МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА РФ
ИРКУТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ А.А. ЕЖЕВСКОГО

Институт экономики, управления и прикладной информатики
Кафедра Информатики и математического моделирования

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЛЕСНЫХ ЭКОСИСТЕМ

Методические указания и задания для выполнения контрольной работы

Иркутск 2017

УДК 681.3
И-741

Печатается по решению методической комиссии Института экономики, управления и прикладной информатики Иркутского государственного аграрного университета.

Протокол № __ от _________ 2017 г.

Рецензенты:

Доцент кафедры экономики ИрГАУ, к.э.н., Дейч О.И.
Доцент кафедры информатики и математического моделирования ИрГАУ к.э.н., Калинин Н.В.

Барсукова М.Н. Методические указания и задания для выполнения контрольной работы «Математическое моделирование лесных экосистем». - Иркутск: ИрГАУ, 2017. 17 с.

Методические указания составлены в помощь преподавателям и студентам для выполнения контрольной работы по дисциплине «Математическое моделирование лесных экосистем». В работе приведены содержание и требования к контрольной работе, практические задания в соответствии с вариантами, список литературы.

Содержание

1. Содержание контрольной работы

Обязательными элементами контрольной работы являются:

1. Титульный лист.
2. Содержание.
3. Практическая часть.
4. Список используемой литературы.

Дополнительными элементами контрольной работы являются:

5. Приложения.

1. ***Титульный лист*** является первой страницей контрольной работы (см. Приложение 1).
2. ***Содержание*** включает перечень основных элементов контрольной работы с указанием номеров страниц, с которых начинается их месторасположение.
3. ***Практическая часть*** состоит из трех заданий, проверяющих знания студентов, полученные в результате обучения. Задания выбираются из **таблицы 1.**
4. ***Список литературы*** – это упорядоченный в алфавитно-хронологической последовательности перечень библиографических описаний документальных источников информации по теме курсовой работы.
5. ***Приложения*** помещаются в конце контрольной работы. Каждое приложение должно начинаться с новой страницы и иметь содержательный заголовок. Приложения нумеруются арабскими цифрами по порядковой нумерации. Номер приложения размещается в правом верхнем углу над заголовком приложения после слова «Приложение», после цифры точку не ставят. Приложения должны иметь общую с остальной частью контрольной работы нумерацию страниц. На все приложения в основной части контрольной работы должны быть ссылки.

2. Требования к оформлению контрольной работы

1. Контрольная работа должна быть набрана и распечатана студентом самостоятельно с использованием текстового процессора *Word*, а также сохранена в электронном варианте *на диске*.
2. Обязательное наличие титульного листа согласно прилагаемого образца (см. Приложение 1).
3. Наличие оглавления и нумерации страниц.
4. Наличие списка литературы в соответствии с *библиотечным стандартом*.
5. При наборе контрольной работы на ПК рекомендуется соблюдать следующие параметры:

- размеры полей: левое 2,5 см, правое, нижнее и верхнее – 2 см;
- **заголовки** выделять полужирным начертанием, размер шрифта – 16, Times New Roman, отделять от основного текста двумя пустыми строками;
- **текст** – размер шрифта 14; межстрочный интервал – полуторный; Times New Roman.

Таблица 1 - Варианты практических заданий – 1,2,3

Предпоследняя	Последняя цифра зачетной книжки									
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
0	1,11,11	2,10,2	3,9,3	4,8,4	5,7,5	6,6,1	7,5,2	8,4,3	9,3, 4	1,2,5
1	2,1,1	3,12,2	4,10,3	5,9,4	6,8,5	1,7,1	2,6,2	3,5,3	4,4,4	5,3,5
2	6,2,1	7,11,2	8,12,3	9,10,4	7,9,5	8,8,1	9,7,2	1,6,3	2,5,4	3,4,5
3	1,3,1	2,2,2	3,1,3	4, 11,4	5,10,5	6,9,1	7,8,2	8,7,3	9,6,4	4,5,5
4	5,4,1	6,3,2	7,2,3	8,11,4	9,11,5	1,10,1	2,9,2	3,8,3	4,7,4	5,6,5
5	6,5,1	7,4,2	8,3,3	9,12,4	1,1,5	2,11,1	3,10,2	4,9,3	5,8,4	6,7,5
6	1,6,11	2,5,2	3,4,3	4,3,4	5,2,5	6,1,12	7,11,2	8,10,3	9,9,4	7,8,5
7	8,7,1	9,6,2	1,5,3	2,4,4	3,3,5	1,2,1	2,1,2	3,11,3	4,10,4	5,9,5
8	6,8,1	7,7,12	8,6,3	9,5,4	4,4,5	5,3,12	6,12,2	7,11,3	8,11,4	9,10,5
9	1,9,1	2,8,2	3,7,3	4,6,4	5,5,5	6,4,1	7,3,12	8,2,3	9,1,4	1,11,5

3. Практические задания для выполнения контрольной работы

Практическая часть контрольной работы содержит три задачи из ниже перечисленных тем. Задания выбираются из **таблицы 1** согласно двух последних цифр номера зачетной книжки**.**

3.1.Графический метод решения задач линейного программирования

Графический метод довольно прост и нагляден для решения задач ЛП с двумя переменными. Он основан на *геометрическом* представлении допустимых решений и ЦФ задачи.

Каждое из неравенств задачи определяет на координатной плоскости (x_1,x_2) некоторую полуплоскость, а система неравенств в целом – пересечение соответствующих плоскостей. Множество точек пересечения данных полуплоскостей называется **областью допустимых решений** (ОДР).

ОДР всегда представляет собой **выпуклую** фигуру, т.е. обладающую следующим свойством: если две точки А и В принадлежат этой фигуре, то и весь отрезок АВ принадлежит ей. ОДР графически может быть представлена выпуклым многоугольником, неограниченной выпуклой многоугольной областью, отрезком, лучом, одной точкой. В случае несовместности системы ограничений задачи ОДР является пустым множеством.

Суть графического метода заключается в следующем. По направлению (против направления) вектора С в ОДР производится поиск оптимальной точки $X^* = \left(x_1^*, x_2^*\right)$. Оптимальной считается точка, через которую проходит линия уровня L_{max} (L_{min}), соответствующая наибольшему (наименьшему) значению функции *L(X)*. Оптимальное решение всегда находится на границе ОДР, например, в последней вершине многоугольника ОДР, через которую пройдет целевая прямая, или на всей его стороне.

При поиске оптимального решения задач ЛП возможны следующие ситуации:

- существует единственное решение задачи;
- существует бесконечное множество решений (**альтернативный оптимум**);
- ЦФ не ограничена;
- область допустимых решений – единственная точка; задача не имеет решений.

Методика решения задач ЛП графическим методом

1. В ограничениях задачи замените знаки неравенств на знаки точных равенств и постройте соответствующие прямые.
2. Найдите и заштрихуйте полуплоскости, разрешенные каждым из ограничений-неравенств задачи. Для этого подставьте в конкретное неравенство координаты какой-либо точки [например, (0;0)], и проверьте истинность полученного неравенства.

Если неравенство истинное, ***то*** надо заштриховать полуплоскость, содержащую данную точку; ***иначе*** (неравенство ложное) надо заштриховать полуплоскость, не содержащую данную точку.

Поскольку x_1 *и* x_2 должны быть неотрицательными, то их допустимые значения всегда будут находиться выше оси x_1 и правее оси x_2 , т.е. в I-м квадранте.

Ограничения-равенства разрешают только те точки, которые лежат на соответствующей прямой, поэтому выделите на графике такие прямые.

3. Определите ОДР как часть плоскости, принадлежащую одновременно всем разрешенным областям, и выделите ее. При отсутствии ОДР задача ***не имеет решений***, о чем сделайте соответствующий вывод.
4. Если ОДР – не пустое множество, то постройте целевую прямую, т.е. любую из линий уровня $c_1x_1 + c_2x_2 = L$, где L – произвольное число, например, кратное c_1 и c_2 , т.е. удобное для проведения расчетов. Способ построения аналогичен построению прямых ограничений.
5. Постройте вектор $\overline{C} = (c_1, c_2)$, который начинается в точке (0;0), заканчивается в точке (c_1,c_2). Если целевая прямая и вектор $\overline{C}$ построены верно, то они будут ***перпендикулярны***.
6. При поиске max целевой функции передвигайте целевую прямую ***в направлении*** вектора $\overline{C}$, при поиске *min* ЦФ – ***против направления*** вектора $\overline{C}$. ***Последняя*** по ходу движения вершина ОДР будет точкой *max* или *min* ЦФ. Если такой точки (точек) не существует, то сделайте вывод о ***неограниченности ЦФ на множестве планов*** сверху (при поиске *max*) или снизу (при поиске *min*).
7. 7. Определите координаты точки *max* (*min*) ЦФ $X^* = \left(x^*_1, x^*_2\right)$ и вычислите значение ЦФ $L(X^*)$. Для вычисления координат оптимальной точки X^* решите систему уравнений прямых, на пересечении которых находится X^*.

<u>*Пример 1*</u>

Найдем оптимальное решение задачи, математическая модель которой имеет вид

$$L(X) = 3x_1 + 2x_2 \to max$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 6 \\ 2x_1 + x_2 \le 8 \\ -x_1 + x_2 \le 1 \\ x_2 \le 2 \\ x_1 \ge 0, \ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Построим прямые ограничений, для чего вычислим координаты точек пересечения этих прямых с осями координат (рис. 1).

