y=1$, получим частное решения.

$$1=\frac{1}{1-1ln|1|-C} \;\Rightarrow\; 1=\frac{1}{1-C} \;\Rightarrow\; C=0; \quad y=\frac{1}{1-xln|x|}$$ – частное решение.

Задание № 18: Найти общее (или частное) решение дифференциального уравнения I порядка:

1. $y'=\dfrac{x^2+y^2}{xy}$.

2. $2x^2y'-x^2-y^2=0$.

3. $(3x^2-y^2)dy=2xydx$.

4. $(xy'-y)arctg\dfrac{y}{x}=x$, $y(1)=0$.

5. $x^3y'=\left(x^2+y^2\right)y$.

6. $1+e^{y/x}\left(1-\dfrac{y}{x}\right)y'=0$.

7. $xy' + 2y = \frac{1}{x}$.

8. $(1+x^2)y' + 2xy = 1$.

9. $y' - y = e^x$.

10. $y' + yctgx = sinx$.

11. $y' + 2xy = e^{-x^2}$.

12. $xy' - y = x\sqrt{x}$.

13. $y' = \frac{y}{x} + \frac{x}{y}$, $y(1) = 1$.

14. $xy' + y = x + 1$, $y(-2) = 0$.

15. $xy' + 2y = x^3 \cdot e^x$, $y(1) = 0$.

16. $y' - ytgx = \frac{1}{cos^3 x}$, $y(0) = 2$.

17. $y' - ytgx = \frac{y^2}{cosx}$, $y(\pi/4) = 2/\sqrt{2}$.

18. $xy' - 3y = \frac{x^{13}e^x}{y^3}$, $y(1) = \sqrt[4]{5}$.

4.3.6 Уравнение в полных дифференциалах

Определение 28. Уравнение $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ называется уравнением в полных дифференциалах, если его левая часть является полным дифференциалом некоторой функции $F(x,y)$, т.е. если

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = dF(x,y).$$

Общий интеграл уравнения в полных дифференциалах имеет вид $F(x,y) = C$.

Теорема 15. Пусть функции $M(x,y)$ и $N(x,y)$ определены и непрерывны в некоторой области Dплоскости хОу и имеют в ней непрерывные частные производные $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}$ и $\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$.

Для того, чтобы выражение $M(x,y)dx + N(x,y)dy$ представляло собой полный дифференциал, необходимо и достаточно, чтобы во всех точках области Dвыполнялось условие

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}. \quad (56)$$

Доказательство. Докажем ***необходимое условие***.

Пусть $M(x,y)dx + N(x,y)dy = dF(x,y)$. Покажем, что $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$.

Поскольку $dF(x,y)=\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}dx+\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}dy \Rightarrow \begin{cases} M(x,y)=\frac{\partial F}{\partial x} \\ N(x,y)=\frac{\partial F}{\partial y}. \end{cases}$

Тогда $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial N}{\partial x}=\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}$. По условию теоремы $\frac{\partial M}{\partial y}$ и $\frac{\partial N}{\partial x}$ непрерывные функции, следовательно, $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}=\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$, ч.т.д.

Докажем достаточное условие данной теоремы.

Пусть $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$. Найдем такую функцию $F(x,y)$, что

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=dF(x,y),$$

т.е. для которой $\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x}=M(x,y) \\ \frac{\partial F}{\partial y}=N(x,y). \end{cases}$ Пусть для функции $F(x,y)$ выполняется первое условие системы, т.е. $\frac{\partial F}{\partial x}=M(x,y)$. Проинтегрируем выражение по переменной x.

$$F(x,y)=\int M(x,y)dx+c(y). \tag{57}$$

Необходимо подобрать функцию $c(y)$ так, чтобы $\frac{\partial F}{\partial y}=N(x,y)$. Тогда

$$\frac{\partial F}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\int M(x,y)dx+c(y)\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\int M(x,y)dx\right)+c'(y)=N(x,y) \Rightarrow$$

$$c'(y)=N(x,y)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\int M(x,y)dx\right).$$

Следовательно, искомая функция $c(y)$ существует, если правая часть последнего выражения не зависит от x . В этом можно убедиться, найдя производную от него по x .

Далее интегрируя $c'(y)$ по y , найдем $c(y)$.

$$c(y)=\int \left(N(x,y)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\int M(x,y)dx\right)\right)dy+\tilde{C}.$$

Подставив правую часть $c(y)$ в (57), найдем искомую функцию $F(x,y)$.

$$F(x,y)=\int M(x,y)dx+\int \left(N(x,y)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\int M(x,y)dx\right)\right)dy. \tag{58}$$

А общий интеграл данного ДУ примет вид

$$\int M(x,y)dx+\int\left(N(x,y)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\int M(x,y)dx\right)\right)dy=C. \qquad (59)$$

Пример 46. Решить ДУ $(1+y^2sin2x)dx-2ycos^2xdy=0$.

Решение. Проверим выполнимость условия (56). Выпишем функции $M(x,y)=1+y^2sin2x$, $N(x,y)=-2ycos^2x$. Найдем частные производные

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=\left(1+y^2sin2x\right)_y'=2ysin2x;$$

$$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}=-2y\cdot 2cosx(-sinx)=2ysin2x.$$

Условие (56) выполняется, следовательно, данное уравнение является уравнением в полных дифференциалах.

Найдем такую функцию $F(x,y)$, для которой $\begin{cases}\dfrac{\partial F(x,y)}{\partial x}=1+y^2sin2x\\ \dfrac{\partial F(x,y)}{\partial y}=-2ycos^2x.\end{cases}$

Проинтегрируем первое уравнение системы по переменной x.

$$\int\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}dx=\int\left(1+y^2sin2x\right)dx \Rightarrow$$

$$F(x,y)=x-\frac{y^2}{2}cos2x+c(y). \qquad (*)$$

Далее применим второе условие системы. Для этого найдем производную от функции $F(x,y)$ по переменной y и приравняем ее к правой части второго уравнения системы.

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}=0-ycos2x+c'(y)=-ycos2x+c'(y).$$

Следовательно,

$$-ycos2x+c'(y)=-2ycos^2x.$$

Выразим $c'(y)$, получим

$$c'(y)=ycos2x-2ycos^2x=y\left(cos2x-2cos^2x\right).$$

Проинтегрируем полученное ДУ по переменной y.

$$c(y)=\left(cos2x-2cos^2x\right)\int ydy=\frac{\left(cos2x-2cos^2x\right)y^2}{2}+\widetilde{C}.$$

Подставив $c(y)$ в выражение (*), найдем искомую функцию $F(x,y)$.
Итак,

$$F(x,y)=x-\frac{y^2}{2}cos2x+\frac{\left(cos2x-2cos^2x\right)y^2}{2}+\widetilde{C}.$$

Общим интегралом данного ДУ является выражение

$$x-\frac{y^2}{2}cos2x+\frac{\left(cos2x-2cos^2x\right)y^2}{2}=C.$$

Задание № 19: Найти общий интеграл уравнения в полных дифференциалах:

1. $(x^2+e^xy)dx+(e^x-y^3)dy=0.$
2. $(x^3-y^2)dx-(2xy-siny)dy=0.$
3. $(2x^4-2^xy)dx-\left(\frac{2^x}{ln2}+3y\right)dy=0.$
4. $(lnx-y)dx-(x+2)dy=0.$
5. $(x^2-y^3)dx+(1-3xy^2)dy=0.$
6. $(siny+1)dx+(xcosy-3)dy=0.$
7. $(8sin(5x-1)-y^3)dx-(3xy^2+e^{4y})dy=0.$
8. $(2x+5^xy)dx+\left(\frac{5^x}{ln5}-6cos3y\right)dy=0.$
9. $(2xy+9)dx+(x^2-sin4y)dy=0.$
10. $(4^x-3y)dx+(4^y-3x)dy=0.$
11. $(3x+y)dx+(x+cosy)dy=0.$
12. $(tg7x-xy^2)dx-(x^2y-\sqrt[3]{y})dy=0.$

Контрольные вопросы

1. Что называется дифференциальным уравнением? Привести примеры.
2. Что называется порядком дифференциального уравнения?
3. Что называется решением дифференциального уравнения? Общим? Частным? Общим интегралом? Частным интегралом?
4. Может ли обыкновенное дифференциальное уравнение не содержать переменных x и y в явном виде?
5. Что называется дифференциальным уравнением I порядка?

6. В чем заключается геометрический смысл общего решения дифференциального уравнения? Частного решения?

7. Сформулировать задачу Коши для дифференциального уравнения I порядка.

8. Какие уравнения называются разрешимыми в квадратурах?

9. Какое уравнение называется: а) с разделенными переменными; б) с разделяющимися переменными; в) линейным; г) уравнением Бернулли. Указать способ их решения.

10. Какое решение ДУ называется особым?

4.4 Дифференциальные уравнения II порядка

Если в уравнении (34) положить $n=2$, то полученное уравнение

$$F(x, y, y', y'')=0 \tag{60}$$

будет называться дифференциальным уравнением II порядка.

Уравнение

$$y''=f(x, y, y') \tag{61}$$

называется ***дифференциальным уравнением II порядка, разрешенным относительно старшей производной*** y''**.**

Определение 29. Общим решением уравнения (61) называется функция $y=\varphi(x, C_1, C_2)$, содержащая две произвольные постоянные C_1 и C_2.

Функция $\Phi(x, y, C)=0$ называется ***общим интегралом*** уравнения (61).

Задача Коши для дифференциального уравнения (61) имеет вид:

$$\begin{cases} y''=f(x, y, y') \\ y'(x_0)=y'_0 \\ y(x_0)=y_0, \end{cases} \tag{62}$$

где $\begin{cases} y'(x_0)=y'_0 \\ y(x_0)=y_0 \end{cases}$ называются *начальными условиями* или *условиями Коши*.

Определение 30. Частным решением дифференциального уравнения (61) называется такое решение, которое получается из общего $y=\varphi(x, C_1, C_2)$ при конкретных значениях произвольных постоянных C_1 и C_2.

4.4.1 Линейные дифференциальные уравнения II порядка

Дифференциальное уравнение II порядка называется ***линейным***, если оно содержит искомую функцию y и ее производные y', y'' в первой степени и не содержит их произведений.

Общий вид такого уравнения:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x). \tag{63}$$

Функция $f(x)$ называется ***правой частью*** уравнения (63).

Если в уравнении (63) $f(x)=0$, то полученное уравнение

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \tag{64}$$

называется ***линейным однородным дифференциальным уравнением II порядка.***

Если в уравнении (63) $f(x)\neq 0$, то уравнение (63) называется ***линейным неоднородным дифференциальным уравнением II порядка.***

Теорема 16. Если $y_1(x)$ и $y_2(x)$ – решения уравнения (64), то функция

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) \tag{65}$$

при любых значениях постоянных C_1 и C_2 также является *решением* уравнения (64). Для доказательства этой теоремы достаточно функцию (65) дважды продифференцировать и подставить в левую часть уравнения (64). В результате будет получено тождество.

Определение 31. Два решения $y_1(x)$ и $y_2(x)$ называются *линейно* ***независимыми***, если их отношение не является постоянным числом, т.е. $\dfrac{y_1(x)}{y_2(x)} \neq const$, в противном случае, они называются ***линейно зависимыми***.

Теорема 17 (О структуре общего решения линейного однородного уравнения). Если $y_1(x)$ и $y_2(x)$ – два линейно независимых решения уравнения (64), то структура его общего решения определяется формулой (65).

Теорема 18 (О структуре общего решения линейного неоднородного уравнения). Общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения (63) равно сумме общего решения соответствующего ему линейного однородного дифференциального уравнения (64) и какого-нибудь частного решения уравнения (63).

Итак, если $y_{одн} = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ есть общее решение уравнения (64), а y^* – какое-нибудь частное решение уравнения (63), то

$$y_{неодн} = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + y^* \tag{66}$$

есть общее решение уравнения (63).

4.4.2 Линейные однородные дифференциальные уравнения II порядка с постоянными коэффициентами

Пусть требуется решить линейное однородное дифференциальное уравнение II порядка с постоянными коэффициентами (ЛОДУ):

$$y'' + py' + qy = 0. \tag{67}$$

По ***теореме 17*** о структуре общего решения уравнения (67), имеем:

$$y_{одн} = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x), \tag{68}$$

где $y_1(x)$ и $y_2(x)$ – линейно независимые частные решения уравнения (67).

Доказывается, что частные решения $y_1(x)$ и $y_2(x)$ уравнения (67) имеют вид $y = e^{kx}$, где k – корень уравнения:

$$k^2 + pk + q = 0. \tag{69}$$

Уравнение (69) называется ***характеристическим уравнением*** соответствующего дифференциального уравнения (67).

В таблице 1 указан вид общего решения уравнения (67) в зависимости от корней характеристического уравнения (69).

Таблица 1 Общее решение ЛОДУ

№ п/п	**Корни характеристического уравнения** $k^2 + pk + q = 0$	**Вид общего решения ЛОДУ** $y'' + py' + qy = 0$
1	$D > 0$, $k_1 \neq k_2 \in R$ – ***действительные и неравные***	$y_{одн} = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$
2	$D = 0$, $k_1 = k_2 \in R$ – ***действительные и равные***	$y_{одн} = e^{k_1 x}(C_1 + C_2 x)$
3	$D < 0$, $k_{1;2} = \alpha \pm \beta i$ – ***комплексно-сопряженные***	$y_{одн} = e^{\alpha x}\left(C_1 cos\beta x + C_2 sin\beta x\right)$

Пример 47. Решить линейное однородное дифференциальное уравнение II порядка с постоянными коэффициентами: а) $y''+2y'-15y=0$; б) $y''-10y'+25y=0$; в) $y''-4y'+13y=0$; г) $y''+4y=0,\ y(0)=1,\ y'(0)=4$.

Решение. а) Составляем соответствующее характеристическое уравнение $k^2+2k-15=0$. Его корни $k_1=-5$ и $k_2=3$ действительные и неравные. Следовательно, по случаю 1 из табл. 1, общее решение данного дифференциального уравнения будет иметь вид:

$$y_{одн}=C_1e^{-5x}+C_2e^{3x}.$$

б) Составляем характеристическое уравнение $k^2-10k+25=0$. Его корни $k_1=k_1=5$ действительные и равные. Следовательно, по случаю 2 из табл. 1, общее решение будет иметь вид:

$$y_{одн}=C_1e^{5x}+C_2xe^{5x}.$$

в) Составляем характеристическое уравнение $k^2-4k+13=0$. Его корни $k_{1;\,2}=2\pm 3i$ комплексно-сопряженные. Следовательно, по случаю 3 из табл. 1, общее решение будет иметь вид:

$$y_{одн}=e^{2x}(C_1cos3x+C_2sin3x).$$

г) Составляем характеристическое уравнение $k^2+4=0$. Его корни $k_{1;\,2}=\pm 2i$ – комплексно-сопряженные. Следовательно, по случаю 3 из табл. 1, положив $\alpha=0,\ \beta=2$, получим общее решение данного уравнения:

$$y_{одн}=C_1cos2x+C_2sin2x.$$

Далее, воспользовавшись условием Коши: $y(0)=1$ и $y'(0)=4$, найдем частное решение. Для этого необходимо вычислить $y'_{одн}=-2C_1sin2x+2C_2cos2x$. Подставив в $y_{одн}$ и $y'_{одн}$ начальные значения: $x=0$, $y=1$ и $y'=4$, получим систему, из которой определим постоянные C_1 и C_2.

$$\begin{cases} C_1=1 \\ 2C_2=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1=1 \\ C_2=2. \end{cases}$$

Следовательно, искомое частное решение данного уравнения будет таким:

$$y_{частн}=cos2x+2sin2x.$$

Задание № 20: Решить самостоятельно следующие дифференциальные уравнения:

1. $y''-3y'+2y=0$.
2. $y''-4y=0$.
3. $y''-3y'=0$.

4. $y''+2y'+2y=0$.

5. $y''+4y'+4y=0$.

6. $y''-6y'+9y=0$.

7. $y''+6y'+13y=0$.

8. $y''+y'-2y=0$, $y(0)=3$, $y'(0)=0$.

9. $y''+2y'+5y=0$, $y(0)=2$, $y'(0)=0$.

10. $y''+8y'+16y=0$, $y(0)=3$, $y'(0)=-2$.

11. $y''+y=0$, $y(0)=2$, $y'(0)=3$.

12. $y''-2y'+2y=0$, $y(\pi)=-2$, $y'(\pi)=-3$.

4.4.3 Линейные неоднородные дифференциальные уравнения II порядка с постоянными коэффициентами

Пусть требуется решить линейное неоднородное дифференциальное уравнение II порядка с постоянными коэффициентами (ЛНДУ):

$$y''+py'+qy=f(x). \tag{70}$$

По ***теореме 18*** о структуре общего решения уравнения (70), имеем:

$$y_{лнду}=y_{лоду}+y_ч, \tag{71}$$

где $y_{лоду}$ – общее решение соответствующего ему однородного уравнения (находится из табл. 1 в зависимости от корней характеристического уравнения), а $y_ч$ – какое-либо частное решение уравнения (70), которое определяется по виду его правой части, т.е. по $f(x)$.

В таблице 2 указан вид частного решения $y_ч$ уравнения (70) в зависимости от его правой части $f(x)$.

