Министерство сельского хозяйства Российской Федерации
Иркутский государственный аграрный
университет им. А.А. Ежевского

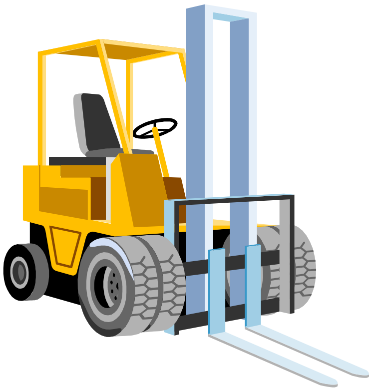
Кафедра Математики

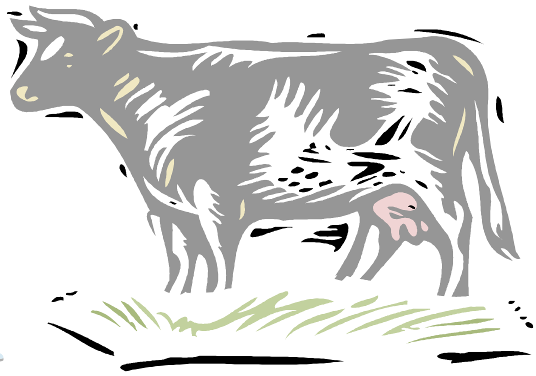
МАТЕМАТИКА

Методические указания для студентов
биологических специальностей и направлений бакалавриата

Часть первая
Линейная алгебра.
Аналитическая геометрия на плоскости

$$y' = sin(3x-5)\cdot\sqrt{x^3-1}$$





$$\int(7x^3+e^x)dx$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

Молодежный 2020

УДК 51(072)

М 34

Рекомендовано к изданию методическим советом инженерного факультета Иркутского государственного аграрного университета им. А.А. Ежевского (протокол № 8 от 23 апреля 2020 г.)

Составители: М.А. Быкова – к.э.н., доцент кафедры Математики
Е.В. Елтошкина – к.т.н., доцент кафедры Математики

Рецензент: Алтухова Т.А. к.т.н., доцент кафедры ЭМТП, БЖД и ПО Иркутского аграрного университета им. А.А. Ежевского

Математика : методические указания для студентов биологических специальностей и направлений бакалавриата / Иркут. гос. аграр. ун-т им. А. А. Ежевского ; сост.: М. А. Быкова, Е.В. Елтошкина. – Молодежный : Изд-во ИрГАУ, 2020.

Ч. 1 : Линейная алгебра. Аналитическая геометрия на плоскости. – 78 с. – Текст : электронный.

Методические указания предназначены для студентов первых курсов биологических специальностей и направлений бакалавриата Иркутского государственного аграрного университета им. А.А. Ежевского: 06.03.01 «Биология», 35.03.08 «Водные биоресурсы и аквакультура», 35.03.01 «Лесное дело», 35.03.07 «Технология производства и переработки сельскохозяйственной продукции», 36.03.02 «Зоотехния», 36.03.01 «Ветеринарно-санитарная экспертиза», 36.05.01 «Ветеринария» (специалитет).

Методические указания составлены на основе действующих стандартов и рабочих программ по дисциплине «Математика». Каждый раздел содержит краткие теоретический материал, контрольные работы и типовые решения контрольных работ. Разработанные методические указания можно использовать на практических занятиях по математике, при подготовке к итоговому экзамену или зачету, а также к Федеральному тестированию.

Внимательная работа с представленными методическими указаниями послужит успешному усвоению основных понятий математики, привитию навыков решения различных типов профессиональных задач.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Математические методы исследования получили широкое распространение в естествознании и медицине. Поэтому подготовка будущих бакалавров и специалистов по биологическим специальностям тесно связана с получением прочных математических знаний и практических навыков. Основой этих знаний является курс «Математика», читаемый студентам биологических специальностей в аграрном вузе.

В методические указания включены некоторые вопросы из разделов «Линейная алгебра», «Аналитическая геометрия на плоскости» (ч. 1), «Математический анализ» (ч. 2), «Теория вероятностей и математическая статистика» (ч. 3).

В методических указаниях приведен обзор основных теоретических понятий и положений указанных разделов с иллюстрацией их на конкретных примерах; даны вопросы для самопроверки знаний студентов; представлены контрольные работы, составленные по двадцативариантной системе с решением типового варианта.

Раздел I. ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

1.1. Матрицы и действия над ними

Числовой матрицей размерности $m\times n$ называют прямоугольную таблицу чисел, содержащую *m* строк и *n* столбцов [1], [6], [17]. Матрицы обозначаются большими латинскими буквами, а их элементы - маленькими буквами с двумя индексами, например:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}=\left(a_{ij}\right),\quad i=\overline{1,m},\quad j=\overline{1,n}, \tag{1.1}$$

где $a_{ij}, i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}$ - элементы матрицы *A*, *i* - номер строки, *j* - номер столбца, на пересечении которых находится элемент a_{ij}. Матрицу можно записывать в виде $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ или $A=\left\|a_{ij}\right\|_{m\times n}$.

Матрицу $A = (a_{11}\ a_{12}\ \dots\ a_{1n})$ размерности 1x*n* называют *матрицей-строкой*, матрица $A=\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$ размерности *m*x1 называют *матрицей-столбцом.*

Матрица называется *квадратной*, если $m = n$, число *n* называют ее *порядком*, например квадратная матрица третьего порядка запишется

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Элементы $a_{ii}\left(i=\overline{1,n}\right)$ квадратной матрицы составляют *главную диагональ* матрицы, а элементы a_{1n}, $a_{2\,n-1}$, … , a_{n1} - *побочную диагональ* матрицы. Если все $a_{ij} = 0$ $(i\neq j)$, за исключением элементов, стоящих на главной диагонали a_{ii}, то матрицу называют *диагональной,* например:

$$D=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

Диагональная матрица называется *единичной*, если все $a_{ii} = 1$, ее обозначают

$$E=\begin{pmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1\end{pmatrix}.$$

Если все $a_{ij}=0$, то матрица называется *нулевой,* обозначают 0.

Нулевая и единичная матрицы выполняют в матричном исчислении такую же роль, как 0 и 1 в теории действительных чисел.

Если все элементы квадратной матрицы удовлетворяют условию $a_{ij}=a_{ji}$, то матрица называется *симметрической*, [3]. Две матрицы $A_{m\times n}=(a_{ij})$ и $B_{m\times n}=(b_{ij})$ называются *равными*, если они имеют одинаковую размерность и их соответствующие элементы равны, т.е. $a_{ij}=b_{ij}$, $i=\overline{1,n}$, $j=\overline{1,m}$.

Над матрицами можно выполнять линейные действия: *умножение на число, сумму* (*разность*) *и произведение.*

1. Чтобы *умножить матрицу* $A=(a_{ij})$ *на число* λ, надо каждый элемент матрицы умножить на это число, [19], т.е.

$$\lambda A=A\lambda=(\lambda a_{ij}). \tag{1.2}$$

Операция умножения матрицы на число обладает следующими свойствами:

$$\alpha\,\beta A=\alpha(\beta A),$$
$$\alpha\,(A+B)=\alpha\,A+\alpha\,B,$$
$$(\alpha+\beta)A=\alpha\,A+\beta\,B,$$

где α, β - действительные числа, A и B - матрицы.

2. *Суммой* (*разностью*) двух матриц $A_{m\times n}$ и $B_{m\times n}$ называется матрица, элементы которой получаются сложением (вычитанием) соответствующих элементов матриц, т.е.

$$A\pm B=(a_{ij}\pm b_{ij}),\ \ i=\overline{1,m},\ \ j=\overline{1,n}. \tag{1.3}$$

Складывать можно матрицы одинаковой размерности. Операция сложения матриц обладает такими же свойствами, что и операция сложения действительных чисел, т.е.

$$A+B=B+A,$$
$$(A+B)+C=A+(B+C),$$
$$A+0=A.$$

3. *Произведением* матрицы $A=(a_{ij})_{m\times n}$ на матрицу $B=(b_{ij})_{n\times k}$ называется матрица $C=(c_{ij})_{m\times k}$ элементы которой, стоящие на пересечении *i*-

ой строки и j-го столбца, равны сумме произведений элементов i-ой строки матрицы A на соответствующие элементы j-ого столбца матрицы B, т.е.

$$c_{ij} = \sum_{s=1}^{n} a_{is} b_{sj} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \ldots + a_{in} b_{nk}, \; i = \overline{1,m}, \; j = \overline{1,k}. \qquad (1.4)$$

Выполнять произведение матриц можно в том случае, когда число столбцов матрицы $A_{m\times n}$ равно числу строк матрицы $B_{n\times k}$, т.е.

$$A_{m\times n} \cdot B_{n\times k} = C_{m\times k} \qquad (1.5)$$

В общем случае $AB \neq BA$. Матрицы называются *коммутативными*, если $AB = BA$. Имеют место следующие свойства произведения матриц:

$(AB) \cdot C = A \cdot (BC)$,
$(A+B) \cdot C = AC + BC$,
$\alpha AB = (\alpha A)B = A(\alpha B)$,
$A \cdot E = E \cdot A = A$, где E - единичная матрица,
$A \cdot 0 = 0$, где 0 - нулевая матрица.

Пример 1.1. Найти матрицу $C = 2A - 3(B - A)$,

где $A = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}$

Решение. $C = 2A - 3(B - A) = 2A - 3B + 3A = 5A - 3B$.

$$C = 5\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 6 & 1 \\ -2 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 & 0 \\ 20 & 35 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -18 & -3 \\ 6 & 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -33 & -3 \\ 26 & 50 \end{pmatrix}.$$

Пример 1.2. Найти произведение матриц AB, если

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 4 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 3 & -2 \\ -5 & 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Решение. $AB = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 4 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 0 & 3 & -2 \\ -5 & 1 & -2 & 4 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} 2\cdot 4 + 3\cdot(-5) & 2\cdot 0 + 3\cdot 1 & 2\cdot 3 + 3\cdot(-2) & 2\cdot(-2) + 3\cdot 4 \\ -2\cdot 4 + 4\cdot(-5) & -2\cdot 0 + 4\cdot 1 & -2\cdot 3 + 4\cdot(-2) & -2\cdot(-2) + 4\cdot 4 \\ 0\cdot 4 + (-2)\cdot(-5) & 0\cdot 0 + (-2)\cdot 1 & 0\cdot 3 + (-2)\cdot(-2) & 0\cdot(-2) + (-2)\cdot 4 \end{pmatrix} =$$

$$=\begin{pmatrix} -7 & 3 & 0 & 8 \\ -28 & 4 & -14 & 20 \\ 10 & -2 & 4 & -8 \end{pmatrix}.$$

Целой положительной степенью A^m квадратной матрицы A называется произведение m матриц A, т.е.

$$A^m = \underbrace{A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{m\ \text{раз}}. \qquad (1.6)$$

Пример 1.3. Найти A^2, если $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Решение. $A^2=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -8 & -5 & -1 \\ 3 & 5 & -2 \\ 3 & 4 & -8 \end{pmatrix}$.

Матрица, у которой строки матрицы A являются столбцами, называется *транспонированной* матрицей A и обозначается A^T, а операция замены строк матрицы на ее столбцы называется *транспонированием* матрицы, [17]. Если матрица A имеет размерность $(m \times n)$, то транспонированная матрица имеет размерность $(n \times m)$. Справедливы следующие свойства для A^T (проверьте самостоятельно):

1) $(A^T)^T = A$; 2) $(A + B)^T = A^T + B^T$; 3) $(\alpha A)^{\mathrm{T}} = \alpha A^T$; 4) $(AB)^T = B^T A^T$.

Элементарными преобразованиями матриц называют, [14]:

- перестановку между собой параллельных рядов (строк или столбцов) матрицы;
- умножение всех элементов любой строки или столбца на число, отличное от нуля;
- прибавление к элементам любого ряда соответствующих элементов параллельного ряда, умноженных на число, отличное от нуля.

Матрицы, полученные одна из другой при помощи элементарных преобразований (как над строками, так и над столбцами), называются *эквивалентными.* Если матрицы A и B эквивалентны, то записывают $A \sim B$.

1.2. Определители, правила их вычисления

Определителем (*детерминантом*) *n-го порядка* называют величину, соответствующую квадратной матрице n-го порядка и вычисленную по определенным правилам, [17]. Обозначают определитель матрицы A: Δ_n, Δ(A), |A|, *det A*. Впервые определители были введены в математику немецким ученым Г.В. Лейбницем.

Определителем первого порядка называется число a_{11}, соответствующее матрице 1-го порядка и равное

$$\Delta_1 = |a_{11}|. \tag{1.7}$$

Определителем второго порядка называют число, соответствующее числовой квадратной матрице второго порядка и равное

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}, \tag{1.8}$$

где $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ - элементы определителя. Элементы a_{11} и a_{22} образуют главную диагональ; элементы a_{21} и a_{12} - побочную диагональ. *Определитель II-го порядка равен разности произведения элементов, стоящих на главной диагонали, и произведения элементов, стоящих на побочной диагонали.*

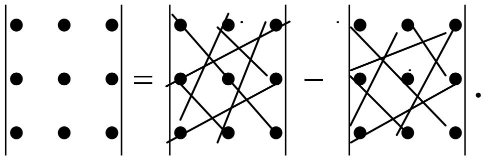
Пример 1.4. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} \sin a & \cos a \\ -\cos a & \sin a \end{vmatrix}$.

Решение. $\begin{vmatrix} \sin a & \cos a \\ -\cos a & \sin a \end{vmatrix} = \sin^2 a + \cos^2 a = 1$.

Определителем третьего порядка называется число, соответствующее квадратной числовой матрице третьего порядка и равное

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - \\ - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{32}a_{23}a_{11}. \tag{1.9}$$

Формула (1.9) называется *правилом Саррюса* (*правилом «треугольников», правилом «звездочки»*), согласно которому определитель третьего порядка равен алгебраической сумме 6 тройных произведений элементов, стоящих в разных строках и разных столбцах; со знаком плюс берутся произведения, сомножители которых находятся на главной диагонали и в вершинах треугольников с основаниями, параллельными главной диагонали, со знаком минус - произведения, сомножители которых стоят на побочной диагонали и в вершинах треугольников с основаниями, параллельными этой диагонали. Знаки каждого слагаемого легко запомнить, если пользоваться схемой:



Пример 1.5. Применить правило Саррюса для вычисления определителя

$$\begin{vmatrix} 2 & -2 & -3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}.$$

Решение. $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -2 & -3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2\cdot 3\cdot(-1)+(-2)\cdot 1\cdot 2+1\cdot 1\cdot(-3)-2\cdot 3\cdot(-3)-1\cdot(-2)\cdot(-1)-$

$$-1\cdot 1\cdot 2 = -6-4-3+18-2-2=1.$$

Определитель третьего порядка можно вычислять по правилу добавления столбцов или строк, [14]. Пусть дан определитель III-го порядка

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Добавим к нему справа первые два столбца

$$\begin{array}{ccc|cc} & & - & - & - \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \\ & & + & + & + \end{array}$$

Проводим диагонали параллельно главной диагонали и диагонали параллельно побочной диагонали. Затем перемножаем элементы, стоящие на проведенных диагоналях, причем произведения элементов, стоящие на главной диагонали и диагоналях, параллельных ей, будем брать со знаком (+), а произведение элементов, стоящих на побочной диагонали и диагоналях, параллельных ей, будем брать со знаком (-). Тогда получим

$$\Delta_3 = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}. \qquad (1.10)$$

При добавлении строк поступаем так: добавляем первые две строки снизу. Затем находим сумму произведений элементов главной диагонали и элементов, параллельных ей, затем вычитаем сумму произведений элементов побочной диагонали и элементов параллельных ей, т.е.

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \begin{matrix} - \\ - \\ - \\ + \\ + \end{matrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - \tag{1.11}$$

$$- a_{31}a_{22}a_{13} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{33}.$$

Пример 1.6. По правилу добавления строк или столбцов вычислить определитель $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix}$.

Решение. Применим правило добавления столбцов:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 1 \\ & & + & + & + \end{vmatrix} = 2\cdot 2\cdot(-3) + (-1)\cdot 1\cdot 0 + 0\cdot 3\cdot 1 - 0\cdot 2\cdot 0 - 1\cdot 1\cdot 2 -$$

$$-(-3)\cdot 3\cdot(-1) = -12 - 2 - 9 = -23.$$

Применим правило добавления строк:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} - \\ - \\ - \\ + \\ + \\ + \end{matrix} = 2\cdot 2\cdot(-3) + 3\cdot 1\cdot 0 + 0\cdot(-1)\cdot 1 - 0\cdot 2\cdot 0 - 2\cdot 1\cdot 1 - 3(-1)(-3) =$$

$$= -12 - 2 - 9 = -23.$$

Определители n-го порядка обладают *свойствами*:

1. Величина определителя не изменится, если строки и столбцы поменять местами, то есть транспонировать матрицу. Действительно,

$$\begin{vmatrix} a_{11}a_{12} \\ a_{21}a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}, \quad \begin{vmatrix} a_{11}a_{21} \\ a_{12}a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

2. Определитель матрицы *A* равен определителю транспонированной матрицы $det\ \text{A} = det\ \text{A}^{\text{T}}$.

3. При перестановке двух параллельных рядов определитель меняет знак. Для доказательства достаточно расписать определитель

$$\begin{vmatrix} a_{21}a_{22} \\ a_{11}a_{12} \end{vmatrix} = a_{21}a_{12} - a_{22}a_{11} = -(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = - \begin{vmatrix} a_{11}a_{12} \\ a_{21}a_{22} \end{vmatrix}.$$

4. Если определитель имеет две равные строки, то он равен нулю, т.е.

$$\begin{vmatrix} a_{11}a_{12} \\ a_{11}a_{12} \end{vmatrix} = a_{11}a_{12} - a_{12}a_{11} = 0.$$

5. Произведение всех элементов некоторой строки на число λ равносильно умножению определителя на это число λ, т.е.

$$\begin{vmatrix} \lambda a_{11}\lambda a_{12} \\ a_{21}a_{22} \end{vmatrix} = \lambda a_{11}a_{22} - \lambda a_{12}a_{21} = \lambda(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = \lambda \begin{vmatrix} a_{11}a_{12} \\ a_{21}a_{22} \end{vmatrix}.$$

Это означает, что *общий множитель элементов любой строки или столбца можно выносить за знак определителя*.

6. Если все элементы некоторого ряда определителя равны нулю, то и сам определитель равен нулю, т.е.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = a_{11} \cdot 0 - a_{12} \cdot 0 = 0.$$

7. Из третьего и четвертого свойств следует, что, если элементы двух строк пропорциональны, то определитель равен нулю.

8. Если элементы некоторой строки (столбца) являются суммой двух слагаемых, то определитель равен сумме двух определителей, соответствующие строки (столбцы) которых состоят из этих слагаемых, т.е.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} + c & a_{22} + d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ c & d \end{vmatrix}.$$

9. Если к элементам одной строки прибавить элементы другой строки, умноженной на некоторый коэффициент λ, то величина определителя не изменится. Действительно,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} + \lambda a_{11} & a_{22} + \lambda a_{12} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} + \lambda a_{11}a_{12} - a_{12}a_{21} - \lambda a_{12}a_{11} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

1.3. Формула Лапласа

Минором M_{ij} элемента a_{ij} квадратной матрицы A называется определитель порядка на единицу ниже порядка определителя соответствующей матрицы, полученный после вычеркивания i-ой строки и j-го столбца в матрице A. Например, для матрицы третьего порядка имеем

$$M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}; \qquad M_{22} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента a_{ij}, матрицы A называется минор этого элемента, вычисленный по формуле:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij} . \qquad (1.12)$$

Пример 1.7. Найти алгебраические дополнения элементов первой строки матрицы $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \\ 1 & 1 & 8 \end{pmatrix}$.