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 6 \\ 2x_1 + x_2 = 8 \\ -x_1 + x_2 = 1 \\ x_2 = 2. \end{cases}$$

1. $x_1+2x_2=6$

$\begin{cases}x_1=0\\x_2=3\end{cases};\begin{cases}x_1=6\\x_2=0\end{cases}.$

2. $2x_1+x_2=8$

$\begin{cases}x_1=0\\x_2=8\end{cases};\begin{cases}x_1=4\\x_2=0\end{cases}.$

3. $-x_1+x_2=1$

$\begin{cases}x_1=0\\x_2=1\end{cases};\begin{cases}x_1=-1\\x_2=0\end{cases}.$

Прямая (4) проходит через точку $x_2 = 2$ параллельно оси x_1.

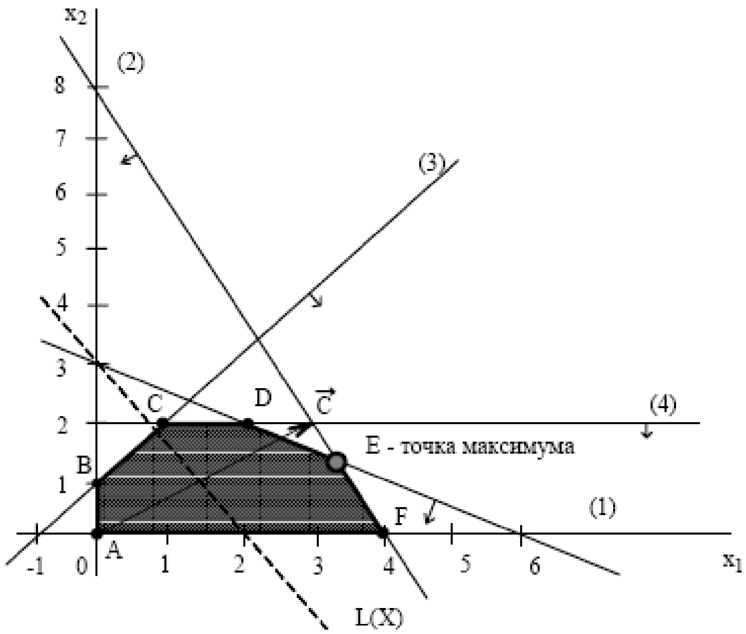

Рисунок 1 - Графическое решение задачи

Определим ОДР. Например, подставим точку (0;0) в исходное ограничение (3), получим $0 \le 1$, что является истинным неравенством, поэтому стрелкой (или штрихованием) обозначим полуплоскость, ***содержащую*** точку (0;0), т.е. расположенную правее и ниже прямой (3). Аналогично определим допустимые полуплоскости для остальных ограничений и укажем их стрелками у соответствующих прямых ограничений (рис. 1).

Общей областью, разрешенной всеми ограничениями, т.е. ОДР является многоугольник ABCDEF.

Целевую прямую можно построить по уравнению

$$3x_1+2x_2=6$$

$$\begin{cases}x_1=0\\x_2=3\end{cases};\begin{cases}x_1=2\\x_2=0\end{cases}$$

Строим вектор $\overline{C}$ из точки (0;0) в точку (3;2). Точка E – это последняя вершина многоугольника допустимых решений ABCDEF, через которую проходит целевая прямая, двигаясь ***по направлению*** вектора $\overline{C}$. Поэтому E – это точка максимума ЦФ. Определим координаты точки E из системы уравнений прямых ограничений (1) и (2)

$$\begin{cases}x_1+2x_2=6\\2x_1+x_2=8\end{cases},\ x_1=\frac{10}{3}=3\frac{1}{3},\ x_2=\frac{4}{3}=1\frac{1}{3},$$

$$E\left(3\frac{1}{3};1\frac{1}{3}\right)\ \text{[т/сутки]}.$$

Максимальное значение ЦФ равно $L(E)=\left(3\frac{10}{3}+2\frac{4}{3}=12\frac{2}{3}\right)$ [тыс. руб./сутки].

Пример 2

Найдем оптимальное решение задачи, математическая модель которой имеет вид

$$L(X) = 2x_1 - x_2 \rightarrow \min(\max)$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \leq 16 \\ -4x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ x_1 + 3x_2 \geq 9 \\ 6x_1 + 5x_2 = 30 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Построим прямые ограничений, для чего вычислим координаты точек пересечения этих прямых с осями координат (рис. 2).

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 = 16 \\ -4x_1 + 2x_2 = 8 \\ x_1 + 3x_2 = 9 \\ 6x_1 + 5x_2 = 30 \end{cases}$$

1. $2x_1 + 4x_2 = 16$ $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 4 \end{cases}; \begin{cases} x_1 = 8 \\ x_2 = 0 \end{cases}.$

2. $-4x_1 + 2x_2 = 8$ $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 4 \end{cases}; \begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = 0 \end{cases}.$

3. $x_1 + 3x_2 = 9$ $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 3 \end{cases}; \begin{cases} x_1 = 9 \\ x_2 = 0 \end{cases}.$

4. $6x_1 + 5x_2 = 30$ $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 6 \end{cases}; \begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = 0 \end{cases}$

Целевую прямую построим по уравнению

$$2x_1 - x_2 = -4$$

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 4 \end{cases}; \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 0 \end{cases}.$$

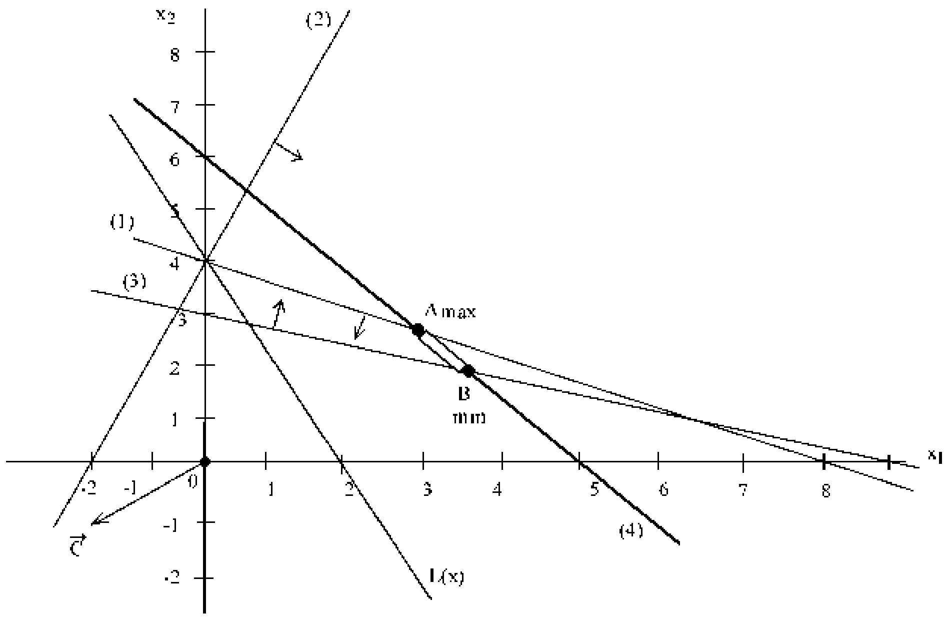

Рисунок 2 - Графическое решение задачи

Определим ОДР. Ограничение-равенство (4) допускает только точки, лежащие на прямой (4). Подставим точку (0;0) в ограничение (3), получим 0 ≥ 9 , что является ложным неравенством, поэтому стрелкой (или штрихованием) обозначим полуплоскость, ***не содержащую*** точку (0;0), т.е. расположенную выше прямой (3). Аналогично определим и укажем допустимые полуплоскости для остальных ограничений (рис.2). Анализ полуплоскостей, допустимых остальными ограничениями-неравенствами, позволяет определить, что ОДР – это отрезок АВ.

Строим вектор $\overline{C}$ из точки (0;0) в точку (-2;-1). Для поиска минимума ЦФ двигаем целевую прямую ***против направления*** вектора $\overline{C}$. Точка В – это последняя точка отрезка АВ, через которую проходит целевая прямая, т.е. В – точка минимума ЦФ.

Определим координаты точки В из системы уравнений прямых ограничений (3) и (4)

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 9 \\ 6x_1 + 5x_2 = 30 \end{cases}, \; x_1 \approx 3{,}46, \; x_2 \approx 1{,}85.$$

Минимальное значение ЦФ равно $L(3{,}46;1{,}85) = -2*3{,}46 - 1*1{,}85 = -8{,}77$.

При поиске точки максимума ЦФ будем двигать целевую прямую ***по направлению*** вектора $\overline{C}$. Последней точкой отрезка АВ, а значит, и точкой максимума будет А. Определим координаты точки А из системы уравнений прямых ограничений (1) и (4)

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 = 16 \\ 6x_1 + 5x_2 = 30 \end{cases}, \; x_1 \approx 2{,}86, \; x_2 \approx 2{,}57.$$

Максимальное значение ЦФ равно $L(2{,}86;2{,}57) = -2*2{,}86 - 1*2{,}57 = -8{,}29$.

Таким образом, В(3,46; 1,85) – точка минимума, $Lmin$(В)= −8,77;

А(2,86; 2,57`) – точка максимума, Lmax(А)= −8,29.

Пример 3

Найдем оптимальное решение задачи, математическая модель которой имеет вид

$$L(X) = x_1 - 3x_2 \rightarrow \min(\max)$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \geq 3 \\ x_1 + x_2 \geq 5 \\ x_1 \leq 4 \\ -2x_1 + x_2 \geq 2 \\ x_1 \geq 0, \; x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Построим прямые ограничений, для чего вычислим координаты точек пересечения этих прямых с осями координат (рис. 4.3).

