Министерство сельского хозяйства Российской Федерации
Иркутский государственный аграрный университет
им. А.А. Ежевского

Кафедра «Эксплуатация машинно - тракторного парка,
безопасность жизнедеятельности и профессиональное обучение»

МОДЕЛИРОВАНИЕ В АГРОИНЖЕНЕРИИ

Учебное пособие
для студентов инженерного факультета
направление подготовки 35.04.06 Агроинженерия

Молодёжный, 2020

УДК 001(075)

Рекомендовано к изданию учебно - методической комиссией инженерного факультета Иркутского ГАУ (протокол № 9 от «21» мая 2020 г.).

Рецензент:
Бураев М.К. – заведующий кафедрой «Технический сервис и общеинженерные дисциплины», д.т.н., профессор.

Моделирование в агроинженерии : Учебное пособие для студентов инженерного факультета направление подготовки 35.04.06 Агроинженерия / Составитель: Н.В. Степанов. – Молодёжный : Изд - во Иркутского ГАУ, 2020. - 57 с. – Текст : электронный.

В учебном пособии излагаются материалы по моделированию в агроинженерии. Приводится классификация моделей. Методика составления моделей. Оптимизационные модели процессов.

СОДЕРЖАНИЕ

ГЛОССАРИЙ

(толковый словарь терминов) учебной дисциплины

Адекватность – способность отражать заданные свойства объекта с погрешностью не выше заданной.

Алгоритм – это процесс решения задачи путём реализации последовательности шагов.

Аналитические методы решения задач математического программирования – это ряд последовательных вычислений по некоторым правилам.

Вектор – элемент векторного пространства.

Векторное (линейное) пространство – математическая структура, которая представляет собой набор элементов, называемых векторами, для которых определены операции сложения друг с другом и умножения на число - скаляр.

Величина – 1. Объект, с которым связывается определенное множество значений. 2. Математический объект в аспекте измерения (вообще – меры).

Величины детерминированные – данные, заданные определенным количеством.

Величины случайные – данные, значения которых заданы вероятностью их осуществления.

Величина дискретная (целочисленная) – величина, значения которой меняется прерывно, и образует конечное или счетное множество.

Величина непрерывная – величина, которая в заданном интервале может принимать любое значение.

Внутренние связи – это связи между переменными (элементами системы).

Внешние связи – это связи между системой и внешней средой.

Граничные условия – это предельно допустимые значения искомых переменных.

Граф – это математический объект, представляющий собой некоторое множество точек (вершин) на плоскости или в пространстве, некоторые из которых соединены линиями (ребрами).

Графический метод решения задачи на оптимизацию – решение задачи, выраженное в графической форме.

Достоверность – оценка вероятности отсутствия ошибок в данных.

Зависимость – отношение между функцией и ее аргументами.

Зависимость линейная – зависимость, в которой переменные входят в первой степени, и нет их произведения.

Зависимость нелинейная – зависимость, в которой переменные входят не в первой степени или есть произведения переменных.

Задачи безусловной оптимизации – это такие задачи, в которых задана одна целевая функция.

Задачи условной оптимизации – это задачи, когда кроме целевой функции задаются некоторые дополнительные условия, которые должны быть выполнены.

Задачи однопараметрические – это задачи безусловной оптимизации с одной переменной.

Задачи многопараметрические – это задачи безусловной оптимизации с множеством переменных.

Задачи многокритериального программирования – это задачи с множеством целей и свести задачу к одному критерию достаточно трудно.

Итерация – повторное исполнение некоторого процесса над результатом предыдущего исполнения этого же процесса, возможно, с некоторыми модификациями.

Критерий оптимальности – принятый показатель меры эффективности исследуемой системы, величина которого при экстремальном значении целевой функции (максимальном или минимальном) определяет оптимальное решение для заданных условий, т. е. оптимальные значения переменных в модели.

Математическая модель – приблизительное описание какого - либо класса явлений, выраженное с помощью математической символики.

Математическая модель технического объекта – совокупность математических объектов и отношений между ними, которая адекватно отражает свойства исследуемого объекта, интересующие исследователя.

Математическая модель аналоговая – модель, свойства которой определяются законами, аналогичными законам изучаемой системы.

Математическая модель аналитическая – запись модели в виде результата аналитического решения исходных уравнений модели.

Математическая модель алгоритмическая – запись соотношений модели и выбранного численного метода решения в форме алгоритма.

Математическая модель имитационная – это алгоритмическая модель, отображающая поведение исследуемого объекта во времени при заданных внешних воздействий на объект.

Математическая модель инвариантная – запись соотношений модели с помощью традиционного математического языка безотносительно к методу решения уравнений модели.

Математическая модель структурная – ММ предназначена для отображения структурных свойств объекта.

Математическая модель функциональная – ММ отображающая физические или процессы, протекающие в объекте при его функционировании или изготовлении.

Математическая модель полная – модель, в которой фигурируют фазовые переменные, характеризующие состояние всех имеющихся межэлементных связей, т. е. состояние всех элементов проектируемого объекта.

Макромодель – математическая модель, в которой отображаются состояния значительно меньшего числа межэлементных связей, что соответствует описанию объекта при укрупненном выделении элементов.

Метод – совокупность приемов или операций для получения искомого результата.

Метод барьерных функций – метод последовательной безусловной минимизации задач НЛП при котором исследуется не сама функция, а новая, построенная из исходной функции и штрафной (ограничений – неравенств).

Метод градиента (наискорейшего спуска) – численный итерационный метод решения задач, особенно вариационных (простых и с управлением), который сводится к поиску решения с учетом того, что градиент функционала задачи равен нулю на решении.

Метод вариационного исчисления – аналитический метод поиска экстремума функционалов, т. е. величин, численное значение которых определяется выбором одной или нескольких функций.

Методы дифференциального исчисления – аналитический метод, при котором для исследования функции используются производные и дифференциалы функции.

Метод штрафных функций – метод последовательной безусловной минимизации задач НЛП при котором исследуется не сама функция, а новая, построенная из исходной функции и штрафной (ограничений – равенств).

Множество допустимых решений (МДР) – пространство решения.

Моделирование – метод исследования сложных агрегатов или процессов на моделях.

Модель – (с французского) мера, образец, норма.

Модель вербальная – информационная модель в мысленной или разговорной форме.

Модель динамическая – позволяет увидеть изменения объекта во времени.

Модель материальная (предметная) – воспринимает геометрические и физические свойства оригинала и всегда имеет реальное воплощение.

Модель знаковая – информационная модель выраженная знаками, т. е. средствами любого формального языка.

Модель опытная – уменьшенные копии.

Модель схемная (графическая) – представление модели на некотором графическом языке (например, язык графов, эквивалентные схемы, диаграммы и т. п.).

Модель информационная – нельзя потрогать, или увидеть.

Модель физическая – модель, создаваемая путем замены объектов, моделирующими устройствами, которые имитируют определенные характеристики либо свойства этих объектов.

Ограничения – область возможных значений переменных (оптимизируемых) величин в заданных конкретных условиях изучаемой системы, внутри которых отыскивается оптимальное решение.

Оптимизация – процесс выбора наилучшего варианта из множества возможных.

Параметры – постоянные величины, которые в процессе всего решения остаются неизменными и в модели, как правило, представлены коэффициентами при переменных или свободными членами в уравнениях и неравенствах.

Переменные – величины, оптимальные значения которых необходимо найти в процессе решения модели.

Поиск минимума и максимума – алгоритмы оптимизации, приспособленные для поиска максимума, другие – для минимума.

Постановка задачи на оптимизацию – построение базовой аналитической модели.

Программирование – выбор оптимальной программы действий.

Программирование динамическое – теория и методы решения задач нелинейного математического программирования, в которых целевая функция минимизируется на дискретном подмножестве множества планов.

Программирование дискретное – решение задач математического программирования, в которых целевая функция минимизируется на дискретном подмножестве множества планов.

Программирование квадратичное – решение задач нелинейного программирования при множестве планов, ограниченном линейными равенствами и неравенствами, и при целевой функции, являющейся квадратичной и выпуклой.

Программирование линейное – решение задач математического программирования при условии, что целевая функция, а также равенства и неравенства, ограничивающие множество планов, линейны.

Программирование нелинейное – решение задач математического программирования в условиях нелинейности целевой функции или равенств и неравенств, ограничивающих множество планов.

Программирование стохастическое – решение задач математического программирования, в которых целевая функция минимизируется на случайном подмножестве множества планов.

Программирование целочисленное – решение задач математического программирования, в которых целевая функция минимизируется в точках целочисленной решетки множества планов.

Решение – 1. математический объект, удовлетворяющий условиям поставленной задачи. 2. Процесс отыскания решения. 3. Выбор одной из нескольких возможностей, удовлетворяющих заданным условиям.

Симплекс - метод решения задачи – многошаговый метод решения задач линейного программирования, при котором на каждом шаге происходит переход к соседней вершине множества допустимых планов.

Симплекс - таблица – форма записи задачи линейного программирования в виде прямоугольной таблицы, облегчающая применение симплекс-метода.

Целевая функция – функция, основных искомых переменных задачи математического программирования, экстремальные значения которой ищутся в рассматриваемой задаче.

Численные методы решения задачи на оптимизацию – решение задачи, полученное одним из численных методов.

Технологический процесс – часть производственного процесса предприятия или часть рабочего процесса технологической машины.

Функция – уравнение, связывающее главный фактор с независимыми переменными и параметрами.

Формализация – представление содержательной стороны явления в виде формальной системы или исчисления.

Экстремум – понятие, объединяющее понятие максимума и минимума.

Экстремум глобальный – максимум (минимум), который больше (меньше) всех остальных.

Экстремум локальный – максимум (минимум) на определенном участке функции.

1 КЛАССИФИКАЦИЯ МОДЕЛЕЙ

Различают физические модели и описательные.

Физическая модель, создаваемая путем замены объектов, моделирующими устройствами, которые имитируют определенные характеристики либо свойства этих объектов.

Описательные модели отображают объекты, процессы, и явления в формах: образной – рисунки, фотографии, плакаты, географические карты и др. или знаковой – с использованием различных языков (знаковых систем). Знаковая модель может быть представлена в форме текста (например, программы на языке программирования); формулы, отображающей связь различных параметров объекта или системы или процесса, таблицы (например, периодической таблицы элементов Д.И. Менделеева) и др. С помощью формальных языков строятся формальные модели (информационные, математические и др.).

По характеру отображаемых свойств объекта математические модели (ММ) делятся на структурные и функциональные.

