

Документ подписан простой электронной подписью  
Информация о владельце:  
ФИО: Дмитриев Николай Николаевич  
Должность: Ректор  
Дата подписания: 17.06.2022 10:41:06  
Уникальный программный ключ:  
f7c6227919e4cdbfb4d7b682991f8553b37cafb

Министерство сельского хозяйства Российской Федерации  
Иркутский государственный аграрный университет  
имени А.А. Ежевского

Кафедра информатики и математического моделирования

Утверждаю

26.03.2021г.

Зав. кафедрой к.т.н., доцент  
Барсукова М.Н.

## **ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ ДЛЯ ПРОВЕДЕНИЯ ТЕКУЩЕЙ АТТЕСТАЦИИ ПО УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ**

**Математическое моделирование лесных экосистем**

Направление подготовки (специальность) 35.04.01 – Лесное дело

---

Направленность (профиль) Лесное дело  
(уровень магистратуры)

Форма обучения: очная, заочная  
1 курс, 2 семестр/1 курс

## 1. ТРЕБОВАНИЯ К РЕЗУЛЬТАТАМ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

Код компе-	Результаты освоения ОП	Индикаторы компетенции	Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине
УК-4	Способен применять современные коммуникативные технологии, в том числе на иностранном(ых) языке(ах), для академического и профессионального взаимодействия	ИД-3 <sub>УК-4</sub> Демонстрирует интегративные умения, необходимые для эффективного участия в академических и профессиональных дискуссиях	<b>знать:</b> интегративные умения, необходимые для эффективного участия в академических и профессиональных дискуссиях <b>уметь:</b> эффективно принимать участие в академических и профессиональных дискуссиях <b>владеть:</b> умениями, необходимыми для эффективного участия в академических и профессиональных дискуссиях
ОПК-3	Способен разрабатывать и реализовывать новые эффективные технологии в профессиональной деятельности	ИД-2 <sub>ОПК-3</sub> Анализирует, оценивает эффективность и совершенствует технологии в области лесного и лесопаркового хозяйства.	<b>знать:</b> технологии в области лесного и лесопаркового хозяйства. <b>уметь:</b> создавать условия для реализации современных технологий в области лесного и лесопаркового хозяйства. использовать электронные ресурсы для получения информации по теме исследования; <b>владеть:</b> оценкой эффективности и совершенствует технологии в области лесного и лесопаркового хозяйства
		ИД-3 <sub>ОПК-3</sub> - Выбирает или создает условия для реализации современных технологий в области лесного и лесопаркового хозяйства.	<b>знать</b> условия для реализации современных технологий в области лесного и лесопаркового хозяйства. <b>уметь</b> создавать условия для реализации современных технологий в области лесного и лесопаркового хозяйства. <b>владеть</b> современными технологиями в области лесного и лесопаркового хозяйства

## 2. ТИПОВЫЕ КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ ИЛИ ИНЫЕ МАТЕРИАЛЫ, НЕОБХОДИМЫЕ ДЛЯ ОЦЕНКИ РЕЗУЛЬТАТОВ ОБУЧЕНИЯ (ТЕКУЩЕЙ АТТЕСТАЦИИ) ПО ДИСЦИПЛИНЕ.

Самостоятельная работа 1. Перечень заданий для самостоятельной проверки знаний

## Использование программы Excel для работы с массивами и матрицами

### Порядок работы:

1. Выполнить простейшие операции над массивами (матрицами) данных.
2. Выполнить операции над матрицами, используя встроенные функции.
3. Выполнить индивидуальное задание.

### Методические рекомендации по выполнению лабораторной работы

#### 1. Выполнение простейших операций над массивами (матрицами) данных.

Работу с массивами ячеек (матрицами) в MS Excel обеспечивают функции категорий **Математические**, **Ссылки и массивы** и **Статистические**. При необходимости можно вычислять соответствующие функции, используя **Мастер функций**  $f_x$ . В этом случае аргументом функции является массив (диапазон) ячеек, а соответствующая функция применяется к каждому элементу массива. Нельзя изменять формулу или функцию массива в его отдельной ячейке, однако допускается форматирование как всего массива, так и отдельных его частей.

**Формула** или **функция массива** заключается в **фигурные скобки**  $\{$  и вводится в следующем порядке:

1. Ввести исходные массивы (матрицы) данных в соответствующие диапазоны рабочего листа.
2. Выделить предполагаемый диапазон для значений вычисляемого массива.
3. В строке формул ввести формулу или функцию, начиная ввод со знака  $=$ . При этом операнды формул или аргументы функций можно задать либо непосредственным набором массивов (диапазонов) ячеек с клавиатуры, либо с помощью мыши, протягивая ее указатель вдоль соответствующего массива (диапазона) ячеек.
4. Ввод формулы завершить комбинацией клавиш **Ctrl+Shift+Enter**. Результаты вычислений отобразятся в выделенном предварительно массиве (диапазоне) ячеек.