Решение.

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot M_{11} = +\begin{vmatrix} 6 & 7 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} = 48 - 7 = 41,$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} = -(40-7) = -33, \quad A_{13} = +\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1.$$

Определители третьего и более высоких порядков можно вычислять по *общему правилу*: *определитель равен сумме произведений элементов любого его ряда на их алгебраические дополнения*, т.е.

$$\Delta_n = \sum_{j=1}^{n} a_{1j} A_{1j} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \ldots + a_{1n}A_{1n}. \tag{1.13}$$

Это правило называется *методом разложения определителя по строке* (*по столбцу*) или *формулой Лапласа*, [7]. Так, определитель 4-го порядка по методу разложения по первой строке равен

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} a_{11}a_{12}a_{13}a_{14} \\ a_{21}a_{22}a_{23}a_{24} \\ a_{31}a_{32}a_{33}a_{34} \\ a_{41}a_{42}a_{43}a_{44} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22}a_{23}a_{24} \\ a_{32}a_{33}a_{34} \\ a_{42}a_{43}a_{44} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21}a_{23}a_{24} \\ a_{31}a_{33}a_{34} \\ a_{41}a_{43}a_{44} \end{vmatrix} +$$

$$+ a_{13}\begin{vmatrix} a_{21}a_{22}a_{24} \\ a_{31}a_{32}a_{34} \\ a_{41}a_{42}a_{44} \end{vmatrix} - a_{14}\begin{vmatrix} a_{21}a_{22}a_{23} \\ a_{31}a_{32}a_{33} \\ a_{41}a_{42}a_{43} \end{vmatrix}. \tag{1.14}$$

Пример 1.8. Вычислить определитель $\Delta_4 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 7 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 2 \\ 6 & 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

Решение. Объем вычислений можно уменьшить, если выбрать такой ряд, в котором максимальное число нулей. Наиболее подходящей является 2-ая строка. Разложение определителя по этой строке имеет вид:

$$\Delta_4 = 0 \cdot A_{21} + 3 \cdot A_{22} + 0 \cdot A_{23} + 2 \cdot A_{24} = 3 \cdot (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 3 & 2 \\ 6 & 1 & 1 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{2+4} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 3 \\ 6 & 3 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 3(3 + 48 + 14 - 126 - 8 - 2) + 2(4 + 36 + 24 - 96 - 4 - 9) = -213 - 90 = -303.$$

Вычисление определителя можно упростить, если в каком-либо ряде получить все элементы, кроме одного, равными нулю. Для этого воспользуемся свойством 7 определителя: 4-й столбец умножим на (-1) и прибавим ко 2-му, получим определитель $\Delta_4 = \begin{vmatrix} 1 & -5 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ 6 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

Элементы 2-го столбца умножим на (-2) и прибавим к 4-му:

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 1 & -5 & 4 & 17 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & -2 \\ 6 & 2 & 1 & -3 \end{vmatrix}.$$

Разложим определитель по элементам 2-ой строки:

$$\Delta_4 = 0 \cdot A_{21} + 1 \cdot A_{22} + 0 \cdot A_{23} + 0 \cdot A_{24} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 17 \\ 2 & 3 & -2 \\ 6 & 1 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$= -9 - 48 + 34 - 306 + 24 + 2 = -303.$$

1.4. Обратная матрица

Матрица A^{-1} называется *обратной* по отношению к матрице A, если при умножении этой матрицы на данную, как справа, так и слева, получается единичная матрица, [6]:

$$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E. \qquad (1.15)$$

Из определения следует, что только квадратная матрица имеет обратную.

Квадратная матрица A называется ***невырожденной***, если ее определитель отличен от нуля, т.е. $det\ A \neq 0$, в противном случае ($det\ A = 0$) матрица называется *вырожденной*.

Теорема существования обратной матрицы (без доказательства): Для каждой невырожденной матрицы A существует обратная A^{-1}.

Теорема единственности обратной матрицы (без доказательства): Если у некоторой матрицы существует обратная, то она единственная.

Обратная матрица A^{-1} определяется по формуле:

$$A^{-1} = \frac{1}{detA}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|}\tilde{A}, \tag{1.16}$$

где $\tilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$ - *присоединенная* матрица к матрице A, элементами которой являются алгебраические дополнения транспонированной матрицы A^T.

Обратная матрица обладает следующими свойствами:

1) $det\, A^{-1} = \dfrac{1}{det\, A}$; 2) $(A^{-1})^{-1} = A$;

3) $(A^k)^{-1} = (A^{-1})^k$; 4) $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$;

5) $(A \cdot B \cdot C)^{-1} = C^{-1} \cdot B^{-1} \cdot A^{-1}$.

Согласно формуле (1.16) обратная матрица может быть определена по следующему алгоритму:

1. Найти определитель исходной квадратной матрицы. Если $|A| = 0$, то матрица A - вырожденная и обратной матрицы не существует. Если $|A| \neq 0$, то матрица A - невырожденная и обратная матрица существует.

2. Найти матрицу A^T, транспонированную к A, определить алгебраические дополнения элементов транспонированной матрицы. Составить присоединенную матрицу $\tilde{A}$.

3. Найти обратную матрицу по формуле (1.16) .

4. Проверить правильность вычисления обратной матрицы A^{-1}, исходя из ее определения (1.15).

Пример 1.9. Найти матрицу, обратную матрице $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Решение. Поступаем согласно предложенному алгоритму.

1. $|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 9 + 4 - 1 - 3 - 2 + 6 = 13 \neq 0$, т.е. матрица

A – невырожденная, и обратная матрица A^{-1} существует.

2. Находим матрицу A^T, транспонированную к A: $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Находим алгебраические дополнения элементов матрицы A^T:

$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 9 - 2 = 7$, $A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -(-3 - 2) = 5$,

$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 - 3 = -4$, $A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -(6 - 1) = -5$,

$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & \\ 13 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 1 = 2$, $A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -(1 - 2) = 1$,

$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 3 = 1$, $A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -(2 + 1) = -3$,

$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 3 + 2 = 5.$

Составляем присоединенную матрицу $\tilde{A} = \begin{pmatrix} 7 & 5 & -4 \\ -5 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 5 \end{pmatrix}$.

3. Находим обратную матрицу:

$$A^{-1} = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 7 & 5 & -4 \\ -5 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 5 \end{pmatrix}.$$

4. Проверяем правильность нахождения обратной матрицы

$$A^{-1} \cdot A = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 7 & 5 & -4 \\ -5 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 7 + 10 - 4 & -7 + 15 - 8 & 7 + 5 - 12 \\ -5 + 4 + 1 & 5 + 6 + 2 & -5 + 2 + 3 \\ 1 - 6 + 5 & -1 - 9 + 10 & 1 - 3 + 15 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 13 & 0 & 0 \\ 0 & 13 & 0 \\ 0 & 0 & 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Существует наиболее простой *способ* нахождения обратной матрицы *с помощью элементарных преобразований над строками* невырожденной матрицы, суть которого состоит в следующем, [4]:

1. К матрице A приписывают справа единичную матрицу $(A\,|\,E)$ (эту матрицу называют также *расширенной*).

2. Путем элементарных преобразований над строками расширенной матрицы добиваются того, что матрица слева от черты станет единичной.

3. После окончания вычислительного процесса, когда на месте исходной матрицы A будет сформирована единичная матрица, на месте приписанной единичной матрицы E будет находиться обратная матрица A^{-1}. Расширенная матрица $(A\,|\,E)$ в итоге примет вид $(E\,|\,A^{-1})$.

4. Выполнить проверку по формуле (1.15).

Пример 1.10. Найти матрицу, обратную матрице $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 7 & 1 & 9 \\ -4 & 5 & -2 \end{pmatrix}$.

Решение. Припишем к матрице A единичную:

$$(A|E)=\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 9 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 5 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Выполним элементарные преобразования: 1) первую строку умножим на $^1/_2$; 2) прибавим ко второй строке первую, умноженную на (-7); 3) прибавим к третьей строке первую, умноженную на 4; 4) вторую строку умножим на $(-^2/_{19})$; 5) к первой строке прибавим вторую, умноженную на $(-^3/_2)$; 6) к третьей строке прибавим вторую, умноженную на (-11); 7) третью строку умножим на $^{19}/_4$; 8) к первой строке прибавим третью, умноженную на $(-^{23}/_{19})$; 9) ко второй строке прибавим третью, умноженную на $(-^{10}/_{19})$. В итоге получим:

$$(A|E)=\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 9 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 5 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & ^3/_2 & 2 & ^1/_2 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 9 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 5 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & ^3/_2 & 2 & ^1/_2 & 0 & 0 \\ 0 & -^{19}/_2 & -5 & -^7/_2 & 1 & 0 \\ 0 & 11 & 6 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & ^3/_2 & 2 & ^1/_2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & ^{10}/_{19} & ^7/_{19} & -^2/_{19} & 0 \\ 0 & 11 & 6 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & {}^{23}/_{19} & -{}^{1}/_{19} & {}^{3}/_{19} & 0 \\ 0 & 1 & {}^{10}/_{19} & {}^{7}/_{19} & -{}^{2}/_{19} & 0 \\ 0 & 0 & {}^{4}/_{19} & -{}^{39}/_{19} & {}^{22}/_{19} & 1 \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & {}^{23}/_{19} & -{}^{1}/_{19} & {}^{3}/_{19} & 0 \\ 0 & 1 & {}^{10}/_{19} & {}^{7}/_{19} & -{}^{2}/_{19} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -{}^{39}/_{4} & {}^{11}/_{2} & {}^{19}/_{4} \end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & {}^{47}/_{4} & -{}^{13}/_{2} & -{}^{23}/_{4} \\ 0 & 1 & 0 & {}^{11}/_{2} & -3 & -{}^{5}/_{2} \\ 0 & 0 & 1 & -{}^{39}/_{4} & {}^{11}/_{2} & {}^{19}/_{4} \end{array}\right).$$

Тогда $A^{-1}=\begin{pmatrix} {}^{47}/_{4} & -{}^{13}/_{2} & -{}^{23}/_{4} \\ {}^{11}/_{2} & -3 & -{}^{5}/_{2} \\ -{}^{39}/_{4} & {}^{11}/_{2} & {}^{19}/_{4} \end{pmatrix}.$

Проверка:

$$A\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 7 & 1 & 9 \\ -4 & 5 & -2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} {}^{47}/_{4} & -{}^{13}/_{2} & -{}^{23}/_{4} \\ {}^{11}/_{2} & -3 & -{}^{5}/_{2} \\ -{}^{39}/_{4} & {}^{11}/_{2} & {}^{19}/_{4} \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} \frac{47}{2}+\frac{33}{2}-39 & -13-9+22 & -\frac{23}{2}-\frac{15}{2}+19 \\ \frac{329}{4}+\frac{11}{2}-\frac{351}{4} & -\frac{91}{2}-3+\frac{99}{2} & -\frac{161}{4}-\frac{5}{2}+\frac{171}{4} \\ -47+\frac{55}{2}+\frac{39}{2} & 26-15-11 & 23-\frac{25}{2}-\frac{19}{2} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1.5. Ранг матрицы

Пусть $A=(a_{ij})_{m\times n}$ - матрица любого порядка. Если выписать произвольно k-строк ($k < m$) и k-столбцов ($k < n$) этой матрицы, то получим *минор k-го* порядка, *порожденный матрицей A*, [12].

Пример 1.11. Выписать миноры, порожденные матрицей $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 5 & 7 & 2 \end{pmatrix}$.

Решение. Миноры, порожденные данной матрицей, являются определителями второго порядка и имеют вид:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 5 \end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 7 \end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 2 \end{vmatrix}.$$

Рангом матрицы A называют *число, равное наивысшему порядку ее минора, не равного нулю*. Обозначают ранг матрицы A: $rang\ A$; $r(A)$; r_A.

Из определения ранга матрицы следуют утверждения (доказать самостоятельно):

1) $0 \le r \le \min(m,n)$;

2) $r = 0$, тогда и только тогда, когда все $a_{ij} = 0$;

3) $r = n$ для квадратной матрицы n-го порядка тогда и только тогда, когда матрица невырожденная;

4) $r < n$ для квадратной матрицы A, если ее определитель $\Delta = 0$.

Любой не равный нулю минор матрицы A, порядок которого совпадает с рангом матрицы, называется *базисным*, [17].

Ранг матрицы можно определять по *методу окаймляющих миноров*, суть которого сводится к вычислению миноров порядка k и $(k+1)$. При этом минор M_{k+1}, содержащий в себе минор M_k, называется *окаймляющим минором* M_k. *Если у матрицы A существует минор $M_k \ne 0$, а все окаймляющие миноры $M_{k+1} = 0$, то ранг матрицы A равен k.*

Более рациональным методом нахождения ранга матрицы является *метод «единиц и нулей»*: с помощью элементарных преобразований над строками или столбцами любая матрица может быть приведена к виду, когда каждый ее ряд будет состоять только из нулей, или из нулей и одной единицы. *Число оставшихся единиц и определит ранг исходной матрицы.*

Пример 1.12. Найти ранг матрицы $C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 4 \\ 1 & -2 & 3 & -2 \\ 3 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

Решение. Приведем данную матрицу к треугольному виду с помощью элементарных преобразований. Поменяем первую и вторую строки. Первую строку, умноженную на (-2), сложим со второй, а затем первую строку умножим на (-3) и сложим с третьей. Вторую стоку, умноженную на (-1), сложим с третьей. Первый столбец умножаем последовательно на 2, (-3), 2 и складываем соответственно со вторым, третьим и четвертым столбцом. Второй столбец умножим на 1/7, третий на (-1/7), четвёртый - на 1/8. Прибавим второй столбец к третьему и вычтем его из четвертого, получим:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -2 \\ 2 & 3 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -2 \\ 0 & 7 & -7 & 8 \\ 0 & 7 & -7 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & -7 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Число единиц в последней матрице равно двум, значит, $rangC = 2$.

Можно было остановиться на предыдущей эквивалентной матрице, так как третья строка – нулевая, а определитель второго порядка отличен от нуля, т.е. $\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix} = 1 \neq 0$, что свидетельствует о том, что $r(C) = 2$.

1.6. Системы линейных алгебраических уравнений, методы их решения

Система вида:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \ldots \quad . \quad . \quad . \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (1.17)$$

называется *неоднородной системой m линейных уравнений с n неизвестными.* Здесь $x_1, x_2, \ldots, x_n$ - неизвестные величины, a_{ij} - коэффициенты системы, $\left(i = \overline{1,n};\ j = \overline{1,m}\right)$, b_j, - свободные члены.

Совокупность *n* чисел $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$, которые обращают каждое уравнение системы в тождество, называется *решением системы.* Если существует хотя бы одно решение, то система называется *совместной*, если система не имеет решений, то она называется - *несовместной.* Совместная система называется *определенной*, если решение единственно, в противном случае, когда она имеет более одного решения - *неопределенной.* В последнем случае каждое ее решение называется *частным решением* системы. Совокупность всех частных решений называется *общим решением*. Две системы называются *эквивалентными*, если они имеют одно и то же общее решение.

Если все свободные члены $b_i = 0 \quad (j = \overline{1,m})$, то система называется *однородной.* Однородная система всегда совместна, так как она имеет решение $x_i = 0 \ (i = \overline{1,n})$, которое называют *нулевым* или *тривиальным.*

В *матричной форме* система (1.17) записывается в виде:

$$AX = B, \tag{1.18}$$

где матрица $A = (a_{ij})_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$, составленная из коэффициентов системы, называется *основной матрицей системы*, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ - *матрица неизвестных,* $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$ - *матрица свободных членов*. Если к матрице системы A присоединить столбец свободных членов, то получим так называемую *расширенную матрицу системы***,** обозначим ее

$$(A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right).$$

Эквивалентные системы получаются при *элементарных преобразованиях* лишь *над строками расширенной матрицы системы*.

Ответ на вопрос о совместности неоднородной системы дает *теорема Кронекера-Капелли*, [14]: *Для того, чтобы система линейных уравнений была совместна, необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы системы был равен рангу расширенной матрицы*, т.е.

$$rangA = rang(A|B) = r. \tag{1.19}$$

Пример 1.13. Исследовать систему $\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 2 \\ 7x_1 - 4x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 5 \\ 5x_1 + 7x_2 - 4x_3 - 6x_4 = 3 \end{cases}$ на совместность.

Решение. Найдем ранг основной матрицы системы $A = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 2 & 4 \\ 7 & -4 & 4 & -3 \\ 5 & 7 & -4 & -6 \end{pmatrix}$.

Воспользуемся методом окаймляющих миноров. Минор 2-го порядка

$$\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 7 & -4 \end{vmatrix} = 3\cdot(-4)-(-5)\cdot 7 = 23 \neq 0.$$

Вычислим все окаймляющие его миноры 3-го порядка:

$$\begin{vmatrix} 3 & -5 & 2 \\ 7 & -4 & 1 \\ 5 & 7 & -4 \end{vmatrix} = 48-25+98+40-140-21=0,$$

$$\begin{vmatrix} 3 & -5 & 4 \\ 7 & -4 & 3 \\ 5 & 7 & -6 \end{vmatrix} = 72-75+196+80-210-63=0.$$

Так как все окаймляющие миноры третьего порядка равны нулю, то ранг основной матрицы равен двум. В свою очередь ранг расширенной матрицы $(A|B)=\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -5 & 2 & 4 & 2 \\ 7 & -4 & 1 & 3 & 5 \\ 5 & 7 & -4 & -6 & 3 \end{array}\right)$ равен трем, так как минор третьего порядка

$$\begin{vmatrix} 3 & -5 & 2 \\ 7 & -4 & 5 \\ 5 & 7 & 3 \end{vmatrix} = -36-125+98+40+105-105=-23 \neq 0$$

Таким образом, *rang A* = 2 меньше *rang* $(A\,|\,B)$ = 3, то по теореме Кронекера-Капелли данная система несовместна.

Рассмотрим систему, у которой число уравнений равно числу неизвестных, т.е. $m = n$. Основная матрица A такой системы квадратная. Определитель этой матрицы $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$ называется *основным определителем системы.*

Если основной определитель системы отличен от нуля, то ранги основной и расширенной матриц совпадают и равны числу неизвестных. В этом случае существует обратная матрица A^{-1}. Уравнение (1.18) умножим слева на A^{-1}, получим:

$$A^{-1}AX = A^{-1}B,$$

так как $A^{-1}A = E$, то решение системы определится:

$$X = A^{-1}\cdot B. \tag{1.20}$$

Итак, *система имеет единственное решение***,** когда

$$rangA = rang\left(A\middle|B\right) = r = n. \tag{1.21}$$

Единственное решение можно найти с помощью обратной матрицы по формуле (1.20), называемой *матричным методом* решения системы линейных алгебраических уравнений.

Пример 1.14. Решить систему линейных алгебраических уравнений $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ x_1 \qquad + 4x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 \qquad = 1 \end{cases}$ матричным методом.