Структурные ММ предназначены для отображения структурных свойств объекта. Структурные ММ делятся на топологические и геометрические.

В ***топологических ММ*** отображаются состав и взаимосвязи элементов. Их чаще всего применяют для описания объектов, состоящих из большого числа элементов, при решении задач привязки конструктивных элементов к определенным пространственным позициям (например, задачи компоновки оборудования, размещения деталей, трассировки соединений) или к относительным моментам времени (например, при разработке расписаний, технологических процессов). Топологические модели могут иметь форму графов, таблиц (матриц), списков и т. п.

В ***геометрических ММ*** отображаются свойства объектов, в них дополнительно к сведениям о взаимном расположении элементов содержатся сведения о форме деталей. Геометрические ММ могут выражаться совокупностью уравнений линий и поверхностей; совокупностью алгебраических соотношений, описывающих области, составляющие тело объекта; графами и списками, отображающими конструкции из типовых конструктивных элементов, и т. п. Геометрические ММ применяют при решении задач конструирования в машиностроении, приборостроении, радиоэлектронике, для оформления конструкторской документации, при задании исходных данных на разработку технологических процессов изготовления деталей. Используют несколько типов геометрических ММ.

Функциональные (параметрические) ММ предназначены для отображения физических или информационных процессов, протекающих в объекте при его функционировании или изготовлении. Обычно функциональные ММ представляют собой системы уравнений, связывающих фазовые переменные, внутренние, внешние и выходные параметры.

По степени детализации описания в пределах каждого иерархического уровня выделяют полные ММ и макромодели.

Полная модель – эта модель, в которой фигурируют фазовые переменные, характеризующие состояния всех имеющихся межэлементных связей (т.е. состояние всех элементов проектируемого объекта).

Макромодель – ММ, в которой отображаются состояния значительно меньшего числа межэлементных связей, что соответствует описанию объекта при укрупненном выделении элементов.

По способу представления свойств объекта функциональные ММ делятся на аналитические, алгоритмические и имитационные.

Аналитические ММ представляют собой явные выражения выходных параметров как функций входных и внутренних параметров.

Алгоритмические ММ выражают связи выходных параметров с параметрами внутренними и внешними в форме алгоритма.

Имитационная ММ – это алгоритмическая модель, отражающая поведение исследуемого объекта во времени при задании внешних воздействий на объект.

1.1 Требования к математической модели

Особенностью математических моделей является то, что получение с их помощью каких - либо результатов связано с вычислениями. Так возникает необходимость понятия вычислительного эксперимента. Вычислительный эксперимент – это получение результатов с помощью математической модели, для какого - либо конкретного случая исследований. Это может быть как единичный расчет одного параметра, так и комплекс расчетов целого спектра параметров модели во множестве определенным образом связанных условий. Во втором случае большое значение приобретает процедура планирования вычислительного эксперимента, целью которого является получение максимума достоверной информации при минимуме затрат. Под достоверностью результата вычислительного эксперимента понимается одновременное выполнение двух условий: во - первых, результат должен быть достаточно точен, а во - вторых, не может быть опровергнут с помощью каких либо дополнительных расчетов. (В математической статистике этим понятиям соответствуют понятия несмещенности и состоятельности оценок, получаемых из наблюдений) При планировании вычислительного эксперимента используются многие методы математического моделирования – от простого здравого смысла до теории катастроф и методов математической статистики.

Основными требованиями, предъявляемыми к математическим моделям, являются требования адекватности, универсальности и экономичности.

Центральным понятием теории математического моделирования является понятие адекватности. Игнорирование этого понятия низводит теорию до уровня схоластики, а аргументированная проверка адекватности обеспечивает получение добротных и практически значимых результатов.

Модель считается **адекватной**, если отражает заданные свойства с приемлемой точностью. Точность определяется как степень совпадения значений выходных параметров модели и объекта. Для выявления этого соответствия для механических систем и процессов, характеризующихся измеримыми величинами – параметрами – необходимо провести сравнение параметров модели и оригинала в одних и тех же условиях. Очевидно, что сравнивать следует лишь соответствующие друг другу параметры между собой и только в той области функционирования объекта, в которой предполагается его исследовать.

Математические модели механических систем и процессов строятся в основном как подобные детерминированные модели, обладающие общим с оригиналом математическим описанием. Поэтому для адекватности математической модели поведению оригинала – механической системы – достаточно убедиться в выполнении двух свойств: точности и непротиворечивости. Однако так звучат лишь общие, образные требования к адекватности, для практического применения необходимо сформулировать математические формы этих требований.

Точность в задачах механики означает, что обобщенная характеристика рассогласования соответствующего параметра модели и оригинала($\Delta u = u_{\text{модели}} - u_{\text{оригинала}}$) должна быть не больше, чем заранее заданное значение приемлемой погрешности $\Delta u_{\text{доп}}$. В качестве такой обобщенной характеристики может выступать наибольшее по модулю значение рассогласования, среднее значение рассогласования или статистическая оценка, как, например:

- доверительный интервал для математического ожидания рассогласования;

- диапазон практически наблюдаемых значений рассогласования;

- интегральная оценка одного из следующих типов:

$$K_\Delta = \alpha\int_0^T \Delta u(t)dt \quad \left(K_\Delta = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\Delta u_i\right), \quad \text{или} \quad K_\delta = \beta\int_0^T \delta u(t)dt \quad \left(K_\delta = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\delta u_i\right).$$

Однако точность не может быть самоцелью, так как существует множество причин, оправдывающих существование значительных систематических погрешностей. Поэтому критерии проверки точности не должны рассматриваться, как догма, они выбираются в соответствии с целью исследований.

Непротиворечивость подразумевает идентичный характер изменения соответствующих параметров, т. е. идентичный вид основных свойств функциональных зависимостей на отдельных участках, как-то: возрастание, убывание, экстремумы, выпуклость и т. п. При более глубоком рассмотрении этого понятия становится очевидным многообразие возможных критериев проверки непротиворечивости. Эти критерии не могут быть догмой – они выбираются в соответствии с целями исследования.

Поскольку сравниваемые параметры в области функционирования объекта могут принимать множество различных значений, постольку какие-либо выводы о соответствии их поведения можно сделать только на основании статистической обработки таких множеств. Поэтому адекватность проверяется с помощью статистических критериев, которые могут с определенной вероятностью свидетельствовать о соответствии результатов вычислительного эксперимента поведению реального объекта в соответствующих условиях.

Для образной характеристики понятий точности и не противоречивости можно воспользоваться рисунком 1. На нем изображены графики некоторой функциональной зависимости между параметрами оригинала, которую модель должна адекватно воспроизвести. Для первого знакомства с понятием адекватности нижеследующий анализ приводится в нестрогой форме – строгий математический аппарат проверки адекватности дан в виде алгоритма.

В случае «а» существует область, в которой выполняются некоторые заданные требования точности, т. е. погрешность модели по отношению к оригиналу меньше некоторого допустимого значения. Однако с точки зрения такого свойства рассматриваемой зависимости, как возрастание - убывание, эта модель противоречит поведению оригинала, поэтому не может быть признана адекватной. (Между прочим, если рассмотренное свойство несущественно для данного исследования, то модель может быть признана адекватной.) Случай «б» демонстрирует непротиворечивый ход зависимости с той же точки зрения.

На графиках «в» и «г» показано поведение оригинала, наиболее часто встречающееся в реальных механических объектах. Колебания связаны с возмущающими факторами, не поддающимися регистрации, а также с погрешностями записывающей аппаратуры. Тем не менее, заменять экспериментальную зависимость более «красивой» нельзя, так как истинный характер ее неизвестен.

В этом случае сравнение оригинала и модели особенно сложно.

В случае «в» заметна систематическая погрешность модели – постоянно присутствующее рассогласование между параметрами модели и оригинала. В этом случае, если все наблюдаемые частные значения рассогласования существенно меньше допустимого значения погрешности, то модель можно считать достаточно точной. Если большое число наблюдаемых частных значений рассогласования больше допустимого значения погрешности, то модель нельзя считать достаточно точной. А в промежуточном случае необходимо руководствоваться соображениями цели исследований.

В случае «г» систематическая погрешность модели значительно меньше той случайной ее составляющей, которая обязана своим появлением возмущающим факторам. Поэтому, если большинство наблюдаемых частных значений рассогласования меньше допустимого значения погрешности, то модель можно считать достаточно точной.

Что касается свойства непротиворечивости модели в случаях «в» и «г», то этот вопрос значительно сложнее. Если по своей природе исследуемая зависимость должна быть более плавной, чем это зарегистрировано на оригинале, то это значит, что практически все высокочастотные колебания являются результатом наложения шума (не учитываемых факторов), который следует отфильтровать. Эта не формализуемая процедура должна быть построена только на одном требовании: для непротиворечивости рассогласование между оригиналом и моделью не должно подчиняться какой-либо закономерности, рассогласование должно вести себя вполне хаотически. С этой точки зрения случай «г» позволяет надеяться на не противоречие модели поведению оригинала, а случай «в» – нет.