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 13 \\ x_1 + x_2 = 5 \\ x_1 = 4 \\ -\;2x_1 + x_2 = 2 \end{cases}$$

1. $x_1 + 3x_2 = 3$
$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 1 \end{cases}; \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = 0 \end{cases}.$

2. $x_1 + x_2 = 5$
$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 5 \end{cases}; \begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = 0 \end{cases}.$

4. $-2x_1 + x_2 = 2$
$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 2 \end{cases}; \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 0 \end{cases}$

Прямая (3) – проходит через точку $x_1 = 4$ параллельно оси x_2 .

Целевую прямую построим по уравнению

$$x_1 - 3x_2 = -3$$

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 1 \end{cases}; \begin{cases} x_1 = -3 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

Определим ОДР. Подставим точку (0;0) в ограничение (2), получим 0 ≥5, что является ложным неравенством, поэтому стрелкой (или штрихованием) обозначим полуплоскость, ***не содержащую*** точку (0;0), т.е. расположенную правее и выше прямой (2).

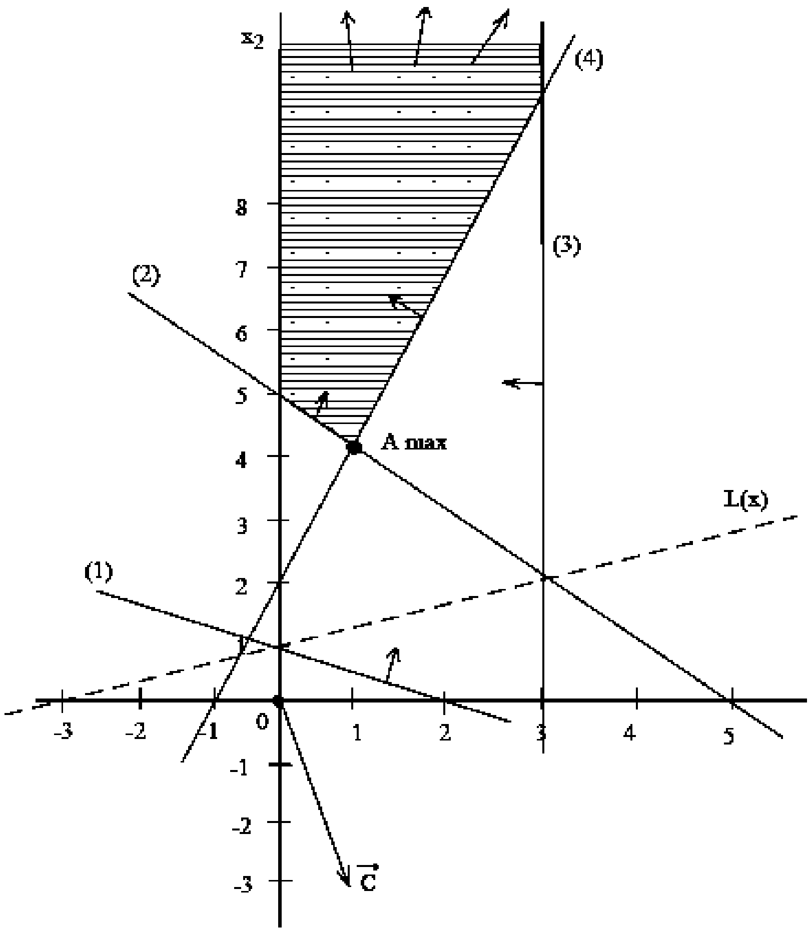

Рисунок 3 - Графическое решение задачи

Аналогично определим и укажем допустимые полуплоскости для остальных ограничений (см. рис.3). Анализ допустимых полуплоскостей позволяет определить, что ОДР – это незамкнутая область, ограниченная прямыми (2), (3), (4) и осью x2 .

Строим вектор $\overline{C}$ из точки (0;0) в точку (1;-3). Для поиска минимума ЦФ двигаем целевую прямую ***против направления*** вектора $\overline{C}$. Поскольку в этом направлении ОДР не ограничена, то невозможно в этом направлении найти последнюю точку ОДР. Отсюда следует, что ЦФ не ограничена на множестве планов ***снизу*** (поскольку идет поиск минимума).

При поиске максимума ЦФ будем двигать целевую прямую ***по направлению*** вектора $\overline{C}$ до пересечения с вершиной А – последней точкой ОДР в этом направлении. Определим координаты точки А из системы уравнений прямых ограничений (2) и (4)

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 5 \\ -2x_1 + x_2 = 2 \end{cases}, \quad x_1 = 1; x_2 = 4.$$

Максимальное значение ЦФ равно $L(1;4) = 1*1 \quad 3*4 = 11$. Таким образом, в данной задаче ЦФ не ограничена на множестве планов ***снизу,*** а А(1;4) является точкой максимума ЦФ, Lmax(A)= -11.

Задачи для самостоятельного решения

1. Найти оптимальное решение задачи графическим методом.
2. Решить задачу с использованием компьютера, сопроводив решение анализом полученного результата. Распечатать отчет по результатам.

Варианты:

1) $L(X) = 4x_1 - 3x_2 \rightarrow \max (\min)$

$$\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 \leq 20, \\ x_1 + 2x_2 \geq 10, \\ -7x_1 + 10x_2 \leq 80, \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

2) $L(X) = 2x_1 + 5x_2 \rightarrow \max (\min)$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 \geq 6, \\ x_1 + 2x_2 \geq 5, \\ 4x_1 + x_2 \geq 8, \\ -x_1 + 2x_2 \geq 6, \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

3) $L(X) = x_1 + 2x_2 \rightarrow \max (\min)$

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 \geq 10, \\ x_1 + x_2 \leq 6, \\ x_1 + 4x_2 \geq 3, \\ -x_1 + 4x_2 \leq 2, \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

4) $L(X) = -2x_1 + 5x_2 \rightarrow \max (\min)$

$$\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 \leq 12, \\ x_1 + 2x_2 = 8, \\ x_1 + x_2 \geq 5, \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

5) $L(X) = x_1 + 6x_2 \rightarrow \max (\min)$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 10, \\ 3x_1 - 3x_2 \geq 6, \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 6, \\ 3x_1 + x_2 \geq 4, \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

6) $L(X) = -3x_1 - 2x_2 \rightarrow \max (\min)$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \geq 3, \\ 2x_1 + 2x_2 \geq 2, \\ x_1 + x_2 \geq 6, \\ -2x_1 + 6x_2 \leq 20, \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

7) $L(X) = x_1 + 6x_2 \rightarrow \max (\min)$

$$\begin{cases} -2x_1 + 12x_2 \geq 8, \\ 4x_1 + 2x_2 \leq 10, \\ 3x_1 - 4x_2 \geq 2, \\ 4x_1 + 5x_2 \geq 8, \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

8) $L(X) = 4x_1 + 2x_2 \rightarrow \max (\min)$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \geq 7, \\ 2x_1 + x_2 \geq 8, \\ -x_1 + 2x_2 \leq 6, \\ -2x_1 + 8x_2 \geq 4, \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

9) $L(X) = 3x_1 + 4x_2 \rightarrow \max (\min)$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \geq 8, \\ 4x_1 + 4x_2 \geq 18, \\ -x_1 + x_2 \leq 1, \\ \qquad x_2 = 2, \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

3.2. Симплекс-метод решения задачи линейного программирования

Впервые симплексный метод был предложен американским ученым Дж. Данцигом в 1949 г, однако, еще в 1939 г идеи были разработаны российским ученым Л.В. Канторовичем.

Симплексный метод, позволяющий решить любую ЗЛП, универсален. В настоящее время он используется для компьютерных расчетов, однако несложные примеры с применением симплексного метода можно решить и вручную.

Для реализации симплексного метода – последовательного улучшения решения – необходимо освоить три основных элемента:

- Способ определения какого-либо первоначального допустимого базисного решения задачи;
- Правило перехода к лучшему решению;
- Критерий проверки оптимальности найденного решения

Для использования симплекс-метода ЗЛП должна быть приведена к каноническому виду, путем преобразования неравенств в равенства и введения дополнительных переменных.

Данная форма задачи ЛП необходима, потому что она позволяет получить ***базисное решение***, которое определяет все крайние точки пространства решений. Симплекс-метод позволяет эффективно найти оптимальное решение среди базисных.

Практические расчеты при решении реальных задач симплексным методом выполняются в настоящее время с помощью компьютеров. Однако, если расчеты осуществляются без ЭВМ, то удобно использовать ***симплексные таблицы***.

Алгоритм составления симплексных таблиц следующий:

1) после введения добавочных переменных систему уравнений и линейную функцию записываем в виде расширенной системы;
2) исходную расширенную систему заносим в первую симплексную таблицу. В строку, в которой приведено уравнение для линейной функции называется ***оценочной.*** В ней указываются коэффициенты функции с противоположным знаком. В левом столбце таблицы записываются основные переменные (базис), в первой строке – все переменные, отмечая основные, в последнем столбце – свободные члены расширенной системы. В рабочую часть таблицы заносятся коэффициенты a_{ij}. Преобразуем таблицу по определенным правилам.
3) проверяем выполнение критерия оптимальности при решении задачи на максимум – наличие в первой строке отрицательных коэффициентов, если таких нет, то решение оптимально;
4) если критерий оптимальности не выполнен, то наибольший по модулю отрицательный коэффициент в первой строке определяет ***разрешающий столбец.*** Далее составляют оценочные ограничения каждой строки. Определяем ***разрешающую строку и разрешающий элемент;***
5) переходим к следующей таблице по правилам:

a. в левом столбце записываем новый базис,

b. в столбца, соответствующих основным переменным, проставляем нули и единицы,

c. новую строку получаем из старой делением на разрешающий элемент,

d. все остальные элементы вычисляем по правилу прямоугольника.