Решение. Исследуем систему на совместность. Установим, будет ли основная матрица системы невырожденной, для этого вычислим ее определитель:

$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 16 + 1 + 4 = 21, \quad \Delta \neq 0$, следовательно, матрица A не вырождена. Это говорит о том, что ранг основной матрицы системы равен 3. Расширенная матрица системы будет иметь то же значение ранга, т.к. основной определитель системы является минором 3-го порядка в нее входящий. Выполняется равенство (1.21), т.е. система имеет единственное решение. Найдем обратную матрицу по формуле (1.16), для чего вычислим все алгебраические дополнения:

$A_{11} = \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 4$; $\qquad A_{21}=1$; $\qquad A_{31}=8$;

$A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 8$; $\qquad A_{22}=2$; $\qquad A_{32}=-5$;

$A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1$; $\qquad A_{23}=5$; $\qquad A_{33}=-2$.

Тогда, $A^{-1} = \dfrac{1}{21}\begin{pmatrix} 4 & 1 & 8 \\ 8 & 2 & -5 \\ -1 & 5 & -2 \end{pmatrix}$. Выполним проверку $A^{-1}A = E$:

$$A^{-1}\cdot A=\frac{1}{21}\begin{pmatrix}4&1&8\\8&2&-5\\-1&5&-2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2&-1\\1&0&4\\2&-1&0\end{pmatrix}=\frac{1}{21}\begin{pmatrix}4+1+16&8+0-8&-4+4+0\\8+2-10&16+0+5&-8+8+0\\-1+5-4&-2+0+2&1+20+0\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{21}\begin{pmatrix}21&0&0\\0&21&0\\0&0&21\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

Найдем матрицу-столбец неизвестных системы по формуле (1.20):

$$X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\frac{1}{21}\begin{pmatrix}4&1&8\\8&2&-5\\-1&5&-2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}=\frac{1}{21}\begin{pmatrix}8+0+8\\16+0-5\\-2+0-2\end{pmatrix}=\frac{1}{21}\begin{pmatrix}16\\11\\-4\end{pmatrix}.$$

Итак, $x_1=\frac{16}{21};\quad x_2=\frac{11}{21};\quad x_3=-\frac{4}{21}.$

Подставим найденное решение в каждое уравнение системы:

$$\begin{cases}\frac{16}{21}+2\cdot\frac{11}{21}+\frac{4}{21}=\frac{16+22+4}{21}=\frac{42}{21}=2,\\ \frac{16}{21}+4\cdot\left(-\frac{4}{21}\right)=\frac{16}{21}-\frac{16}{21}=0,\\ 2\cdot\frac{16}{21}-\frac{11}{21}=\frac{32-11}{21}=\frac{21}{21}=1.\end{cases}$$

Все уравнения системы обратились в тождество, значит, решение запишется

$$X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}16/21\\11/21\\-4/21\end{pmatrix}.$$

Матричное равенство (1.20) можно представить в виде

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\dots\\x_n\end{pmatrix}=\frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}&\dots&A_{n1}\\A_{12}&A_{22}&\dots&A_{n2}\\..&..&\dots&..\\A_{1n}&A_{2n}&\dots&A_{nn}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\dots\\b_n\end{pmatrix}.$$

Отсюда легко получаются известные *формулы Крамера*,[24]:

$$\begin{cases} x_j = \dfrac{1}{\Delta}(A_{1i}b_1 + A_{2i}b_2 + ... + A_{ni}b_n) = \dfrac{1}{\Delta}\sum\limits_{k=1}^{n} A_{kj}b_k \\ (j = \overline{1,n}) \end{cases}, \tag{1.22}$$

или

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}, \tag{1.22'}$$

где $\Delta_j = \sum\limits_{k=1}^{n} A_{kj}b_k$ - определитель матрицы *A*, у которой *j*-ый столбец заменен столбцом свободных членов.

Пример 1.15. Решить систему линейных алгебраических уравнений $\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 = 1, \\ 5x_1 + 6x_2 = 11. \end{cases}$ методом Крамера.

Решение. Вычислим основной определитель системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 4 \cdot 6 - (-3) \cdot 5 = 24 + 15 = 39.$$

Этот определитель отличен от нуля, значит, выполняется условие (1.21) $rangA = rang\left(A|B\right) = 2 = n$ и система имеет единственное решение. Найдем вспомогательные определители и решение исходной системы по формулам (1.22'):

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 11 & 6 \end{vmatrix} = 1 \cdot 6 - (-3) \cdot 11 = 6 + 33 = 39, \ x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{39}{39} = 1.$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 11 \end{vmatrix} = 4 \cdot 11 - 1 \cdot 5 = 44 - 5 = 39, \ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{39}{39} = 1.$$

Проверка: $\begin{cases} 4 \cdot 1 - 3 \cdot 1 = 1, \\ 5 \cdot 1 + 6 \cdot 1 = 11. \end{cases}$ Таким образом, $x_1 = 1,\ x_2 = 1.$

Универсальным методом решения систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) является *метод Гаусса (метод последовательного исключения неизвестных)*, [26]. Процесс решения СЛАУ по методу Гаусса состоит из двух этапов.

На первом этапе (*прямой ход*) система (1.17) с помощью элементарных преобразований над строками приводится к *ступенчатому виду* (ниже главной диагонали должны находиться нули). Если в процессе приведения системы (1.17) к ступенчатому виду появляются нулевые уравнения, т.е. равенства вида 0 = 0, их отбрасывают. Если же появляются уравнения вида 0 = b_i, а $b_i \neq 0$, то это свидетельствует о несовместности системы. Причем, если ранг матрицы системы уравнений равен числу неизвестных, т.е. $r(A)=n$, то система уравнений сводится к *треугольному виду*

$$\begin{cases} x_1 + a'_{12}x_2 + a'_{13}x_3 + \ldots + a'_{1n}x_n = b'_1, \\ \qquad x_2 + a'_{23}x_3 + \ldots + a'_{2n}x_n = b'_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots x_3 + \ldots + a'_{3n}x_n = b'_3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad x_n = b'_n. \end{cases} \tag{1.17$'$}$$

Если ранг матрицы системы уравнений меньше числа неизвестных r(A) < n, то система уравнений сводится к *трапецеидальному виду*

$$\begin{cases} x_1 + a'_{12}x_2 + a'_{13}x_3 + \ldots + a'_{1n}x_n = b'_1, \\ \qquad x_2 + a'_{23}x_3 + \ldots + a'_{2n}x_n = b'_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots x_3 + \ldots + a'_{3n}x_n = b'_3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad x_r + \ldots + a'_{rn}x_n = b'_r. \end{cases} \tag{1.17$''$}$$

На втором этапе (*обратный ход*) идет последовательное определение неизвестных из этой ступенчатой системы. В случае полученного треугольного вида системы (1.17') исходная система имеет единственное решение. Из последнего уравнения определяется $x_n = b'_n$. Подставляя в предпоследнее уравнение x_n, находят x_{n-1}. Продолжая указанный процесс, определяют остальные неизвестные. В случае полученного трапецеидального вида системы (1.17") исходная система *имеет множество решений*, условием которого является выражение

$$rangA = rang(A|B) = r < n. \tag{1.23}$$

Из последнего уравнения выражают $x_r = b'_r - a'_{r.r+1}x_{r+1} - \ldots - a'_{rn}x_n$. Подставляя в предпоследнее уравнение выражение x_r, находят выражение для x_{r-1}. Продолжая процесс, определяют остальные неизвестные. Переменные $x_{r+1},\ldots,x_n$ могут принимать любые значения и называются *свободными*. Переменные $x_1, x_2, x_3,\ldots,x_r$ называются *базисным*. Выражения r базисных переменных через (n – r) свободных определяют *общее решение системы.* Если свободным переменным придать конкретные числовые значения, то получают *частное решение* системы линейных алгебраических уравнений (1.17). Для решения системы m линейных уравнений с n переменными $(m<n)$ вовсе не требуется находить специально ранги $r(A)$ и $r(A|B)$, а достаточно применить метод Гаусса.

Пример 1.16. Решить систему уравнений методом Гаусса

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 4, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 8, \\ 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 10x_4 = 20, \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 - 6x_4 = 4. \end{cases}$$

Решение. Выполним элементарные преобразования над строками расширенной матрицы системы:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 8 \\ 2 & 4 & 5 & 10 & 20 \\ 2 & -4 & 1 & -6 & 4 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ +I\cdot(-1) \\ +I\cdot(-2) \\ +I\cdot(-2) \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & 6 & 3 & 12 & 12 \\ 0 & -2 & -1 & -4 & -4 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ :2 \\ \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 1/2 & 2 & 2 \\ 0 & 6 & 3 & 12 & 12 \\ 0 & -2 & -1 & -4 & -4 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ +II\cdot(-6) \\ +II\cdot 2 \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 1/2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Система уравнений совместна и имеет множество решений, так как выполняется условие (1.23), т.е. $r(A) = r(A|B) = 2 < n = 4$. Переменные x_1, x_2 являются базисными, а переменные x_3, x_4 являются свободными (независимыми), могут принимать любые значения. Из второго уравнения находим $x_2 = 2 - \frac{1}{2}x_3 - 2x_4$. В первое уравнение $x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 4$ подставим полученное выражение для x_2. Получим $x_1 - 2 + \frac{1}{2}x_3 + 2x_4 + x_3 - x_4 = 4$. Выразим x_1, т.е. $x_1 = 6 - \frac{3}{2}x_3 - x_4$.

Общее решение системы запишется $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 - \frac{3}{2}x_3 - x_4 \\ 2 - \frac{1}{2}x_3 - 2x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$.

Найдем четыре частных решения при 1) $x_3 = 0$, $x_4 = 1$; 2) $x_3 = 1$, $x_4 = 0$; 3) $x_3 = 0$, $x_4 = 0$; 4) $x_3 = 1$, $x_4 = 1$:

$$X_1 = \begin{pmatrix} 6 - \frac{3}{2}x_3 - x_4 \\ 2 - \frac{1}{2}x_3 - 2x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad X_2 = \begin{pmatrix} 6 - \frac{3}{2}x_3 - x_4 \\ 2 - \frac{1}{2}x_3 - 2x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{9}{2} \\ \frac{3}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$X_4=\begin{pmatrix}6-\frac{3}{2}x_3-x_4\\2-\frac{1}{2}x_3-2x_4\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{7}{2}\\-\frac{1}{2}\\1\\1\end{pmatrix}.\qquad X_3=\begin{pmatrix}6-\frac{3}{2}x_3-x_4\\2-\frac{1}{2}x_3-2x_4\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\2\\0\\0\end{pmatrix},$$

Вопросы для самопроверки

1. Понятие числовой матрицы.
2. Виды матриц: диагональная, единичная, треугольная, симметрическая.
3. Основные операции над матрицами и их свойства (сложение, вычитание, умножение на число, умножение матриц).
4. Степень матрицы. Транспонирование матриц, его свойства.
5. Понятие определителя *n*-ого порядка. Основные свойства определителей.
6. Вычисление определителя второго порядка. Правило Саррюса вычисления определителя третьего порядка.
7. Вычисление определителей третьего порядка методом добавления строк (столбцов).
8. Миноры и алгебраические дополнения элементов определителя.
9. Формула Лапласа, вычисление определителя методом разложения по элементам *i*-ой строки или *j*-ого столбца.
10. Понятие обратной матрицы. Условие существования обратной матрицы.
11. Алгоритм нахождения обратной матрицы.
12. Элементарные преобразования над матрицами. Эквивалентные матрицы.
13. Нахождение обратной матрицы методом элементарных преобразований.
14. Понятие ранга матрицы, его свойства. Способы нахождения ранга матрицы.
15. Понятие системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) и ее решения. Совместные, несовместные, определенные и неопределенные системы.
16. Теорема Кронекера-Капелли.
17. Матричная запись СЛАУ.
18. Матричный способ решения линейных алгебраических уравнений.
19. Формулы Крамера для решения системы линейных неоднородных алгебраических уравнений.
20. Решение системы линейных неоднородных алгебраических уравнений методом Гаусса.
21. Условия существования единственного решения и множества решений системы линейных алгебраических уравнений.

Контрольная работа №1 "Линейная алгебра"

Задание 1. Выполнить действия над матрицами.

Найти $3A \pm 4B$, $A \cdot B$, $C \cdot A^T$, ΔA, A^{-1}.

1.1.

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -5 \\ 6 & -3 & -6 \\ -3 & 7 & 2 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 8 & -1 & 2 \\ -3 & 5 & -3 \end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

1.2.

$$A=\begin{pmatrix} -3 & 5 & -6 \\ 2 & 5 & 3 \\ -3 & 1 & -1 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 0 & -1 & 2 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

1.3.

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -4 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 4 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

1.4.

$$A=\begin{pmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & -1 \\ -4 & 5 & 3 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -5 & 1 & 2 \\ 5 & -7 & 0 \end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix} 0 & -1 & -5 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

1.5.

$$A=\begin{pmatrix} -6 & 7 & 3 \\ 3 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 9 & 5 \\ 2 & 1 & -4 \end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 5 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

1.6.

$$A=\begin{pmatrix} -2 & 5 & 4 \\ 3 & -1 & 4 \\ -1 & 7 & 1 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 2 & -6 & 2 \end{pmatrix}.$$

1.7.

$$A=\begin{pmatrix} -6 & 1 & 10 \\ 0 & -2 & 5 \\ 9 & 3 & 7 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 7 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix} 2 & 6 & -4 \\ -4 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1.8.

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

1.9.

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix} -5 & 2 & -1 \\ 4 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

1.10.

$$A=\begin{pmatrix}1 & 6 & 3\\ -4 & -9 & 4\\ 0 & 3 & 1\end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix}2 & 5 & 4\\ 1 & -2 & 3\\ 3 & 1 & -1\end{pmatrix},$$

$$C=\begin{pmatrix}1 & 0 & -2\\ 9 & 3 & 1\end{pmatrix}.$$

1.11.

$$A=\begin{pmatrix}5 & 9 & 4\\ -1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 7\end{pmatrix},$$

$$B=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ 0 & 1 & 2\\ -1 & 9 & 1\end{pmatrix},$$

$$C=\begin{pmatrix}6 & 3 & 0\\ 4 & -1 & 5\end{pmatrix}.$$

1.12.

$$A=\begin{pmatrix}1 & 9 & 3\\ -3 & 1 & 7\\ 2 & 1 & -8\end{pmatrix},$$

$$B=\begin{pmatrix}8 & 0 & 1\\ 2 & -3 & 0\\ 1 & -4 & 6\end{pmatrix},$$

$$C=\begin{pmatrix}3 & 0 & -1\\ 6 & -4 & 1\end{pmatrix}.$$

1.13.

$$A=\begin{pmatrix}5 & 1 & 2\\ 1 & 3 & -1\\ 8 & 4 & -1\end{pmatrix},$$

$$B=\begin{pmatrix}4 & 4 & -1\\ -2 & 3 & 0\\ 1 & -4 & 3\end{pmatrix},$$

$$C=\begin{pmatrix}2 & 0 & -1\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix}.$$

1.14.

$$A=\begin{pmatrix}2 & 2 & 5\\ 3 & 3 & 6\\ 4 & 3 & 4\end{pmatrix},$$

$$B=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 3 & 3\\ 1 & -2 & -1\end{pmatrix},$$

$$C=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 3 & 4 & 5\end{pmatrix}.$$

1.15.

$$A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 5\\ 3 & 0 & 6\\ 4 & 3 & 4\end{pmatrix},$$

$$B=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 1 & -2 & -1\\ 3 & 2 & 3\end{pmatrix},$$

$$C=\begin{pmatrix}5 & 4 & 1\\ 3 & -7 & 2\end{pmatrix}.$$

1.16.

$$A=\begin{pmatrix}5 & 4 & 2\\ 1 & 2 & 4\\ 3 & 0 & 5\end{pmatrix},$$

$$B=\begin{pmatrix}4 & 0 & 1\\ 2 & -1 & 3\\ 4 & 0 & -1\end{pmatrix},$$

$$C=\begin{pmatrix}2 & 3 & -1\\ 4 & 5 & 0\end{pmatrix}.$$

1.17.

$$A=\begin{pmatrix}3 & 1 & 0\\ 4 & 3 & 2\\ 2 & 2 & -7\end{pmatrix},$$

$$B=\begin{pmatrix}2 & -7 & 0\\ 5 & 3 & 1\\ 1 & -6 & 1\end{pmatrix},$$

$$C=\begin{pmatrix}3 & 2 & 1\\ 3 & 2 & 0\end{pmatrix}.$$

1.18.

$$A=\begin{pmatrix}8 & -1 & -1\\ 5 & -5 & -1\\ 10 & 3 & 2\end{pmatrix},$$

$$B=\begin{pmatrix}2 & -1 & 4\\ -5 & 2 & 2\\ 1 & 4 & 3\end{pmatrix},$$

$$C=\begin{pmatrix}2 & 3 & -1\\ 4 & -3 & 3\end{pmatrix}.$$

1.19.

$$A=\begin{pmatrix} 3 & -7 & 4 \\ 1 & -6 & 3 \\ -4 & -2 & 3 \end{pmatrix},$$

$$B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ -4 & 5 & 2 \end{pmatrix},$$

$$C=\begin{pmatrix} 7 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

1.20.

$$A=\begin{pmatrix} -3 & -1 & 0 \\ 3 & 5 & -1 \\ 4 & -7 & 5 \end{pmatrix},$$

$$B=\begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 4 & -5 & 1 \\ 3 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

$$C=\begin{pmatrix} 3 & 4 & 10 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Задание 2. Решить матричное уравнение $AB{\cdot}X = C$, если матрицы A, B, C известны.

2.1. $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 29 \\ 28 \\ 34 \end{pmatrix}$.

2.2. $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 46 & 38 \\ 37 & 19 \\ 111 & 74 \end{pmatrix}$.

2.3. $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 5 & 8 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -1 & -1 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 2 \\ 10 \end{pmatrix}$.

2.4. $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 8 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 1 & -10 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 6 & 4 & 2 \\ 36 & 53 & 17 \end{pmatrix}$.

2.5. $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$.

2.6. $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 7 & 8 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ -4 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 9 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.

2.7. $A=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 28 \\ -7 \\ 0 \end{pmatrix}$.

2.8. $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 4 & 24 & -35 \end{pmatrix}$.

2.9. $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 4 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -12 \end{pmatrix}$.

2.10. $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

2.11. $A=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -10 & 8 \end{pmatrix}$.

2.12. $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 9 \\ -7 \\ -19 \end{pmatrix}$.

2.13. $A=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} -3 & 0 & -15 \\ 8 & 9 & 11 \end{pmatrix}$.

2.14. $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 4 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 1 \\ 12 \\ -3 \end{pmatrix}$.

2.15. $A=\begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} -26 \\ -4 \end{pmatrix}$.

2.16. $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} -2 & -10 \\ -10 & -1 \\ -10 & -13 \end{pmatrix}$.

2.17. $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 20 & -1 & 5 \\ 42 & -45 & -9 \end{pmatrix}$.

2.18. $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$.

2.19. $A=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 7 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 8 & 20 & -14 \\ 8 & 28 & 6 \end{pmatrix}$.

2.20. $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -3 & 0 & 4 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 10 \\ 12 \\ -4 \end{pmatrix}$.

Задание 3. Вычислить определитель четвертого порядка

3.1. $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & -5 \\ 6 & 3 & 4 & -2 \\ -1 & 2 & 5 & 4 \end{vmatrix}$.