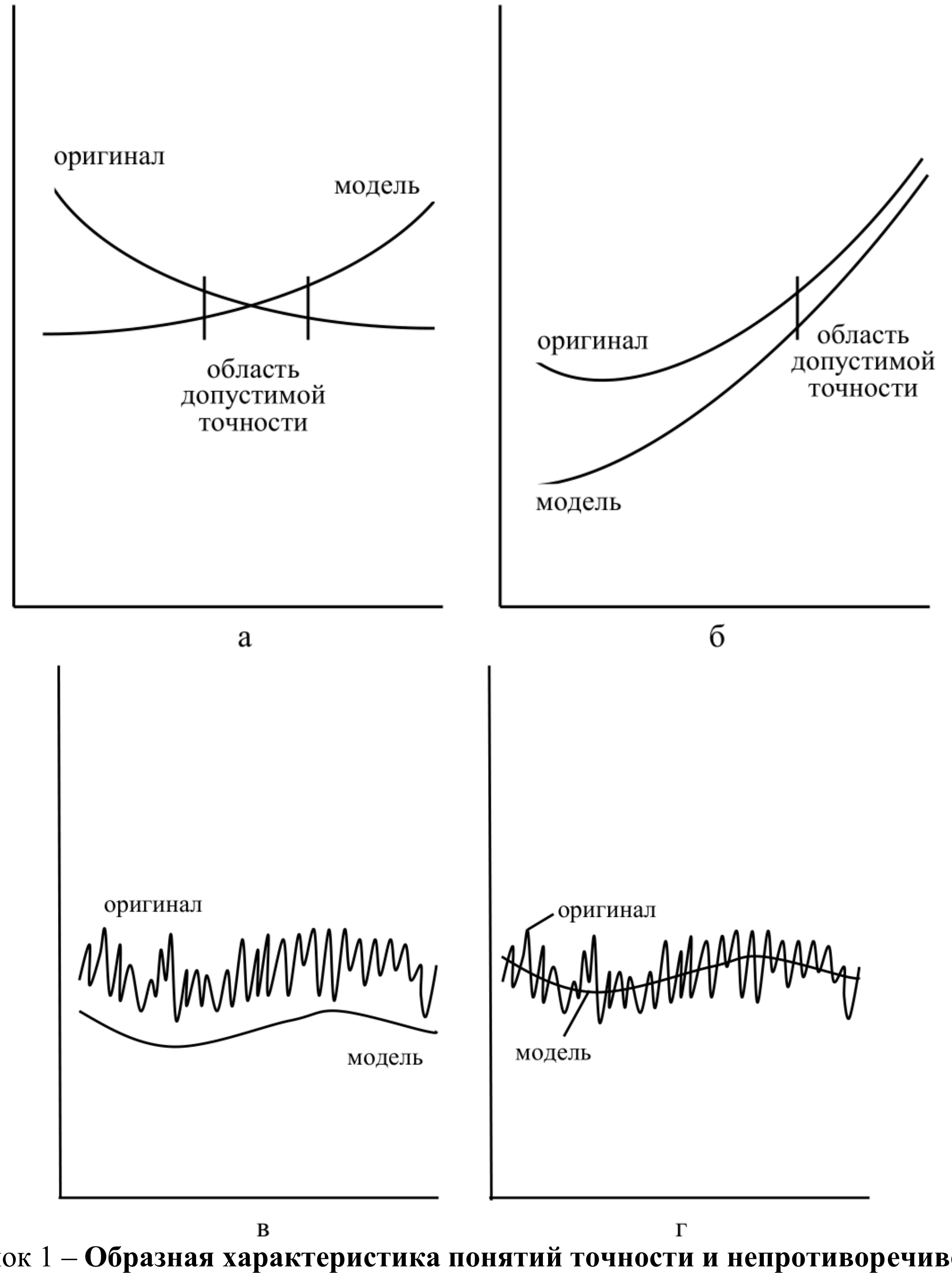


Рисунок 1 – **Образная характеристика понятий точности и непротиворечивости**

Таким образом, становится очевидным, что для проверки адекватности необходимо иметь (рисунок 2):

- исчерпывающую информацию о реальном случае (что всегда трудно, а подчас бывает практически невозможно);

- результаты контрольного вычислительного эксперимента, воспроизводящего известный реальный случай;

- критерий оценки точности математической модели;

- критерий проверки непротиворечивости математической модели.

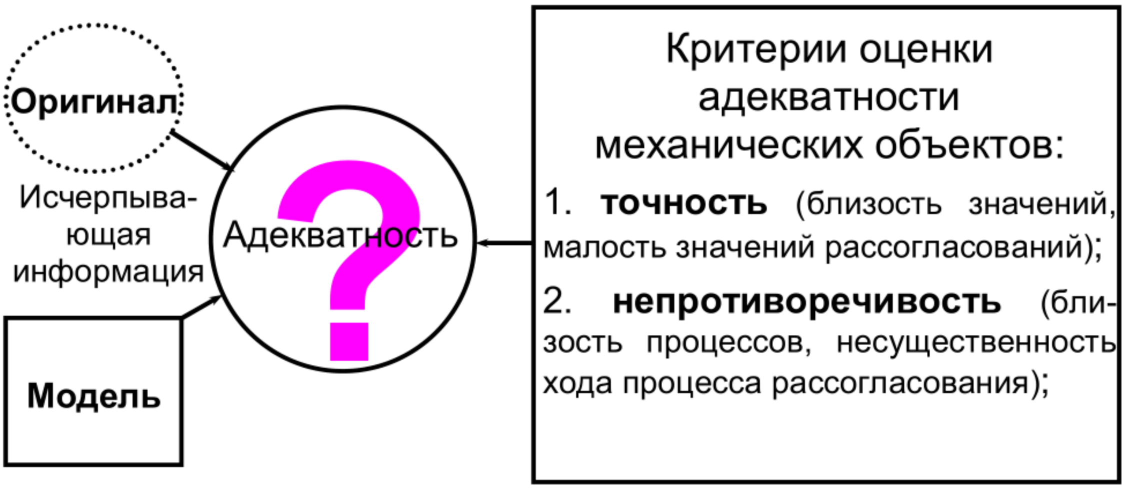


Рисунок 2 – **Оценка адекватности математической модели**

При построении критерия проверки адекватности необходимо учитывать как особенности модели, так и область ее применения:

- ограниченность допустимого диапазона изменения параметров системы (вследствие ограниченной области функционирования объекта, в которой он моделируется);

- соответствие математического описания условий реального и вычислительного экспериментов;

- возможную неоднозначность решений в вычислительном эксперименте;

- точность самого вычислительного эксперимента.

Ошибки неучета идентичности начальных и конечных условий, к сожалению, еще встречаются в технической литературе. Возможность получения неоднозначного решения в расчетах можно представить на примере квадратного уравнения, имеющего в общем случае два корня, один из которых может не иметь физического смысла и должен быть отброшен. Однако в некоторых задачах таких явных признаков может и не быть.

Точность модели определяется погрешностью – рассогласованием значений рассматриваемого параметра u:

- ***абсолютная погрешность*** $\Delta u = u_{\text{модели}} - u_{\text{оригинала}}$;

- ***относительная погрешность*** $\delta u = \frac{\Delta u}{u_{\text{оригенала}}} \cdot 100\%$;

- ***относительная приведенная погрешность*** $\delta u = \frac{\Delta u}{u_{\text{меры}}}$,

где $u_{меры}$ – некоторое характерное значение, например, $u_{меры} = |u|_{max}$.

Погрешности бывают следующих **видов**:

- грубая – недопустимая с точки зрения целей исследования;

- удовлетворительная – допустимая с точки зрения целей исследования;

- случайная – принимающая случайные значения при многократном повторении опыта в неизменных условиях (например, замер времени падения шара с Пизанской башни с помощью одного и того же секундомера);

- систематическая – принимающая неизменное значение при многократном повторении опыта в неизменных условиях (то же, что в предыдущем случае, но с испорченным секундомером, который начинает отсчет времени на 0,1 с позже пуска).

При математическом моделировании возможны погрешности, обусловленные различными причинами:

- погрешности физической абстракции (неточность физических законов и закономерностей, не учет некоторых факторов);

- погрешности математического описания:

● приближенность уравнений;

● приближенность данных;

● погрешность расчетов (погрешность установок, ЭВМ, приближенные методы расчетов);

- погрешность обработки результатов (округление результатов, графическое изображение).

Из всех перечисленных причин в пояснении нуждается лишь погрешность расчетов, которую при моделировании всегда надо учитывать.

Выясним особенности приближенных вычислений, влияющих на погрешность расчетов с помощью математических моделей. Будем определять погрешность результатов при известных погрешностях операндов Δa и Δb.

1. Погрешности суммы:

$$(a + \Delta a) + (b + \Delta b) = (a + b) + (\Delta a + \Delta b),$$

т. е. абсолютная погрешность определится:

$$\Delta(a + b) \leq |\Delta a| + |\Delta b|$$

- абсолютная погрешность суммы ограничена суммой модулей абсолютных погрешностей слагаемых; а относительная:

$$\delta(a+b) = \frac{\Delta a + \Delta b}{a+b} = \frac{\delta a \cdot a + \delta b \cdot b}{a+b}$$

но, если для определенности $\delta(a) < \delta(b)$, то

$$\frac{\delta a \cdot a + \delta a \cdot b}{a+b} < \frac{\delta a \cdot a + \delta b \cdot b}{a+b} < \frac{\delta b \cdot a + \delta b \cdot b}{a+b}$$

следовательно,

$$min\,(\delta a, \delta b) < \delta\,(a + b) < max\,(\delta a, \delta b)$$

- относительная погрешность суммы принимает значение между наибольшей и наименьшей относительными погрешностями слагаемых.

2. Погрешности разности:

$$(a + \Delta a) - (b + \Delta b) = (a - b) + (\Delta a - \Delta b),$$

т. е. абсолютная погрешность определится:

$$\Delta(a - b) \leq |\Delta a| + |\Delta b|$$

- абсолютная погрешность разности ограничена суммой модулей абсолютных погрешностей операндов; а относительная:

$$\delta(a-b) = \frac{\Delta a - \Delta b}{a-b} = \frac{\delta a \cdot a - \delta b \cdot b}{a-b}$$

т. е. **относительная погрешность разности принимает значения больше относительных погрешностей операндов, а при близких их значениях – не ограничена**. Из этого следует, что в приближенных вычислениях необходимо избегать разности близких величин, что особенно важно учитывать при программировании алгоритмов для ЭВМ.

3. Погрешности произведения:

$$(a + \Delta a) \cdot (b + \Delta b) = (a \cdot b) + (\Delta a \cdot b + \Delta b \cdot a) + (\Delta a \cdot \Delta b),$$

а если предполагать малость абсолютных погрешностей по сравнению со значениями самих величин, то абсолютная погрешность определится:

$$\Delta(a \cdot b) \approx \Delta a \cdot b + \Delta b \cdot a$$

- абсолютная погрешность произведения приближенно равна сумме перекрестных произведений абсолютных погрешностей сомножителей на смежные сомножители; а относительная:

$$\delta(a \cdot b) \approx \frac{\Delta a \cdot b + \Delta b \cdot a}{a \cdot b} = \delta a + \delta b$$

т. е. **относительная погрешность произведения приближенно равна сумме относительных погрешностей сомножителей**.

4. Погрешности деления:

$$\frac{a + \Delta a}{b + \Delta b} = \frac{a \cdot b}{(b + \Delta b)^2} + \frac{\Delta a \cdot b + \Delta b \cdot a}{(b + \Delta b)^2} + \frac{\Delta a \cdot \Delta b}{(b + \Delta b)^2}$$

т. е. абсолютная погрешность определится:

- абсолютная погрешность частного приближенно равна сумме произведений абсолютной погрешности делимого на делитель и абсолютной погрешности делителя на делимое, деленной на квадрат делителя; а относительная:

$$\delta\left(\frac{a}{b}\right) \approx \frac{\Delta a \cdot b + \Delta b \cdot a}{(b + \Delta b)^2 \frac{a}{b}}$$

т. е. **относительная погрешность частного приближенно равна сумме относительных погрешностей делимого и делителя**.