**Задание 1.** Выполните операции над массивами данных, как показано на рисунке 1. Используйте *Лист1* рабочей книги.

**Пример 1.** Для заданных матриц  $A$  и  $B$  вычислить элементы матрицы (массива)  $A*B$ .

Порядок действий:

1. Выделить диапазон ячеек  $A21:D23$  (предполагаемый диапазон результирующей матрицы  $(A*B)$ ).
2. Щелкнуть мышью в строке формул.
3. Ввести с клавиатуры знак  $=$ .
4. Выделить на рабочем листе диапазон  $A4:D6$  (матрица  $A$ ).
5. Ввести с клавиатуры знак  $*$ .

6. Выделить на рабочем листе диапазон **A9:D11** (матрица **B**).
7. Нажать на клавиатуре комбинацию клавиш **Ctrl+Shift+Enter**.

**Примечание:** Ввод диапазонов ячеек, соответствующих матрицам можно вводить в строку формул как непосредственным набором с клавиатуры, так и с помощью перетаскивания мыши вдоль этих диапазонов.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	
1	<b>Исходные массивы данных</b>													
2	<b>Матрица A</b>				<b>Матрица C</b>									
3														
4	2	6	8	10					2	8	3	-1		
5	1	3	5	7					-2	5	6	-3		
6	3	6	2	8					4	0	-2	-1		
7														
8	<b>Матрица B</b>				<b>Вектор D</b>		<b>Вектор F</b>							
9	-2	5	-4	-8	2		3				-2	-1		
10	8	0	-5	-2	-3									
11	5	3	-9	8	5									
12														
13	<b>Результирующие массивы после выполнения операций</b>													
14														
15	<b>D+F</b>			<b>D+F</b>			<b>A+C</b>							
16	5	0	1	5			4	14	11	9				
17				0			-1	8	11	4				
18				8			7	6	0	7				
19														
20	<b>A*B</b>				<b>D^2</b>		<b>КОРЕНЬ(A)</b>							
21	-4	30	-32	-80	25		1,41	2,45	2,8284	3,1623				
22	8	0	-25	-14	0		1	1,73	2,2361	2,6458				
23	15	18	-18	64	64		1,73	2,45	1,4142	2,8284				
24														
25	<b>C^2+A*B</b>				<b>COS(C)-2</b>									
26	0	94	-23	-79	-2,4				-2,1	-2,99	-1,46			
27	12	25	11	-5	-2,4				-1,7	-1,04	-2,99			
28	31	18	-14	65	-2,7				-1	-2,416	-1,46			

Рис. 1.

**Пример 2.** Для заданной матрицы **C** вычислить элементы матрицы по формуле  $(\cos C - 2)$ .

Порядок действий:

1. Выделить предполагаемый диапазон результирующей матрицы, например, **H26:K28**.
2. Щелкнуть кнопку  $f_x$  (*Мастер функций*) в строке формул.
3. В диалоговом окне *Мастер функций* выбрать категорию *Математические*, а затем функцию *COS* и нажать кнопку **OK**.
4. В диалоговом окне *Аргументы функции* в поле *Число* ввести диапазон матрицы **C**, т.е. **H26:K28**.
5. Щелкнуть в строке формул, чтобы продолжить ввод формулы и ввести с клавиатуры символы **-2**.
6. Нажать на клавиатуре комбинацию клавиш **Ctrl+Shift+Enter**.

**Самостоятельно.** Вычислите элементы массивов, заданных выражениями:

$$1) A^2+C^2; \quad 2) D+F+F^3; \quad 3) \frac{A+D+C}{3}; \quad 4) \operatorname{tg}\sqrt{A}; \quad 5) \frac{A+C}{A*B}.$$

Элементы массивов  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , и  $D$  задать произвольно.

## 2. Выполнение операций над матрицами, с использованием встроенных функций.

В MS Excel имеется набор специальных функций для работы с матрицами.

Это:

- **МОБР(массив)** – вычисляет матрицу, обратную заданной;
- **МОПРЕД(массив)** – вычисляет определитель матрицы;
- **МУМНОЖ(массив1;массив2)** – производит матричное произведение двух матриц;
- **ТРАНСП(массив)** – производит транспонирование матрицы, т.е. преобразует вертикальный диапазон ячеек в горизонтальный и наоборот;
- **СТОЛБЕЦ(ссылка)** – определяет номер столбца, на который указывает ссылка;
- **СТРОКА(ссылка)** – определяет номер строки, на которую указывает ссылка;
- **СУММКВРАЗН(массив X;массив Y)** – вычисляет сумму квадратов разностей соответствующих значений в двух массивах;
- **СУММПРОИЗВ(массив1;массив2;массив3;...)** – вычисляет сумму произведений соответствующих элементов массивов;
- **СУММРАЗНКВ(массив X;массив Y)** – вычисляет сумму разностей квадратов соответствующих элементов в двух массивах) и т.д.

Кроме того, при решении различных задач используются и другие встроенные функции:

- **СУММКВ(аргум.1;аргум.2)** – вычисляет сумму квадратов аргументов. Аргументом могут быть числа, массивы, имена или ссылки на ячейки, содержащие числа;
- **СУММЕСЛИ(диапазон;критерий;диапазон)** – суммирует содержимое ячеек, соответствующих указанному условию;
- **СЧЕТЕСЛИ(диапазон;"критерий")** – подсчет в заданном диапазоне непустых ячеек по заданному критерию и т.д.

Порядок ввода встроенных функций смотрите в п.1.