3.2. $\begin{vmatrix} 2 & 6 & 5 & -5 \\ 4 & -1 & 9 & 8 \\ 7 & 2 & -4 & -3 \\ -5 & 8 & -2 & 11 \end{vmatrix}$.

3.3. $\begin{vmatrix} 8 & -1 & 4 & 2 \\ 3 & -4 & 6 & -3 \\ 5 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & -3 & 3 \end{vmatrix}$.

3.4. $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 4 & 2 \\ 4 & -3 & 4 & -3 \\ 4 & 2 & 5 & -3 \\ 2 & 4 & 6 & 2 \end{vmatrix}$.

3.5. $\begin{vmatrix} -1 & -2 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 1 & 7 \\ -2 & 1 & 0 & 6 \\ 8 & 2 & -2 & 6 \end{vmatrix}$.

3.6. $\begin{vmatrix} 3 & -3 & 1 & 7 \\ 3 & 5 & 8 & -2 \\ 5 & 1 & 0 & 3 \\ 4 & 9 & -1 & 10 \end{vmatrix}$.

3.7. $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ -1 & -2 & 5 & -7 \\ 4 & 1 & -5 & 9 \\ 8 & -7 & -4 & 1 \end{vmatrix}$.

3.8. $\begin{vmatrix} -4 & 3 & 1 & -1 \\ 3 & -6 & 3 & 2 \\ 5 & 9 & -3 & 2 \\ 1 & 3 & 6 & 1 \end{vmatrix}$.

3.9. $\begin{vmatrix} -3 & 2 & 6 & 1 \\ 1 & -2 & -6 & -5 \\ 6 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 5 & 7 \end{vmatrix}$

3.10. $\begin{vmatrix} 2 & 6 & -8 & -5 \\ 3 & -1 & -2 & 8 \\ 7 & 2 & 4 & 1 \\ 5 & 8 & -2 & -2 \end{vmatrix}$.

3.11. $\begin{vmatrix} 6 & -3 & 3 & 6 \\ 4 & -8 & 4 & -3 \\ 2 & -3 & 6 & 5 \\ 1 & -5 & 3 & 5 \end{vmatrix}$.

3.12. $\begin{vmatrix} 1 & -4 & 3 & 4 \\ 3 & -5 & 5 & -7 \\ 3 & 1 & 4 & -2 \\ 0 & 6 & -5 & 1 \end{vmatrix}$.

3.13. $\begin{vmatrix} 0 & -6 & 7 & 5 \\ 1 & 4 & -5 & 3 \\ 3 & 2 & 4 & -2 \\ -3 & 1 & -4 & 3 \end{vmatrix}$.

3.14. $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 4 & -4 \\ 3 & -2 & 8 & 8 \\ 6 & 1 & -5 & -3 \\ -3 & 6 & 0 & 10 \end{vmatrix}$.

3.15. $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & 8 & -1 \\ 7 & 4 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$.

3.16. $\begin{vmatrix} 5 & 1 & -6 & 1 \\ 5 & -5 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 4 & 5 \end{vmatrix}$.

3.17. $\begin{vmatrix} -11 & 2 & -3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & -4 \\ 4 & -2 & 3 & -1 \\ -3 & 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$.

3.18. $\begin{vmatrix} -1 & 4 & 3 & -8 \\ 3 & -4 & 7 & 5 \\ 4 & -2 & 5 & 3 \\ -2 & 6 & -3 & 12 \end{vmatrix}$.

3.19. $\begin{vmatrix} 7 & -2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & 5 & -6 \\ 0 & 4 & -2 & -6 \end{vmatrix}$.

3.20. $\begin{vmatrix} 2 & -2 & -4 & 1 \\ 1 & -4 & 4 & -3 \\ 4 & 3 & 6 & -6 \\ 3 & 5 & -5 & 2 \end{vmatrix}$.

Задание 4. Установить совместность системы линейных уравнений и решить ее тремя методами: Крамера, матричным, Гаусса. Сделать проверку полученного решения.

4.1.
$$\begin{cases} 2x-3y-5z=1 \\ 3x+y-2z=-4 \\ x-2y+z=5. \end{cases}$$

4.2.
$$\begin{cases} 2x+3y-z=2 \\ x+2y+3z=0 \\ x-y-2z=6. \end{cases}$$

4.3.
$$\begin{cases} 3x+y+2z=-4 \\ x-2y-z=-1 \\ 2x+3y+2z=0. \end{cases}$$

4.4.
$$\begin{cases} x-3y+z=2 \\ 2x+y+3z=3 \\ 2x-y-2z=8. \end{cases}$$

4.5.
$$\begin{cases} 3x+2y-z=3 \\ x-y+2z=-4 \\ 2x+2y+z=4. \end{cases}$$

4.6.
$$\begin{cases} 3x-2y+2z=3 \\ 2x+y-z=-5 \\ 5x-y+3z=4. \end{cases}$$

4.7.
$$\begin{cases} 2x+3y-z=2 \\ x-y+3z=-4 \\ 3x+5y+z=4. \end{cases}$$

4.8.
$$\begin{cases} 2x-3y+z=3 \\ x+y-2z=4 \\ 3x-2y+6z=0. \end{cases}$$

4.9.
$$\begin{cases} 2x-3y+3z=0 \\ x+y-2z=-7 \\ x-2y+3z=3. \end{cases}$$

4.10.
$$\begin{cases} 5x-2y+z=-1 \\ 2x+y+2z=6 \\ x-3y-z=-5. \end{cases}$$

4.11.
$$\begin{cases} 4x+3y-2z=-1 \\ 3x+y+z=3 \\ x-2y-3z=8. \end{cases}$$

4.12.
$$\begin{cases} x+y-2z=1 \\ 2x+3y+z=0 \\ x-2y-z=7. \end{cases}$$

4.13.
$$\begin{cases} 2x-y+3z=1 \\ x+2y+z=8 \\ 4x-3y-2z=-1. \end{cases}$$

4.14.
$$\begin{cases} 3x+3y+2z=-1 \\ 2x+y-z=3 \\ x-2y-3z=4. \end{cases}$$

4.15.
$$\begin{cases} x+2y-4z=0 \\ 3x+y-3z=-1 \\ 2x-y+5z=3. \end{cases}$$

4.16.
$$\begin{cases} 2x-y+3z=3 \\ x+2y+z=2 \\ x-3y+4z=-1. \end{cases}$$

4.17.
$$\begin{cases} x-2y+z=4 \\ 2x+y+3z=5 \\ 3x+4y+z=-2. \end{cases}$$

4.18.
$$\begin{cases} x+5y-z=-1 \\ 2x+y-2z=7 \\ x-4y+z=0. \end{cases}$$

4.19.
$$\begin{cases} 3x+y-2z=1 \\ x-2y+3z=5 \\ 2x+3y-z=-4. \end{cases}$$

4.20.
$$\begin{cases} x-3y-z=1 \\ 2x+y+z=-7 \\ 2x-y-3z=5. \end{cases}$$

Задание 5. Исследовать систему на совместность. В случае совместности найти общее и два частных решения системы.

5.1. $\begin{cases} x-2y+3z-4u=4 \\ y-z+u=-3 \\ x+3y-3u=1 \\ -7y+3z+u=-3 \end{cases}$.

5.2. $\begin{cases} x+2y+3z-4u=1 \\ 2x+3y+z-u=1 \\ 3x+4y-3z-u=1 \\ 3x+5y+4z-2u=2 \end{cases}$.

5.3. $\begin{cases} 2x+y-z+u=1 \\ 3x-2y+2z-3u=2 \\ 5x+y-z+2u=-1 \\ 2x-y+z-3u=4 \end{cases}$.

5.4. $\begin{cases} x-2y+3z-4u+2v=-2 \\ x+2y-z-v=-3 \\ x-y+2z-3u=10 \\ -3x+5z-11u+5v=-5 \end{cases}$.

5.5. $\begin{cases} x+y+z=6 \\ 2x-y+z=3 \\ x-y+2z=5 \\ 3x-6y+5z=6 \end{cases}$.

5.6. $\begin{cases} 2x-y+z+2u+3v=2 \\ 6x-3y+2z+4u+5v=3 \\ 4x-2y+z+2v=1 \\ 6x-3y+4z+8u+13v=9 \end{cases}$.

5.7. $\begin{cases} x+2y-z+u+v=0 \\ y+2z-u+v=1 \\ 2x+3y-4z+3u+v=-1 \end{cases}$.

5.8. $\begin{cases} 5x-3y+2z+u=3 \\ 4x-2y+3z+u=1 \\ 8x-6y-z-5u=9 \\ 7x-3y+7z+17u=0 \end{cases}$.

5.9. $\begin{cases} 3x+5y+2z+2u=4 \\ 9x+4y+z+7u=2 \\ 2x+7y+3z+u=6 \end{cases}$.

5.10. $\begin{cases} 2x+7y+3z+u=6 \\ 3x+5y+2z+2u=4 \\ 9x+4y+z+7u=2 \end{cases}$.

5.11. $\begin{cases} 2x-y+z-u=0 \\ x+y+2u=4 \\ 2x+3y-z-u=1 \\ x-4y+2z+2u=3 \end{cases}$.

5.12. $\begin{cases} 2x-3y+3z-2u=0 \\ 4x+11y-13z+16u=2 \\ 7x-2y+z+3u=-1 \\ 3x+4y-5z+7u=1 \end{cases}$.

5.13. $\begin{cases} 6x+4y+5z+2u+3v=1 \\ 3x+2y+4z+u+2v=3 \\ 9x+6y+3z+3u+3v=1 \\ 3x+2y-2z+u=-7 \end{cases}$.

5.14. $\begin{cases} 4x+y-2z+u=3 \\ x-2y-z+2u=2 \\ 2x+5y-u=-1 \\ 3x+3y-z-3u=1 \end{cases}$.

5.15. $\begin{cases} 2x-3y+3z=7 \\ 2x+5y+z+3u=2 \\ 4x+6y+3z+5u=4 \\ 4x+14y+z+7u=4 \end{cases}$.

5.16. $\begin{cases} 2x+z-u=2 \\ x-2y+2u=1 \\ 4y+z-5u=0 \end{cases}$.

5.17. $\begin{cases} 5x-3y+2z+4u=3 \\ 4x-2y+3z+7u=1 \\ 8x-6y-z-5u=9 \\ 7x-3y+7z+17u=1 \end{cases}$.

5.18. $\begin{cases} x+3y-z+5u-7v=3 \\ 3x-2y+7z-5u+8v=3 \\ 2x-y+7z+3u+5v=2 \\ 3x+y-2z+u-v=1 \end{cases}$.

5.19. $\begin{cases} x+2z-u=0 \\ 2x-y+3u=1 \\ 2x+y-z=2 \\ 3x+y+z-u=2 \end{cases}$.

5.20. $\begin{cases} x-2y+u=10 \\ 2x-y+3z=1 \\ x+y+3z-u=-9 \end{cases}$.

Решение типового варианта контрольной работы № 1

Задание 1. Выполнить действия над матрицами.

Найти $3A \pm 4B$, $A \cdot B$, $C \cdot A^T$, ΔA, A^{-1}.

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ -1 & 4 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 6 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & -2 \end{pmatrix}, \quad C=\begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Решение. Умножение матриц на число, сложение и вычитание матриц выполняем по формулам (1.2) и (1.3):

$$3A=3\cdot\begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ -1 & 4 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 & -9 & 15 \\ -3 & 12 & 6 \\ 0 & -6 & 3 \end{pmatrix}, \quad 4B=4\cdot\begin{pmatrix} 6 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 24 & -4 & 12 \\ 8 & 0 & 4 \\ 16 & 20 & -8 \end{pmatrix},$$

$$3A+4B=\begin{pmatrix} 6 & -9 & 15 \\ -3 & 12 & 6 \\ 0 & -6 & 3 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 24 & -4 & 12 \\ 8 & 0 & 4 \\ 16 & 20 & -8 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 30 & -13 & 27 \\ 5 & 12 & 10 \\ 16 & 14 & -5 \end{pmatrix},$$

$$3A-4B=\begin{pmatrix}6 & -9 & 15\\ -3 & 12 & 6\\ 0 & -6 & 3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}24 & -4 & 12\\ 8 & 0 & 4\\ 16 & 20 & -8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-18 & -5 & 3\\ -11 & 12 & 2\\ -16 & -26 & 11\end{pmatrix}.$$

Произведение матриц $A{\cdot}B$ найдем по формуле (1.4):

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}2 & -3 & 5\\ -1 & 4 & 2\\ 0 & -2 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}6 & -1 & 3\\ 2 & 0 & 1\\ 4 & 5 & -2\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}2\cdot 6+(-3)\cdot 2+5\cdot 4 & 2\cdot(-1)+(-3)\cdot 0+5\cdot 5 & 2\cdot 3+(-3)\cdot 1+5\cdot(-2)\\ (-1)\cdot 6+4\cdot 2+2\cdot 4 & (-1)\cdot(-1)+4\cdot 0+2\cdot 5 & (-1)\cdot 3+4\cdot 1+2\cdot(-2)\\ 0\cdot 6+(-2)\cdot 2+1\cdot 4 & 0\cdot(-1)+(-2)\cdot 0+1\cdot 5 & 0\cdot 3+(-2)\cdot 1+1\cdot(-2)\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}12-6+20 & -2+0+25 & 6-3-10\\ -6+8+8 & 1+0+10 & -3+4-4\\ 0-4+4 & 0+0+5 & 0-2-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}26 & 23 & -7\\ 10 & 11 & -3\\ 0 & 5 & -4\end{pmatrix}.$$

Найдем матрицу A^T, которая является *транспонированной* к матрице *A:*

$$A^T=\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ -3 & 4 & -2\\ 5 & 2 & 1\end{pmatrix}.$$

Выполним произведение:

$$C\cdot A^T=\begin{pmatrix}3 & -3 & 1\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ -3 & 4 & -2\\ 5 & 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6+9+5 & -3-12+2 & 0+6+1\\ 4+0+5 & -2+0+2 & 0+0+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}20 & -13 & 7\\ 9 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Определитель третьего порядка вычислим по правилу Саррюса, применив формулу (1.9):

$$\Delta A=\begin{vmatrix}2 & -3 & 5\\ -1 & 4 & 2\\ 0 & -2 & 1\end{vmatrix}=2\cdot 4\cdot 1+(-3)\cdot 2\cdot 0+(-1)\cdot(-2)\cdot 5-0\cdot 4\cdot 5-2\cdot(-2)\cdot 2-(-1)\cdot(-3)\cdot 1=$$

$$=8+0+10-0+8-3=23.$$

Для нахождения обратной матрицы воспользуемся алгоритмом, представленном на стр. 18. Найдем алгебраические дополнения матрицы A:

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 4-(-4) = 8,$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -(-1-0) = 1,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 2-0 = 2,$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} -3 & 5 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -(-3-(-10)) = -7,$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2-0 = 2,$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -(-4-0) = 4,$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -6-20 = -26,$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -(4-(-5)) = -9,$$

$$A_{33} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 8-3 = 5.$$

Составим присоединенную матрицу и рассчитаем обратную матрицу к матрице A, зная, что ее определитель равен 23.

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 8 & -7 & -26 \\ 1 & 2 & -9 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{23}\begin{pmatrix} 8 & -7 & -26 \\ 1 & 2 & -9 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Проверка: $A \cdot A^{-1} = E$, т.е.

$$A \cdot A^{-1} = \frac{1}{23} \cdot \begin{pmatrix} 8 & -7 & -26 \\ 1 & 2 & -9 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ -1 & 4 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{23} \cdot \begin{pmatrix} 16+7+0 & -24-28+52 & 40-14-26 \\ 2-2+0 & -3+8+18 & 5+4-9 \\ 4-4+0 & -6+16-10 & 10+8+5 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{23} \cdot \begin{pmatrix} 23 & 0 & 0 \\ 0 & 23 & 0 \\ 0 & 0 & 23 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Задание 2. Решить матричное уравнение $AB{\cdot}X = C$, если матрицы A, B, C известны.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \\ 5 & -3 & 6 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & 7 \\ -1 & 5 & 2 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение. Найдем произведение матриц AB:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \\ 5 & -3 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & 7 \\ -1 & 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+6-3 & -2+0+15 & 1+14+6 \\ 0-3-4 & 0+0+20 & 0-7+8 \\ 20-9-6 & -10+0+30 & 5-21+12 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 7 & 13 & 21 \\ -7 & 20 & 1 \\ 5 & 20 & -4 \end{pmatrix} = D, \qquad D \cdot X = C \Rightarrow X = D^{-1} \cdot C.$$

$$\Delta D = \begin{vmatrix} 7 & 13 & 21 \\ -7 & 20 & 1 \\ 5 & 20 & -4 \end{vmatrix} = 7 \cdot (-4) \cdot 20 + 5 \cdot 13 \cdot 1 + (-7) \cdot 20 \cdot 21 - 21 \cdot 20 \cdot 5 - 7 \cdot 20 \cdot 1 - (-7) \cdot (-4) \cdot 13 =$$

$$= -560 + 65 - 2940 - 2100 - 140 - 364 = -6039.$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 20 & 1 \\ 20 & -4 \end{vmatrix} = -80 - 20 = -100, \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -7 & 1 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} = -(28-5) = -23,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -7 & 20 \\ 5 & 20 \end{vmatrix} = -140 - 100 = -240, \quad A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 13 & 21 \\ 20 & -4 \end{vmatrix} = -(-52-420) = 472,$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 7 & 21 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} = -28 - 105 = -133, \quad A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 7 & 13 \\ 5 & 20 \end{vmatrix} = -(140-65) = -75,$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 13 & 21 \\ 20 & 1 \end{vmatrix} = 13 - 420 = -407, \quad A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 7 & 21 \\ -7 & 1 \end{vmatrix} = -(7+147) = -154,$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 7 & 13 \\ -7 & 20 \end{vmatrix} = 140 + 91 = 231.$$

$$\tilde{D} = \begin{pmatrix} -100 & 472 & -407 \\ -23 & -133 & -154 \\ -240 & -75 & 231 \end{pmatrix} \Rightarrow D^{-1} = -\frac{1}{6039} \cdot \begin{pmatrix} -100 & 472 & -407 \\ -23 & -133 & -154 \\ -240 & -75 & 231 \end{pmatrix}.$$

Проверка: $D \cdot D^{-1} = E$, т.е.

$$D\cdot D^{-1}=-\frac{1}{6039}\cdot\begin{pmatrix}-100 & 472 & -407\\ -23 & -133 & -154\\ -240 & -75 & 231\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}7 & 13 & 21\\ -7 & 20 & 1\\ 5 & 20 & -4\end{pmatrix}=$$

$$=-\frac{1}{6039}\begin{pmatrix}-6039 & 0 & 0\\ 0 & -6039 & 0\\ 0 & 0 & -6039\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

$$X=D^{-1}\cdot C=-\frac{1}{6039}\cdot\begin{pmatrix}-100 & 472 & -407\\ -23 & -133 & -154\\ -240 & -75 & 231\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 3\\ 2 & 1\end{pmatrix}=-\frac{1}{6039}\cdot\begin{pmatrix}-914 & 1109\\ -331 & -530\\ 222 & 246\end{pmatrix}.$$

Проверка: $D\cdot X=C$, т.е.

$$-\frac{1}{6039}\cdot\begin{pmatrix}-914 & 1109\\ -331 & -530\\ 222 & 246\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}7 & 13 & 21\\ -7 & 20 & 1\\ 5 & 20 & -4\end{pmatrix}=-\frac{1}{6039}\cdot\begin{pmatrix}-6039 & 6039\\ 0 & -18117\\ -12078 & -6039\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 3\\ 2 & 1\end{pmatrix}.$$

Таким образом, $\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 3\\ 2 & 1\end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 3\\ 2 & 1\end{pmatrix}.$

Задание 3. Вычислить определитель четвертого порядка $\begin{vmatrix}1 & 3 & -2 & 1\\ 0 & -4 & 3 & 1\\ 5 & 2 & -1 & 0\\ 3 & 6 & 0 & 4\end{vmatrix}$.