Универсальность – характеризует полноту отображения моделью изучаемых свойств реального объекта.

Экономичность модели определяется затратами ресурсов ЭВМ памяти и времени на ее реализацию и эксплуатацию.

Противоречивость требований к модели обладать широкой областью адекватности, высокой степенью универсальности и высокой экономичностью обусловливает использование ряда моделей для объектов одного и того же типа.

Элементы математической модели

На рисунке 3 приведена схема элементов математической модели.

Рисунок 3 – **Элементы математической модели**

Исходные данные

Исходные данные, заданные определенными величинами, как, например, объем бака машины, называются детерминированными.

Случайными называются величины, которые зависят от случайных факторов, такие как производительность, надежность машин и т. д.

Искомые переменные

Дискретная или целочисленная величина – величина, значения которой меняется прерывно, и образуют конечное или счетное множество.

Непрерывными называют величины, которые в заданном интервале могут принимать любые значения.

Зависимости

Зависимости между переменными, как целевой функции, так и ограничения, могут быть линейными и нелинейными. Напомним, что линейными называют такие зависимости, в которых переменные входят в первой степени, и нет их произведения. Если переменные входят не в первой степени или есть произведение переменных, то зависимости являются нелинейными.

1.2 Методы получения моделей (ММ конкретного вида)

Основные решения, касающиеся выбора вида математических соотношений, характера используемых переменных и параметров, принимает проектировщик. В тоже время такие операции, как расчет численных значений параметров модели, определение областей адекватности и другие, алгоритмизированы и решаются на ЭВМ. Поэтому моделирование элементов проектируемой системы обычно выполняется специалистами конкретных технических областей с помощью традиционных экспериментальных исследований.

Методы получения функциональных моделей элементов делят на теоретические и экспериментальные.

Теоретические методы основаны на изучении физических закономерностей протекающих в объекте процессов, определении соответствующего этим закономерностям математического описания, обосновании и принятии упрощающих предположений, выполнении необходимых выкладок и приведении результата к принятой форме представления модели.

Экспериментальные методы основаны на использовании внешних проявлений свойств объекта, фиксируемых во время эксплуатации однотипных объектов или при проведении целенаправленных экспериментов.

Моделирование имеет ряд положений и приемов, общих для получения моделей различных объектов. Достаточно общий характер имеют:

- методика макро моделирования (получение предварительных оценок систем при построении модели только основных характеристик);

● математические методы планирования экспериментов;

● алгоритмы формализуемых операций расчета численных значений параметров и определения областей адекватности.

При составлении математической модели от исследователя требуется:

● изучить свойства исследуемого объекта;

● умение отделить главные свойства объекта от второстепенных;

● оценить принятые допущения.

2 ПОСТРОЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

Построение ММ можно подразделить на стадии выбора задачи и составление (разработки) математической модели.

Постановка задачи

Выбор (постановка) задачи – важнейший вопрос. Задача должна удовлетворять следующим требованиям:

1) должно существовать как минимум два варианта ее решения; если вариантов решения нет, значит и выбирать не из чего;

2) надо четко знать, в каком смысле искомое решение должно быть наилучшим; если же мы не знаем, чего хотим, то ЭВМ помочь нам выбрать наилучшее решение не сможет.

От постановки задачи значительно зависит качество и достоверность полученных результатов, в меньшей мере и скорость их получения.

Главным на этапе постановки задачи является четкое определение и формулировка цели исследования. Здесь же определяются зависимости, подлежащие изучению по результатам моделирования, а также основные факторы (показатели), характеризующие изучаемый объект в плане поставленной цели исследования и подлежащие учету при построении математической модели.

Составление модели исследуемого объекта в общем виде (разработка формализованной математической модели)

Непосредственная разработка математической модели является завершающей стадией построения модели. Построение самой математической модели заключается в преобразовании неформального описания закономерностей и логических условий исследуемой системы (таблиц, графиков и т. п.) в описание в виде математических уравнений и неравенств, представляющих собой запись целевой функции и соответствующих ограничений в аналитической форме.

ММ в общем виде на оптимизацию может быть представлена в следующем виде:

$$F = f(x_j) \rightarrow max\ (min) \rightarrow \text{ЦФ}$$

$$g_i(x_j) = 0 \rightarrow \text{ОГР}$$

$$a_j \leq x_j \leq b_j \rightarrow \text{ГРУ}$$

$$i = 1, m; \quad j = 1, n.$$

где $f(x_j)$ – функция переменной x_j;

$g_i(x_j)$ – ограничение переменной x_j;

a_j, b_j – нижнее и верхнее предельно допустимое значение переменной x_j;

i – порядковый номер ограничений;

j – порядковый номер искомой переменной;

m – общее число ограничений;

n – общее число всех переменных;

ЦФ – целевая функция;

ОГР – ограничения;

ГРУ – граничные условия.

Ограничения – область возможных значений переменных (оптимизируемых) величин в заданных условиях изучаемой системы, внутри которых отыскивается оптимальное решение.

Граничные условия показывают предельно допустимые значения искомых переменных. В общем случае граничные условия могут быть двухсторонними $a_j \leq x_j \leq b_j$.

Вместе с тем достаточно часто возможны частные случаи:

1. В технических и экономических расчетах искомые величины, как правило, могут быть положительными или равными нулю.

В этом случае в нашей задаче принимается $a_j = 0$, $b_j = \infty$ и накладывается только требование не отрицательности $x_j \geq 0$.

2. В ряде случаев значение величины x_j задается. Если принять, что должно выполняться требование $x_j = x_j^{зад}$, то граничные условия в нашей задаче можно записать следующим образом: $x_j^{зад} \leq x_j \leq x_j^{зад}$,
где $x_j^{зад}$ – заданное значение.

Выбор критерия оптимальности

Критерий оптимальности должен быть представительным и критичным к исследуемым параметрам системы, а также наиболее простым по форме.

Представительность критерия оптимальности заключается в том, чтобы он отражал меру эффективности изучаемой системы и, как правило, был единственным.

Критичность критерия оптимальности определяется чувствительностью к изменениям исследуемых параметров; сравнительно небольшие изменения числовых значений исследуемых параметров должны вызывать относительно заметные изменения величины критерия оптимальности.

Обычно в списке критериев оптимальности технических систем фигурирует себестоимость, точность, показатели надежности, геометрические размеры, потери энергии и т. п. Любой из этих критериев может котироваться в качестве критерия оптимизации, для любого из них мы вправе конструировать целевую функцию и искать минимум или максимум. Поэтому в общем случае имеем многокритериальную задачу оптимизации, векторный критерий оптимальности и векторную целевую функцию $F = [f_1(X),\ldots\ldots, f_s(X)]$, состоящую из s компонентов. Заманчиво было бы найти такие значения переменных X в допустимой области D, чтобы все критерии одновременно были оптимальными. К сожалению, этого достичь в жизни невозможно: как правило, критерии противоречивы. Скажем, какое - либо изделие не может быть одновременно самого высшего качество и самым дешевым. За качество приходится платить, например, дорогими материалами, за меньшие потери электроэнергии – увеличенным использованием цветных металлов. Либо – либо. Достигнешь одно – потеряешь другое.

Из вышеизложенного можно полагать, что решение многокритериальных задач оптимизации связано с поиском некоторого компромисса между критериями (чтобы и волки были сыты, и овцы целы).

Существуют несколько наиболее распространенных методов сведения многокритериальных задач к однокритериальной – метод главного критерия, метод последовательных уступок, метод свертывания критериев, метод разности оценок альтернатив и др.

Метод главного критерия *применяется* тогда, когда один из критериев f_1 сильно выделяется по своей важности. Тогда на все остальные критерии (показатели) f_2, f_3,…f_k следует наложить только некоторые ограничения, потребовав, чтобы они были не меньше заданных f_2^I, f_3^I,… f_k^I. Например, конструируется рекордный скоростной самолет – при этом все остальные показатели, даже его стоимость, до некоторой степени не так важны. Будем оптимизировать этот главный критерий f_1, а остальные нельзя оставить без внимания, иначе наш супербыстрый самолет «влетит в копеечку» … Словом, ограничим, значения остальных s – 1 критериев максимально допустимыми значениями $f_{k\ max}$, k = 2, …. S. Тогда получим однокритериальную задачу оптимизации с s – 1 ограничением. Величины $f_{k\ max}$ выбираются субъективно. При таком подходе выбор разумных $f_{k\ max}$ часто требует многократного решения задачи оптимизации.

Недостатком метода главного критерия является непосредственный учет лишь одного из многих критериев. Учет остальных производится опосредовано – в виде ограничений на их допустимые значения. Отметим также, что применение этого метода на интуитивном уровне обычно наталкивается на трудности, связанные с возможным наличием нескольких «главных» критериев, находящихся в противоречии друг с другом.

Метод последовательных уступок один из путей построения компромиссного решения. При решении задачи по данному методу вначале проводится качественный анализ относительной важности частных критериев. На основании такого анализа критерии располагаются и нумеруются в порядке убывания важности. Сначала ищется решение, обращающее в максимум первый (важный) критерий $f_1 = f_1^*$. Затем назначается, исходя из практических соображений, с учетом малой точности, с которой нам известны входные данные, некоторая «уступка» Δf_1, которую мы согласны сделать для того, чтобы максимизировать второй критерий f_2. Наложим на критерий f_1 ограничение: потребуем, чтобы он был не меньше, чем f_1^* - Δf_1, и при этом ограничении ищем решение, обращающее в максимум f_2. Далее снова назначаем «уступку» в f_2, ценой которой можно максимизировать f_3 и т. д. Такой способ построения компромиссного решения хорош тем, что здесь сразу видно, ценой какой «уступки» в одном критерии, приобретается выигрыш в другом и какова величина этого выигрыша.

Этот метод позволяет значительно сузить исходное множество альтернатив, но он не всегда выявляет единственную эффективную альтернативу при решении многокритериальной задачи на максимум и требует повторения процедуры с новой величиной уступки.

Метод взвешенных сумм (частный случай метода свертывания критериев) применяется тогда когда трудно выбрать наиболее значимый критерий, т. е. если критерии можно считать количественно соизмеримыми. Тогда обычно пользуются объединением многих критериев в один обобщенный критерий f:

$$f(X) = \sum_{k=1}^{s} q_k f_k(X),$$

где $f_k(X)$ – векторный критерий.

q_k – значимость каждого признака, т. е. его весомости среди других признаков (весовой коэффициент).

