Министерство сельского хозяйства Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
ИРКУТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ А.А. ЕЖЕВСКОГО

АВТОМАТИКА

*Методические указания и контрольные задания
по дисциплине «Автоматика» для студентов очной и заочной форм обучения
направления подготовки 35.03.06 Агроинженерия (уровень бакалавриата)
Профили «Технические системы в агробизнесе», «Технологическое
оборудование для хранения и переработки сельскохозяйственной продукции»,
«Технический сервис в агропромышленном комплексе»*

Иркутск 2016

УДК 621.125: 621.438: 621.43(075)

Рецензент:
Доцент кафедры теплоэнергетики Иркутского национального исследовательского государственного технического университета, канд. техн. наук, доцент В.А. Бочкарев

Автоматика: метод. указания и контрольные задания по дисциплине «Автоматика» для студентов очной и заочной форм обучения направления подготовки 35.03.06 Агроинженерия (уровень бакалавриата), профили «Технические системы в агробизнесе», «Технологическое оборудование для хранения и переработки сельскохозяйственной продукции», «Технический сервис в агропромышленном комплексе» / Авт.-сост. Г.С. Кудряшев, А.Н. Третьяков. – Иркутск: ФГБОУ ВО Иркутский ГАУ, 2016. – 147 с.

Методические указания предназначены для изучения курса «Автоматика». Основной целью методических указаний является оказание помощи студентам при выполнении контрольной работы.

Для студентов очной и заочной форм обучения направлений подготовки:

- 35.03.06 Агроинженерия, профили «Электрооборудование и электротехнологии», «Технические системы в агробизнесе», «Технологическое оборудование для хранения и переработки сельскохозяйственной продукции», «Технический сервис в агропромышленном комплексе»;
- 13.03.01 Теплоэнергетика и теплотехника, профиль «Энергообеспечение предприятий»;
- 13.03.02 Электроэнергетика и электротехника, профиль «Электроснабжение».

1. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ИЗУЧЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ

Методические указания составлены в соответствии с Федеральными государственными образовательными стандартами высшего образования по направлению подготовки 35.03.06 Агроинженерия (уровень бакалавриата), утвержденного приказом Минобрнауки РФ №1172 от 20.10.2015 г.

Дисциплина Автоматика является одной из базовых в системе подготовки авиационных инженеров и её научной основой является высшая математика, теория вероятности, теоретическая механика и электроника и поэтому она базируется на знании дисциплин: «Математика», «Физика», «Механика», «Электротехника и электроника».

В этой дисциплине рассматриваются конкретные конструкции АС, а изучаются общие закономерности происходящих в них процессов и методы, на которых основываются исследование и расчет подобных систем. В свою очередь, сведения, полученные студентами из курса автоматики, необходимы для изучения ими дисциплин профессионального цикла по профилю направления подготовки, а также для будущей профессиональной деятельности.

Цель курса состоит в формировании у студентов теоретических знаний управлению (регулированию), анализу и синтезу автоматических систем (АС) и применению систем автоматизации в сельском хозяйстве.

Предметом изучения являются виды и типы схем автоматики, функциональная и структурная схемы автоматизации технологических процессов, объект управления, датчик, элемент сравнения, усилитель, исполнительный механизм, регулирующий орган, регулятор, контроллер.

В результате освоения дисциплины «Автоматика» студент должен:

иметь представление:

- о принципах построения и управления систем автоматического регулирования (САР) и управления (САУ);
- о перспективах развития теории автоматического управления, оценивания и идентификации.

знать:

- методы математического описания и исследования элементов и систем регулирования и управления;
- инженерные методы анализа различных классов АС при детерминированных и стохастических воздействиях;
- методы синтеза различных классов АС;
- методы исследования точности и динамических характеристик систем с помощью ЭВМ.

владеть:

- классическими методами исследования и синтеза различных классов САУ и САР.

иметь навыки:

- решения конкретных прикладных инженерных задач;
- анализа процессов в системах автоматического регулирования и управления, оптимизации их параметров;

- применения вычислительной техники при проведении экспериментальных исследований.

1.1. Содержание дисциплины «Автоматика»

Таблица 1. Основные разделы дисциплины

№ п.п.	Наименование разделов и тем	Распределение часов по видам занятий (очное обучение)				Формы текущего контроля
		Л	ПЗ	ЛР	СРС	
1	Автоматическое управление понятие, история создания и развития.	2			1	контр. вопросы, опрос, тесты
2	Объекты управления и их математическое описание. Понятие объекта и системы автоматического управления.	2			1	
3	Математические модели и классификация САУ.	2			2	контр. вопросы, опрос, тесты
4	Структурная схема как форма математической модели САУ. Способы построения и преобразования структурных схем.	2			2	
5	Элементарные звенья линейных САУ и их характеристики.	2			2	контр. вопросы, опрос, тесты
6	Запись передаточных функций: с использованием структурных схем.	2			2	
7	Анализ непрерывных линейных САУ.	2			2	контр. вопросы, опрос, тесты
8	Область применения датчиков. Коэффициента чувствительности.	2		2	2	
9	Математические модели САУ. Характеристики линейных систем.	2		2	2	контр. вопросы, опрос, тесты
10	Анализ линейных систем управления. Анализ импульсных систем управления.	2		2	2	
11	Цифровое управление САУ. Описание и характеристики цифровых СА У.	2		2	2	контр. вопросы, опрос, тесты
12	Методы анализа линейных объектов и систем.	2		2	2	
13	Методы устойчивости линейных объектов и систем.	2		2	3	контр. вопросы,

14	Анализ нелинейных объектов и систем управления. Устойчивость нелинейных систем.	2		2	3	опрос, тесты
	Итого	28		14	30	

2. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ ДЛЯ ВЫПОЛНЕНИЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

2.1. Передаточные функции и структурные преобразования ЛСС. Операторы ЛСС.

1. Что называется оператором АС?

Оператором АС называется правило, однозначно связывающее выходной сигнал АС y(t) с совокупностью входных сигналов $x(t), f_i(t)$:

$$y(t) = F[x(t), f_1(t)\ldots f_n(t)].$$

2. Какой оператор называется линейным?

Оператор называется линейным, если он удовлетворяет принципу суперпозиции, который выражается равенством:

$$A[c_1x_1(t) + c_2x_2(t)] = c_1A[x_1(t)] + c_2A\,[x_1(t)] = c_1y_1(t) + c_2y_2(t).$$

Характерными свойствами линейных систем являются:

1. $A[x_1(t) + x_2(t)] = A[x_1(t)] + A[x_2(t)]$;
2. $A[cx(t)] = cA[x_1(t)]$;
3. $A[-x(t) = -A[x(t)]$;
4. $A[0] = 0$.

Если оператор не удовлетворяет хотя бы одному из этих свойств, то он является нелинейным.

3. Какой оператор называется стационарным?

Оператор называется стационарным, если при сдвиге входного сигнала на время t_0 выходной сигнал сдвигается на t_0 при неизменной форме.

$$y(t) = A[x(t)],\ \textit{тогда}\ A[x(t-t_0)] = A[x(t-t_0)].$$

4. Какие виды операторов АС вы знаете?

1. Функциональные;
2. Операторы задаваемые ДУ с заданными н.у.;
3. Интегральные;
4. Операторы постоянного запаздывания.

5. Какие типы операторов ЛСС вы знаете?

а) ЛДУ с постоянными коэффициентами при нулевых н.у. Данный оператор может быть представлен в двух формах:

- форма I (справедлива для входного сигнала, дифференцируемого *m* раз)

$$a_ny^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \ldots + a_0y(t) = в_m x^{(m)}(t) + в_{m-1}x^{(m-1)}(t) + в_o x(t).$$

- форма II (справедлива для кусочно-непрерывного выходного сигнала)

$$\begin{cases} a_nu^{(n)}(t) + a_{n-1}u^{(n-1)}(t) + \cdots + a_0u(t) = x(t) & \text{Дифференциальное уравнение} \\ y(t) = в_mu^{(m)}(t) + в_{m-1}u^{(m-1)}(t) + \cdots + в_0u(t) & \text{Функциональное уравнение} \end{cases}$$

Этот оператор примем для более широкого круга входных сигналов и на практике является более предпочтителен.

Для технически реализуемых систем данные операторы удовлетворяют условию $n \geq m$

б) оператор постоянного запаздывания

$$y(t) = K(t-\tau).$$

Задача №1. Задан оператор АС

$$y(t) = A[x(t)] = 3 - 2x(t).$$

Исследовать линейность данного оператора.

Решение:

1. Введем сигналы $x_1(t)$ и $x_2(t)$ и запишем соответствующие реакции на эти сигналы:

$$y_1(t) = A[x_1(t)] = 3 - 2x_1(t)$$
$$y_2(t) = A[x_2(t)] = 3 - 2x_2(t)$$

2. Введем сигнал $x_3(t) = x_1(t) + x_2(t)$ и найдем реакцию АС на этот сигнал

$y_3(t) = A[x_1(t)] + x_2(t)] = 3 - 2[x_1(t) + x_2(t)] = 3 - 2\,x_1(t) - 2\,x_2(t)$

где $y_1(t) = 3 - 2\,x_1(t);\ \ y_3(t) = 2\,x_2(t)$

Следовательно:

$y_3(t) = A[x_1(t) + y_2(t)] \neq y_1(t) + y_2(t).$

Не выполняется первое свойство линейного оператора, значит оператор нелинейный.

Задача №2. Задан оператор АС

$$y(t) = A[x(t)] = 2tx(t) + 5\int_0^t x(\tau)\,d\tau$$

Исследовать линейность оператора.

Решение:

1. Введем сигналы $x_1(t)$ и $x_2(t)$ и определим реакции АС на них $y_1(t)$ и $y_2(t)$:

$$y_1(t) = A[x_1(t)] = 2tx_1(t) + 5\int_0^t x_1(\tau)\,d\tau$$

$$y_2(t) = A[x_2(t)] = 2tx_2(t) + 5\int_0^t x_2(\tau)\,d\tau$$

2. Определим реакцию АС $y_3(t)$ на входной сигнал $x_3(t) = c_1x_1(t) + c_2x_2(t)$:

$$y_3(t) = A[x_3(t)] = A[c_1x_1(t) + c_2x_2(t)] = 2tx_3(t) + 5\int_0^t x_3(\tau)\,d\tau =$$

$$= 2t[c_1x_1(t) + c_2x_2(t)] + 5\int_0^t c_1x_1(\tau) + c_2x_2(\tau)\,d\tau =$$

$$= c_1[2tx_1(t) + 5\int_0^t x_1(\tau)d\tau] + c_2[2tx_2(t) + 5\int_0^t x_2(\tau)d\tau].$$

Где $2tx_1(t) + 5\int_0^t x_1(\tau)d\tau = y_1(t);\ \ 2tx_2(t) + 5\int_0^t x_2(\tau)d\tau = y_2(t).$

3. Следовательно $y_3(t) = c_1y_1(t) + c_2y_2(t),$ что доказывает выполнение равенства

$$A[c_1x_1(t) + c_2x_2(t)] = c_1A[x_1(t)] + c_2A\,[x_2(t)],$$

Т.е. для заданного оператора это равенство справедливо, поэтому оператор – линейный.

Задача №3 Задан оператор АС

$$y(t)=A[x(t)]=5\int_0^t x(\alpha)d\alpha$$

Исследовать стационарность оператора.

Решение:

1. Определим смещенный на τ выходной сигнал системы

$$y(t-\tau)=5(t-\tau)\int_0^{t-\tau} x(\alpha)d\alpha.$$

2. Определим реакцию АС $y_c(t)$ на смещенный на время τ входной сигнал $x_c(t) = x(t-\tau)$

$$y_c(t) = A[x_c(t)] = A[x(t-\tau)] = 5t\int_0^t x(\alpha-\tau)d\alpha$$

Введем новую переменную $\beta=\alpha-\tau$, тогда

$$y_c(t) = 5t\int_{-\tau}^{t-\tau} x(\beta)d\beta.$$

Если $\beta = 0$, то $x(\beta) = 0$, следовательно

$$y_c(t) = 5t\int_0^{t-\tau} x(\alpha)d\alpha.$$

3. Проверяем справедливость равенства

$$y(t-\tau)=A[x(t-\tau)] \qquad (*)$$

Из сравнения $y(t-\tau)$ и $y_c(t)$ видим, что

$$y(t-\tau)\neq y_c(t),$$

т.е. для данного оператора равенство (∗) несправедливо, т.е. заданный оператор – нестационарный.

Передаточные функции ЛСС.

Передаточной функцией ЛСС с одним входом называется отношение изображения по Лапласу выходного сигнала к изображению по Лапласу входного сигнала при нулевых н.у.:

$$Y(p)=L[y(t)]=\int_0^\infty y(t)e^{-pt}dt,$$

$$\Phi(p)=\frac{Y(p)}{X(p)}, \quad \text{где } X(p)=L[x(t)]=\int_0^\infty x(t)e^{-pt}dt,$$

$$p=\alpha\pm j\beta;$$

2. Какие типы передаточных функций вы знаете?

– для ЛСС, оператором которой является ЛДУ с нулевыми н.у.:

$$\Phi(p) = \frac{в_m p^m + в_{m-1} p^{m-1} + \cdots + в_1 p + в_0}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \cdots + a_1 p + a_0} = \frac{B(p)}{A(p)}$$

Многочлен $A(p) = \sum_{i=0}^{n} a_i p^i$ называется характеристическим полиномом системы. Корни A(p), т.е. комплексные числа $p_1, p_2 \ldots p_n$, удовлетворяющие равенствам:

$$A(p_i) = 0, \quad i = \overline{1,n}$$

$$\Phi(p_i) = \infty, \quad i = \overline{1,n}$$

называются полюсами передаточной функции.

Корни *B(p)*, т.е. комплексные числа $p_1^*, p_2^* \cdots p_m^*$,

$$B(p_i^*) = 0; \quad i = \overline{1,m}$$

$$\Phi(p_i^*) = 0; \quad i = \overline{1,m}$$

называются нулями передаточной функции.