Пример 4

Для изготовления различных изделий *A, B* и *C* предприятие использует три различных вида сырья. Нормы расхода сырья на производство одного изделия каждого вида, цена одного изделия *A, B* и *C,* а также общее количество сырья каждого вида, которое может быть использовано предприятием, приведены в табл.4.1.

Таблица 1 – Исходные данные

Вид сырья	Нормы затрат сырья (кг) на одно изделие			Общее количество сырья (кг)
	A	B	C	
1	18	15	12	360
2	6	4	8	192
3	5	3	3	180
Цена изделия, руб.	9	10	16	

Изделия *A, B* и *C* могут производиться в любых соотношениях (сбыт обеспечен), но производство ограничено выделенным предприятию сырьем каждого вида.

Составить план производства изделий, при котором общая стоимость всей произведенной предприятием продукции является максимальной.

Решение

Составим математическую модель задачи. Искомый выпуск изделий *A* обозначим через x_1, изделий *B* - через x_2, изделий *C* - через x_3.

Поскольку имеются ограничения на выделенный предприятию фонд сырья каждого вида, переменные x_1, x_2, x_3 должны удовлетворять следующей системе неравенств:

$$\begin{cases} 18x_1 + 15x_2 + 12x_3 \le 360 \\ 6x_1 + 4x_2 + 8x_3 \le 192 \\ 5x_1 + 3x_2 + 3x_3 \le 180 \end{cases}$$

Общая стоимость произведенной предприятием продукции при условии выпуска x_1 изделий *A,* x_2 изделий *B* и x_3 изделий *C* составляет

$$F = 9x_1 + 10x_2 + 16x_3$$

По своему экономическому содержанию переменные x_1, x_2, x_3 могут принимать только лишь неотрицательные значения.

Таким образом, приходим к следующей математической задаче: среди всех неотрицательных решений системы неравенств требуется найти такое, при котором функция принимает максимальное значение.

Запишем эту задачу в форме основной задачи линейного программирования. Для этого перейдем от ограничений-неравенств к ограничениям-равенствам. Введем три дополнительные переменные, в результате чего ограничения запишутся в виде системы уравнений

$$\begin{cases} 18x_1 + 15x_2 + 12x_3 + S_1 \le 360 \\ 6x_1 + 4x_2 + 8x_3 + S_2 \le 192 \\ 5x_1 + 3x_2 + 3x_3 + S_3 \le 180 \end{cases}$$

Эти дополнительные переменные по экономическому смыслу означают неиспользуемое при данном плане производства количество сырья того или иного вида. Например, x_4 - это неиспользуемое количество сырья 1 вида.

Составляем первую симплексную таблицу.

Таблица 2 – Первая симплексная таблица

Базис	F	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	Решение
F	1	-9	-10	-16	0	0	0	0
S_1	0	18	15	12	1	0	0	360
S_2	0	6	4	8	0	1	0	192
S_3	0	5	3	3	0	0	1	180

Этот план, конечно, не является оптимальным. Это видно и из 1-й строки табл.2, так как в ней имеются три отрицательных числа.

Отрицательные числа не только свидетельствуют о возможности увеличения общей стоимости производимой продукции, но и показывают, насколько увеличится эта сумма при введении в план единицы того или другого вида продукции.

Так, число -9 означает, что при включении в план производства одного изделия *А* обеспечивается увеличение выпуска продукции на 9 руб. Если включить в план производства по одному изделию *В* и *С,* то общая стоимость изготовляемой продукции возрастет соответственно на 10 и 16 руб. Поэтому с экономической точки зрения наиболее целесообразным является включение в план производства изделий *С.*

Это же необходимо сделать и на основании формального признака симплексного метода, поскольку максимальное по абсолютной величине отрицательное число стоит в 1-й строке столбца x_3. Следовательно, в базис введем x_3.

Определяем переменную, подлежащую исключению из базиса. Для этого находим отношение.

Таблица 3 – Составление неотрицательных отношений

Базис	x_3	Решение	Отношение
S_1	12	360	(30)
S_2	8	***192***	***(24)***
S_3	3	180	(60)

(360/12; 192/8; 180/3) = 192/8

Найдя число 192/8 = 24, мы тем самым с экономической точки зрения определили, какое количество изделий *С* предприятие может изготовлять с учетом норм расхода и имеющихся объемов сырья каждого вида.

Так как сырья данного вида соответственно имеется 360, 192 и 180 кг, а на одно изделие *С* требуется затратить сырья каждого вида соответственно 12, 8 и 3 кг, то максимальное число изделий *С,* которое может быть изготовлено предприятием, равно min (360/12; 192/8; 180/3) 192/8 = 24, т.е. ограничивающим фактором для производства изделий *С* является имеющийся объем сырья II вида. С учетом его наличия предприятие может изготовить 24 изделия *С.* При этом сырье II вида будет полностью использовано.

Следовательно, вектор S_2 подлежит исключению из базиса. Столбец вектора x_3 и S_2 строка являются ***направляющими***.

Составляем таблицу 2 итерации.

Процесс вычисления нового базисного решения состоит из двух этапов.

1. Вычисление элементов новой ведущей строки.

   Новая ведущая строка = Текущая ведущая строка / Ведущий элемент

2. Вычисление элементов остальных строк, включая F-строку.

   Новая строка = Текущая строка – Ее коэффициент в ведущем столбце × Новая ведущая строка.

Сначала заполняем строку вектора, вновь введенного в базис, т.е. строку, номер которой совпадает с номером направляющей строки. Здесь направляющей является x_3 строка. Элементы этой строки получаются из соответствующих элементов делением их на разрешающий элемент (т.е. на 8).

Таблица 4 –Вторая симплексная таблица

Базис	F	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	Решение
F	1	3	-2	0	0	2	0	384
S_1	0	9	***9***	0	1	-3/2	0	72
x_3	0	3/4	1/2	1	0	1/8	0	24
S_3	0	11/4	3/2	0	0	-3/8	1	108

Из данных табл. следует, что найденный на 2 итерации план задачи не является оптимальным. Это видно и из 1-й строки *табл.*, поскольку в столбце x_2 стоит *отрицательное число* -2. Значит, в базис следует ввести x_2, т.е. в новом плане следует предусмотреть выпуск изделий *B*.

Определяем переменную, подлежащую исключению из базиса. Для этого находим отношения.

Таблица 5 – Составление неотрицательных отношений

Базис	x_2	Решение	Отношение
S_1	9	72	***8***
x_3	1/2	24	48
S_3	3/2	108	72

Следовательно, исключению из базиса подлежит вектор S_1.

Составляем таблицу 3 итерации.

Таблица 6 –Вторая симплексная таблица

Базис	F	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	Решение
F	1	5	0	0	2/9	5/3	0	400
x_2	0	1	1	0	1/9	-1/6	0	8
x_3	0	1/4	0	1	-1/18	5/24	0	20
S_3	0	5/4	0	0	-1/6	-1/8	1	96

Проверяем, является ли данный опорный план оптимальным или нет. Для этого рассмотрим 1-ю строку табл. В этой строке среди чисел нет отрицательных. Это означает, что найденный опорный план является оптимальным F_{max}=400. Следовательно, план выпуска продукции, включающий изготовление 8 изделий *B* и 20 изделий *C,* является оптимальным. При данном плане выпуска изделий полностью используется сырье 1 и 2 видов и остается неиспользованным 96кг сырья 3 вида. Стоимость производимой продукции равна 400 руб.

Оптимальным планом производства продукции не предусматривается изготовление изделий *А*. Введение в план выпуска продукции изделий вида *А* привело бы к уменьшению указанной общей стоимости. Это видно из 1-й строки столбца x_1, где число 5 показывает, что при данном плане включение в него выпуска единицы изделия *А* приводит лишь к уменьшению общей величины стоимости на 5 руб.

Задачи для самостоятельного решения

1. Составить математическую модель задачи, дав экономическую интерпретацию переменным, функции цели и системе ограничений.
2. Решить задачу симплекс-методом. В процессе решения дать экономическую интерпретацию каждого шага.
3. Решить задачу с использованием компьютера, сопроводив решение анализом полученного результата. Распечатать отчет по результатам (Приложение 3).

Варианты:

1.

Сырье	Норма расхода сырья на единицу продукции		Ресурсы (b_i)
	A	B	
1	2	1	2400
2	1	5	1800
3	3	-	2000
Цена (c_j)	7,5	3	

2.

Сырье	Норма расхода сырья на единицу продукции		Ресурсы (b_i)
	A	B	
1	1	1	4500
2	2	3	1200
3	3	-	2300
Цена (c_j)	7,5	3	

3.

Сырье	Норма расхода сырья на единицу продукции		Ресурсы (b_i)
	A	B	
1	4,5	1	2400
2	1	5	820
3	-	10	2000
Цена (c_j)	10,5	3	

4.

Сырье	Норма расхода сырья на единицу продукции		Ресурсы (b_i)
	A	B	
1	2	1	2600
2	1,5	5	2200
3	3	2	1000
Цена (c_j)	9	3	

5.

Сырье	Норма расхода сырья на единицу продукции		Ресурсы (b_i)
	A	B	
1	2	1	2700
2	1	5	3200
3	3	-	1500
Цена (c_j)	13	3	

6.