Решение. Для вычисления определителя четвертого порядка воспользуемся правилом разложения по первому столбцу, формула (1.13):

$$\begin{vmatrix}1 & 3 & -2 & 1\\ 0 & -4 & 3 & 1\\ 5 & 2 & -1 & 0\\ 3 & 6 & 0 & 4\end{vmatrix}=1\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix}-4 & 3 & 1\\ 2 & -1 & 0\\ 6 & 0 & 4\end{vmatrix}+5\cdot\left(-1\right)^{3+3}\cdot\begin{vmatrix}3 & -2 & 1\\ -4 & 3 & 1\\ 6 & 0 & 4\end{vmatrix}+$$

$$+3\cdot(-1)^{4+1}\cdot\begin{vmatrix}3 & -2 & 1\\ -4 & 3 & 1\\ 2 & -1 & 0\end{vmatrix}=(16+0+0+6-0-24)+5\cdot(36-12+0-18-0-32)+$$

$$+3\cdot\left(-1\right)\cdot(0-4+4-6+3-0)=-2-130+9=-123.$$

Задание 4. Установить совместность системы линейных уравнений и решить ее тремя методами: Крамера, матричным, Гаусса. Сделать проверку полученного решения.

$$\begin{cases} x+2y-3z=-10, \\ x-y+z=3, \\ x+y=1. \end{cases}$$

Решение. Установим совместность данной системы. Матрица коэффициентов системы – невырожденная:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow |A|=\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}=0+2-3-3-0-1=-5\neq 0,$$

т.е. определить $\Delta\neq 0$. Согласно условию (1.21) система имеет единственное решение.

1. Решим систему линейных уравнений по формулам Крамера (1.22′):

$$\Delta_x=\begin{vmatrix} -10 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}=0, \Delta_y=\begin{vmatrix} 1 & -10 & -3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}=-5, \Delta_z=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -10 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=-20.$$

$$\Rightarrow x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{0}{-5}=0, y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=\frac{-5}{-5}=1, z=\frac{\Delta_z}{\Delta}=\frac{-20}{-5}=4.$$

2. Решим систему с помощью обратной матрицы, используя формулу (1.20). Имеем

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} -10 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Вычислим матрицу A^{-1}. Алгебраические дополнения каждого элемента матрицы A_{ij} определятся:

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=-1, \qquad A_{12}=-\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=1, \qquad A_{13}=\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=2,$$

$$A_{21}=-\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=-3, \qquad A_{22}=\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=3, \qquad A_{23}=-\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=1,$$

$$A_{31}=\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}=-1, \qquad A_{32}=-\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=-4, \qquad A_{33}=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=-3.$$

Следовательно, $A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}=-\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -1 & -3 & -1 \\ 1 & 3 & -4 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$.

Теперь находим искомое решение:

$$X=-\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -1 & -3 & -1 \\ 1 & 3 & -4 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -10 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}=-\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 10-9-1 \\ -10+9-4 \\ -20+3-3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix},$$

т.е. $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 4$, что совпадает с решениями, полученными выше.

3. Применим метод исключения неизвестных Гаусса. Для этого составляем расширенную матрицу и, пользуясь элементарными строчными преобразованиями, получим

$$\overline{\mathrm{A}}=\left(\mathrm{A}|B\right)=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & -10 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)\begin{matrix} \\ -I \\ -I \end{matrix}\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & -10 \\ 0 & -3 & 4 & 13 \\ 0 & -1 & 3 & 11 \end{array}\right)\begin{matrix} \\ \\ -II\cdot\frac{1}{3} \end{matrix}\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & -10 \\ 0 & -3 & 4 & 13 \\ 0 & 0 & \frac{5}{3} & \frac{20}{3} \end{array}\right).$$

Преобразованной матрице $\overline{\mathrm{A}}$ соответствует простейшая система:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -10 \\ \quad -3x_2 + 4x_3 = 13 \\ \quad \frac{5}{3}x_3 = \frac{20}{3} \end{cases}$$

Из нее, очевидным образом, получаем вектор решений $X=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Сделаем проверку: $\begin{cases} 0+2\cdot1-3\cdot4=-10, \\ 0-1+4=3, \\ 0+1=1. \end{cases}$

Задание 5. Исследовать систему на совместность. В случае совместности найти общее и два частных решения системы.

$$\begin{cases} x_1-x_2+x_3-x_4+x_5=6, \\ x_1+3x_2+x_3-3x_4+3x_5=8, \\ x_1+x_2-3x_4+x_5=4. \end{cases}$$

Решение. Расширенная матрица данной системы имеет вид

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 6 \\ 1 & 3 & 1 & -3 & 3 & 8 \\ 1 & 1 & 0 & -3 & 1 & 4 \end{array}\right).$$

Выполним прямой ход метода Гаусса: умножим первую строку на (-1) и прибавим ко второй и третьей строке, получим

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 4 & 0 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & -2 & 0 & -2 \end{array}\right).$$

Меняем местами вторую и третью строки матрицы, получим

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 2 & -1 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 0 & -2 & 2 & 2 \end{array}\right).$$

Вторую строку умножим на (-2) и прибавим к третьей, будем иметь

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 2 & -1 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 6 \end{array}\right).$$

Разделим третью строку на 2, получим

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 2 & -1 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right).$$

Итак, прямой ход осуществлен, результат элементарных преобразований над строками расширенной матрицы свидетельствует о том, что ранги основной и расширенной матрицы совпадают и равны 3. Согласно условию (1.23) система совместна и имеет множество решений. Система уравнений, эквивалентная заданной, запишется

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 6, \\ \quad 2x_2 - x_3 - 2x_4 = -2, \\ \qquad x_3 + x_4 + x_5 = 3. \end{cases}$$

Обратный ход позволяет последовательно определить все неизвестные системы. Так как система содержит 5 неизвестных и всего 3 уравнения, то выберем x_4, x_5 - свободными переменными, а x_1, x_2 x_3 – базисными переменными. Из последнего уравнения находим x_3=3 - x_4 - x_5 и подставляем во второе уравнение для определения x_2. Получаем

$$x_2 = \frac{x_3 + 2x_4 - 2}{2} \Rightarrow \quad x_2 = \frac{3 - x_4 - x_5 + 2x_4 - 2}{2} \Rightarrow$$

$$x_2 = \frac{1 + x_4 - x_5}{2} \Rightarrow \quad x_2 = 0{,}5 + 0{,}5\text{x}_4 - 0{,}5\text{x}_5.$$

Подставляем найденные x_2 и x_3 в первое уравнение и находим:

$$x_1 = 6 + x_2 - x_3 + x_4 - x_5 = 6 + 0{,}5 + 0{,}5x_4 - 0{,}5x_5 - 3 + x_4 + x_5 + x_4 - x_5;$$

$$x_1 = 3{,}5 + 2{,}5x_4 - 0{,}5x_5.$$

В результате получаем общее решение системы:

$$X = \begin{pmatrix} 3{,}5 + 2{,}5x_4 - 0{,}5x_5 \\ 0{,}5 + 0{,}5x_4 - 0{,}5x_5 \\ 3 - x_4 - x_5 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}.$$

Одно базисное решение получаем при $x_4 = x_5 = 0$,

т.е. $x_1 = 3{,}5$; $x_2 = 0{,}5$; $x_3 = 3$ или $X_1 = \begin{pmatrix} 3{,}5 \\ 0{,}5 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Чтобы получить другое базисное решение, достаточно задать $x_4 = 1$, $x_5 = 0$,

тогда $x_1 = 6$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$ или $X_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

1.7. Теория матриц в биологических задачах

Матрицы окружают нас повсюду, начиная от финансово – экономических таблиц и кончая матрицами, связанными с движением земной оси. Широкое применение находят матрицы и в биологии. Покажем это на примерах.

Начнем, правда, не с биологического, а со спортивного события – состязание шахматистов.

Пример 1. Рассмотрим турнир, в котором каждый участник встречается с каждым. Как известно, результаты такого турнира записываются в виде турнирной таблицы (рис.1), где на пересечении вертикалей и горизонталей ставится одно из чисел 0, 1/2 или 1 в зависимости от исхода встречи между участниками.

№	1	2	3	4	5
1		1	0	1/2	1
2	0		1	1/2	0
3	1	0		1	1/2
4	1/2	1/2	0		1
5	0	1	1/2	0	

Рис. 1

Так, например, если в первом горизонтальном ряду стоят последовательно 1, 0, 1/2, 1, то это означает, что I-ый участник выиграл у II-го, проиграл III-му , сыграл вничью с IV-ым и выиграл у V-го.отделим теперь на рис.1 номера участников (они раз и навсегда зафиксированы) от остальной части таблицы. Тогда оставшаяся часть таблицы – не что иное, как матрица.

Поскольку участник не может встретиться с самим собой, то вместо пустых клеток поставим по 1/2 и это не отразится на результатах участников. Таким образом, получим матрицу турнира:

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 1 & 0 & 1/2 & 1 \\ 0 & 1/2 & 1 & 1/2 & 0 \\ 1 & 0 & 1/2 & 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 1/2 & 1 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Предположим теперь, что каждый участник должен встретиться с каждым 4 раза. В этом случае говорят, что турнир проходит в 4 круга. Чтобы получить окончательный итог такого турнира, нужно сложить матрицы, соответствующие отдельным кругам. При этом непременным условием должно быть сохранение такого порядка записи результатов от круга к кругу, чтобы не получилось так, что к результатам одного участника прибавляются результаты другого. Далее, для удобства преобразуем матрицу (1) к иному виду. Вычтем сначала из матрицы (1) матрицу того же порядка, все элементы которой равны 1/2, получим:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & -1/2 & 0 & 1/2 \\ -1/2 & 0 & 1/2 & 0 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 & 0 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 0 & -1/2 & 0 \end{pmatrix},$$

у которой все элементы равны либо 0, либо $\pm 1/2$. Чтобы избавиться от дробей, умножим матрицу на 2. Тогда матрица примет вид:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}. \qquad (2)$$

Матрица (2) очень выразительно отражает исход состязания. Выигрышу соответствует 1, проигрышу - -1, ничьей – 0. Так, например, если в первой строке стоят 0, 1, -1, 0 и 1, то это означает, что I-ый участник сыграл сам с собой вничью, выиграл у II-го, проиграл III-му, сыграл вничью с IV-ым и выиграл у V-го.

Перейдем теперь к биологии. Рассмотрим биоценоз, в котором либо два вида безразличны друг к другу (они «играют вничью»), либо один вид подавляется другим (например один вид служит пищей для другого). Этот биоценоз также может быть описан матрицей (1), подобно состязанию шахматистов, но несколько отличается от нее.

Во – первых, представители одного и того же вида не всегда «играют друг с другом вничью». Чтобы учесть этот факт, по диагонали матрицы биоценоза должны стоять не 0, а коэффициенты внутривидовой конкуренции. Во - вторых, если в турнире сколько один приобретал, ровно столько же второй терял, то здесь такая тактика не верна. Например, чтобы выкормить одного теленка, нужно более 4 млн. растений люцерны. Таким образом, «при встрече телят и люцерны» выигрывает один теленок, а проигрывает сразу 4 млн. растений. Ясно, что при такой «встрече» люцерна как вид испытывает значительно больший ущерб, чем выигрывают телята.

Подобное положение легко обнаружить в любой цепи питания. Точно так же к разным последствиям для разных видов приводит взаимодействие паразитов и прокормителей (например, кровососущих и теплокровных).

В силу всего этого элементами матрицы биоценоза могут быть не только $\pm$ 1 и 0, но и любые числа. Такая матрица может иметь, например вид:

$$\begin{pmatrix} -a_{11} & 0 & a_{13} & -a_{14} \dots a_{1n} \\ 0 & -a_{22} \dots\dots\dots\dots\dots & & -a_{2n} \\ \dots\dots\dots & & & \\ -a_{n1} & a_{n2} \dots\dots\dots\dots\dots\dots & & -a_{nn} \end{pmatrix}, \; a_{ij} > 0.$$

Выражение в первой строке означает:

- коэффициент самоотравления первого вида равен a_{11};
- первый вид равнодушен ко второму;
- первый вид «выигрывает» от общения с третьим видом и a_{13} - коэффициент этого «выигрыша»;
- первый вид «проигрывает» от общения с четвертым видом, a_{14} - коэффициент этого «проигрыша», а знак «-» характеризует факт проигрыша;
- и т.д.

Аналогично описываются взаимодействия других видов.

Пример 2. Пять лабораторных животных кормят тремя различными видами пищи. Если определить c_{ij} как суточное потребление i-го вида пищи j-м животным, то

$$C = (c_{ij}) = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} & c_{35} \end{pmatrix}$$

является матрицей размера 3×5, отражающей общее суточное потребление. Она дает удобный способ ведения записей.

Пример 3. (Контакты первого и второго порядков в эпидемиологии.) Предположим, что три человека заболели инфекционной болезнью. Вторую группу из шести человек опрашивают с целью выяснения, кто из них имел контакт с тремя больными. Затем опрашивают третью группу из семи человек, чтобы выяснить контакты с кем – либо из шести человек второй группы. Определим матрицу $A=(a_{ij})$ размера 3×6, полагая $a_{ij}=1$, если j-ый человек второй группы находился в контакте с i-ым больным из первой группы, и $a_{ij}=0$ - в противном случае. Аналогично определим матрицу $B=(b_{ij})$ размера 6×7, полагая $b_{ij}=1$, если j-ый человек третьей группы находился в контакте с i-ым человеком из второй группы, и $b_{ij}=0$- в противном случае. Эти две матрицы описывают схему контактов первого порядка между группами.

Могло бы, например, оказаться, что

$$A=\begin{pmatrix} 0\,0\,1\,0\,1\,0 \\ 1\,0\,0\,1\,0\,0 \\ 0\,0\,1\,1\,0\,1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0\,0\,1\,0\,0\,1\,0 \\ 0\,0\,1\,1\,0\,0\,0 \\ 1\,0\,0\,0\,0\,1\,1 \\ 0\,0\,1\,1\,0\,0\,0 \\ 0\,1\,0\,1\,0\,0\,0 \\ 1\,0\,0\,0\,0\,1\,0 \end{pmatrix}.$$

В данном случае $a_{24}=1$ означает, что 4-ый человек второй группы находился в контакте со 2-ым больным первой группы. Аналогично, $b_{33}=0$ означает, что 3-й человек третьей группы не соприкасался с 3-м человеком из второй группы.

Нас могут интересовать также непрямые контакты, или контакты второго порядка, между семью людьми третьей группы и тремя больными первой. Эти контакты второго порядка описывает матричное произведение $C=A\cdot B$. Элемент $c_{ij}=\sum\limits_{k=1}^{6}a_{ij}b_{kj}$ дает число контактов второго порядка между j-м человеком третьей группы и i-м человеком из группы больных. Для заданных матриц A и B получаем

$$C=A\cdot B=\begin{pmatrix}1\,101011\\0\,0\,21010\\2\,0110\,21\end{pmatrix}.$$

Элемент c_{23} означает, что имеется два контакта второго порядка между 3-м человеком третьей группы и 2-м инфекционным больным. Заметим, что у 6-го человека из третьей группы оказалось $1+1+2=4$ непрямых контактов с зараженной группой. Таких контактов нет только у 5-го человека.

Пример 4. (Матрицы рационов.) Пусть какое – нибудь вещество, необходимое для жизнедеятельности животного, содержится в разных кормах. Для определенности будем говорить о витамине *А*. Пусть α_i означает количество этого витамина в 1 кг *i* – го корма ($i=1, 2,..., n$). Тогда вектор – строка $\alpha=(\alpha_1\ \alpha_2\ ...\ \alpha_n)$ дает распределение витамина по кормам. И пусть, наконец, исследуемое животное съедает в день x_1 кг первого корма, x_2 кг второго корма,…, x_n кг n – го корма. Как подсчитать общее количество витамина *А*, получаемого животным?

Решение. Очевидно, для этого достаточно скалярно умножить вектор *а* на вектор $x=(x_1, x_2, ... x_n)$:

$$ax=\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2+...+\alpha_n x_n. \tag{3}$$

скалярное произведение (3) можем трактовать как частный случай произведения матриц, а именно, как произведение $1\times n$ - матрицы *а* (т.е. вектор – строки) на $n\times 1$ - матрицу *х*. По правилу умножения матриц имеем:

$$(\alpha_1\ \alpha_2\ ...\ \alpha_n)\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\.\\.\\x_n\end{pmatrix}=(\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2+...+\alpha_n x_n).$$

Рассмотрим теперь более сложный случай. Будем следить не только за расходом витамина *A*, но и еще двух витаминов, например, *B* и *C*. Пусть $3\times n$ - матрица

$$M = \begin{pmatrix} \alpha_1\, \alpha_2 \dots \alpha_n \\ \beta_1\, \beta_2 \dots \beta_n \\ \gamma_1\, \gamma_2 \dots \gamma_n \end{pmatrix} \qquad (4)$$

дает распределение по кормам. Каждая строка этой матрицы соответствует отдельному витамину, а каждый столбец – отдельному корму. Таким образом, в 1 кг первого корма содержится α_1 витамина *A*, β_1 витамина *B* и γ_1 витамина *C*. Аналогично, в 1 кг *i* – го корма содержится α_i витамина *A*, β_i витамина *B* и γ_i витамина *C*. По прежнему вектор – столбец $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}$ есть вектор потребления кормов за сутки. Тогда, желая узнать общий витаминный режим животного, должны взять произведение матриц *M* и *x*:

$$M \cdot x = \begin{pmatrix} \alpha_1\, \alpha_2 \dots \alpha_n \\ \beta_1\, \beta_2 \dots \beta_n \\ \gamma_1\, \gamma_2 \dots \gamma_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n \\ \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_n x_n \\ \gamma_1 x_1 + \gamma_2\, x_2 + \dots + \gamma_n x_n \end{pmatrix}$$

В правой части получился вектор – столбец, первый элемент которого равен общему количеству витамина *A*, второй – общему количеству витамина *B* и третий – общему количеству витамина *C*, полученному животным за сутки.

1.8. Теория систем линейных уравнений в биологии

Пример 5. (Сосуществование бактерий.) Три вида бактерий сосуществуют в пробирке и потребляют три субстрата. Предположим, что в среднем бактерий i-го вида потребляет в день количество c_{ij} j-го субстрата. Определим $c_i = (c_{i1}, c_{i2}, c_{i3})$ как вектор потребления для i-го вида. Пусть каждый день в пробирку вносят 15.000 ед. I – го субстрата, 30.000 ед. – II го и

45.000 – III –го; $c_1 = (1,1,1)$, $c_2 = (1,2,3)$, $c_3 = (1,3,5)$. Каковы численности популяций трех видов бактерий, которые могут сосуществовать в данной среде, если считать, что бактерии потребляют весь дневной запас субстратов?

