

МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
Иркутский государственный аграрный университет имени А.А. Ежевского

Сопротивление материалов

методические указания и контрольные работы
для студентов-заочников инженерного факультета
направления 35.03.06 – Агроинженерия

Иркутск, 2016 г.

УДК

Утверждена методическим советом инженерного факультета Иркутского государственного аграрного университета имени А.А. Ежевского (протокол № 9 от 28 мая 2016г.)

Составители: к.т.н., доцент Косарева А.В.;
ст. препод. Токмакова А.Л.

Рецензенты: Горбунов С.Ф. – к.т.н., доцент Иркутского филиала ФГБОУ ВО Московского государственного технического университета гражданской авиации

ВВЕДЕНИЕ

Контрольная работа по дисциплине «Механика: Сопротивление материалов» для студентов инженерного факультета состоит из заданий по разделам дисциплины «Сопротивление материалов». Все задачи имеют краткие методические указания, набор рисунков и таблицу с данными для расчетов, а также пример решения. Каждому студенту выдают задание в соответствии с последними цифрами его учебного шифра.

Последняя цифра номер строки. Предпоследняя – номер рисунка.

Все задания выполняются на листах формата А4 с одной стороны. Титульный лист оформляется в соответствии с существующими требованиями (Приложение А). Все остальные листы согласно следующих требований: отступ сверху, снизу - 20 мм, слева - 25мм; справа - 10 мм. Рисунки выполняются карандашом аккуратно и четко, с учетом условий варианта задания. Решение задачи необходимо сопровождать краткими пояснениями и в соответствии с теми обозначениям, которые даны на чертежах. Допускается оформлять контрольную работу в тетради, с учетом всех требований.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ИЗУЧЕНИЮ СОДЕРЖАНИЯ ТЕМ

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Сопротивление материалов - это наука, в которой изложены основы учения о прочности, жесткости и устойчивости деталей и элементов инженерных сооружений.

Под *прочностью* понимают способность материала конструкций и их элементов сопротивляться действию внешних сил не разрушаясь и не получая остаточные деформации, т.е выдерживать определенную нагрузку не разрушаясь. *Расчеты на прочность* дают возможность определить размеры и форму деталей, выдерживающих заданную нагрузку при наименьшей затрате материалов.

Под *жесткость* подразумевают способность материала конструкции и ее элементов сопротивляться внешним нагрузкам в отношении образования деформации (изменения формы и размеров). *Расчеты на жесткость* гарантируют, что изменение формы и размеров конструкций не превзойдут определенных норм.

Устойчивостью - способность конструкции сопротивляться и ее элементов сохранять определенную начальную форму упругого равновесия.

Расчеты на устойчивость - предотвращают возможность внезапной потери устойчивости и искривления длинных и тонких деталей.

Для определения величины и направления внутренних сил упругости используют *метод сечений*. Физический смысл метода сечений заключается в том, что брус мысленно рассекают на две части, одна из которых отбрасывается. Оставшаяся часть бруса будет находиться в равновесии, так как внутренние силы упругости, возникающие в сечении бруса, не только уравнивают внешние силы, действующие на эту часть, но и заменяют действие отброшенной части на оставшуюся часть.

Метод сечений позволяет определить только величину и направление внутренних силовых факторов, но не дает возможности определить характер их распределения по сечению. С этой целью вводится понятие напряжения.

Напряжения – это величина, численно равная внутреннему силовому фактору, действующему на единицу геометрической характеристики сечения.

За единицу напряжения принимается 1 Па:

$$1 \text{ Па} = 1 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2};$$
$$1 \text{ МПа} = 1 \frac{\text{Н}}{\text{мм}^2}.$$

При расчетах используются составляющие полного напряжения:

- *нормальное напряжение* σ , линия действия которого направлена перпендикулярно плоскости сечения;
- *касательное напряжение* τ , линия действия которого направлена вдоль сечения.

С нормальным напряжением связан отрыв частиц от тела, а касательным – сдвиг отдельных частиц или элементов относительно друг друга.

Рабочие напряжения должны быть меньше или равны допускаемым напряжениям.

Допускаемое напряжение – это напряжение, при котором данный элемент конструкции работает в нормальном (заданном) режиме.

Все сооружения и машины нужно проектировать и изготавливать так, чтобы каждый их конструктивный элемент надежно работал, без риска поломки или опасного изменения размеров и формы под действием внешних сил. Практика показывает, что все части конструкций под действием нагрузок деформируются, т.е. изменяют свою форму и размеры, а в некоторых случаях происходит разрушение конструкций.

Деформация - изменение формы и размеров тела под действием приложенных к нему нагрузок или иных причин (напр., изменение температуры).

Деформации, исчезающие после снятия нагрузок, называются *упругими*; деформации, остающиеся в теле после снятия нагрузок – *остаточными* или *пластическими*.

2. ВИДЫ ДЕФОРМАЦИЙ

На практике известно, что в процессе эксплуатации элементы конструкций испытывают следующие основные деформации:

Растяжение-сжатие.



Рисунок 1 – Приложение нагрузки при растяжении

Растяжение испытывают канаты, тросы, цепи; сжатие - колонны, кирпичная кладка.

Сдвиг.

Эту деформацию испытывают заклепки, болты, шпонки, швы сварных соединений. Деформацию сдвига, доведенную до разрушения, называют *срезом*.

Кручение.

Кручение возникает тогда, когда к брусу приложена пара сил, лежащая в плоскости, перпендикулярной оси бруса, и кручение работают валы.

Изгиб.

В данном случае нагрузка приложена в плоскости, совпадающей с продольной осью бруса, в виде пар сил, поперечной нагрузки.

3. ВИДЫ РАСЧЕТОВ

Расчет на прочность обеспечивает неразрушение конструкции.

Расчет на жесткость обеспечивает деформации конструкции под нагрузкой в пределах допустимых норм.

Расчет на выносливость обеспечивает необходимую долговечность элементов конструкции.

Расчет на устойчивость обеспечивает сохранение необходимой формы равновесия и предотвращает внезапное искривление длин стержней.

Для обеспечения прочности конструкций, работающих при ударных нагрузках (при ковке, штамповке и подобных случаях), проводятся расчеты на удар.

4. РАСТЯЖЕНИЕ, СЖАТИЕ

Растяжение-сжатие - это такой вид деформации бруса (стержня), при котором в любом его поперечном сечении возникают только продольные силы N .

Значения и направление продольной силой определяют с помощью **метода сечений**.

Во многих вращающихся деталях возникают значительные растягивающие напряжения, вызванные центробежными силами. Это относится, в частности, к таким деталям, как лопатки турбин компрессоров авиационных двигателей. Лопатки воздушных винтов.

Рассмотрим защемленный левым концом прямой брус (рис. 2), вдоль оси которого действуют силы F_1 и F_2 . Разделим данный брус на участки. **Участок** - это часть бруса постоянного поперечного сечения, в пределах которого действует не более одной силы. Применяв метод сечений, определим продольные силы N_1 и N_2 на участках.

Рассечем брус сеч. 1-1. Во всех точках бруса будут действовать внутренние распределенные силы, равнодействующая которых определится из условия равновесия одной из частей:

$$\sum F_{kz} = N_1 - F_1 = 0; \quad N_1 = F_1$$

Мы видим, что для равновесия оставленной части бруса в сечении 1-1 необходимо приложить только продольную силу N_1 , направленную вдоль оси, т.е. продольную силу. В сечении 2-2 продольная сила $N_2 = F_1 - F_2$.

Т.о., *продольная сила в поперечном сечении бруса численно равна алгебраической сумме внешних сил, расположенных по одну сторону от сечения.*

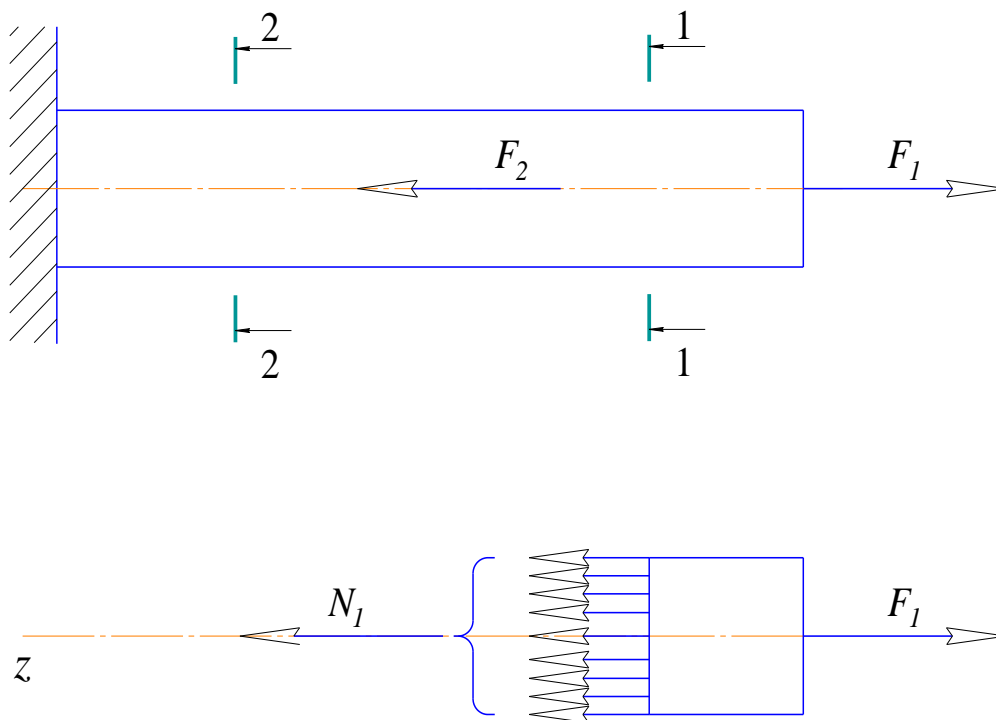


Рисунок 2 – Суть метода сечений

Очевидно, в пределах одного участка продольная сила будет иметь постоянное значение. Следует помнить, что рассматривая равновесие части бруса, расположенной не справа, а слева от сечения, мы должны ввести в уравнение равновесия реакцию защемления, определенную путем рассмотрения равновесия всего бруса. В дальнейшем, растягивающие продольные силы будем считать положительными, а сжимающие - отрицательными. При изучении ряда деформаций мы будем мысленно представлять себе брус, состоящие из бесчисленного количества волокон, параллельных оси, и предполагать, что при деформации растяжения-сжатия волокна не надавливают друг на друга.

Если изготовить прямой брус из резины, нанести на его поверхности сетку продольных и поперечных линий и подвергнуть брус деформации растяжения, то можно отметить следующее:

1. Поперечные линии останутся в плоскостях, перпендикулярных оси, а расстояние между ними увеличится.
2. Продольные линии останутся прямыми, а расстояния между ними уменьшатся.

Этот пример поддерживает гипотезу плоских сечений.

Гипотеза плоских сечений (гипотеза Бернулли) – сечения стержня, плоские и перпендикулярные к его оси до деформации, остаются плоскими и перпендикулярными к оси и после деформации.

Если представить стержень состоящим из отдельных тонких продольных волокон, то на основании гипотезы плоских сечений и с учётом того, что сечения перемещаются параллельно самим себе, можно заключить, что все волокна удлиняются (укорачиваются) на одну величину, а значит, в них действуют одинаковые по интенсивности внутренние силы, т.е. напряжения при растяжении (сжатии) распределены по сечению стержня равномерно.

$$\sigma = \frac{N}{A}$$

N - продольная сила;

A - площадь поперечного сечения.

Если площадь поперечного сечения стержня непостоянна по его длине, то различны и напряжения.

При расчёте стержня на прочность необходимо знать значения внутренних силовых факторов во всех его сечения. Для этого строят график (**эпюру**), показывающий, как изменяется внутренний силовой фактор (сила или момент) по длине бруса (стержня). Также строится эпюра и для нормальных напряжений.

Построить эпюры продольных сил и нормальных напряжений для ступенчатого бруса (рис 3).

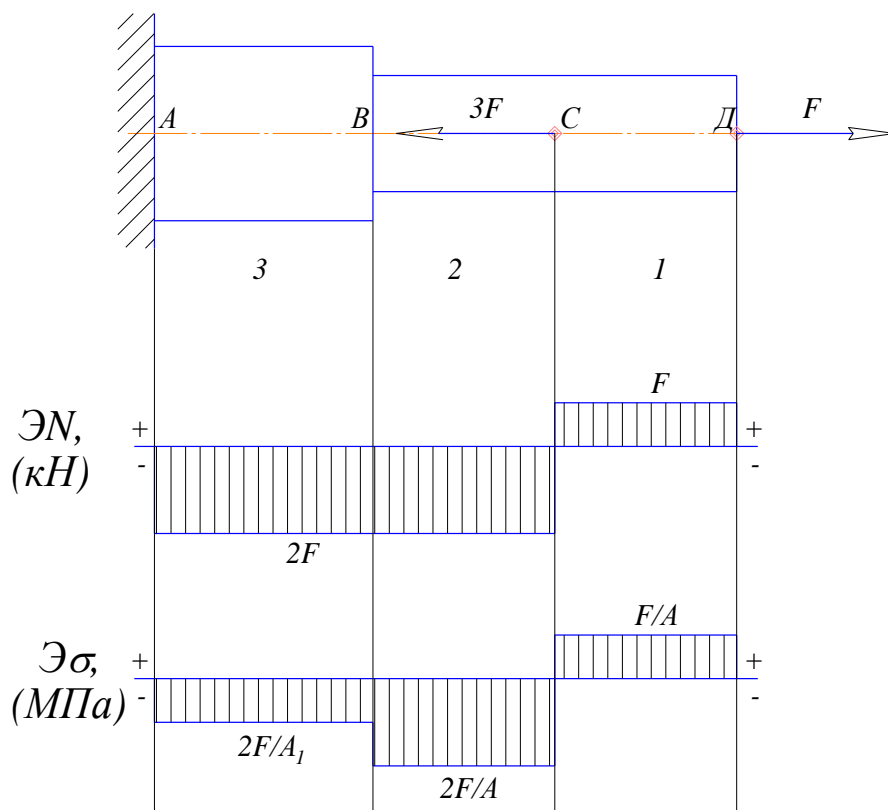


Рисунок 3 – Построение эпюр поперечных сил и изгибающих моментов

1. Разобьем брус на участки. Данный брус состоит из 3 участков.

2. Проводим ось эпюры. Величины продольных сил в произвольном сечении откладываем перпендикулярно оси эпюры, причем положительные значения N – вверх, а отрицательные – вниз. Эпюра штрихуется тонкими линиями, перпендикулярными оси. Линия штриховки дает значение продольной силы в соответствующем поперечном сечении бруса.

3. Приступим к построению эпюры "N". Применяя метод сечений, устанавливаем, что во всех поперечных сечениях первого участка действует продольная сила $N_1 = F$. Откладывая вверх от оси эпюры величину F , проводим прямую, параллельную оси эпюры. В точке С приложена сила $3F$. Применяя метод сечений, устанавливаем, что во всех поперечных сечениях 2 и 3 участков действует сила $N_2 = N_3 = F - 3F = -2F$ и эпюра N будет горизонтальной линией, расположенной на $2F$ единицы ниже оси эпюры. Очевидно, что значение ординаты эпюры продольных сил под заделкой равно реакции заделки.

4. Определяем нормальные напряжения на каждом участке по формуле: на первом участке $\sigma_1 = \frac{N_1}{A} = \frac{F}{A}$; на втором участке $\sigma_2 = \frac{N_2}{A} = \frac{-2F}{A}$; на третьем участке площадь поперечного сечения будет другая A_1 (больше чем площадь на первых участках) и тогда нормальные напряжения будут определяться $\sigma_3 = \frac{N_3}{A_1} = \frac{-2F}{A_1}$ и меньше чем на втором участке. Эпюра нормальных напряжений строится как и для продольных сил.

Продольная и поперечная деформации при растяжении и сжатии

При растяжении стержня его длина увеличивается. А размеры поперечного сечения уменьшаются, при сжатии наоборот.

Изменение длины стержня $\Delta l = l_1 - l$ называют ***линейной продольной деформацией (абсолютным удлинением)***; изменение размеров поперечного сечения $\Delta a = a_1 - a$ - ***линейной поперечной деформацией*** (рис. 4).

Интенсивность деформирования оценивают деформациями, приходящимися на единицу длины (размер сечения) стержня: ***относительной продольной ε*** и ***относительной поперечной ε'*** .

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} \qquad \varepsilon' = \frac{\Delta a}{a}$$

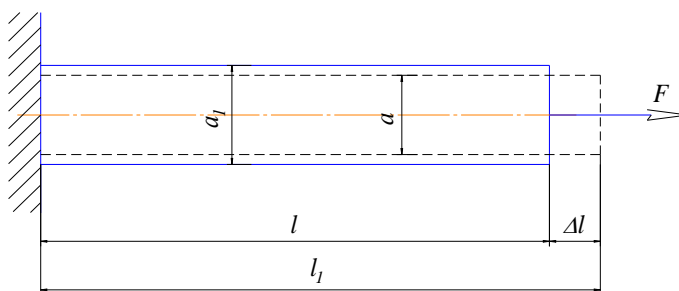


Рисунок 4 – Продольная и поперечная деформации

Относительные деформации часто определяют в процентах. При растяжении продольную деформацию (удлинение) считают положительной, поперечную (сужение сечения) – отрицательной. Экспериментально установлено, что между относительными поперечной и продольной деформациями существует зависимость

$$\varepsilon' = -\mu\varepsilon \quad \text{или} \quad \mu = \frac{\varepsilon'}{\varepsilon}$$

Здесь μ - *коэффициент поперечной деформации* или *коэффициент Пуассона*.