Таблица 2. Частное решение ЛНДУ

№	Вид правой части $f(x)$	Случаи	Вид частного решения y^*
1	$f(x)=a$	а) $k_1\neq 0$, $k_2\neq 0$ б) $k_1=0$ или $k_2=0$	а) $y_ч=A$ б) $y_ч=Ax$
2	$f(x)=ax+в$	а) $k_1\neq 0$, $k_2\neq 0$ б) $k_1=0$ или $k_2=0$	а) $y_ч=Ax+B$ б) $y_ч=x(Ax+B)=Ax^2+Bx$
3	$f(x)=ax^2+вx+c$	а) $k_1\neq 0$, $k_2\neq 0$ б) $k_1=0$ или	а) $y_ч=Ax^2+Bx+C$

		$k_2=0$	б) $y_ч=x\left(Ax^2+Bx+C\right)$
4	$f(x)=ax^n+вx^{n-1}+...+cx+d$ - многочлен n-ой степени	а) $k_1\neq 0$, $k_2\neq 0$ б) $k_1=0$ или $k_2=0$	а) $y_ч=Ax^n+Bx^{n-1}+...+Cx+D$ б) $y_ч=x\left(Ax^n+Bx^{n-1}+...+Cx+D\right)$
5	$f(x)=ae^{mx}$	а) $k_1\neq m$, $k_2\neq m$ б) $k_1=m$ или $k_2=m$ в) $k_1=k_2=m$	а) $y_ч=Ae^{mx}$ б) $y_ч=Axe^{mx}$ в) $y_ч=Ax^2e^{mx}$
6	$f(x)=P_n(x)\cdot e^{mx}$	а) $k_1\neq m$, $k_2\neq m$ б) $k_1=m$ или $k_2=m$ в) $k_1=k_2=m$	а) $y_ч=Q_n(x)e^{mx}$ б) $y_ч=xQ_n(x)e^{mx}$ в) $y_ч=x^2Q_n(x)e^{mx}$
7	$f(x)=e^{mx}(acosnx+вsinnx)$	а) $k_{1;2}\neq m\pm ni$ б) $k_{1;2}=m\pm ni$	а) $y_ч=e^{mx}(Acosnx+Bsinnx)$ б) $y_ч=xe^{mx}(Acosnx+Bsinnx)$
8	$f(x)=acosnx+вsinnx$	а) $k_{1;2}\neq \pm ni$ б) $k_{1;2}=\pm ni$	а) $y_ч=Acosnx+Bsinnx$ б) $y_ч=x(Acosnx+Bsinnx)$
9	$f(x)=e^{mx}\left[P_n(x)cosnx+P_m(x)sinnx\right]$	а) $k_{1;2}\neq m\pm ni$ б) $k_{1;2}=m\pm ni$	а) $y_ч=e^{mx}\left[Q^1(x)cosnx+Q^2(x)sinnx\right]$ б) $y_ч=xe^{mx}\left[Q^1(x)cosnx+Q^2(x)sinnx\right]$ где $Q^1(x)$ и $Q^2(x)$ - многочлены, степень которых равна большей из степеней $P_n(x)$ и $P_m(x)$.
10	$f(x)=f_1(x)+f_2(x)$	$y_ч=y_{ч_1}+y_{ч_2}$, где $y_{ч_1}$ - частное решение уравнения $y''+py'+qy=f_1(x)$, а $y_{ч_2}$ - частное решение уравнения $y''+py'+qy=f_2(x)$; $f_1(x)$ и $f_2(x)$ соответствуют одному из случаев (1) – (8) табл. 2.	

Пример 48. Решить линейное неоднородное дифференциальное уравнение II порядка с постоянными коэффициентами:

а) $y''+y'=6x+7,\ y(0)=1,\ y'(0)=-2$; б) $y''-y'-6y=12x^2-2x+1$;

в) $y''+25y=-34e^{3x},\ y(0)=0,\ y'(0)=1$; г) $y''-2y'+10y=e^{3x}(2x-1)$;

д) $y''+2y'+2y=3e^{2x}(cosx+sinx)$, е) $y''+y=4xcosx$;

ж) $y''-3y'+2y=3e^{2x}+2x^2$.

Решение. а) Найдем общее решение соответствующего однородного уравнения: $y''+y'=0$. Характеристическое уравнение $k^2+k=0$ имеет корни $k_1=0$ и $k_2=-1$. Тогда общим решением однородного уравнения будет функция: $y_{лоду}=C_1+C_2e^{-x}$.

Правая часть данного ЛНДУ уравнения является многочленом 1-ой степени. Один из корней характеристического уравнения равен нулю, а именно $k_1=0$. Следовательно, согласно случаю (2б) из табл. 2, частное решение $y_ч$ будет иметь вид: $y_ч=Ax^2+Bx$. Найдем производные $y'_ч$ и $y''_ч$, подставим в левую часть заданного уравнения.

$$y'_ч=2Ax+B; \quad y''_ч=2A .$$

$$2A+2Ax+B=6x+7 .$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях *x*, получаем систему:

$$\begin{matrix} x^1: \\ x^0: \end{matrix} \begin{cases} 2A=6 \\ 2A+B=7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=3 \\ B=1. \end{cases}$$

Таким образом, частное решение ЛНДУ будет иметь вид: $y_ч=3x^2+x$, а общее: $y_{лнду}=C_1+C_2e^{-x}+3x^2+x$.

При наличии начальных условий требуется найти частное решение данного ДУ. Для этого найдем производную от общего решения ЛНДУ.

$$y'_{лнду}=-C_2e^{-x}+6x+1.$$

Далее составим систему и найдем произвольные постоянные C_1 и C_2.

$$\begin{cases} C_1+C_2=1 \\ -C_2+1=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1=-2 \\ C_2=3. \end{cases}$$

Следовательно, частным решением данного ДУ является функция

$$y_{лнду}=3e^{-x}+3x^2+x-2 .$$

б) Составим линейное однородное дифференциальное уравнение, соответствующее данному неоднородному: $y''-y'-6y=0$. Так как его характеристическое уравнение $k^2-k-6=0$ имеет корни: $k_1=-2$ и $k_2=3$, то по случаю 1 из табл. 1 найдем его общее решение.

$$y_{лоду} = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{3x}.$$

Составим общий вид частного решения y^* ЛНДУ по виду правой части $f(x)$. Правая часть данного ЛНДУ является многочленом второй степени: $f(x) = 12x^2 - 2x + 1$. Так как $k_1 \neq 0$ и $k_2 \neq 0$, то частное решение будем искать в виде многочлена той степени, какой является правая часть, т.е. в виде: $y_ч = Ax^2 + Bx + C$ (случай (3а) табл. 2). Поскольку $y_ч$ является частным решением данного дифференциального уравнения, следовательно, оно должно удовлетворять ему, т.е. обращать его в тождество. Найдем производные $y'_ч$ и $y''_ч$:

$$y'_ч = 2Ax + B; \quad y''_ч = 2A.$$

Подставив $y_ч$, $y'_ч$ и $y''_ч$ в левую часть данного уравнения, получим выражение:

$$2A - 2Ax - B - 6Ax^2 - 6Bx - 6C = 12x^2 - 2x + 1$$

или

$$-6Ax^2 + x(-2A - 6B) + (2A - B - 6C) = 12x^2 - 2x + 1.$$

Методом неопределенных коэффициентов находим постоянные *A*, *B* и *C* так, чтобы последнее равенство стало тождеством. Для этого приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях переменной *x*. В результате получим систему трех уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{array}{l} x^2: \\ x^1: \\ x^0: \end{array} \begin{cases} -6A = 12 \\ -2A - 6B = -2 \\ 2A - B - 6C = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -2 \\ B = 1 \\ C = -1. \end{cases}$$

Следовательно, $y_ч = -2x^2 + x - 1$. Согласно формуле (71), $y_{лнду} = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{3x} - 2x^2 + x - 1$ есть общее решение данного ЛНДУ.

в) Найдем общее решение ЛОДУ $y'' + 25y = 0$. Составив характеристическое уравнение $k^2 + 25 = 0$ и найдя его корни: $k_1 = 5i$; $k_2 = -5i$, определим общее решение однородного уравнения. Согласно случаю (3) из табл. 1. имеем:

$$y_{лоду} = C_1 cos 5x + C_2 sin 5x.$$

Правая часть данного ЛНДУ соответствует случаю (5а) из табл. 2, в котором $k_1 \neq k_2 \neq m = 3$. Согласно этому, частное решение будет иметь вид: $y_ч = Ae^{3x}$. Найдем $y'_ч = 3Ae^{3x}$, $y''_ч = 9Ae^{3x}$.

Подставим $y_ч$ и $y''_ч$ в левую часть данного уравнения, получим:

$$9Ae^{3x} + 25Ae^{3x} = -34e^{3x} \quad (: e^{3x} \neq 0 \; при \; любом \; x \in (-\infty; +\infty)).$$

$$9A + 25A = -34 \;\Rightarrow\; A = -1.$$

Следовательно, $y_ч = -e^{3x}$ и $y_{лнду} = C_1 cos5x + C_2 sin5x - e^{3x}$. Поскольку имеются начальные условия, то требуется частное решение данного ДУ. Найдем производную от общего решения

$$y'_{лнду} = -5C_1 sin5x + 5C_2 cos5x - 3e^{3x}.$$

Составим систему, подставив начальные данные, решив которую, найдем C_1 и C_2.

$$\begin{cases} C_1 - 1 = 0 \\ 5C_2 - 3 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 1 \\ C_2 = 0{,}8. \end{cases}$$

Таким образом, частное решение ДУ будет иметь вид

$$y_{частн/\,лнду} = cos5x + 0{,}8 sin5x - e^{3x}.$$

г) Находим общее решение соответствующего ЛОДУ $y'' - 2y' + 10y = 0$. Характеристическое уравнение $k^2 - 2k + 10 = 0$ имеет корни $k_{1;\,2} = 1 \pm 3i$. Следовательно, по случаю (3) табл. 1, общим решением однородного уравнения будет функция: $y_{лоду} = e^x\left(C_1 cos3x + C_2 sin3x\right)$.

Правая часть неоднородного уравнения соответствует случаю (6а) табл. 2, так как $m = 3 \neq k_{1;\,2} = 1 \pm 3i$ и $P_1(x) = 2x - 1$ есть многочлен 1-ой степени. Следовательно, частным решением будет функция $y_ч = e^{3x}\left(Ax + B\right)$, у которой $y'_ч = e^{3x}\left(3Ax + 3B + A\right)$; $y''_ч = e^{3x}\left(9Ax + 9B + 6A\right)$.

Подставив $y_ч$, $y'_ч$ и $y''_ч$ в левую часть заданного уравнения и сократив на $e^{3x} \neq 0$, получим:

$$13Ax + 13B + 4A = 2x - 1.$$

Методом неопределенных коэффициентов находим, что $A = \dfrac{2}{13}$, $B = -\dfrac{5}{169}$.

Следовательно, частное решение будет иметь вид: $y_ч = -e^{3x}\left(\frac{2}{13}x - \frac{5}{169}\right)$, а общее:

$$y_{лнду} = e^x\left(C_1 cos3x + C_2 sin3x\right) - e^{3x}\left(\frac{2}{13}x - \frac{5}{169}\right).$$

д) Находим общее решение соответствующего однородного уравнения $y'' + 2y' + 2y = 0$. Характеристическое уравнение $k^2 + 2k + 2 = 0$ имеет корни $k_{1;2} = -1 \pm i$, тогда $y_{одн} = e^{-x}(C_1 cosx + C_2 sinx)$.

Сравнивая правую часть данного уравнения со случаем (7а) табл. 2, заключаем, что числа $m \pm ni = 2 \pm i$ не являются корнями характеристического уравнения. Тогда частным решением будет функция $y_ч = e^{2x}\left(Acosx + Bsinx\right)$.

Найдем производные первого и второго порядков.

$$y'_ч = e^{2x}\left(2Acosx + 2Bsinx - Asinx + Bcosx\right);$$

$$y''_ч = e^{2x}\left(3Acosx + 3Bsinx - 4Asinx + 4Bcosx\right).$$

Подставим производные в левую часть ДУ .

$$e^{2x}(3Acosx + 3Bsinx - 4Asinx + 4Bcosx) + e^{2x}(4Acosx + 4Bsinx -$$
$$-2Asinx + 2Bcosx) + e^{2x}(2Acosx + 2Bsinx) = 3e^{2x}(cosx + sinx)$$

Сократим обе части на $e^{2x} \neq 0$ и преобразуем полученное выражение.

$$9Acosx + 9Bsinx - 6Asinx + 6Bcosx = 3cosx + 3sinx .$$

Отсюда, приравнивая коэффициенты при $sinx$ и $cosx$, определим неизвестные A и B:

$$\begin{matrix} sinx: \\ \\ cosx: \end{matrix} \quad \begin{cases} 9B - 6A = 3 \\ \\ 9A + 6B = 3 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} A = \dfrac{1}{13} \\ \\ B = \dfrac{15}{39}. \end{cases}$$

Следовательно, частное решение $y_ч = \frac{e^{2x}}{13}\left(cosx + \frac{15}{3}sinx\right)$, а общее решение неоднородного уравнения:

$$y_{лнду} = e^{-x}\left(C_1 cosx + C_2 sinx\right) + \frac{e^{2x}}{13}\left(cosx + \frac{15}{3}sinx\right).$$

е) Характеристическое уравнение $k^2+1=0$ однородного уравнения $y''+y=0$ имеет корни $k_{1;2}=\pm i$. Поэтому

$$y_{лоду}=C_1 cosx+C_2 sinx.$$

Сравнивая правую часть данного неоднородного ДУ с выражением, соответствующим случаю 9б табл. 2, заключаем, что $m\pm ni=\pm i$ являются корнями характеристического уравнения; $P_1(x)=4x$ – многочлен 1-ой степени, $P_2(x)=0$; наивысшая степень многочленов $P_1(x)$ и $P_2(x)$ равна 1. Следовательно, частным решение будет функция

$$y_ч=x\left[(Ax+B)cosx+(Cx+D)sinx\right]$$

или

Дважды продифференцируем функцию $y_ч$.

$$y_ч'=\left(2Ax+B+Cx^2+Dx\right)cosx+\left(-Ax^2-Bx+2Cx+D\right)sinx.$$

$$y_ч''=\left(-Ax^2-Bx+2A-Bx+4Cx+2D\right)cosx+\left(-4Ax-2B-Cx^2-Dx+2C\right)sinx$$

Подставим $y_ч$ и $y_ч''$ в ЛНДУ и преобразуем полученное выражение.

$$(2A+4Cx+2D)cosx+(-4Ax-2B+2C)sinx=4xcosx.$$

Приравнивая коэффициенты в обеих частях равенства при $sinx$, $xsinx$, $cosx$ и $xcosx$, получим систему:

$$\begin{cases}4C=4\\2A+2D=0\\-4A=0\\2C-2B=0\end{cases}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}C=1\\D=0\\A=0\\B=1.\end{cases}$$

Таким образом, частное решение $y_ч=xcosx+x^2sinx$, а искомое общее решение

$$y_{лнду}=\left(C_1+x\right)cosx+\left(C_2+x^2\right)sinx.$$

ж) Правая часть заданного уравнения представлена в виде суммы двух функций: $f_1(x)=3e^{2x}$ и $f_1(x)=2x^2$. Согласно случаю (10) табл. 2, данное неоднородное дифференциальное уравнение разобьем на два уравнения, а его общее решение будем находить в виде:

$$y_{лнду} = y_{лоду} + y_{ч_1} + y_{ч_2}. \quad (*)$$

Итак,

$$y'' - 3y' + 2y = 3e^{2x}. \quad (**)$$

$$y'' - 3y' + 2y = 2x^2. \quad (***)$$

Решаем по отдельности каждое из неоднородных уравнений (**), (***) и находим их частные решения $y_{ч_1}$ и $y_{ч_2}$ соответственно. Общие решения соответствующих однородных уравнений будут совпадать.

Характеристическое уравнение $k^2 - 3k + 2 = 0$ имеет корни $k_{1;2} = 1; 2$. Поэтому $y_{лоду} = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$.

Правая часть уравнения (**) соответствует случаю (5б), в котором $m = 2 = k_2$, следовательно, частное решение $y_{ч_1} = Axe^{2x}$.

Находим производные: $y'_{ч_1} = (2Ax + A)e^{2x}$, $y''_{ч_1} = (4Ax + 4A)e^{2x}$. Подставляем $y_ч$, $y'_ч$ и $y''_ч$ в левую часть уравнения (**) и определяем, что $A = 3$.

Следовательно, $y_{ч_1} = 3xe^{2x}$.

Теперь рассмотрим уравнение (***). Его частное решение $y_{ч_2} = Ax^2 + Bx + C$ (по случаю (3а)). Дважды дифференцируя его, находим $y'_{ч_2}$ и $y''_{ч_2}$:

$$y'_{ч_2} = 2Ax + B; \qquad y''_{ч_2} = 2A.$$

Подставив $y_ч$, $y'_ч$ и $y''_ч$ в левую часть уравнения (***) и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях *x*, получим: $A = 1$, $B = 3$, $C = 3{,}5$. Тогда $y_{ч_2} = x^2 + 3x + 3{,}5$.

Таким образом, искомое общее решение заданного неоднородного уравнения, согласно формуле (*) будет иметь вид:

$$y_{лнду} = C_1 e^x + \left(C_2 + 3x\right)e^{2x} + x^2 + 3x + 3{,}5.$$

Задание № 21. Решить самостоятельно следующие ЛНДУ 2-го порядка с постоянными коэффициентами.

1. $y'' + 2y' - 3y = 6x$ 2. $y'' + 3y' + 2y = x^2 - 3x + 5$. 3. $y'' - 3y' + 2y = e^{3x}$.

4. $y''-4y'+4y=e^{2x}$.

5. $y''+4y=4sin2x-8cos2x$.

6. $y''+y=2cosx$, $y(0)=2$, $y'(0)=0$.

7. $y''+4y=sinx$, $y(0)=1$, $y'(0)=1$.

8. $y''-2y'+10y=10x^2+18x+6$, $y(0)=1$, $y'(0)=3{,}2$.

9. $y''+y=-sin2x$, $y(\pi)=1$, $y'(\pi)=1$.

10. $y''-y=2xsinx$.

11. $y''-y'=-5e^{-x}(cosx+sinx)$ $y(0)=-4$, $y'(0)=5$.

12. $y''-3y'+2y=x+1-e^{-2x}$

4.5 Дифференциальные уравнения высших порядков
4.5.1 Метод вариации произвольных постоянных

Пусть дано ЛНДУ 2-го порядка с постоянными коэффициентами (см. уравнение 70). Если в нем функция $f(x)$ не является многочленом n - й степени или ее вид не соответствует ни одному из случаев, представленных в табл. 2 на с. 89, то оно может быть решено методом вариации произвольных постоянных (методом Лагранжа). Суть его заключается в отыскании частного решения ЛНДУ, если известно общее решение соответствующего ЛОДУ. Отметим, что данным методом решаются линейные неоднородные уравнения и с переменными коэффициентами.