– для ЛСС, задаваемых оператором постоянного запаздывания:

$$\Phi(p) = Ke^{-p\tau}$$

II. Решение задач.

Задача №4. На вход ЛС АС

$$X(p) \longrightarrow \boxed{\Phi(p)} \xrightarrow{Y(p)}$$

действует входной сигнал $x(t) = 2\cdot 1(t)$, при этом $y(t) = 10e^{-0,5t}$.

Определить *Ф(р)* и представить её в виде произведения элементарных динамических звеньев.

Решение:

1. Определим изображение по Лапласу входного и выходного сигналов АС:

$$\Phi(p) = \frac{Y(p)}{X(p)}.$$

$$X(p) = L[x(t)] = L[2 \cdot 1(x)] = 2L[1(t)] = \frac{2}{p};$$

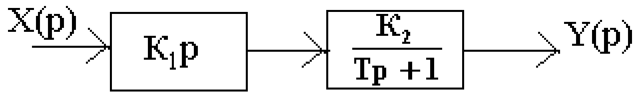
$$Y(p) = L[y(t)] = L\left[10e^{-0,5t}\right] = \vdots\, по\, табл.\vdots = \frac{10}{p + 0,5} = \frac{20}{2p + 1.}$$

2. Определяем *Ф(р)*

$$\Phi(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{20p}{(2p+1)2} = \frac{10p}{2p+1} = K_1 p \cdot \frac{K_2}{Tp+1}$$

$K_1 = 10;\ K_2 = 1;\ T = 2.$

Эквивалентная структурная схема имеет вид:



<u>Задача №5</u> Задан оператор АС

$$0{,}5y^{(2)}(t) + 2y^{(1)}(t) + 2y(t) = 2x^{(1)}(t) + 0{,}1x(t),$$

$$y_o = y_o^{(1)} = y_o^{(2)} = 0.$$

Определить передаточную функцию АС и представить её в виде произведения элементарных динамических звеньев.

<u>Решение:</u>

1. Определим оператор АС в изображениях по Лапласу:

$$0{,}5p^2Y(p) + 2pY(p) + 2Y(p) = 2pX(p) + 0{,}1X(p)$$

2. Определим $\Phi(p)$:

$$\Phi(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{2p+0{,}1}{0{,}5p^2+2p+2} = \frac{0{,}1(20p+1)}{2(0{,}25p^2+p+1} =$$

$$= 0{,}05\cdot(20p+1)\cdot\frac{1}{0{,}25p^2+p+1} \Rightarrow$$

$$K_1(T_1p+1)\cdot\frac{K_2}{T_2^2+2\xi T_2p+1} = \vdots\, \xi = 1 \,\vdots = K_1(T_1p+1)\frac{K_2}{(T_2p+1)^2},$$

где $K_1 = 0{,}05;$ $K_2 = 1;$ $T_1 = 20;$ $T_2 = 0{,}5.$

<u>Задача №6</u> Угловое движение самолета относительно его продольной оси ОХ описывается уравнением:

$$J\ddot{\gamma}(t) = -M_x^{\dot{\gamma}}\dot{\gamma}(t) + K_э\delta_э(t),$$

где $\gamma(t)$ - угол крена самолета – выходной сигнал.

$\delta_э(t)$ - угол отклонения элеронов – входной сигнал.

$J, K_э, M_x^{\dot{\gamma}}$ - постоянные коэффициенты, определяемые физическими свойствами самолета в окружающей среде.

Определить передаточную функцию ЛА.

<u>Решение:</u>

1. Определим оператор системы

$$J\ddot{\gamma}(t) + M_x^{\dot{\gamma}}\dot{\gamma}(t) = K_э\delta_э(t),$$

2. Определим $\Phi(p)$ самолета:

$Jp^2\gamma(p) + M_x^{\dot{\gamma}}p\gamma(p) = K_э\delta_э(t)$ - оператор системы в изображениях по Лапласу

б) $\Phi(p) = \dfrac{\gamma(p)}{\delta_э(p)} = \dfrac{K_э}{Jp^2 + M_x^{\dot{\gamma}}p} = \dfrac{K_э}{p(Jp + M_x^{\dot{\gamma}})}.$

Приведем $\Phi(p)$ к стандартному виду:

$$\Phi(p) = \frac{K_1}{p}\cdot\frac{K_2}{(Tp+1)},$$

где $K_1 = \dfrac{K_э}{M_x^{\dot{\gamma}}};$ $K_2 = 1;$ $T = \dfrac{J}{M_x^{\dot{\gamma}}}.$

2.2. Передаточные функции и структурные преобразования ЛСС

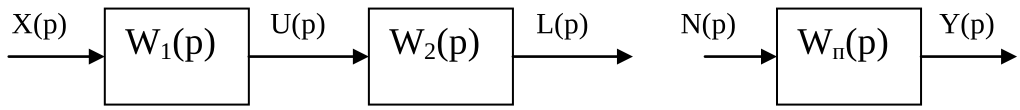
Определение передаточных функций непрерывных АС методом преобразования структурных схем.

1. Что называется передаточной функцией АС?

$$W(p) = \frac{Y(p)}{X(p)}$$

Отношение изображения по Лапласу выходного сигнала *Y(p)* к изображению по Лапласу входного сигнала при нулевых н.у. и отсутствии возмущений.

2. Чему равна ПФ последовательного соединения звеньев?



$$W_э(p) = \frac{Y(p)}{X(p)}; \begin{cases} U(p) = X(p)W_1(p); \\ L(p) = U(p)W_2(p); \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ Y(p) = N(p)W_П(p). \end{cases}$$

$$Y(p) = L(p)W_{n-1}(p) \cdot W_n(p) = U(p)W_2(p) \cdots W_{n-1}(p)W_n(p) =$$
$$= X(p)W_1(p) \cdot W_2(p) \cdots W_n(p);$$

$$W_э(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = W_1(p) \cdot W_2(p) \cdots W_n(p) = \prod_{i=1}^{n} W_i(p).$$

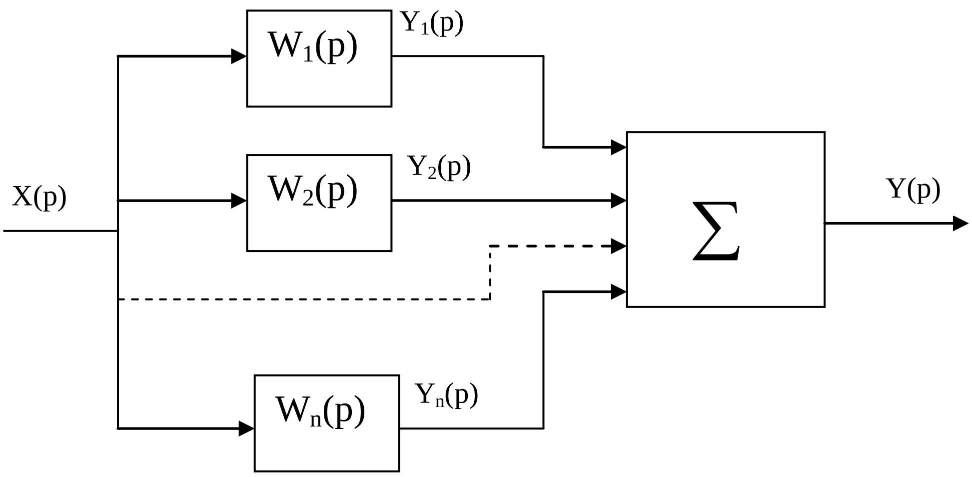
3. Чему равна ПФ параллельного соединения?

$$Y(p) = \sum_{i=1}^{n} Y_i(p);$$

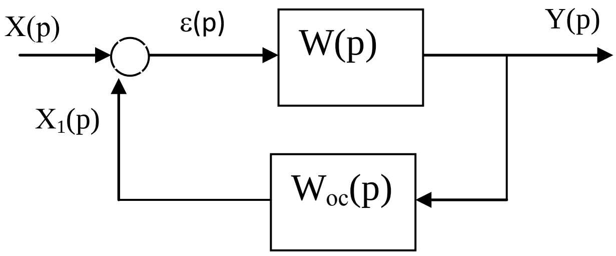
$$Y_i(p) = X(p)\,W_i(p);$$

$$W_э(p) = \frac{Y(p)}{X(p)};$$

$$W_э(p) = \sum_{i=1}^{n} W_i(p).$$



4. Чему равна ПФ встречно-параллельного соединения?



$$\begin{cases} \varepsilon(p) = X(p) + X_1(p) \\ Y(p) = \varepsilon(p) W(p) \\ X_1(p) = Y(p) W_{oc}(p) \end{cases}$$

$$Y(p) = \left[X(p) + Y(p) W_{oc}(p)\right] W(p) = X(p) W(p) + Y(p) W_{oc}(p) W(p);$$

$$Y(p)\left[1 - W(p) W_{oc}(p)\right] = X(p) W(p);$$

$$\Phi(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{W(p)}{1 - W(p) W_{oc}(p)}$$ Случай с положительной ОС.

$$\Phi(p) = \frac{W(p)}{1 + W(p) W_{oc}(p)}$$ Случай с отрицательной ОС.

Для следящих систем обычно $W_{oc}(p) = 1$, тогда в общем случае

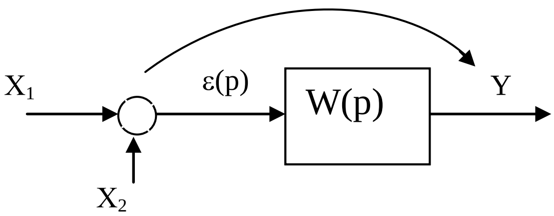
$\Phi(p) = \dfrac{W(p)}{1 + W(p)}$, где $W(p)$ – ПФ разомкнутой АС

если $W(p) = \dfrac{B(p)}{A(p)} \Rightarrow \Phi(p) = \dfrac{B(p)}{A(p) + B(p)}$.

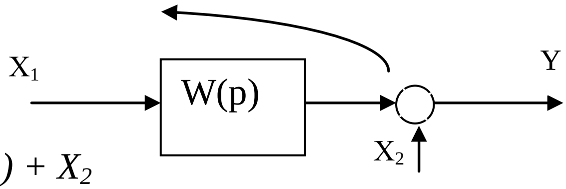
5. Правила структурных преобразований автоматических систем?

Основное правило: преобразования не должны изменять входные и выходные сигналы системы или её непреобразованной части.

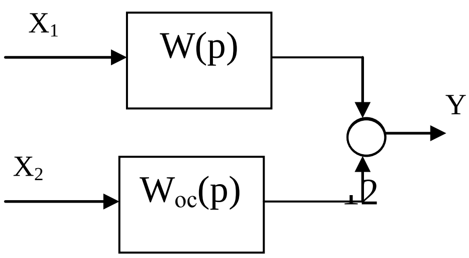
а) Перенос сумматора через звено.



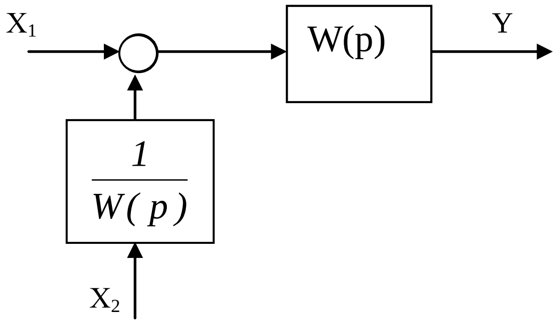
$(X_1 + X_2)\, W(p) = Y$



$Y = X_1 W(p) + X_2$

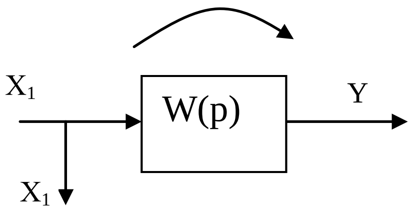


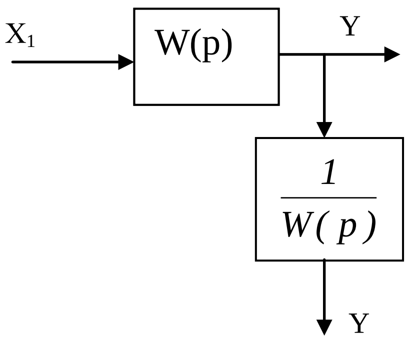
$Y = X_1 W(p) + X_2 W(p)$

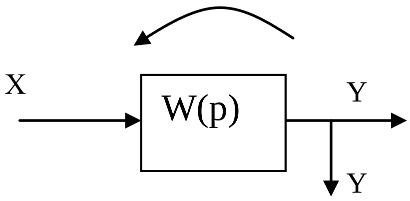


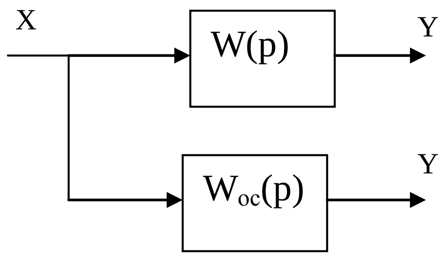
$$Y = \left[X_1 + X_2 \cdot \frac{1}{W} \right] W$$

б) Перенос узла через звено.

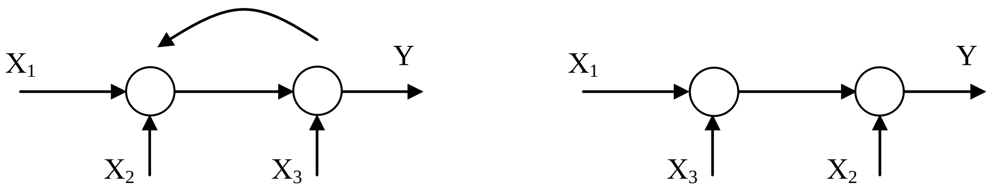






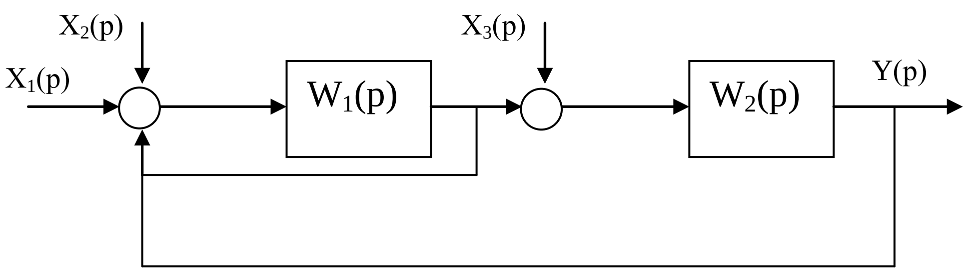


в) Перенос сумматора через сумматор



$$Y = X_1 + X_2 + X_3$$

6. Чему равна передаточная функция АС при воздействии на нее нескольких входных сигналов?