Сырье	Норма расхода сырья на единицу продукции		Ресурсы (b_i)
	A	B	
1	2	1	2000
2	1	7	1400
3	4	-	2000
Цена (c_j)	8	3	

7.

Сырье	Норма расхода сырья на единицу продукции		Ресурсы (b_i)
	A	B	
1	1	1	2500
2	2	5	1500
3	5	-	2000
Цена (c_j)	9	4	

8.

Сырье	Норма расхода сырья на единицу продукции		Ресурсы (b_i)
	A	B	
1	6	1	2400
2	1	8	800
3	-	10	2000
Цена (c_j)	10	4	

9.

Сырье	Норма расхода сырья на единицу продукции		Ресурсы (b_i)
	A	B	
1	2	2	2400
2	3	5	2100
3	3	2	1200
Цена (c_j)	7	5	

10.

Сырье	Норма расхода сырья на единицу продукции		Ресурсы (b_i)
	A	B	
1	3	1	2700
2	1	8	3200
3	5	-	1500
Цена (c_j)	11	3	

11.

Сырье	Норма расхода сырья на единицу продукции		Ресурсы (b_i)
	A	B	
1	4	3	2400
2	1	5	1800
3	4	-	2000
Цена (c_j)	6	2	

12.

Сырье	Норма расхода сырья на единицу продукции		Ресурсы (b_i)
	A	B	
1	2	5	1500
2	2	3	1200
3	4	-	2400
Цена (c_j)	8	3	

3.3.Транспортная задача линейного программирования

Математическая постановка задачи

Общая постановка ТЗ состоит в определении оптимального плана перевозок некоторого однородного груза из m пунктов отправления $A_1, A_2, \ldots, A_m$ в n пунктов назначения $B_1, B_2, \ldots, B_n$.

При этом в качестве критерия оптимальности берется минимальная стоимость перевозок всего груза (минимальное время его доставки).

Исходные параметры модели ТЗ

1) n – количество пунктов отправления, m – количество пунктов назначения.
2) a_i – запас продукции в пункте отправления A_i ($i = 1,n$) [ед. прод.].
3) b_j – спрос на продукцию в пункте назначения B_j ($j = 1,m$) [ед. прод.].
4) c_{ij} – тариф (стоимость) перевозки единицы продукции из пункта отправления A_i в пункт назначения B_j [руб. / ед. прод.].

Искомые параметры модели ТЗ

1) x_{ij} – количество продукции, перевозимой из пункта отправления A_i в пункт назначения B_j [ед. прод.].
2) $L(X)$ – транспортные расходы на перевозку всей продукции [руб.].
Т.о., математическая постановка ТЗ состоит в определении минимального значения функции

$$F = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} , \quad (1)$$

при условиях

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \left(j = \overline{1,n}\right), \quad (2)$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_j, \left(j = \overline{1,m}\right), \quad (3)$$

$$x_{ij} \geq 0, \left(i = \overline{1,m}; \overline{1,n}\right). \quad (4)$$

ЦФ представляет собой общие транспортные расходы на осуществление всех перевозок в целом.

Первая группа ограничений указывает, что запас продукции в любом пункте отправления должен быть равен суммарному объему перевозок продукции из этого пункта.

Вторая группа ограничений указывает, что суммарные перевозки продукции в некоторый пункт потребления должны полностью удовлетворить спрос на продукцию в этом пункте.

Наглядной формой представления модели ТЗ является *транспортная матрица*.

Из модели следует, что сумма запасов продукции во всех пунктах отправления должна равняться суммарной потребности во всех пунктах потребления, т.е. $\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{m} b_j$.

Если это условие выполняется, то ТЗ называется ***сбалансированной*** (закрытой), в противном случае – ***несбалансированной*** (открытой).

Таблица 7 - Общий вид транспортной матрицы

Пункт отправления A_i	Пункт назначения (потребления) B_j				Запасы, ед. прод.
	B_1	B_2	…	B_m	
A_1	c_{11} (руб/ед.прод)	c_{112}	….	c_{1m}	a_1
A_2	c_{21}	c_{22}	….	c_{2m}	a_2
...	….	….	….	….	….
A_n	c_{n1}	c_{n2}	….	c_{nm}	a_n
Потребность ед. прод.	b_1	b_2	….	b_m	$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{m} b_j$

Для открытой модели может быть два случая:

- суммарные запасы превышают суммарные потребности
- суммарные потребности превышают суммарные запасы

В случае, когда *суммарные запасы превышают суммарные потребности*, необходим дополнительный **фиктивный** (реально не существующий) пункт потребления, который будет формально потреблять существующий излишек запасов. Если *суммарные потребности превышают суммарные запасы*, то необходим дополнительный **фиктивный** пункт отправления, формально восполняющий существующий недостаток продукции в пунктах отправления. Для фиктивных перевозок вводятся **фиктивные** тарифы.

Транспортная задача имеет $n + m$ уравнений с mn неизвестными.

Матрицу $X = (x_{ij})_{m,n}$, удовлетворяющую условиям (1) – (4), называют планом перевозок транспортной задачи (x_{ij} - перевозками).

План X, при котором целевая функция (1) обращается в минимум, называется **оптимальным**.

План транспортной задачи называется **опорным**, если из его основных коммуникаций невозможно составить замкнутый маршрут.

Методы составления первоначальных опорных планов

Метод северо-западного угла используют для нахождения произвольного опорного плана транспортной задачи.

Схема метода:

1) Полагают верхний левый элемент матрицы X

$$x_{11} = min(a_1, b_1). \quad (5)$$

Возможны три случая:

а) если $a_1 < b_1$, то $x_{11} = a_1$ и всю первую строку, начиная со второго элемента, заполняют нулями;

б) если $a_1 > b_1$, то $x_{11} = b_1$, а все оставшиеся элементы первого столбца заполняют нулями;

в) если $a_1 = b_1$, то $x_{11} = a_1 = b_1$, а все оставшиеся элементы первых столбца и строки заполняют нулями.

2) Пусть проделано k шагов, k_μ - й шаг состоит в следующем.

Определяют верхний левый элемент незаполненной части матрицы X. Пусть это элемент $x_{\lambda\mu}(\lambda + \mu = k + \lambda)$.

Тогда полагают

$$x_{\lambda\mu} = min\left(a_\lambda^{(k)}, b_\mu^{(k)}\right), \tag{6}$$

где

$$a_\lambda^{(k)} = a_\lambda - \sum_{j=1}^{\mu-1} x_{\lambda j}\ , \tag{7}$$

и

$$b_\mu^{(k)} = b_\mu \text{ - } \sum_{j=1}^{\lambda\ \ 1} x_{\mu i}\ . \tag{8}$$

Если $a_\lambda^k < b_\mu^k$, то заполняют нулями λ -ю строку начиная с *(μ + 1)*-го элемента. В противном случае заполняют нулями оставшуюся часть μ -го столбца.

Пример 5

На три базы A_1, A_2, A_3 поступил однородный груз в количествах равных 140, 180, 160 ед. Этот груз требуется перевезти в пять пунктов назначения B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 соответственно в количествах 60, 70, 120, 130, и 100 ед. Тарифы перевозок единицы груза с каждого из пунктов отправления в соответствующие пункты назначения указаны в следующей таблице:

Таблица 8 - Тарифы перевозок единицы груза

Пункты отправления	Пункты назначения					Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	2	3	4	2	4	140
A_2	8	4	1	4	1	180
A_3	9	7	3	7	2	160
Потребности	60	70	120	130	100	480

Найти план перевозок данной транспортной задачи методом северо-западного угла.

В задаче число пунктов отправления m=3, а число пунктов назначения $n=5$. следовательно, опорный план задачи определяется числами, стоящими в 5 + 3 – 1 = 7 заполненных клетках.

Заполнение таблицы начнем с клетки для неизвестного x_{11}, т.е. попытаемся удовлетворить потребности первого пункта назначения за счет запасов первого пункта отправления. Т.к. запасы пункта A_1 больше, чем потребности пункта B_1, то полагаем $x_{11}=60$, записываем это значение в соответствующей клетке таблицы 2 и временно исключаем из рассмотрения столбец B_1, считая, что при этом запасы пункта A_1 равными 80.

Таблица 9 - Опорный план задачи

Пункты отправления	Пункты назначения					Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	2 60	3 70	4 10	2	4	140
A_2	8	4	1 110	4 70	1	180
A_3	9	7	3	7 60	2 100	160
Потребности	60	70	120	130	100	480

Рассмотри первые из оставшихся пунктов отправления A_1 и назначения B_2. Запасы пункта A_1 больше потребностей пункта B_2. Положим x_{12} = 70, запишем это значение в соответствующей клетки таблицы 9 и временно исключим из рассмотрения столбец B_2. В пункте A_1 запасы считаем равными 10 ед. Снова рассмотрим первые из оставшихся пунктов A_1 и назначения B_3. Потребности пункта B_3 больше оставшихся запасов пункта A_1. Положим x_{13} = 10 и исключим из рассмотрения строку A_1. Значение x_{13} = 10 запишем в соответствующую клетку таблицы 9.

Аналогично заполнив остальные клетки таблицы 9, получаем опорный план

$$X = \begin{pmatrix} 60 & 70 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 110 & 70 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 60 & 100 \end{pmatrix}$$

Согласно данному плану перевозок, общая стоимость перевозок всего груза составляет

F = 2*60+3*70+4*10+1*110+4*70+7*60+2*100 = 1380.