Итак, пусть $y_1(x)$ и $y_2(x)$ фундаментальная система решений соответствующего ЛОДУ. Тогда общее решение ЛНДУ следует искать в виде

$$y_{лнду}=C_1(x)y_1(x)+C_2(x)y_2(x), \qquad (72)$$

где функции $C_1(x)$ и $C_2(x)$ определяются из системы уравнений

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1(x)+C_2'(x)y_2(x)=0 \\ C_1'(x)y_1'(x)+C_2'(x)y_2'(x)=f(x). \end{cases} \qquad (73)$$

$$\begin{cases} C_1(x) = -\int \dfrac{y_2 \cdot f(x)}{W\left(y_1, y_2\right)} dx \\ C_2(x) = -\int \dfrac{y_1 \cdot f(x)}{W\left(y_1, y_2\right)} dx \end{cases}, \qquad (74)$$

где $W\left(y_1, y_2\right) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$ – определитель Вронского.

Пример 49. Найти общее (частное) решение ДУ.

а) $y'' - 2y' = \dfrac{1}{x}$; б) $y'' - 4y = tgx$, $y(1) = 2$, $y'(1) = 1$; в) $y'' + 4y' + 4y = \dfrac{e^x}{cosx}$.

Решение. а) Найдем общее решение соответствующего ЛОДУ. Корни характеристического уравнения $k_{1,2} = 0; 2$.

$$y_{лоду} = C_1 + C_2 e^{2x}.$$

Отсюда $\begin{matrix} y_1(x) = 1; & y_2(x) = e^{2x}. \\ y_1'(x) = 0; & y_2'(x) = 2e^{2x}. \end{matrix}$, определитель Вронского

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} 1 & e^{2x} \\ 0 & 2e^{2x} \end{vmatrix} = 2e^{2x}, \ f(x) = \frac{1}{x}.$$

$$C_1(x) = -\int \frac{e^{2x} dx}{2e^{2x} x} = -\int \frac{dx}{2x} = -\frac{1}{2} ln|x| + C_1,$$

$$C_2(x) = \int \frac{dx}{2e^{2x} x} = \frac{1}{2} \int \frac{e^{-2x} dx}{x} = \begin{Bmatrix} e^{-2x} = u; & du = -2e^{-2x} dx \\ \dfrac{dx}{x} = dv; & v = ln|x| \end{Bmatrix} =$$

$$= uv - \int v du = \frac{e^{-2x} ln|x|}{2} + \int e^{-2x} ln|x| dx = \begin{Bmatrix} ln|x| = u; & du = \dfrac{dx}{x} \\ e^{-2x} dx = dv; & v = -\dfrac{e^{-2x}}{2} \end{Bmatrix} =$$

$$= e^{-2x} ln|x| - \frac{1}{2} \int \frac{e^{-2x} dx}{x} + C_2.$$

Отсюда, как из уравнения выражаем искомый интеграл:

$$\frac{1}{2}\int \frac{e^{-2x}dx}{x} = \frac{e^{-2x}ln|x| + C_2}{2} \quad \Rightarrow C_2(x) = \frac{e^{-2x}ln|x| + C_2}{2}.$$

Тогда общее решение ДУ будет иметь вид

$$y_{лнду} = C_1 + C_2 e^{2x} - \frac{e^{2x}ln|x|}{2} + \frac{ln|x| + C_2 e^{2x}}{2}.$$

Задание № 22. Найти общее (частное) решение ДУ.

1. $\begin{cases} y'' - 6y' + 9y = \dfrac{e^{3x}}{x^2} \\ y(1) = 1 \\ y'(1) = 1. \end{cases}$

2. $y'' - 4y = \dfrac{e^{2x}}{x}$.

3. $y'' + 4y = \dfrac{1}{sin2x}$.

4. $y'' - 2y' + 2y = e^{2x}cos^2 x$.

5. $\begin{cases} y'' + 3y' = \dfrac{1}{cos^2 x} \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = -1. \end{cases}$

6. $y'' - 4y' - 5y = \dfrac{e^{5x}}{\sqrt{x}}$.

7. $y'' - y = e^{5x} tgx$.

8. $y'' + 2y' + 5y = \dfrac{e^{-x}}{sin2x}$.

9. $\begin{cases} y'' + y = cosx \cdot cos2x \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = -1. \end{cases}$

10. $y'' - 10y' + 25y = \dfrac{sinx}{xe^{-5x}}$.

11. $y'' - 5y' = \dfrac{e^x}{1 - e^x}$.

12. $y'' + y' = cos^2 x$.

4.5.2 Дифференциальные уравнения высших порядков, допускающие понижение порядка

1 тип. Дифференциальное уравнение n - го порядка вида

$y^{(n)} = f(x)$.(54)

Метод решения. Общее решение уравнения (54)находится n -кратным интегрированием функции $f(x)$, т.е.

$$y = \underbrace{\int\int\int \ldots \int}_{n \text{ раз интегрировать}} f(x)dx^n. \tag{75}$$

2 тип. Дифференциальные уравнения, не содержащие неизвестную функцию y в явном виде

$$F\left(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, ..., y^{(n)}\right)=0\ . \tag{76}$$

Метод решения. ДУ (76) решается с помощью такой подстановки, в которой производная функции y низшего порядка, входящей в данное ДУ, обозначается за новую неизвестную функцию $p(x)$, т.е.

$$y^{(k)}=p(x). \tag{77}$$

После соответствующих подстановок получим ДУ $(n-k)$-го порядка, т.е. порядок данного ДУ понизится на k единиц

$$F\left(x, p, p', ..., p^{(n-k)}\right)=0.$$

3 тип. Дифференциальные уравнения, не содержащие независимую переменную x в явном виде

$$F\left(y, y', y'', ..., y^{(n)}\right)=0\ . \tag{78}$$

Метод решения. ДУ (78) решается с помощью подстановки

$$\begin{cases} y'=z(y) \\ y''=z\cdot z'(y) \\ y'''=z\left[\left(z'(y)\right)^2+z\cdot z''(y)\right] \\ \ldots \end{cases} \tag{79}$$

При этом порядок данного ДУ понизится на единицу.

Пример 50. Найти общее (частное) решение ДУ.

А) $y'''=sin(2x-1)+4^{-5x}+1$; б) $y''=\dfrac{y'}{2x-1}$, $y(1)=2$, $y'(1)=1$; в) $y''=y\cdot y'$.

Решение. а) Данное уравнение относится к ***1-му типу***. Следовательно, трижды интегрируя его, найдем общее решение.

После первого раза интегрирования получим:

$$y''=\int\left(sin(2x-1)+4^{-5x}+1\right)dx=-\frac{1}{2}cos(2x-1)-\frac{4^{-5x}}{5ln4}+x+C_1.$$

После второго раза интегрирования получим:

$$y'=\int\left(-\frac{1}{2}cos(2x-1)-\frac{4^{-5x}}{5ln4}+x+C_1\right)dx=-\frac{1}{4}sin(2x-1)+\frac{4^{-5x}}{25ln^2 4}+\frac{x^2}{2}+C_1x+C_2$$

После третьего раза интегрирования получим общее решение ДУ:

$$y=\int\left(-\frac{1}{4}sin(2x-1)+\frac{4^{-5x}}{25ln^2 4}+\frac{x^2}{2}+C_1x+C_2\right)dx=$$

$$=\frac{1}{8}cos(2x-1)-\frac{4^{-5x}}{125ln^3 4}+\frac{x^3}{6}+C_1\frac{x^2}{2}+C_2x+C_3.$$

б) Данное уравнение относится ко ***2-му типу***. Применим для него подстановку (57), обозначив наименьшую производную $y'=p$. Тогда уравнение примет вид

$$p'=\frac{p}{2x-1}\;\Rightarrow\;\frac{dp}{dx}=\frac{p}{2x-1}\Rightarrow\;\frac{dp}{p}=\frac{dx}{2x-1}\Rightarrow ln|p|=\frac{1}{2}ln|2x-1|+lnC_1\Rightarrow$$

$$\Rightarrow ln|p|=ln\left|C_1\sqrt{2x-1}\right|\Rightarrow p=C_1\sqrt{2x-1}\Rightarrow y'=C_1\sqrt{2x-1}\Rightarrow$$

$$y=\frac{2C_1(2x+1)\sqrt{2x-1}}{3}+C_2$$ – общее решение.

Далее, подставив начальные значения в функцию y и ее производную, найдем произвольные постоянные C_1 и C_2.

$$\begin{cases}\dfrac{2C_1\cdot 3}{3}+C_2=2\\ C_1=1\end{cases}\;\Rightarrow\;\begin{cases}C_1=1\\ C_2=0.\end{cases}$$

Тогда функция $y=\dfrac{2\sqrt{(2x-1)^3}}{3}$ будет искомым частным решением ДУ.

в) Данное уравнение относится к ***3-му типу***. Применим для него подстановку (79). В нашем случае подстановка будет следующая:

$$\begin{cases} y' = z \\ y'' = z \cdot z' \end{cases}$$

Тогда уравнение примет вид: $zz' = yz \Rightarrow z' = y$. Интегрируя его, найдем функцию z.

$$z = \int y dy \Rightarrow z = \frac{y^2}{2} + C_1 \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} \textit{обратная замена} \\ z = y'(x) \end{matrix} \right\} \Rightarrow$$

$$y' = \frac{y^2}{2} + C_1 \;\Rightarrow\; \frac{dy}{\frac{y^2}{2} + C_1} = dx \;\Rightarrow y = C_1\sqrt{2} arctg \frac{y}{\sqrt{2}C_1} + C_2$$ - общее решение.

Задание № 23 :найти общее (частное) решение ДУ.

1. $\begin{cases} y'' = 4 - \dfrac{12}{x^5} + (3+2x)^2 \\ y(-1) = -1 \\ y'(-1) = \dfrac{1}{24}. \end{cases}$

2. $y'' - \dfrac{3}{x} = sin(x+3) + \sqrt{x}$

3. $y''' - 3^{2x} = \sqrt{2x-1} + 5x$.

4. $y''' - 3x^2 = cos(1-x) + e^{-2x}$.

5. $\begin{cases} x(y''+1) + y' = 0 \\ y(1) = 1 \\ y'(1) = -1. \end{cases}$

6. $\begin{cases} xy'' - y' = x^3 \\ y(1) = 2 \\ y'(1) = 1. \end{cases}$

7. $y'' - \dfrac{y'}{2x+3} = x(2x+3)$.

8. $\begin{cases} (x-1)^3 y'' - (y')^2 = 0 \\ y(2) = 1 \\ y'(2) = 2. \end{cases}$

9. $\begin{cases} 2y(y')^3 = -y'' \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = -3. \end{cases}$

10. $y''(1+y) = (y')^2 + y$.

11. $2yy'' - (y')^2 = 0$.

12. $\begin{cases} y'' = \dfrac{y'}{y^2} \\ y(1) = 1 \\ y'(1) = 1 \end{cases}$.

4.5.3 Системы дифференциальных уравнений

Нормальная система ДУ имеет вид

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = f_1\left(t, x_1, x_2, ..., x_n\right) \\ \dfrac{dx_2}{dt} = f_2\left(t, x_1, x_2, ..., x_n\right) \\ .... \\ \dfrac{dx_n}{dt} = f_n\left(t, x_1, x_2, ..., x_n\right), \end{cases} \qquad (80)$$

где $x_1, x_2, ..., x_n$ – неизвестные системы (56), функции f_i, $i = \overline{1, n}$ являются линейными функциями относительно $x_1, x_2, ..., x_n$.

Нормальная система ДУ решается с помощью дифференцирования одного из уравнений и исключением всех неизвестных, кроме одного. В результате система сведется к одному ДУ.

Пример 51. Решить систему ДУ.

а) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -2x - 5y + e^{2t} \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 4y. \end{cases}$; б) $\begin{cases} x' = x - 5y \\ y' = x - y - sint \\ x(0) = 3, \ y(0) = 2. \end{cases}$

Решение. а) Из второго уравнения системы выразим x и продифференцируем его по переменной t, т.е.

$$\begin{cases} x = y' - 4y \\ y'' = x' + 4y' \end{cases} \begin{Bmatrix} \textit{подставим в } y'' \textit{ правые} \\ \textit{части выражений } x \textit{ и } x' \end{Bmatrix}.$$

В результате получим ЛНДУ 2-го порядка с постоянными коэффициентами.

$$y'' = -2y' + 8y - 5y + e^{2t} + 4y' \Rightarrow y'' - 2y' - 3y = e^{2t} \text{ – ЛНДУ.}$$

Характеристическое уравнение $k^2 - 2k - 3 = 0$ имеет корни $k_{1,2} = -1; 3$. Следовательно, $y_{лоду} = C_1 e^{-t} + C_2 e^{3t}$. Далее найдем какое-либо частное решение

ЛНДУ в виде $y_ч = Ae^{2t}$. Отсюда, найдя $y'_ч = 2Ae^{2t}$, $y''_ч = 4Ae^{2t}$ и подставив их в ЛНДУ, определим $A = -\frac{1}{3}$. Тогда $y_ч = -\frac{e^{2t}}{3}$. Следовательно,

$$y = C_1 e^{-t} + C_2 e^{3t} - \frac{e^{2t}}{3} - \textit{общее решение} \Rightarrow y' = -C_1 e^{-t} + 3C_2 e^{3t} - \frac{2e^{2t}}{3}.$$

Далее, чтобы найти общее решение x в выражение $x = y' - 4y$ подставим правые части y и y': $x = -5C_1 e^{-t} - C_2 e^{3t} - 2e^{2t}$.

Таким образом, общим решением данной системы является система

$$\begin{cases} x = -5C_1 e^{-t} - C_2 e^{3t} - 2e^{2t} \\ y = C_1 e^{-t} + C_2 e^{3t} - \dfrac{e^{2t}}{3}. \end{cases}$$

б) Аналогично,

$$\begin{cases} x = y' + y + sint \\ y'' = x' - y' - cost \end{cases} \Rightarrow y'' = x - 5y - y' - cost \Rightarrow y'' = y' + y + sint - 5y - y' - cost \Rightarrow$$

$$y'' + 4y = sint - cost - \textit{ЛНДУ}\ ;\ k_{1,2} = \pm 2i\ ;\ y_{лоду} = C_1 cos2t + C_2 sin2t.$$

$$y_ч = Acost + Bsint \Rightarrow y'_ч = -Asint + Bcost \Rightarrow y''_ч = -Acost - Bsint.$$

Выполнив соответствующую подстановку в ЛНДУ, получим

$$-Acost - Bsint + 4Acost + 4Bsint = sint - cost \Rightarrow 3Acost + 3Bsint = sint - cost$$

$$\begin{matrix} cost\colon\ 3A = -1 \\ sint\colon\ 3B = 1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} A = -\dfrac{1}{3} \\ B = \dfrac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow y_ч = -\frac{1}{3}cost + \frac{1}{3}sint.$$

Следовательно, общее решение $y_{лнду} = C_1 cos2t + C_2 sin2t - \frac{1}{3}cost + \frac{1}{3}sint.$

$$y'_{лнду} = -2C_1 sin2t + 2C_2 cos2t + \frac{1}{3}sint + \frac{1}{3}cost.$$

Далее найдем общее решение для $x(t)$

$$x(t) = \left(C_2 - 2C_1\right)sin2t + \left(C_1 + 2C_2\right)cos2t + \frac{5}{3}sint.$$

Таким образом, общее решение системы имеет вид

$$\begin{cases} x(t) = (C_2 - 2C_1)sin2t + (C_1 + 2C_2)cos2t + \frac{5}{3}sint \\ y(t) = C_1cos2t + C_2sin2t - \frac{1}{3}cost + \frac{1}{3}sint. \end{cases}$$

Воспользовавшись начальными условиями, найдем C_1 и C_2.

$$\begin{cases} 3 = C_1 + 2C_2 \\ 2 = C_1 - \frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = \frac{7}{3} \\ C_2 = \frac{1}{3}. \end{cases}$$

Тогда

$$\begin{cases} x(t) = -\frac{13}{3}sin2t + 3cos2t + \frac{5}{3}sint \\ y(t) = \frac{7}{3}cos2t + \frac{1}{3}sin2t - \frac{1}{3}cost + \frac{1}{3}sint \end{cases}$$ - частное решение данной системы ДУ.

Задание № 24: решить систему ДУ.

1. $\begin{cases} x' = -x - 5y \\ y' = x + y. \end{cases}$

2. $\begin{cases} x' = -2x - y \\ y' = x + 4y - cos3t. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x' = -x - 5y + e^{-t} \\ y' = 3x + 4y. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x' = -3x - 5y \\ y' = 2x + y + t^2. \end{cases}$

5. $\begin{cases} x' = -2x - 5y - t \\ y' = x + y \\ x(0) = 1,\ y(0) = 2. \end{cases}$

6. $\begin{cases} x' = -x - 5y + 2t \\ y' = x + y - 1 \\ x(0) = 1,\ y(0) = 1. \end{cases}$

7. $\begin{cases} x' = -2x + y - t^2 - t \\ y' = 3x + y \\ x(0) = 1,\ y(0) = 2. \end{cases}$

8. $\begin{cases} x' = -x - 3y \\ y' = x + y \\ x(0) = 1,\ y(0) = -2. \end{cases}$

9. $\begin{cases} x' = -2x - y + 2t \\ y' = x + 3y - t. \end{cases}$

10. $\begin{cases} x' = -3x + y + e^{t} \\ y' = x + 4y - e^{t}. \end{cases}$

11. $\begin{cases} x' = 2x - y + t \\ y' = -x + 3y + 2t. \end{cases}$

12. $\begin{cases} x' = -x - 5y + t^2 \\ y' = x + 2t. \end{cases}$

Раздел V. ЗАДАНИЯ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

Контрольная работа № 1

Задание: найти неопределенный интеграл.