$Y(p) = X_1(p)\,\Phi_{X1Y}(p) + X_2(p)\,\Phi_{X2Y}(p) + X_3(p)\,\Phi_{X3Y}(p);$

Где $\Phi_{X1Y}(p) = \dfrac{Y(p)}{X_1(p)}\Big|_{X2(p)=X3(p)=0};$

$$\Phi_{X2Y}(p) = \frac{Y(p)}{X_2(p)}\Big|_{X1(p)=X3(p)=0};$$

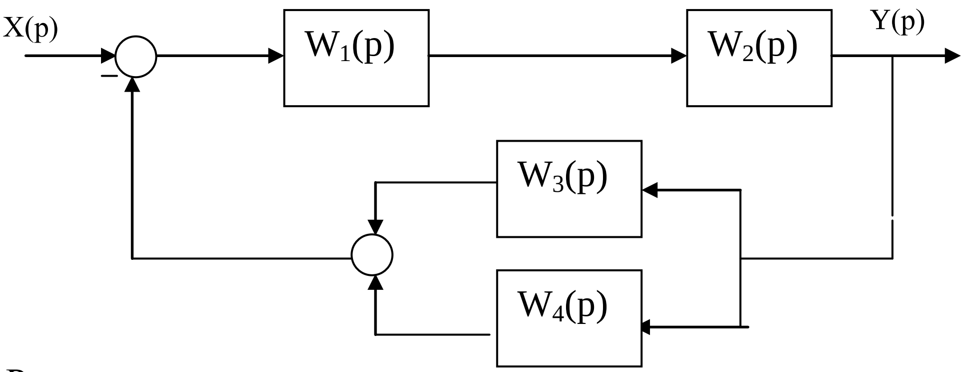
$$\Phi_{X3Y}(p) = \frac{Y(p)}{X_3(p)}\Big|_{X1(p)=X2(p)=0}.$$

Задача №1.

Для АС, структурная схема которой имеет вид (рис.1):

где $W_1(p) = \dfrac{5}{p};\quad W_2(p) = \dfrac{2}{2p+1};\quad W_3(p) = 2;\quad W_4(p) = \dfrac{5}{p};$

Определить передаточные функции разомкнутой и замкнутой АС.



Решение:

1. Определим ПФ прямого тракта АС.

Передаточная функция прямого тракта АС представляет собой последовательное соединение W_1 и W_2:

$$W_{1,2}(p) = W_1 \cdot W_2 = \frac{10}{p(2p+1)};$$

2. Определим ПФ разомкнутой АС:

ПФ разомкнутой АС представляет собой последовательное соединение $W_{1,2}(p)$ и $W_{oc}(p)$

$$W(p) = W_{1,2}\, W_{oc} = W_1\, W_2\,(W_3 + W_4)$$

$$W(p) = \frac{10}{p(2p+1)}\left(2 + \frac{1}{p}\right) = \frac{10(2p+1)}{p^2(2p+1)} = \frac{10}{p^2}$$

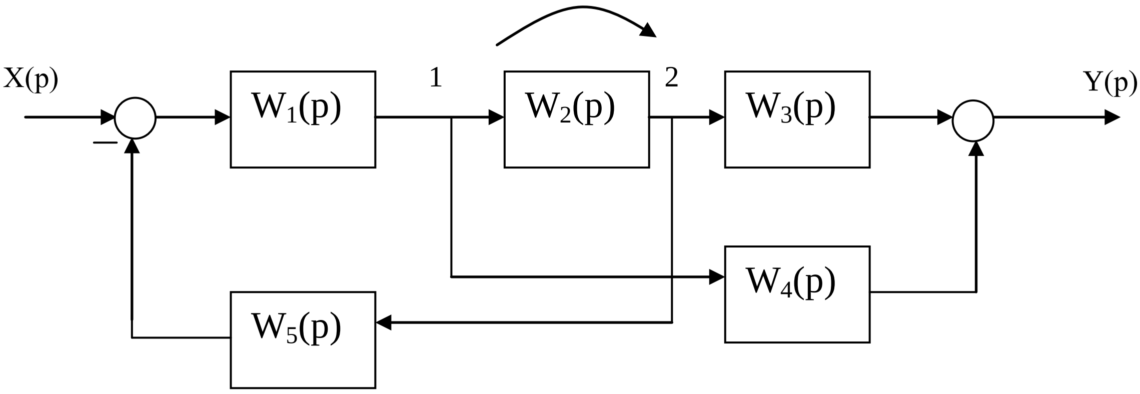
3. Определим ПФ замкнутой АС:

$$\Phi(p)=\frac{W_{1,2}(p)}{1+W(p)}=\frac{\dfrac{10}{p(2p+1)}}{1+\dfrac{10}{p^2}}=\frac{10p}{(p^2+10)(2p+1)}=\frac{10p}{2p^3+p^2+20p+10}=$$

$$=\frac{p}{0{,}2p^3+0{,}1p^2+10p+1}.$$

Задача №2

Для АС, заданной структурой

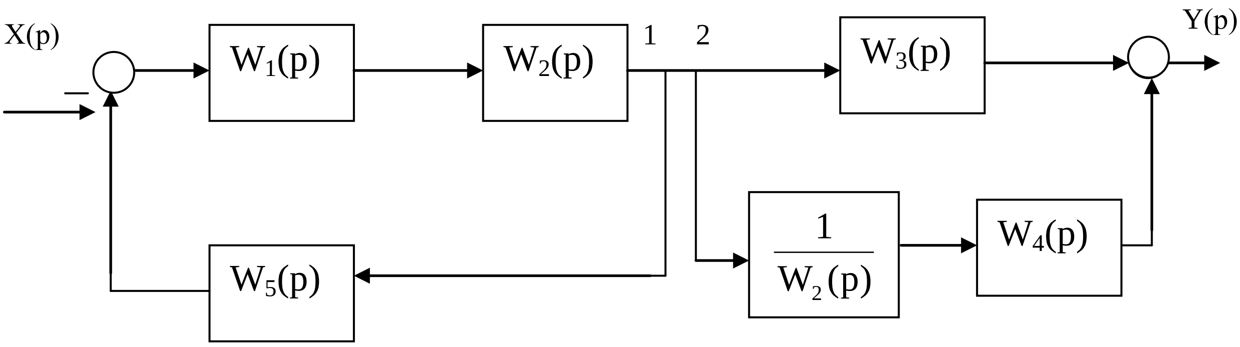


где $W_1(p) = 5$; $W_2(p) = \dfrac{2}{p}$; $W_3(p) = \dfrac{2}{p}$; $W_4(p) = 2$; $W_5(p) = 0{,}5$,

Определить передаточную функцию для выходного сигнала.

Решение:

1.Преобразуем структурную схему перенеся узел 1 через звено $W_2(p)$ и узел 2:



2. Определяем передаточные функции:

а) последовательного соединения $W_1(p)\,W_2(p)$ и $W_2^{-1}(p)W_4(p)$:

$$W_{1э}(p) = W_1(p)W_2(p) = \frac{10}{p};$$

$$W_{3э}(p) = W_2^{-1}(p)W_4(p) = p;$$

б) встречно-параллельного соединения $W_{1э}(p)$ и $W_5(p)$

$$W_{2э}(p) = \frac{W_{1э}(p)}{1 + W_{1э}(p)W_5(p)} = \frac{10/p}{1 + \frac{10}{p} \cdot 0{,}5} = \frac{10}{p+5};$$

в) параллельного соединения $W_3(p)$ и $W_{3э}(p)$:

$$W_{4э} = W_3(p) + W_{3э}(p) = \frac{4}{p} + p = \frac{p^2+4}{p};$$

г) передаточную функцию АС как последовательное соединение $W_{2э}(p)$ и $W_{4э}(p)$:

$$\Phi_{XY}(p) = W_{2Э}(p)W_{4Э}(p) = \frac{10}{p+5} \cdot \frac{4+p^2}{p} = \frac{10p^2+40}{p(p+5)}.$$

Задача №3

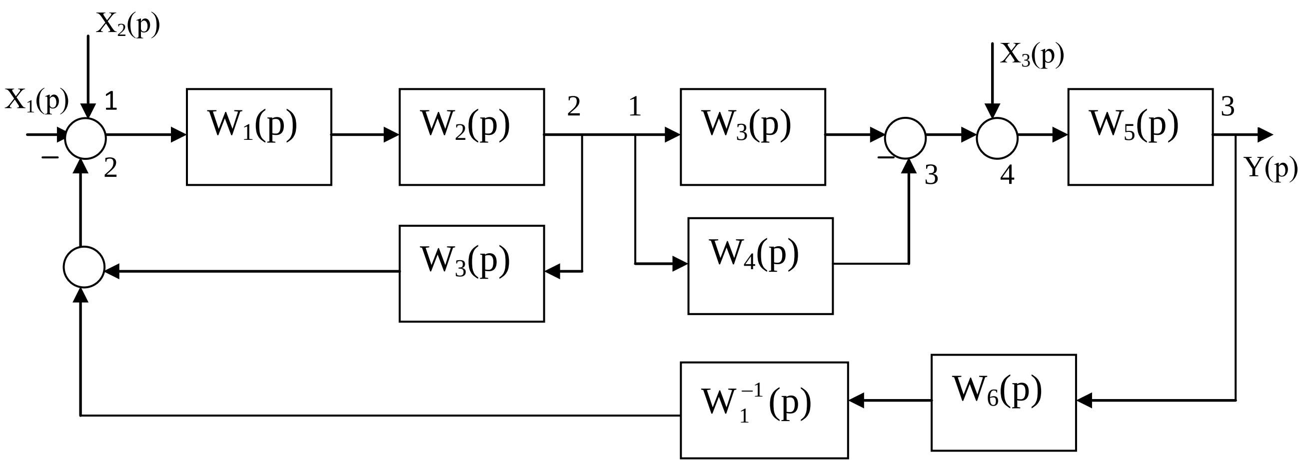
Структурная схема АС имеет вид (рис.2):

где $W_1(p) = 2$; $W_2(p) = \frac{5}{p}$; $W_3(p) = 2$; $W_4(p) = \frac{2}{p}$; $W_5(p) = 0{,}2$; $W_6(p) = 2$.

Определить передаточные функции АС от каждого входа к выходу.

Решение.

1. Преобразуем структурную схему путем переноса узла 2 через звено $W_3(p)$ и узел 1, а также сумматора 2 через звено $W_1(p)$ и сумматор 1.



2. Определим $\Phi_{X1Y}(p)$ при $X_2(p) = X_3(p) = 0$.

а) $W_{1э}(p) = \dfrac{W_1(p)W_2(p)}{1 + W_1(p)W_2(p)W_3(p)} = \dfrac{10}{p+20};$

б) $W_{3э}(p) = W_3(p) - W_4(p) = \dfrac{2(p-1)}{p};$

в) $W_{5э}(p) = W_{1э}(p)W_{3э}(p)W_5(p) = \dfrac{4(p-1)}{p(p+20)}$;

г) $W_{oc}(p) = W_1^{-1}(p)W_6(p) = 1$;

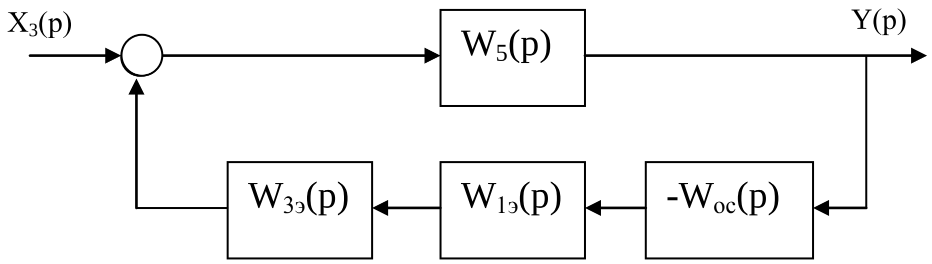
д) $\Phi_{X1Y}(p) = \dfrac{W_{5э}(p)}{1+W_{5э}(p)W_{oc}} = \dfrac{4(p-1)}{p(p+20)+4(p-1)} = \dfrac{4p-4}{p^2+24p-4}$.

3.Определим $\Phi_{X_2Y}(p)$ при $X_1(p) = X_3(p) = 0$.

Так как сигнал $X_2(p)$ воздействует на АС в том месте, что и $X_1(p)$, то

$$\Phi_{X_2Y}(p) = \Phi_{X1Y}(p).$$

4. Определим $\Phi_{X3Y}(p)$ при $X_1(p) = X_2(p) = 0$.

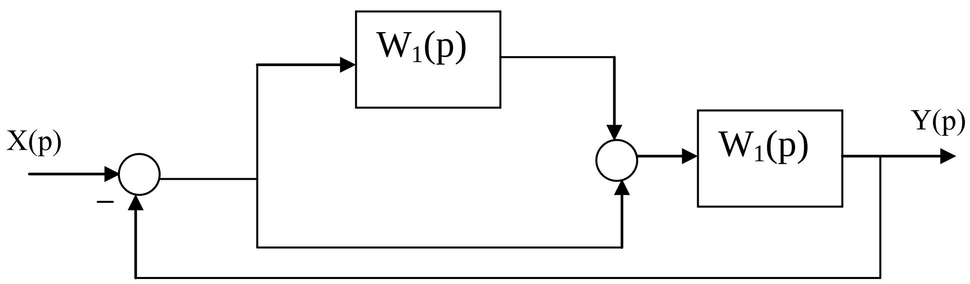


$$\Phi_{X3Y}(p) = \frac{W_5(p)}{1-W_{3э}(P)W_{1э}(p)\cdot[-W_{oc}(p)]W_5(p)} = \frac{0{,}2}{1+\dfrac{2(p-1)}{p}\cdot\dfrac{10}{p+20}\cdot 0{,}2} =$$

$$= \frac{0{,}2p(p+20)}{p(p+20)+4(p-1)} = \frac{0{,}2p^2+4}{p^2+24p-4}.$$

Задача №4

Структурная схема АС имеет вид:



где $W_1(p) = 2$; $W_2(p) = \dfrac{25}{p^2(2p+1)}$.