Метод минимального элемента позволяет построить начальный опорный план транспортной задачи и является вариантом метода северо-западного угла, учитывающим специфику матрицы $C = (c_{ij})_{mn}$.

В отличие от метода северо-западного угла данный метод позволяет сразу получить достаточно экономичный план и сокращает общее количество итераций по его оптимизации.

Схема метода:

1) Элементы матрицы C нумеруют, начиная от минимального в порядке возрастания, а затем в этом же порядке заполняют матрицу X^0.
2) Пусть элементом с минимальным порядковым номером оказался элемент x_{ij}^0. Тогда полагают

$$x_{ij}^0 = min(a_i, b_j). \qquad (9)$$

Возможны три случая:

а) если $min(a_i, b_j) = a_i$, то оставшуюся часть i-й строки заполняют нулями;

б) если $min(a_i, b_j) = b_j$, то оставшуюся часть j-го столбца заполняют нулями;

в) если $a_i = b_j$, то оставшуюся часть строки и столбца заполняют нулями.

3) Далее этот процесс повторяют с незаполненной частью матрицы.

4) Пусть элементом с *k*-ым порядковым номером оказался $x_{\lambda\mu}^{k}$.

Тогда

$$x_{\lambda\mu}^{k} = min\left(a_{\lambda}^{(k)}, b_{\mu}^{(k)}\right), \tag{10}$$

где

$$a_{\lambda}^{(k)} = a_{\lambda} - \sum_{j=1}^{\mu-1} x_{\lambda j}^{g} \quad \mathrm{g} = 1 \ldots \mathrm{k} - 1, \tag{11}$$

$$b_{\mu}^{(k)} = b_{\mu} - \sum_{i=1}^{\lambda-1} x_{\mu i}^{u} \quad \mathrm{u} = 1 \ldots \mathrm{k} - 1. \tag{12}$$

Возможны три случая:

а) $a_{\lambda}^{k} < b_{\mu}^{k}$, тогда $x_{\lambda\mu}^{(k)} = a_{\lambda}^{(k)}$ и оставшуюся часть строки λ заполняют нулями;

б) $a_{\lambda}^{k} > b_{\mu}^{k}$, тогда $x_{\lambda\mu}^{(k)} = b_{\mu}^{(k)}$ и остаток столбца μ заполняют нулями;

в) $a_{\lambda}^{k} = b_{\mu}^{k}$, тогда оставшуюся часть строки λ и столбца μ заполняют нулями.

Пример 6

Четыре предприятия для производства продукции используют три вида сырья. Потребности в сырье каждого из предприятий соответственно равны 120, 50, 190, 110 ед. Сырье сосредоточено в трех местах получения, а запасы соответственно равны 160, 140, 170 ед. На каждое предприятие может завозиться из любого пункта его получения. Тарифы перевозок определены в таблице 10.

Таблица 10 - Тарифы перевозок единицы груза

Пункты отправления	Пункты назначения				Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	2	3	4	2	140
A_2	8	4	1	4	180
A_3	9	7	3	7	160
Потребности	60	70	120	130	480

Составить такой план перевозок, при котором общая стоимость перевозок является минимальной. Найти опорный план задачи методом минимального элемента.

Исходные данные задачи запишем в виде таблицы 10. Минимальный тариф, равный 1, находится в клетке для переменной x_{13}. Положим $x_{13}=160$, запишем это значение в соответствующую клетку в таблице 11 и исключим временно из рассмотрения строку A_1. Потребности пункта назначения B_3 считаем равными 30 ед.

Таблица 11 - Опорный план задачи

Пункты отправления	Пункты назначения				Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	7	8	1 160	2	160
A_2	4 120	5	9	8 20	140
A_3	9	2 50	3 30	6 90	170
Потребности	120	50	190	110	470

В оставшейся таблице с двумя строками A_2 и A_3 и четырьмя столбцами B_1, B_2, B_3, B_4 клетка с наименьшим значением тарифа c_{ij} находится на пересечении строки A_3 и столбца B_2, где $c_{32}=2$. Положим $x_{32}=50$ и внесем это значение в соответствующую клетку таблицы.

Временно исключим из рассмотрения столбец B_2 и будем считать запасы пункта A_3 равными 120 ед. После этого рассмотрим оставшуюся часть таблицы с двумя строками A_2 и A_3 и тремя столбцами B_1, B_3, B_4. В ней минимальный тариф c_{ij} находится на пересечении строки A_3 и столбца B_3 и равен 3. Заполним описанным способом эту клетку и аналогично заполним клетки, находящиеся на пересечении строки A_2 и столбца B_4. В результате получим опорный план:

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 160 & 0 \\ 120 & 0 & 0 & 20 \\ 0 & 50 & 30 & 90 \end{pmatrix}.$$

При данном плане перевозок общая стоимость перевозок составляет

$$F = 1*160+4*120+8*20+2*50+3*30+6*90 = 1530.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Составить математическую модель транспортной задачи.
2. Найти оптимальный план перевозок, минимизирующий общие затраты на перевозки (тарифы на перевозку единицы продукции, объёмы запасов продукции на складах, а также объёмы заказанной продукции представлены в таблицах).

Вариант № 1

Склад	Магазины заказчики					Запасы на складе (ед. прод)
	“Анна”	“Вада”	“Ева”	“Алла”	“Мех”	
“Таганка”	1	3	4	5	2	20
“ВВЦ”	2	1	1	4	5	15
“Щёлково”	1	3	3	2	1	40
“Коньково”	3	1	4	2	3	15
Объём заказа (ед. прод)	15	10	25	5	9	

Вариант № 2

Магазин / Склад	“Росстек”	“Шер”	“Ткани”	“Мода”	“Вита”	Запасы на складе (ед.прод)
Иваново	12	14	32	20	3	54
Москва	8	10	12	24	12	32
Новгород	6	8	12	24	8	85
Серпухов	10	18	4	8	9	162
Объём заказа (ед.прод)	100	70	30	45	50	

Вариант № 3

Магазин / Склад	“Всё для дома”	“Здоровый сон”	“Фея”	“Ночное царство”	“Мех”	Запасы на складе (ед.прод)
“Вороново”	1	3	4	5	2	20
“Фили”	2	1	1	4	5	15
“Беляево”	1	3	3	2	1	40
“Выхино”	3	1	4	2	3	15
Объём заказа (ед.прод)	15	10	25	5	9	

Вариант № 4

Магазин / Склад	ВДНХ	Юго—Запад-ная	Фили	Арбат-ская	Соколь-ники	Запасы на складе (ед.прод)
Пролетарская	10	8	3	15	16	60
Митино	7	5	9	4	6	30
Строгино	2	0	14	5	20	40
Объём заказа (ед.прод)	10	20	40	30	65	

Вариант № 5

Магазин / Склад	Тверь	Рязань	Тула	Чехов	Запасы на складе (ед.прод)
Москва	5	3	7	2	25
Санкт-Петербург	2	6	4	5	36
Саратов	3	7	1	9	40
Самара	6	4	8	3	50
Объём заказа (ед.прод)	20	45	15	25	

Вариант № 6

Магазин / Склад	Сокол	Риж-ская	ВДНХ	Киев-ская	Царицыно	Запасы на складе (ед.прод)
Пражская	3	7	3	4	0	50
Волжская	6	2	5	7	4	55
Курская	8	5	8	3	4	60
Савёловская	1	3	6	5	3	20
Объём заказа (ед.прод)	30	60	40	20	15	

Вариант № 7

Магазин / Склад	Новго-род	Москва	Самара	Саратов	Тверь	Запасы складов (ед.прод)
Нижний Новгород	4	0,5	2	1	3	35
Саратов	5	2	0,5	0	2	25
Самара	4	2	0	0,5	2	30
Санкт-Петербург	2	1	4	4,5	3	40
Объём заказа (ед.прод)	30	15	25	30	25	

Вариант № 8

Магазин / Склад	"Колбасы"	"Мясо"	"Мясные деликатесы"	"Ди-на"	Запасы на складе (ед.прод)
Черкизово	1	0	0,5	2	45
Царицыно	3	2	4	1	50
Бородино	0	2,5	2	3	15
Вешняки	4	3	1,5	2	20
Объём заказа (ед.прод)	30	40	20	25	

Вариант № 9

Магазин / Склад	"Булоч-ная"	"Хлеб"	"Сла-дос-ти"	"Сдо-ба"	"Сладко-ежка"	Запасы на складе (ед.прод)
"Крекер"	2,5	4	1	3	1,5	40
"Славянка"	3,5	2	3	1,6	4	55
"Сластёна"	0	1	2,5	2	1	25
Объём заказа (ед.прод)	20	50	40	30	50	

Вариант № 10

Магазин / Склад	“Диана”	ГУМ	ЦУМ	“Прага”	“Елена”	Запасы на складе (ед.прод)
“Перово”	2	3	1,5	2	1	50
“Волжская”	5	6	4	5	0	80
“Пражская”	3	2	2,5	3	3,5	50
“Беговая”	1	3,5	1	0	1,5	60
Объём заказа (ед.прод)	30	50	50	40	25	

Вариант № 11

Магазин / Склад	Москва	Тверь	Санкт-Петербург	Саратов	Запасы на складе (ед.прод)
Москва	0	1	1,5	3	50
Екатеринбург	5	3	5	2	30
Саратов	3	2,5	4	0	35
Вологда	2	2	3	2	40
Объём заказа (ед.прод)	40	50	25	30	