**Задание 2.** Используя перечисленные встроенные функции, выполните операции над массивами данных, как показано на рисунке 2. Используйте *Лист2* той же рабочей книги.

**Пример 3.** Вычислить матрицу  $A^{-1}$ , т.е. обратную для матрицы  $A$ .

Порядок действий:

1. Выделить предполагаемый диапазон искомой матрицы  $A^{-1}$ , т.е. **E4:G6**.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	<b>Использование встроенных функций</b>											
2												
3	<b>Матрица A</b>			<b>Обратная матрица A<sup>-1</sup></b>			<b>Определитель матрицы A</b>					
4	2	3	5	1,3	-0,9	0,3	-22					
5	4	6	8	-2,2	1,4	-0,2						
6	7	5	2	1,0	-0,5	0,0						
7												
8	<b>Матрица B</b>			<b>Матрица C</b>			<b>Матрица D</b>					
9	-2	5	-4	12	25	13	1	10	100			
10	3	-6	7	10	15	14	2	20	200			
11	2	10	18	21	16	18	3	30	300			
12												
13	<b>ТРАНСП(B)</b>			<b>Умножение матриц B*D</b>			<b>Количество значений в матрице B меньших 0</b>					
14	-2	3	2	-4	-40	-400	3					
15	5	-6	10	12	120	1200						
16	-4	7	18	76	760	7600						
17												
18	<b>СУММПРОИЗВ(C;D)</b>			<b>СУММКВ(A)</b>			$\sum c_{ij}d_{ij} - \sum a_{ij}^2$					
19	10625			232			10393					
20												
21	<b>Сумма элементов матрицы C больших 20 (ссылка на яч. A23)</b>											
22												
23	>20	46										
24												
25												

Рис. 2.

- Щелкнуть на кнопке  $f_x$  (*Мастер функций*) в строке формул.
- В диалоговом окне *Мастер функций* выбрать функцию **МОБР** (категория *Математические*) и щелкнуть на кнопке **ОК**.
- В диалоговом окне *Аргументы функции* в поле *Массив* ввести диапазон матрицы **A**, т.е. **A4:C6**.
- Нажать на клавиатуре комбинацию клавиш **Ctrl+Shift+Enter**.

**Пример 4.** Определить количество отрицательных элементов в матрице **B**.

Порядок действий:

- Выделить ячейку, в которой предполагается отобразить результат выполнения встроенной функции.  
*Замечание:* Т.к. в данном случае результатом выполнения данной функции является одно число, то выделяется *одна* ячейка.
- В *строку формул* ввести с клавиатуры функцию **=СЧЁТЕСЛИ(A9:C11;"<0")**.
- Щелкнуть на кнопке **Enter** в строке формул или нажать клавишу **Enter** на клавиатуре.

**Самостоятельно:** Используя встроенные функции для массивов, вычислите элементы новых массивов или значения встроенных функций для массивов данных. Исходные массивы (матрицы) задайте произвольно.

- Для матрицы **B** размером 3x5 вычислить матрицу  $(B^T)^{-1}$ , где  $B^T$  - транспонированная матрица.

2. Выполнить матричное произведение матриц  $A$  и  $A^{-1}$ .
3. Вычислить определитель матрицы  $(A+B)$ .
4. Вычислить  $\sum b_{ij}^2 + 3\sum b_{ij}$ , где  $b_{ij}$  - элементы матрицы  $B$ .
5. Вычислить сумму квадратов разностей матриц  $B$  и  $C$ .
6. Вычислить элементы матрицы по формуле  $\ln C + \frac{1}{B}$ .

### Варианты индивидуальных заданий

Найти сумму матриц

$$1) \hat{A} = \begin{pmatrix} 13 & 5 & 17 \\ 1 & 2 & -1 \\ 14 & 3 & 21 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$2) \hat{A} = \begin{pmatrix} 16 & 5 & 4 \\ 1 & 0 & -2 \\ 13 & 3 & 11 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \tilde{N} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$3) \hat{A} = \begin{pmatrix} 31 & 5 & 4 \\ 27 & -1 & 1 \\ 17 & 3 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \tilde{N} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & -2 \\ -1 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

$$4) \hat{A} = \begin{pmatrix} 11 & 5 & 6 \\ -2 & 1 & 0 \\ 14 & 3 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \hat{A} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 6 \\ 2 & 3 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$5) \hat{A} = \begin{pmatrix} 14 & 12 & 13 \\ -2 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \hat{A} = \begin{pmatrix} 15 & -2 & 4 \\ 13 & 3 & -1 \\ -11 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

$$6) \hat{A} = \begin{pmatrix} 14 & 2 & 16 \\ 12 & -2 & 10 \\ 4 & 3 & 11 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \hat{A} = \begin{pmatrix} 11 & 2 & 14 \\ 12 & 13 & -2 \\ -1 & 10 & 1 \end{pmatrix}$$

$$7) \hat{A} = \begin{pmatrix} 11 & 5 & 4 \\ 12 & -2 & 2 \\ -11 & 3 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \hat{A} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 7 \\ 2 & 0 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$8) \hat{A} = \begin{pmatrix} 14 & 5 & 1 \\ 13 & -1 & 6 \\ 12 & 3 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$9) \hat{A} = \begin{pmatrix} 13 & 2 & 7 \\ 12 & -1 & 0 \\ 14 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \hat{A} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & -2 \\ -1 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