Определить $\Phi(p)$, какому элементарному звену она соответствует и определить его параметры.

$$\Phi(p)=\frac{[W_1(p)+1]W_2(p)}{1+[W_1(p)+1]W_2(p)}=\frac{\dfrac{25(2p+1)}{p^2(2p+1)}}{1+\dfrac{25(2p+1)}{p^2(2p+1)}}=\frac{25}{p^2+25};$$

Апериодическое звено второго порядка с параметрами:

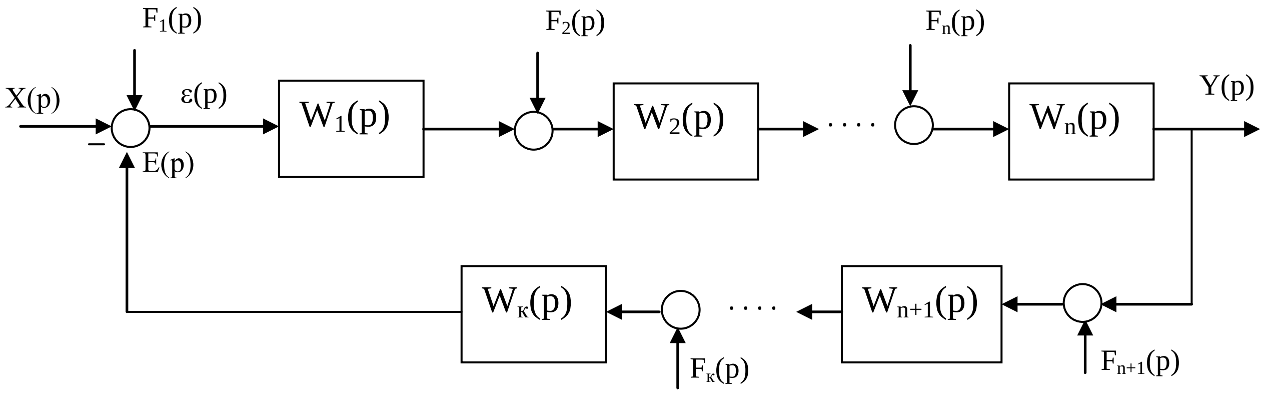
$$\frac{25}{p^2+25}=\frac{K}{T^2p^2+2T\xi p+1}=\frac{1}{\dfrac{1}{25}p^2+1};$$

$K = 1;\ T^2=\frac{1}{25};\ T=\frac{1}{5};\ 2T\xi=0;\ \xi=0;$

Полюса этой ПФ будут $p_1 = j5;\ p_2 = -j5.$

2.3. Передаточные функции по возмущению

1. Что называется передаточной функцией по возмущению?



$\Phi_{Fi}(p)=\frac{Y(p)}{F_i(p)}$, при $X(p) = F_{j\neq i}(p) = 0;\quad j = 1\div K;$

$$Y(p)=X(p)\Phi_{XY}(p)+\sum_{i=1}^{K}F_i(p)\Phi_{Fi}(p);$$

2. Что называется ПФ для ошибки от полезного входного сигнала?

$\Phi_{XE}(p)=\frac{E(p)}{X(p)}$, при $F_i(p) = 0;$

$E(p) = Y(p) - Y_{ж}(p)$, но $Y_{ж}(p) = X(p)$ для следящей системы

$E(p) = Y(p) - X(p).$

Тогда $\Phi_{XE}(p)=\frac{Y(p)-X(p)}{X(p)}=\Phi_{XY}(p)-1=\frac{W(p)}{1+W(p)}-1=-\frac{1}{1+W(p)};$

3. Чему равна ПФ для ошибки от возмущающего воздействия?

$$\Phi_{FiE}(p)=\frac{E(p)}{F_i(p)}=\frac{Y(p)-Y_{ж}(p)}{F_i(p)}.$$

Но $Y_{ж}(p) = 0$, т.к. $F_i(p)$ – помеха. Тогда $\Phi_{FiE}(p) = \Phi_{FiY}(p);$

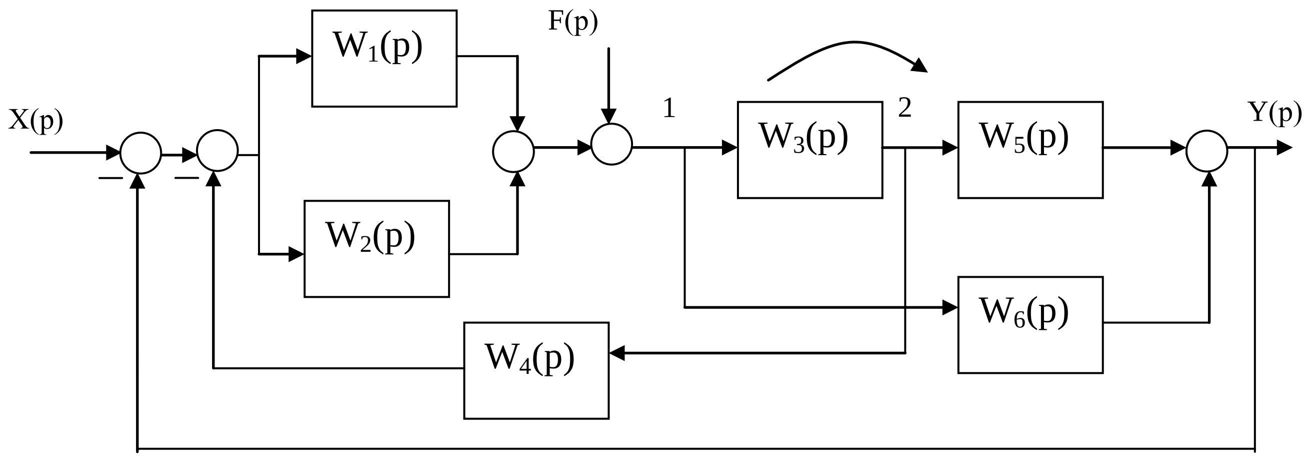
4. Что называется ПФ для рассогласования?

$$\Phi_{x\varepsilon}(p)=\frac{\varepsilon(p)}{X(p)};\ \varepsilon(p) = X(p) - Y(p) = -E(p);$$

Тогда $\Phi_{X\varepsilon}(p) = -\Phi_{XE}(p) = \dfrac{1}{1+W(p)};$

Задача №1

Структурная схема системы имеет вид:

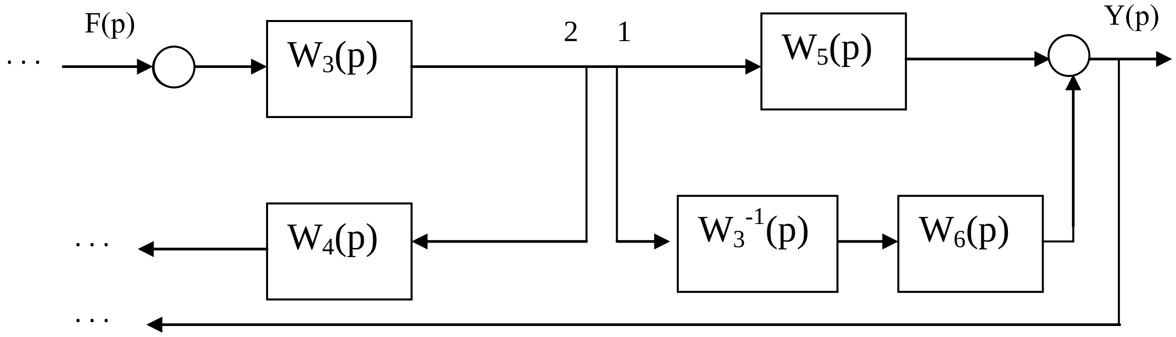


где $W_1(p) = \dfrac{2}{p}$; $W_2(p) = 1$; $W_3(p) = 0{,}5$; $W_4(p) = 2$; $W_5(p) = \dfrac{1}{p}$; $W_6(p)=\dfrac{2}{p}$.

Определить все основные ПФ АС.

Решение:

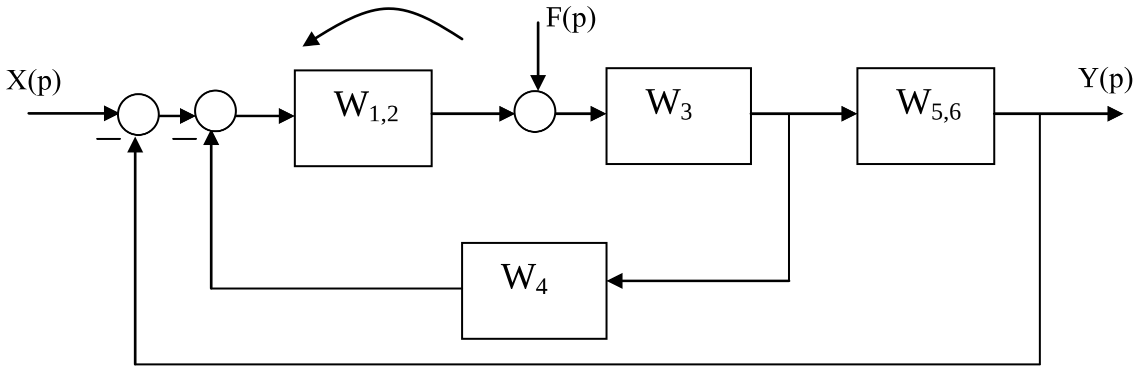
1. Определение ПФ разомкнутой системы *W(p):*
   а) по правилам структурных преобразований приведем данную структуру к одноконтурному виду:
   - перенесем узел 1 через звено $W_3(p)$ и узел 2;



- определим ПФ параллельных соединений:

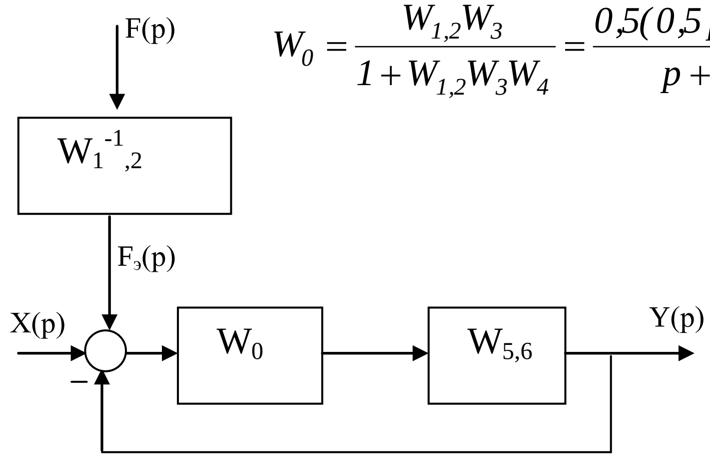
$$W_{1,2}(p)=W_1(p)+W_2(p)=\frac{2}{p}+1=\frac{2(0{,}5+1)}{p},$$

$$W_{5,6}(p) = W_5(p) + \frac{W_6(p)}{W_3(p)} = \frac{1}{p} + \frac{4}{p} = \frac{5}{p}.$$



- перенесем возмущение $F(p)$ через $W_{1,2}(p)$ и определим ПФ встречно-параллельного соединения $W_0(p)$:

$$W_0 = \frac{W_{1,2}W_3}{1 + W_{1,2}W_3W_4} = \frac{0{,}5(0{,}5p+1)}{p+1};$$



б) определим $W(p)$:

$$W(p) = W_0(p)W_{5,6}(p) = \frac{0{,}5(0{,}5p+1)}{p+1} \cdot \frac{5}{p} = \frac{2{,}5(0{,}5p+1)}{p(p+1)}.$$

2. Определим ПФ для задающего сигнала $\Phi(p)$:

$$\Phi(p) = \frac{W(p)}{1+W(p)} = \frac{2{,}5(0{,}5p+1)}{2{,}5(0{,}5p+1) + p(p+1)} = \frac{0{,}5p+1}{0{,}4p^2 + 0{,}9p + 1}.$$

3. Определим ПФ от возмущения $\Phi_{FY}(p)$:

$$W_{FY}(p) = \frac{1}{W_{1,2}(p)}\Phi(p) = \frac{p}{2(0{,}5p+1)} \cdot \frac{0{,}5p+1}{(0{,}4p^2+0{,}9p+1)} = \frac{0{,}5p}{0{,}4p^2+0{,}9p+1}.$$

4. Определим ПФ для ошибки от задающего воздействия $\Phi_{XE}(p)$ или $S(p)$, помехи $\Phi_{FE}(p)$ и для рассогласования $\Phi_{XE}(p)$ и для рассогласования $\Phi_{X\varepsilon}(p)$:

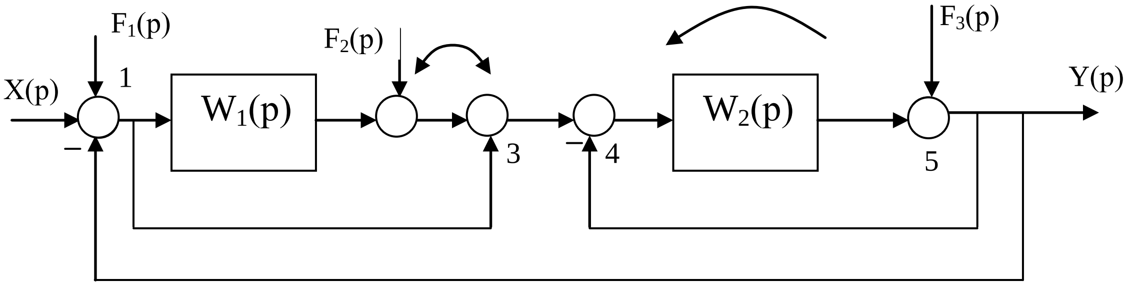
$$W_{XE}(p) = -\frac{1}{1+W(p)} = \Phi(p) - 1 = -\frac{0{,}4p(p+1)}{0{,}4p^2+0{,}9p+1};$$

$$W_{FE}(p) = \Phi_{FY}(p) = -\frac{0{,}5p}{0{,}4p^2 + 0{,}9p + 1};$$

$$\Phi_{X\varepsilon}(p) = -\Phi_{XE}(p) = \frac{0{,}4p(p+1)}{0{,}4p^2 + 0{,}9p + 1};$$

Задача №2

Структурная схема АС имеет вид:



где $W_1(p) = 2;$ $W_2(p) = \frac{1}{p}.$

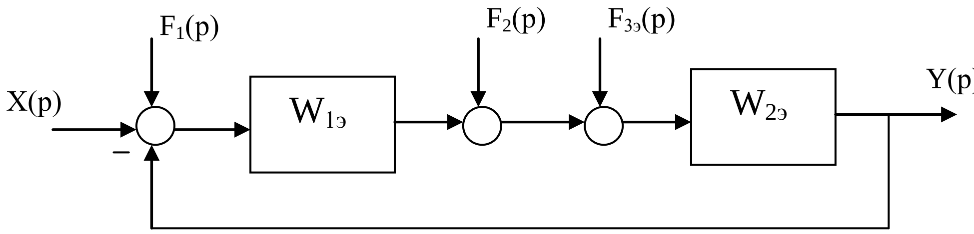
Определить изображение выходного сигнала $Y(p)$ и ошибки $E(p)$.