В пределах упругого деформирования коэффициент Пуассона для каждого материала имеет постоянное значение.

Экспериментально установлено, что в пределах упругого деформирования между нормальными напряжением σ и относительной деформацией ε существует прямая пропорциональная зависимость

$$\sigma = E\varepsilon$$

называется **законом Гука**.

Коэффициент пропорциональности E характеризует жесткость материала, т.е. его способность сопротивляться упругим деформациям, и называется **модулем упругости первого рода** (сокращенно **модуль упругости**).

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon}, \quad \text{Па}$$

$$\text{Если } \sigma = \frac{N}{A}, \quad \varepsilon = \frac{\Delta l}{l} \quad \frac{N}{A} = E \frac{\Delta l}{l}, \quad \text{тогда } \Delta l = \frac{N \cdot l}{E \cdot A}$$

Произведение EA называется **жесткостью сечения** при растяжении и сжатии. Оно характеризует физико-механические свойства материалов и геометрические размеры поперечного сечения.

Абсолютное удлинение или укорочение прямо пропорционально продольной силе, длине и обратно пропорционально жесткости сечения бруса.

Отношение EA/l называется жесткостью бруса при растяжении и сжатии. Эти формулы применимы только для брусков постоянного поперечного сечения, изготовленных из одного материала и при постоянной продольной силе. Для брусков, имеющих несколько участков, отличающихся материалом. Размерами поперечного сечения. Величиной продольной силы. Изменение длины всего бруса равно алгебраической сумме удлинений и укорочений отдельных участков.

$$\Delta l = \sum(\Delta l_i)$$

В результате растяжения (сжатия) сечения стержня перемещается. Осевое перемещение δ одного сечения относительно другого равно изменению длины участка стержня между этими сечениями. График, показывающий перемещения всех сечений стержня относительно неподвижного (или условно принятого за неподвижное) называют **эпюрой перемещений**.

5. ДЕФОРМАЦИЯ КРУЧЕНИЕ

Кручением называется такой вид деформации, при котором в любом поперечном сечении бруса возникает только крутящий момент.

Деформации кручения подвергаются многие элементы пространственных конструкций и деталей машин, встречающиеся в практике, например, валы различных приводных устройств (редукторов, металлорежущих станков, автомобилей, тракторов и т.п.), трансмиссионные валы, пружины и даже обыкновенный болт.

Чаще встречаются случаи одновременного действия кручения и изгиба. При относительно небольших изгибающих моментах деформацию изгиба не учитывают и брус рассчитывают только на кручение.

Деформации кручения возникают, если к прямому брусу в плоскостях (рис. 5), перпендикулярных оси, приложить пары сил. Моменты этих пар будем называть **вращающими**. Так как на кручение работают валы, обычно имеющие круглое или кольцевое сечение, то рассмотрим кручение круглого цилиндра.

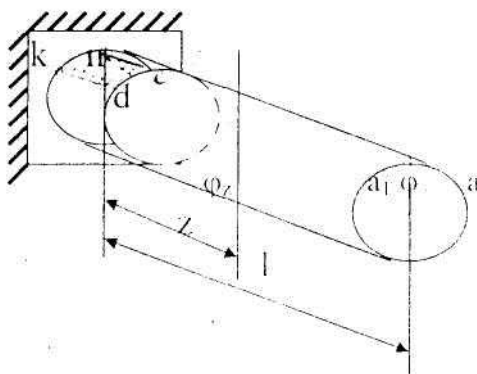


Рисунок 5 – Деформация кручения

Теория кручения основана на следующих предположениях:

1. Ось цилиндра, называемая осью кручения, останется прямолинейной;
2. Диаметры окружностей, нанесенных на поверхности цилиндра до деформации, при деформации останутся такими же и расстояние между ними не изменится;
3. Образующие цилиндра обратятся в винтовые линии.

Из этого можно заключить, что при кручении круглого цилиндра справедлива гипотеза плоских сечений, а также предположить, что радиусы окружностей останутся при деформации прямыми. Т.к. в поперечных сечениях бруса нет продольных сил, то расстояния между сечениями не изменяются.

Деформация кручения круглого цилиндра заключается в повороте поперечных сечений относительно друг друга вокруг оси кручения, причем углы поворота их прямо пропорциональны расстояниям от закрепленного сечения. Угол поворота сечения равен углу закручивания части цилиндра. Заключенной между данным сечением и заделкой. Угол φ поворота концевое сечения называется **полным углом закручивания цилиндра**. **Относительным углом закручивания** φ_0 называется отношение угла закручивания φ_z к расстоянию z

данного сечения от заделки. Если брус длиной l имеет постоянное сечение и нагружен скручивающим моментом на конце, то

$$\varphi_0 = \varphi_z / z = \varphi / l = \text{const}$$

Рассматривая тонкий слой материала на поверхности бруса, ограниченный любой ячейкой сетки (например, ячейкой $kncd$), видим, что эта ячейка перекашивается, принимая положение knc_1d_1 . Аналогичную картину мы наблюдали при изучении деформации сдвига.

На этом основании заключаем, что **при кручении также возникает деформация сдвига**, но не за счет поступательного движения, а в результате вращательного движения одного поперечного сечения относительно другого. Следовательно, при кручении в поперечных сечениях возникают только **касательные внутренние силы**, образующие крутящий момент.

Крутящий момент есть результирующий момент относительно оси бруса внутренних касательных сил, действующих в поперечном сечении.

Для наглядного изображения распределения крутящих моментов вдоль оси бруса строят эпюры крутящих моментов (рис. 6). Крутящий момент в сечении бруса определяется с помощью метода сечений. Так как равномерно вращающийся вал, как и неподвижный брус, находится в равновесии, то очевидно, что внутренние силы, возникающие в поперечном сечении, должны уравновешивать внешние моменты, действующие на рассматриваемую часть бруса. Отсюда следует, что **крутящий момент в любом поперечном сечении численно равен алгебраической сумме внешних моментов, приложенных к брусу справа или слева от сечения**. Эпюры крутящих моментов дают возможность определить, опасное сечение.

Крутящий момент считается положительным, если при взгляде со стороны сечения результирующий момент внешних нар, приложенных к рассматриваемой части бруса, будет направлен против часовой стрелки, и наоборот.

На данной эпюре видно, что рациональным размещением шкивов на валу можно добиться уменьшения значения $M_{кр. max}$. Величина крутящего момента в 2 раза меньше, чем в первом случае. Такое местоположение шкивов выгоднее, поскольку позволяет передавать заданные мощности с помощью вала меньшего диаметра.

Напряжения и деформации при кручении.

Напряжения и деформации при кручении существенно зависят от формы поперечного сечения бруса.

Абсолютный сдвиг сечения волокна a равен дуге aa_1 , а волокна в дуге vv_1
 $\cup vv_1 = \rho\varphi = r\varphi, \quad \cup aa_1 = r\varphi,$

где φ - полный угол закручивания, рад;

ρ - расстояние волокна v от оси кручения;

r - радиус цилиндра.

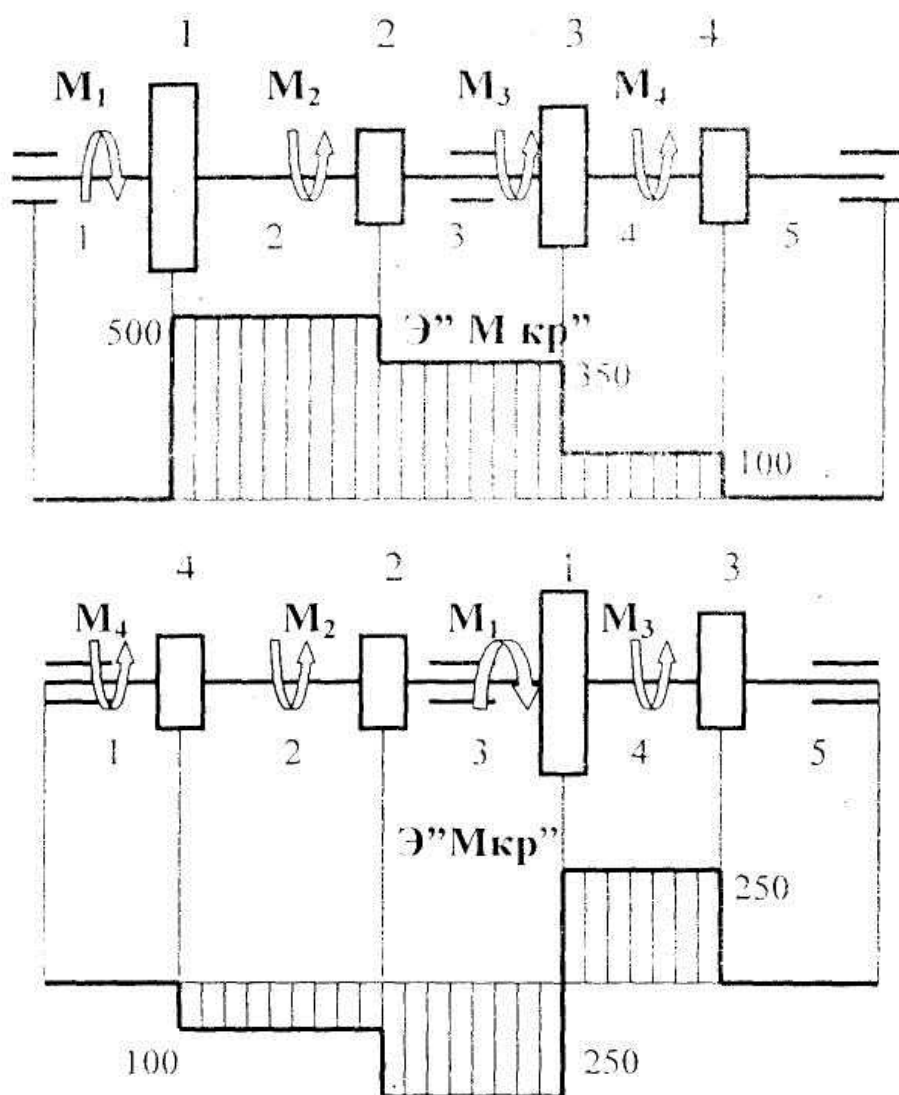


Рисунок 6 – Наглядное изображение распределения крутящих моментов вдоль оси бруса

Так как радиусы сечения при кручении остаются прямыми, то величина абсолютного сдвига волокон прямо пропорциональна их расстоянию от оси кручения.

Относительный сдвиг сечения волокна ϵ

$$\gamma_\rho = \rho\varphi / l = \varphi_0\rho$$

Применим формулу закона Гука при сдвиге:

$$\tau_\rho = G \gamma_\rho = G\varphi_0\rho$$

При $\rho = 0$ $\tau = 0$, т.е. на оси кручения касательные напряжения равны нулю.

При $\rho = r$ $\tau = \tau_{\max}$, т.е. касательные напряжения достигают максимального значения у волокон, наиболее удаленных от оси кручения:

$$\tau_{\max} = G\varphi_0 r$$

Эпюра распределения напряжений вдоль радиуса сечения имеет вид треугольника (рис. 7).

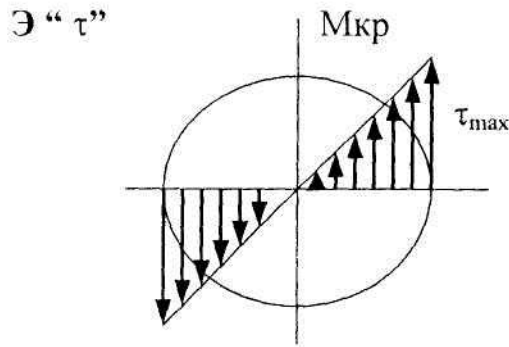


Рисунок 7 – Эпюра распределения напряжений вдоль радиуса сечения

Относительный угол закручивания:

$$\varphi_0 = M_{кр} / GJ_P$$

Полный угол закручивания

$$\varphi = M_{кр}l / GJ_P$$

Произведение GJ_P , стоящее в знаменателе, называется **жесткостью сечения при кручении**.

Формула для определения напряжений:

$$\tau_\rho = G\varphi_0\rho = G M_{кр} \rho / GJ_P = M_{кр}\rho / J_P$$

При $\rho = r$ напряжения достигнут максимального значения:

$$\tau_{max} = M_{кр} r / J_P = M_{кр} / (J_P / r) = M_{кр} / W_P$$

где $W_P = J_P / r$ - момент сопротивления кручению/

Момент сопротивления кручению равен отношению полярного момента инерции к радиусу сечения.

$$[W] = [J_P] / [r] = m^3$$

Итак, напряжения и деформации при кручении круглого цилиндра вычисляют по формулам:

$$\tau_{max} = M_{кр} / W_P, \varphi = M_{кр}l / GJ_P$$

Эти формулы применимы для участков бруса, имеющих одинаковый материал, постоянное поперечное сечение и крутящий момент. По закону парности касательных напряжений, последние возникают не только в поперечных сечениях, но и в продольных, поэтому, например, в деревянных брусках при кручении возникают трещины вдоль волокон (древесина плохо работает на скалывание вдоль волокон).

Из эпюры распределения касательных напряжений при кручении видно, что внутренние волокна бруса испытывают небольшие напряжения, поэтому валы иногда делают пустотелыми, чем достигается значительный выигрыш в массе при незначительной потере прочности.

Момент сопротивления кручению для круглого и кольцевого сечений.

$$1. \text{ Круг диаметром } d: W_P = J_P / 0,5d = \pi d^4 / 32 \cdot 0,5d = \pi d^3 / 16 \approx 0,2d^3.$$

$$2. \text{ Кольцо размером } D * d: W_P = \pi(D^4 - d^4) / 16 D \approx 0,2\pi(D^4 - d^4) / D.$$

Расчеты на прочность и жесткость.

Допускаемые напряжения при кручении обозначаются так же, как и при сдвиге $[\tau]$.

Условие прочности бруса при кручении заключается в том, что наибольшее возникающее в нем касательное напряжение не должно превышать допустимое.

$$\tau = M_{кр} / W_p \leq [\tau_k]$$

Допускаемое напряжение при кручении выбирают в зависимости от допускаемого напряжения при растяжении, а именно:

$$\text{Для сталей } [\tau_k] = (0,55 \dots 0,60) [\sigma_p]$$

$$\text{Для чугунов } [\tau_k] = (1 \dots 1,2) [\sigma_p]$$

Кроме прочности к валам предъявляется требование жесткости, заключающееся в том, что угол закручивания 1 м длины вала не должен превышать определенной величины во избежание, например, нагружения валов или потери точности ходовых витков, токарно-винторезных станков.

Допускаемый угол закручивания 1 м длины вала задается в градусах и обозначается $[\varphi_0^\circ]$

Расчетная формула на жесткость при кручении имеет вид

$$\varphi_0^\circ = (180^\circ / \pi) M_{кр} / GJ_p \leq [\varphi_0^\circ]$$

$$[\varphi_0^\circ] = 0,25 \dots 1 \text{ град/м}$$

6. ДЕФОРМАЦИЯ ИЗГИБ

Понятия и определения деформации изгиба

Под **изгибом** понимают такой вид деформации, при которой в поперечном сечении бруса действует изгибающий момент, от действия последнего происходит искривление оси бруса.

Различают два вида плоского изгиба: чистый и поперечный изгиб.

Под плоским **чистым изгибом** понимают деформацию, при которой в поперечном сечении бруса действует только один силовой фактор отличный от нуля и одинаковый во всех сечениях – это изгибающий момент (рис. 8, а).

Под плоским **поперечным изгибом** понимают такой вид деформации, при которой в поперечном сечении бруса действует два силовых фактора: изгибающий момент M и поперечная сила Q (рис. 8, б).

Правило знаков:

Изгибающий момент считается положительным, если алгебраическая сумма моментов сил, расположенных слева от сечения, дает равнодействующий

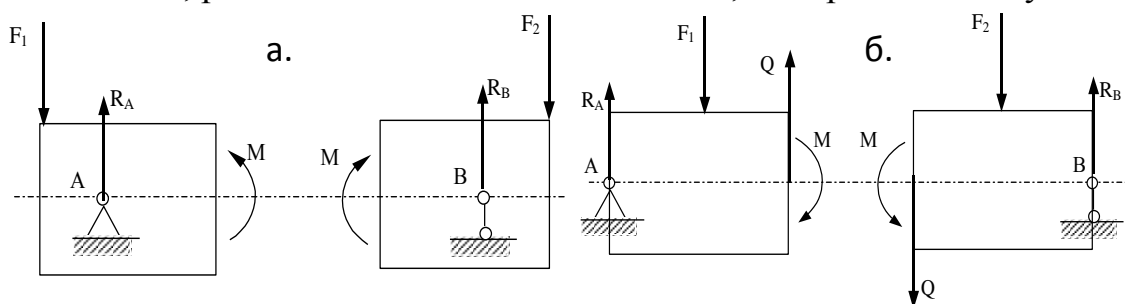


Рисунок 8 – Виды плоского изгиба

момент, направленный по ходу часовой стрелки.