Найти сумму матриц  $2A+3B$  (3С или 3Д)

$$1) \hat{A} = \begin{pmatrix} 16 & 5 & 4 \\ 11 & 1 & -2 \\ 13 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$2) \hat{A} = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 4 \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \tilde{N} = \begin{pmatrix} 12 & 1 & 4 \\ 14 & 0 & -2 \\ -11 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

$$3) \hat{A} = \begin{pmatrix} 15 & -2 & 4 \\ 13 & 3 & -1 \\ -11 & 1 & 7 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \tilde{N} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & -2 \\ -1 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

$$4) \hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 \\ -2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \hat{A} = \begin{pmatrix} 11 & 2 & 4 \\ 12 & 3 & -2 \\ -11 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$5) \hat{A} = \begin{pmatrix} 14 & 2 & 13 \\ -12 & -1 & 10 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \hat{A} = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 4 \\ 3 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

$$6) \hat{A} = \begin{pmatrix} 11 & 12 & 14 \\ 2 & 3 & -2 \\ -1 & 10 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \tilde{N} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & -2 \\ -1 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

$$7) \hat{A} = \begin{pmatrix} 14 & -20 \\ 13 & 10 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \tilde{N} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$8) \hat{A} = \hat{A} = \begin{pmatrix} 11 & 12 & 4 \\ 21 & 13 & -2 \\ -10 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \tilde{N} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & -2 \\ -1 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

$$9) \hat{A} = \hat{A} = \begin{pmatrix} 17 & 22 & 4 \\ 21 & 3 & -2 \\ -10 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \tilde{N} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & -2 \\ -1 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

Найти произведение матриц

$$1) \hat{A} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ -2 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \hat{A} = \begin{pmatrix} 15 & -2 & 4 \\ 13 & 3 & -1 \\ -11 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$



$$2) \hat{A} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 2 & -2 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \hat{A} = \begin{pmatrix} 11 & 2 & 4 \\ 12 & 3 & -2 \\ -10 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$3) \hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 2 & -2 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \hat{A} = \begin{pmatrix} 15 & 1 & 7 \\ 12 & 0 & -2 \\ -11 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$4) \hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 \\ -2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \hat{A} = \begin{pmatrix} 11 & 20 & 4 \\ 12 & 31 & -2 \\ -10 & 20 & 1 \end{pmatrix}$$

$$5) \hat{A} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ -2 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \hat{A} = \begin{pmatrix} 15 & -2 & 4 \\ 13 & 3 & -1 \\ -11 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

$$6) \hat{A} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \tilde{N} = \begin{pmatrix} 12 & 1 & 4 \\ 14 & 0 & -2 \\ -11 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

$$7) \hat{A} = \begin{pmatrix} 14 & -2 \\ 13 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \tilde{N} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$8) \hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \tilde{N} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & -2 \\ -1 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

$$9) \hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 \\ -2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \hat{A} = \begin{pmatrix} 11 & 2 & 4 \\ 12 & 3 & -2 \\ -10 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Дана матрица  $A$  найти обратную матрицу

$$1) \hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 2 & -2 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$2) \hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 \\ -2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$3) \hat{A} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ -2 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$4) \hat{A} = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 4 \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$5) \dot{A} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$6) \dot{A} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 \\ -2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$7) \dot{A} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ -2 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$8) \dot{A} = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 4 \\ 3 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

$$9) \dot{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & -2 \\ -1 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

## Самостоятельная работа 2. Перечень заданий для самостоятельной проверки знаний

Решить систему уравнений

$$1) \begin{cases} 2x + 3y = 12 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} 3x + 2y = 10 \\ x + y = 4 \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} 4x + 5y = 20 \\ x + y = 5 \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} 5x + 6y = 30 \\ x + y = 6 \end{cases}$$

$$5) \begin{cases} 2x + 3y + z = 12 \\ x + y + z = 8 \end{cases}$$

$$6) \begin{cases} 3x + 4y + z = 15 \\ 2x + 3y + z = 10 \end{cases}$$

$$7) \begin{cases} 4x + 5y + z = 20 \\ 3x + 4y + z = 15 \end{cases}$$

$$8) \begin{cases} 5x + 6y + z = 30 \\ 4x + 5y + z = 20 \end{cases}$$

### Самостоятельная работа 3. Перечень заданий для самостоятельной проверки знаний

#### Транспортная задача

Среди специальных задач линейного программирования выделяется транспортная задача. Остановимся подробнее на формулировке этой задачи.

В транспортной задаче рассматриваются пункты отправления  $A_1, A_2, \dots, A_m$  и назначения  $B_1, B_2, \dots, B_n$ . Задача состоит в нахождении оптимального плана перевозки груза  $x_{ij}$  из пунктов отправления в пункты назначения. Если тариф перевозки единицы груза обозначить  $c_{ij}$  и целевая функция представляет собой минимальную стоимость перевозки, то транспортная задача записывается в следующем виде:

$$f = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}, \quad (4.1)$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i \quad (i = \overline{1, m}), \quad (4.2)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j \quad (j = \overline{1, n}), \quad (4.3)$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad (4.4)$$

$a_i$  – объемы товара в пунктах отправления;  $b_j$  – потребности в грузе в пунктах назначения.