Конечно, их выбор тоже нестрогий – он вызывает сомнения и споры поставщиков задачи. Выбор весовых коэффициентов существенно облегчается, когда им можно придать некоторый экономический или физический смысл. Например, одним критерием являются потери электроэнергии в некотором приборе, другим – величина токопроводящих цветных металлов. В таком случае весовым коэффициентам можно натурным образом придать экономический смысл. Пусть коэффициент q_1 (потери энергии) – стоимость единицы электроэнергии, q_2 (величины токопроводящих цветных металлов) – стоимость единицы цветных металлов; получим обобщенный критерий f – суммарные затраты, которые будем минимизировать.

Основная сложность данного метода заключается в объективно обоснованном выборе «весов важности» критериев.

Можно и дальше продолжить описание различных модификаций свертывания многих критериев. Однако вряд ли это стоит делать – от основных трудностей этого подхода невозможно избавиться. В дальнейшем будем считать, что мы умеем сводить многокритериальные задачи к привычным – скалярным, и будем рассматривать только однокритериальную оптимизацию.

Выбор ограничений

По своему происхождению ограничения могут быть теоретическими и статистическими. Теоретические, всегда справедливы, и для их получения не надо производить никаких специальных замеров. Однако на практике достаточно часто между параметрами модели нет известной функциональной зависимости.

Каждый инженер прекрасно знает, как много условий и ограничений необходимо учитывать при проектировании. В техническом задании указываются предельно допустимые значения многих характеристик проектируемого объекта, например масса не больше m_{max}, показатель надежности не меньше p_{min}, коэффициент полезного действия не меньше Y_{min} и т. д. Аналогичным образом выражаются предельные свойства конструктивных материалов, дефицит энергии, требования защиты окружающей среды, возможности имеющегося оборудования и другие условия производства. В первую очередь, конечно, следует учитывать законы природы, например сохранение массы и энергии, другие законы физики, химии, электротехники и т. п.

Довольно часто начальные требования, предъявляемые проекту, настолько высоки, что вступают в противоречие друг с другом, т. е. все их удовлетворить просто невозможно. Поэтому необходим процесс согласования технических требований.

3 ОПТИМИЗАЦИОННЫЕ МОДЕЛИ

Оптимизация – процесс выбора наилучшего варианта из множества возможных.

В самой сути человеческой деятельности заложено стремление к совершенству, а в искусстве – к идеалу, гармонии. Мы стремимся создать не просто предметы обихода, машины, здания, технологии, а оптимальные – наиболее красивые, дешевые, точные, сберегающие окружающую среду. Часто стараемся достичь наименьших размеров, легчайшего веса. В других случаях максимизируем такие показатели, как надежность, прибыль. Поэтому неудивительно, что задачи оптимизации так универсальны и широко распространены, особенно в технике и экономике.

Природа, как живая, так и неживая, изобилует примерами оптимальности. Цветок поворачивается к солнцу так, чтобы получить побольше световой энергии. Жилки в листьях деревьев, кровяные сосуды живых существ проведены так, чтобы питательные вещества доставлялись наиболее экономичным путем. Свои задачи оптимизации живая природа решает путем многочисленных экспериментов, в течение миллионов лет испытывая всевозможные варианты растительных или живых конструкций. То, что неоптимальное, отмирает, исчезает, не выдерживает конкуренции.

В отличие от природы нам не отпущено столько времени и возможностей на процесс создания. Не можем мы вслепую испытывать всевозможные варианты своих творений, бесконечно доводить и совершенствовать свои конструкции. Мы действуем сознательно и, прежде чем взяться за реализацию практических творений, обдумываем, считаем, чертим – создаем план, проект. При этом оперируем не с реальным объектом, а с его абстрактным замыслом, моделью.

Математическая модель проектируемого объекта наилучшим образом подходит для целей оптимизации, так как при этом можно обойтись без реальных дорогостоящих экспериментов, тем не менее, иметь возможность сравнивать между собой большое число вариантов.

Реальные задачи оптимизации часто трудно формулируются и трудно решаются. Затруднения возникают как при создании модели оптимизируемого объекта, так и при поиске оптимальных параметров объектов. Большое число оптимизируемых параметров, сложные зависимости между ними требуют большого объема вычислительных работ. Нередко даже современные ЭВМ оказываются в затруднении при поиске оптимальных решений.

Между потребностью решить актуальную задачу оптимизации и ее приведением к однозначной, подходящей для решения на ЭВМ форме существует значительная дистанция.

Технологический процесс – часть производственного процесса предприятия или часть рабочего процесса технологической машины. Он является важнейшей их частью, связанной с обработкой или переработкой материала с целью изменения его свойств до желаемого состояния. Технологический процесс состоит из ряда операций, выполняемых в определенной последовательности. Кроме того, технологический процесс характеризуется параметрами операций (например, режим резания, который достигается подачей, скоростью резания и припусками).

Любое изменение структуры технологических процессов (количества операций или их последовательности или замена на другую операцию или объединение операций и др.) или скорости выполнения каждой операции или то и другое вместе влечет за собой изменение производительности данной системы технологических процессов, а может быть и качество выполнения технологического процесса.

Стремление разработчиков машин, технологов, эксплуатационников и исследователей – повышение уровня технологии, при котором достигается повышение производительности данных процессов при неизменном качестве работ или его улучшении.

3.1 Технико - экономические показатели технологических процессов

Уровень технологии любого производства оказывает решающее влияние на его экономические показатели, поэтому выбор оптимального варианта технологического процесса должен осуществляться исходя из важнейших показателей его эффективности; производительности, себестоимости и качества производимой продукции.

Соответствии с методикой оценки качества промышленной продукции установлено восемь групп показателей качества.

1. Показатели назначения, характеризующие полезный эффект от использования продукции по назначению и обусловливают область ее применения;

2. Показатели надежности (безотказность, сохраняемость, ремонтопригодность и долговечность), характеризующие свойства изделия выполнять заданные функции, сохраняя во времени значения установленных эксплуатационных показателей в заданных режимах и условиях применения, ТО, ремонтов, хранения и транспортирования.

3. Показатели технологичности, характеризующие эффективность конструкторских и технологических решений, обеспечивающих высокую производительность труда при изготовлении и ремонте продукции (коэффициент сборности, коэффициент расхода материалов, удельные показатели трудоемкости);

4. Показатели стандартизации и унификации, показывающие степень использования стандартизированных изделий и уровень унификации составных частей изделий;

5. Эргономические показатели, учитывающие комплекс гигиенических, антропологических, физиологических, психологических свойств человека, проявляющихся в производственных и бытовых процессах;

6. Эстетические показатели, характеризующие такие свойства продукции, как оригинальность, выразительность, соответствие стилю, среде и т. п.;

7. Патентно - правовые показатели, характеризующие степень патентоспособности изделия в стране и за рубежом, а также его патентную чистоту;

8. Экономические показатели, отражающие затраты на разработку, изготовление и эксплуатацию изделий, а также экономическую эффективность эксплуатации.

Основные этапы решения практической задачи принятия оптимальных решений:

1. Постановка задачи;

2. Построение математической модели;

3. Выбор одного или нескольких из существующих методов решения задачи (если необходимо – создать новый метод);

4. Решение задачи (составление программы решения задачи и, воспользовавшись компьютером, программу отлаживает), проводит необходимые вычисления и получает ответы решаемой задачи.

3.2 Основные элементы теории оптимизации

Целевая функция – функция, основных искомых переменных задачи математического программирования, экстремальные значения которой ищутся в рассматриваемой задаче. Целевая функция включает следующие элементы: критерий оптимальности, параметры и переменные.

Критерий оптимальности – принятый показатель меры эффективности исследуемой системы, величина которого при экстремальном значении целевой функции (максимальном или минимальном) определяет оптимальное решение для заданных условий, т. е. оптимальные значения переменных в модели.

Переменные – величины, оптимальные значения которых необходимо найти в процессе решения модели.

Параметры – постоянные величины, которые в процессе всего решения остаются неизменными и в модели, как правило, представлены коэффициентами при переменных или свободными членами в уравнениях и неравенствах.

Поиск минимума и максимума – алгоритмы оптимизации, приспособленные для поиска максимума, другие – для минимума. Однако независимо от типа решаемой задачи на экстремум можно пользоваться одним и тем же алгоритмом, так как задачу минимизации можно легко превратить в задачу на поиск максимума, поменяв знак целевой функции на обратный.

Множество допустимых решений (МДР) – пространство решения. Так называется область, определяемая всеми n проектными параметрами. Пространство решения обычно ограничено рядом условий, связанных с физической сущностью задачи.

Локальный и глобальный экстремум. Экстремум – понятие, объединяющее понятия максимума и минимума. На рисунке 4 функция $f(x)$ принимает максимальное значение в вершинах A и C. При этом $C > A$. В таком случае говорят, что точка А является локальным максимумом, а точка C – глобальным. Аналогично функция $f(x)$ принимает минимальное значение в точках D, B, E. При этом $D < B < E$. В этом случае D будет глобальным минимумом, а B и E – локальными минимумами. Значит, глобальным максимумом (минимумом) называют такой максимум (минимум), который больше (меньше) всех остальных.

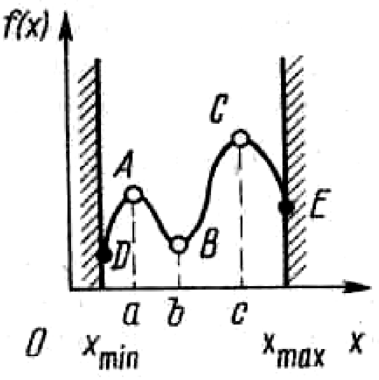


Рисунок 4 – **Максимум и минимум функции**

Оптимум и экстремум. Оптимум, так же как и экстремум, может быть как *локальным*, так и *глобальным*. Максимум и минимум целевой функции объединяются понятием экстремум (рисунок 5а и 5б).