Решение:

1. Определим $Y(p)$

$$Y(p) = X(p)\Phi(p) + \sum_{i=1}^{3} F_i(p)\Phi_{FiY}(p).$$

Для нахождения $\Phi(p)$ и $\Phi_{FiY}(p)$ преобразуем структуру АС, поменяв сумматоры 2, 3 местами и сумматор 5 перенесем через звено $W_2(p)$ и сумматор 4



Где $W_{1э}(p) = W_1(p) + 1;$ $W_{2э} = \frac{W_2(p)}{1 + W_2(p)};$

$$F_{3э}(p) = F_3(p) \cdot W_2^{-1}(p).$$

а) Определим $\Phi(p)$:

$$\Phi(p) = \frac{Y(p)}{X(p)}\bigg|_{F_1=F_2=F_3=0} = \frac{W_{1э} \cdot W_{2э}}{1 + W_{1э} \cdot W_{2э}} = \frac{(W_1 + 1) \cdot \dfrac{W_2(p)}{1 + W_2(p)}}{1 + (W_1 + 1) \cdot \dfrac{W_2(p)}{1 + W_2(p)}} =$$

$$= \frac{(1 + W_1)W_2}{1 + W_2 + W_2(1 + W_1)} = \frac{3}{p + 4},$$

$\Phi(p)=\dfrac{0{,}75}{0{,}25p+1};$

б) Определим $\Phi_{FiY}(p)$:

$$i=1;\quad \Phi_{F1Y}(p)=\frac{Y(p)}{F_1(p)}\bigg|_{X=F_2=F_3=0}=\frac{W_{1э}W_{2э}}{1+W_{1э}W_{2э}}=\Phi(p)=\frac{0{,}75}{0{,}25p+1};$$

$i=2;$

$$\Phi_{F2Y}(p)=\frac{Y(p)}{F_2(p)}\bigg|_{X=F_1=F_3=0}=\frac{W_{2э}}{1+W_{2э}W_{1э}}=\frac{W_2}{1+2W_2+W_1W_2}=\frac{1}{p+4}=\frac{0{,}25}{0{,}25p+1};$$

$i=3;$

$$\Phi_{F3Y}(p)=\frac{Y(p)}{F_3(p)}\bigg|_{X=F_1=F_2=0}=\frac{W_2^{-1}W_{2э}}{1+W_{1э}W_{2э}}=\frac{1}{1+2W_2+W_1W_2}=\frac{p}{p+4}=\frac{0{,}25p}{0{,}25p+1}.$$

$$Y(p)=\left[X(p)+F_1(p)\right]\frac{0{,}75}{0{,}25p+1}+F_2(p)\frac{0{,}25}{0{,}25p+1}+F_3(p)\frac{0{,}25}{0{,}25p+1}.$$

2. Определим $E(p)$:

$$E(p)\overset{\Delta}{=}Y(p)-X(p)=-\frac{0{,}25(p+1)}{0{,}25p+1}X(p)+F_1(p)\frac{0{,}75}{0{,}25p+1}+$$

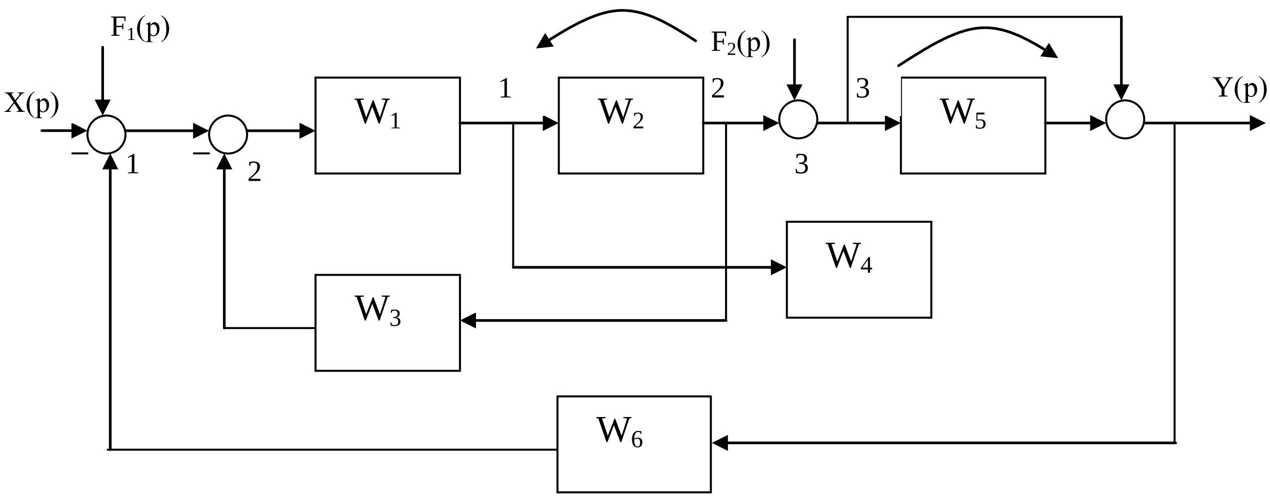
$$F_2(p)\frac{0{,}25}{0{,}25p+1}+F_3(p)\frac{0{,}25}{0{,}25p+1}.$$

Мы убедились, что составляющие выходного сигнала АС, обусловленные действием на нее помех, полностью входят в ошибку системы.

Мы также убедились, что независимо от места ввода в АС полезного сигнала и помех характеристический полином А(р) один и тот же для всех ПФ АС, т.е. он характеризует саму систему.

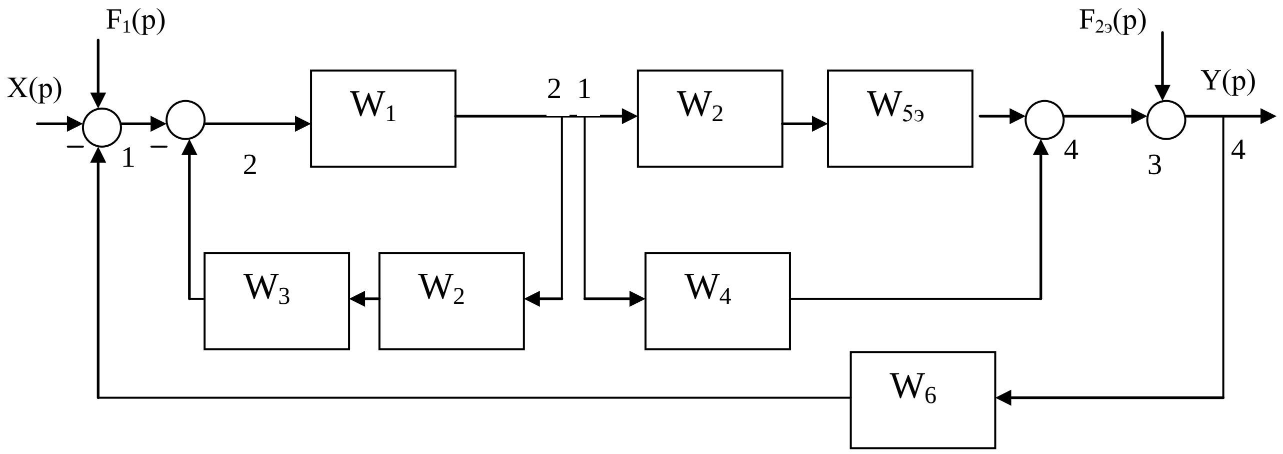
Задача №3.

Для автоматической системы с заданной структурой требуется определить все передаточные функции.

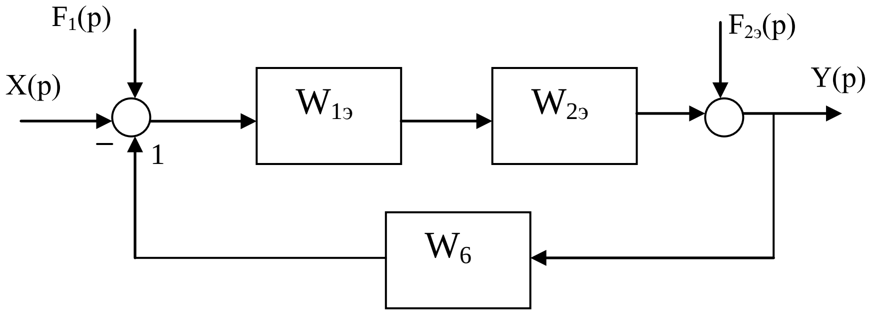


Решение:

1. Преобразуем исходную многоконтурную систему в одноконтурную, для чего перенесем узел 2 через звено $W_2(p)$ и узел 1, а сумматор 3 за сумматором 4, по ходу сигнала.



где $W_{5э} = W_5 + 1;\quad F_{2э}(p) = F_2(p)\, W_{5э};$



где $W_{1э} = \dfrac{W_1}{1+W_1W_2W_3};\qquad W_{2э} = W_2W_{5э} + W_4;$

$W(p) = W_{1э}W_{2э};\quad W(p)' = W_{1э}W_{2э}W_6;$

2. Определим основные ПФ АС:

а) ПФ замкнутой АС

$$\Phi(p) = \frac{W(p)}{1+W(p)'} = \frac{W_{1э}W_{2э}}{1+W_{1э}W_{2э}W_6};$$

б) ПФ от помехи $F_1(p)$ к выходу

$$\Phi_{F1Y}(p) = \Phi(p);$$

в) ПФ от помехи $F_2(p)$ к выходу

$$\Phi_{F2Y}(p) = \frac{W_{5э}}{1+W(p)};$$

г) ПФ для ошибки от полезного входного сигнала (рассогласования)

$$S(p) = \Phi(p) - \frac{1}{W_6};\quad \Phi_{X\varepsilon}(p) = -S(p);$$

д) ПФ для ошибки от помех $F_1(p)$ и $F_2(p)$

$$\Phi_{F1E}(p) = \Phi_{F1Y}(p);\quad \Phi_{F2E}(p) = \Phi_{F2Y}(p)$$

2.4. Временные характеристики ЛСС. Определение временных характеристик непрерывных АС.

К весовым характеристикам относятся весовая и переходная функции.

Переходной функцией системы называется её реакция на единичное ступенчатое воздействие.

Весовой функцией системы называется реакция её на дельта-функцию.

Изображения по Лапласу для переходной и весовой функций имеет вид:

$$H(p) = W(p) \cdot \frac{1}{p} = \frac{B(p)}{A(p) \cdot p}; \quad G(p) = W(p) \cdot 1 = \frac{B(p)}{A(p)}; \tag{1}$$

Т.о., если известна передаточная функция АС *W(p)*, то всегда можно определить изображение переходной и весовой функций *H(p)* и *G(p)*.

Оригиналы *h(t)* и *g(t)* определяются по таблицам обратного преобразования Лапласа или с использованием теоремы разложения, которая формируется так:

Если известно изображение некоторой функции $F(p) = \frac{S(p)}{Q(p)}$, где степень полинома *S(p)* меньше или равна степени полинома *Q(p)*, то оригинал *f(t)* может быть определен по следующим формулам:

$$\begin{cases} F(t) = L^{-1}\left[F(p)\right] = \sum\limits_{i=1}^{n} C_i e^{Pit} + C_0 \cdot \delta(t), \quad t \geq 0. \\ C_i = \dfrac{S(p)}{\dfrac{\partial Q(p)}{\partial p}} \end{cases} \tag{2}$$

$$C_0 = \begin{cases} \dfrac{b_m}{a_n} = F(\infty), (m = n); \\ 0, (m < n); \end{cases}$$

где p_i – корни знаменателя *F(p)* (полюса).

Эта формула справедлива в том случае, когда корни p_i – простые, т.е. все различные.

Между переходной и весовой функциями существует однозначная связь:

$$h(t) = \int\limits_0^t g(\tau) d\tau, \qquad g(t) = \frac{dh(t)}{dt}.$$

Во многих случаях необходимо определить только начальные и конечные значения функции-оригинала. Для этой цели не обязательно определять сам оригинал, а достаточно воспользоваться двумя предельными теоремами

$$\begin{cases} f(0) = \lim\limits_{t \to 0} f(t) = \lim\limits_{p \to \infty} p \cdot F(p) \\ f(\infty) = \lim\limits_{t \to \infty} f(t) = \lim\limits_{p \to 0} p \cdot F(p) \end{cases} \tag{3}$$

1.По известной передаточной функции *Ф(р)* используя формулы (1) определяются изображения временных характеристик *Н(р)* и *G(p)*.