Если рассматривать деформацию балки, то принятому правилу знаков соответствует, следующий характер деформации балки, положительный момент вызывает деформацию балки выпуклостью вниз (рис. 9, а), а отрицательный момент выпуклостью вверх (рис. 9, б).

Тогда при положительном изгибающем моменте верхние продольные волокна бруса испытывают сжатие (укорочение), а нижние – растяжение (удлинение).

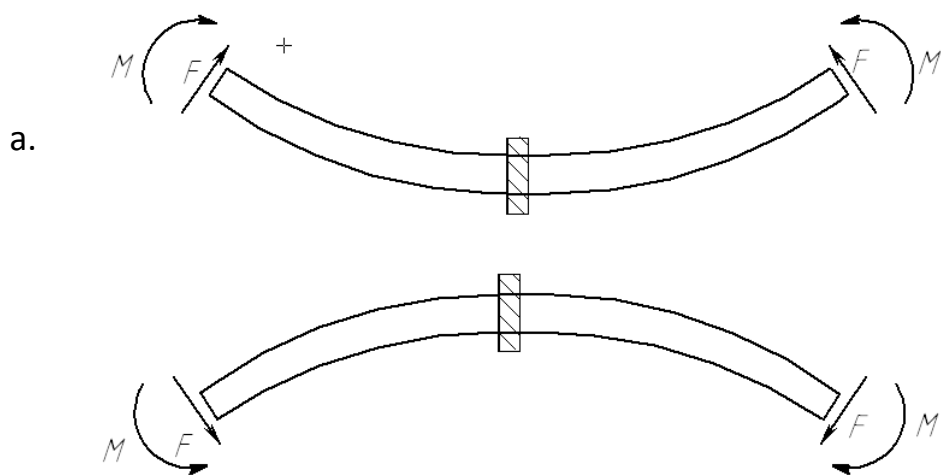


Рисунок 9 – Правило знаков изгибающего момента.

Поперечная сила считается положительной, если равнодействующая внешних сил, приложенная слева от выбранного сечения направлена вверх (рис. 10, а), и отрицательной, если она направлена вниз (рис. 10, б).

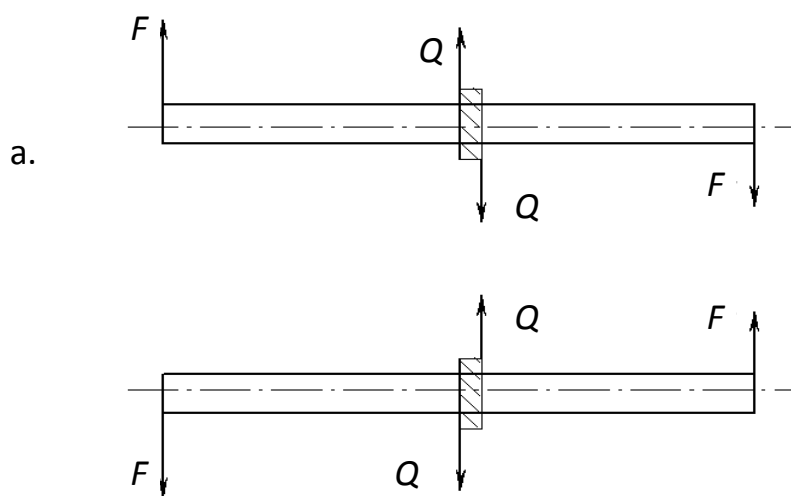


Рисунок 10 – Правило знаков поперечной силы

Брус в поперечном сечении, которого действует изгибающий момент, называется *балкой*.

Балки, рассматриваемые в сопротивлении материалов должны удовлетворять следующим условиям:

1. Сечение балки имеет хотя бы одну ось симметрии.

На рис. 11 приведены примеры сечений балок удовлетворяющих этому требованию. Предпочтительнее использовать двутавровое (рис. 11, з), прямоугольное трубчатое (рис. 11, е), корытное (рис. 11, д) и тавровое (рис. 11, ж) сечения.

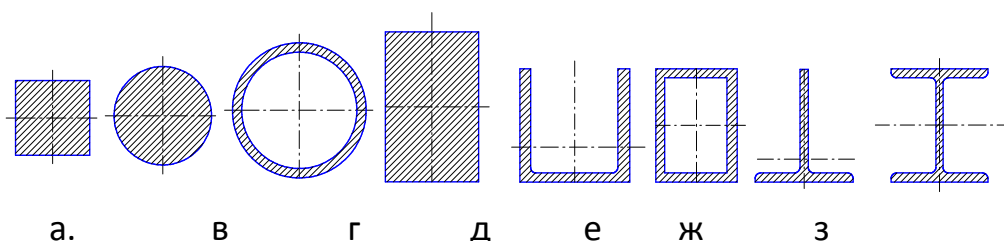


Рисунок 11 – Примеры сечений балок

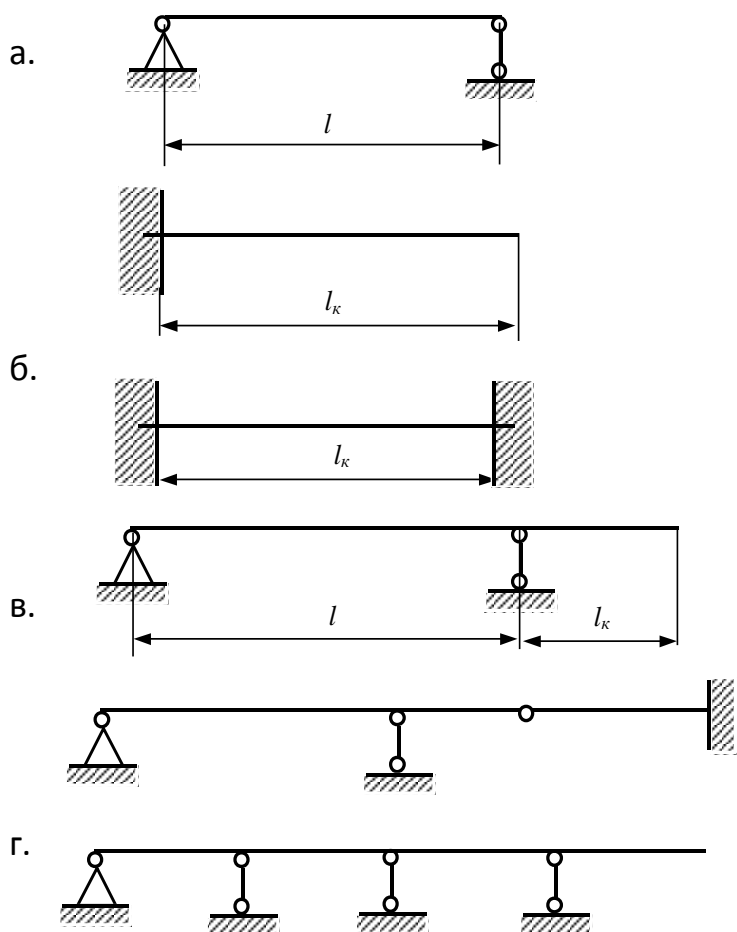


Рисунок 12 – Виды балок

2. Все внешние силы лежат в плоскости симметрии балки.

В зависимости от числа опор и характера опорного закрепления различают балки однопролетные (рис. 12, а), многопролетные (рис. 12, г), консольные (рис. 12, б), с заделанными концами (рис. 12, в), разрезные (рис. 12, д), неразрезные (рис. 12, г).

Консолью называют часть двух опорной балки, свисающую за опору (рис. 12, б) или балку с одним заделанным и другим свободным концом (рис. 12, в).

Разрезными называются статически определимые балки, проходящие над

несколькими промежуточными опорами (рис. 12, д), а **неразрезными** называются точно такие же, но статически неопределимые балки (рис. 12, е).

Для определения изгибающего момента M и поперечной силы Q при поперечном изгибе используют метод сечений.

Метод сечений для изгибающего момента формулируется следующим образом: **изгибающий момент в любом сечении балки равен алгебраической сумме моментов всех внешних сил, расположенных по одну сторону от сечения.**

Для балки на рис. 13 слева от рассматриваемого сечения I-I действуют сосредоточенные силы F_1 , F_2 и момент M . Уравнение для определения момента в сечении I-I запишется в следующем виде

$$M_{I-I} = F_1 \cdot z + M - F_2(z - b)$$

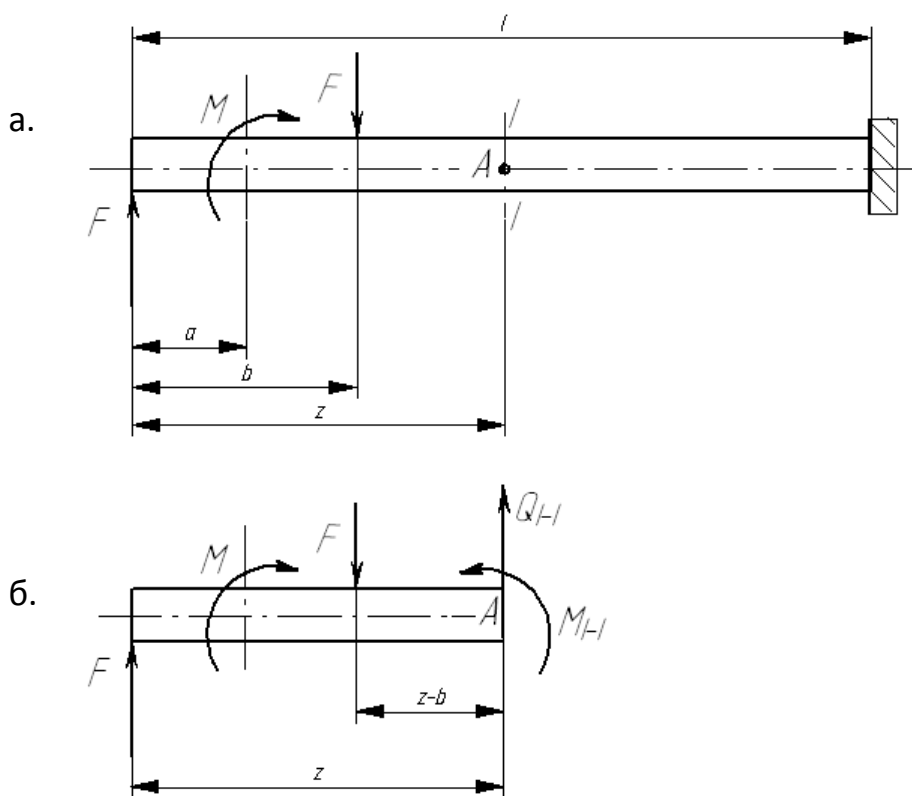


Рисунок 13 – Использование метода сечений при деформации изгиб

Метод сечений для поперечной силы формулируется следующим образом: **поперечная сила в сечении равна сумме проекций на нормаль к оси балки всех внешних сил, расположенных по одну сторону от сечения.**

Для примера на рис. 13. уравнение для поперечной силы в сечении I-I имеет вид:

$$Q_{I-I} = F_1 - F_2$$

При расчете балок на прочность необходимо знать закон изменения внутренних силовых факторов в поперечных сечениях бруса по его длине, возникающих от действия нагрузки. Этот закон можно выразить в виде алгебраических зависимостей и изобразить с помощью специальных графиков, называемых эпюрами изгибающих моментов и поперечных сил.

Эпюрой изгибающих моментов называется график изображающий закон изменения величин этих моментов по длине балки.

Эпюрой поперечных сил называется график, изображающий закон изме

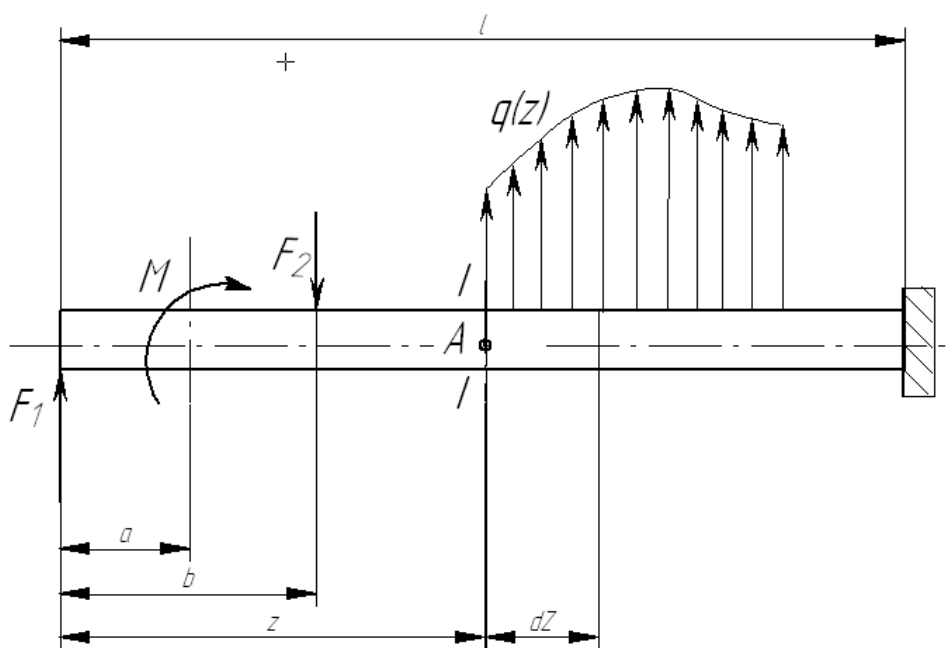


Рисунок 14 – Пример определения границ участка

нения поперечных сил по длине балки.

В сложно нагруженной балке описать законы изменения изгибающего момента или поперечной силы одним уравнением (законом) не представляется возможным и поэтому балку разбивают на участки. В пределах одного участка законы изменения поперечной силы и изгибающего момента остаются постоянными.

Границами участков являются поперечные сечения балки, в которых к ней приложены сосредоточенные нагрузки (в том числе и реакции), моменты, или в которых начинается либо заканчивается распределенная нагрузка, либо интенсивность этой нагрузки начинает изменяться по новому закону. Например, балка представленная на рис. 14 имеет 5 участков.

Установим некоторые характерные особенности эпюр Q и M.

Выделим на четвертом участке балки, где приложена положительная распределенная нагрузка $q(z)$ на расстоянии z от левого конца балки элементарный участок длиной dz . Нагрузка $q(z)$ распределена по участку неравномерно, однако, если считать длину элементарного участка dz сколь угодно малой величиной, то распределение нагрузки можно считать равномерным, как показано на рис. 15.

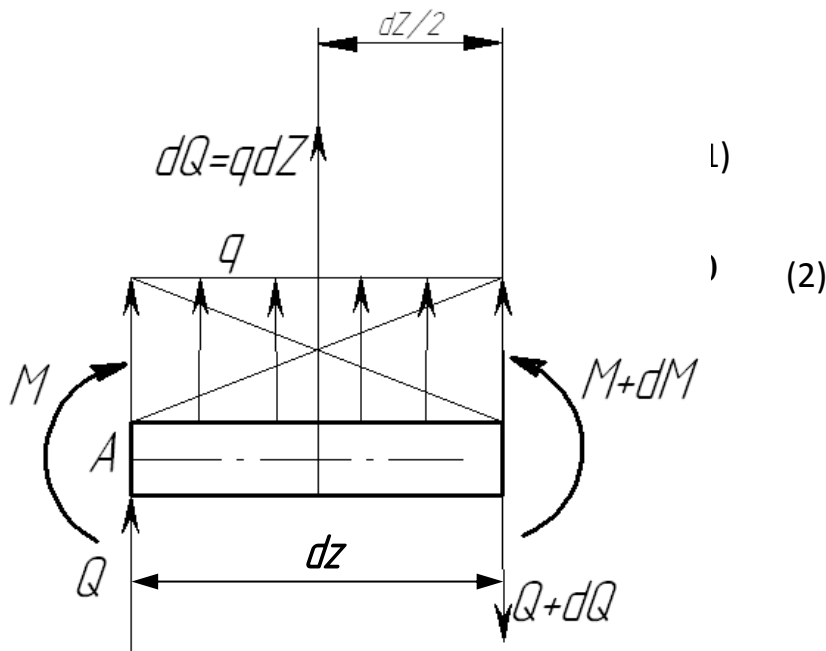


Рисунок 15 – Участок с распределенной нагрузкой

Рассмотрим равновесие выделенного участка dz , и составим для него уравнения равновесия:

Из уравнения (1) получаем:

Первая производная от поперечной силы по длине балки равна интенсивности распределенной нагрузки, перпендикулярной к ее оси.

Из уравнения (2):

Первая производная от изгибающего момента по длине балки равна поперечной силе.

$$q = \frac{dQ}{dz} \quad (3)$$

$$Q = \frac{dM}{dz} \quad (4)$$

$$q = \frac{dQ}{dz} = \frac{d^2M}{dz^2} \quad (5)$$

Сопоставив уравнения (3) и (4) получим:

Вторая производная от изгибающего момента по длине балки равна интенсивности распределенной нагрузки, перпендикулярной к ее оси.