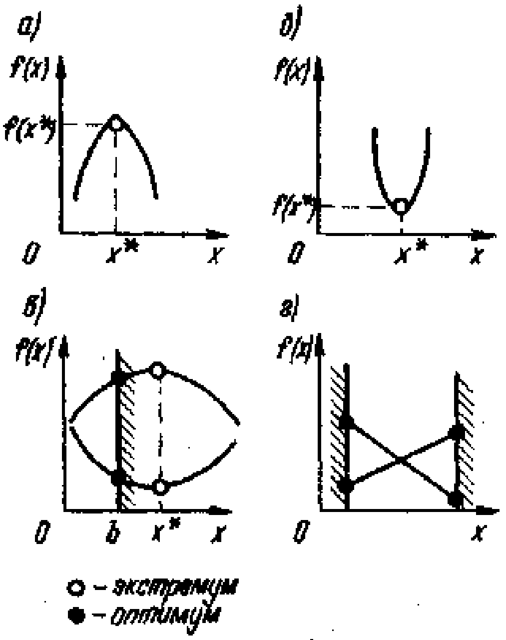


Рисунок 5 – **Экстремум и оптимум функции**

В практических задачах оптимизации каждая переменная x_j не может изменяться от нуля до бесконечности. Поэтому в таких случаях задают граничные условия $a_j \le x_j \le b_j$, в пределах которых может находиться искомое значение x_j, при котором целевая функция приобретает наибольшее или наименьшее значение. Достаточно часто оказывается, что наибольшее или наименьшее значение целевой функции худшее, чем экстремум, находится на границе (как это показано на рисунке 5в). Что касается линейных задач, то для них наибольшее или наименьшее значение целевой функции находится только на границе (рисунок 5г). Наибольшее (или наименьшее) значение функции на границе не удовлетворяет приведенному выше определению максимума (или минимума). Поэтому наибольшее или наименьшее значение функции без учета того, где находится такое значение – внутри заданного интервала или на его границе – называют не экстремумом, а оптимумом.

Оптимум более широкое понятие, чем экстремум. Если экстремум есть не у всех функций, то в практических задачах оптимум есть всегда.

3.3 Классы задач оптимизации

Сочетание различных элементов математической модели приводит к различным классам задач оптимизации. Различные классы задач требуют разных методов решения, а, следовательно, и разных программных средств.

Часто встречающиеся классы задач оптимизации приведены в таблице1.

Исходные данные	**Искомые переменные**	**Зависимости**	**Задача**	**Обозначение**
Детерминированные	Непрерывные	Линейные	Линейного программирования	ЛП
	Целочисленные (дискретные)	Линейные	Целочисленного (дискретного) программирования	ЦЧП
	Непрерывные, целочисленные (дискретные)	Нелинейные	Нелинейного программирования	НЛП
	Непрерывные, целочисленные (дискретные)	Нелинейные, линейные	Многокритериального программирования	МКП
Случайные	Непрерывные	Линейные, нелинейные	Стохастического программирования	СТП

Примечание: программирование – выбор оптимальной программы действий.

Задачи линейного программирования

Задача линейного программирования, которая является частным случаем задачи оптимизации, записывается следующим образом:

$$\begin{cases} F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \rightarrow \min(\max) \\ g_1(x_1, x_2,.., x_n) \le b_1, \\ g_2(x_1, x_2,...x_n) \le b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ g_m(x_1, x_2,...x_m) \le b_ь, \\ a_j \le x_j \le b_j,\ j = 1,2,...n. \end{cases}$$

где a_j,b_j – нижнее и верхнее предельно допустимое значение переменной x_j.

Задача линейного программирования обычно встречаются при решении вопросов оптимального планирования производства с ограниченным количеством ресурсов, при определении оптимального плана перевозок (транспортные задачи), оптимизации сетевых графиков и т. д.

Задачи дискретного программирования

Рассмотрим общую задачу дискретного программирования:

$$\begin{cases} F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \rightarrow \min(\max) \\ g_1(x_1, x_2,..., x_n) \le b_1, \\ g_2(x_1, x_2,..., x_n) \le b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ g_m(x_1, x_2,..., x_n) \le b_m, \\ \vec{x} \ э\ D, \end{cases}$$

где D – некоторое множество.

Если множество Д является конечным или счетным, то условие $\vec{x} \in D$ – это условие дискретности, и данная задача является задачей дискретного программирования.

Если вводится ограничение x_j – целые числа (j = 1,2,…n), то приходят к задачам целочисленного программирования, которое является частным случаем дискретного программирования.

Задачи дискретного программирования возникают, когда необходимо определить оптимальную структуру производственной программы предприятия, оптимизация раскроя материала (металла на заготовки данной конфигурации и размеров, дерева при лесопилении), оптимизация проектирования машин и оборудования, оптимизация системы сервиса и ТО МТП и др.

Задачи нелинейного программирования

В задачах нелинейного программирования допустимое множество решений может быть невыпуклым, несвязным, т. е. иметь довольно сложную структуру. Глобальный экстремум целевой функции может достигаться как на границе области допустимых решений, так и внутри ее. Кроме того, наряду с глобальным экстремумом могут существовать локальные экстремумы, что делает задачу нелинейного программирования гораздо сложнее задачи линейного программирования.

Нелинейное программирование можно разделить на два раздела: классический и неклассический.

Классические разделы нелинейного программирования

Задачи нелинейной оптимизации с точки зрения методов решения делятся на два класса:

1) задачи безусловной оптимизации;

2) задачи условной оптимизации.

Задачами безусловной оптимизации называют такие задачи, в которых задана одна целевая функция $F = f(x_j) \to max\ (min)$. Такие задачи носят чисто теоретический характер, так как на практике граничные условия задаются всегда. В задачах безусловной оптимизации, поскольку нет граничных условий, понятия оптимума и экстремума совпадают. Поэтому для таких задач нахождения оптимума применяют методы нахождения экстремума.

Задачи безусловной оптимизации в зависимости от числа переменных бывают однопараметрическими и многопараметрическими.

Задачами условной оптимизации называют такие задачи, когда кроме целевой функции задаются некоторые дополнительные условия, которые должны быть выполнены:

$$\begin{cases} F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min(\max) \\ g_1(x_1, x_2, ..., x_n) \le b_1, \\ g_2(x_1, x_2, ..., x_n) \le b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots, \\ g_m(x_1 x_2, ..., x_n) \le b_m, \\ d_j \le x_j \le D_j,\ j = 1,2,...\ n. \end{cases}$$

где d_j, D_j – нижнее и верхнее предельно допустимое значение.

Посмотрим, как введение дополнительных условий влияет на значение оптимума. Из рисунка 6 видно, что граничные условия $x \le b$, где $b < x^*$, ухудшают значение оптимума.

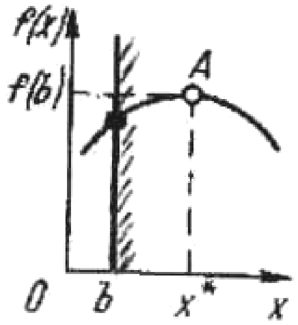


Рисунок 6 – **Граничные условия**

Ограничения могут быть заданы как в виде уравнений, так и в виде неравенств. Некоторые варианты ограничений приведены на рисунке 7.

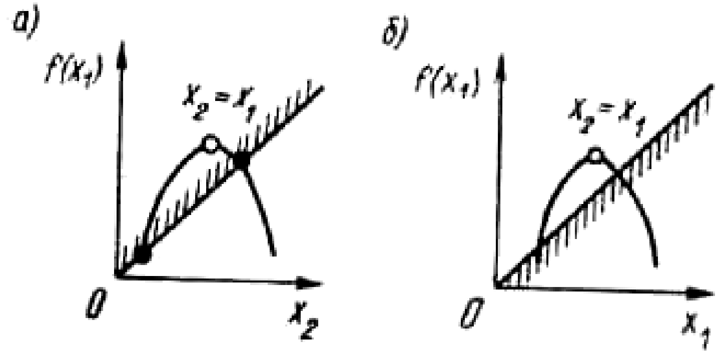


Рисунок 7 – **Варианты ограничений**

Из этих рисунков видно, что введение ограничений либо влияет на оптимум, либо ухудшает его. Таким образом, подтверждается вывод, сделанный для линейных задач, что введение дополнительных условий не улучшает оптимального решения, а в ряде случаев может даже привести к несовместимости.

Неклассические разделы нелинейного программирования

Выпуклое программирование – совокупность методов решения нелинейных экстремальных задач с выпуклыми целевыми функциями и выпуклыми системами ограничений. Общая задача выпуклого программирования состоит в отыскании такого вектора $\boldsymbol{x}$, который доставляет минимум выпуклой функции $f_1(x)$ или максимум вогнутой функции $f_2(x)$.

Динамическое программирование служит эффективным методом решения задач оптимизации дискретных многостадийных процессов, для которых критерий оптимальности задается как аддитивная функция критериев оптимальности отдельных стадий.

Геометрическое программирование – специальный метод решения специального класса задач НЛП, в которых критерий оптимальности и ограничения задаются в виде позиномов – выражений, представляющих собой сумму произведений степенных функций от независимых переменных. С подобными задачами иногда приходится сталкиваться в проектировании.

Задачи нелинейного программирования широко распространены в технике.

Задачи стохастического программирования

Математическая модель задачи оптимизации включает в себя три элемента:

1) целевую функцию;

2) ограничения;

3) граничные условия. При этом допустим ряд вариантов задач стохастического программирования.

Если коэффициенты c_j в целевой функции – случайные величины, то возможно две постановки задачи оптимизации:

1. Максимизация (минимизация) математического ожидания (среднего значения) целевой функции, которая называется M – постановкой: $M\,[L] \rightarrow max\,(min)$;

2. максимизация вероятности получения максимального (минимального) значения, которая называется P – постановкой: $P\,[L_{max(min)}] \rightarrow max$.

Если случайными являются величины a_{ij} и b_i, входящие в ограничения, то i - е ограничение $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i$ записывается так: $P\left[\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i\right] \ge p_i$, где p_i – заданная вероятность, с которой должно выполняться i - е ограничение.

Запись граничных условий может быть выполнена в двух вариантах.

Если в ограничении d_j, D_j – детерминированные величины, то ограничение остается в виде $d_j \le x_j \le D_j$.

Если d_j, D_j – случайные величины, то рассматриваются два ограничения

$$P\,[x_j \le D_j] \ge p_i,\ P\,[x_j \le d_j] \ge p_i.$$

В практических задачах граничные условия d_j, D_j случайными величинами являются крайне редко. Объединяя целевую функцию, ограничения и граничные условия, можно сформулировать две постановки задачи стохастического программирования:

$$M - постановка \quad \begin{cases} M[L] \rightarrow \max(\min), \\ P\left[\sum a_{ij}x_o \le b_i\right] \ge p_i, \\ d_j \le x_j \le D_j, \\ j = 1,2,\ldots n,\ \mathrm{i} = 1,2,\ldots \mathrm{m}; \end{cases}$$

$$P - постановка \quad \begin{cases} P[L_{\max,\min}] \rightarrow \max, \\ P\left[\sum a_{ij}x_j \le b_i\right] \ge p_i \\ d_j \le x_j \le D_j, \\ j = 1,2,\ldots n,\ \mathrm{i} = 1,2,\ldots \mathrm{m}. \end{cases},$$

Обе постановки представляют собой задачи нелинейного программирования.