В-1	В-2	В-3
1) $\int 3^{4-6x}dx$; 2) $\int \frac{dx}{6x+5}$; 3) $\int 3\sqrt{cosx}\cdot sinxdx$; 4) $\int \frac{dx}{(x-3)ln^2(x-3)}$; 5) $\int ln(x+1)dx$; 6) $\int 3x\cdot cos(4x-1)dx$.	1) $\int \frac{5dx}{25x^2+49}$; 2) $\int \frac{3dx}{sin^2(6x-2)}$; 3) $\int \frac{4sin2xdx}{\sqrt{cos2x}}$; 4) $\int e^{x^3+4x-5}\cdot(3x^2+4)dx$; 5) $\int x\cdot e^{-x/3}dx$; 6) $\int 2arcsin3xdx$.	1) $\int \frac{1+\sqrt{x}}{x^2}dx$; 2) $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2-3}}+\int \frac{3dx}{\sqrt{4-25x^2}}$; 3) $\int e^{sin2x}\cdot cos2xdx$; 4) $\int \frac{ln^3(x+5)dx}{x+5}$; 5) $\int x\cdot ln(1-x)dx$; 6) $\int (2x-1)\cdot lnxdx$.
В-4	**В-5**	**В-6**
1) $\int \frac{1+\sqrt[3]{y^2}}{\sqrt[6]{y}}dy$; 2) $\int \frac{dx}{\sqrt{3-5x}}$; 3) $\int \frac{arccos^3 2xdx}{\sqrt{1-4x^2}}$; 4) $\int \frac{e^{1/x}dx}{x^2}$; 5) $\int e^{2x}\cdot 4xdx$; 6) $\int ln(2x+3)dx$.	1) $\int \frac{(2x+x^3)dx}{x^5}$; 2) $\int \left(\frac{1}{6-7x}+\frac{3}{\sqrt{36-9x^2}}\right)dx$; 3) $\int \frac{\sqrt[3]{ln^5 x}dx}{x}$; 4) $\int \frac{8sin4xdx}{1-cos4x}$; 5) $\int (5x+3)\cdot sinxdx$; 6) $\int 3arccos4xdx$.	1) $\int \frac{3\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^5}}{\sqrt[5]{x}}dx$; 2) $\int \frac{dx}{4x+3}$; 3) $\int e^{cosx}\cdot sinxdx$; 4) $\int \frac{4sin(5x-1)dx}{\sqrt[5]{cos^3(5x-1)}}$; 5) $\int x\cdot cos3xdx$; 6) $\int ln(8x)dx$.
В-7	**В-8**	**В-9**
1) $\int \frac{dx}{\sqrt{8x-3}}+\int \frac{4dx}{10x+5}$;	1) $\int \frac{(4x+3x^3)dx}{x^5}$;	1) $\int \frac{dx}{16-25x^2}+\int e^{3-\frac{6}{7}x}dx$;

2) $\int(3^{4-7x}+3x^5)dx$; 3) $\int\frac{4x^3dx}{\sqrt{4+x^4}}$; 4) $\int\frac{\sqrt[3]{arcsinx}dx}{\sqrt{1-x^2}}$; 5) $\int 3x\cdot sin2xdx$; 6) $\int\sqrt[3]{x}\cdot ln5xdx$.	2) $\int\left(\frac{1}{cos^2(5-2x)}+\frac{4}{\sqrt{5-3x}}\right)dx$ 3) $\int\frac{e^{tgx}dx}{cos^2x}$; 4) $\int\frac{cosxdx}{sin^3x}$; 5) $\int(3x-1)\cdot cos5xdx$; 6) $\int arcctg2xdx$.	2) $\int\frac{5x-\sqrt[3]{x^5}}{\sqrt[6]{x}}dx$; 3) $\int\frac{\sqrt[3]{arctgx}dx}{1+x^2}$; 4) $\int\frac{e^{ctgx}dx}{sin^2x}$; 5) $\int(2x+1)\cdot e^{3x}dx$; 6) $\int ln4xdx$.
B-10	**B-11**	**B-12**
1) $\int(4^{5x+2}-e^{2+\frac{7}{5}x})dx$; 2) $\int\frac{9dx}{\sqrt{6x^2+3}}+\int\frac{2dx}{5x-1}$; 3) $\int\frac{4cos5xdx}{\sqrt[3]{sin^5 5x}}$; 4) $\int\frac{ln^5(x+3)dx}{x+3}$; 5) $\int(3x-1)\cdot sinxdx$; 6) $\int arcsin4xdx$.	1) $\int(5^{3-\frac{7}{8}x}+\frac{4}{\sqrt{36-9x^2}})dx$; 2) $\int\frac{(3x^2-4x^3)dx}{5x^7}$; 3) $\int\frac{4xdx}{8x^2+4}$; 4) $\int\frac{\sqrt[3]{ln^4(2x+3)}dx}{2x+3}$; 5) $\int\sqrt[3]{5+9x^3}\cdot x^2dx$; 6) $\int 5arctgxdx$.	1) $\int\frac{(4x^3+5x^5-x^6)dx}{x^{10}}$; 2) $\int\left(\frac{4}{5-6x}+\frac{3}{\sqrt{25-49x^2}}\right)dx$; 3) $\int(e^{-5x+3}+2^{4x-3}+8x^2)dx$; 4) $\int 4sin^3x\cdot cosxdx$; 5) $\int\frac{ln^3(5x+7)dx}{5x+7}$; 6) $\int ln3xdx$.
B-13	**B-14**	**B-15**
1) $\int\left(\frac{5}{4x+11}-e^{3x+1}-5\right)dx$ 2) $\int\frac{2dx}{\sqrt{4x^2+1}}+\int\frac{3dx}{225+25x^2}$	1) $\int\left(\frac{6}{4x-8}+\frac{3}{sin^2(3x+5)}\right)dx$ 2) $\int(30^{-\frac{4}{7}x+2}-4e^{5-\frac{6}{11}x})dx$	1) $\int\left(\frac{10}{4-10x}+\frac{2}{\sqrt{8x^2-3}}\right)dx$ 2) $\int\left(\frac{15}{16-4x^2}+\frac{4}{\sqrt{6x}}\right)dx$ 3) $\int\frac{dx}{(5x+3)ln^5(5x+3)}$;

3) $\int \frac{ln^5(4x-3)dx}{4x-3}$;

4) $\int \frac{e^{\sqrt{x}}dx}{\sqrt{x}}$;

5) $\int 3x \cdot e^{5x}dx$;

6) $\int ln(4x+5)dx$.

3) $\int \frac{(18x^2+4)dx}{\sqrt[3]{6x^3+4x-5}}$;

4) $\int \frac{dx}{(6x-11)ln^3(6x-11)}$;

5) $\int (3x+1) \cdot e^{5x-1}dx$;

6) $\int ln(6x+3)dx$.

4) $\int \sqrt[3]{sin(5x+1)} \cdot cos(5x+1)dx$

5) $\int (2x+3) \cdot e^{5x+10}dx$;

6) $\int ln7xdx$.

В-16

1) $\int \left(\frac{12}{3x+5} + \frac{4}{\sqrt{6x-3}} \right) dx$

2) $\int (e^{5x+3} - 4^{3x+2} - \frac{12}{cos^2 6x})dx$

3) $\int \frac{e^{1/x}dx}{x^2}$;

4) $\int \frac{tg(x+1)dx}{cos^2(x+1)}$;

5) $\int (2-4x) \cdot e^{6x+5}dx$;

6) $\int arcsin3xdx$.

В-17

1) $\int \frac{(4x^2+10x^3+\sqrt[3]{x^5})dx}{x^5}$;

2) $\int \left(\frac{4}{25x^2-9} + \frac{3}{\sqrt{6x+3}} \right) dx$;

3) $\int \frac{e^{\sqrt{6x+5}}dx}{\sqrt{6x+5}}$;

4) $\int \frac{dx}{(2x+3)ln^3(2x+3)}$;

5) $\int (4x+1) \cdot e^{6x+3}dx$;

6) $\int ln(7x+11)dx$.

В-18

1) $\int \left(\frac{6}{4-3x} + \frac{5}{\sqrt{2x+5}} + 6 \right) dx$;

2) $\int (e^{4x-7} + 3^{8x+2} +$

$+ \frac{4}{49x^2-25})dx$

3) $\int e^{4x^3+4x^2+6} \cdot (12x^2+8x)dx$;

4) $\int \frac{dx}{(6x+5)\sqrt{ln(6x+5)}}$;

5) $\int x \cdot sin5xdx$;

6) $\int ln12xdx$.

В-19

1) $\int \left(\frac{6}{10x+11} - \frac{4}{\sqrt{6x+5}} - 3 \right) dx$

2) $\int \frac{(5x^3+4x^5)dx}{x^6}$;

3) $\int \sqrt{sin^3 x} \cdot cosxdx$;

4) $\int \frac{(18x^2+8x)dx}{\sqrt[3]{6x^3+4x^2-1}}$;

5) $\int 2x \cdot cos(6x+5)dx$;

В-20

1) $\int \left(\frac{6}{\sqrt{4x-8}} + \frac{1}{sin^2(3x-5)} \right)$

2) $\int (3^{-\frac{4}{7}x+2} - 4e^{5-\frac{1}{11}x})dx$

3) $\int \frac{(18x^2+4)dx}{\sqrt[3]{6x^3+4x-5}}$;

4) $\int \frac{dx}{(5x-11)ln^3(5x-11)}$;

5) $\int (3x+1) \cdot e^{-5x-1}dx$;

В-21

1) $\int \left(\frac{6}{4x-8} + \frac{3}{sin^2(3x+5)} \right) dx$

2) $\int (30^{-\frac{4}{7}x+2} - 4e^{5-\frac{6}{11}x})dx$

3) $\int \frac{(18x^2+4)dx}{\sqrt[3]{6x^3+4x-5}}$;

4) $\int \frac{dx}{(6x-11)ln^3(6x-11)}$;

5) $\int (3x+1) \cdot e^{5x-1}dx$;

6) $\int arctg 2x dx$.

6) $\int ln(6x-3)dx$.

6) $\int ln(6x+3)dx$.

B-22

1) $\int \frac{-3dx}{\sqrt{16-4x^2}} + \int \frac{4dx}{5x+10}$;

2) $\int (e^{5-7x} + 10^{-6-\frac{7}{10}x})dx$;

3) $\int \frac{(18x^2+4)dx}{\sqrt[3]{(6x^3+4x)^5}}$;

4) $\int sin^3(5x+3)\cdot cos(5x+3)dx$;

5) $\int (6x-8)\cdot cos 3x dx$;

6) $\int arccos 5x dx$.

B-23

1) $\int \left(\frac{3}{2x+3} - \frac{4}{121x^2-36} + 10\right)dx$

2) $\int (e^{3x+5} - 4^{2x-3} + \sqrt{x})dx$;

3) $\int \frac{(20x^3-6x^2+5)dx}{\sqrt[5]{5x^4-2x^3+5x-1}}$;

4) $\int \frac{sin(4x+5)dx}{\sqrt[3]{cos^5(4x+5)}}$;

5) $\int (3-4x)\cdot e^{-4x+5}dx$;

6) $\int 5 ln 10x dx$.

B-24

1) $\int \frac{(3x^5+6x^2-4)dx}{x^2}$;

2) $\int (e^{-8x+10} - 8^{-3x+5} - 4)dx$;

3) $\int \frac{sin(4x+3)dx}{cos^3(4x+3)}$;

4) $\int \frac{5^{tgx}dx}{cos^2 x}$;

5) $\int (7x+3)\cdot sin x dx$;

6) $\int ln(5x-4)dx$.

B-25

1) $\int \frac{-5dx}{\sqrt{64-25x^2}} + \int \frac{2dx}{5+10x}$;

2) $\int (e^{5x-7} + 10^{-6+\frac{5}{12}x})dx$;

3) $\int \frac{dx}{x^2-5x+3}$;

4) $\int \sqrt{sin^3(4x+3)}\cdot cos(4x+3)dx$

5) $\int (2x-5)\cdot cos 6x dx$;

6) $\int (3x+2)^2 ln(3x+2)dx$.

B-26

1) $\int \left(\frac{3}{2+3x} - \frac{6}{81x^2-36} + 2\right)dx$

2) $\int (e^{3-5x} - 4^{5x-3} + \sqrt[5]{x^2})dx$;

3) $\int \frac{(3x-1)dx}{x^2+7x-6}$;

4) $\int \frac{sin(1-6x)dx}{\sqrt[5]{cos^6(1-6x)}}$;

5) $\int (4-7x)\cdot e^{-6x+2}dx$;

6) $\int \sqrt{(2x-1)} ln(2x-1)dx$.

B-27

1) $\int \frac{(2x^5+5x^2-14)dx}{x^{-2}}$;

2) $\int (e^{-2x+1} - 6^{-4x+5} - 7)dx$

3) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+5x-7}}$;

4) $\int \frac{4^{ctg 3x}dx}{sin^2 3x}$;

5) $\int (4x-3)\cdot sin 5x dx$;

6) $\int 6x^3 ln x dx$.

B-28

1) $\int \frac{(5x^{-5}-3x^2+7)dx}{x^{-3}}$;

B-29

1) $\int \frac{(7x^{-6}-3x^{-2}+10)dx}{x^3}$;

B-30

1) $\int \frac{(2x^{-8}-7x^2+5)dx}{x^{-6}}$;

2) $\int(e^{-4x+7}-8^{-2x+3}+12)dx$;	2) $\int(e^{-4x+5}-\frac{4}{\sqrt{5x+6}}-2)dx$;	2) $\int(\frac{5}{8x-7}-8^{-7x+5}-2)dx$;
3) $\int\frac{3sin(4-3x)dx}{cos^5(4-3x)}$;	3) $\int\frac{dx}{4x^2-3x+2}$;	3) $\int\frac{(4x-3)dx}{\sqrt{x^2-4x+3}}$;
4) $\int\frac{10^{\sqrt{x}}dx}{\sqrt{x}}$;	4) $\int 2^{arcsin2x}\cdot\frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}}$;	4) $\int 5^{arccos5x}\frac{dx}{\sqrt{1-25x^2}}$;
5) $\int(2-9x)\cdot sin7xdx$;	5) $\int(1-4x)\cdot sin5xdx$;	5) $\int(2+6x)\cdot cos4xdx$;
6) $\int(4x)^2 ln4xdx$.	6) $\int(7-6x)ln(7-6x)dx$.	6) $\int(4-9x)^{-3}ln(4-9x)dx$.

Контрольная работа № 2

Задание:а)вычислить определенные интегралы и найти $S_{фиг}$,ограниченной указанными кривыми; б) вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Ох и Оу плоской фигуры.

В-1	**В-2**	**В-3**
1) $\int_1^2\frac{4x^2+6\sqrt{x}+5}{x^3}dx$;	1) $\int_1^2\frac{x^2-2x+3}{\sqrt{x}}dx$;	1) $\int_1^4\frac{1+3y^2}{\sqrt{y}}dy$;
2) $\int_0^{\pi/3}2sin6xdx$;	2) $\int_0^x costdt$;	2) $\int_1^2\frac{dx}{3x+5}$;
3) $\int_0^2\frac{ln^2(x+5)dx}{x+5}$;	3) $\int_0^{\pi/6}\frac{sinxdx}{\sqrt{cosx}}$;	3) $\int_0^1 4arcsin2xdx$;
4) $\int_{1/4}^1 x\cdot ln(4x)dx$;	4) $\int_{-2/3}^{-1/3}x\cdot e^{-3x}dx$;	4) $\int_1^e\frac{\sqrt{ln^3x}dx}{x}$;
5) $y=-x^2,\quad y=x-2$.	5) $y=6x^2,\quad y=-x+2$.	5) $y=3x^2+1,\quad y=3x+7$.
В-4	**В-5**	**В-6**
1) $\int_1^4\frac{x^2-2x^{-2/3}+3\sqrt{x}}{x}dx$;	1) $\int_1^8\frac{3x^5-2\sqrt[3]{x}-6}{x^2}dx$;	1) $\int_1^8\frac{\sqrt[3]{x^5}-2x+3}{\sqrt[3]{x^2}}dx$;
2) $\int_e^{e^2}\frac{dx}{x\cdot ln^3x}$;	2) $\int_{-2/5}^{-1/5}t\cdot e^{-5t}dt$;	2) $\int_0^1\frac{dx}{x^2+4x+5}$;

3) $\int\limits_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{16-4x^2}}$; 4) $\int\limits_0^{1/4} x\cdot e^{4x}dx$; 5) $y=\frac{x^2}{4}$, $y=\frac{2}{x}$, $x=4$.	3) $\int\limits_0^{\pi} \cos(5x-\pi)dx$; 4) $\int\limits_{-3}^{-2} \frac{dx}{\sqrt{3-4x}}$; 5) $y=-x^2-2x+3$, $y=-2x-1$.	3) $\int\limits_0^{\pi/2} \sin(4x+\frac{\pi}{2})dx$; 4) $\int\limits_1^{e} \frac{dx}{x\sqrt{4-\ln^2 x}}$; 5) $y=\frac{1}{2}x^2-2x+2$, $x+2y-8=0$.
B-7 1) $\int\limits_{16}^{81} \frac{5\sqrt[4]{x^5}-12\sqrt[4]{x}-x^2+6}{\sqrt[4]{x^3}}dx$; 2) $\int\limits_{-3}^{0} \frac{dx}{\sqrt{25+3x}}+\int\limits_0^{1/2} \frac{9dx}{-3x-6}$; 3) $\int\limits_0^{\pi} x\cdot\cos 3x dx$; 4) $\int\limits_5^{8} \frac{\ln^3(x-3)dx}{x-3}$; 5) $y=\frac{1}{4}x^2-2x+4$, $y=\frac{x}{2}$.	**B-8** 1) $\int\limits_1^{3} \frac{4x^2-2x+3}{x^{-5}}dx$; 2) $\int\limits_0^{1} \frac{6x-1}{3x^2-x+5}dx$; 3) $\int\limits_2^{3} e^{5x+7}dx$; 4) $\int\limits_0^{1} x\cdot \mathrm{arctg} x dx$; 5) $y=\frac{1}{4}x^2-1$, $y=-\frac{3}{4}x^2+8$.	**B-9** 1) $\int\limits_2^{5} \frac{16x^5-2x^3+8}{4\sqrt{x}}dx$; 2) $\int\limits_0^{2} 8\sqrt[3]{4x+1}dx+\int\limits_0^{5} 3^{-2x+3}dx$; 3) $\int\limits_0^{\pi/12} \frac{6\sin 3x dx}{\sqrt[3]{\cos 3x}}$; 4) $\int\limits_1^{2} \frac{dx}{\sqrt{16x^2-6}}$; 5) $y=\frac{8}{x}$, $y=-x+9$.
B-10 1) $\int\limits_1^{3} \frac{x^2-2\sqrt[4]{x}+10}{5\sqrt{x}}dx$; 2) $\int\limits_2^{3} \frac{5dt}{10x-3}$; 3) $\int\limits_{\pi/2}^{\pi/4} \frac{\cos dx}{\sqrt{\sin^3 x}}$;	**B-11** 1) $\int\limits_{27}^{64} \frac{8\sqrt[3]{x}-2\sqrt[3]{x^5}+12}{4\sqrt[3]{x^2}}dx$ 2) $\int\limits_0^{2} \frac{4dx}{(4x+6)\cdot\ln^3(4x+6)}$; 3) $\int\limits_0^{2} \frac{7^{5-6x}}{12}dx$;	**B-12** 1) $\int\limits_1^{4} \frac{10x^3-2x+3\sqrt{x}}{x^4}dx$; 2) $\int\limits_0^{\pi/4} tg(3x-\pi)dx$; 3) $\int\limits_0^{1} e^{3x^2+2x-10}\cdot(6x+2)dx$;