Неотрицательное решение уравнений (4.2) и (4.3), определенное матрицей  $X=(x_{ij})$ , является планом транспортной задачи. План  $X^*=(x_{ij}^*)$  ( $i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$ ), при котором функция (4.1) достигает минимума, называется оптимальным планом.

Если объем груза поставщиков соответствует его потребности, т.е.

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j, \quad (4.5)$$

то задача считается закрытой. В противном случае, если равенство (4.5) представляет собой неравенство, транспортная задача называется открытой. При преобладании левой части над правой вводится дополнительный пункт назначения  $n+1$ . Потребность в этом случае для

дополнительного пункта равна  $\sum_{i=1}^m a_i - \sum_{j=1}^n b_j$  с тарифом перевозки, равным нулю. Если же имеет

место дефицит груза (правая часть равенства (4.5) преобладает на левой), тогда вводят дополнительный пункт поставки  $m+1$  с запасом груза  $\sum_{j=1}^n b_j - \sum_{i=1}^m a_i$ . Как и в предыдущем

случае тариф приравнивают к нулю.

При решении транспортной задачи можно использовать симплекс-метод. Вместе с тем он не всегда является эффективным. Поэтому применяются другие методы, учитывающие особенности транспортных задач.

Рассмотрим метод потенциалов, который состоит из нескольких этапов. В начале составляется опорный план перевозок. На этом этапе можно использовать следующие методы: наименьших стоимостей, северо-западного угла и аппроксимации Фогеля. На втором этапе применимы методы потенциалов и дифференциальных рент. Здесь осуществляется проверка оптимальности опорного плана. Если опорный план не оптимален, то выполняется корректировка плана (третий этап). Итерации второго и третьего этапов завершаются при получении оптимального решения.

В учебном пособии рассмотрено определение оптимального плана на примере. При этом использованы методы наименьших стоимостей и потенциалов. Предложенные методы применены для закрытой транспортной задачи, когда суммы поставляемых и потребляемых товаров равны. Следует подчеркнуть, что число базисных ячеек равно  $m+n-1$ , где  $m, n$  – число потребителей и поставщиков. Поскольку задача является закрытой, то количество отличных от нуля неизвестных (базисные переменные) на единицу меньше суммы  $m+n$ .

**Пример 4.1.** На двух полях  $A_1$  и  $A_2$  собран урожай картофеля 1800 и 2400 т. Полученную продукцию необходимо поставить в три склада  $B_1, B_2$  и  $B_3$ . В первом из них может храниться 1200 т картофеля, во втором – 2000 т и в третьем – 1000 т. Известна стоимость перевозки, приведенная в таблице 28. Требуется сформулировать транспортную задачу, в которой целевая функция характеризует минимальные затраты на перевозку продукции.

Таблица 4.1 – Тариф перевозки картофеля, д.е./т

Поля	Склады			Запасы
	$B_1$	$B_2$	$B_3$	
$A_1$	11	9	12	1800
$A_2$	10	13	14	2400
Потребности	1200	2000	1000	4200

Целевая функция с учетом тарифов примет вид

$$f=11x_{11}+9x_{12}+12x_{13}+10x_{21}+13x_{22}+14x_{23} \rightarrow \min.$$

Ограничения по перевозке продукции из полей в хранилища записываются так:

$$\begin{aligned} x_{11}+x_{12}+x_{13} &= 1800 [m], \\ x_{21}+x_{22}+x_{23} &= 2400 [m]. \end{aligned}$$

Условия, связанные с возможностями хранилищ имеют вид:

$$\begin{aligned} x_{11}+x_{21} &= 1200 [m], \\ x_{12}+x_{22} &= 2000 [m], \\ x_{13}+x_{23} &= 1000 [m]. \end{aligned}$$

Задача является закрытой, поскольку объемы картофеля соответствуют емкостям хранилищ.

**Пример 4.2.** В таблице 3.1 приведены исходные данные транспортной задачи. Определить оптимальный план.

На первом этапе определяется опорный план. Для наименьшей стоимости (9), которая находится на пересечении первой строки и второго столбца, присваиваем максимальное значение переменной  $x_{12}$ , равное 1800 (таблица 4.2).

Таблица 4.2 – Определение опорного плана

Поставщики	Потребители		
	1200	2000	1000

1800	11	9	12
2400	10	13	14
	1200	200	1000

Поскольку во втором столбце сумма должна соответствовать 2000, определяем значение  $x_{23} = 200$ . Следующая наименьшая стоимость равна 10, поэтому  $x_{12} = 1200$ , что соответствует суммарному значению первого потребителя. Для того чтобы во второй строке сумма равнялась 2400, переменной  $x_{23}$  присвоено значение 1000.