Практические задачи в моделях, отдельные или все параметры которых являются случайными величинами или точные значения их переменных трудно определить, решаются методами стохастического программирования.

Задачи многокритериального программирования

В задачах, которые были рассмотрены до сих пор, был только один критерий оптимальности, одна цель, однако зачастую свести задачу к одному критерию достаточно трудно, так как целей может быть много. В этом случае оптимизацию производят по нескольким частным критериям $Q_i(\vec{x})(i=1,2,...s)$, а полученные задачи называют задачами многокритериальной или векторной оптимизации. Многокритериальная оптимизация представляет собой попытку получить наилучшее значение для некоторого множества характеристик рассматриваемого объекта, то есть найти некоторый компромисс между теми частными критериями $Q_i(\vec{x})(i=1,2,...,s)$, по которым требуется оптимизировать решение.

Постановку задачи можно представить следующим образом:

$$\begin{cases} Q_1(\vec{x}) \to \min(\max), \\ Q_2(\vec{x}) \to \min(\max), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ Q_s(\vec{x}) \to \min(\max), \\ g_1(x_1, x_2, \dots x_n) \le b_1, \\ g_2(x_1, x_2, \dots x_n) \le b_{2,} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ g_m(x_1, x_2, \dots, x_n) \le b_m, \\ d_j \le x_j \le D_j,\ j=1,2,\dots,n \end{cases}$$

Различные методы решения подобных задач представлены в литературе, где подробно описывается метод свертывания векторного критерия

$$\vec{Q}(\vec{x}) = (Q_1(\vec{x}), Q_2(\vec{x}), \dots, Q_s(\vec{x})).$$

3.4 Выбор метода решения задач

Методы математического программирования

К математическому программированию относится: линейное, нелинейное, стохастическое, дискретное и многокритериальное программирование, теория графов и теория игр, задачи теории массового обслуживания и др.

Методы решения задач линейного и дискретного программирования

Задачи линейного программирования можно решать аналитическими (численными) и графическими методами. Аналитические методы, которые представляют собой последовательность вычислений по некоторым правилам, являются основой для решения задачи на ЭВМ. Их единственный недостаток заключается в том, что в отличие от графических методов они недостаточно наглядны.

Графические же методы достаточно наглядны, но они пригодны лишь для решения таких задач, в которых число переменных $n \leq 3$.

К аналитическим методам решения задач линейного программирования следует отнести симплекс - метод, распределительный метод, метод линейных ветвлений и др.

Наиболее известным и широко применяемым на практике для решения общей задачи линейного программирования является симплекс - метод. Распределительный метод широкое распространение получил при решении задач связанных с распределением ресурсов по работам, которые необходимо выполнить.

Методы решения задач дискретного программирования

В задачах дискретного программирования область допустимых решений является невыпуклой и несвязной. Поэтому отыскание решения таких задач сопряжено со значительными трудностями.

Методы решения задач дискретного программирования по принципу подхода к проблеме можно разделить на две группы:

1) методы отсечения или отсекающих плоскостей;

2) метод ветвей и границ.

Математические модели задач дискретного программирования по структуре модели делят на два класса:

1) целочисленные задачи;

2) экстремальные комбинаторные задачи.

Для решения задач с неделимостями применяются методы отсечения (в частности метод Гомори) и модифицированный метод ветвей и границ для задач целочисленного программирования.

Экстремальные комбинаторные задачи решаются методом ветвей и границ, разработанным для дискретного программирования.

Метод Гомори (частный случай симплекс-метода) занимается задачами линейного программирования с целочисленными переменными. Сущность метода заключается в построении ограничений, отсекающих нецелочисленные решения задачи линейного программирования, но не отсекающих, ни одного целочисленного плана.

Методы решения задач нелинейного программирования

В отличие от ЛП для задач НЛП нет универсального метода решения.

На практике при решении задач на оптимизацию в основном применяются:

- аналитические методы – если функции $f(x)$, $g_j(x)$, $j = 1,\ldots, p$ дважды непрерывно дифференцируемы на множестве R^n);

- вычислительные (численные) – если функция $f(x)$ не имеет непрерывных производных до второго порядка включительно; если сама функция задана неявно, а о целевой функции известно, лишь то, что ее значение может быть вычислено с нужной точностью;

- графический – если число переменных $n \leq 3$.

Аналитические методы решения задач используют методы дифференциального и вариационного исчисления, принцип максимума и др.

Методы дифференциального исчисления применимы, в случае если модель выражена функцией в форме аналитической зависимости, которая дифференцируется по всем переменным, а задача не должна иметь ограничений.

Методы вариационного исчисления позволяют исследовать условия экстремума величин, значения которых определяются выбором одной или нескольких функций, которыми заданы независимые переменные. При этом аналитические функции независимых переменных должны быть непрерывными и дифференцируемыми, а задача не должна иметь ограничений.

Принцип максимума применяется для решения «неклассических» вариационных задач оптимального управления, характеризующихся наличием ограничений на переменные.

Вычислительные методы используют методы условного градиента, прямого поиска, множителей Лагранжа, штрафных функций и др.

Задачи безусловной однопараметрической оптимизации решаются методами одномерной оптимизации (равномерного поиска, деления интервала пополам, дихотомии, золотого сечения, Фибоначчи, квадратичной интерполяции и др.).

Задачи безусловной многопараметрической оптимизации решаются методами конфигураций, деформирующего многогранника, Розенброка, сопряженных направлений, случайного поиска и др.

Численные методы поиска безусловного экстремума при решении задач безусловной оптимизации используют методы нулевого, первого (градиентного) и второго (метод Ньютона) порядков. Чем выше порядок методов, тем больше вычислений на каждой итерации, но тем меньше требуется итераций и, естественно наоборот. Наиболее распространенными являются методы второго порядка (градиентные методы). Это объясняется тем, что они не требуют на каждой итерации больших вычислений, так как вычисляется только целевая функция и ее первые производные, а с другой – у этих методов достаточно хорошая сходимость.

Для решения большинства практических задач нелинейного программирования условной оптимизации используются численные методы, которые делятся на две группы.

1. Методы, использующие преобразование задачи условной оптимизации в последовательность задач безусловной оптимизации путем введения в рассмотрение вспомогательных функций: *методы последовательной безусловной минимизации* (метод штрафов, метод барьерных функций, комбинированный метод штрафных функций, метод множителей, метод точных штрафных функций).

2. Методы непосредственного решения задачи условной оптимизации, основанные на движении из одной допустимой точки, где выполнены все ограничения к другой допустимой точке с лучшим значением целевой функции. Эти методы часто называются методами возможных направлений (метод проекции градиента, метод Зонтендейка и др.).

Задачи нелинейного программирования, в которых критерий оптимальности и ограничения задаются в виде выражений, представляющих собой сумму произведений степенных функций от независимых переменных (позиномов) решаются методом геометрического программирования (специальным классом задач нелинейного программирования).

Методы решения задач стохастического программирования

Стохастическое программирование – совокупность методов решения оптимизационных задач вероятностного характера. Это означает, что либо параметры ограничений (условий) задачи, либо параметры целевой функции, либо те и другие являются случайными величинами. Такие ситуации типичны для реальных задач, когда трудно определить точные значения переменных.

Решения задач стохастического программирования:

- одноэтапное – применяются методы решения задач обычного нелинейного программирования или детерминированной задаче выпуклого программирования (при линейной целевой функции и квадратичными ограничениями);

- двухэтапное – применяются методы решения задач условного нелинейного программирования;

- многоэтапное – применяются методы решения задач динамического программирования.

3.5 Решение задач математического программирования

Рассмотрим методы решение задач линейного и нелинейного программирования

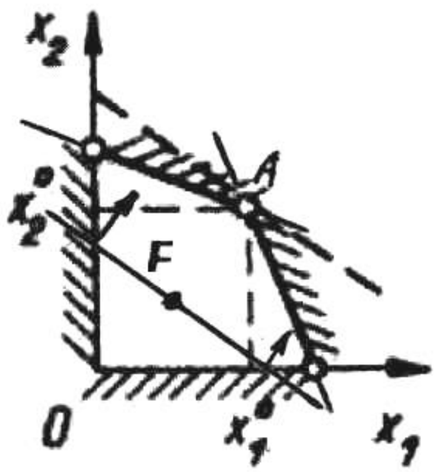
Задачи линейного программирования

Графический метод решения задачи

Изобразим систему ограничений и граничных условий графически.

Многоугольник образованный приведенными ограничениями и граничными условиями – область допустимых решений (ОДР). Координаты каждой точки ОДР представляют собой допустимое решение этой задачи.

Если мы хотим найти оптимальное решение, то должны принять целевую функцию.



Зададимся какой - либо точкой F ОДР и определяем значение целевой функции в этой точке. Строим начальную линию целевой функции, проходящую через эту точку. Если осуществлять перемещение линии целевой функции параллельно ее начальному положению, то легко можно убедиться, что оптимум находится в крайней точке (последнее касание линии целевой функции и ОДР – максимальное (минимальное) значение целевой функции).

Если линия уровня целевой функции будет параллельна некоторой грани области допустимых решений, то получим бесконечное множество решений.

Когда область допустимых значений не ограничена, то может оказаться, что задача линейного программирования не будет иметь решений.

На основании графического метода можно сделать исключительно важный вывод для задач линейного программирования: *оптимальное решение выбирается из координат вершин МДР* (*множества допустимых решений*), *образованного ограничениями задачи.*

На этом выводе базируется аналитический метод решения задач линейного программирования, который заключается в следующем:

1) найти вершины МДР, как точки пересечения ограничений;

2) определить последовательно значения целевой функции в вершинах;

3) вершина, в которой целевая функция приобретает оптимальное (максимальное или минимальное) значение, является оптимальной вершиной;

4) координаты этой вершины и являются искомыми оптимальными значениями переменных.

Эти правила, сформулированные на основании графического решения задачи в двумерном и трехмерном пространстве, справедливы и для n - мерного.

В этом случае МДР представляет собой многогранник. Координаты той вершины, в которой целевая функция имеет максимальное (или минимальное) значении, являются оптимальным решением задачи.

Аналитический метод решения задачи (*Симплекс - метод*)

Этот метод применим к любой задаче линейного программирования в канонической форме.