4) $\int\limits_{0,2}^{2} x\cdot ln5xdx$; 5) $y=\frac{1}{3}x^2-2x+3$, $y=\frac{1}{3}x+1$.	4) $\int\limits_{0}^{1} 4\cdot arccos2xdx$; 5) $y=\frac{1}{4}x^2$, $y=-x+3$.	4) $\int\limits_{0}^{1} 3arctg2xdx$; 5) $y=x^2+1$, $y=-x+3$ и осью Ox.
В-13	**В-14**	**В-15**
1) $\int\limits_{1}^{32} \frac{12\sqrt[5]{x}-2\sqrt[5]{x^6}+4x}{\sqrt[5]{x^2}}dx$; 2) $\int\limits_{1}^{2} \sqrt{10+5x}dx$; 3) $\int\limits_{1/5}^{2/5} x\cdot ln5xdx$; 4) $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{25-9x^2}}$; 5) $y=\frac{6}{x}$, $y=-x+7$.	1) $\int\limits_{1}^{9} \frac{3\sqrt{x}+2x-7}{x^2}dx$; 2) $\int\limits_{0}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{9x^2+36}+\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{4-3x}}$; 3) $\int\limits_{0}^{1/3} e^{6-3x}dx$; 4) $\int\limits_{0}^{1/7} x\cdot e^{-7x}dx$; 5) $y=-x^2+2x$, $y=-x$.	1) $\int\limits_{1}^{27} \frac{2\sqrt[3]{2x}-3\sqrt[3]{x}-4}{x}dx$; 2) $\int\limits_{0}^{\pi} 4sin2xdx$; 3) $\int\limits_{0}^{\pi/3} 4^{sin3x}\cdot cos3xdx$; 4) $\int\limits_{1}^{2} \frac{dx}{x^2+3x-1}$; 5) $y=(x+1)^2$, $y=-x+4$ и осью Ox.
В-16	**В-17**	**В-18**
1) $\int\limits_{1}^{3} \frac{3x^2-5\sqrt[5]{x^2}+4}{\sqrt[5]{x}}dx$; 2) $\int\limits_{0}^{\pi/2} cos(5x-\frac{\pi}{2})dx$; 3) $\int\limits_{1}^{2} \frac{dx}{25x^2-9}+\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{25-9x^2}}$; 4) $\int\limits_{1}^{2} \frac{e^{1/x}dx}{x^2}$; 5) $y=3x^2+1$, $y=3x+7$.	1) $\int\limits_{1}^{4} \frac{x^2-2x+3\sqrt{x}}{x^2}dx$; 2) $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{81-25x^2}}$; 3) $\int\limits_{0}^{\pi/2} (x+\frac{\pi}{2})\cdot sinxdx$; 4) $\int\limits_{0}^{2} (e^{2-3x}+4^{-5x+4})dx$; 5) $y=\sqrt{x}$, $y=0$, $x=4$.	1) $\int\limits_{1}^{32} \frac{3\sqrt[5]{x^2}+5\sqrt[5]{x^7}+3\sqrt[5]{x}}{\sqrt[5]{x^3}}dx$ 2) $\int\limits_{2/3}^{11/16} \frac{dx}{\sqrt{6x+5}}$; 3) $\int\limits_{-3}^{0} x\cdot e^{-x/3}dx$; 4) $\int\limits_{0}^{\pi/3} 4^{cos3x}\cdot sin3xdx$; 5) $y=x^2$, $y=\sqrt{x}$.

В-19	**В-20**	**В-21**
1) $\int\limits_{1}^{2} \frac{18x^2-12x-7}{6\sqrt{x}}dx$; 2) $\int\limits_{-1/4}^{-1/2} e^{4x+5}dx$; 3) $\int\limits_{1}^{\pi/6} 2x\cdot cos3xdx$; 4) $\int\limits_{1}^{4} e^{\sqrt{x}}\cdot\frac{dx}{\sqrt{x}}$; 5) $y=3x^2$, $y=-x+5$.	1) $\int\limits_{1}^{32} \frac{3x^2-6x+4}{6\sqrt[5]{x^3}}dx$; 2) $\int\limits_{0}^{\pi/4} cos(2x-\frac{\pi}{4})dx$; 3) $\int\limits_{-5}^{-3} \frac{(12x^3-14x+5)dx}{\sqrt{3x^4-7x^2+5x-3}}$; 4) $\int\limits_{1/2}^{1} \frac{\sqrt[3]{ln2x}}{2x}dx$; 5) $y=-x^2+2x$, $y=0$.	1) $\int\limits_{8}^{16} \frac{5x^6+3\sqrt[5]{x}}{\sqrt[3]{x}}dx$; 2) $\int\limits_{0}^{\pi/3} cos(x+\frac{\pi}{3})dx$; 3) $\int\limits_{0}^{\pi/6} \frac{sinxdx}{\sqrt[5]{cos^3x}}$; 4) $\int\limits_{-5/3}^{-2/3} 6x\cdot e^{-3x}dx$; 5) $y=x^2-3x-1$, $y=-x^2-2x+5$.
В-22	**В-23**	**В-24**
1) $\int\limits_{1}^{2} \frac{2x^5-4x^6+3}{x^3}dx$; 2) $\int\limits_{0}^{x} (6sin3t-10tg2t)dt$; 3) $\int\limits_{1}^{2} 5^{ln2x}\cdot\frac{dx}{2x}$; 4) $\int\limits_{-\pi/3}^{-\pi/2} 3x\cdot sin3xdx$. 5) $y=\frac{1}{2}x^2+x+2$, $y=-\frac{1}{2}x^2-5x+7$.	1) $\int\limits_{1}^{2} \frac{10x^4-2x^3+3x}{x^5}dx$; 2) $\int\limits_{-3}^{-1} \left(\frac{9}{\sqrt[3]{4-3x}}+\frac{4}{2x-7}\right)dt$; 3) $\int\limits_{1/3}^{2/3} 4^{ln3x}\cdot\frac{dx}{x}$; 4) $\int\limits_{-2/7}^{-1/7} x\cdot e^{-7x}dx$. 5) $y=x^2$, $y=4$.	1) $\int\limits_{1}^{2} \frac{3x^6-2x^7+3x-4}{x^7}dx$; 2) $\int\limits_{-4}^{0} \left(\frac{4}{\sqrt{-4x+9}}+\frac{3}{12x-6}\right)dx$; 3) $\int\limits_{0}^{\pi/4} \frac{8sin4xdx}{\sqrt[3]{cos^5 4x}}$; 4) $\int\limits_{0}^{1/2} 4x\cdot sin2xdx$. 5) $y=x^2-5$, $y=-x-2$.
В-25	**В-26**	**В-27**
1) $\int\limits_{4}^{25} \frac{10\sqrt{x}-25x+5}{5\sqrt{x}}dx$; 2) $\int\limits_{4}^{5} (\frac{4}{8x+6}+\frac{3}{\sqrt[4]{9-3x}})dx$;	1) $\int\limits_{1}^{3} \frac{x^5-2x^3+3x-6}{x^4}dx$; 2) $\int\limits_{2}^{3} (\frac{36}{4-6x}+\frac{12}{\sqrt[3]{4-6x}})dx$;	1) $\int\limits_{1}^{16} \frac{4x^2-2\sqrt{x^3}+12}{\sqrt{x}}dx$; 2) $\int\limits_{0}^{1} (\frac{3}{6x+4}+\frac{4}{\sqrt{6x+4}})dx$;

3) $\int_0^{\pi/3} 3^{arctgx} \cdot \frac{dx}{1+x^2}$; 4) $\int_{-3/4}^{-1/2} 8x \cdot ln4xdx$; 5) $y=-x^2, \quad y=-x+2$.	3) $\int_3^4 \frac{ln^5(x-2)dx}{(x-2)}$; 4) $\int_{-2/7}^{-1/7} 14x \cdot e^{-7x}dx$; 5) $y=2x^2+3x+1$, $y=-x^2-2x+9$.	3) $\int_0^{\pi/4} 8^{tgx} \cdot \frac{dx}{cos^2 x}$; 4) $\int_0^1 4x \cdot e^{-x}dx$; 5) $y=\frac{1}{3}x^2-3x+2$, $y=-\frac{2}{3}x^2-2x+4$.
В-28 1) $\int_4^{25} \frac{10\sqrt{x}-25x+5}{5\sqrt{x}}dx$; 2) $\int_4^5 (\frac{4}{8x+6}+\frac{3}{\sqrt[4]{9-3x}})dx$; 3) $\int_0^{\pi/3} 3^{arctgx} \cdot \frac{dx}{1+x^2}$; 4) $\int_{-3/4}^{-1/2} 8x \cdot ln4xdx$; 5) $y=-x^2, \quad y=-x+2$.	**В-29** 1) $\int_1^3 \frac{x^5-2x^3+3x-6}{x^4}dx$; 2) $\int_2^3 (\frac{36}{4-6x}+\frac{12}{\sqrt[3]{4-6x}})dx$; 3) $\int_3^4 \frac{ln^5(x-2)dx}{(x-2)}$; 4) $\int_{-2/7}^{-1/7} 14x \cdot e^{-7x}dx$; 5) $y=2x^2+3x+1$, $y=-x^2-2x+9$.	**В-30** 1) $\int_1^{16} \frac{4x^2-2\sqrt{x^3}+12}{\sqrt{x}}dx$; 2) $\int_0^1 (\frac{3}{6x+4}+\frac{4}{\sqrt{6x+4}})dx$; 3) $\int_0^{\pi/4} 8^{tgx} \cdot \frac{dx}{cos^2 x}$; 4) $\int_0^1 4x \cdot e^{-x}dx$; 5) $y=\frac{1}{3}x^2-3x+2$, $y=-\frac{2}{3}x^2-2x+4$.

Контрольная работа № 3

Задание: 1)найти общий член ряда u_n и проверить выполнимость необходимого условия сходящегося ряда; 2)-10) исследовать ряд на сходимость (если есть смысл – исследовать на абсолютную и условную сходимость).

В-1	**В-2**	**В-3**
1) $1+\frac{1}{2^5}+\frac{1}{3^5}+\frac{1}{4^5}+...$ 2) $\frac{10}{2\cdot 3}+\frac{10}{6\cdot 9}+\frac{10}{10\cdot 27}+...$	1) $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}...$ 2) $\frac{8}{cos1}+\frac{8^2}{cos2}+\frac{8^3}{cos3}+...$	1) $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+...$ 2) $2^2\cdot 3+3^3\cdot 4+4^4\cdot 5+5^5\cdot 6+...$

3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^{n+1}}{(n+5)!}$; 4) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{27}\right)^{\frac{n}{3}}$; 5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n-1}{3n^3-8}$. 6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^2}$; 7) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{3^n}$; 8) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{3n^3-8}$; 9) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[4]{(2n+6)^3}}$; 10) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)ln(n+1)}$.	3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-1}{5^{n+2}}$; 4) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{25}{16}\right)^{\frac{n}{2}}$; 5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{6n+5}}$. 6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n5^{n+1}}$; 7) $\sum_{n=1}^{\infty}sin^n\left(\frac{\pi}{\sqrt{n}}\right)$; 8) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+9}$; 9) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{4n^2+9}$; 10) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+4}}$.	3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^4\cdot 2^n}{4n^4-1}$; 4) $\sum_{n=1}^{\infty}(16)^{n/4}$; 5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{(4n-6)^2}}$. 6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+2)5^n}$; 7) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$; 8) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{16+25n^2}$; 9) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}n}{16+25n^2}$; 10) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{16+25n^2}}$.
B-4 1) $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{24}...$ 2) $\frac{1}{6\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 9}+\frac{1}{8\cdot 11}+...$ 3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(7n-3)^2\cdot 9^n}$; 4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^{3n}}{9^n}$;	**B-5** 1) $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 9}...$ 2) $\frac{1}{ln^3 2}+\frac{1}{ln^4 5}+\frac{1}{ln^5 8}+...$ 3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\cdot n}{n^2-2}$; 4) $\sum_{n=1}^{\infty}5^{n^2-4n}$;	**B-6** 1) $3+\frac{3}{2}+\frac{3}{4}+\frac{3}{8}+...$ 2) $\frac{1}{\sqrt{3\cdot 2^3}}+\frac{1}{\sqrt{3\cdot 2^6}}+\frac{1}{\sqrt{3\cdot 2^{12}}}+...$ 3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n+1}{\sqrt{n3^n}}$; 4) $\sum_{n=1}^{\infty}(125)^{n/3}$;

<table>
<tr>
<td>
5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{36+81n^2}$.

6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-1}}{(2n+1)!}$;

7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$;

8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)ln^3(n+1)}$.

9) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (n^2+4)}{n^3+1}$;

10) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{3n+1}$.
</td>
<td>
5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+5}$.

6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{5^{n-1}}{3^n (2n+1)!}$;

7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{6^{2n}}$;

8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+4n^2}$;

9) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{3n^4+1}$;

10) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n^3+1)}{3n^5+1}$.
</td>
<td>
5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{2n-7}}$.

6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$;

7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{4^{3n-1}}{2^{2n+1}}$;

8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{16+4n^2}}$;

9) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n^3+1}{7n^3+5}$;

10) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} (2n^2+1)}{10n^2+1}$.
</td>
</tr>
<tr>
<td>
B-7
1) $\frac{3}{1^2}+\frac{5}{2^2}+\frac{7}{3^2}+\frac{9}{4^2}\ldots$

2) $\frac{tg\sqrt{1}}{3}+\frac{tg\sqrt{2}}{3^2}+\frac{tg\sqrt{3}}{3^3}+\ldots$

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{6^{n+2}}{n^2+1}$;

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\sqrt[5]{n^3}}$;

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n ln^3(2-3n)}{(2-3n)}$.

6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{7^n}{n+6}$;
</td>
<td>
B-8
1) $1+\frac{2}{4}+\frac{4}{5}+\frac{6}{6}+\ldots$

2) $\frac{e^3}{2}+\frac{e^4}{4}+\frac{e^5}{6}+\frac{e^6}{8}+\ldots$

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)(n+4)}{2^n}$;

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\sqrt[3]{n^5}}$;

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n^3}}$.

6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{6^n}$;
</td>
<td>
B-9
1)$1+\frac{3}{4}+\frac{5}{9}+\frac{7}{14}+\ldots$

2)
$\frac{2\cdot 1}{sin3}+\frac{2\cdot 2}{sin5}+\frac{2\cdot 3}{sin7}+\frac{2\cdot 4}{sin9}+\ldots$

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n+1}}{5^n}$;

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 6^{\frac{1}{n^2+4n}}$;

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{4+36n^2}$.