В результате суммарные затраты составят

$$f(x) = c_{12} \times x_{12} + c_{21} \times x_{21} + c_{22} \times x_{22} + c_{23} \times x_{23} = 9 \times 1800 + 10 \times 1200 + 13 \times 200 + 14 \times 1000 = 48000 \text{ д.е.}$$

На втором этапе проверяется оптимальность полученного плана. Для этого вводятся переменные  $u_i$  и  $v_j$ , соответствующие строкам и столбцам (таблица 4.3). Эти переменные характеризуют потенциал или цены товаров в соответствующих пунктах поставщиков и потребителей. Потенциалы определяются по формуле

$$v_j = u_i + c_{ij}.$$

Таблица 4.3 – Нахождение потенциалов поставщиков и потребителей

Поставщики	Потребители			$u_i$
	1200	2000	1000	
1800	11	9	12	0
2400	10	13	14	-4
	1200	200	1000	
$v_j$	6	9	10	

При этом одно из неизвестных, например,  $u_1$  может быть равно 0.

В таблице 4.3 приведены значения  $u_i$  и  $v_j$ , полученные на основе базисных переменных. В начале значение потенциала стоит приравнять к 0 ( $u_1 = 0$ ). Тогда согласно формуле потенциалов  $v_2 = 9$ . По тому же выражению нетрудно найти  $u_2 = 9 - 13 = -4$ .

Зная это значение, получаем  $v_1 = 10 - 4 = 6$  и  $v_3 = 14 - 4 = 10$ .

Для оценки оптимальности плана используется формула

$$d_{ij} = (u_i + c_{ij}) - v_j.$$

Это выражение позволяет определить матрицу, размер которой соответствует числу строк и столбцов исходной таблицы  $m \times n$ . Исходя из этой формулы, матрица оценок оптимального плана имеет вид

$$d_{ij} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Поскольку все оценки неотрицательны, то полученный план не может быть улучшен. Следовательно, определено оптимальное решение. Третий этап, связанный с улучшением плана не понадобился.

**Пример 4.3.** Пусть задан опорный план (таблица 3.4). Требуется получить оптимальное решение, используя метод потенциала.

Используя формулу оценки оптимальности плана  $d_{ij}$ , получим следующую матрицу

$$d_{ij} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Целевая функция при этом  $f(x) = 9 \times 800 + 12 \times 1000 + 10 \times 1200 + 13 \times 1200 = 46800$

Приведенный план не является оптимальным ввиду наличия отрицательного элемента в матрице. Построим контур перераспределения значений  $x_{ij}$  в виде штриховой (таблица 4.5). Началом контура является ячейка с наименьшим потенциалом. При этом потенциалам, располагаемым по диагонали, присваивается символ + или -.

Таблица 4.4 – Опорный план транспортной задачи

Поставщики	Потребители		
	1200	2000	1000
1800	11	9	12
2400	10	13	14
	1200	1200	800
			1000

Таблица 4.5 – Транспортная задача с потенциалами потребителей и поставщиков

Поставщи ки	Потребители			$u_i$
	1200	2000	1000	
1800	11	9+	12-	0
2400	10	13-	14+	-4
	1200	1200	800	
$v_j$	6	9	12	

Перераспределение осуществляется с отрицательных в положительные ячейки. Тогда значение  $x_{13}=1000$  перенесем в соседнюю клетку, увеличив величину  $x_{12}$  до 1800. В этом случае  $x_{13}=0$ . Что касается значения  $x_{22}=1200$ , то оно распределено так:  $x_{22}=200$  и  $x_{23}=1000$  (таблица 4.6).

Матрица оценок полученного плана примет вид

$$d_{ij} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Таблица 4.6 - Итерация получения нового плана

Поставщики	Потребители			$u_i$
	1200	2000	1000	
1800	11	9	12	0
2400	10	13	14	-4
	1200	200	1000	
$v_j$	6	9	10	

Поскольку отрицательные элементы в матрице отсутствуют, определено оптимальное решение:  $f(x) = 9 \times 1800 + 10 \times 1200 + 13 \times 200 + 14 \times 1000 = 44800$  д.е.

Таким образом, первая итерация позволила получить оптимальный результат.

### Варианты заданий

1. На двух полях  $A_1$  и  $A_2$  собран урожай картофеля 1400 и 2000 т. Полученную продукцию необходимо поставить в три склада  $B_1$ ,  $B_2$  и  $B_3$ . В первом из них может храниться 1200 т картофеля, во втором – 1300 т и в третьем – 900 т. Известна стоимость перевозки, приведенная в таблице. Требуется сформулировать транспортную задачу, в которой целевая функция характеризует минимальные затраты на перевозку продукции.

Тариф перевозки картофеля, д.е./т

Поля	Склады			Запасы
	$B_1$	$B_2$	$B_3$	
$A_1$	10	9	12	1400
$A_2$	11	13	14	2000
Потребности	1200	1300	900	3400

2. На двух полях  $A_1$  и  $A_2$  собран урожай картофеля 2200 и 2000 т. Полученную продукцию необходимо поставить в три склада  $B_1$ ,  $B_2$  и  $B_3$ . В первом из них может храниться 1200 т картофеля, во втором – 1600 т и в третьем – 1400 т. Известна стоимость перевозки, приведенная в таблице. Требуется сформулировать транспортную задачу, в которой целевая функция характеризует минимальные затраты на перевозку продукции.