Из уравнений (3), (4) и (5) видно, что между q , Q и M существует дифференциальные зависимости, на основании которых можно сделать следующие обобщения, которые по своей сути являются правилами контроля правильности построения эпюр Q и M :

1. В сечении, в котором к балке приложена сосредоточенная внешняя сила, перпендикулярная к оси балки эпюра поперечных сил Q делает скачок на величину этой силы и с ее знаком.

2. На участке, где приложена равномерно распределенная нагрузка q , эпюра поперечных сил имеет вид прямой наклонной линии.

3. На участке, где приложена равномерно распределенная нагрузка, эпюра изгибающих моментов ограничена параболической кривой.

4. В сечении, где приложена пара сил, эпюра изгибающих моментов делает скачок на величину этой пары и с ее знаком.

5. В сечениях балки, где эпюра поперечных сил пересекает ось эпюры, изгибающий момент имеет экстремум. Если при этом поперечная сила меняет знак с плюса на минус, на эпюре изгибающих моментов имеет место максимум, при смене знака с минуса на плюс имеет место минимум.

6. На участке, где поперечная сила равна нулю, наблюдается деформация чистого плоского изгиба, при котором изгибающий момент является постоянной величиной ($M=\text{const}$).

7. На участке, где поперечная сила положительна ($Q>0$), эпюра изгибающих моментов возрастает.

8. На участке, где поперечная сила отрицательна ($Q<0$), эпюра изгибающих моментов убывает.

9. На участке балки, где поперечная сила имеет постоянное значение, эпюра M ограничена прямой наклонной линией.

10. Сосредоточенная (или распределенная) пара сил влияния на закон изменения поперечных сил на участке не оказывает, и на эпюре Q это ни как не отражается.

11. В этом сечении эпюра изгибающих моментов делает резкое изменение угла наклона смежных участков эпюры (излом эпюры). Излом эпюры направлен навстречу вектору силы.

7. ДЕФОРМАЦИЯ УСТОЙЧИВОСТЬ

Устойчивым следует считать такое состояние механической системы, при котором любое внешнее отклонение от состояния равновесия вызывает реакцию системы, восстанавливающую это равновесие.

Состояние равновесия при котором достаточно незначительной случайной внешней силы что бы тело вышло из положения равновесия называется *неустойчивым*.

Значение внешней силы, при которой система переходит из устойчивого состояния в неустойчивое, называется *критической силой*.

Отношение критической силы механической системы к фактической внешней нагрузке приложенной к ней называется **запасом устойчивости**:

$$k_y = \frac{F_{кр}}{F}$$

Коэффициент запаса устойчивости подбирается несколько больше допустимого коэффициента запаса прочности.

Брус нагруженный осевой сжимающей силой называется **стойкой**.

Существует несколько способов закрепления концов стержня (рис. 16).

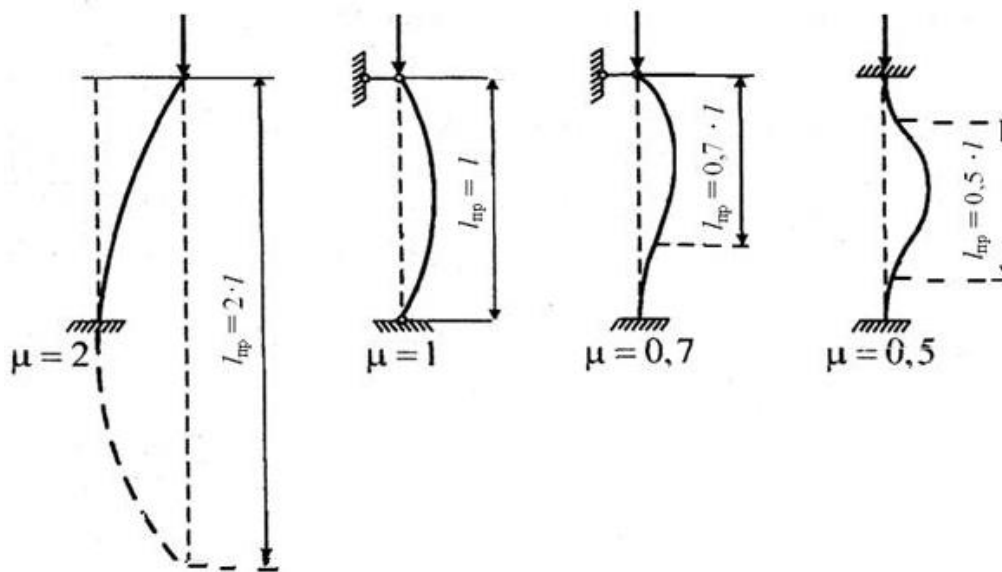


Рисунок 16 – Способы закрепления концов стержня

Формула Эйлера, определяющая критическую силу имеет следующий вид:

$$F_{кр} = \frac{\pi^2 EI_{мин}}{(\mu l)^2}$$

где μ – коэффициент приведения длины стержня (коэффициент Ясинского), определяеся по рис. 16.

Напряжения возникающие в поперечном сечении стержня, под действием критической силы называются **критическими напряжениями**:

$$\sigma_{кр} = \frac{F_{кр}}{A}$$

Формула Ясинского:

$$\sigma_{кр} = a - b\lambda$$

Коэффициенты a и b зависят от марки материала (приложение).

Минимальный радиус инерции:

$$i = \sqrt{\frac{I_{мин}}{A}}$$

Гибкость стержня:

$$\lambda = \frac{\mu l}{i}$$

После расчетное значение гибкости сравнивается с допустимой и выбирается формула для расчета критической силы согласно диаграммы критических напряжений (рис. 17).

Диаграмма критических напряжений

Диаграмма критических напряжений используется для выбора формулы при проведении проверочных расчетов на устойчивость или прочность.

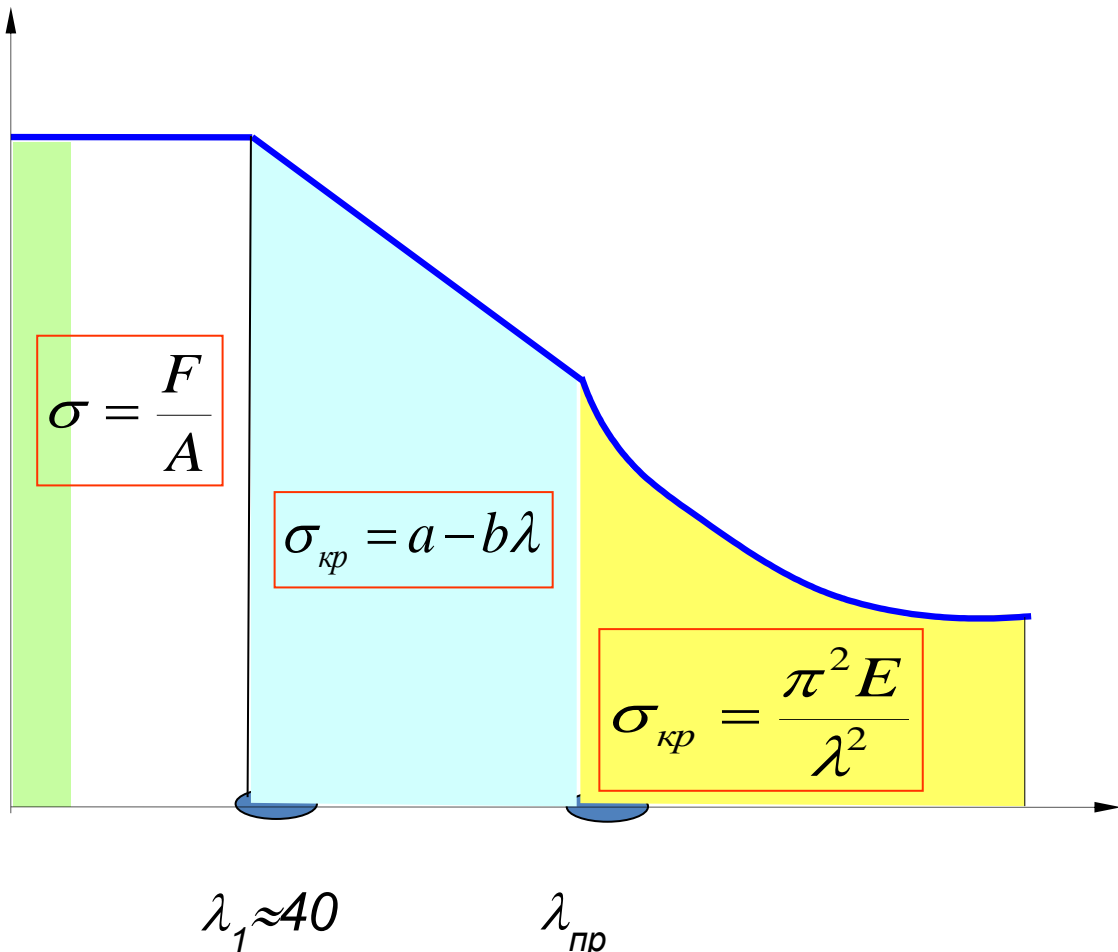


Рисунок 17 – Диаграмма критических напряжений

По диаграмме можем определить пределы применимости формулы Эйлера.

Стержни с гибкостью $\lambda < \lambda_0$ называются **стержнями малой гибкости** и рассчитываются на прочность сжатием.

Стержни с гибкостью $\lambda > \lambda_0$ называются **стержнями средней гибкости** и рассчитываются на устойчивость при помощи формулы Ясинского.

Стержни с гибкостью $\lambda > \lambda_{пр}$ называются **стержнями большей гибкости** и рассчитываются на устойчивость при помощи формулы Эйлера.

8. ПОРЯДОК РЕШЕНИЯ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ СИСТЕМ

1. Выявляются неизвестные усилия (реакции), определяется степень статической неопределимости системы.

Степень статической неопределимости системы определяется по формуле:

$$k = n - m$$

где k – степень статической неопределимости системы;

n – число неизвестных реакций связей;

m – число значимых уравнений статики которые можно составить для системы.

2. Освобождаются от связей наложенных на систему, составляются уравнения равновесия. Решается статическая сторона задачи.

Статическая сторона задачи (с.с.з.):

Рассматривается равновесие абсолютно жесткой платформы к которой приложена плоская система сил.

Для задачи необходимо и достаточно составить три уравнения равновесия:

$$\sum F_{ky} = 0; \quad \sum F_{kx} = 0; \quad \sum m(F_k) = 0. \quad (1)$$

3. Представляется система в деформированном виде. Устанавливаются геометрические соотношения между перемещениями точек системы. Уравнения связывающие эти перемещения называются уравнениями совместности (неразрывности) деформаций. Решается геометрическая сторона задачи.

Геометрическая сторона задачи (г.с.з.):

Устанавливает геометрические соотношения между перемещениями точек платформы к которой присоединены стержни системы. Уравнение связывающее между собой перемещения этих точек платформы называется «уравнением совместности перемещений»:

4. Устанавливают взаимосвязи между удлинением стержней системы и продольной силами действующими в них на основании закона Гука. Решается физическая сторона задачи.

Физическая сторона задачи (ф.с.з.):

Устанавливается взаимосвязь между удлинением стержней и продольными силами действующими в них:

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 \cdot l_1}{E \cdot A_1}; \quad \Delta l_2 = \frac{N_2 \cdot l_2}{E \cdot A_2}; \quad \Delta l_3 = \frac{N_3 \cdot l_3}{E \cdot A_3} \quad ; \quad (3)$$

где E – модуль упругости (табличное значение) материала;

A_1, A_2, A_3 - площадь поперечного сечения стержня.

Произведение $E \cdot A$ в знаменателе формулы называется – **жесткостью поперечного сечения стержня** при растяжении или сжатии и имеет размерность силы.

Величину $c = \frac{E \cdot A}{l}$ называют **жесткостью стержня**.

5. Решаются совместно все уравнения и определяются продольные силы действующие в стержнях системы. Рассматривается синтез.

Синтез включает в себя решение совместно уравнений (1), (2) и (3) и определение неизвестных продольных сил N_1, N_2, N_3 .

6. Определяются или принимаются допускаемые напряжения для материала стержней системы.

Допускаемые напряжения определяются из выражений:

$$[\sigma] = \frac{\sigma_T}{S_T} \text{ – пластичные материалы; } [\sigma] = \frac{\sigma_{BP(BC)}}{S_{BP(BC)}} \text{ – хрупкие материалы.}$$

где $[\sigma]$ – допускаемое напряжение; σ_T – предел текучести; $\sigma_{BP(BC)}$ – временное сопротивление разрыву (сжатию) или предел прочности; $S_T, S_{BP(BC)}$ – соответственно коэффициент запаса прочности по пределу текучести и пределу прочности.

Коэффициент запаса по пределу текучести выбирается из интервала $S_T = 1,25 \div 1,8$, а коэффициент запаса по пределу прочности из интервала $S_{BP(BC)} = 2,0 \div 5,0$.

7. Из условия прочности определяют необходимую площадь поперечного сечения стержней.

Необходимую площадь поперечного сечения стержней определяют по формуле:

$$A \geq \frac{N_{\max}}{[\sigma]}$$

Как правило стержни выполняются решетчатыми, составленными из четырех равнобоких уголков и соединенных между собой планками. Расстояния между уголками и планками подбирают так, чтобы включить возможность потери устойчивости (этот вопрос будет подробно рассмотрен позднее).

8. Определяются фактические напряжения в стержнях системы.

Фактические напряжения в стержнях системы определяются по следующим формулам:

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} \leq [\sigma]; \quad \sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} \leq [\sigma]$$

9. Определяется допускаемая нагрузка.

Допускаемой нагрузкой $[F]$ называется нагрузка при которой в наиболее нагруженном стержне расчетные напряжения равны допускаемым напряжениям.

10. Определяется предельная нагрузка.

Предельной ($F_{пред}$) называется нагрузка вызывающая предельное состояние системы. Предельное состояние системы характеризуется полным исчерпанием её несущей способности. Напряжения во всех стержнях системы достигнут предела текучести.

11. Определяется предельная допускаемая нагрузка.

Предельная допускаемая нагрузка определяется по следующему выражению:

$$\left[F_{пред.} \right] = \frac{F_{пред.}}{S}$$

12. Определяются монтажные или температурные напряжения.

Свободная сборка статически неопределимых систем возможна лишь при весьма точном изготовлении их элементов. В противном случае сборку вынуждены осуществлять с приложением усилий, вызывающих деформации элементов, поэтому в них после монтажа системы будут напряжения, которые называются **начальными (монтажными)**. В статически определимых конструкциях неточность размеров элементов не требует приложения усилий при монтаже и следовательно в элементах не возникают начальные (монтажные) напряжения.

В элементах статически неопределимых систем усилия и напряжения возникают также при изменении температуры элементов конструкции, называемые **температурными**.

Если стержень подвергается нагреву (или охлаждению) на величину Δt , то, составляя выражение для суммарного перемещения сечения, надо учесть свободное температурное удлинение (укорочение) стержня. Если стержень нагревается по всей длине, то

$$\Delta l_t = \alpha \cdot l \cdot \Delta t,$$

где α – коэффициент линейного температурного расширения [2., стр. 610, прилож. III];

l – длина стержня.

При определении монтажных или температурных напряжений рассматриваются статическая, геометрическая, физическая стороны задач; синтез.