Найти максимум функции

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \qquad (3.1)$$

при ограничениях

$$\sum a_{ij} x_j = b_i, \ i = 1, \ldots, m; \ m < n, \qquad (3.2)$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \ldots, n. \qquad (3.3)$$

При этом совместная система линейных уравнений должна быть приведена методом Гаусса - Жордана к виду

$$\begin{aligned} x_1 \quad &+ a_{1\,m+1} x_{m+1} + \ldots a_{1\,s} x_s + \ldots a_{1\,n} x_n = b_1, \\ x_k \quad &+ a_{k\,m+1} x_{m+1} + \ldots a_{ks} x_s + \ldots a_{k\,n} x_n = b_k, \\ x_m \quad &+ a_{m\,m+1} x_{m+1} + \ldots a_{m\,s} x_s + \ldots a_{m\,n} x_n = b_m. \end{aligned} \qquad (3.4)$$

Симплекс - метод подразумевает последовательный перебор всех вершин области допустимых значений с целью нахождения той вершины, где функция принимает экстремальное значение. Направленность перебора предполагает следующую организацию вычислительного процесса:

1) нахождение начального базисного решения;

2) переход от одного базисного решения к другому таким образом, чтобы обеспечить возрастание $f(x)$.

Способы нахождения начального базисного решения

Первый способ. Начальное базисное решение в симплекс - методе определяется по следующему правилу: за начальное базисные переменные берутся те, m переменных, при которых коэффициенты в уравнениях 3.1 образуют единичную матрицу. Такой ситуации можно добиться, используя преобразования Гаусса - Жордана и тогда начальное базисное решение имеет вид:

$$x_i = b_i, \ i = 1, \ldots, m; \quad x_{m+1} = \ldots = x_n = 0.$$

Второй способ. Осуществляется переход к М - задаче. Задача 3.1 – 3.3 записывается в расширенной форме, когда в каждое из уравнений 3.2 записывается по одной новой переменной, которые называются искусственными:

$$f(x)=\sum_{j=1}^{n}c_j x_j - M\sum_{i=1}^{m}x_{n+1}\to \max\,; \qquad (3.5)$$

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j + x_{n+1}=b_i\,,\ i = 1,\ \ldots,\ m; \qquad (3.6)$$

$$x_j \ge 0;\ J = 1,\ldots,\ n;\ \ x_{n+1} \ge 0;\ i = 1,\ldots m. \qquad (3.7)$$

Задача 3.5 - 3.7 называется М - задачей. Целевая функция содержит дополнительное слагаемое $-M\sum_{i}^{m}x_{n+1}$, где М > 0 – достаточно большое число. Назначение этого слагаемого состоит в том, чтобы в ходе решения задачи вывести искусственные переменные из состава базисных. Если в результате решения задачи окажется, что искусственные переменные входят в состав базисных и их значения не равны нулю, то это означает, что ограничения 3. 2 несовместимы.

Переменные $x_{n\,+\,1}$ являются базисными и начальное базисное решение имеет вид

$$x_{n+1} = b_i,\ i = 1,\ldots,\ m;\ \ x_1 = \ldots = x_n = 0.$$

Решение задачи симплекс - методом осуществляется в два этапа:

1. нахождение допустимого базисного решения системы ограничений или установление факта ее несостоятельности;

2. нахождение оптимального решения.

При этом каждый этап может включать несколько шагов, соответствующих тому или иному базисному решению.

Допустимым базисным решением называют решение, при котором значение базисных переменных системы 3.4 (переменных входящих только в одно уравнение системы) полученных при придании нулевых значений свободным (остальным) переменным системы 3.4 неотрицательны.

Если же первое базисное решение оказалось допустимым, то проверяют его оптимальность (все вектора симплекс - разности в текущем базисе должны быть неотрицательны (при максимизации) и отрицательны (при минимизации/. Если оно не оптимально, то, осуществляется переход к другому, обязательно допустимому базисному решению.

Если первое найденное базисное решение окажется недопустимым, то с помощью симплекс - метода осуществляется переход к другим базисным решениям, которые приближают нас к области допустимых решений, пока на коком - то шаге решения, либо базисное решение окажется допустимым и к нему применяют алгоритм симплексного метода (осуществляют проверку на оптимальность), либо мы убеждаемся в противоречивости системы ограничений.

Симплекс - метод носит чисто алгоритмический характер, что позволяет его реализовать на ЭВМ. Задачи же с небольшим числом переменных и ограничений могут быть решены симплексным методом вручную.

Для организации вычислений вручную используется формальная система записи переменных задачи линейного программирования, называемая симплекс-таблицей. В литературе представлено несколько различных форм симплекс-таблицы.

Решение задач нелинейного программирования

Поиск безусловного экстремума классическими методами решения задач (методы дифференциального исчисления)

Для использования этих методов необходимо, чтобы модель была выражена функцией в форме аналитической зависимости, которая дифференцируется по всем переменным, а задача не должна иметь ограничений.

Например, пусть задана функция одной переменной $y = f(x)$.

Чтобы определить экстремум, необходимо первую производную данной функции приравнять к нулю и найти корни этого уравнения $f(x) = df(x) / dx = 0$.

Для определения максимума или минимума функции необходимо найти вторую производную.

Если $f^{||}(x) = d^2 (f \bar{x}) / dx^2 < 0$, то имеем максимум.

Если $f^{||}(x) = d^2 (f \bar{x}) / dx^2 > 0$, то имеем минимум.

Если $f^{||}(x) = d^2 (f\ \bar{x}) / dx^2 = 0$ и ближайшая производная $f^{iii}(x) = 0$, то функция не имеет экстремума.

Критические значения аргумента (корни уравнения) определяются на всем промежутке изменения, затем вычисляются значения функции, включая ее значения на концах промежутка, в точках разрыва функции и в точках разрыва ее производной. На основе сопоставления полученных значений находят наибольшее и наименьшее значение.

При наличии функции нескольких переменных решается система уравнений, представляющих собой частные производные функции по переменным.

В этом случае решается система уравнений $df(x_1,x_2)/dx_1 = 0$; $df(x_1,x_2)/dx_2 = 0$.

Наибольшее или наименьшее значение функции нескольких переменных на исследуемом промежутке определяется так же, как и в случае функции с одной переменной.

При значительном количестве переменных решение практически невозможно. В этом случае используются численные методы математического программирования.

Поиск условного экстремума

Наиболее простой случай условной оптимизации имеет вид:

$$F = f(x_j) \rightarrow min;\ a_j \le x_j \le b_j,$$

т. е. на каждое переменное введены граничные условия.

Такая задача условной оптимизации решается следующим образом: производится поиск вершины, как в случае безусловной оптимизации. В том случае, если в ходе поиска значение переменной x_j на k - й итерации (один шаг цикла поиска оптимума) выходит на (или за) нижнюю границу, т.е. оказывается $x_j^k \le a_j$, то в качестве оптимального значения принимается $x_j^* = a_j$ и поиск продолжается по остальным переменным. Аналогично осуществляется поиск для верхней границы. В случае $x_j^k \ge b_j$ принимается $x_j^k = b_j$. Назначение граничных условий, если оно не задается содержанием задачи, должно удовлетворять двум противоположным требованиям. С одной стороны интервал b_j - a_j должен быть больше, чтобы в нем оказалась искомая величина, а с другой – желательно иметь не очень большим, чтобы нахождение вершины требовало не большого числа итераций. Большое число итераций не только увеличивает продолжительность решения задачи, но и приводит к тому, что всегда присутствующие ошибки вычислений становятся соизмеримыми с искомыми величинами. Чтобы выйти из такого противоречия, можно рекомендовать назначить небольшой интервал b_j - a_j, решить задачу и затем определить, как назначенные границы влияют на полученный результат.

Перейдем теперь к общему случаю условной оптимизации. Таким общим случаем, как мы знаем, является задача:

$$F = f(x_j) \rightarrow \min;$$

$$q_i(x_j) = 0;$$

$$a_j \leq x_j \leq b_j.$$

Есть ряд достаточно сложных методов решения таких задач. Мы рассмотрим идею только одного из них, так называемого метода штрафных функций.

Метод штрафных функций

Данный метод основан на преобразовании исходной задачи с ограничениями в одну или последовательность задач безусловной оптимизации. С помощью функций, задающих ограничения, строится так называемый штраф, который добавляется к целевой функции исходной задачи так, что нарушение какого - либо из ограничений становится невыгодным с точки зрения полученной безусловной оптимизации. Новая целевая функция записывается следующим образом:

$$\Phi(x_j) = f(x_j) + \Psi[q_i(x_j)] \rightarrow min, \quad (3.8)$$

где $\Psi[q_i(x_j)]$ – штрафная функция.

Вводимая штрафная функция $\Psi[q_i(x_j)]$ должна удовлетворять следующим требованиям:

= 0 при x_j в ОДР;

$$\Psi\,[q_i\,(x_j)]\;\Big| \tag{3.9}$$

>0 при x_j вне ОДР.

Поясним это, помня, что ОДР – это область допустимых решений. Возможным видом штрафных функций может быть

$$\Psi\,[q_i\,(x_j)] = M\sum_{i=1}^{m} q_i^2((x_j), \tag{3.10}$$

где М – большое число.

Так, если ожидаемое оптимальное значение целевой функции порядка единиц, то можно принять $M = 1000$.

Рассмотрим условие (3.9). Когда x_j находится в ОДР, выполняются все ограничения. Значит, $q_i\,(x_j) = 0$. При этом штрафная функция (3) равна нулю и новая целевая функция (1) оказывается равной заданной, т. е.

$$\Phi\,(x_j) = f\,(x_j) \rightarrow min$$

Если x_j не находится в ОДР, при этом, следовательно не выполняются ограничения, т. е. $q_i\,(x_j) \neq 0$. Значит, $q_i^2\,(x) > 0$, а большое число М приводит к тому, что в новой целевой функции (1) штрафная функция (3.10) оказывается существенно больше заданной целевой функции $f\,(x_j)$. Поэтому в ходе минимизации благодаря большему градиенту в первую очередь будет уменьшаться штрафная функция $\Psi\,[q_i\,(x_j)]$, пока она не станет равной нулю, т. е. пока значения x_j не войдут в ОДР. Иными словами, пока мы не получим допустимого решения. А далее начнется процесс минимизации заданной целевой функции, о чем сказано выше.

Степанов Николай Васильевич

МОДЕЛИРОВАНИЕ В АГРОИНЖЕНЕРИИ

Молодежный, 2020

Учебное пособие
для студентов инженерного факультета
направление подготовки 35.04.06 Агроинженерия