2.Если по условию задачи необходимо определить только начальные и конечные значения временных характеристик системы, то используя теоремы (3) определяем их значения.

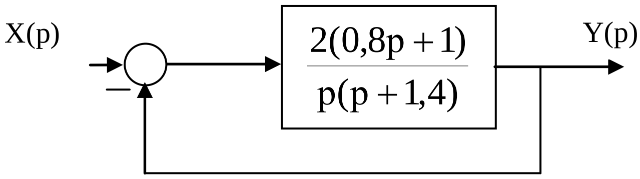
3.Если необходимо найти сами временные характеристики, то используем таблицы обратных преобразований Лапласа или теорему разложения:

3.1. Определяем корни знаменателя изображений *Н(р)* и *G(p)*.

3.2. Определяем по формулам (2) коэффициенты C_0, C_i для каждой из функций и сами оригиналы *h(t)* и *g(t)*.

Задача №1.

Структурная схема АС имеет вид:



Необходимо определить *h(o); h(∞); g(o); g(∞)*.

Решение:

1. Определяем передаточную функцию замкнутой системы и изображения временных характеристик *Н(р)* и *G(p)*.

$$Ф(p)=\frac{\dfrac{2(0,8p+1)}{p(p+1,4)}}{1+\dfrac{2(0,8p+1)}{p(p+1,4)}}=\frac{1,6p+2}{p^2+3p+2};$$

$$H(p)=\frac{Ф(p)}{p}=\frac{1,6p+2}{p(p^2+3p+2)};\quad G(p)=Ф(p)=\frac{1,6p+2}{p^2+3p+2}.$$

2. Применяем первую и вторую предельные теоремы.

$$h(0)=\lim_{p\to 0}pH(p)=\lim_{p\to\infty}\frac{1,6p+2}{p^2+3p+2}=0;$$

$$h(\infty)=\lim_{p\to 0}p\cdot H(p)=\lim_{p\to 0}\frac{1,6p+2}{p^2+3p+2}=1;$$

$$g(\infty)=\lim_{p\to\infty}pG(p)=\lim_{p\to\infty}\frac{p(1,6p+2)}{p^2+3p+2}=\left|\begin{array}{l}\text{По правилу Лапиталя}\\ \text{берем отношение про}-\\ \text{изводных}\end{array}\right|=$$

$$=\lim_{p\to\infty}\frac{3,2p+2}{2p+3}=\frac{3,2}{2}=1,6;$$

$$g(\infty)=\lim_{p\to 0} p\cdot G(p)=\lim_{p\to 0}\frac{p(1{,}6p+2)}{p^2+3p+2}=\frac{0}{2}=0.$$

Задача № 2.

Для системы из задачи №1 определить аналитические выражения *h(t)* и *g(t),* набрать графики этих функций.

Решение:

1. Изображения *H(p)* и *G(p)* имеют вид:

$$H(p)=\frac{1{,}6p+2}{p(p^2+3p+2)};\qquad G(p)=\frac{1{,}6p+2}{p^2+3p+2}.$$

2. Определяем корни знаменателя *H(p)* и *G(p)*

$$H(p):\ p(p^2+3p+2)=0\Rightarrow\begin{cases}\tilde{p}_1=0\\ \tilde{p}_2=-2\\ \tilde{p}_3=-1\end{cases}\quad p_{1,2}=\frac{-в\pm\sqrt{в^2-4ac}}{2a};\ \text{при } a=1$$

$$G(p):\ p^2+3p+2=0\Rightarrow\ \begin{cases}p_1=-2\\ p_2=-1\end{cases}\qquad -\frac{в}{2}\pm\frac{\sqrt{в^2-4c}}{2};$$

$$p_1+p_2=-\frac{в}{a};\quad p_1p_2=\frac{c}{a}.$$

3. Определяем коэффициент C_0, C_i разложения функций *h(t)* и *g(t)*

$$\Phi(p)=\frac{B(p)}{A(p)};$$

$$\begin{cases}g(t)=C_0\delta(t)+\sum_{i=1}^{n}C_i\cdot e^{Pit},\quad t\ge 0;\\ C_0=\dfrac{b_m}{a_n}=\Phi(\infty),m=n\\ C_0=0,\qquad\qquad m<n\end{cases}\qquad\qquad C_i=-\frac{B(p_i)}{A'(p_i)}$$

$$\begin{cases}h(t)=\tilde{C}_0+\sum_{i=1}^{n}\tilde{C}_ie^{Pit},\quad t>0;\\ \tilde{C}_0=\dfrac{b_0}{a_0}=\Phi(0),\\ \tilde{C}_i=\dfrac{B(p_i)}{p_iA'(p_i)}=\dfrac{C_i}{p_i}.\end{cases}\qquad .$$

Производная знаменателей:

$$H(p):\ \left[p(p^2+3p+2)\right]=3p^2+6p+2$$

$$G(p):\ (p^2+3p+2)' = 2p+3.$$

Определяем C_0, $\tilde{C}_0$, C_i и $\tilde{C}_i$: т.к. $m < n$, то $\tilde{C}_0$ и $C_0 = 0$.

$$h(t):\quad \tilde{C}_1 = \frac{1{,}6+2}{3p^2+6p+2}\bigg|_{\tilde{p}_1=0} = \frac{2}{2} = 1;$$

$$\tilde{C}_2 = \frac{1{,}6+2}{3p^2+6p+2}\bigg|_{\tilde{p}2=-2} = -\frac{1{,}2}{2} = -0{,}6;$$

$$\tilde{C}_3 = \frac{1{,}6+2}{3p^2+6p+2}\bigg|_{\tilde{p}3=-1} = -\frac{0{,}4}{-1} = -0{,}4;$$

$$g(t):\quad C_1 = \frac{1{,}6+2}{2p+3}\bigg|_{\tilde{p}_1=-2} = \frac{-1{,}2}{-1} = 1{,}2;$$

$$C_2 = \frac{1{,}6+2}{2p+3}\bigg|_{\tilde{p}_1=-1} = \frac{0{,}4}{1} = 0{,}4\,.$$

Определяем оригиналы функций $h(t)$ и $g(t)$:

$h(t) = 1\cdot e^{0\cdot t} + (-0{,}6)e^{-2t} + (-0{,}4)e^{-t} = 1 - 0{,}6e^{-2t} - 0{,}4e^{-t};$

$g(t) = 1{,}2e^{-2t} + 0{,}4e^{-t};$

Проверка:

$g(t) = h^{(1)}(t);$

$g(t) = (1 - 0{,}6e^{-2t} - 0{,}4e^{-t})' = 1{,}2e^{-2t} + 0{,}4e^{-t}.$

Проверить $h(0)$ и $g(0)$; $h(\infty)$ и $g(\infty)$.

Добавить:

$$\Phi(p) = \frac{1{,}6p+2}{p^2+3p+2}2e^{-0{,}5p};$$

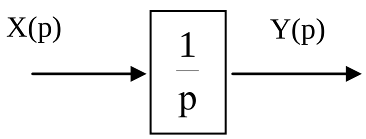
$$\Phi(p) = \Phi_0(p)e^{-0{,}5p};$$

$$\Phi_0(p) = \frac{2(1{,}6p+2)}{p^2+3p+2}.$$

Находим $g_0(t)$, а затем сдвигаем её на величину $\tau = 0{,}5c$: $g(t) = g_0(t-\tau)$.

Находим $h_0(t) \Rightarrow \tau \Rightarrow 0{,}5 \Rightarrow h(t) = h_0(t-\tau)$.

Задача №3



На вход системы действует входной сигнал $x(t) = 2\delta(t-1) - 3\delta(t-2) + 4\delta(t-4)$.

Изобразить график выходного сигнала.

Решение:

Если на вход системы действует δ–импульс, то, по определению, выход системы есть весовая функция $g(t)$. Если на вход ЛС АС действует комбинация δ–импульсов, сдвинутых по времени, то в силу линейности системы её выход будет также линейная комбинация весовых функций с соответствующим сдвигом.

Т.о., выходной сигнал системы

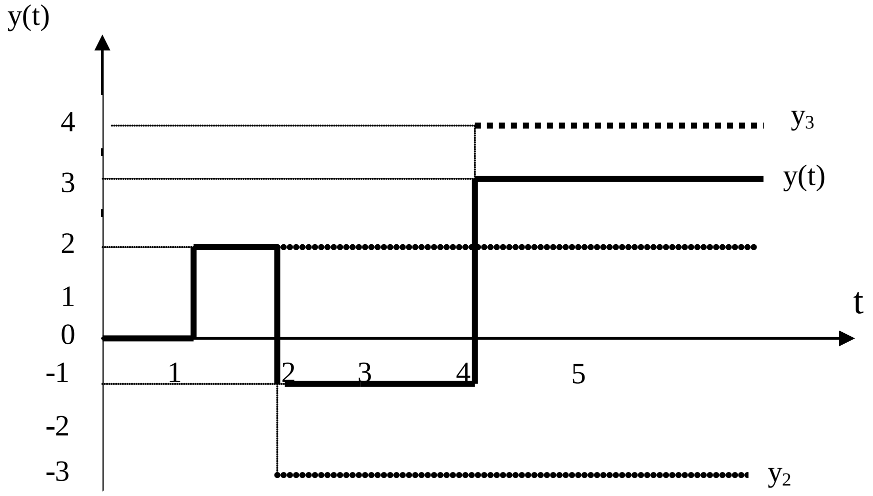
$$y(t) = 2g(t-1) - 3g(t-2) + 4g(t-4).$$

Весовая функция системы (интегрирующего звена):

$$g(t) = L^{-1}[G(p)] = L^{-1}[W(p)] = L^{-1}\left[\frac{1}{p}\right] = 1(t),$$

т.е. $y(t) = 2\cdot 1(t-1) - 3\cdot 1(t-2) + 4\cdot 1(t-4) = y_1 + y_2 + y_3$

График такого сигнала имеет вид:

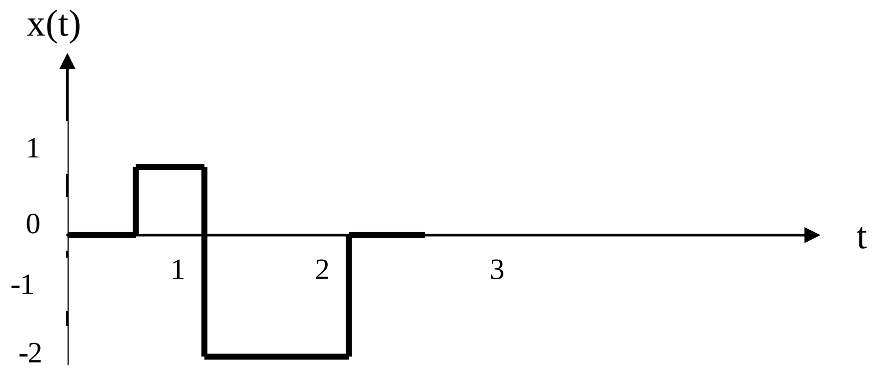


Задача №4.

Переходная функция системы имеет вид:

$$h(t) = 1 - e^{-t}$$

Определить реакцию системы в момент времени $t = 3c$ на сигнал $x(t)$ вида:



Решение:

Запишем аналитическое выражение для входного сигнала:

$$x(t) = 1(t-0{,}5) - 3\cdot 1(t-1) + 2\cdot 1(t-2).$$

Если вход системы есть единичная ступенчатая функция, то , по определению, выход – переходная функция. Поэтому

$y(t) = h(t-0{,}5) - 3h(t-1) + 2h(t-2) = 1 - e^{-(t-0,5)} - 3 + 3\cdot e^{-(t-1)} + 2 - 2\cdot e^{-(t-2)} =$
$= 3\cdot e^{-(t-1)} - 2\cdot e^{-(t-2)} - e^{-(t-0,5)}.$

Тогда

$y(3) = 3\cdot e^{-2} - 2e^{-1} - e^{-2,5}.$

Задача №5

Передаточная функция системы имеет вид: $\Phi(p) = \dfrac{2(p+1)^2}{(p+3)^3}$.

Определить начальные значения g(0) *и* h(0).

Решение:

Определяем изображения *G(p)* и *H(p):*

$$G(p) = \Phi(p) = \frac{2(p+1)^2}{(p+3)^3}; \qquad H(p) = \frac{1}{p}\Phi(p) = \frac{2(p+1)^2}{(p+3)^3}$$

Применяем предельную теорему:

$$g(0) = \lim_{p\to\infty} pG(p) = \lim_{p\to\infty} \frac{2p(p+1)^2 / p^3}{(p+3)^3 / p^3} =$$

$$= \lim_{p\to\infty} \frac{2\dfrac{p}{p}\cdot\dfrac{p+1}{p}\cdot\dfrac{p+1}{p}}{\dfrac{p+3}{p}\cdot\dfrac{p+3}{p}\cdot\dfrac{p+3}{p}} = \lim_{p\to\infty} \frac{2(1+\dfrac{1}{p})^2}{(1+\dfrac{3}{p})^3} = 2;$$

$$h(\infty) = \lim_{p\to\infty} p\cdot H(p) = \lim_{p\to\infty} \frac{p\cdot 2(p+1)^2}{p(p+3)^3} = \lim_{p\to\infty} \frac{\dfrac{2}{p}(1+\dfrac{1}{p})^2}{(1+\dfrac{3}{p})^3} = 0\,.$$

2.5. Частотные характеристики. Определение реакции АС на гармонический входной сигнал.

Формы представления гармонического сигнала?

Гармоническая функция: $x(t) = A_x Sin(\omega t + \psi_x)$; $x(t) = A_x Cos(\omega t + \psi_x)$.

В комплексная функция

$x(t) = A_x e^{j(\omega t + \psi_x)} = \dot{A}_x e^{j\omega t}$, где

$\dot{A}_x = A_x e^{j\psi_x}$ - комплексная амплитуда;

ψ_x – фаза гармонического сигнала.

1. Определения частотных характеристик?