6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n^2}}{(n!)^2}$;
</td>
</tr>
</table>

7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n^2+1}{3n^2-1}\right)^n$; 8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt[5]{(n+3)^2}}$; 9) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}n}{\sqrt[5]{(n+3)^2}}$; 10) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n^3+1}{7n^3+5}\right)^{2n}$.	7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2}{2^n}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$; 8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{4n-3}}$; 9) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{\sqrt{4n^2-3}}$; 10) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}$.	7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^3-4n+5}{2n^3-9}\right)^n$; 8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3n+5}$; 9) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{7n+5}$; 10) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!(3n+4)}$.
B-10 1) $\frac{1}{2^2}+\frac{3}{4^3}+\frac{5}{6^4}+\frac{7}{8^5}\ldots$ 2) $1+\frac{1}{\sqrt{5}\cdot 2^5}+\frac{1}{\sqrt{9}\cdot 3^5}+\ldots$ 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^{n/2}}{n!}$; 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} arcsin^n\left(\frac{2}{n^3}\right)$; 5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot e^{2n-3}$. 6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{(2n!)}$; 7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n^2-5}{2n^2-3}\right)^{n^2}$; 8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{(2n+1)^2}}$;	**B-11** 1) $2+\frac{8}{8}+\frac{32}{27}+\frac{128}{64}+\ldots$ 2) $\sqrt[3]{2\cdot 1}+\sqrt[3]{4\cdot 3}+\sqrt[3]{8\cdot 5}+\ldots$ 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{8^n}{(n+1)(n+2)}$; 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} arctg^n\left(\frac{3\pi+1}{n^2}\right)$; 5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{sin^2(6n-2)}$. 6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!}$; 7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{2}{3n^2}\right)^{n^3}$; 8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{n^2+25}$;	**B-12** 1) $1+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 3^2}+\frac{1}{4\cdot 3^3}+\ldots$ 2) $\frac{arcsin1}{2}+\frac{arcsin3}{5}+\frac{arcsin5}{8}+\ldots$ 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(2n-1)\cdot 5^n}$; 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} cos^n\left(\frac{\pi}{2n}\right)$; 5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{cos^2(4n+1)}$. 6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{(n+2)!}$; 7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{9}{3n-5}\right)^n$; 8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{25n^2-4}}$;

9) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{\sqrt[3]{(n+1)^2}}$; 10) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\sqrt[3]{(8n+1)^2}}$.	9) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+2)\ln(n+2)}$; 10) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+2}{n^2+25}$.	9) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{\sqrt{n^2+4}}$; 10) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\sqrt{25n^2-4}}$.
B-13 1) $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\dots$ 2) $\sqrt{cos1}+\sqrt{cos2}+\sqrt{cos3}+\dots$ 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n-1}}{n!}$; 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{8^{3n}}{5^{2n+1}}$; 5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^3}$. 6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^{n/2}}$; 7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{6^{n+1}}{5^n}$; 8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{16n^2+9}$; 9) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+4}{6n^2+1}$; 10) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}n}{2n^2+9}$.	**B-14** 1) $\frac{\lvert sin1\rvert}{1^2}+\frac{\lvert sin2\rvert}{2^2}+\frac{\lvert sin3\rvert}{3^2}+\frac{\lvert sin4\rvert}{4^2}\dots$ 2) $\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\frac{4}{2^4}\dots$ 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{(n+1)!}$; 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n-3}{2n+6}\right)^{n^4}$; 5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(n+3)ln^2(n+3)}$. 6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{(n+1)!}$; 7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{8}{4n^3+1}\right)^{n^3}$; 8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$; 9) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^4+4}{6n^5+1}$; 10) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(n+1)}{\sqrt{n}}$.	**B-15** 1) $\frac{1}{2^2ln2}+\frac{1}{3^2ln3}+\frac{1}{4^2ln4}+\dots$ 2) $\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{3\cdot2^3}+\frac{1}{5\cdot2^5}+\frac{1}{7\cdot2^7}\dots$ 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n\cdot n!}{n^n}$; 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{7^{n+2}}{5^{3n}}$; 5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4+81n^2}$. 6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n(n+1)}{5^n}$; 7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{3^{2n}}$; 8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[5]{4n-1}}$; 9) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[5]{n+1}}{\sqrt[5]{2n-1}}$; 10) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{\sqrt[5]{4n+1}}$.
B-16 1) $\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{3\cdot2^3}+\frac{1}{5\cdot2^5}+\frac{1}{7\cdot2^7}\dots$	**B-17** 1) $\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\frac{4}{2^4}\dots$	**B-18** 1) $\sqrt{cos1}+\sqrt{cos2}+\sqrt{cos3}+\dots$

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n\cdot n!}{n^n}$;	2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{(n+1)!}$;	2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n-1}}{n!}$;
3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{7^{n+2}}{5^{3n}}$;	3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n-3}{2n+6}\right)^{n^4}$;	3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{8^{3n}}{5^{2n+1}}$;
4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4+81n^2}$.	4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(n+1)ln^2(n+1)}$.	4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^3}$.
5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^7+2n}$.	5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{n!}$;	5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n+3}$;
6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+3}{2^n}$;	6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3}{2^{n/2}}$;	6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\left(n^3+1\right)}{n^3}$.
7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{9^{n+1}}{5^{n-1}}$;	7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{6^{n+1}}{5^{n-2}}$;	7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{6^{n+1}}{5n+2}$;
8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}n}{n^2+9}$;	8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}n}{n^2+9}$;	8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n^3+9}$;
9) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^{10}+4}{6n^2+1}$;	9) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^4+4}{3n^4+1}$;	9) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{7n^5+4}{6n^5+1}$;
10) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{2n^2+5}}$.	10) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n^3+9}$.	10) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}n}{2\sqrt{n^8+9}}$.
В-19	**В-20**	**В-21**
1) $\frac{arcsin1}{2}+\frac{arcsin3}{5}+\frac{arcsin5}{8}+\dots$	1) $\sqrt[3]{2\cdot1}+\sqrt[3]{4\cdot3}+\sqrt[3]{8\cdot5}+\dots$	1) $1+\frac{1}{\sqrt{5}\cdot2^5}+\frac{1}{\sqrt{9}\cdot3^5}+\dots$
2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(2n-1)\cdot5^n}$;	2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{8^n}{(n+1)(n+2)}$;	2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^{n/2}}{n!}$;
3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}cos^n\left(\frac{\pi}{2n}\right)$;	3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}arctg^n\left(\frac{3\pi+1}{n^2}\right)$;	3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}arcsin^n\left(\frac{2}{n^3}\right)$;
4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{cos^2(4n+1)}$.	4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{sin^2(6n-2)}$.	4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot e^{2n-3}$.

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(2n+1)!}$; 6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n^3}}$. 7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{6^{n+1}}{n8^n}$; 8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^5+1}$; 9) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^7+4}{6n^6+1}$; 10) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}n^2}{2n^3+9}$.	5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(n+2)!}$; 6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 2^n}{n^3}$. 7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{25^{n+1}}{5^{n-1}}$; 8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{4^n}$; 9) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n^2+4}}{6n^2+1}$; 10) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}3^n}{2n^2}$.	5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n!}{n+3}$; 6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n^3+n+2}}$. 7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{7^{n+1}}{2^n}$; 8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\sqrt{lnn+1}}$; 9) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^3+4}{6n^2+1}$; 10) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2\sqrt[3]{n^2+1}}$.
B-22 1) $\frac{2\cdot1}{sin3}+\frac{2\cdot2}{sin5}+\frac{2\cdot3}{sin7}+\frac{2\cdot4}{sin9}+\ldots$ 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n+1}}{5^n}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}6^{\frac{1}{n^2+4n}}$; 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{4+36n^2}$. 5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^3}$. 6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{2^n}$; 7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{6^n}{7\cdot5^n}$;	**B-23** 1) $\frac{e^3}{2}+\frac{e^4}{4}+\frac{e^5}{6}+\frac{e^6}{8}+\ldots$ 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n-1)(n+4)}{2^n}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4}{\sqrt[3]{n^5}}$; 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n^3}}$. 5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{9^{2n+1}}$; 6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^3+10}$. 7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{6^{n+1}}{5^n}$;	**B-24** 1) $\frac{tg\sqrt{1}}{3}+\frac{tg\sqrt{2}}{3^2}+\frac{tg\sqrt{3}}{3^3}+\ldots$ 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{6^{n+2}}{4n^2-1}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\sqrt[5]{n^3}}$; 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n ln^3(2-3n)}{(2-3n)}$. 5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5n^3}{n!}$; 6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^{3n-1}}{5^{2n}}$; 7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^3+n}$.

8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{16n}$; 9) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+4}{n^2+1}$; 10) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n^5+3}$.	8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{16n^2+9}$; 9) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+4}{6n^2+1}$; 10) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{n^2+7}$.	8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n^2+9}}$; 9) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n^2+4}{n^2+1}$; 10) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n^5+7}$.
В-25	**В-26**	**В-27**
1) $\frac{1}{\sqrt{3\cdot 2^3}}+\frac{1}{\sqrt{3\cdot 2^6}}+\frac{1}{\sqrt{3\cdot 2^{12}}}+\ldots$ 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3n+1}{\sqrt{n3^n}}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(125)^{n/3}$; 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{2n-7}}$. 5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^{3/2}+n}$. 6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{2^n}$; 7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{6^n}{5^{n-1}}$; 8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n\ln n}$; 9) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^5+4}{n^2+1}$; 10) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+1)}{n^2+11}$.	1) $\frac{1}{ln^3 2}+\frac{1}{ln^4 5}+\frac{1}{ln^5 8}+\ldots$ 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\cdot n}{n^2-2}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}5^{n^2-4n}$; 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+5}$. 5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[5]{4n^3}}$. 6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n!(n+1)}{2^n}$; 7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 6^{n+1}}{5^n}$; 8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2+25}$; 9) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{7n^3+4}{6n^3+1}$; 10) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n^2}{2n^2+1}$.	1) $\frac{1}{6\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 9}+\frac{1}{8\cdot 11}+\ldots$ 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(7n-3)^2\cdot 9^n}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4^{3n}}{9^n}$; 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^{3n}}{9^{2n}}$; 5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n^5+3}}$. 6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{2^{n-2}}$; 7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{6^{2n+1}}{5^n}$; 8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{16n^2+9}$; 9) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n^2}{4n^2+1}$; 10) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{2n^2+9}}$.

B-28	B-29	B-30
1) $2^2\cdot 3+3^3\cdot 4+4^4\cdot 5+5^5\cdot 6+\ldots$	1) $\frac{8}{cos1}+\frac{8^2}{cos2}+\frac{8^3}{cos3}+\ldots$	1) $\frac{10}{2\cdot 3}+\frac{10}{6\cdot 9}+\frac{10}{10\cdot 27}+\ldots$
2) а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^4\cdot 2^n}{n^4-1}$;	2) а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n-1}{5^{n+2}}$;	2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4^{n+1}}{(n-5)!}$;
3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(16)^{n/4}$;	3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{25}{16}\right)^{\frac{n}{2}}$;	3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{27}\right)^{\frac{n}{3}}$;
4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{(4n-6)^2}}$.	4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{6n+5}}$.	4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{8^{3n}}{5^{2n+1}}$;
5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n^3+2}}$.	5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{3n-8}$.	5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n!}{n^3}$.
6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{3^n}$;	6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4n+1}{2^n}$;	6) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{n-1}{2n+3}$;
7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{6}{5^n}$;	7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{6n^2+n}{5n^2+3}$;	7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{6^{n-1}}{n5^n}$;
8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{16n^2-9}$;	8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^{2/3}+9}$;	8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{6n^2+1}}$;
9) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4}{6n^7+1}$;	9) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{\sqrt{6n^2+1}}$;	9) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3n^2+1}{6n^2+1}$;
10) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(n^3+1)}{2n^2+9}$.	10) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}n^2}{2n^2+1}$.	10) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{n^2+7}$.

Контрольная работа №4

Задание: найти общее или частное решение дифференциального уравнения 1-го и 2-го порядков.

1. а) $(x^2y-3x^2)dy+2xydx=0$; б) $y-xy'=2(1+x^2y')$;	2. а) $y'=(2y+1)tgx$; б) $2x^2yy'+y^2=2y$; $y(1)=1/4$. в) $xyy'=x^2+y^2$;

в) $y' = \dfrac{x+8y}{8x-y}$; $y(1)=-1$. г) $\left(2xy+7y\right)dx+\left(7x+x^2\right)dy=0$; д) $y''+4y=0$; е) $y''+3y'+2y=0$; ж) $y''-10y'=2x^2-3x+5$.	г) $\left(2xy+7\right)dx+\left(y+x^2\right)dy=0$; д) $y''-y'-2y=0$; е) $y''+9y=0$; ж) $y''-2y'+5y=10e^{-x}cos2x$.
3. а) $\sqrt{1+y^2}dx=xydy$; б) $x+2y-xy'=0$; $y(2)=6$. в) $y'=\dfrac{x+y}{x-y}$; г) $\left(5xy^2+7x\right)dx+\left(3y+5x^2y\right)dy=0$; д) $y''-4y'=0$; е) $y''-4y'+13y=0$; ж) $y''-2y'-8y=12sin2x-36cos2x$.	4. а) $siny\cdot cosx=cosy\cdot sinx\cdot y'$; б) $(x^2-1)y'-xy=2x$, $y(\sqrt{2})=1$; в) $xy'+xtg\dfrac{y}{x}=y$; г) $\left(2x^3-y\right)dx+\left(y^2-x\right)dy=0$; д) $y''-5y'+6y=0$; е) $y''+3y'=0$; ж) $y''-12y'+36y=14e^{6x}$.
5. а) $(xy^2+y^2)dy+xdx=0$; б) $x^2y'=2xy+3$, $y(1)=-1$; в) $xy'+yln\dfrac{y}{x}=0$; г) $\left(2siny+7\right)dx+\left(y+2xcosy\right)dy=0$; д) $y''-2y'+10y=0$; е) $y''+y'-2y=0$; ж) $y''-3y'+2y=(34-12x)e^x$.	6. а) $e^{x+3y}dy=dx$; б) $(1-x^2)y'+xy=1$, $y(0)=1$; в) $y'=\dfrac{y}{x}+sin\dfrac{y}{x}$; г) $\left(2x-e^y\right)dx+\left(1-xe^y\right)dy=0$; д) $y''-4y=0$; е) $y''+2y'+17y=0$; ж) $y''-6y'+10y=e^{3x}(3cosx+2sinx)$.
7. а) $(1+e^x)yy'=e^x$; $y(0)=2$. б) $y'=\dfrac{y}{x}-1$; в) $xyy'=x^2-y^2$; г) $\left(xy^2+6\right)dx+\left(-3y^2+x^2y\right)dy=0$; д) $y''+y'-6y=0$; е) $y''+6y'+10y=0$; ж) $y''-6y'+9y=7e^{3x}$	8. а) $2xy'=1-x^2$; б) $y'-3x^2y-x^2e^{x^3}=0$, $y(0)=0$; в) $(x-y)y'=2x+y$; г) $\left(4^x-y^2\right)dx-\left(2xy+e^y\right)dy=0$; д) $y''-49y=0$; е) $y''-3y'+2y=0$; ж) $y''-4y'+5y=e^{2x}(-cosx+4sinx)$.

9. а) $y'=2(\sqrt{x+2})y^3$; $y(2)=\sqrt{3}$. б) $(x^2+1)y'+4xy=3$; в) $xy'+yln^2\frac{y}{x}=y$; г) $\left(5x^2-3siny\right)dx-\left(3xcosy+5\right)dy=0$; д) $y''+7y'=0$; е) $y''-5y'+4y=0$; ж) $y''+6y'+9y=(48x+8)e^{-3x}$.	10. а) $y'=e^{x^2}x(1+y^2)$; $y(0)=1$. б) $y'-\frac{y}{x}=x^2+\sqrt{x}$; в) $xy'ln\frac{y}{x}=x+yln\frac{y}{x}$; г) $\left(5-x^2siny\right)dx-\left(x^3cosy+5\right)dy=0$; д) $y''-6y'+8y=0$; е) $y''+4y'+5y=0$; ж) $y''+5y'=72e^{-5x}$.
11. а) $(xy-x)^2dy+y(1-x)dx=0$; б) $(1-x)(y'+y)=e^{-x}$; $y(2)=e^{-2}$ в) $xy'=y+2xctg\frac{y}{x}$; г) $\left(5-e^{2x}y\right)dx-\left(0{,}5e^{2x}+5\right)dy=0$; д) $4y''-8y'+3y=0$; е) $y''-3y'=0$; ж) $y''+9y'=-7cos3x+9sin3x$.	12. а) $\frac{7^x\cdot y'}{7^y}=3$; б) $y'+2y=e^xy+e^{e^x}$; в) $y'=\frac{x+2y}{2x-y}$; $y(1)=1$; г) $\left(5-x^2lny\right)dx+\left(5-\frac{x^3}{3y}\right)dy=0$; д) $y''+4y'+20y=0$; е) $y''-3y'-10y=0$; ж) $y''+16y=8cos4x$.
13. а) $sinx\cdot tgydx-\frac{dy}{sinx}=0$; б) $xy'-2y=2x^4$, $y(1)=0$; в) $xyy'=2x^2+y^2$; г) $\left(5x^2-3y\right)dx+\left(-3x+y^2\right)dy=0$; д) $9y''+6y'+y=0$; е) $y''-4y'-21y=0$; ж) $y''+4y'+8y=e^{-2x}(4cos2x-sin2x)$	14. а) $(x^2-1)y'-xy=0$; б) $xy'+y=lnx+1$, $y(1)=0$; в) $x^2y'=y^2+xy+x^2$; г) $\left(2xy-1\right)dx+\left(x^2+y^2\right)dy=0$; д) $2y''+3y'+y=0$; е) $y''+4y'+8y=0$; ж) $y''-4y'+4y=10e^{2x}$.
15. а) $(1+x^2)yy'=y+y^2$; б) $y'=2x(1+y)$, $y(0)=0$; в) $(2x+y)y'=x+2y$;	16. а) $y'\sqrt{1+y^2}=\frac{x^2}{y}$; б) $xy^2y'=x^2y^2+y^3$; $y(1)=2$

г) $\left(x^2+3y\right)dx+\left(3x-y\right)dy=0$; д) $y''-12y'+40y=0$; е) $y''-2y'+2y=0$; ж) $y''-10y'+21y=2e^{7x}$.	в) $y'=\frac{y}{x}+\sqrt{1-\frac{y^2}{x^2}}$; г) $\left(2xy+8\right)dx+\left(x^2+2y\right)dy=0$; д) $y''+6y'=0$; е) $y''+10y'+29y=0$; ж) $y''-8y'+7y=6e^x$.
17. а) $(1+e^{3y})xdx=e^{3y}dy$; б) $y'-y=e^x$, $y(0)=1$; в) $(x-2y)y'=x+y$; г) $\left(xy^2+4\right)dx+\left(x^2y+2y\right)dy=0$; д) $y''+25y=0$; е) $y''+14y'+49y=0$; ж) $y''+2y'-15y=(6x+1)e^{3x}$.	18. а) $y'\sqrt{1-x^2}-cos^2y=0$; б) $(x+1)(y'+\sqrt{x})=-y$; в) $y'-\frac{y}{x}=\frac{1}{y}$; г) $\left(4xy+5\right)dx+\left(2x^2-7y\right)dy=0$; д) $y''+4y'+13y=0$; е) $y''-7y'-8y=0$; ж) $y''-3y'=-24x^2+12x+6$.
19. а) $(\sqrt{y}+\sqrt{xy})dx=xdy$; б) $xy'+y+xe^{-x^2}=0$, $y(1)=e/2$; в) $xy'=y+ln^{-1}\frac{y}{x}$; г) $\left(3x^2-y\right)dx-\left(x+3y\right)dy=0$; д) $y''-3y'-4y=0$; е) $y''+6y'+13y=0$; ж) $y''-2y'=e^{2x}(4x+5)$.	20. а) $(25-9y^2)dx-(9y+4x^2y)dy=0$; б) $xy'+y=-x^3$; $y(2)=1$ в) $(3x+y)y'=x+3y$; г) $\left(5x-3^x yln3\right)dx-(3^x+2y)dy=0$; д) $y''-8y'+16y=0$; е) $y''-10y'+16y=0$; ж) $y''+25y'=-16x^2+8x-1$.
21. а) $(1+4x^2)ydy-e^ydx=0$; б) $x^2y'+xy+1=0$, $y(1)=0$; в) $y'+\frac{xy}{x^2-1}=x\sqrt{y}$; г) $\left(x-5^x y^2\right)dx-\frac{2\cdot5^x y}{ln5}dy=0$; д) $y''-3y'-18y=0$; е) $y''+2y'+5y=0$; ж) $y''-6y'=e^{6x}(12x^2+6x-4)$.	22. а) $x^2y^2dx-(y-1)xdy=0$; б) $y'+xy=-x^3e^{-x^2}$; в) $y'=e^{y/x}+\frac{y}{x}$; $y(e)=0$; г) $\left(3+xy\right)dx+\left(\frac{x^2}{2}+2y\right)dy=0$; д) $y''-6y'+13y=0$; е) $y''-2y'-15y=0$;