Решение. Обозначим численности трех видов бактерий, которые могут быть обеспечены субстратами, через x_1, x_2, x_3. При этом x_1 особей I – го вида потребляют по x_1 ед. каждого субстрата; x_2 бактерий II – го вида потребляют x_2, $2x_2$ и $3x_2$ ед. I – го, II – го и III – го субстратов соответственно. Аналогичные величины для III – го вида составляют x_3, $3x_3$ и $5x_3$ ед. Уравнивая общее потребление каждого субстрата с его доступным запасом, получаем:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 15.000 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 30.000 \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 45.000. \end{cases}$$

Упрощая путем приведения строк, получаем систему вида:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 15.000 \\ x_2 + 2x_3 = 15.000 \\ 2x_2 + 4x_3 = 30.000, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 15.000 \\ x_2 + 2x_3 = 15.000 \\ 0 = 0. \end{cases}$$

Эта система не имеет единственного решения, но у всех решений $x_1 = x_3 = \dfrac{15.000 - x_2}{2}$. Численности бактерий должны быть неотрицательны. Поэтому $0 \le x_2 \le 15.000$ и $0 \le x_1 = x_3 \le 7.500$ Общая численность сосуществующих популяций составляет 15.000, а численности трех видов удовлетворяют соотношениям $x_1 = x_3$ и $x_2 = 15.000 - x_2$, если потребляются все субстраты.

Задачи для самостоятельного решения

1. Рассмотрим экосистему, содержащую n конкурирующих видов. Определим матрицу потребления $A=(a_{ij})$ как матрицу размера $n \times n$, в которой элемент a_{ij} показывает среднее число особей j-го вида, потребляемое в день средней особью i-го вида. Какие типы поведения описываются нижеприведенными матрицами потребления:

$$\text{а) } A=\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}; \text{ б) } A=\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}?$$

2. Допустим, что в задаче 1 потребление особи i-го вида приносит хищнику энергетический доход в калорий. Определим r как n – мерный вектор – столбец, у которого i-ый компонент равен. Дайте биологическую интерпретацию компонентам вектора Ar.

3. Предположим, как в примере 2, что два человека заболели инфекционной болезнью. Вторая группа из пяти человек, возможно, имела контакты с заразными людьми, а третья группа из четырех человек имела вероятные контакты со второй группой. Опишите контакты второго рода между третьей группой и двумя зараженными людьми, если контакты первого рода (или прямые контакты) задаются следующими матрицами:

$$\text{а) } A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \text{ б) } A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. На новый ареал переселяются три вида птиц общей численностью в 10.000 особей. Согласно наблюдениям, популяции этих трех видов должны возрастать с ежегодным коэффициентом прироста в 3, 4 и 5% соответственно для I, II и III видов. Установлено, что общий прирост популяций за первый год составит 380 особей и что прирост популяции первого вида равен приросту третьего вида. Найдите начальные численности популяций трех видов.

5. Простейшее питается тремя видами пищи: эвгленами, тетрахименамии хламидомонадами. Наблюдения показали, что каждую потребляемую единицу *Э* приходится в среднем две единицы *Т* и три единицы *Х*. Если чистый энергетический доход от потребления единицы любого из этих видов пищи составляет одну единицу энергии, то какое потребление обеспечит простейшему чистый доход в 12 ед. энергии?

6. Активность пасущегося животного можно условно разделить на три категории: 1) поедание пищи; 2) передвижение (к новым пастбищам или с целью избегания хищников); 3) покой. Чистые энергетические потери при движении и покое соответственно равны 150 и 50 калорий в час.
а) Как следует разделить день между тремя этими состояниями, чтобы энергетический доход за время поедания в точности компенсировал потери при передвижении и в состоянии покоя?
б) Единственно ли такое разбиение дня?

7. В задаче 6 допустим, что пасущееся животное должно находиться в состоянии покоя, по крайней мере, 6 ч в день. Как следует распределить день?

Раздел II. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ НА ПЛОСКОСТИ

2.1. Метод координат

Основной метод аналитической геометрии - *метод координат.* Его сущность состоит в том, что каждой точке M поставлено в соответствие пара или тройка чисел, называемых ее *координатами*, [4]. Каждой фигуре соответствует уравнение $F(x, y) = 0$ или $F(x, y, z) = 0$. Отсюда возникают две основные задачи аналитической геометрии:

1) по геометрическому свойству фигуры составить ее уравнение;

2) по уравнению исследовать свойства и форму геометрической фигуры.

Простейшими задачами метода координат являются: определение расстояния между точками; нахождение координат точки, делящей отрезок в данном отношении, вычисление координат центра тяжести треугольника и его площади.

Расстояние между двумя точками $M_1(x_1,y_1)$, $M_2(x_2,y_2)$ на плоскости и $M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$ в пространстве определяется соответственно по формулам (рис. 2.1.а):

$$d=\sqrt{\left(x_2-x_1\right)^2+\left(y_2-y_1\right)^2}. \tag{2.1}$$

$$d=\sqrt{\left(x_2-x_1\right)^2+\left(y_2-y_1\right)^2+\left(z_2-z_1\right)^2}. \tag{2.1'}$$

Пример 2.1. Дан треугольник $ABC,$ где $A(1, 2)$, $B(0, 3)$, C(-2, -1). Найти его периметр. Построить чертеж.

Решение. Периметр ΔABC равен сумме длин всех его сторон. Найдем длины всех сторон треугольника, используя формулу (3.1):

$$|AC|=\sqrt{(-2-1)^2+(-1-2)^2}=\sqrt{18}=3\sqrt{2};\quad |AB|=\sqrt{(0-1)^2+(3-2)^2}=\sqrt{2};$$

$$|BC|=\sqrt{(-2-0)^2+(-1-3)^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}.$$

Итак, периметр ΔABC равен $P=|AC|+|AB|+|BC|=3\sqrt{2}+\sqrt{2}+2\sqrt{5}=4\sqrt{2}+2\sqrt{5}.$

Построим треугольник ABC.

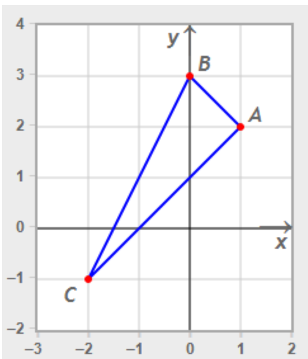


Рисунок к примеру 2.1.

Если в прямоугольной декартовой системе координат даны точки $M_1(x_1,\ y_1)$ и $M_2(x_2,\ y_2)$, а точка $M(x,y)$ делит отрезок M_1M_2 в отношении $\lambda = \dfrac{|M_1C|}{|CM_2|}$ (рис. 2.1.б), то координаты точки M будут определяться по формулам:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda},\ y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}. \tag{2.2}$$

В пространстве координаты точки $M(x,y,z)$ деления отрезка M_1M_2 в отношении λ будут равны:

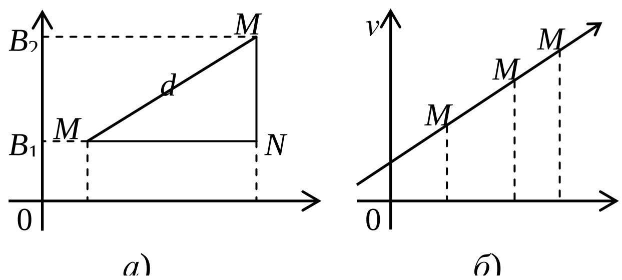
$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda},\ \ y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda},\ z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}. \tag{2.2'}$$

Формулы (2.2) и (2.2') называются *формулами деления отрезка в данном отношении*. Если точка M лежит на середине отрезка M_1M_2, т.е. $\lambda = 1$, то ее коордианты найдутся по *формулам деления отрезка пополам*:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2},\quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}\ , \tag{2.3}$$

или

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2},\quad y = \frac{y_1 + y_2}{2},\quad z = \frac{z_1 + z_2}{2}. \tag{2.3'}$$



исунок 2.1. – *а*) Расстояние между точками на плоскости;
б) Деление отрезка в данном отношении.

Площадь треугольника с вершинами $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$, $C(x_3,y_3)$ вычисляется по формуле

$$S = \pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}. \tag{2.4}$$

Координаты центра тяжести треугольника с вершинами $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$, $C(x_3,y_3)$ определяются по формулам:

$$x_{ц.т.} = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3},\quad y_{ц.т.} = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\ . \tag{2.5}$$

Пример 2.2. Даны вершины треугольника *ABC* $A(-2,3)$, $B(1,12)$, $C(11,6)$.

Найти длину медианы, опущенной из вершины *A*, центр тяжести и площадь треугольника.

Решение. Медиана *AM* делит сторону *BC* пополам, тогда координаты точки *M* определятся по формуле (2.3): $M\left(\frac{1+11}{2},\frac{12+6}{2}\right)=M(6,9)$. Длину медианы найдем как расстояние между точками *A* и *M* по формуле (2.1):

$$|AM|=\sqrt{(6+2)^2+(9-3)^2}=\sqrt{64+36}=\sqrt{100}=10.$$

Центр тяжести треугольника найдем, используя формулу (2.5):

$$x_{ц.т.}=\frac{-2+1+11}{3}=\frac{10}{3},\quad y_{ц.т.}=\frac{3+12+6}{3}=7\ .$$

Для нахождения площади данного треугольника, воспользуемся формулой (2.4): $S=\pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix}1+2 & 12-3\\ 11+2 & 6-3\end{vmatrix}=\pm\frac{1}{2}\left|(3\cdot 3-9\cdot 13)\right|=54$ (кв.ед.).

2.2. Прямая линия на плоскости

В декартовой системе координат на плоскости каждая прямая определяется алгебраическим уравнением первой степени и, обратно, каждое алгебраическое уравнение первой степени определяет прямую линию, [4]. Уравнение вида

$$Ax + By + C = 0 \quad (A^2 + B^2 \neq 0)\ . \tag{2.6}$$

называется *общим уравнением прямой*. Переменные *x* и *y* в уравнении (2.6) являются *текущими координатами* точек прямой. Если точка лежит на прямой, то ее координаты удовлетворяют уравнению этой прямой.

Пример 2.3. Лежат ли точки $A(1, 2)$ и $B(0,3)$ на прямой $x + 2y - 6 = 0$?

Решение. Подставив в уравнение прямой вместо *x* и *y* координаты точки *A*, получим $1+2\cdot 2-6\neq 0$. Значит точка *A* не лежит на данной прямой. Подставим в уравнение прямой координаты точки *B* вместо *x* и *y* $0+2\cdot 3-6=0$. Следовательно, точка *B* лежит на данной прямой.

Рассмотрим частные случаи общего уравнения прямой (2.6):

1) если $A=0,\ B\neq 0,\ C\neq 0$, то уравнение приводится к виду $y=-\frac{C}{B}$ и представляет уравнение прямой, параллельной оси *Ox*;

2) если $A\neq 0,\ B=0,\ C\neq 0$, то уравнение приводится к виду $x=-\frac{C}{A}$, прямая параллельна оси *Oy*;

3) если $C = 0, A \neq 0, B \neq 0$, то получим $Ax + By = 0$, прямая проходит через начало координат;

4) если $A = 0, B \neq 0, C = 0$, уравнение прямой принимает вид $By = 0$ или $y = 0$, прямая проходит через ось Ox;

5) если $A \neq 0, B = 0, C = 0$, уравнение прямой $Ax = 0$, или $x = 0$, прямая проходит через ось Oy.

Угловым коэффициентом k прямой называется число

$$k = tg\alpha, \tag{2.7}$$

где α — угол наклона прямой к оси Ox ($0 \leq \alpha < \pi$), рис. 2.2.

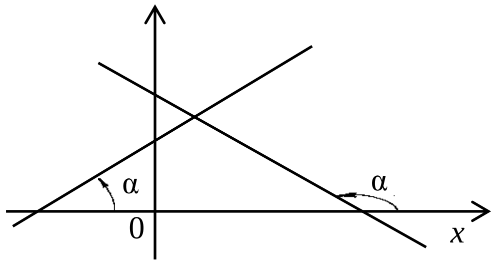


Рисунок 2.2. – Угол наклона прямой к оси Ox

Уравнение

$$y = kx + b \tag{2.8}$$

называется *уравнением прямой с угловым коэффициентом* (b — ордината точки пересечения прямой с осью Oy) , [1].

Уравнение прямой с угловым коэффициентом k, *проходящей через заданную точку* $M_0(x_0, y_0)$ (рис. 2.3), или *уравнение пучка прямых* запишется в виде

$$y - y_o = k(x - x_o). \tag{2.9}$$

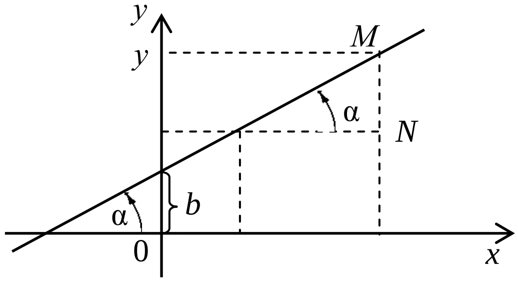


Рисунок 2.3. – Прямая, проходящая через точку M_0

Пример 2.4. Найти прямую, проходящую через точку пересечения прямых $x + 2y + 1 = 0$, $2x + y + 2 = 0$ и, образующей угол 135° с осью Ox.

Решение. Найдем координаты точки пересечения данных прямых из совместного решения их уравнений по методу Гаусса:

$$\begin{cases} x+2y+1=0, \\ 2x+y+2=0; \end{cases} \qquad \begin{cases} x=-1-2y, \\ -3y=0; \end{cases} \qquad \begin{cases} x=-1 \\ y=0. \end{cases}$$

Значит, $A(-1,\ 0)$ - точка пересечения данных прямых. Для составления уравнения искомой прямой воспользуемся уравнением (2.9), в котором (x_0, y_0) - координаты точки A, $k = tg135^\circ = -1$. Поэтому уравнение прямой примет вид $y - 0 = -1(x+1)$ или $y = -x - 1$.

Уравнение прямой линии

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \tag{2.10}$$

называется *уравнением прямой в отрезках* (a — абсцисса точки пересечения прямой с осью Ox, b — ордината точки пересечения прямой с осью Oy), [3].

Пример 2.5. Составить уравнение прямой, проходящей через точку A (2, 3), и отсекающей на оси ординат отрезок $b = 6$. Определить угол наклона этой прямой к оси Ox.

Решение. Воспользуемся уравнением прямой в отрезках (2.10). По условию $b = 6$. Так как искомая прямая проходит через точку A (2, 3), то координаты этой точки удовлетворяют уравнению (3.10). Подставляя координаты точки в это уравнение, получим

$$\frac{2}{a} + \frac{3}{6} = 1,\ \frac{2}{a} = \frac{1}{2},\ a = 4,$$

Значит, искомое уравнение прямой примет вид $\frac{x}{4} + \frac{y}{6} = 1$. Для нахождения угла между полученной прямой и осью Ox преобразуем это уравнение к уравнению (2.8): $6x + 4y = 24,\quad 4y = -6x + 24$ или $y = -\frac{3}{2}x + 6$. Угловой коэффициент $k = -\frac{3}{2}$. Согласно формуле (2.7), получим $tg\alpha = -\frac{3}{2}$. Поэтому $\alpha = arctg\left(-\frac{3}{2}\right)$.

Уравнение прямой, проходящей через две точки $M_1(x_1,\ y_1)$ и $M_2(x_2,\ y_2)$, имеет вид, [6]

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \ . \qquad (2.11)$$

Угловой коэффициент прямой, проходящей через две точки, можно найти, не составляя уравнение прямой, по формуле

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \,. \qquad (2.12)$$

Между всеми уравнениями прямой существует связь, т. е., если задана прямая одним из уравнений, то можно перейти к любому из перечисленных видов.

Пример 2.6. Написать различные виды уравнений прямой (в отрезках, с угловым коэффициентом, общее), проходящей через две точки $M_1(2,\ 0)$, $M_2(0,\ 3)$.

Решение. Используя уравнение (2.11) прямой, проходящей через две точки, находим:

$$\frac{x-2}{0-2} = \frac{y-0}{3-0} \Rightarrow \frac{x-2}{-2} = \frac{y}{3} \Rightarrow \frac{x}{-2} + 1 = \frac{y}{3}.$$

Из последнего уравнения с помощью преобразований можно перейти к другим видам уравнений этой же прямой:

- уравнение прямой в отрезках $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1;$

- уравнение прямой с угловым коэффициентом $y = -\frac{3}{2}x + 3, \qquad k = -\frac{3}{2};$

- общее уравнение прямой запишется $3x + 2y - 6 = 0$.

Под углом $\varphi \ (0 \le \varphi < \pi)$ *между прямыми* линиями l_1 и l_2 понимается тот *наименьший угол, на который надо повернуть (против часовой стрелки) первую прямую* l_1 *так, чтобы она совпала со второй прямой* l_2 (рис. 2.4.).

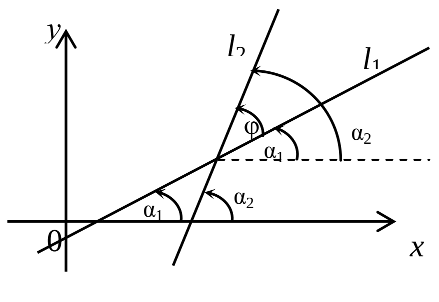


Рисунок 2.4. – Угол между прямыми на плоскости

Угол между прямыми с угловыми коэффициентами k_1 и k_2 определяется по формуле

$$tg\varphi = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}\right|. \qquad (2.13)$$

Если прямые линии параллельны, то $\varphi = 0$ и $tg\varphi = 0$. Из формулы (2.13) следует, что $k_2 - k_1 = 0$, или

$$k_2 = k_1. \qquad (2.14)$$

Равенство (2.14) определяет *условие параллельности двух прямых на плоскости*. Если прямые перпендикулярны, то $\varphi = \frac{\pi}{2}$, $tg\varphi$ не существует. Из формулы (2.13) следует, что $1 + k_1 \cdot k_2 = 0$, или

$$k_1 \cdot k_2 = -1 \text{ или } k_2 = -\frac{1}{k_1}. \qquad (2.15)$$

Равенство (2.15) определяет *условие перпендикулярности двух прямых на плоскости*.

Пример 2.7. Найти уравнения прямых, проходящих через точку $M(1,-2)$, параллельно и перпендикулярно прямой $2x - 3y + 6 = 0$.

Решение. Преобразуем уравнение данной прямой к виду (2.8): $y = \frac{2}{3}x - 2$. Прямая линия, параллельная ей, имеет коэффициент $k_2 = k_1 = \frac{2}{3}$. Применим уравнение пучка прямых (2.9), тогда уравнение искомой прямой запишется

$$y + 2 = \frac{2}{3}(x - 1), \quad y = \frac{2}{3}x - \frac{8}{3}.$$

Прямая, проходящая перпендикулярно к данной прямой, по условию перпендикулярности прямых (2.15) имеет коэффициент $k_2 = -\frac{3}{2}$, а ее уравнение принимает вид $y + 2 = -\frac{3}{2}(x - 1)$, $y = -\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$.