Таблица 1 – Сводная таблица расчетов по разным видам деформаций

показатель	растяжение сжатие	срез (сдвиг)	смятие	кручение	изгиб	устойчивость
Внутренний силовой фактор	N – продольная сила	Q – поперечная сила	Q – поперечная сила	M _{кр} – крутящий момент	при чистом изгибе: M _и – изгибающий момент; при поперечном изгибе: M _и – изгибающий момент, Q – поперечная сила	F _{кр} – критическая сжимающая сила
Геометрическая характеристика сечения	A – площадь сечения	A _{ср} – площадь среза	A _{см} – площадь смятия	W _p – полярный момент сопротивления	W _x – осевой момент сопротивления	A – площадь сечения; J _{min} – минимальный момент инерции
Напряжения	$\sigma_{p(сж)} = \frac{N}{A}$	$\tau_{ср} = \frac{Q}{A_{ср}}$	$\sigma_{см} = \frac{Q}{A_{см}}$	$\tau_{кр} = \frac{M_{кр}}{W_p}$	$\sigma_u = \frac{M_u}{W_x}$	$\sigma_{кр} = \frac{F_{кр}}{A}$
Условие прочности	$\sigma_{p(сж)} = \frac{N}{A} \leq [\sigma]_{p(сж)}$	$\tau_{ср} = \frac{Q}{A_{ср}} \leq [\tau]_{ср}$	$\sigma_{см} = \frac{Q}{A_{см}} \leq [\sigma]_{см}$	$\tau_{кр} = \frac{M_{кр}}{W_p} \leq [\tau]_{кр}$	$\sigma_u = \frac{M_u}{W_x} \leq [\sigma]_u$	-
Условие жесткости	-	-	-	$\varphi = \frac{M_{кр}}{J_p \cdot G} \leq [\varphi]_0$	f ≤ [f]-прогиб θ ≤ [θ]-угол поворота	-
Закон Гука	$\sigma = E \cdot \varepsilon$			$\tau = G \cdot \gamma$	$\sigma = E \cdot \varepsilon$	-

показатель	растяжение сжатие	срез (сдвиг)	смятие	кручение	изгиб	устойчивость
Геометрические характеристики:						
Круг	$A = \frac{\pi \cdot d^2}{4}$	$A_{cp} = \frac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot n \cdot m$	$A_{см} = d \cdot \delta \cdot m$	$W_p = \frac{\pi \cdot d^3}{16}$	$W_x = \frac{\pi \cdot d^3}{32}$	$J_x = \frac{\pi \cdot d^4}{32}$
Квадрат	$A = b \cdot h$	-	-	-	$W_x = \frac{a^3}{6}$	$J_x = \frac{a^4}{12}$
Прямоугольник	$A = a^2$	-	-	-	$W_x = \frac{b \cdot h^2}{6}$	$J_x = \frac{b \cdot h^3}{12}$
Кольцо	$A = \frac{\pi \cdot d^2}{4} (1 - c^2)$	-	-	$W_p = \frac{\pi \cdot d^3}{16} (1 - c^4)$	$W_x = \frac{\pi \cdot d^3}{32} (1 - c^4)$	$J_x = \frac{\pi \cdot d^4}{64} (1 - c^4)$
Проверочный расчет	$\sigma_{p(сж)} = \frac{4 \cdot F}{\pi \cdot d^2} \leq [\sigma]_{p(сж)}$	$\tau_{cp} = \frac{4Q}{\pi \cdot d^2 \cdot n \cdot m} \leq [\tau]_{cp}$	$\sigma_{см} = \frac{F}{d \cdot \delta \cdot m} \leq [\sigma]_{см}$	$\tau_{кр} = \frac{M_{кр}}{W_p} \leq [\tau]_{кр}$	$\sigma_u = \frac{M_u}{W_x} \leq [\sigma]_u$	-
Проектный рас- чет	$A \geq \frac{N}{[\sigma]_{p(сж)}}$ $d \geq \sqrt{\frac{4 \cdot F}{\pi \cdot [\sigma]_{p(сж)}}}$	$d \geq \sqrt{\frac{4 \cdot F}{\pi \cdot n \cdot m \cdot [\tau]_{cp}}}$	$d \geq \frac{F}{\delta \cdot m \cdot [\sigma]_{см}}$	$d \geq \sqrt{\frac{M_{кр}}{0,2 \cdot [\tau]_{кр}}}$	$W_x \geq \frac{M_u}{[\sigma]_u}$	-
Проверочно- уточненный расчет	$N \leq A \cdot [\sigma]_{p(сж)}$	$F \leq \frac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot n \cdot m \cdot [\tau]_{cp}$	$F \leq d \cdot \delta \cdot m \cdot [\sigma]_{см}$	$M_{кр} \leq W_p \cdot [\tau]_{кр}$	$M_u \leq W_x \cdot [\sigma]_p$	$F_{кр} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot J_{min}}{(\mu \cdot l)^2}$ $\sigma_{кр} = a - b \cdot \lambda$

ЗАДАНИЯ ДЛЯ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

ЗАДАЧА 1: НА ТЕМУ «РАСТЯЖЕНИЕ-СЖАТИЕ»

Варианты 1...5

Для заданного бруса построить эпюру продольных сил и подобрать размеры поперечного сечения на каждом участке.

Определить изменение длины бруса.

Принять: материал бруса - сталь 3, $[\sigma]_p = 180 \text{ Н/мм}^2$, $[\sigma]_c = 120 \text{ Н/мм}$,
 $E = 2 \cdot 10^5 \text{ Н/мм}^2$

Варианты 6... 10

Для заданного бруса определить допускаемые значения нагрузок F_1, F_2 и построить эпюру продольных сил.

Принять: материал бруса - сталь 3, $[\sigma]_p = 180 \text{ Н/мм}^2$, $[\sigma]_c = 120 \text{ МПа}$.

Варианты 11...15

Для заданного бруса построить эпюру продольных сил и проверить прочность на обоих участках.

Принять: материал бруса – сталь 3, $[\sigma]_p = 180 \text{ МПа}$, $[\sigma]_c = 120 \text{ МПа}$.

Варианты 16...20

Для стержня, удерживающего в равновесии горизонтальную балку, подобрать размер круглого сечения.

Определить изменения длины стержня.

Принять: материал бруса - сталь 3, $[\sigma]_p = 180 \text{ МПа}$, $[\sigma]_c = 120 \text{ МПа}$.

Необходимые данные взять из таблицы 2 и на рисунке 18.

Таблица 2 – Исходные данные для задачи 1

№ зад.	№ схемы	F ₁ , кН	F ₂ , кН	d ₁ , мм	d ₂ , мм	a ₁ , мм	a ₂ , мм	l ₁ , м	l ₂ , м	М кН·м
1	1	40	50					0,3	0,5	
2	2	13	20					0,2	0,5	
3	3	25	22					0,4	0,4	
4	4	50	80					0,5	0,5	
5	5	24	15					0,7	0,3	
6	6					10	6			
7	7			30	20					
8	8					40	70			
9	9			15	25					
10	2					30	20			
11	4	220	165		25	45				
12	9	27	120	15	35					
13	1	70	35	25			15			
14	6	100	140	30	15					
15	10	68	100			20	10			
16	11	13						0,5	0,5	1
17	12	15						0,9	0,9	3
18	13	7						0,7	0,3	19
19	14	9						0,7	0,5	23
20	15	15						0,5	0,5	5

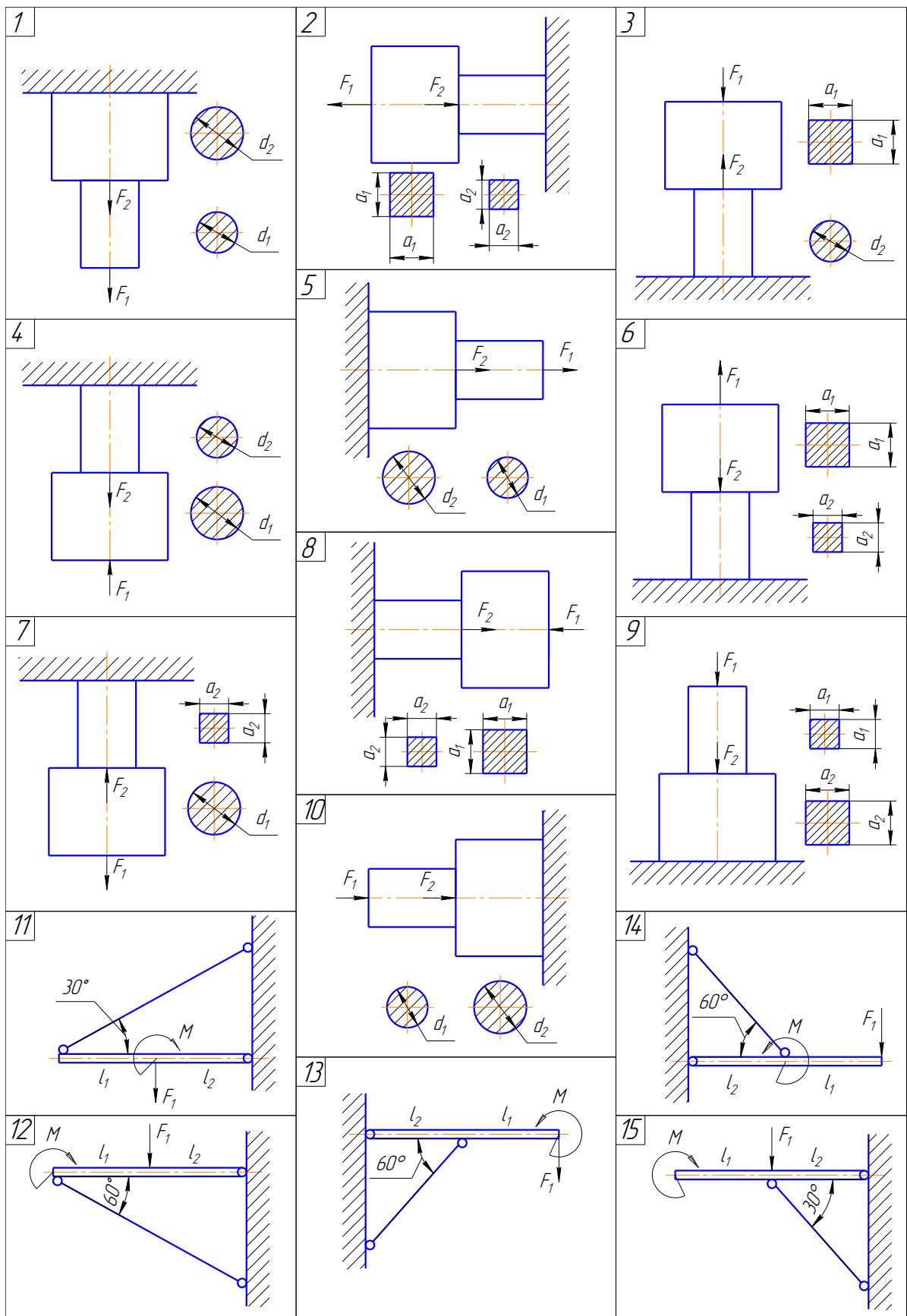


Рисунок 18 – Схемы для задач на тему: "Растяжение-сжатие"

ЗАДАЧА 2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОПЕРЕЧНЫХ СИЛ И ИЗГИБАЮЩИХ МОМЕНТОВ

Для заданных двух схем балок (рис. 19) требуется построить эпюры Q и M и подобрать из условия прочности:

- 1) деревянную балку круглого сечения при $[\sigma]=8$ МПа;
- 2) стальную балку двутаврового сечения при $[\sigma]=160$ МПа.

Данные взять из таблицы 3.

Таблица 3 – Исходные данные для задачи 2

Номер строки	Схема по рис. 3	l_1 , м	Расстояние в долях пролета, м		M, кН·м	F, кН	Q_1 , $\frac{\text{кН}}{\text{м}}$
			a_1	a_2			
1	I	1,1	0,4	0,8	10	1	1
2	II	1,2	0,3	0,45	20	2	2
3	III	1,3	0,4	0,5	30	3	3
4	IV	1,4	0,35	0,45	40	4	4
5	V	1,5	0,5	1,0	50	5	5
6	VI	1,6	0,5	1,1	60	6	6
7	VII	1,7	0,6	0,6	70	7	7
8	VIII	1,8	0,5	0,8	80	8	8
9	IX	1,9	0,6	1,4	90	9	9
10	X	2,0	0,9	0	100	10	10
11	VII	2,1	0,7	0,7	100	10	10
12	III	2,2	0,7	0,5	90	9	9
13	X	2,3	1,15	0	80	8	8
14	IV	2,4	0,8	0,9	70	7	7
15	I	2,5	0,8	1,5	60	6	6
16	VIII	2,6	0,7	0,8	50	5	5
17	VI	2,7	0,9	1,7	40	4	4
18	IX	2,8	0,9	2,0	30	3	3
19	II	2,9	0,97	0,87	20	2	2
20	V	3,0	1,0	2,0	10	1	1

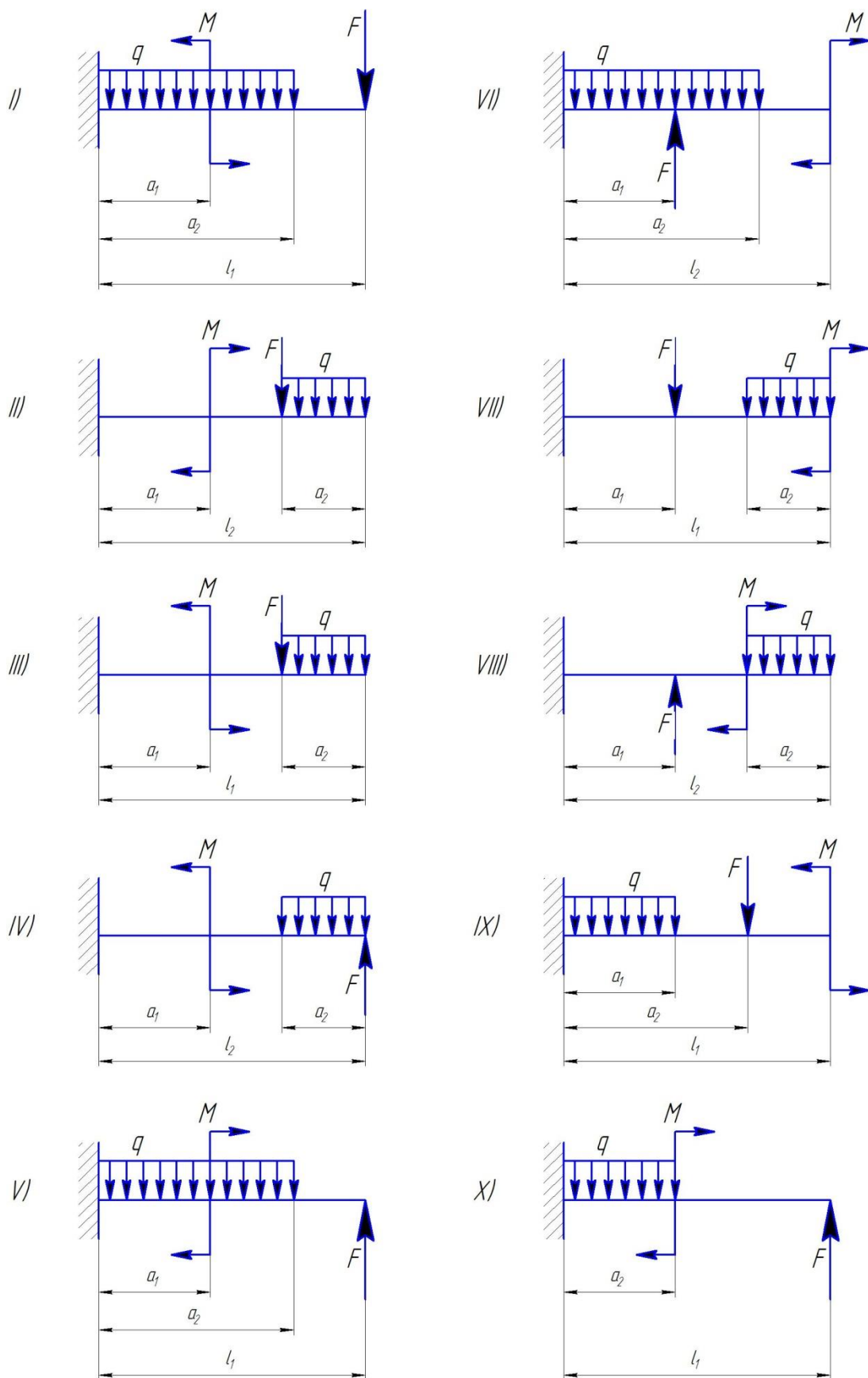


Рисунок 19 – Схемы для задач на тему: "Изгиб"

Задача 3. Устойчивость сжатых стержней

Стальной стержень длиной l сжимается силой F . Допускаемое напряжение на простое сжатие $[\sigma]_{сж} = 160$ МПа (сталь 3 при $\sigma_T = 240$ МПа, $n_T = 1,5$). Определить величину критической силы.

Коэффициент приведения длины μ определить по условиям закрепления концов стержня. Данные взять из табл. 4.

Примечание:

первый вид закрепления концов бруса: свободный конец – заделка;

второй вид закрепления концов бруса: заделка – заделка;

третий вид закрепления концов бруса: шарнир – шарнир;

четвертый вид закрепления концов бруса: шарнир – заделка.

Таблица 4 – Исходные данные для задачи 3

№ строки	Вид крепления концов бруса	№ схемы	F, кН	l, м	Форма сечения стержня
1	первый	I	100	1	
2	второй	II	125	2,5	
3	третий	III	150	1,5	
4	четвертый	IV	175	2,5	
5	первый	V	200	1,2	
6	второй	VI	225	3,0	
7	третий	VI	130	1,1	
8	четвертый	V	180	3,0	
9	первый	IV	300	1,5	
10	второй	III	325	3,5	
11	третий	II	100	1,2	
12	четвертый	I	125	3,0	
13	первый	I	150	1,1	
14	второй	II	175	1	
15	третий	III	200	2,5	
16	четвертый	IV	225	1,5	
17	первый	V	130	2,5	
18	второй	VI	180	3,0	
19	третий	V	300	1,5	
20	четвертый	IV	325	3,5	

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

ЗАДАЧА 1

Пример 1.

Для бруса (рис. 20, 1а) построить эпюру "N" и подобрать размер поперечного сечения. Определить изменение длины стержня.

$$F_1 = 6 \text{ кН},$$

$$F_2 = 8 \text{ кН},$$

$$[\sigma]_p = 180 \text{ МПа},$$

$$[\sigma]_c = 120 \text{ МПа},$$

$$E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$$

Решение:

В заданном бруске два участка: 1 и 2 (рис. 20). Применяя метод сечений, определяем продольную силу N, выражая ее через силы F_1 , F_2 . Проводя в пределах каждого из участков сечение, будем отбрасывать левую закрепленную часть бруса и оставлять для рассмотрения правую часть. На первом участке продольная сила постоянна и равна

$$N_1 = -F_1 = -6 \text{ кН}$$

(знак минус указывает на сжимающую силу).