	ж) $y''-8y'=-6x+10$.
23. а) $(x+4)dy-xydx=0$; б) $y'=y+\frac{x}{2}e^{2x}$; в) $xy'-y=\sqrt{x^2+y^2}$, $y(1)=2$; г) $\left(3^x y-1\right)dx+\left(\frac{3^x}{ln3}+2y\right)dy=0$; д) $y''+2y'+y=0$; е) $y''+6y'+25y=0$; ж) $y''-4y'=5x^2+5x-12$.	24. а) $(1+x^2)y^3dx-(y^2-1)x^3dy=0$; б) $x(y'-y)=e^x$, $y(1)=0$; в) $y'=\frac{2xy}{x^2-y^2}$; г) $\left(xlny-1\right)dx+\left(\frac{x^2}{2y}+y\right)dy=0$; д) $y''+10y'=0$; е) $y''-6y'+8y=0$; ж) $y''-2y'+37y=7e^x cos6x$.
25. а) $y'=\frac{e^{2x}}{\sqrt{2x-1}}$; б) $xy'+y=sinx$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{2}{\pi}$; в) $x^2y'+y^2=xyy'$; г) $\left(2xy-1\right)dx+\left(x^2+y\right)dy=0$; д) $y''+5y=0$; е) $9y''-6y'+y=0$; ж) $y''+6y'+8y=(6x^2+2x+1)e^{-4x}$.	26. а) $\sqrt{y}\,y'=cos(5x+2)$; б) $xy'+(x+1)y=3x^2e^{-x}$, $y(1)=0$; в) $y'=\frac{y^2}{x^2}-2$; г) $\left(x^3-2y\right)dx-\left(2x+siny\right)dy=0$; д) $y''+6y'+10y=0$; е) $y''-4y'+4y=0$; ж) $y''-5y'+4y=32e^{4x}$.
27. а) $y'\cdot ctgx+y=\frac{2}{cosx}$; б) $y'-\frac{y}{x}=x^2\cdot sin3x$; $y(\pi)=-\pi$ в) $(y^2-2xy)dx+x^2dy=0$; г) $\left(3cosx-2y\right)dx-\left(2x+siny\right)dy=0$; д) $y''-y=0$; е) $4y''+8y'-5y=0$; ж) $y''+4y=5sin2x$.	28. а) $3^{x^2+y}\cdot dy+xdx=0$; б) $y'+xy=xe^{x^2/2}$; $y(0)=-1/2$ в) $yy'+x-2y=0$; г) $\left(3tgx-y^3\right)dx-\left(3xy^2+siny\right)dy=0$; д) $y''+8y'+25y=0$; е) $y''+9y'=0$; ж) $9y''+3y'-2y=8e^{x/3}$, $y(0)=1$, $y'(0)=-8$.
29. а) $y'=(2x-1)ctgy$; б) $(y+\sqrt{x^3})dx=xdy$; в) $yy'+x=y-xy'$; $y(-1)=0$;	30. а) $y'x=ylny$; $y(e)=e^2$ б) $xy'-2\sqrt{x^3y}=\sqrt{x}$;

г) $\left(\frac{1}{x}-y^3\right)dx-\left(3xy^2+e^y\right)dy=0$; д) $y''-4y'+20y=0$; е) $y''+16y=0$; ж) $6y''+7y'-3y=16xe^{-3x/2}$.	в) $2x^2y'+x^2+y^2=0$; г) $\left(5^x+y^2\right)dx+\left(2xy+3^y\right)dy=0$; д) $9y''-6y'+y=0$; е) $y''+12y'+37y=0$; ж) $y''-2y'+17y=-3e^x(cos4x-8sin4x)$.

Контрольная работа № 5

Задание: а)решить ДУ методом Лагранжа; б) – в) решить ДУ, допускающие понижение порядка; г) решить систему ДУ.

В-1	**В-2**	**В-3**
а) $y''-2y'+y=\frac{e^x}{\sqrt{49-x^2}}$; б) $\begin{cases}2y''=3y^2\\ y(0)=1\\ y'(0)=1\end{cases}$; в) $y'''=5x^4+\frac{1}{\sqrt{x}}$; г) $\begin{cases}\frac{dx}{dt}=x+t^2\\ \frac{dy}{dt}=4y+2t\\ x(0)=0,\ y(0)=1.\end{cases}$	а) $y''-y'=e^{2x}\sqrt{1-e^{2x}}$; б) $\begin{cases}xy''=\left(y'\right)^2\\ y(0)=1\\ y'(0)=2\end{cases}$; в) $y'''=2x^{-4}+\sqrt{3x-2}$; г) $\begin{cases}\frac{dx}{dt}=x+5y\\ \frac{dy}{dt}=-x-3y\\ x(0)=0,\ y(0)=1.\end{cases}$	а) $y''-4y'+5y=\frac{e^{2x}}{cosx}$; б) $\begin{cases}x^3y''=4\ln x\\ y(1)=4\\ y'(1)=0\end{cases}$; в) $y''+\frac{1}{\sqrt[3]{x^4}}+sin(x-2)=1$; г) $\begin{cases}x'=4x-y\\ y'=x+2y\\ x(0)=0,\ y(0)=1.\end{cases}$
В-4	**В-5**	**В-6**
а) $2y''+5y'=cos^2x$; б) $\begin{cases}y''=x+y'\\ y(0)=1\\ y'(0)=2\end{cases}$; в) $y'''+5e^{5x-1}+cos3x=2$; г) $\begin{cases}x'=x-y\\ y'=x+3y\\ x(0)=0,\ y(0)=1.\end{cases}$	а) $y''-3y'+2y=2e^x-e^{-2x}$; б) $\begin{cases}y''+y'tgx=cosx\\ y(0)=1\\ y'(0)=0\end{cases}$; в) $y''+\frac{3}{\sqrt{49-x^2}}=e^x$;	а) $y''-4y'+4y=\frac{sinx}{e^{2x}}$; б) $\begin{cases}y'y''=2y\\ y(0)=0\\ y'(0)=0\end{cases}$; в) $y''-\frac{6}{x}=e^{-2x}$;

	г) $\begin{cases} \frac{dx}{dt}=y+e^{3t}\\ \frac{dy}{dt}=x+5e^{3t}\\ x(0)=2,\ y(0)=3.\end{cases}$	г) $\begin{cases} \frac{dx}{dt}=y+t^2\\ \frac{dy}{dt}=4x-2t\\ x(0)=2,\ y(0)=3.\end{cases}$
В-7 а) $y''+y=24sin^4x$; б) $\begin{cases} yy''=(y')^2\\ y(0)=1\\ y'(0)=3\end{cases}$; в) $y''=5x^4+sin(3x-2)$; г) $\begin{cases} x'=x-2y\\ y'=3x+6y+t\\ x(0)=1,\ y(0)=-1.\end{cases}$	**В-8** а) $y''+y=chx$, $chx=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$; б) $\begin{cases} y^3y''=3\\ y(1)=1\\ y'(1)=1\end{cases}$; в) $y''=e^{-3x+2}-sin(3-2x)$; г) $\begin{cases} x'=4e^{3t}+x\\ y'=-e^{3t}+y\\ x(0)=0,\ y(0)=0.\end{cases}$	**В-9** а) $y''-2y'=\frac{e^x}{1+e^x}$; б) $\begin{cases} y''-12y^2=0\\ y(0)=0{,}5\\ y'(0)=1\end{cases}$; в) $y''+\frac{2}{cos^2(4x-3)}+3x^{-3}=0$; г) $\begin{cases} \frac{dx}{dt}=2x+y+cost\\ \frac{dy}{dt}=-x+3sint\\ x(0)=2,\ y(0)=-4.\end{cases}$
В-10 а) $y''+4y'+4y=\frac{e^{-2x}}{x^3}$; б) $\begin{cases} 2y''=e^{4y}\\ y(0)=0\\ y'(0)=0{,}5\end{cases}$; в) $y''=\frac{1}{sin^2(6x-5)}+5^{4x}$; г) $\begin{cases} \frac{dx}{dt}=y+e^{t}\\ \frac{dy}{dt}=4x+2e^{t}\\ x(0)=0,\ y(0)=0.\end{cases}$	**В-11** а) $y''+4y=\frac{1}{sin2x}$; б) $\begin{cases} (y-2)y''=2(y')^2\\ y(0)=3\\ y'(0)=1\end{cases}$; в) $y'''-e^{2x+3}+sinx-2=0$; г) $\begin{cases} x'=2x+y+cost\\ \frac{dy}{dt}=-x+3\sin t\\ x(0)=2,\ y(0)=-4.\end{cases}$	**В-12** а) $y''-3y'+2y=\frac{e^{3x}}{1+e^{2x}}$; б) $\begin{cases} 2y''=e^{4y}\\ y(0)=0\\ y'(0)=0{,}5\end{cases}$; в) $y'''-\frac{5}{x^4}+sin(3x-2)=0$; г) $\begin{cases} \frac{dx}{dt}=-3x+y\\ \frac{dy}{dt}=x+2y\\ x(0)=1,\ y(0)=0.\end{cases}$
В-13	**В-14**	**В-15**

а) $y''-2y'+y=x^{-2}\cdot e^{x}$; б) $\begin{cases} x^2y''=\left(y'\right)^2 \\ y(0)=0 \\ y'(0)=-1 \end{cases}$; в) $y''-\dfrac{5}{1-5x}=e^{x}+1$; г) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=-3x-y \\ \dfrac{dy}{dt}=x-y \\ x(0)=1,\ \ y(0)=1. \end{cases}$	а) $y''-2y'+y=\dfrac{e^{x}}{x^2+1}$; б) $\begin{cases} y''+y'tgx=cosx \\ y(0)=1 \\ y'(0)=0 \end{cases}$; в) $y''+\dfrac{3}{sin^2(3x+5)}=e^{-8x}$; г) $\begin{cases} x'=5x-3y+2e^{3t} \\ y'=x+y+5e^{-t} \\ x(0)=0,\ \ y(0)=0. \end{cases}$	а) $y''+2y'=\dfrac{1}{cosx}$; б) $\begin{cases} y''-y'ctgx=sinx \\ y(\pi/2)=1 \\ y'(\pi/2)=\pi/2 \end{cases}$; в) $y''-\dfrac{1}{cos^2(0{,}2x+1)}=10^{3x/5}$; г) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=2x+y \\ \dfrac{dy}{dt}=x+2y \\ x(0)=1,\ \ y(0)=3. \end{cases}$
В-16 а) $y''-3y'+2y=\dfrac{e^{2x}}{e^{x}+1}$; б) $\begin{cases} y''cosy+\left(y'\right)^2 siny=y' \\ y(-1)=\pi/6 \\ y'(-1)=2 \end{cases}$; в) $y''+3^{7-2x}=\dfrac{1}{2x+1}$; г) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=4x+6y \\ \dfrac{dy}{dt}=2x+3y+t \\ x(0)=1, y(0)=2. \end{cases}$	**В-17** а) $y''+6y'+9y=e^{-3x}\cdot cos^{3x}$; б) $\begin{cases} y^3y''=y'+1 \\ y(0)=\sqrt{2} \\ y'(0)=\sqrt{2}/2 \end{cases}$; в) $y''+3^{6-3x}=\dfrac{1}{4x-3}+3$; г) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=e^{3t}-y \\ \dfrac{dy}{dt}=2e^{3t}-x \\ x(0)=1,\ \ y(0)=1. \end{cases}$	**В-18** а) $y''-y'=secx$, $secx=\dfrac{1}{cosx}$; б) $\begin{cases} xy''-2y'=2x^4 \\ y(1)=0{,}2 \\ y'(1)=4 \end{cases}$; в) $y'''-6x^{-3}=\dfrac{7}{\left(4-7x\right)^3}-5$; г) $\begin{cases} x'=e^{3t}-y \\ \dfrac{dy}{dt}=2e^{3t}+x \\ x(0)=0,\ \ y(0)=0. \end{cases}$
В-19 а) $y''-2y'=cosecx$, $cosecx=\dfrac{1}{sinx}$;	**В-20** а) $y''+3y'+2y=e^{-x}\cdot cos^2x$;	**В-21** а) $y''-2y'+y=\dfrac{e^{x}}{x}$;

б) $\begin{cases} y''=\dfrac{y'}{x}+\dfrac{x}{y^2} \\ y(2)=0 \\ y'(2)=4 \end{cases}$; в) $y''-2^{5x+3}=\dfrac{1}{3x}-4$; г) $\begin{cases} x'=y+t \\ y'=x+e^t \\ x(0)=1,\ y(0)=0. \end{cases}$	б) $\begin{cases} xy''+x(y')^2-y'=0 \\ y(2)=2 \\ y'(2)=1 \end{cases}$; в) $y''-\dfrac{6}{sin^2(6x+5)}=e^{4x}$; г) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=\dfrac{x}{x+y} \\ \dfrac{dy}{dt}=\dfrac{y}{x+y}, \\ x(0)=2,\ y(0)=4. \end{cases}$	б) $\begin{cases} (e^x+1)+y'=0 \\ y(0)=1 \\ y'(0)=2 \end{cases}$; в) $y''-3x^2=\dfrac{2}{4x+5}-6$; г) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=2x+y+cost \\ \dfrac{dy}{dt}=-x+2sint \\ x(0)=1,\ y(0)=5. \end{cases}$
В-22 а) $y''+4y=\dfrac{1}{sin2x}$; б) $\begin{cases} xy''=y'ln\dfrac{y'}{x} \\ y(1)=1 \\ y'(1)=3 \end{cases}$; в) $y''-\dfrac{1}{4-3x}+1=\dfrac{8}{cos^2 8x}$; г) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=x+2y \\ \dfrac{dy}{dt}=-x+y \\ x(0)=1,\ y(0)=0. \end{cases}$	**В-23** а) $y''+3y'+2y=\dfrac{1}{e^x+1}$; б) $\begin{cases} 2yy''=3+(y')^2 \\ y(0)=1 \\ y'(0)=1 \end{cases}$; в) $y''=e^{2x-1}+8cos(4x-5)$; г) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=x+y+t \\ \dfrac{dy}{dt}=3x-y+2t \\ x(0)=2,\ y(0)=0. \end{cases}$	**В-24** а) $y''+4y=2tgx$; б) $\begin{cases} (y-1)y''=(y')^2 \\ y(0)=1 \\ y'(0)=2 \end{cases}$; в) $y'''=\sqrt[5]{x^4}+sin3x-2$; г) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=\dfrac{x}{2x+3y} \\ \dfrac{dy}{dt}=\dfrac{y}{2x+3y} \\ x(0)=1,\ y(0)=2. \end{cases}$
В-25 а) $y''+4y'+4y=\dfrac{e^{-2x}}{x^5}$;	**В-26** а) $y''+y=\dfrac{1}{cos^2 x}$;	**В-27** а) $y''+2y'+y=3e^{-x}\cdot\sqrt{x+1}$;

б) $\begin{cases} yy''=(y')^2 \\ y(0)=1 \\ y'(0)=3 \end{cases}$; в) $y''=5x^4+sin(3x-2)$; г) $\begin{cases} \frac{dx}{dt}=5x-y \\ \frac{dy}{dt}=2x+3y \\ x(0)=1,\ \ y(0)=1. \end{cases}$	б) $\begin{cases} yy''=(y')^2 \\ y(0)=1 \\ y'(0)=3 \end{cases}$; в) $y''=5x^4+sin(3x-2)$; г) $\begin{cases} \frac{dx}{dt}=2x-y-sint \\ \frac{dy}{dt}=-x+3cost \\ x(0)=0,\ \ y(0)=0. \end{cases}$	б) $\begin{cases} yy''=(y')^2-(y')^3 \\ y(1)=1 \\ y'(1)=-1 \end{cases}$; в) $y'''-e^{5-3x}=\frac{1}{\sqrt[6]{3x}}-10$; г) $\begin{cases} \frac{dx}{dt}=y+e^{2t} \\ \frac{dy}{dt}=x+5e^{2t} \\ x(0)=0,\ \ y(0)=0. \end{cases}$
В-28 а) $y''-2y'=\frac{e^{2x}}{x}$; б) $\begin{cases} 2y''=3y^2 \\ y(-2)=1 \\ y'(-2)=-1 \end{cases}$; в) $y''+\frac{3}{\sqrt[5]{3x+5}}=e^{-x}+2$; г) $\begin{cases} \frac{dx}{dt}=x+t^2 \\ \frac{dy}{dt}=4y+2t \\ x(0)=0,\ \ y(0)=1. \end{cases}$.	**В-29** а) $y''+y=\frac{1}{\sqrt{cos2x}}$; б) $\begin{cases} y^3y''=-1 \\ y(1)=1 \\ y'(1)=0 \end{cases}$; в) $y'''+8^{7-2x}=\frac{1}{\sqrt{2x+1}}-1$; г) $\begin{cases} \frac{dx}{dt}=x+t \\ \frac{dy}{dt}=-y+2t \\ x(0)=3,\ \ y(0)=1. \end{cases}$.	**В-30** а) $y''+9y=2sinx\cdot sin2x$; б) $\begin{cases} (y+1)^2y''=(y')^3 \\ y(0)=0 \\ y'(0)=1 \end{cases}$; в) $y''=5x^4+\frac{3}{(3x-2)^5}-2$; г) $\begin{cases} \frac{dx}{dt}=-3x+t^2 \\ \frac{dy}{dt}=4y-2t \\ x(0)=-1,\ \ y(0)=1. \end{cases}$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Вторая часть ***«Интегральное исчисление функций одной переменной. Числовые ряды. Дифференциальные уравнения»*** (переработанная) учебного пособия ***«Математика»***, предназначенная для студентов первых курсов биологических направлений выстроена по схеме:

- краткий теоретический материал изучаемого раздела (необходимее определения, формулы, теоремы);
- иллюстрация решенных примеров, соответствующая разделу и сопровождающаяся необходимыми рисунками;
- задания для аудиторной самостоятельной работы студентов, что способствует привитию навыков самостоятельной работы, а также работы с математической литературой;
- контрольные вопросы, что позволяет студентам владеть теоретическими знаниями раздела;
- задания для контрольных работ (на 30 вариантов).