Уравнение прямой линии в *нормальной форме* определяется равенством, [19]

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha = p, \qquad (2.16)$$

где p - расстояние от начала координат до прямой. Общее уравнение прямой (2.6) приводится к нормальной форме умножением на нормирующий множитель $\mu = \pm \dfrac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}$. Знак выбирается противоположным знаку свободному члену *C*, то есть из условия $\mu C < 0$. Получается уравнение

$$\pm \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} x \pm \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} y = \mp \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \qquad (2.17)$$

Расстояние от точки $M_0(x_0, y_0)$ *до прямой* $x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$ находится по формуле

$$d = \left| x_0 \cos\alpha + y_0 \sin\alpha - p \right|. \qquad (2.18)$$

Если прямая линия задана общим уравнением $Ax + By + C = 0$, то *расстояние от точки до прямой* равно

$$d = \frac{\left| Ax_0 + By_0 + C \right|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \qquad (2.19)$$

Пример 2.8. Две стороны квадрата лежат на прямых $3x + 4y + 22 = 0$ и $3x + 4y - 13 = 0$. Вычислить его площадь.

Решение. Из заданных уравнений прямых следует, что они параллельны (коэффициенты *A* и *B* – одинаковы). Для нахождения длины стороны квадрата нужно найти расстояние от одной прямой до другой. Это можно сделать, взяв точку на одной прямой и определить расстояние от нее до другой прямой. Возьмем первую прямую $3x + 4y + 22 = 0$. Пусть $x = 0$, подставив это значение в уравнение, получим уравнение относительно y, откуда найдем $y = -11/2$. Таким образом, получим точку $M\left(0, -11/2\right)$, принадлежащую первой прямой. Расстояние от точки с известными координатами до прямой определяем с помощью формулы (2.19):

$$d = \frac{\left| 3 \cdot 0 + 4 \cdot \left(\frac{-11}{2}\right) - 13 \right|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{\left| -22 - 13 \right|}{\sqrt{25}} = \frac{35}{5} = 7.$$

Теперь определяем площадь: $S = d^2 = 7^2 = 49$.

Пример 2.9**.** Известно уравнение стороны параллелограмма $3x - 4y + 5 = 0$, две вершины $A(1, -3)$ и $C(1, 2)$, а также $\left(AB \,\hat{}\, BC \right) = 45^\circ$. Составить уравнения остальных его сторон.

Решение. Проверим, проходит ли данная прямая через указанные точки. Для этого подставим координаты точек *A* и *C* в уравнение прямой:

$$3\cdot 1-4\cdot(-3)+5=3+12+5=20,\ 20\neq 0,$$

$$3\cdot 1-4\cdot 2+5=3-8+5=0,\ 0=0,$$

значит прямая $3x - 4y + 5 = 0$ не проходит через вершину A, но проходит через вершину C. Пусть это будет сторона DC (см. рис. 2.9). Так как в параллелограмме противоположные стороны попарно параллельны, найдем уравнение стороны, проходящей через точку A, параллельно данной прямой. Найдем угловой коэффициент этой прямой:

$$3x-4y+5=0,\quad 4y=3x+5,\ y=\frac{3}{4}x+\frac{5}{4},\text{ здесь } k_{DC}=\frac{3}{4}.$$

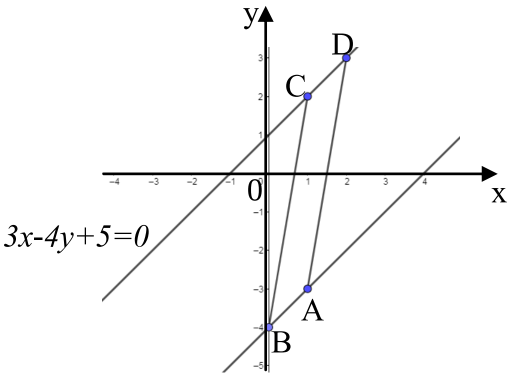


Рисунок к примеру 2.9.

В силу условия (2.9) $k_{DC}=k_{AB}=\frac{3}{4}$, тогда уравнение стороны AB примет вид

$$y+3=\frac{3}{4}(x-1),\ 4y+12=3(x-1) \text{ или } 3x-4y-15=0\ (AB).$$

Найдем уравнение стороны BC, проходящей через точку C под углом 45° к стороне AB. Угловой коэффициент прямой DC равен $\frac{3}{4}$, т.е. $k_{DC}=\frac{3}{4}$. Найдем k_{BC}, используя формулу (2.13):

$$tg\,45^\circ=\frac{k_{BC}-\frac{3}{4}}{1+\frac{3}{4}\cdot k_{BC}},\qquad 1=\frac{k_{BC}-\frac{3}{4}}{1+\frac{3}{4}\cdot k_{BC}},\ k_{BC}-\frac{3}{4}=1+\frac{3}{4}k_{BC},$$

$$k_{BC}-\frac{3}{4}k_{BC}=1+\frac{3}{4},\ k_{BC}=7.$$

Составим уравнение стороны BC, пользуясь уравнением (2.9):

$$y-2=7(x-1),\quad y-2=7x-7 \text{ или } 7x-y-5=0\ (BC).$$

Аналогичным образом определится уравнение стороны AD, параллельной BC:

$$y + 3 = 7(x - 1) \text{ или } 7x - y - 10 = 0 \ (AD).$$

Таким образом, уравнения всех сторон параллелограмма найдены.

2.3. Кривые второго порядка

Множество точек плоскости, координаты которых удовлетворяют уравнению

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \qquad (2.18)$$

называется *кривой второго порядка*, причем хотя бы один из коэффициентов A, B, C отличен от нуля,[25]. Если $A = B = C = 0$, то получим уравнение первого порядка, которое определяет прямую на плоскости. Если данному уравнению не удовлетворяют координаты ни одной точки плоскости, то имеем так называемую *мнимую кривую****,*** например, $x^2 + y^2 = -1$ есть уравнение *мнимой окружности*. В общем случае, может оказаться, что уравнение (2.18) определяет *вырожденную кривую*, либо пустое множество, либо точку, либо прямую, либо пару прямых линий (приведите примеры). В дальнейшем рассмотрим только *невырожденные кривые*.

Окружностью называется геометрическое место точек плоскости, равноудаленных от одной заданной точки, называемой *центром окружности*. Уравнение

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2 \qquad (2.19)$$

определяет *окружность* радиуса R с центром в точке с координатами $C(a, b)$ (рис. 2.5)

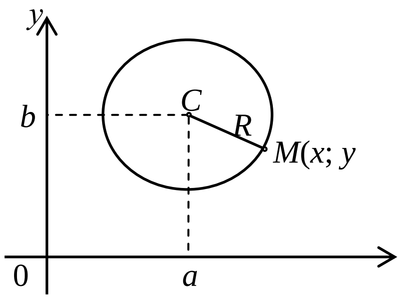


Рисунок 2.5. – Окружность

Если центр совпадает с началом координат, то уравнение окружности запишется

$$x^2 + y^2 = R^2. \qquad (2.20)$$

Пример 2.10. Найти координаты центра и радиус окружности, определяемой уравнением второго порядка $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$.

Решение. Выделим полные квадраты в данном уравнении:

$$x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = (x^2 - 4x + 4) - 4 + (y^2 + 6y + 9) - 9 - 3 = 0$$

$$\Rightarrow (x-2)^2 + (y+3)^2 = 16.$$

Учитывая уравнение окружности (2.19), имеем, что ее центр находится в точке с координатами (2, –3), а радиус равен 4 (построить окружность самостоятельно).

Эллипсом называется геометрическое место точек, сумма расстояний которых от двух фиксированных точек, называемых *фокусами* эллипса, есть величина постоянная, равная $2a$, [25]. Расстояние между фокусами равно $|F_1F_2| = 2c$. Простейшее уравнение эллипса мы получим, выбрав прямую, соединяющую фокусы, за ось абсцисс и поместив начало координат в середину между фокусами (рис. 2.6). Тогда *каноническое уравнение эллипса с центром в начале координат* имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{2.21}$$

где числа a и b называются соответственно *большой и малой полуосями эллипса*. Заметим, что $a > b$, если $a < b$, то фокусы эллипса будут на оси Oy, если $a = b$, то эллипс превращается в окружность. Точки $(\pm a, 0)$, $(0, \pm b)$ называются *вершинами эллипса*.

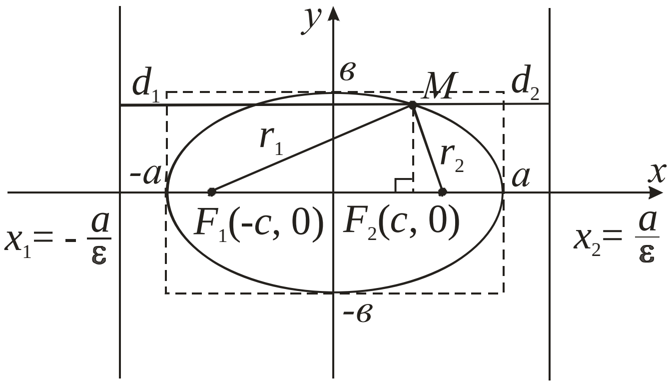


Рисунок 2.6. - Эллипс

Величины $r_1 = |MF_1|$, $r_2 = |MF_2|$ называются *фокальными радиусами* точки M эллипса. Прямые линии $x = \pm\dfrac{a}{\varepsilon}$ называются *директрисами эллипса*. Для эллипса справедливо следующее соотношение:

$$b^2 = a^2 - c^2. \tag{2.22}$$

Эксцентриситетом эллипса называется отношение

$$\varepsilon = \frac{c}{a}. \tag{2.23}$$

Очевидно, что эксцентриситет эллипса меньше единицы, т.е. ε<1.

Пример 2.11. Написать каноническое уравнение эллипса, зная, что большая полуось $a = 6$, а эксцентриситет ε = 0,5.

Решение. Из условия (2.23) находим $c = \varepsilon\, a = 0{,}5 \cdot 6 = 3$. Тогда малая полуось эллипса определится из равенства (2.22):

$$b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{36-9} = 3\sqrt{3}. \text{ Получим: } \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{27} = 1.$$

Если центр эллипса находится в точке $M_o(x_o, y_o)$, то уравнение эллипса имеет вид

$$\frac{(x - x_o)^2}{a^2} + \frac{(y - y_o)^2}{b^2} = 1. \tag{2.21'}$$

Гиперболой называется геометрическое место точек, для которых разность расстояний от двух фиксированных точек плоскости, называемых фокусами, есть постоянная величина, равная 2*a, меньшая*, чем расстояние между фокусами 2*c*, $c > 0$, [36]. Если оси декартовой прямоугольной системы координат выбраны так, что фокусы гиперболы располагаются на оси абсцисс симметрично относительно начала координат (рис.2.7), то *каноническое уравнение гиперболы с центром в начале координат* примет вид

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{2.24}$$

где числа a и b называются соответственно *действительной* и *мнимой полуосями* гиперболы.

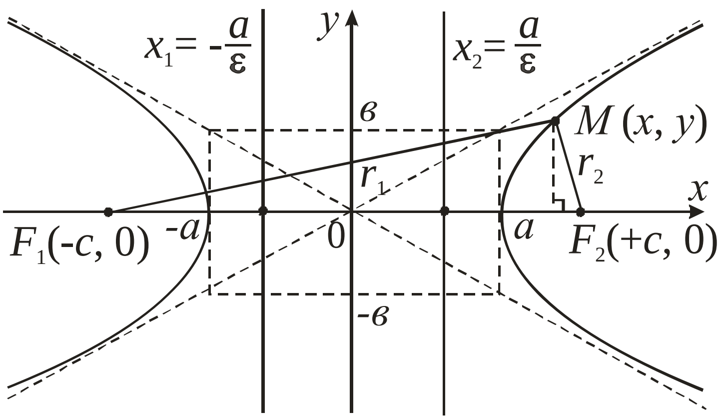


Рисунок 2.7. - Гипербола

Прямые $x = \pm \dfrac{a}{\varepsilon}$ называются *директрисами* гиперболы. Для гиперболы справедливо следующее соотношение:

$$b^2 = c^2 - a^2. \tag{2.25}$$

Как и в случае с эллипсом, *эксцентриситетом* ε гиперболы называется отношение межфокусного расстояния $2c$ к длине действительной оси $2a$, т.е.

$$\varepsilon = \frac{c}{a}\ . \tag{2.26}$$

Следовательно, $\varepsilon > 1$. Для гиперболы важную роль играют также прямые, которые называются ее *асимптотами*, определяемые уравнениями:

$$y = \pm \frac{b}{a} x. \tag{2.27}$$

Асимптоты являются прямыми, к которым график гиперболы неограниченно близко приближается, но не пересекает их. Заметим, что *асимптоты гиперболы совпадают с диагоналями прямоугольника* (если их продолжить), стороны которого заданы уравнениями: $x = \pm a,\ y = \pm b.$

Пример 2.12. Привести уравнение кривой $4x^2 - 16y^2 = 64$ к каноническому виду. Найти фокусы, эксцентриситет.

Решение. Разделим обе части уравнения на 64, получим каноническое уравнение гиперболы $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{4} = 1.$ Из уравнения видно, что $a^2 = 16, a = 4, b^2 = 4, b = 2$, $\varepsilon = \dfrac{c}{a} = \dfrac{\sqrt{16+4}}{4} = \dfrac{2\sqrt{5}}{4} = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$. Фокусы находятся в точках $F_1(-2\sqrt{5},0)$ и $F_2(2\sqrt{5},0)$. Эксцентриситет равен $\varepsilon = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

Если центр гиперболы находится в точке $M_o(x_o,y_o)$, то уравнение гиперболы имеет вид

$$\frac{(x - x_o)^2}{a^2} - \frac{(y - y_o)^2}{b^2} = 1\,. \tag{2.24'}$$

Параболой называется множество точек плоскости, равноудаленных от данной точки F этой плоскости, называемой *фокусом* параболы, и данной прямой, называемой ее *директрисой,* [25]. Обозначим через p – расстояние между фокусом и директрисой. Тогда $F\left(\dfrac{p}{2},0\right)$, а уравнение директрисы $x = -\dfrac{p}{2}$. Число p – называется *фокальным параметром* параболы. Если ось абсцисс проходит через фокус параболы, а ось ординат параллельна директрисе (рис. 2.8), то *каноническое уравнение параболы*, симметричной относительно оси Ox и проходящей через начало координат запишется

$$y^2 = 2px. \tag{2.28}$$

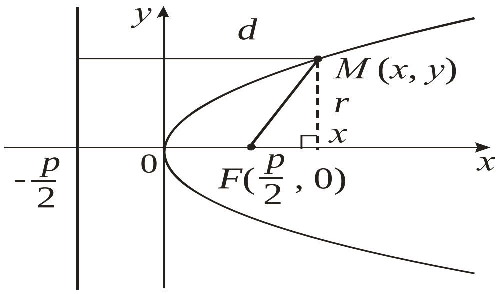


Рисунок 2.8. – Парабола, симметричная относительно оси абсцисс

Уравнение
$$x^2 = 2py \quad . \tag{2.29}$$
определяет параболу, симметричную относительно оси ординат (рис. 2.9 *б*). Фокус этой параболы находится в точке $F\left(0,\ \frac{p}{2}\right)$. Уравнение ее директрисы $y = -\frac{p}{2}$. Фокальный радиус ее точки $M(x, y)$ выражается формулой $r = y + \frac{p}{2}$.

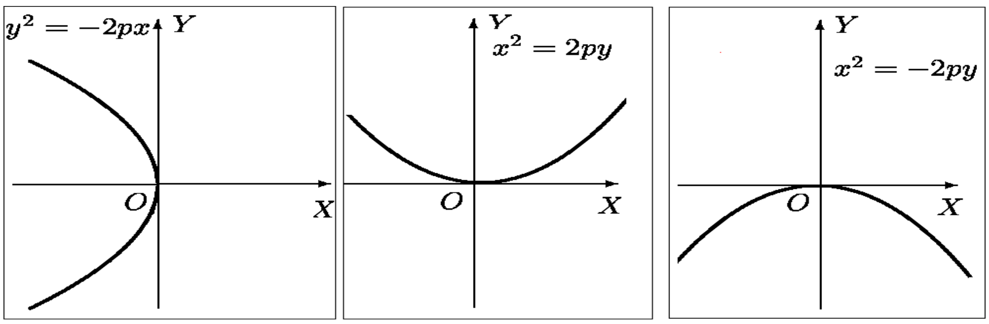
Уравнение параболы с вершиной в начале координат, осью симметрии которой служит ось Ox, и ветви направлены влево (рис. 2.9 *а*), имеет вид

$$y^2 = -2px \ (p > 0) \quad . \tag{2.30}$$

Уравнение ее директрисы $x = \frac{p}{2}$. Уравнение параболы с вершиной в начале координат, осью симметрии которой служит ось Oy, и ветви направлены вниз (рис.2.9 *в*), имеет вид

$$x^2 = -2py \ (p > 0). \tag{2.31}$$

Уравнение ее директрисы запишется $y = p/2$.



а) *б*) *в*)

Рисунок 2.9. – Параболы с вершиной в начале координат:

а) парабола, симметричная относительно оси абсцисс, ветви направлены влево;
б) парабола, симметричная относительно оси ординат, ветви направлены вверх;
в) парабола, симметричная относительно оси ординат, ветви направлены вниз.

Если вершина парабол, симметричных относительно осей Ox и Oy, находится в точке $M_o(x_o,y_o)$, то их уравнения соответственно запишутся:

$$(y - y_o)^2 = 2p(x - x_o), \tag{2.28'}$$

$$(x - x_o)^2 = 2p(y - y_o). \tag{2.29'}$$

Вопросы для самопроверки

1. Декартова прямоугольная система координат на плоскости. Метод координат.
2. Расстояние между двумя заданными точками.
3. Деление отрезка в данном отношении и пополам.
4. Центр тяжести треугольника, его координаты.
5. Площадь треугольника, заданного своими вершинами.
6. Понятие прямой линии на плоскости.
7. Общее уравнение прямой, его частные случаи.
8. Различные виды прямой на плоскости (с угловым коэффициентом, в отрезках, уравнение прямой, проходящей через две заданные точки).
9. Уравнение прямой, проходящей через заданную точку, с заданным угловым коэффициентом.
10. Взаимное расположение прямых на плоскости. Угол между двумя прямыми.
11. Условие параллельности и перпендикулярности двух прямых на плоскости.
12. Нормальное уравнение прямой.
13. Расстояние от точки до прямой.
14. Понятие кривой второго порядка.
15. Окружность, ее уравнение.
16. Эллипс, его каноническое уравнение. Характеристики эллипса.
17. Гипербола, ее каноническое уравнение. Характеристики гиперболы.
18. Парабола, ее канонические уравнения. Характеристики параболы.
19. Полярная система координат. Полярные координаты точки.
20. Связь декартовых и полярных координат точки.

Контрольная работа № 2
«Аналитическая геометрия на плоскости»

Задание 1. Даны координаты вершин треугольника ABC.

Найти: 1) длину стороны AB треугольника;

2) площадь ΔABC;

3) координаты центра тяжести данного треугольника;

4) уравнения сторон данного треугольника;

5) уравнение и длину высоты CD;

6) уравнение медианы, проведенной из вершины A;

7) уравнение прямой, проходящей через вершину C параллельно стороне AB;

8) внутренний угол A. Сделать чертеж.

1.1. $A(-2,3)$, $B(0,7)$, $C(8,3)$.

1.2. $A(-4,-1)$, $B(-2,9)$, $C(6,5)$.