На участке 2 продольная сила также постоянна и равна:

$$N_2 = -F_1 + F_2 = -6 + 8 = 2 \text{ кН}.$$

Знак плюс указывает на то, что на этом участке брус растянут.

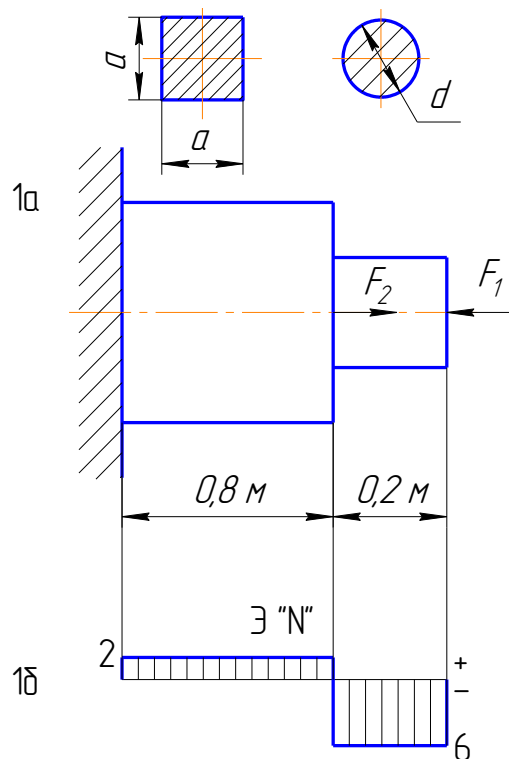
Строим эпюру продольных сил (рис. 20, 1б).

Определяем размеры поперечного сечения бруса на каждом участке, пользуясь условием прочности:

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} \leq [\sigma]_c$$

$$\sigma_1 = \frac{6 \cdot 10^3}{A_1} \leq [\sigma]_c = 120 \text{ МПа}$$

$$A_1 \geq \frac{6 \cdot 10^3}{[\sigma]_c} = \frac{6 \cdot 10^3}{120} = 50 \text{ мм}^2$$



Зная, что $A_1 = \frac{\pi \cdot d^2}{4} \Rightarrow d = \sqrt{\frac{4 \cdot A_1}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 50}{3,14}} = 7,98 \text{ мм}$, принимаем $d = 8 \text{ мм}$.

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} \leq [\sigma]_p$$

$$\sigma_2 = \frac{2 \cdot 10^3}{A_2} \leq [\sigma]_p = 180 \text{ МПа} \Rightarrow A_2 \geq \frac{2 \cdot 10^3}{[\sigma]_p} = \frac{2 \cdot 10^3}{180} = 11,1 \text{ мм}^2$$

Зная, что для квадратного сечения $A_2 = a^2 \Rightarrow a = \sqrt{A_2} = \sqrt{11,1} = 3,33 \text{ мм}$.

Принимаема $a = 3,5 \text{ мм}$.

Теперь определяем перемещение свободного конца бруса, равное сумме изменений длин его участков. Учитывая, что $E_2 = E_1 = E$, получим

$$\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2 = \frac{N_1 \cdot l_1}{E \cdot A_1} + \frac{N_2 \cdot l_2}{E \cdot A_2} = \frac{-6000 \cdot 0,2 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^5 \cdot 50} + \frac{2 \cdot 10^3 \cdot 0,8 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^5 \cdot 12,25} = -0,12 + 0,65 = 0,53$$

мм

полученный в ответе знак плюс говорит о том, что в целом брус удлиняется.

Пример 2.

Для стержня СД (рис. 21), удерживающего в равновесии жесткую балку АВ, подобрать размер круглого сечения и определить удлинение (укорочение) стержня.

Принять: $[\sigma]_p = 180 \text{ МПа}$ $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$ $F_2 = 45 \text{ кН}$; $F_1 = 20 \text{ кН}$

Решение

Как известно из статики, шарнирно закрепленный стержень может находиться в равновесии лишь при условии, что нагружающие его по концам силы расположены по продольной оси стержня. Поэтому в поперечных сечениях стержня возникает лишь один внутренний силовой фактор - продоль-

ная сила N , т.е. имеет место растяжение (сжатие) стержня.

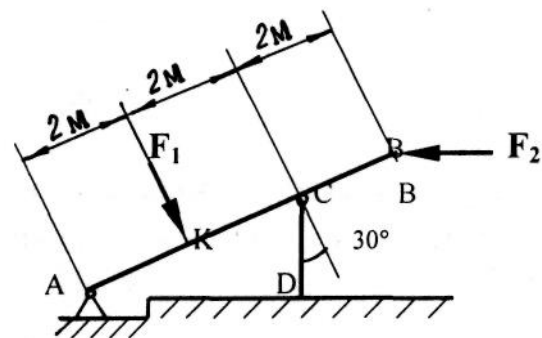
Будем полагать, что стержень растянут.

Рассмотрим равновесие балки АВ (рис. 22). Применим в качестве уравнения равновесия

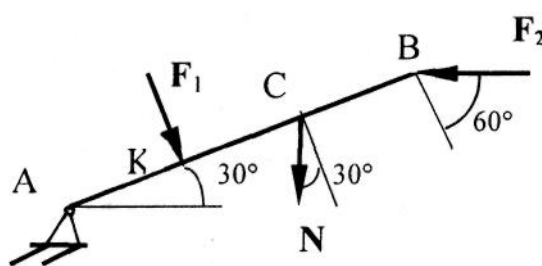
$$\sum M_A = 0.$$

$$-F_1 \cdot AK - N \cdot \cos 30^\circ \cdot AC + F_2 \cdot \cos 10^\circ \cdot AB = 0$$

$$-20 \cdot 2 - N \cdot 0,866 \cdot 4 + 45 \cdot 0,5 \cdot 6 = 0 \Rightarrow$$



О



λ

$$N = 27,3 \text{ кН}$$

Знак плюс указывает на то, что из условия прочности стержня при растяжении определяем:

$$\sigma = \frac{N}{A} \leq [\sigma]_p$$

$$\frac{27,3 \cdot 10^3}{A} \leq 180 \Rightarrow A = 1,7 \cdot 10^2 \text{ мм}^2$$

$$\text{Так как } A = \frac{\pi \cdot d^2}{4} \Rightarrow d = \sqrt{\frac{4 \cdot A}{\pi}} = 14,7 \text{ мм}$$

Принимаем $d = 15 \text{ мм}$.

$$A = \frac{\pi \cdot d^2}{4} = \frac{3,14 \cdot 15^2}{4} = 176,625 \text{ мм}^2$$

Определяем удлинение стержня СД

$$\Delta l = \frac{N \cdot l}{E \cdot A}$$

$$l = CD = AC \cdot \sin 30^\circ = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2 \text{ м} = 2 \cdot 10^3 \text{ мм}$$

$$\Delta l = \frac{27,3 \cdot 10^3 \cdot 2 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^5 \cdot 176,625} = 1,54 \text{ мм}$$

Пример 3.

Для бруса с заданными размерами поперечного сечения определить допускаемые значения нагрузок F_1 и F_2 . Для материала бруса принять $[\sigma]_p = 160 \text{ МПа}$; $[\sigma]_c = 120 \text{ МПа}$.

Решение

В заданном брусе два участка: 1 и 2. Применяя метод сечений, определяем продольную силу N , выражая ее через искомые силы F_1 и F_2 . Проводя в пределах каждого из участка сечение, будем отбрасывать левую закрепленную часть бруса и оставлять для рассмотрения правую часть. На участке 1 продольная сила постоянна и равна $N_1 = F_1$. На участке 2 продольная сила также постоянна и равна $N_1 = F_1 + F_2$. Знак плюс указывает на то, что на обоих участках брус растянут. Строим эпюру продольных сил. Эпюра очерчена прямыми линиями, параллельными базовой.

Из условия прочности при растяжении определяем допускаемые значения нагрузок F_1 и F_2 , предварительно вычислив площади заданных поперечных сечений:

$$A_1 = \frac{\pi \cdot d^2}{4} = \frac{3,14 \cdot 4^2}{4} = 12,56 \text{ мм}^2$$

$$A_2 = a^2 = 7^2 = 49 \text{ мм}^2$$

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} \leq [\sigma]_p$$

$$\sigma_1 = \frac{F_1}{12,56} \leq 160$$

Отсюда $F_1 = 2020\text{Н} = 2,02\text{ кН}$;

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} \leq [\sigma]_p$$

$$\sigma_2 = \frac{F_1 + F_2}{49} \leq 160$$

Отсюда $F_1 + F_2 = 7840\text{Н} = 7,84\text{ кН}$;

$F_2 = 7,84 - F_1 = 5,82\text{ кН}$.

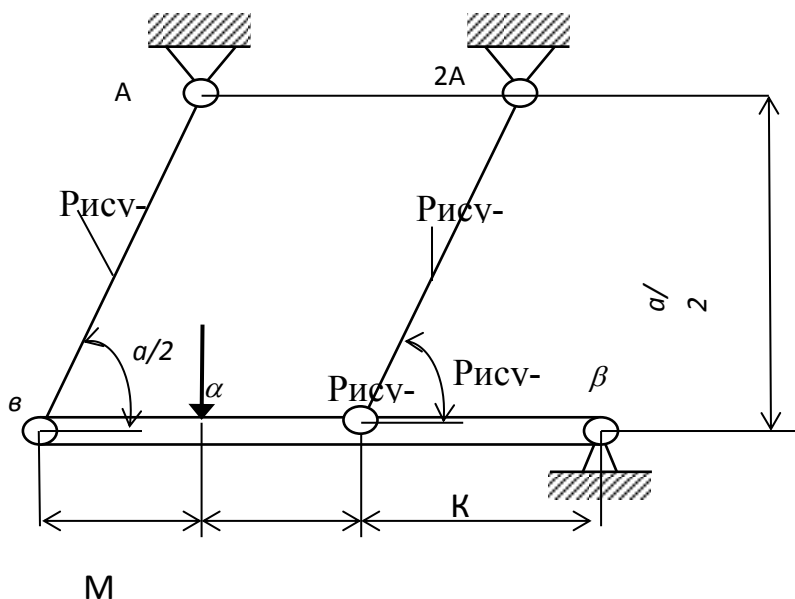
ЗАДАЧА 2

(данных пример приведен в познавательных целях)

Исходные данные: $F = 30\text{ кН}$; $a = 2\text{ м}$; $e = 4\text{ м}$; $\beta = 60^\circ$; $\alpha = 45^\circ$; $\kappa = 1,8$;
 $\sigma_T = 240\text{ МПа}$; $E = 2 \cdot 10^5\text{ МПа}$; $\Delta t = 40\text{ К}$; $\Delta m = 0,8\text{ мм}$
 схема системы на рисунке 23.

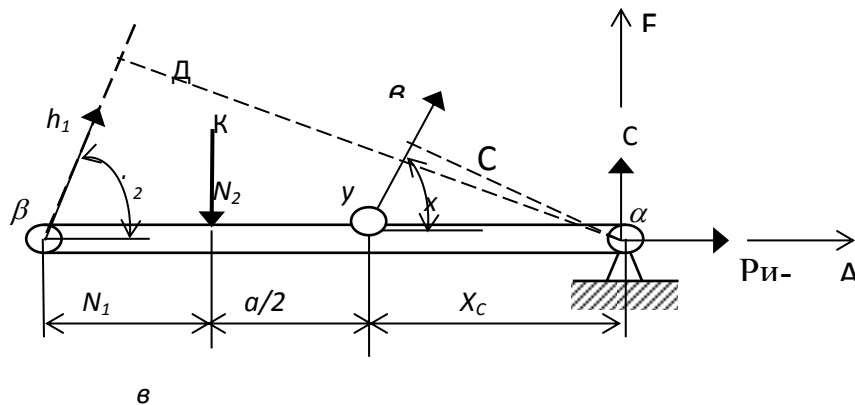
Требуется определить:

1. Усилия в стержнях системы от внешней нагрузки
2. Подобрать сечения стержней
3. Определить допускаемую нагрузку
4. Определить предельную нагрузку
5. Определить предельную допускаемую нагрузку
6. Определить монтажные и температурные напряжения.



Решение:

1. Выявляем неизвестные усилия (реакции).



Освобождаемся от связей наложенных на систему (платформу) как показано на рисунке 24.

Система включает в себя абсолютно жесткую платформу AC на которую наложены связи: неподвижный цилиндрический шарнир C и деформируемые стержни АД и КМ. Поэтому неизвестных усилия (реакции) у заданной системы четыре. Для произвольной плоской системы сил можно составить три независимых уравнения статики. Следовательно, система один раз статически неопределима:

$$k = n - m = 4 - 3 = 1.$$

2. Освобождаемся от связей наложенных на систему. Статическая сторона задачи (с.с.з.):

$$\sum F_{kx} = X_C + N_1 \cdot \cos \alpha + N_2 \cdot \cos \beta = 0; \quad (1)$$

$$\sum F_{ky} = Y_C - F + N_1 \cdot \sin \alpha + N_2 \cdot \sin \beta = 0; \quad (2)$$

$$\sum m_C (F_k) = F \cdot (a + \nu) - N_1 \cdot h_1 - N_2 \cdot h_2 = 0. \quad (3)$$

Определим неизвестные расстояния (плечо сил) h_1 и h_2 :

$$h_1 = AC \cdot \sin \alpha = (a + \nu) \cdot \sin 45^\circ = (2 + 4) \cdot 0,707 = 4,242 \text{ (м)};$$

$$h_2 = KC \cdot \sin \beta = \nu \cdot \sin 60^\circ = 4 \cdot 0,866 = 3,464 \text{ (м)}.$$

3. Представим систему в деформированном виде.

Предположим, что под действием силы F платформа переместится из положения AC в положение A_1C , при этом условно будем считать, что точка A и K переместятся в положения A_1 и K_1 , как показано на рисунке 25 (примечание: при этом точки A и K должны совершать свое движение по дуге, но так как мы рассматриваем очень маленькие деформации, то примем движения точек по прямой).

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 \cdot l_1}{E \cdot A_1}; \quad \Delta l_2 = \frac{N_2 \cdot l_2}{E \cdot A_2} \quad (5)$$

5. Решаем совместно все уравнения и определяем продольные силы действующие в системе. Синтез.

Подставим значения Δl_1 и Δl_2 из уравнения (5) в уравнение (4), (согласно исходных данных $A_1 = A$; $A_2 = 2A$) получим:

$$\frac{N_1 \cdot l_1 \cdot E \cdot 2A}{E \cdot A \cdot N_2 \cdot l_2} = 1,5$$

Проведем математические преобразования и получим:

$$2 \cdot N_1 \cdot l_1 = 1,5 \cdot N_2 \cdot l_2.$$

$$\text{Отсюда выразим силу } N_1: \quad N_1 = \frac{1,5 \cdot N_2 \cdot l_2}{2 \cdot l_1} \quad (6).$$

Определим длины стержней:

$$l_1 = \varrho / \sin \alpha = 4 / \sin 45^\circ = 4 / 0,707 = 5,66 \text{ (м)}$$

$$l_2 = \varrho / \sin \beta = 4 / \sin 60^\circ = 4 / 0,707 = 4,62 \text{ (м)}$$

Уравнение (6) подставим в уравнение (3) и выразим силу N_2 :

$$N_2 = \frac{F \cdot \left(\frac{a}{2} + \varrho \right)}{\left(\frac{1,5 \cdot l_2 \cdot h_1}{2 \cdot l_1} + h_2 \right)} \quad (7).$$

Подставим численные значения в уравнения (6) и (7) определим силы N_1 и N_2 :

$$N_2 = \frac{30 \text{ кН} \cdot \left(\frac{2}{2} + 4 \right)}{\left(\frac{1,5 \cdot 4,62 \cdot 4,242}{2 \cdot 5,66} + 3,464 \right)} = 24,75 \text{ кН}$$

$$N_1 = \frac{1,5 \cdot 24,75 \cdot 4,62}{2 \cdot 5,66} = 15,15 \text{ кН}$$

6. Определим и примем допускаемые напряжения для материала стержней системы.

$$[\sigma] = \frac{\sigma_T}{S_T} = \frac{240}{1,8} = 133,3 \text{ МПа}$$

7. Определяем необходимую площадь поперечного сечения стержней.

$$\text{Условие прочности: } \sigma_{\max} \leq [\sigma] \sigma_{\max} = \frac{N_{\max}}{A} \leq [\sigma].$$

$$N_{\max} = N_2 = 24,75 \text{ кН},$$

следовательно площадь определится по формуле:

$$A \geq \frac{N_2}{[\sigma]} = \frac{24,75 \cdot 10^3 \text{ Н}}{133,3 \cdot 10^6 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}} = 0,186 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 = 1,86 \text{ см}^2$$

Тогда $A_1 = A = 1,86 \text{ см}^2$; $A_2 = 2A = 2 \cdot 1,86 = 3,72 \text{ см}^2$.

Так как площадь сечений стержней должна быть одинаковой, у обеих стержней, принимаем расчётную площадь $A_{расч.} = \frac{A_{max}}{4} = \frac{3,72}{4} = 0,93 \text{ см}^2$.

Выбираем по таблицам нормального сортамента (Приложение) равнобокий уголок 20x20x3 с площадью поперечного сечения $A_{уголка} = 1,13 \text{ см}^2 = 113 \text{ мм}^2$.