Частотные характеристики – это функции частоты гармонического входного сигнала, определяющие реакцию АС на этот сигнал.

$$\Phi(j\omega) = \frac{\dot{A}ye^{j\omega t}}{\dot{A}xe^{j\omega t}} = \frac{Aye^{j\psi_y}}{Axe^{j\psi_x}} = \frac{Ay}{Ax}e^{j(\psi_y - \psi_x)} = \Phi a(\omega)e^{j\varphi(\omega)}.$$

АФЧХ – отношение вынужденной составляющей выходного сигнала к соответствующему гармоническому входному сигналу, представленному в комплексной форме.

$$Фa(\omega)=\frac{Ay}{Ax}; \quad Фa(\omega)=\left|Ф(j\omega)=\frac{|B(j\omega|}{|A(j\omega)|}\right|;$$

$Фa(\omega)=\sqrt{R^2(\omega)+I^2(\omega)}$ - математические выражения, определяющие АЧХ.

АЧХ – это отношение амплитуды вынужденной составляющей выходного сигнала к амплитуде входного гармонического сигнала.

$$\varphi(\omega)=\psi_y-\psi_x; \quad \varphi(\omega)=arg\,Ф(j\omega); \quad \varphi(\omega)=arctg\frac{I(\omega)}{R(\omega)}.$$

Математические выражения, определяющие ФЧХ.

ФЧХ – есть разность фаз выходного и входного гармонических сигналов.

АФЧХ можно представить в комплексной форме.

$$Ф(j\omega) = R(\omega) + jI(\omega),$$

где $R(\omega)$ – вещественная частотная характеристика;

$I(\omega)$ – мнимая частотная характеристика.

2. Физический смысл АЧХ и ФЧХ?

Если входной сигнал АС гармонический, то и выходной сигнал – гармонический.

$$x(t)=A_x Sin(\omega t+\psi_x)=A_x e^{j(\psi_x+\omega t)},$$
$$y(t)=A_y Sin(\omega t+\psi_y)=A_y e^{j(\psi_y+\omega t)}$$

Зная АЧХ и ФЧХ на частоте входного сигнала $\omega = \omega_x$ легко определить параметры выходного сигнала:

$Ay = Ax\, Фa(\omega)\,|_{\omega x}; \quad \Psi y = \Psi x + \varphi(\omega)|_{\omega x}$

Ошибка в этом случае имеет также гармонический вид:

$e_x(t)=A_e Sin(\omega t+\psi_e)$

$Ae = Ax\, Sa(\omega)|_{\omega x}; \quad \Psi e = \Psi x + \varphi_e(\omega)|_{\omega x},$

где $Sa(\omega) = |S(j\omega)|$ - АЧХ системы по ошибке,

$\varphi_e(\omega)=arg\,S(j\omega)$ - ФЧХ системы по ошибке.

3. Правила действий над векторами?

При нахождении АЧХ и ФЧХ чаще всего пользуются следующими правилами действия над векторами:

а) $C(j\omega) = N(j\omega)\cdot K(j\omega).$

$$|C(j\omega)|=|N(j\omega)\cdot K(j\omega)|=|N(j\omega)||K(j\omega)|;$$

$$arg\,C(j\omega)=arg[N(j\omega)\cdot K(j\omega)]=arg[N(j\omega)]+arg[K(j\omega)]=$$
$$=arctg\frac{I_N(\omega)}{R_N(\omega)}+arctg\frac{I_K(\omega)}{R_K(\omega)}.$$

Примечание: При нахождении arctg необходимо контролировать знаки вещественной и мнимой частей.

б) $C(j\omega) = \dfrac{A(j\omega)}{B(j\omega)}$,

$$|C(j\omega)| = \left|\frac{A(j\omega)}{B(j\omega)}\right| = \frac{|A(j\omega)|}{|B(j\omega)|} = \frac{\sqrt{R_A^2 + I_A^2}}{\sqrt{R_B^2 + I_B^2}};$$

$$arg\,C(j\omega) = arg\,\frac{A(j\omega)}{B(j\omega)} = arg\,A(j\omega) - arg\,B(j\omega).$$

в) $C(j\omega) = [A(j\omega)]^K$,

$$|C(j\omega)| = |A(j\omega)|^K; \quad arg\,C(j\omega) = arg[A(j\omega)]^K = K\,arg\;A(j\omega).$$

II. Решение задач.

Задача №1.

Для системы с передаточной функцией

$$\Phi(p) = \frac{K}{(Tp+1)p}.$$

Определить: $\Phi a(\omega)$; $\varphi(\omega)$; $R(\omega)$; $I(\omega)$ и построить годограф.

Решение:

1.По известной передаточной функции определим АФЧХ, подставив в выражение для $\Phi(p)$ $p = j\omega$:

$$\Phi(j\omega) = \frac{K}{j\omega(Tj\omega+1)}.$$

2. Определим $R(\omega)$ и $I(\omega)$, для чего домножим числитель и знаменатель $\Phi(j\omega)$ на число, комплексно-сопряженное знаменателю:

$$\Phi(j\omega) = \frac{K(-T\omega^2 - j\omega)}{(-T\omega^2 + j\omega)(-T\omega^2 - j\omega)} = \Phi(j\omega) = \frac{-KT\omega^2}{T^2\omega^4 + \omega^2} - j\frac{K\omega}{T^2\omega^4 + \omega^2};$$

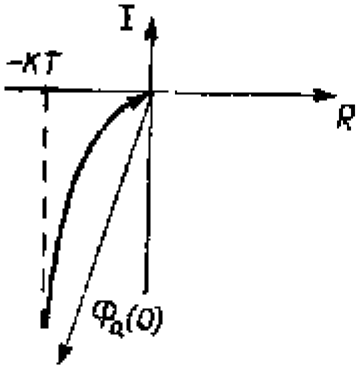
$$R(\omega) = -\frac{KT}{T^2\omega^2 + 1}; \qquad I(\omega) = -\frac{K}{\omega(T^2\omega^2 + 1)}.$$

3. Определим $\Phi a(\omega)$ и $\varphi(\omega)$:

$$\Phi a(\omega) = \frac{|K|}{|j\omega(Tj\omega + 1|} = \frac{K}{\omega\sqrt{T^2\omega^2 + 1}}.$$

$$\varphi(\omega) = argK - arg\,j\omega - arg(Tj\omega + 1) = -\frac{\pi}{2} - arctg\,T\omega.$$

4. Строим АФЧХ:



$\omega = 0 \rightarrow R(0) = -KT; \quad I(0) = -\infty.$
$\omega = \infty \rightarrow R(\infty) = 0; \quad I(\infty) = 0.$

Задача №2.

Для автоматической системы с передаточной функцией

$$\Phi(p) = \frac{p^2}{(p+1)^2}$$

определить параметры выходного сигнала Ay, Ψy и построить с помощью ЛАХ -годограф, если входной сигнал имеет вид:

$$x(t) = 4\,Sin(t + 0{,}4).$$

Решение:

1. Определим A_y и Ψ_y:

$$A_y = A_x\, \Phi_a(\omega_x); \quad A_y = 4; \quad \omega_x = 1, \; c^{-1},$$

$$\Phi a(\omega_x = \left|\frac{(j\omega_x}{(j\omega_x+1)^2}\right| = \frac{\omega_x^2}{\omega_x^2+1} = \frac{1}{1+1} = 0{,}5.$$

$$A_y = 4 \cdot 0{,}5 = 2,$$

$$\psi_y = \psi_x + \varphi(\omega_x); \quad \psi_x = 0{,}4, \; рад,$$

$$\varphi(\omega_x) = arg\, \Phi(j\omega_x) = arg \frac{(j\omega_x)^2}{(j\omega_x+1)^2} = 2\, arg(j\omega_x) - 2\, arg(j\omega_x + 1) =$$

$$= 2\frac{\pi}{2} - 2 arc\,tg\,\omega_x = \pi - 2 arc\,tg\,1 = \pi - 2\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2};$$

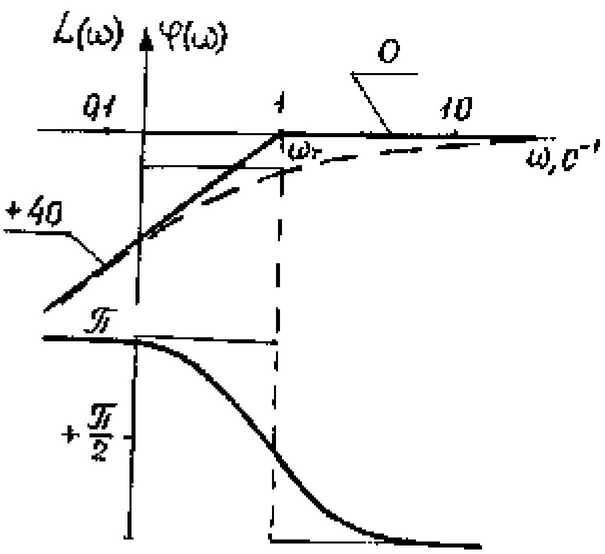
$$\psi_y = 0{,}4 + \frac{\pi}{2};$$

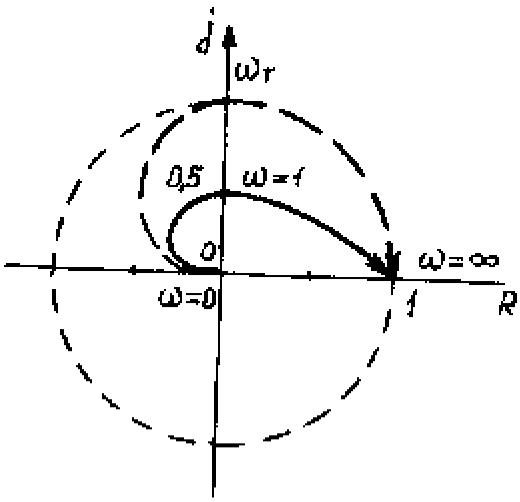
Итак, $y(t) = 2sin(t + 0{,}4 + \frac{\pi}{2}) = -2\,cos(t + 0{,}4).$

2. Используя ЛАХ для данной системы, методику построения которых мы рассмотрим на следующем занятии, построим АФЧХ:

ЛАХ для данной передаточной функции имеет вид:

$$L(\omega) = 20lg\, \Phi_a(\omega);$$





Если построить АФЧХ приближенно, то при

$\omega = 0 \rightarrow L(0) = -\infty;\ \ \Phi_a(0) = 0;\ \ \varphi(0) = +\ \pi.$

$\omega_T \quad \rightarrow L(\omega_T) = 0;\ \ \Phi_a(\omega_T) = 1;\ \ \varphi(\omega_T) = +\ \pi/2.$

И далее при $\omega = (\omega_T;\ \ \infty) \rightarrow L(\omega) = 0;\ W_a(\omega) = 1$, а $\varphi(\omega)$ от $\pi/2$ до 0 меняется равномерно, т.е. вектор $\Phi(j\omega)$ движется по окружности и в точке $\omega = \infty$, следовательно, $\varphi(\infty) = \pi/2$.

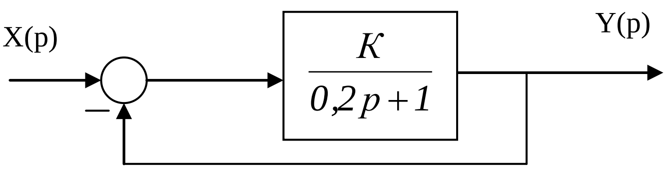
Проверим поведение годографа в точке $\omega = 1$:

$$\omega = 1 \rightarrow L(1) = 20\ lg\frac{1}{1+1} = 20\ lg0{,}5 < 1;\ \ \Phi_a(1) = 0{,}5;\ \ \varphi(1) = \frac{\pi}{2}.$$

Следовательно, годограф данной системы будет иметь вид, показанный на рисунке.

Задача №3

Структурная схема АС имеет вид:



Определить значение коэффициента усиления K, необходимого для обеспечения сдвига фаз между входным и выходным сигналами $\varphi = -45^0$, если частота входного гармонического сигнала $f = 1{,}6\ Гц$.

Решение:

Сдвиг фаз между входным и выходным сигналами есть ФЧХ системы:

$$\varphi(\omega_x) = arg\ \Phi(j\omega_x),$$

где $\Phi(j\omega_x)$ – АФЧХ системы.

Но $\varphi(\omega_x) = -45^0$, тогда $-45^0 = arg\ \Phi(j(\omega_x)$.

Следовательно, необходимо определить передаточную функцию замкнутой АС, её АФЧХ, в выражение для которой будет входить неизвестное K, а затем определим численное значение требуемого коэффициента усиления разомкнутой системы.

1. Определим передаточную функцию и выражение для АФЧХ замкнутой АС:

$$Ф(p)=\frac{W(p)}{1+W(p)}$$, или для единичной обратной связи:

$$Ф(p)=\frac{B(p)}{A(p)+B(p)}=\frac{K}{0{,}2p+K+1};$$

Тогда $Ф(j\omega)==\frac{K}{0{,}2j\omega+K+1};$

2. Из выражения для ФЧХ на частоте входного сигнала $\omega_x = 2\pi f$ определим требуемый коэффициент усиления:

$\omega_x = 2\pi 1{,}6 \approx 10{,}c^{-1};$

$arg\ Ф(j(\omega_x) = -45^0;$ $-arctg\frac{0{,}2\omega_x}{K+1}=45^0;$

$arctg\frac{2}{K+1}=45^0;$ $tg45^0=\frac{2}{K+1};$ $K = 1.$

Задача №4.

Изобразить общий вид годографа для АС с передаточной функцией:

$Ф(p)=\frac{K}{Tp+1}e^{-\tau p}$ - простейшая модель человека – оператора (летчика).