1.3. $A(-3,-2)$, $B(-1,8)$, $C(7,4)$.

1.4. $A(-5,6)$, $B(2,2)$, $C(1,8)$.

1.5. $A(-4,-2)$, $B(-2,8)$, $C(-2,5)$.

1.6. $A(2,-5)$, $B(4,5)$, $C(12,1)$.

1.7. $A(3,0)$, $B(5,10)$, $C(13,6)$.

1.8. $A(0,3)$, $B(2,13)$, $C(10,9)$.

1.9. $A(-1,5)$, $B(1,15)$, $C(9,11)$.

1.10. $A(5,4)$, $B(7,14)$, $C(15,10)$.

1.11. $A(1,2)$, $B(3,12)$, $C(11,8)$.

1.12. $A(4,1)$, $B(6,11)$, $C(14,7)$.

1.13. $A(0,3)$, $B(1,0)$, $C(-2,-3)$.

1.14. $A(7,0)$, $B(-3,10)$, $C(4,7)$.

1.15. $A(4,6)$, $B(-1,-5)$, $C(0,0)$.

1.16. $A(-5,-1)$, $B(9,-6)$, $C(-12,0)$.

1.17. $A(3,-7)$, $B(-4,0)$, $C(10,-7)$.

1.18. $A(1,-2)$, $B(4,2)$, $C(4,8)$.

1.19. $A(0,-1)$, $B(3,3)$, $C(4,1)$.

1.20. $A(1,-1)$, $B(4,3)$, $C(5,1)$.

Задание 2. Привести уравнение кривой второго порядка к каноническому виду, установить тип и построить график этой кривой.

2.1. $4x^2 - 9y^2 - 32x - 18y + 19 = 0$.

2.2. $x^2 - 4y^2 - 2x - 16y - 19 = 0$.

2.3. $x^2 + 2y^2 + 2x - 8y + 7 = 0$.

2.4. $4y^2 - x + 8y + 6 = 0$.

2.5. $3x^2 - y^2 + 12x + 2y + 8 = 0$.

2.6. $2y^2 + x - 4y + 5 = 0$.

2.7. $x^2 + 2y^2 - 6x - 4y - 3 = 0$.

2.8. $4x^2 - 9y^2 - 32x - 18y + 19 = 0$.

2.9. $y^2 - 4x + 4y + 20 = 0$.

2.10. $2x^2 + 3y^2 + 8x + 18y + 29 = 0$.

2.11. $2x^2 + 9y^2 - 4x + 6y + 2 = 0$.

2.12. $x^2 - y^2 - 8x + 6y + 3 = 0$.

2.13. $9x^2 + 4y^2 - 72x - 8y + 112 = 0$.

2.14. $x^2 - 6x + 4y + 9 = 0$.

2.15. $y^2 - 6x - 6y + 9 = 0$.

2.16. $y^2 + x + 6y + 9 = 0$.

2.17. $25x^2 - 9y^2 - 100x + 18y - 134 = 0$.

2.18. $4x^2 - 25y^2 - 32x - 50y - 61 = 0$.

2.19. $16x^2 + 4y^2 - 32x - 24y - 12 = 0$. 2.20. $x^2 + y^2 - 2x + 2y = 0$.

Задание 3. Составить канонические уравнения:

а) эллипса; б) гиперболы; в) параболы (A, B – точки, лежащие на кривой; F – фокус; a – большая (действительная) полуось; b – малая (мнимая) полуось; ε - эксцентриситет; $y = \pm kx$ – уравнения асимптот гиперболы, D – директриса кривой, $2c$ – фокусное расстояние).

3.1.	а) $b = 15$,	F (-10,0);	б) $a = 13$,	$\varepsilon = 14/13$;	в) $D: x = -4$.
3.2.	а) $b = 2$,	F ($4\sqrt{2}$,0);	б) $a = 7$,	$\varepsilon = \sqrt{85}/7$;	в) $D: x = 5$.
3.3.	а) A (3,0),	$B(2, \sqrt{5}/3)$;	б) $k = 3/4$,	$\varepsilon = 5/4$;	в) $D: y = -2$.
3.4.	а) $a = 4$,	F (3,0);	б) $b = 2\sqrt{10}$,	F (-11,0);	в) $D: x = -2$.
3.5.	а) $a = 6$,	F (-4,0);	б) $b = 3$,	F (7,0);	в) $D: x = -7$.
3.6.	а) $b = 7$,	F (5,0);	б) $a = 11$,	$\varepsilon = 12/7$;	в) $D: x = 10$.
3.7.	а) $\varepsilon = 3/5$,	A (0,8);	б) $A(\sqrt{6}, 0)$,	$B(-2\sqrt{2}, 1)$;	в) $D: y = 9$.
3.8.	а) $b = 5$,	$\varepsilon = 12/13$;	б) $k = 1/3$,	$a = 6$;	в) ось симметрии Oy и A (-9,6).
3.9.	а) $b = 5$,	F (-10,0);	б) $a = 9$,	$\varepsilon = 4/3$;	в) $D: x = 12$.

3.10.	а) $a = 22$,	$\varepsilon = {}^{10}\!/_{11}$;	б) $k = {}^{\sqrt{11}}\!/_{5}$,	$c = 2$;	в) ось симметрии Ox и A (-7,5).
3.11.	а) $b = 12$,	F (5,0);	б) $a = 3$,	A(9,-4);	в) F (0,2).
3.12.	а) F (6,0),	$\varepsilon = {}^{3}\!/_{5}$;	б) A(-5,2),	$B(2\sqrt{5},2)$;	в) F (3,0).
3.13.	а) $b = 9$,	F (-2,0);	б) $b = 10$,	$\varepsilon = {}^{7}\!/_{5}$;	в) ось симметрии Ox и A (1,-4).
3.14.	а) F (-4,0),	$\varepsilon = {}^{4}\!/_{5}$;	б) $k = {}^{2\sqrt{2}}\!/_{3}$,	A(9,8);	в) ось симметрии Oy и A (7,6).
3.15.	а) $A\left({}^{5}\!/_{2}, {}^{\sqrt{6}}\!/_{4}\right)$,	$B\left(-2, {}^{\sqrt{15}}\!/_{5}\right)$;	б) $a = 7$,	F (-12,0);	в) $D: y = 6$.
3.16.	а) $a = 5$,	$\varepsilon = {}^{1}\!/_{2}$;	б) $b = 4$,	$\varepsilon = 2$;	в) $D: x = 8$.
3.17.	а) $b = 3$,	A(7,1);	б) $k = {}^{\sqrt{13}}\!/_{5}$,	$c = 3$;	в) $D: y = -7$.
3.18.	а) $a = 8$,	F (-6,0);	б) $b = 3$,	$k = {}^{22}\!/_{7}$;	в) ось симметрии Oy и A(-2,4).
3.19.	а) F(-3,0),	$b = 2$;	б) $a = 9$,	$\varepsilon = {}^{11}\!/_{3}$;	в) $D: x = -8$.
3.20.	а) $\varepsilon = {}^{1}\!/_{2}$,	$a = 6$;	б) $k = {}^{\sqrt{23}}\!/_{2}$,	$c = 10$;	в) D: y = - 7.

Решение типового варианта контрольной работы № 2

Задание 1. Даны координаты вершин треугольника ABC: A(1,-3), B(2,5) и C(8,1).

Найти: 1) длину и уравнение стороны AB треугольника;

2) площадь ΔABC;

3) координаты центра тяжести данного треугольника;

4) уравнение и длину высоты, проведенной из вершины B;

5) уравнение медианы, проведенной из вершины A;

6) уравнение прямой, проходящей через вершину C параллельно стороне AB;

7) внутренний угол A. Сделать чертеж.

Решение. Построим чертеж.

y

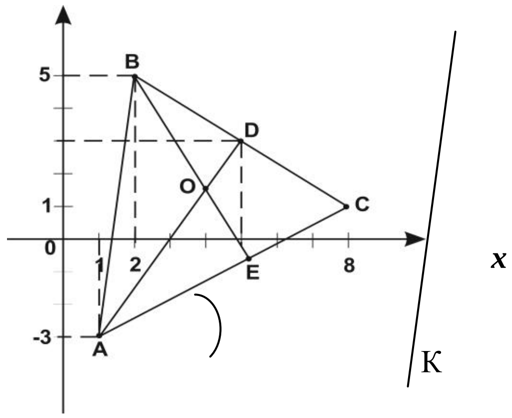


Рисунок к заданию 1

1) Длину стороны AB определим по формуле (2.1):

$$|AB| = \sqrt{(2-1)^2 + (5+3)^2} = \sqrt{65}.$$

Для составления уравнения стороны AB воспользуемся уравнением прямой, проходящей через две заданные точки (2.11):

$$\frac{x-1}{2-1} = \frac{y+3}{5+3} \Rightarrow 8(x-1) = y+3,\ 8x - y - 11 = 0\ .(AB).$$

2) Для нахождения площади треугольника ABC применим формулу (2.4):

$$S = \pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 2-1 & 5+3 \\ 8-1 & 1+3 \end{vmatrix} = \pm\frac{1}{2}\left|(1\cdot 4 - 8\cdot 7)\right| = 26.$$

3) Координаты центра тяжести определим по формуле (2.5):

$$x_{ц.т.} = \frac{1+2+8}{3} = \frac{11}{3}, \quad y_{ц.т.} = \frac{-3+5+1}{3} = 1,$$

т.е. $O_1(^{11}/_3,1)$.

4) Так как $BE \perp AC$, следовательно, по условию перпендикулярности прямых $k_{BE} = -\dfrac{1}{k_{AC}}$. Угловой коэффициент прямой AC определяем по формуле $k_{AC} = \dfrac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = \dfrac{1+3}{8-1} = \dfrac{4}{7}$. Тогда $k_{BE} = -\dfrac{7}{4}$. Используем уравнение прямой, проходящей через данную точку M_0 (x_0,y_0) в данном направлении (2.9). Уравнение высоты, опущенной из вершины B, запишется

$$y - 5 = -\frac{7}{4}(x-2),\ 7x + 4y - 34 = 0\ (BE).$$

Для определения длины высоты BE необходимо найти уравнение стороны AC и воспользоваться формулой (2.19), определяющей расстояние от точки B до прямой AC. Зная угловой коэффициент прямой AC и координаты точки A, согласно уравнению (2.9), получим

$$y+3=\frac{4}{7}(x-1),\ 4x-7y-25=0\ (AC).$$

Тогда длина высоты BE равна:

$$|BE|=\frac{|4\cdot 2-7\cdot 5-25|}{\sqrt{4^2+(-7)^2}}=\frac{|-52|}{\sqrt{65}}=\frac{52}{\sqrt{65}}.$$

5) Для составления уравнения медианы AD найдем координаты точки D по формулам деления отрезка BC пополам (2.3):

$$x_D=\frac{2+8}{2}=5,\ y_D=\frac{5+1}{2}=3.\ D\ (5,3).$$

Используя уравнение прямой (2.11), проходящей через две точки, получим $\frac{x-1}{5-1}=\frac{y+3}{3+3}$, $3x-2y-9=0$ (AD).

6) Чтобы составить уравнение прямой KC, проходящей через вершину $C(8,1)$ параллельно стороне AB, приведем уравнение AB к уравнению с угловым коэффициентом

$$8x-y-11=0,\ y=8x-11.$$

По условию параллельности двух прямых на плоскости угловые коэффициенты CK и AB совпадают. Следовательно, $k_{CK}=8$, тогда по формуле (2.9) будем иметь

$$y-1=8(x-8),\ 8x-y-7=0\ (CK).$$

7) Найдем угол между прямыми AB и AC, воспользовавшись формулой (2.13):

$tg(AB,\hat{}AC)=\left|\frac{k_{AC}-k_{AB}}{1+k_{AC}k_{AB}}\right|$.Зная $k_{AB}=8$, $k_{AC}={}^4/_7$, подставим в формулу:

$$tg(AB,\hat{}AC)=\left|\frac{\frac{4}{7}-8}{1+\frac{4}{7}\cdot 8}\right|=\left|\frac{-52}{39}\right|=\frac{14}{13}.$$

$$(AB,\hat{}AC)=arctg\frac{14}{13}.$$

Задание 2. Привести уравнение кривой второго порядка $4x^2+16x-2y+1=0$ к каноническому виду, установить тип и построить график этой кривой.

Решение. Сгруппируем слагаемые, содержащие текущие координаты: $4(x^2+4x)-2y+1=0$. В скобках выделим полный квадрат: $4(x^2+4x+4)-16-2y+1=0$; $4(x+2)^2=2y+15$. Отсюда y

$(x+2)^2 = \frac{1}{2}\left(y + \frac{15}{2}\right)$. Получили уравнение параболы, симметричной относительно оси Oy, с вершиной в точке $C(-2,-{}^{15}/_{2})$.

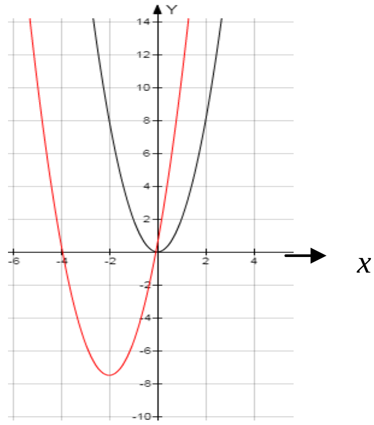


Рисунок к заданию 2

C (-2, -7,5)

Задание 3. Составить канонические уравнения: а) эллипса, большая ось которого равна 5, а фокус находится в точке $F(3,0)$; б) гиперболы с мнимой осью $b = 3$ и $\varepsilon = \frac{\sqrt{13}}{2}$; в) параболы, имеющей директрису $x = -3$.

Решение. а) Каноническое уравнение эллипса имеет вид $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. По условию задачи большая полуось $a = 5$, $c = 3$. Для эллипса выполняется равенство $b^2 = a^2 - c^2$. Подставив значения a и c, найдем $b^2 = 16$. Искомое уравнение эллипса запишется

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1.$$

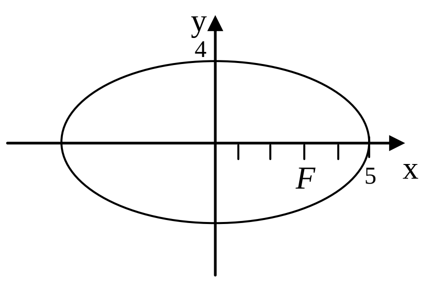


Рисунок к заданию 3 а)

б) Каноническое уравнение гиперболы имеет вид $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$. По условию задачи мнимая полуось b = 3, эксцентриситет $\varepsilon=\frac{\sqrt{13}}{2}$. Для гиперболы справедливо равенство $b^2=c^2-a^2$, и, учитывая, что $\varepsilon=\frac{c}{a}$, находим a^2=16. Искомое уравнение гиперболы будет иметь вид

$$\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{9}=1.$$

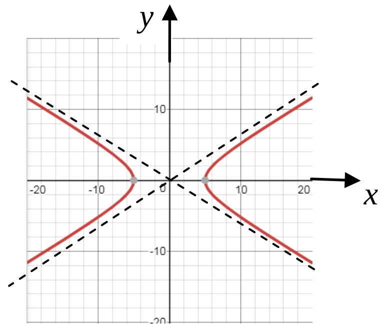


Рисунок к заданию 3 б)

в) Каноническое уравнение параболы в данном случае имеет вид y^2 = $2px$, а уравнение ее директрисы $x=-\frac{p}{2}$. По условию x = -3, следовательно, $-3=-\frac{p}{2}$, $p=6$, уравнение параболы выглядит y^2 = 12 x.

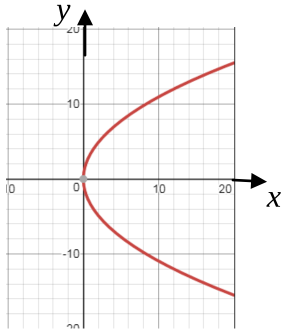


Рисунок к заданию 3 в)

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Антонов В.И., Лагунова М.В., Лобкова Н.И., Максимов Ю.Д., Семёнов В.М., Хватов Ю.А. Линейная алгебра и аналитическая геометрия. Опорный конспект: [учеб. пособие] / — М. : Проспект, 2015 .— 139 с.

2. Ахметгалиева В.Р., Галяутдинова Л. Р., Галяутдинов М. И. Математика. Линейная алгебра: учебное пособие / Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего

образования "Российский государственный университет правосудия"— М.: Российский государственный университет правосудия, 2017 .— 60 с.

3. Ащеулова А.С., Карнадуд О.С., Саблинский А.И. Высшая математика: линейная алгебра и аналитическая геометрия: конспект лекций / Кемерово: КемГУКИ, 2011.— 71 с.

4. Беклемишев, Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры: учебник – 12-е изд., испр. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009. – 312 с.

5. Быкова М.А., Елтошкина Е.В., Овчинникова Н.И. Математика: Учебное пособие. ч. 1. – Иркутск: Изд-во ИрГАУ, 2018 г. – 198 с.

6. Грешилов А.А., Белова Т.И. Аналитическая геометрия. Векторная алгебра. Кривые второго порядка: учеб. пособие — М. : Логос, 2004 .— 124 с.

7. Ермолаев Ю.Д. Типовой расчет по линейной и векторной алгебре : сетевое обновляемое электрон. учеб. пособие / [3-е изд.].— Липецк: ЛГТУ, 2013.— 366 с.

8. Кремер Н.Ш., Фридман М.Н. Линейная алгебра. Учебник и практикум / под ред. Н.Ш. Кремера.– М.: Юрайт, 2014.-306 с.

9. Мальцев И.А. Линейная алгебра: учеб. пособие/ И.А. Мальцев.- Спб.: Лань, 2010.-380 с.

10. Овчинникова Н.И. Линейная алгебра: (сборник тестовых заданий)/ - Иркутск: Изд-во Иркутского ГАУ им. А.А. Ежевского, 2015. - 84с.

11. Панов Т.Е. Линейная алгебра и геометрия: курс лекций / Т.Е. Панов. – М.: МГУ, 2016. – 96 с.

12. Петрова В. Т. Лекции по алгебре и геометрии. Т. 1, 2. – М.: Владос, 2005. - 312 с.

13. Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре: учеб.пособие / под ред. Д.В. Беклемишева. – 3-е изд., испр. – СПб.: Изд-во «Лань», 2008. – 496 с.

14. Умнов А.Е. Линейная алгебра и геометрия / А.Е Умнов. – М. : МФТИ, 2011. - 544 с.

Информационные ресурсы

Math.ru - Портал математического образования

Exponenta.ru - Образовательный математический сайт

Allmath.ru - Математический портал

http://windows.edu/ru - Единое окно доступа к образовательным ресурсам

http://window.edu.ru/resource/125/47125 - Векторная алгебра

http://window.edu.ru/resource/143/64143 - Линейная алгебра, аналитическая

геометрия
http://mathtest.ru/ - Тесты по математике в режиме on-line.

Быкова Мария Александровна

Елтошкина Евгения Валерьевна

Математика

Методические указания
для студентов биологических специальностей

Часть первая

Редактор Тесля В.И.

Подготовка оригинал-макета: Быкова М.А.

Лицензия ЛР № 070444 от 11.03.98 г.

Формат 60х84

Усл. печ. л. 2,375

Тираж 100 экз.

Отпечатано на ризографе ИрГСХА

664038 г. Иркутск, пос. Молодежный