8. Определяем фактические напряжения в стержнях системы.

В первом стержне:

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{4 \cdot A_{уголка}} = \frac{15,15 \cdot 10^3 \text{ Н}}{4 \cdot 113 \text{ мм}^2} = 33,52 \text{ МПа} \leq [\sigma] = 133,3 \text{ МПа}$$

Во втором стержне:

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{4 \cdot A_{уголка}} = \frac{24,75 \cdot 10^3 \text{ Н}}{4 \cdot 113 \text{ мм}^2} = 54,76 \text{ МПа} \leq [\sigma] = 133,3 \text{ МПа}$$

9. Определяем допускаемую нагрузку из условия прочности.

Условие прочности: $\sigma_{max} \leq [\sigma] \sigma_{max} = \frac{N_{max}}{A} \leq [\sigma]$.

Наиболее нагруженным является второй стержень и продольная сила в нем определяется:

$$N_2 = N_{max} \leq 4 \cdot A_{уголка} \cdot [\sigma] = 4 \cdot 113 \text{ мм}^2 \cdot 133,3 \text{ МПа} = 60251,6 \text{ Н}$$

Из уравнения (6) определим усилие в первом стержне:

$$N_1 = \frac{1,5 \cdot 60251,6 \cdot 4,62}{2 \cdot 5,66} = 36885,5 \text{ Н}$$

Подставим значения N_1 и N_2 в уравнение (3) и выразим допускаемую нагрузку:

$$[F] = \frac{N_1 \cdot h_1 + N_2 \cdot h_2}{\left(\frac{a}{2} + e\right)} = \frac{36885,5 \cdot 4,242 + 60251,6 \cdot 3,464}{(1 + 4)} = 73035,97 \text{ Н}$$

Недогрузка системы составляет:

$$\frac{[F] - F}{F} \cdot 100\% = \frac{73035,97 - 30000}{30000} \cdot 100\% = 143,45\%$$

10. Определяем предельную нагрузку.

Предельное состояние системы характеризуется полным использованием несущей способности, которое наступит тогда, когда в обоих стержнях напряжения достигнут предела текучести – что достигается не одновременно. В начале наступит пластическая деформация во втором стержне и усилие в нем будет равно:

$$N_2^T = 4 \cdot A_{\text{уголка}} \cdot \sigma_T = 4 \cdot 113 \text{ мм}^2 \cdot 240 \text{ МПа} = 108480 \text{ Н}$$

После появления пластической деформации во втором стержне конструкция сохранит способность воспринимать возрастающую нагрузку F . При этом усилие во втором стержне останутся постоянными и равными N_2^T . конструкция превращается в статически определимую. Исчерпание несущей способности всей конструкции наступит тогда, когда в первом стержне напряжения достигнут предела текучести и усилие в нем определится:

$$N_1^T = 4 \cdot A_{\text{уголка}} \cdot \sigma_T = 4 \cdot 113 \text{ мм}^2 \cdot 240 \text{ МПа} = 108480 \text{ Н}$$

соответствующая этому моменту нагрузка $F_{\text{пред.}}$ определяется после подстановки значений N_1 и N_2 в уравнение (3):

$$F_{\text{пред.}} = \frac{N_1 \cdot h_1 + N_2 \cdot h_2}{\left(\frac{a}{2} + e\right)} = \frac{108480 \cdot 4,242 + 108480 \cdot 3,464}{(1 + 4)} = 167189,4 \text{ Н}$$

11. Определяем предельную допускаемую нагрузку.

$$[F_{\text{пред.}}] = \frac{F_{\text{пред.}}}{S} = \frac{167189,4 \text{ Н}}{1,8} = 92883 \text{ Н}$$

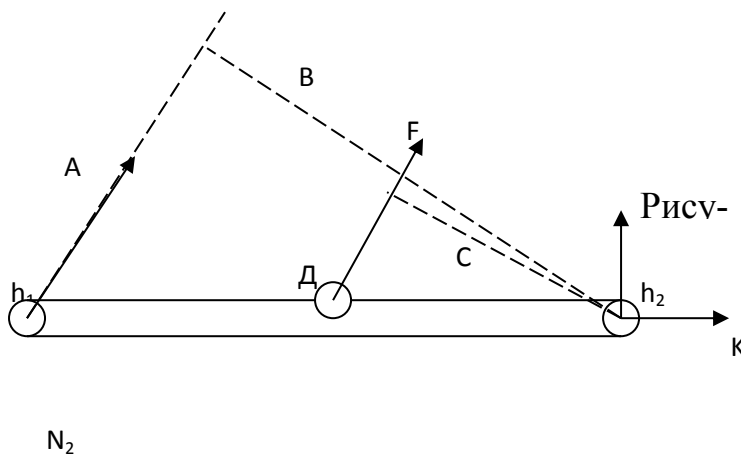
Определяем на сколько можно повысить несущую способность системы при расчете по предельному состоянию:

$$\frac{[F_{\text{пред.}}] - [F]}{[F]} \cdot 100\% = \frac{92883 - 73035,97}{73035,97} \cdot 100\% = 27,2\%$$

Таким образом, расчёт по предельному состоянию позволяет обнаружить скрытый запас работоспособности конструкции, составляющий 27,2%.

12. Определяем монтажные или температурных напряжения.

12.1. Определим температурные напряжения, вызванные нагревом стержня.



Предположим, что стержень AD нагреет на величину Δt . Определим реакции и напряжения стержня. Для этого повторим расчеты с пункта 2 по пункт 8.

Статическая сторона задачи. При повышении темпера-

туры стержень стремится удлиняться. Этому препятствуют второй стержень и шарнирная опора C в результате чего возникают реакции (рис. 26).

Рассматривая стержень АД, который после нагрева удлиняется и будет иметь длину $A_3Д$, а после сборки системы укоротиться на величину Δl_1 и займёт положение $A_2Д$, получим, что: $AA_2 = AA_3 - A_2A_3 = \Delta l_t - \Delta l_1$.

$$\text{Следовательно: } AA_1 = \frac{AA_2}{\sin \alpha} = \frac{\Delta l_t - \Delta l_1}{\sin \alpha} \quad (4).$$

Выражения (3) и (4) подставим в уравнение (2), получим:

$$\frac{(\Delta l_t - \Delta l_1) \cdot \sin \beta}{\sin \alpha \cdot \Delta l_2} = 1,5 \quad (5).$$

Физическая сторона задачи. В уравнении (5) у нас три неизвестные Δl_1 , Δl_2 и Δl_t . Величины Δl_1 и Δl_2 распишем по закону Гука (пункт 4). Величину определяем по формуле:

$$\Delta l_t = \alpha \cdot l \cdot \Delta t = 125 \cdot 10^{-7} \cdot 5,66, 40 = 12,5 \cdot 10^{-6} \cdot 5,66 \cdot 40 = 2830 \cdot 10^{-6} = 28,3 \cdot 10^{-4} \text{ м.}$$

Синтез. Подставим в уравнение (5) полученные величины и проведем математические преобразования, получим:

$$24,51 \cdot 10^{-4} = 2,7 \cdot 10^{-8} N_2 + 1,44 \cdot 10^{-8} N_1 \quad (6).$$

Уравнение (1) подставим в уравнение (6) и определим N_2 и N_1 :

$$N_2 = \frac{24,5 \cdot 10^{-4}}{3,88 \cdot 10^{-8}} = 6,32 \cdot 10^4 \text{ Н} = 63200 \text{ Н} \quad (\text{стержень растянут})$$

$$N_1 = \frac{3,464 \cdot 63200}{4,242} = 51608,8 \text{ Н} \quad (\text{стержень сжат})$$

Определим температурные напряжения в стержнях:

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{4 \cdot A_{\text{уголка}}} = \frac{51608,8}{4 \cdot 113} = 114,2 \text{ МПа} \leq [\sigma] = 133,3 \text{ МПа}$$

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{4 \cdot A_{\text{уголка}}} = \frac{63200}{4 \cdot 113} = 139,8 \text{ МПа} \leq [\sigma] = 133,3 \text{ МПа}$$

При нагреве первого стержня у второго стержня условие прочности не выполняется, то есть не обеспечена прочность.

12.2. Определим монтажные напряжения, вызванные неточность изготовления второго стержня.

Предположим, что стержень *КМ* конструкции, оказался короче на величину Δt (рис. 28). Если величина Δt незначительна, то, приложив определенные усилия, можно все стержни соединить в систему. В которой платформа АС займет после сборке какое-то положение A_1C (показано на рисунке 28). Очевидно, при этом стержень АД будет сжат, а стержень КМ – растянут.

Статическая сторона задачи. Аналогична пункту 12.1.

Геометрическая сторона задачи. Неточно изготовленный стержень КМ после сборке изменит свою длину, он удлинится на величину Δl_2 , а стержень АД укоротится на величину Δl_1 .

Физическая сторона задачи. В уравнении (5) у нас две неизвестные Δl_1 , Δl_2 . Величины Δl_1 и Δl_2 распишем по закону Гука (пункт 4).

Синтез. Подставим в уравнение (5) полученные величины и проведем математические преобразования, получим:

$$5,4 \cdot 10^{-8} N_1 = 0,85 - 2,6 \cdot 10^{-8} N_2 \quad (6).$$

Уравнение (1) подставим в уравнение (6) и определим N_2 и N_1 :

$$N_2 = \frac{0,85}{7,028 \cdot 10^{-8}} = 12,1 \cdot 10^6 \text{ Н} \quad (\text{стержень растянут})$$

$$N_1 = 0,85 \cdot N_2 = 0,85 \cdot 12,1 \cdot 10^6 = 9,92 \cdot 10^6 \text{ Н} \quad (\text{стержень сжат})$$

Определим монтажные напряжения в стержнях:

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{4 \cdot A_{\text{уголка}}} \leq [\sigma] = 133,3 \text{ МПа}$$

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{4 \cdot A_{\text{уголка}}} \leq [\sigma] = 133,3 \text{ МПа}$$

ЗАДАЧА 3

Построить эпюры Q и M_n для консольной балки (рис. 28, а), и подобрать из условия прочности:

- 1) деревянную балку круглого сечения при $[\sigma] = 8 \text{ МПа}$;
- 2) стальную балку двутаврового сечения при $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$.

Если $q = 9 \text{ кН/м}$; $F = 6 \text{ кН}$; $M = 12 \text{ кН}\cdot\text{м}$; $a_1 = 0,5 \text{ м}$; $a_2 = 1,0 \text{ м}$; $l_1 = 1,5 \text{ м}$.

Решение.

1. Строим эпюру поперечных сил Q. Построение начинаем от свободного конца (точка В), не определяя опорных реакций (балка консольная).

Делим балку на участки ВС, СД, ДА (рис. 29, б).

На первом участке ВС: $0 \text{ м} \leq z_1 \leq (l_1 - a_2 = 1,5 - 1 = 0,5 \text{ м})$

$Q_1 = F = 6 \text{ кН}$ (на протяжении всего участка ВС $Q_1 = \text{const}$, так как не зависит от z).

На втором участке СД: $0,5 \text{ м} \leq z_2 \leq (l_1 - a_1 = 1,5 - 0,5 = 1 \text{ м})$

$Q_2 = F + q(z_2 - 0,5)$ – уравнение наклонной прямой;

при $z_2 = 0,5 \text{ м}$, $Q_2 = F + q(z_2 - 0,5) = 6 + 9(0,5 - 0,5) = 6 \text{ кН}$

при $z_2=1,0$ м, $Q_2 = F + q(z_2 - 0,5) = 6 + 9(1,0 - 0,5) = 10,5$ кН

На третьем участке ДА: $1,0 \text{ м} \leq z_3 \leq (l_1 = 1,5 \text{ м})$

$Q_3 = F + q(z_3 - 0,5)$ – уравнение наклонной прямой;

при $z_2=1,0$ м, $Q_3 = F + q(z_2 - 0,5) = 6 + 9(1,0 - 0,5) = 10,5$ кН

при $z_2=1,5$ м, $Q_3 = F + q(z_2 - 0,5) = 6 + 9(1,5 - 0,5) = 15$ кН

По полученным данным строим эпюру Q (рис. 29, в)

2. Строим эпюру изгибающих моментов M.

На первом участке ВС: $0 \text{ м} \leq z_1 \leq (l_1 - a_2 = 1,5 - 1 = 0,5 \text{ м})$

$M_1 = -F \cdot z_1$ – уравнение наклонной прямой;

при $z_1=0$ м, $M_1 = -F \cdot z_1 = -6 \cdot 0 = 0$ кН·м

при $z_1=0,5$ м, $M_1 = -F \cdot z_1 = -6 \cdot 0,5 = -3$ кН·м

На втором участке СД: $0,5 \text{ м} \leq z_2 \leq (l_1 - a_1 = 1,5 - 0,5 = 1 \text{ м})$

$M_2 = -F \cdot z_2 - q(z_2 - 0,5) \cdot \frac{(z_2 - 0,5)}{2}$ – уравнение параболы;

при $z_2=0,5$ м,

$M_2 = -F \cdot z_2 - q(z_2 - 0,5) \cdot \frac{(z_2 - 0,5)}{2} = -6 \cdot 0,5 - 9(0,5 - 0,5) \cdot \frac{(0,5 - 0,5)}{2} = -3$ кН·м

при $z_2=0,75$ м,

$M_2 = -F \cdot z_2 - q(z_2 - 0,5) \cdot \frac{(z_2 - 0,5)}{2} = -6 \cdot 0,75 - 9(0,75 - 0,5) \cdot \frac{(0,75 - 0,5)}{2} = -4,78$ кН·м

при $z_2=1,0$ м,

$M_2 = -F \cdot z_2 - q(z_2 - 0,5) \cdot \frac{(z_2 - 0,5)}{2} = -6 \cdot 1,0 - 9(1,0 - 0,5) \cdot \frac{(1,0 - 0,5)}{2} = -7,125$ кН·м

На третьем участке ДА: $1,0 \text{ м} \leq z_3 \leq (l_1 = 1,5 \text{ м})$

$M_3 = -F \cdot z_3 - q(z_3 - 0,5) \cdot \frac{(z_3 - 0,5)}{2} + M$ – уравнение параболы;

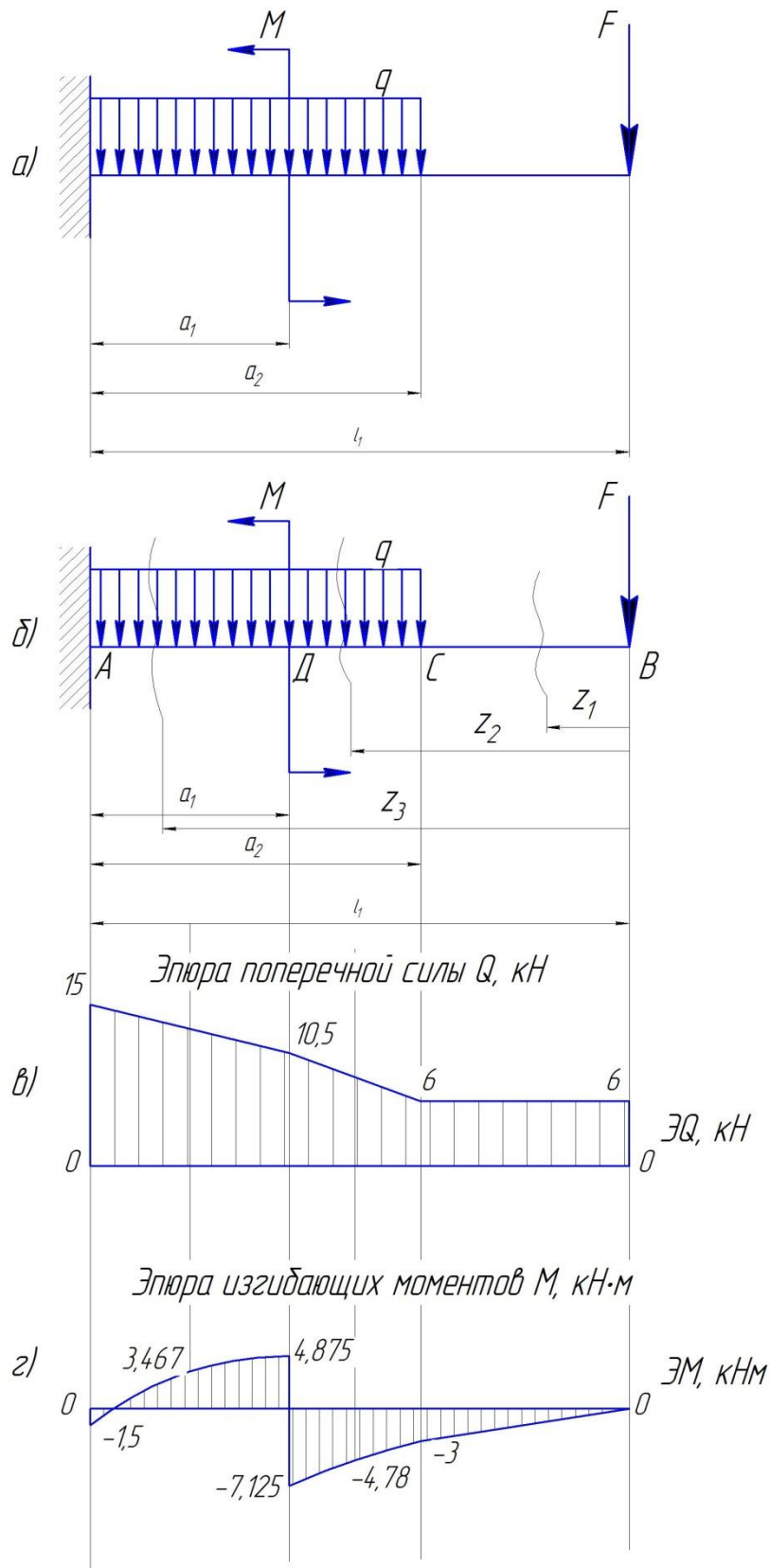


Рисунок 28 – Пример построения эюр поперечных сил и изгибающих моментов

при $z_3=1,0$ м,

$$M_3 = -F \cdot z_3 - q(z_3 - 0,5) \frac{(z_3 - 0,5)}{2} + M = -6 \cdot 1,0 - 9(1,0 - 0,5) \frac{(1,0 - 0,5)}{2} + 12 = 4,875 \text{ кН}\cdot\text{м}$$

при $z_3=1,25$ м,

$$M_3 = -F \cdot z_3 - q(z_3 - 0,5) \frac{(z_3 - 0,5)}{2} + M = -6 \cdot 1,25 - 9(1,25 - 0,5) \frac{(1,25 - 0,5)}{2} + 12 = 3,467 \text{ кН}\cdot\text{м}$$

при $z_3=1,5$ м,

$$M_3 = -F \cdot z_3 - q(z_3 - 0,5) \frac{(z_3 - 0,5)}{2} + M = -6 \cdot 1,5 - 9(1,5 - 0,5) \frac{(1,5 - 0,5)}{2} + 12 = -1,5 \text{ кН}\cdot\text{м}$$

По полученным данным строим эпюру M (рис. 29, г).