Вариант № 12

Магазин / Склад	“Сумки”	“Мода”	“Анна”	“Галан-терея”	Запасы на складе (ед.прод)
Выхино	1	0	2	2,5	25
Арбатская	3	2,5	1,4	2	30
Каховская	2	1	4	3	40
Сокол	1,7	3	3,5	0,5	50
Объём заказа (ед.прод)	20	15	30	25	

Темы рефератов

1. Основные понятия экономико-математического моделирования социально-экономических процессов.
2. Экономико-математические методы и модели.
3. Классификация экономико-математических моделей.
4. Экономическая информация: основные свойства и классификация.
5. Информация и моделирование.
6. Статистический анализ экономической информации.
7. Основные законы распределения и их свойства.
8. Методы расчета статистических параметров и их погрешностей.
9. Временные ряды: общие сведения и подходы к их анализу.
10. Автокорреляционный анализ временных рядов.
11. Авторегрессионный анализ временных рядов.
12. Сезонные экономические процессы и их анализ.
13. Методы выравнивания (сглаживания) временных рядов.
14. Модели прогнозирования экономических процессов.
15. Методы оценки адекватности и точности трендовых моделей.
16. Прогнозирование экономических показателей.
17. Эконометрические модели: общие понятия и приложения.
18. Адаптивные модели.
19. Оценка качества эконометрических моделей.
20. Прогнозирование экономических показателей на основе эконометрических моделей.
21. Регрессионные модели финансового рынка.
22. Методы многомерного статистического анализа.
23. Математическое программирование: основные понятия.
24. Линейное программирование: основные понятия и формы записи задачи.
25. Двойственная задача линейного программирования.
26. Анализ оптимального решения (исследование устойчивости).
27. Специальные задачи линейного программирования и методы их решения.
28. Основные понятия дискретного программирования.
29. Методы решения задач линейного программирования.
30. Методы решения задач целочисленного программирования.
31. Задачи многокритериальной оптимизации и методы их решения.
32. Нелинейное (выпуклое) программирование.
33. Методы решения задач нелинейного программирования.
34. Модели оптимального управления.
35. Задачи динамического программирования.
36. Методы и модели сетевого планирования и управления.
37. Задачи стохастического программирования.
38. Модели массового обслуживания.
39. Основные понятия марковских процессов.
40. Применение экономико-математических методов в сельскохозяйственном производстве.

Основные требования к написанию реферата

Тема реферата выбирается из рекомендованного списка или по предложению студента с согласия преподавателя.

Она формулируется конкретно и составляет задачу исследования. Реферирование может быть посвящено частной проблеме или содержать обобщение различных точек зрения по определенной теме.

От обычного конспектирования научной литературы реферат отличается тем, что в нем излагаются (сопоставляются, оцениваются) различные точки зрения на анализируемую проблему и при этом составитель реферата определяет ***свое*** отношение к рассматриваемым научным позициям, взглядам или определениям, принадлежащим различным авторам. Исследовательский характер реферата представляет его основную научную ценность.

При написании реферата необходимо использовать не менее 10 источников. Объем реферата 12-15 страниц машинописного текста. Требования к оформлению реферата соответствуют требованиям оформления контрольной работы. Образец титульного листа представлен в Приложении 2.

Рекомендуемая литература

1. Математические методы [Текст] : учеб. для студентов учреждений сред. проф. образования : учеб. для студентов вузов, обучающихся по спец. 080801 "Прикладная информатика (по областям)" : рек. Учеб.-метод. об-нием / Т. Л. Партыка, И. И. Попов. - 2-е изд., испр. и доп. - М. : ФОРУМ : ИНФРА-М, 2015. - 463 с.
2. Математическое моделирование систем и процессов [Текст] : учеб. пособие для вузов : рек. УМО / Н. В. Голубева. - СПб. : Лань, 2013. - 191 с.
3. Толковый словарь терминов по математическому моделированию [Электронный ресурс] / Иркут. гос. с.-х. акад. ; авт.-сост.: В. Р. Елохин, Я. М. Иваньо, Н. И. Федурина. - Электрон. текстовые дан. - Иркутск : ИрГСХА, 2011.
4. Васин, Александр Алексеевич. Исследование операций [Текст] : учеб. пособие для вузов / А. А. Васин, П. С. Краснощеков, В. В. Морозов. - М. : Академия, 2008. - 464 с. ХР(2)
5. Голышева, Светлана Павловна. Исследование операций [Текст] : учеб.-метод. пособие для студентов II курса энергет. фак. очн. и заочн. формы обучения / С. П. Голышева ; Иркут. гос. с.-х. акад., каф. математики. - Иркутск : ИрГСХА, 2006. - 86 с.
6. Давыдов, Евгений Георгиевич. Элементы исследования операций [Текст] : учеб. пособие для вузов : допущено Учеб.-метод. об-нием / Е. Г. Давыдов. - М. : КноРус, 2010. - 158 с.
7. Исследование операций в экономике [Текст] : учеб. пособие для вузов / Н. Ш. Кремер [и др.] ; под ред. Н. Ш. Кремера. - 2-е изд., перераб. и доп. - М. : Юрайт, 2010. - 430 с. ХР(2)
8. Таха, Хемди А. Введение в исследование операций [Текст] : пер. с англ. / Х. А. Таха. - 7-е изд. - М. : Вильямс, 2005. - 901 с. + 1 эл. опт. диск (CD-ROM)

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение 1

Образец титульного листа

МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА РФ
ИРКУТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ А.А. ЕЖЕВСКОГО

Институт экономики, управления и прикладной информатики
Кафедра Информатики и математического моделирования

Контрольная работа
«МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ»

Выполнил:
Студент __-го курса, заочного отделения ИЭУПИ
Ф.И.О.
Шифр 11111
Проверил:
доцент кафедры информатики и математического моделирования
Барсукова М.Н.

Иркутск 2017

Приложение 2

Образец титульного листа

МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА РФ
ИРКУТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ А.А. ЕЖЕВСКОГО

Институт экономики, управления и прикладной информатики
Кафедра Информатики и математического моделирования

РЕФЕРАТ

на тему: «**Экономико-математические методы и модели**»
по дисциплине: «Математическое моделирование»

Выполнил:
Студент __-го курса, заочного отделения ИЭУПИ
Ф.И.О.
Шифр 11111
Проверил:
доцент кафедры информатики и математического моделирования
Барсукова М.Н.

Иркутск 2017

Приложение 3

Решение задач линейного программирования в Microsoft Excel

Фабрика имеет в своем распоряжении определенное количество ресурсов: рабочую силу, деньги, сырье, оборудование, производственные площади и т. п. Допустим, например, ресурсы трех видов рабочая сила, сырье и оборудование имеются в количестве соответственно 80(чел/дней), 480(кг), 130(станко/часов). Фабрика может выпускать ковры четырех видов. Информация о количестве единиц каждого ресурса необходимых для производства одного ковра каждого вида и доходах, получаемых предприятием от единицы каждого вида товаров, приведена в табл.1.

Таблица 1

Ресурсы	Нормы расхода ресурсов на единицу изделия				Наличие ресурсов
	Ковер A	Ковер B	Ковер C	Ковер D	
Труд	7	2	2	6	80
Сырье	5	8	4	3	480
Оборудование	2	4	1	8	130
Цена (тыс.руб.)	3	4	3	1	

Требуется найти такой план выпуска продукции, при котором общая стоимость продукции будет максимальная.

1. *Составим математическую модель согласно условию задачи.*

Введем основные переменные задачи:

x_1, x_2, x_3, x_4 - количество ковров каждого типа,

c_i – удельная прибыль на единицу изделия,

a_i – расход ресурсов на единицу изделия,

b_i – запас ресурсов по каждому изделию.

С учетом введенных переменных математическая модель задачи выглядит следующим образом:

Целевая функция $f(x) = 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 + x_4 \to \max$

Ограничения по ресурсам

$$\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 6x_4 \le 80 \\ 5x_1 + 8x_2 + 4x_3 + 3x_4 \le 480 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 + 8x_4 \le 130 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0 \end{cases}$$

2. *Введем исходные данные*

	A	B	C	D	E	F	G	H
1			переменные					
2		x1	x2	x3	x4			
3	значение					ЦФ		
4	коэффициент целевой функции	3	4	3	1			
5			ограничения					
6	вид ресурсов					левая часть	знак	правая часть
7	труд	7	2	2	6			80
8	сырье	5	8	4	3			480
9	оборудование	2	4	1	8			130
10								