Тариф перевозки картофеля, д.е./т

Поля	Склады			Запасы
	$B_1$	$B_2$	$B_3$	
$A_1$	12	9	12	2200
$A_2$	10	15	14	2000
Потребности	1200	1600	1400	4200

3. На двух полях  $A_1$  и  $A_2$  собран урожай картофеля 1800 и 2000 т. Полученную продукцию необходимо поставить в три склада  $B_1$ ,  $B_2$  и  $B_3$ . В первом из них может храниться 1000 т картофеля, во втором – 1600 т и в третьем – 1200 т. Известна стоимость перевозки, приведенная в таблице. Требуется сформулировать транспортную задачу, в которой целевая функция характеризует минимальные затраты на перевозку продукции.

Тариф перевозки картофеля, д.е./т

Поля	Склады			Запасы
	$B_1$	$B_2$	$B_3$	
$A_1$	11	9	14	1800
$A_2$	10	13	12	2000
Потребности	1000	1600	1200	3800

4. На двух полях  $A_1$  и  $A_2$  собран урожай картофеля 1900 и 2100 т. Полученную продукцию необходимо поставить в три склада  $B_1$ ,  $B_2$  и  $B_3$ . В первом из них может храниться 1100 т картофеля, во втором – 1600 т и в третьем – 1300 т. Известна стоимость перевозки, приведенная в таблице. Требуется сформулировать транспортную задачу, в которой целевая функция характеризует минимальные затраты на перевозку продукции.

Тариф перевозки картофеля, д.е./т

Поля	Склады			Запасы
	$B_1$	$B_2$	$B_3$	
$A_1$	12	9	13	1900
$A_2$	10	13	11	2100
Потребности	1100	1600	1300	4000

5. На двух полях  $A_1$  и  $A_2$  собран урожай картофеля 2500 и 2100 т. Полученную продукцию необходимо поставить в три склада  $B_1$ ,  $B_2$  и  $B_3$ . В первом из них может храниться 1500 т картофеля, во втором – 1700 т и в третьем – 1400 т. Известна стоимость перевозки, приведенная в таблице. Требуется сформулировать транспортную задачу, в которой целевая функция характеризует минимальные затраты на перевозку продукции.

Тариф перевозки картофеля, д.е./т

Поля	Склады			Запасы
	$B_1$	$B_2$	$B_3$	
$A_1$	13	10	15	2500
$A_2$	11	14	12	2100
Потребности	1500	1700	1400	4600

6. На двух полях  $A_1$  и  $A_2$  собран урожай картофеля 2400 и 2200 т. Полученную продукцию необходимо поставить в три склада  $B_1$ ,  $B_2$  и  $B_3$ . В первом из них может храниться 1500 т картофеля, во втором – 1800 т и в третьем – 1300 т. Известна стоимость перевозки, приведенная в таблице. Требуется сформулировать транспортную задачу, в которой целевая функция характеризует минимальные затраты на перевозку продукции.

Тариф перевозки картофеля, д.е./т

Поля	Склады			Запасы
	$B_1$	$B_2$	$B_3$	
$A_1$	14	11	15	2400
$A_2$	12	14	12	2200
Потребности	1500	1800	1300	4600

7. На двух полях  $A_1$  и  $A_2$  собран урожай картофеля 2600 и 2200 т. Полученную продукцию необходимо поставить в три склада  $B_1$ ,  $B_2$  и  $B_3$ . В первом из них может храниться 1400 т картофеля, во втором – 1900 т и в третьем – 1500 т. Известна стоимость перевозки, приведенная в таблице. Требуется сформулировать транспортную задачу, в которой целевая функция характеризует минимальные затраты на перевозку продукции.



Тариф перевозки картофеля, д.е./т

Поля	Склады			Запасы
	$B_1$	$B_2$	$B_3$	
$A_1$	13	11	15	2600
$A_2$	12	14	10	2200
Потребности	1400	1900	1500	4800

8. На двух полях  $A_1$  и  $A_2$  собран урожай картофеля 1500 и 2000 т. Полученную продукцию необходимо поставить в три склада  $B_1$ ,  $B_2$  и  $B_3$ . В первом из них может храниться 1200 т картофеля, во втором – 1300 т и в третьем – 1000 т. Известна стоимость перевозки, приведенная в таблице. Требуется сформулировать транспортную задачу, в которой целевая функция характеризует минимальные затраты на перевозку продукции.

Тариф перевозки картофеля, д.е./т

Поля	Склады			Запасы
	$B_1$	$B_2$	$B_3$	
$A_1$	13	12	15	1500
$A_2$	11	14	10	2000
Потребности	1200	1300	1000	3500

9. На двух полях  $A_1$  и  $A_2$  собран урожай картофеля 1900 и 2100 т. Полученную продукцию необходимо поставить в три склада  $B_1$ ,  $B_2$  и  $B_3$ . В первом из них может храниться 1300 т картофеля, во втором – 1200 т и в третьем – 1500 т. Известна стоимость перевозки, приведенная в таблице. Требуется сформулировать транспортную задачу, в которой целевая функция характеризует минимальные затраты на перевозку продукции.

Тариф перевозки картофеля, д.е./т

Поля	Склады			Запасы
	$B_1$	$B_2$	$B_3$	
$A_1$	12	13	14	1900
$A_2$	11	15	10	2100
Потребности	1300	1200	1500	4000

10. На двух полях  $A_1$  и  $A_2$  собран урожай картофеля 1600 и 2000 т. Полученную продукцию необходимо поставить в три склада  $B_1$ ,  $B_2$  и  $B_3$ . В первом из них может храниться 1000 т картофеля, во втором – 1200 т и в третьем – 1400 т. Известна стоимость перевозки, приведенная в таблице. Требуется сформулировать транспортную задачу, в которой целевая функция характеризует минимальные затраты на перевозку продукции.