3. Подбираем сечение балки из условия прочности при изгибе:

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W_x} \leq [\sigma]$$

а) диаметр деревянной балки

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{M_{max}}{0,1 \cdot [\sigma]}} \geq \sqrt[3]{\frac{7,125 \cdot 10^6}{0,1 \cdot 8}} \geq 207,3 \text{ мм}$$

Полученное значение диаметра округляем до целого числа в большую сторону.

$$d = 210 \text{ мм}$$

б) номер двутавра

$$W_x \geq \frac{M_{max}}{[\sigma]} \geq \frac{7,125 \cdot 10^6}{160} \geq 44531,25 \text{ мм}^3 = 44,531 \text{ см}^3$$

По таблице сортаментов подбираем двутавр № 12 при $W_x=58,4 \text{ см}^3$.

ЗАДАЧА 4

Определить $[F]$ для колонны (рис. 30) из стали 3, если $[n_y] = 3$.

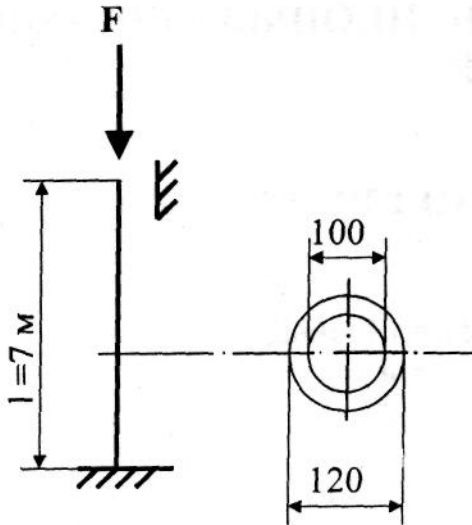


Рисунок 30 – Схема нагружения балки продольной силой

Решение:

Допускаемую величину силы F найдем для расчета колонны на устойчивость:

$$[F] = \frac{F_{кр}}{[n_y]}.$$

Определяем геометрические характеристики сечения, $\alpha = \frac{d_0}{d}$:

$$J_{min} = \frac{\pi \cdot d^4}{64} (1 - \alpha^4) = \frac{3,14 \cdot 120^4}{64} \left(1 - \left(\frac{100}{120} \right)^4 \right) = 5267350 \text{ мм}^4;$$

$$A = \frac{\pi \cdot d^2}{4} (1 - \alpha^2) = \frac{3,14 \cdot 120^2}{4} \left(1 - \left(\frac{100}{120} \right)^2 \right) = 3454 \text{ мм}^2.$$

Определяем минимальный радиус инерции:

$$i_{min} = \sqrt{\frac{J_{min}}{A}} = \sqrt{\frac{\frac{\pi \cdot d^4}{64} (1 - \alpha^4)}{\frac{\pi \cdot d^2}{4} (1 - \alpha^2)}} = \sqrt{\frac{5267350}{3454}} = 39 \text{ мм}.$$

Определяем гибкость колонны:

$$\lambda = \frac{\mu \cdot l}{i_{min}} \text{ мм},$$

Подставляем числовые значения, получаем

$$\lambda = \frac{0,7 \cdot 7000}{39} = 125,6 \approx 126 .$$

Для стали 3 по справочнику принимаем $\lambda_{\text{пред}} = 100$ (приложение), сравним расчетную гибкость с предельной $126 > 100$, следовательно, величину критической силы определяем по формуле Эйлера:

$$F_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot J_{\text{min}}}{(\mu \cdot l)^2} = \frac{(3,14)^2 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 5267350}{(0,7 \cdot 7000)^2} = 432603 \text{ Н} = 433 \text{ кН}$$

$$[F] = \frac{F_{\text{кр}}}{[n_y]} = \frac{432603}{3} = 144201 \text{ Н} \approx 144,2 \text{ кН}$$

Приложение

Механические характеристики машиностроительных материалов

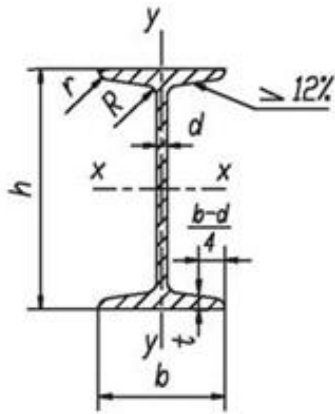
Марка материала	E, МПа	σ_T , МПа	σ_{BP} , МПа	δ , %
Сталь Ст 2	$2 \cdot 10^5$	220	380	27
Сталь Ст 3	$2 \cdot 10^5$	230	430	21
Сталь Ст 40, нормализация	$2 \cdot 10^5$	340	580	19
Сталь Ст 45, нормализация	$2 \cdot 10^5$	360	610	16

Коэффициент уменьшения расчетного сопротивления

λ	Ст 2-4	Ст 5	λ	Ст 2-4	Ст 5
0	1,00	1,00	110	0,52	0,43
10	0,99	0,98	120	0,45	0,36
20	0,96	0,95	130	0,40	0,33
30	0,94	0,92	140	0,36	0,29
40	0,92	0,89	150	0,32	0,26
50	0,89	0,86	160	0,29	0,24
60	0,86	0,82	170	0,26	0,21
70	0,81	0,76	180	0,23	0,19
80	0,75	0,70	190	0,21	0,17
90	0,69	0,62	200	0,19	0,16
100	0,60	0,51			

Коэффициенты а и b для формулы Ясинского

Материал	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	λ_θ	$\lambda_{пред}$
	МПа				
Ст2	264	0,70	–	62	105
Ст3	310	1,14	–	61	100
Ст4	328	1,15	–	60	96
Ст5	350	1,15	–	57	92
10Г2С, 15ГС, 15ХСНД	429	1,52	–	50	83
Дюралюминий Д16Т	406	2,83	–	30	53
Дерево (сосна, ель)	40	0,203	–	–	59
Чугун	776	12	0,053	–	80



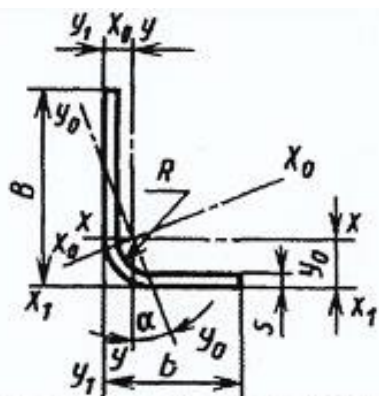
Балки двутавровые (по ГОСТ 8239 –89)

Обозначения:

h – высота балки;
 b – ширина полки;
 d – толщина стенки;
 t – средняя толщина полки;
 J – момент инерции;
 W – момент сопротивления;
 i – радиус инерции;
 S – статический момент полусечения.

Таблица П.1

Номер профиля	Размеры, мм				Площадь сечения $A, \text{см}^2$	$J_x, \text{см}^4$	$W_x, \text{см}^3$	$i_x, \text{см}$	$S_x, \text{см}^3$	$J_y, \text{см}^4$	$W_y, \text{см}^3$	$i_y, \text{см}$	Масса 1 м, кг
	h	b	d	t									
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
10	100	55	4,5	7,2	12,0	198	39,7	4,06	23,0	17,9	6,49	1,22	9,46
12	120	64	4,8	7,3	14,7	350	58,4	4,88	33,7	27,9	8,72	1,38	11,5
14	140	73	4,9	7,5	17,4	572	81,7	5,73	46,8	41,9	11,5	1,55	13,7
16	160	81	5,0	7,8	20,2	873	109	6,57	62,3	58,6	14,5	1,70	15,9
18	180	90	5,1	8,1	23,4	1290	143	7,42	81,4	82,6	18,4	1,88	18,4
18a	180	100	5,1	8,3	25,4	1430	159	7,51	89,8	114	22,8	2,12	19,9
20	200	100	5,2	8,4	26,8	1840	184	8,28	104	115	23,1	2,07	21,0
20a	200	110	5,2	8,6	28,9	2030	203	8,37	114	155	28,2	2,32	22,7
22	220	110	5,4	8,7	30,6	2550	232	9,13	131	157	28,6	2,27	24,0
22a	220	120	5,4	8,9	32,8	2790	254	9,22	143	206	34,3	2,50	25,8
24	240	115	5,6	9,5	34,8	3460	289	9,97	163	198	34,5	2,37	27,3
24a	240	125	5,6	9,8	37,5	3800	317	10,1	178	260	41,6	2,63	29,4
27	270	125	6,0	9,8	40,2	5010	371	11,2	210	260	41,5	2,54	31,5
27a	270	135	6,0	10,2	43,2	5500	407	11,3	229	337	50,0	2,80	33,9
30	300	135	6,5	10,2	46,5	7080	472	12,3	268	337	49,9	2,69	36,5
30a	300	145	6,5	10,7	49,9	7780	518	12,5	292	436	60,1	2,95	39,2
33	330	140	7,0	11,2	53,8	9840	597	13,5	339	419	59,9	2,79	42,2
36	360	145	7,5	12,3	61,9	13380	743	14,7	423	516	71,1	2,89	48,6
40	400	155	8,0	13,0	71,4	18930	947	16,3	540	666	85,9	3,05	56,1
45	450	160	8,6	14,2	83,0	27450	1220	18,2	699	807	101	3,12	65,2
50	500	170	9,5	15,2	97,8	39290	1570	20,0	905	1040	122	3,26	76,8
55	550	180	10,3	16,5	114	55150	2000	22,0	1150	1350	150	3,44	89,8
60	600	190	11,1	17,8	132	75450	2510	23,9	1450	1720	181	3,60	104
65	650	200	12,0	19,2	153	101400	3120	25,8	1800	2170	217	3,77	120
70	700	210	13,0	20,8	176	134600	3840	27,7	2230	2730	260	3,94	138
70a	700	210	15,0	24,0	202	152700	4360	27,5	2550	3240	309	4,01	158
70б	700	210	17,5	28,2	234	175370	5010	27,4	2940	3910	373	4,09	184



B - ширина большей полки;
b - ширина меньшей полки;
s - толщина полки;
R - радиус кривизны;
J - момент инерции;
i - радиус инерции;
*x*₀, *y*₀ - расстояния от центра тяжести до наружных поверхностей полок;

Обозначения:

$$n_1 = \frac{B - s - R}{s} \text{ - отношение расчетного свеса}$$

большой полки к толщине уголка;

$$n_2 = \frac{b - s - R}{s} \text{ - отношение расчетного свеса}$$

меньшей полки к толщине уголка

<i>B</i>	<i>b</i>	<i>s</i>	<i>R</i> , не более	<i>n</i> ₁	<i>n</i> ₂	<i>F</i> , см ²	Справочные значения величин для осей												Мас- са 1 м, кг	
							<i>x</i> - <i>x</i>		<i>y</i> - <i>y</i>		<i>x</i> ₀ - <i>x</i> ₀		<i>y</i> ₀ - <i>y</i> ₀		<i>x</i> ₁ - <i>x</i> ₁		<i>y</i> ₁ - <i>y</i> ₁			
							<i>J</i> _{<i>x</i>} , см ⁴	<i>i</i> _{<i>x</i>} , см	<i>J</i> _{<i>y</i>} , см ⁴	<i>i</i> _{<i>y</i>} , см	<i>J</i> _{<i>x</i>0} , см ⁴	<i>i</i> _{<i>x</i>0} , см	<i>J</i> _{<i>y</i>0} , см ⁴	<i>i</i> _{<i>y</i>0} , см	tgα	<i>J</i> _{<i>x</i>1} , см ⁴	<i>y</i> ₀ , см	<i>J</i> _{<i>y</i>1} , см ⁴		<i>x</i> ₀ , см
32	25	2.0	3	13,5	10,0	1,06	1,12	1,02	0,61	0,76	1,44	1,16	0,28	0,52	0,62	2,19	1,00	1,05	0,64	0,84
		2,5	3	10,6	7,8	1,32	1,35	1,01	0,73	0,75	1,75	1,16	0,34	0,51	0,63	2,74	1,02	1,31	0,66	1,03
50	35	3,2	5	13,0	8,4	2,53	6,52	1,61	2,72	1,04	7,89	1,77	1,35	0,73	0,51	13,37	1,65	4,63	0,87	1,98
60	40	3,0	4	17,7	11,0	2,84	10,73	1,94	3,97	1,18	12,61	2,11	2,09	0,86	0,47	24,63	1,96	6,45	0,93	2,23
70	50	4,0	6	15,0	10,0	4,50	22,90	2,25	10,04	1,49	27,94	2,49	5,01	1,05	0,53	45,84	2,26	16,81	1,23	3,53
80	63	4,0	6	17,5	13,2	5,42	35,95	2,57	20,06	1,92	46,52	2,93	9,48	1,32	0,63	68,40	2,45	33,51	1,57	4,26
85	35	4,0	6	18,7	4,2	4,50	34,02	2,75	3,77	0,92	35,44	2,81	2,36	0,72	0,22	81,95	3,26	5,89	0,69	3,53
90	70	4,0	6	20,0	15,0	6,10	51,53	2,90	27,92	2,14	66,03	3,29	13,42	1,48	0,62	97,34	2,74	45,92	1,72	4,79
100	65	4,0	6	22,5	13,8	6,30	66,91	3,26	23,36	1,93	77,72	3,51	12,56	1,41	0,44	133,47	3,25	36,83	1,46	4,95
105	100	3,0	4	32,7	31,0	5,98	67,66	3,36	60,12	3,17	103,23	4,16	24,55	2,03	0,19	115,85	2,84	100,09	2,59	4,69
115	65	5,0	7	20,6	10,6	8,55	120,07	3,75	29,60	1,86	132,79	3,94	16,88	1,41	0,35	253,74	3,95	46,24	1,39	6,71
120	100	8,0	12	12,5	10,0	16,41	239,47	3,82	153,18	3,05	205,56	4,52	30,59	1,75	0,41	366,95	4,30	86,01	1,75	7,89
180	140	6,0	9	27,5	20,8	18,53	632,17	5,84	343,25	4,30	808,01	6,60	167,41	3,01	0,62	1167,38	5,37	550,07	3,34	14,55

Используемая литература:

1. Беляев Н.М. Сопротивление материалов./Н.М. Беляев –М.: 1976. – 608 с.: ил.
2. Дарков А.В., Шпиро Г.С. Сопротивление материалов./А.В. Дарков, Г.С. Шпиро. – Учеб. для техн. вузов – 5-е изд., перераб. и доп. – М.: Высш. шк., 1989. – 624 с.: ил.
3. Горбунов С.Ф. Методическое пособие для выполнения расчетно-графической работы./ С.Ф. Горбунов – Иркутск, 2001. – 8 с.
4. Писарнко Г.С., Агарев В.А., Квитка В.Г., Уманский Э.С. Сопротивление материалов./Под ред. Акад. АН УССР Г.С. Писарнко - 5-е изд., перераб. и доп. – К.: Вища шк. Головное издание, 1986. – 775 с.

Содержание

Введение	3
МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ИЗУЧЕНИЮ СОДЕРЖАНИЯ ТЕМ	4
1. Основные понятия и определения	4
2. Виды деформаций	5
3. Виды расчетов	6
4. Деформация растяжение-сжатие	6
5. Деформация кручение	11
6. Деформация изгиб	15
7. Деформация устойчивость	21
8. Порядок решения статически неопределимых систем	24
Задания для контрольных работ	29
Примеры решения контрольных работ	36
Приложение	54
Используемая литература	57