Таким образом, изучение математики студентами биологических направлений бакалавриата Иркутского ГАУ с привлечением данного учебного пособия на практических и лекционных занятиях, позволит повысить их уровень математической грамотности и поспособствует формированию профессиональных компетенций.

ЛИТЕРАТУРА

1. Амелькин В.В. Дифференциальные уравнения: учеб.пособие / под ред. В.В. Амелькина. Минск: БГУ, 2012. 288с.
2. Баврин И. И. Высшая математика для химиков, биологов и медиков:учебник и практикум. 2-е изд., испр. и доп. Москва: Юрайт, 2016. 329 с.
3. Боярчук А. К., Головач Г. П. Справочное пособие по высшей математике. Т. 5. Часть 1. Дифференциальные уравнения в примерах и задачах. Дифференциальные уравнения первого порядка. Москва, 2010. 240 с.
4. Бугров Я. С., Никольский С. М. Высшая математика. Учебник. В 3 т. Т. 3. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного (комплект). Москва:Юрайт, 2016. 510 с.
5. Виленкин И.В. Высшая математика: Интегралы по мере. Дифференциальные уравнения. Ряды: учебное пособие / И.В. Виленкин, В.М. Гробер, О.В. Гробер. Ростов-на-Дону, 2011. 302 с.
6. Высшая математика для экономистов. Задачи, тесты, упражнения: учебник и практикум. 5-е изд., перераб. и доп. / под ред. В.Л. Клюшина. Москва: Юрайт, 2016. 165 с.
7. Высшая математика: учебник / под ред. В.С. Шипачева. Москва: ИНФРА-М, 2017. 479 с.
8. Высшая математика для экономического бакалавриата: учебник и практикум / Н.Ш. Кремер, Б.А. Прутко, И.М. Тришин. 4-е изд., перераб. и доп. Москва: Юрайт, 2013. 909 с.
9. Гусак А.А., Бричикова Е.А. Основы высшей математики: пособие для студентов вузов. Москва: Академия, 2012. 208 с.
10. Григорьев В. П. , Дубинский Ю.А. Элементы высшей математики: учебник. 10-е изд, стер. Москва: Академия, 2014. 320 с.
11. Дорофеева А. В. Высшая математика для гуманитарных направлений:учебник / под ред. А.В. Дорофеева. 3-е изд. Москва: Юрайт, 2015. 400 с.
12. Задачник по высшей математике / под ред. В.С. Шипачева. 10-е изд, стер. Москва: ИНФРА-М, 2019. 304 с.
13. Кремер Н. Ш., Путко Б. А., Тришин И. М., Фридман М. Н. Высшая математика для экономических специальностей / под ред. Н.Ш. Кремера. Москва, 2010. 912 с.
14. Пантелеев А. В., Якимова А. С., Рыбаков К. А. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Практический курс. Москва:Логос, 2010. 384 с.
15. Понтрягин Л.С. Дифференциальные уравнения и их приложения. 4-е изд. Москва: Эдиториал УРСС, 2011. 208 с.

Приложения

Приложение 1

Методы интегрирования неопределенных интегралов

№ п/п	Вид интеграла	Способ вычисления интеграла
1	$\int f(x)dx$ – табличный.	Метод непосредственного интегрирования (при помощи табличных интегралов).
2	$\int f(x)dx$ – не табличный. **Правила интегрирования:** а) Если под знаком интеграла стоит дробь, числитель которой равен производной знаменателя, отличающейся с точностью, хотя бы, до постоянного множителя, то за *t* обозначают знаменатель. б) Если под знаком интеграла стоит дробь, в знаменателе которой – функция $f^n(x)$, а в числителе – производная $f'(x)$ без учета *n*-ой степени, отличающаяся с точностью, хотя бы, до постоянного множителя, то за *t* обозначают функцию $f(x)$, т.е. в) Если под знаком интеграла стоит функция $f^n(x)$, умноженная на производную от основания степени, т.е. на $f'(x)$, отличающаяся с точностью, хотя бы, до постоянного множителя, то за *t* обозначают функцию $f(x)$, т.е. г) Если под знаком интеграла стоит показательная функция $a^{f(x)}$, умноженная на производную от показателя степени, т.е. на $f'(x)$, отличающаяся с точностью, хотя бы до постоянного множителя, то за *t* обозначают функцию $f(x)$, т.е. д) Если под знаком интеграла стоит дробь, в знаменателе которой квадратный корень из функции $f(x)$, а в числителе – производная $f'(x)$, отличающаяся с точностью хотя бы до постоянного множителя, то за *t* обозначают функцию $f(x)$, т.е.	Метод подстановки или замены переменной: $\int f(x)dx = \int f[\varphi(x)]\cdot\varphi'(t)dt$. а) $\int \frac{f'(x)dx}{f(x)} = \left\{\begin{matrix} f(x)=t \\ f'(x)dx=dt \end{matrix}\right\} = ln\lvert f(x)\rvert + C$. б) $\int \frac{f'(x)dx}{[f(x)]^n} = \left\{\begin{matrix} f(x)=t \\ f'(x)dx=dt \end{matrix}\right\} = \frac{1}{(1-n)\cdot[f(x)]^{n-1}} + C$, $n\in R$, $n\neq 1$. в) $\int [f(x)]^n\cdot f'(x)dx = \left\{\begin{matrix} f(x)=t \\ f'(x)dx=dt \end{matrix}\right\} = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + C$, $n\in R$, $n\neq -1$. г) $\int a^{f(x)}\cdot f'(x)dx = \left\{\begin{matrix} f(x)=t \\ f'(x)dx=dt \end{matrix}\right\} = \frac{a^{f(x)}}{lna} + C$ (в частности, $a=e$).

		д) $\int \frac{f'(x)dx}{\sqrt{f(x)}} = \left\{ \begin{matrix} f(x) = t \\ f'(x)dx = dt \end{matrix} \right\} = 2\sqrt{f(x)} + C$.
3	$\int f(x)dx$ – не табличный, где а) ***I тип***: $f(x) = P_n(x) \cdot \left[\begin{matrix} sinx, \ cosx, \ tgx, \\ ctgx, \ e^x, \ a^x \end{matrix} \right.$; б) ***II тип***: $f(x) = P_n(x) \cdot \left[\begin{matrix} arcsinx, \ arccosx, \ arctgx, \\ arcctgx, lnx, \ log_a x \end{matrix} \right.$, где $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ – многочл.n-й степ.; в) ***III тип***: $f(x) = \left[e^x \cdot sinx, \ \ e^x \cdot cosx \right.$; г) ***IV тип***: $f(x) = \left[sin(lnx), cos(lnx) \right.$.	Метод интегрирования по частям: $\int f(x)dx = \int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$. а) подстановка: $P_n(x) = u$, все остальное – за dv. б) подстановка: $P_n(x)dx = dv$, все остальное – за u. в) подстановка: $e^x = u$, все остальное – за dv (дважды интегрируется по частям). г) приводят к ***III типу*** при помощи подстановки: $lnx = t \Rightarrow x = e^t$, $dx = e^t dt$.
4	Интегрирование выражений, содержащих квадратный трехчлен и его иррациональность в знаменателе: $\int \frac{dx}{ax^2 + вx + c}$ **(A)**; $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + вx + c}}$ **(B)**; $\int \frac{Mx + N}{ax^2 + вx + c} dx$ **(C)**; $\int \frac{Mx + N}{\sqrt{ax^2 + вx + c}} dx$ **(D)**.	**(A)**: выделить полный квадрат в знаменателе, если при этом: а) $D = в^2 - 4ac > 0$, то приводится к табличной формуле (17); б) $D = в^2 - 4ac < 0$, то приводится к табличной формуле (18); в) $D = в^2 - 4ac = 0$, то приводится к табличной формуле (3). **(B)**: выделить полный квадрат в знаменателе, если при этом: а) $a > 0$, то приводится к табличной формуле (20); б) $a < 0$, то приводится к табличной формуле (19). **(C)**: выделить полный квадрат в знаменателе, если при этом: а) $Mx + N = (ax^2 + вx + c)'$, то интеграл равен $ln\left\| ax^2 + вx + c \right\|$; б) $Mx + N \neq (ax^2 + вx + c)'$, то интеграл следует преобразовать так, чтобы можно выделить в числителе производную $2ax + в$, далее полученный интеграл разбить на два интеграла, один из которых будет равен $ln\left\| ax^2 + вx + c \right\|$, другой – вида **(A)**. **(D)**: выделить полный квадрат в знаменателе, если при этом: а) $Mx + N = (ax^2 + вx + c)'$, то интеграл равен $2\sqrt{ax^2 + вx + c}$;

		б) $Mx+N \neq (ax^2+вx+c)'$, то интеграл следует преобразовать так, чтобы можно выделить в числителе производную $2ax+в$, далее полученный интеграл разбить на два интеграла, один из которых будет равен $2\sqrt{ax^2+вx+c}$, другой – вида **(В)**.
5	Интегрирование простейших дробей: 1) $\int\frac{A}{x-a}dx$;2) $\int\frac{A}{(x-a)^n}dx$; 3) $\int\frac{Mx+N}{ax^2+вx+c}dx$;4) $\int\frac{Mx+N}{(ax^2+вx+c)^n}dx$.	1) $\int\frac{A}{x-a}dx = A\ln\lvert x-a\rvert + C$; 2) $\int\frac{A}{(x-a)^n}dx = \frac{A}{(1-n)\cdot(x-a)^{n-1}} + C$, $n\neq 1$; 3) см. в№ 4 интеграл вида (С); 4) рекуррентная формула: $\int\frac{dt}{(t^2+m^2)^n} = \frac{t}{m^2(2n-2)\cdot(t^2+m^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{m^2(2n-2)}\cdot\int\frac{dt}{(t^2+m^2)^{n-1}}$.
6	Интегрирование рациональных функций (дробей): $\int f(x)dx$, где $f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ – рациональная функция.	а) если $m<n$ (дробь правильная), то $f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\ldots+\frac{A_k}{(x-a)^k}+\frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q}+\ldots+\frac{M_sx+N_s}{(x^2+px+q)^s}$; б) если $m\geq n$ (дробь неправильная), то нужно разделить $P(x)$ на $Q(x)$ «столбиком», т.е. представить в виде суммы целой и дробной части (правильной дроби).
7	Интегрирование простейшей иррациональности: $\int R(x^{m/n},x^{p/q},\ldots,x^{r/s})dx$.	Подстановка: $x=t^\lambda$, где λ – общий знам. несократимых дробей $\frac{m}{n},\frac{p}{q},\ldots,\frac{r}{s}$.
8	Интегрированиелинейной иррациональности: $\int R((ax+в)^{m/n},(ax+в)^{p/q},\ldots,(ax+в)^{r/s})dx$	Подстановка: $ax+в=t^\lambda$, где λ – общий знам. несократ. дробей $\frac{m}{n}$, $\frac{p}{q}$, …, $\frac{r}{s}$.
9	Интегрированиедробно-линейной иррациональности: $\int R\left(\left(\frac{ax+в}{cx+d}\right)^{m/n},\left(\frac{ax+в}{cx+d}\right)^{p/q},\ldots,\left(\frac{ax+в}{cx+d}\right)^{r/s}\right)dx$.	Подстановка: $\frac{ax+в}{cx+d}=t^\lambda$, где λ – общий знам. несократ. дробей $\frac{m}{n}$, $\frac{p}{q}$, …, $\frac{r}{s}$.
10	Интегрированиедифференциального бинома: $\int x^m(a+вx^n)^p dx$.	а) если p – натуральное, то раскрыть скобку по биному Ньютона; б) если p – целое, $p<0$, то $x=t^\lambda$, где λ – общий знаменатель m и n; в) если $\frac{m+1}{n}$ – целое, то $a+вx^n=t^\lambda$, где λ – общий знаменатель p; г) если $\frac{m+1}{n}+p$ – целое, то $a+вx^n=t^\lambda$, где λ – общий знаменат. p.

11	а) $\int sinmx\cdot cosnxdx$; б) $\int sin\, mx\cdot sin\, nxdx$; в) $\int cosmx\cdot cosnxdx$.	Преобразовать произведения синусов и косинусов в виде суммы по формулам: а) $sinmx\cdot cosnx=\frac{1}{2}\left[sin(m-n)x+sin(m+n)x\right]$; б) $sinmx\cdot sin\, nx=\frac{1}{2}\left[cos(m-n)x-cos(m+n)x\right]$; в) $cosmx\cdot cosnx=\frac{1}{2}\left[cos(m-n)x+cos(m+n)x\right]$.
12	$\int sin^m x\cdot cos^n xdx$, где m,n – целые;	а) если $m>0$ – нечетное, то $cosx=t$; б) если $n>0$ – нечетное, то $sinx=t$; в) если m и n – четные и $m<0$, то $ctgx=t$; г) если m и n – четные и $n<0$, то $tgx=t$; д) если m и n – четные и $m>0$, $n>0$, то преобразовать с помощью формул: $sin^2 x=(1-cos2x)/2$; $cos^2 x=(1+cos2x)/2$.
13	$\int R(sinx,cosx)dx$.	Универсальная подстановка: $tg\frac{x}{2}=t$, $dx=\frac{2dt}{1+t^2}$; $sinx=\frac{2t}{1+t^2}$; $cosx=\frac{1-t^2}{1+t^2}$.
14	а) $\int R(tgx)dx$; б) $\int R(ctgx)dx$.	а) $tgx=t$, $dx=dt/1+t^2$; б) $ctgx=t$, $dx=-dt/1+t^2$.
15	а) $\int R(x,\sqrt{a^2-x^2})dx$; б) $\int R(x,\sqrt{a^2+x^2})dx$; в) $\int R(x,\sqrt{x^2-a^2})dx$.	а) $x=a\cdot sint$, $dx=a\cdot costdt$ (или $x=a\cdot cost$, $dx=-a\cdot sintdt$); б) $x=a\cdot tgt$, $dx=\frac{adt}{cos^2 t}$ (или $x=a\cdot ctgt$, $dx=-\frac{adt}{sin^2 t}$); в) $x=\frac{a}{cost}$, $dx=\frac{a\cdot tgtdt}{cost}$ (или $x=\frac{a}{sint}$, $dx=\frac{-a\cdot ctgtdt}{sint}$).

Методы интегрирования дифференциальных уравнений

Тип ДУ 1-го порядка	*Метод решения*
I тип.ДУ с разделенными переменными $f_1(x)dx + f_2(y)dy = 0$.	Проинтегрировать уравнение по переменной x и y соответственно. Общий интеграл будет равен $\int f_1(x)dx + \int f_2(y)dy + C = 0$.
II тип.ДУ с разделяющимися переменными $f_1(x)\cdot\varphi_1(y)dx + f_2(x)\cdot\varphi_2(y)dy = 0$.	Умножить обе части уравнения на разделяющий множитель $\dfrac{1}{\varphi_1(y)\cdot f_2(x)}$. Получим уравнение ***I типа***. Общий интеграл равен: $\int \dfrac{f_1(x)dx}{f_2(x)} + \int \dfrac{\varphi_2(y)dy}{\varphi_1(y)} + C = 0$.
III тип.ОднородноеДУ $y' = f(x,y)$, где $f(x,y)$ – однородная функция нулевого измерения.	Подстановка: $y = x\cdot t$, $dy = x\cdot dt + tdx$ (или $y' = t + xt'$). Приводится к уравнению ***II типа***.
IV тип.Линейное ДУ $y' + P(x)\cdot y = Q(x)$.	Подстановка: $y = u\cdot v$, $y' = u'v + uv'$, где $u = u(x)$, $v = v(x)$. Приводится к уравнению ***II типа***. Общее решение $y = e^{-\int P(x)dx}\left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C\right)$.
***V тип.*Уравнение Бернулли** $y' + P(x)\cdot y = Q(x)\cdot y^n$, $n = R\setminus\{0;1\}$.	*1 способ.*Подстановка: $y = u\cdot v$, $y' = u'v + uv'$. *2 способ.*Подстановка: $t = y^{n-1}$.
VI тип. Уравнение в полных дифференциалах $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$.	1. Проверка достаточного условия $\dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \dfrac{\partial N(x,y)}{\partial x}$. 2. $\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = M(x,y) \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = N(x,y) \end{cases} \Rightarrow F(x,y) = \int M(x,y)dx + c(y)$. $\dfrac{\partial F}{\partial y} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\int M(x,y)dx\right) + c'(y) = N(x,y) \Rightarrow$ $c(y) = \int\left(N(x,y) - \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\int M(x,y)dx\right)\right)dy + \tilde{C}$. $\int M(x,y)dx + \int\left(N(x,y) - \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\int M(x,y)dx\right)\right)dy = C$.

Голышева Светлана Павловна

Математика.
Интегральное исчисление функций одной переменной.
Числовые ряды.
Дифференциальные уравнения

Часть 2
Издание второе, переработанное

Учебное пособие
для студентов первых курсов биологических направлений бакалавриата
аграрных вузов очной формы обучения

Компьютерный набор и верстка Голышевой С.П.

Редактор Тесля В.И.

Лицензия ЛР № 070444 от 11.03.98 г.
Подписано к печати
Формат 60×84. Печ. 4,7 л. Тираж 30 экз.
Издательство Иркутского государственного аграрного университета
им. А.А. Ежевского

664038, Иркутская обл., Иркутский р-он, п. Молодежный,
Иркутский государственный аграрный университет
имени А.А. Ежевского