Тариф перевозки картофеля, д.е./т

Поля	Склады			Запасы
	$B_1$	$B_2$	$B_3$	
$A_1$	13	12	14	1600
$A_2$	10	15	11	2000
Потребности	1000	1200	1400	3600

11. На двух полях  $A_1$  и  $A_2$  собран урожай картофеля 2600 и 2100 т. Полученную продукцию необходимо поставить в три склада  $B_1$ ,  $B_2$  и  $B_3$ . В первом из них может храниться 1800 т картофеля, во втором – 1700 т и в третьем – 1200 т. Известна стоимость перевозки,

приведенная в таблице. Требуется сформулировать транспортную задачу, в которой целевая функция характеризует минимальные затраты на перевозку продукции.

Тариф перевозки картофеля, д.е./т

Поля	Склады			Запасы
	$B_1$	$B_2$	$B_3$	
$A_1$	13	13	14	2600
$A_2$	11	15	12	2100
Потребности	1800	1700	1200	4700

12. На двух полях  $A_1$  и  $A_2$  собран урожай картофеля 1800 и 2100 т. Полученную продукцию необходимо поставить в три склада  $B_1$ ,  $B_2$  и  $B_3$ . В первом из них может храниться 1300 т картофеля, во втором – 1200 т и в третьем – 1400 т. Известна стоимость перевозки, приведенная в таблице. Требуется сформулировать транспортную задачу, в которой целевая функция характеризует минимальные затраты на перевозку продукции.

Тариф перевозки картофеля, д.е./т

Поля	Склады			Запасы
	$B_1$	$B_2$	$B_3$	
$A_1$	13	11	15	1800
$A_2$	12	14	12	2100
Потребности	1300	1200	1400	3900

13. На двух полях  $A_1$  и  $A_2$  собран урожай картофеля 2000 и 2500 т. Полученную продукцию необходимо поставить в три склада  $B_1$ ,  $B_2$  и  $B_3$ . В первом из них может храниться 1400 т картофеля, во втором – 1200 т и в третьем – 1900 т. Известна стоимость перевозки, приведенная в таблице. Требуется сформулировать транспортную задачу, в которой целевая функция характеризует минимальные затраты на перевозку продукции.

Тариф перевозки картофеля, д.е./т

Поля	Склады			Запасы
	$B_1$	$B_2$	$B_3$	
$A_1$	13	11	12	2000
$A_2$	10	14	15	2500
Потребности	1400	1200	1900	4500

14. На двух полях  $A_1$  и  $A_2$  собран урожай картофеля 1400 и 1700 т. Полученную продукцию необходимо поставить в три склада  $B_1$ ,  $B_2$  и  $B_3$ . В первом из них может храниться 1400 т картофеля, во втором – 1200 т и в третьем – 1900 т. Известна стоимость перевозки, приведенная в таблице. Требуется сформулировать транспортную задачу, в которой целевая функция характеризует минимальные затраты на перевозку продукции.

Тариф перевозки картофеля, д.е./т

Поля	Склады			Запасы
	$B_1$	$B_2$	$B_3$	
$A_1$	12	10	12	1400
$A_2$	9	13	14	1700
Потребности	1000	1200	900	3100

15. На двух полях  $A_1$  и  $A_2$  собран урожай картофеля 1800 и 1700 т. Полученную продукцию необходимо поставить в три склада  $B_1$ ,  $B_2$  и  $B_3$ . В первом из них может храниться

1200 т картофеля, во втором – 1300 т и в третьем – 1000 т. Известна стоимость перевозки, приведенная в таблице. Требуется сформулировать транспортную задачу, в которой целевая функция характеризует минимальные затраты на перевозку продукции.

Тариф перевозки картофеля, д.е./т

Поля	Склады			Запасы
	$B_1$	$B_2$	$B_3$	
$A_1$	12	9	12	1800
$A_2$	10	13	14	1700
Потребности	1200	1300	1000	3500

16. На двух полях  $A_1$  и  $A_2$  собран урожай картофеля 1900 и 1800 т. Полученную продукцию необходимо поставить в три склада  $B_1$ ,  $B_2$  и  $B_3$ . В первом из них может храниться 1100 т картофеля, во втором – 1200 т и в третьем – 1400 т. Известна стоимость перевозки, приведенная в таблице. Требуется сформулировать транспортную задачу, в которой целевая функция характеризует минимальные затраты на перевозку продукции.

Тариф перевозки картофеля, д.е./т

Поля	Склады			Запасы
	$B_1$	$B_2$	$B_3$	
$A_1$	14	9	11	1900
$A_2$	10	13	14	1800
Потребности	1100	1200	1400	3700

**Разработчик:** доцент Барсукова М.Н.



ФОС обсужден на заседании кафедры информатики и  
математического моделирования

Протокол № 7 от 26.03.2021

Заведующий кафедрой \_\_\_\_\_ Барсукова Маргарита Николаевна