Рисунок 1 – Пример ввода исходных данных задачи

2.1Ввод зависимости для целевой функции

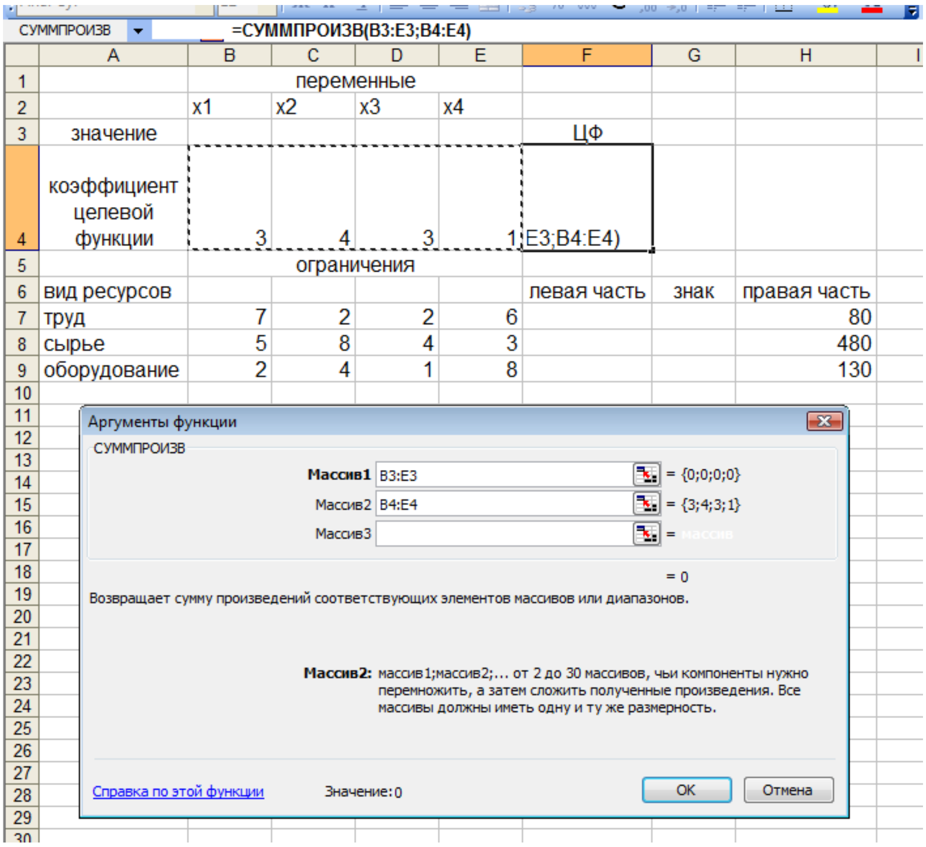

Рисунок 2 – Пример ввода зависимости для целевой функции

Аналогично введем зависимости для ограничений.

3. Запуск надстройки Поиск решения

Данные→Поиск решения

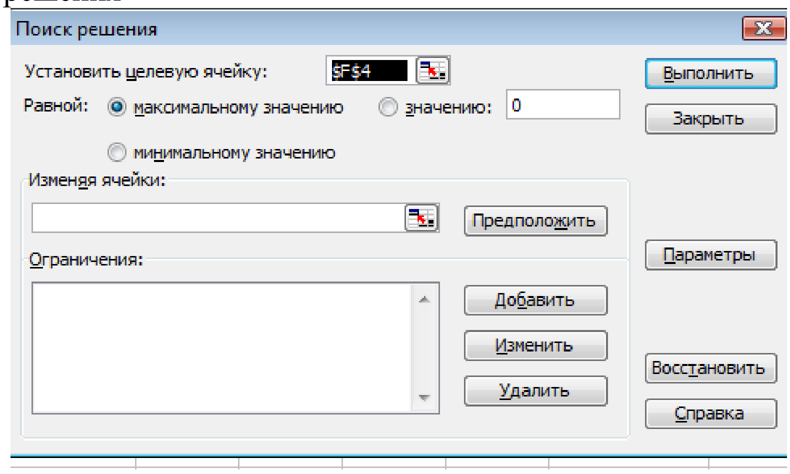

Рисунок 3 – Окно надстройки «Поиск решения»

Установим в соответствующей строке ссылку на целевую ячейку и основные переменные.

3.1Ввод ограничений

✓ Курсор в поле *Добавить*. Появится диалоговое окно *Добавление ограничения*

✓ После ввода последнего ограничения ввести **ОК**.

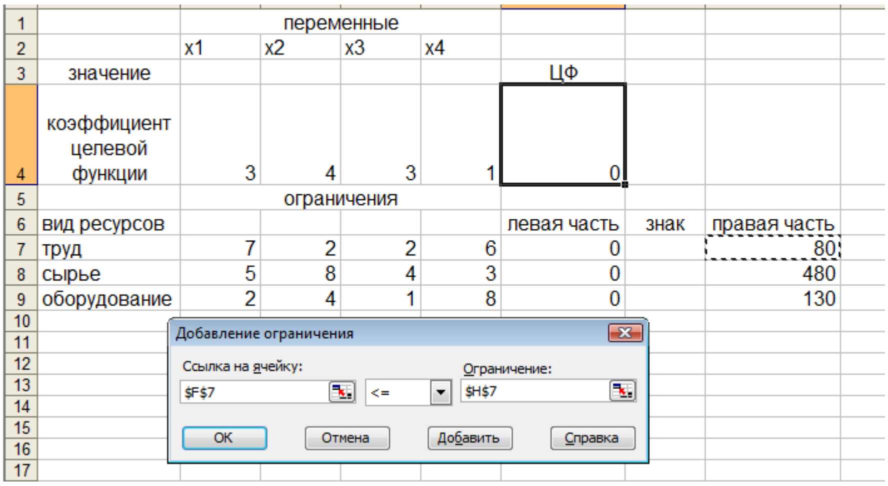

Рисунок 4 – Пример добавления ограничений

4. *Ввод параметров для решения ЗЛП*

✓ Открыть окно *Параметры поиска решения.*
✓ Установить флажок *Линейная модель*
✓ Установить флажок *Неотрицательные значения*.
✓ **ОК**
✓ **Выполнить**

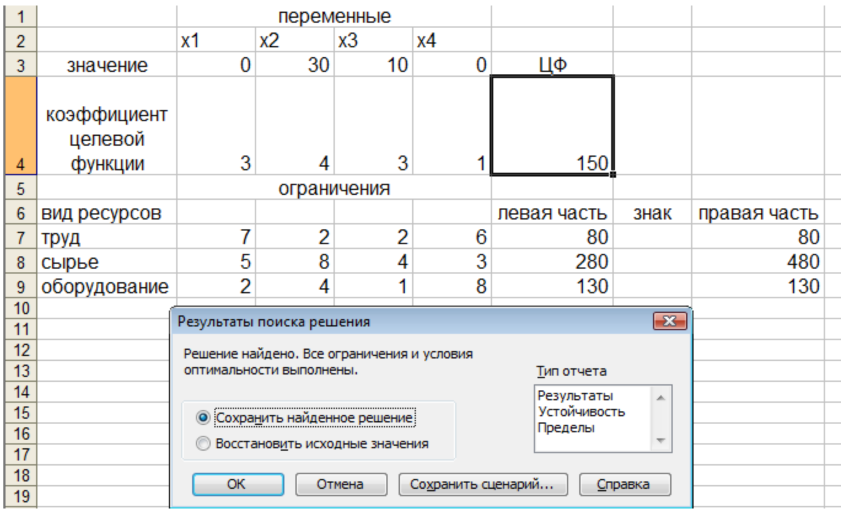

Рисунок 5 – Окно результатов поиска решения

Полученное решение означает, что максимальный доход 150 тыс. руб. фабрика может получить при выпуске 30 ковров второго вида и 10 ковров третьего вида. При этом ресурсы труд и оборудование будут использованы полностью, а из 480 кг пряжи (ресурс сырье) будет использовано 280 кг.

5. *Создание «отчета по результатам» и «отчета по устойчивости»*

В отчете по результатам содержатся оптимальные значения переменных x_1, x_2, x_3, x_4 , которые соответственно равны 0,10, 30,0; значение целевой функции – 150, а также левые части ограничений.

Microsoft Excel 11.0 Отчет по результатам
Рабочий лист: [Книга1]Лист1
Отчет создан: 19.04.2011 2:11:44

Целевая ячейка (Максимум)

Ячейка	Имя	Исходное значение	Результат
$F$4	коэффициент целевой функции ЦФ	0	150

Изменяемые ячейки

Ячейка	Имя	Исходное значение	Результат
$B$3	значение x1	0	0
$C$3	значение x2	0	30
$D$3	значение x3	0	10
$E$3	значение x4	0	0

Ограничения

Ячейка	Имя	Значение	Формула	Статус	Разница
$F$7	труд левая часть	80	$F$7<=$H$7	связанное	0
$F$8	сырье левая часть	280	$F$8<=$H$8	не связан.	200
$F$9	оборудование левая часть	130	$F$9<=$H$9	связанное	0

Рисунок 6 – Пример окна «Отчет по результатам»

Решение двойственной задачи можно найти в отчете по устойчивости. Теневые цены ресурсов труд, сырье и оборудование соответственно равны 4/3, 0, 1/3 или в десятичных дробях 1.3333, 0, 0.3333.

Microsoft Excel 11.0 Отчет по устойчивости
Рабочий лист: [Книга1]Лист1
Отчет создан: 19.04.2011 2:11:45

Изменяемые ячейки

Ячейка	Имя	Результ. значение	Нормир. стоимость	Целевой Коэффициент	Допустимое Увеличение	Допустимое Уменьшение
$B$3	значение x1	0	-7	3	7	1E+30
$C$3	значение x2	30	0	4	8	1
$D$3	значение x3	10	0	3	1	1,75
$E$3	значение x4	0	-9,666666667	1	9,666666667	1E+30

Ограничения

Ячейка	Имя	Результ. значение	Теневая Цена	Ограничение Правая часть	Допустимое Увеличение	Допустимое Уменьшение
$F$7	труд левая часть	80	1,333333333	80	150	15
$F$8	сырье левая часть	280	0	480	1E+30	200
$F$9	оборудование левая часть	130	0,333333333	130	30	90

Рисунок 7– Пример окна «Отчет по устойчивости»

Ресурсы труд и оборудование имеют отличные от нуля оценки 4/3 и 1/3 – эти ресурсы полностью используются в оптимальном плане, являются дефицитными, сдерживающими рост целевой функции. Правые части этих ограничений равны левым частям.

Ресурс сырье используется не полностью (280<480), поэтому имеет нулевую двойственную оценку (Y2=0). Этот ресурс не влияет на план выпуска продукции.