Решение:

Обозначим $W_1(p)=\frac{K}{Tp+1};\ W_2(p) = e^{-\tau p}$

Тогда $Ф(p) = W_1(p)\,W_2(p);$

$$Ф(j\omega) = W_1(j\omega)\,W_2(j\omega);$$

$$Ф_a(\omega) = \left|Ф(j\omega)\right| = \left|W_1(j\omega)\right|\left|W_2(j\omega)\right| = W_{1a}(\omega)W_{2a}(\omega);$$

$$\varphi(\omega) = arg\ Ф(j\omega) = arg[W_1(j\omega)\,W_2(j\omega)]=argW_1(j\omega)+argW_2(j\omega).$$

Определим все составляющие выражений для $Ф_a(\omega)$ и $\varphi(\omega)$.

$$W_1(j\omega) = \frac{K}{Tj\omega+1};\ \left|W_1(j\omega)=\frac{|K|}{|Tj\omega|}\right| = \frac{K}{\sqrt{T^2\omega^2+1}};$$

$$argW_1(j\omega) = argK - arg(Tj\omega + 1) = -arctgT\omega;$$

$$R_1(\omega) = \frac{K}{1+T^2\omega^2};\quad I_1(\omega) = -\frac{K\omega T}{1+T^2\omega^2};$$

$$W_1(j\omega) = e^{-j\tau\omega};\ \left|W_2(j\omega)\right| = \left|e^{-j\tau\omega}\right| = \left|Cos\,\tau\omega - jSin\,\tau\omega\right| = 1;$$

$$ArgW_2(j\omega) = -\ arctg\frac{Sin\,\tau\omega}{Cos\,\tau\omega} = -arctg\,tg\,\tau\omega = -\tau\omega;$$

Тогда $\Phi_a(\omega) = W_{1a}(\omega) = \dfrac{K}{\sqrt{T^2\omega^2+1}}$;

$\varphi(\omega) = -arctgT\omega - \tau\omega;$

Итак, можно сформулировать следующее правило построения годографов для АС, содержащих в своем составе звено постоянного запаздывания $e^{-\tau p}$.

Правило:

Для того, чтобы построить годограф передаточной функции, содержащей звено $e^{-\tau p}$, необходимо:

а) построить годограф части функции без этой составляющей;

б) каждую строчку построенного годографа сдвинуть по фазе на величину - $\tau\omega$ (по часовой стрелке).

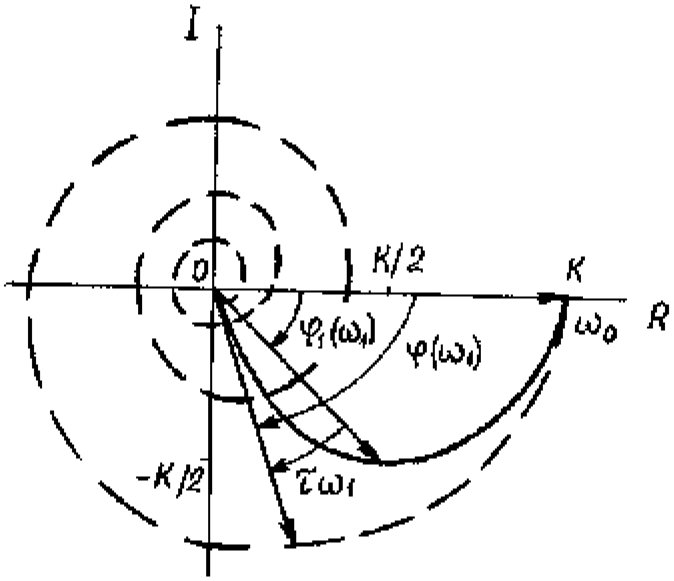
Поступим согласно этого правила:

$\omega_0 = 0; \rightarrow R(0) = K;\ \ I(0) = 0;\ \ \varphi_1(0) = 0.$

$\omega_1 = \dfrac{1}{T} \rightarrow R(\omega_1) = K/2;\ \ I(\omega_1) = -K/2;\ \ \varphi_1(\omega_1) = -45^0.$

$\omega \rightarrow \infty \rightarrow R(\infty) = 0;\ \ I(\infty) = 0;\ \ \varphi_1(\infty) = -90^0.$

Пример: В отклонение указателя положения в командно-пилотажном приборе и соответствующие движения рукоятки управления летчиком вперед и назад. Чем больше ω, тем больше запаздывание реакции летчика. И при больших частотах $\omega \rightarrow \infty$ отставание по фазе.



2.6. Частотные характеристики ЛСС. Частотные характеристики соединений звеньев.

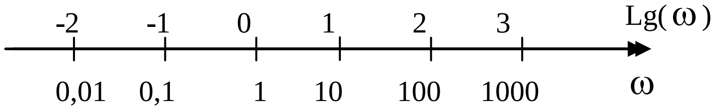
Частотные характеристики, построенные в логарифмическом масштабе, называются ЛЧХ.

Различают:

ЛАЧХ (ЛАХ) – $L(\omega)=20\ lg\ Фa\ (\omega)$ построенные в логарифмическом

ЛФЧХ - $\varphi(\omega)=arg\ Ф(j\omega)$ масштабе частот.

За единицу масштаба по оси частот принимают декаду, т.е. интервал на котором частота увеличивается в 10 раз, если десятичный логарифм от частоты увеличивается на 1.

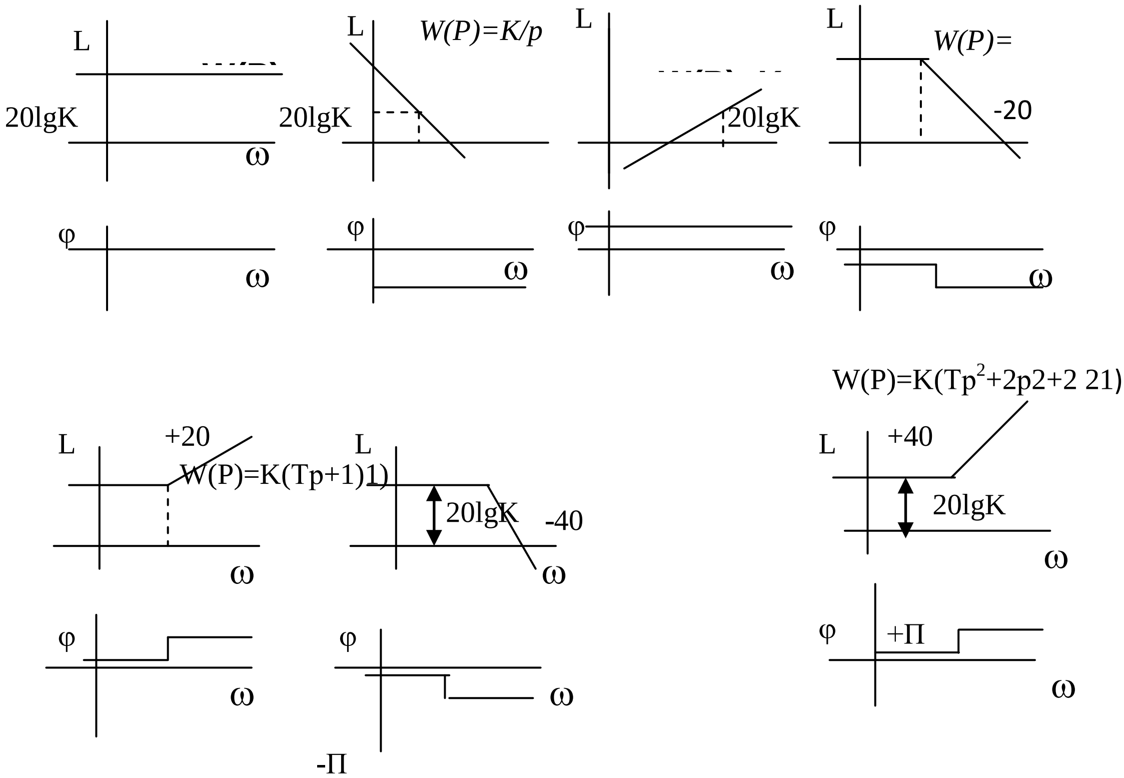


ЛЧХ вводятся потому, что:

– во-первых позволяют существенно упростить получение и построение частотных характеристик сложных систем, состоящих из большого числа звеньев;

– во-вторых, позволяют на одном графике построить и анализировать частотные характеристики системы практически во всем диапазоне частот.

ЛЧХ элементарных звеньев имеют вид:



Т.к. передаточная функция любой АС есть удобно-рациональная функция переменной р.с. вещественными коэффициентами, то, используя теорему Безу о разложении многочлена на элементарные множители, можно ее представить в виде:

$$\Phi(P)=\frac{B(P)}{A(P)}=\frac{K\cdot P^d\prod\limits_{i=1}^{m}(T_i p+1)\prod\limits_{Z=1}^{j}(T_Z{}^2 p^2+2T_Z\xi_Z p+1)}{P^i\prod\limits_{l=1}^{k}(T_l p+1)\prod\limits_{c=1}^{f}(T^2{}_c p^2+2T_c\xi_c p+1)}=W_1\cdot W_2\cdots W_f\,, \quad (1)$$

где j – число элементарных звеньев.

Используя свойства логарифмов можно записать:

$$L(\omega)=20\lg\Phi a(\omega)=20\lg[Wa_1\cdot Wa_2\cdots Wa_j]=L_1(\omega)+L_2(\omega)+\cdots+L_j(\omega),$$
$$\varphi(\omega)=\varphi_1(\omega)+\varphi_2(\omega)+\cdots+\varphi_j(\omega).$$

Следовательно, для построения ЛЧХ сложных систем необходимо выделить все элементарные звенья, входящие в ПФ системы, построить и графически сложить их частотные характеристики.

II. Порядок решения задач.

1. Передаточная функция системы приводится к стандартному виду [1].
2. Определяются частоты сопряжения элементарных звеньев и располагаются в порядке их возрастания.

$$\omega_1=\frac{1}{T_1};\ \omega_2=\frac{1}{T_2};$$

3. Строятся суммарные ЛАЧХ и ЛФЧХ.

Для построения ЛАХ через точку с координатами $\omega=1$, $L(\omega)=20lgK$ проводят прямую с наклоном $20(d-i)$ дб/дк до первой частоты сопряжения. В соответствии с тем к какому звену относится эта частота, осуществляется изменение наклона прямой на ± 20 или ± 40 дб/дк Если звеньев с такой частотой К штук, то наклон изменяется на $\pm 20\cdot K$ или $\pm 40\cdot K$ дб/дк. Далее эта новая прямая продолжается до следующей частоты сопряжения, где вновь изменяется ее наклон. Эта операция продолжается до тех пор, пока не будут пройдены все имеющиеся частоты сопряжения.

Для построения ЛФЧХ проводят горизонтальную прямую с

$$\varphi(\omega)=(d-i)\cdot\pi/2$$

до первой частоты сопряжения, где ФЧХ скачком изменяется на на величину $\pm\pi/2\cdot K$ или $\pm\pi\cdot K$ соответственно для звеньев первого и второго порядков. Знак "+" соответствует форсирующим звеньям, а "–" инерционным.

Если в $\Phi(p)$ присутствует звено $e^{\tau p}$, то ЛАХ не меняется, а $\varphi(\omega)$ с $\uparrow\omega$ растет до $-\infty$.

Проверка: $m-n$ $\nearrow$ $h(\omega)\to(m-n)20$; $\searrow$ $\varphi(\omega)\to(m-n)\ \pi/2$

V. Решение задач.

Задача №1. Для АС с передаточной функцией

$$\Phi(p) = \frac{10p+1}{p^2(p+10)}$$

построить ЛЧХ и общий вид АФЧХ.

Решение:

1. Приводим $\Phi(p)$ к стандартному виду [1]

$$\Phi(p) = \frac{0{,}1(10p+1)}{p^2(0{,}1+1)}$$

2 .Определяем частоты сопряжения и располагаем их в порядке возрастания

$$\omega_1 = \frac{1}{10} = 0{,}1c^{-1}; \ \omega_2 = \frac{1}{0{,}1} = 10c^{-1}.$$

3. Строим суммарную ЛАЧХ и ЛФЧХ.

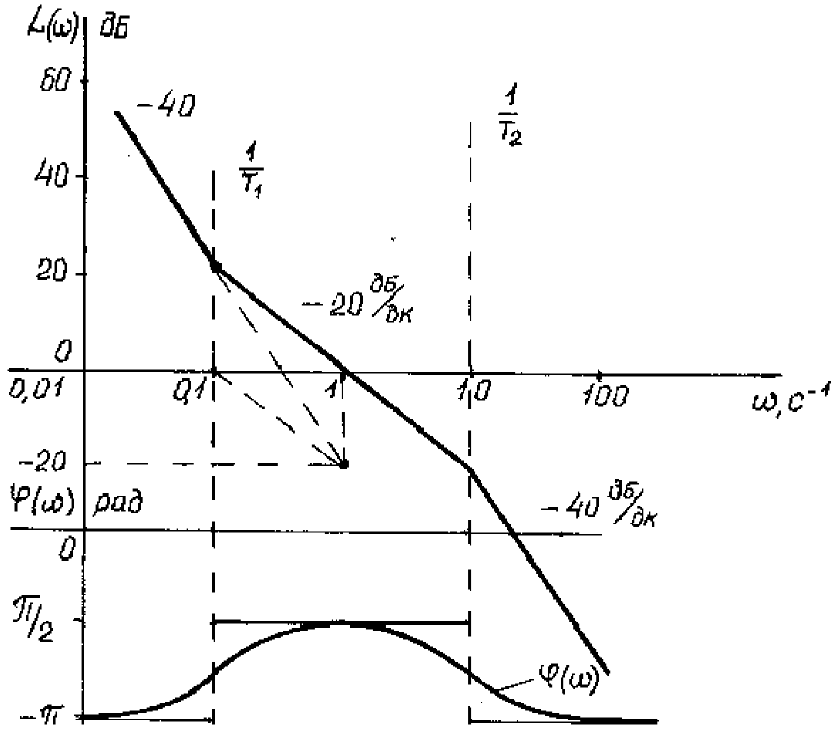
Определяем наклон низкочастотной асимптоты ЛАЧХ и точку с координатами $\omega=1$ и $20\ lgK$

$$20(n-\alpha)=20(0-2)=-40дб/дк,$$

$$L(\omega)|_{\omega=1}=20\ lg\ K=20\ lg\ 0{,}1=-20\ дб.$$

Определим положение низкочастотной асимптоты $\varphi(\omega)$:

$$\varphi_н(\omega)=(n-\alpha)\cdot\pi/2=(0-2)\cdot\pi/2=-\pi, \text{ рад}$$



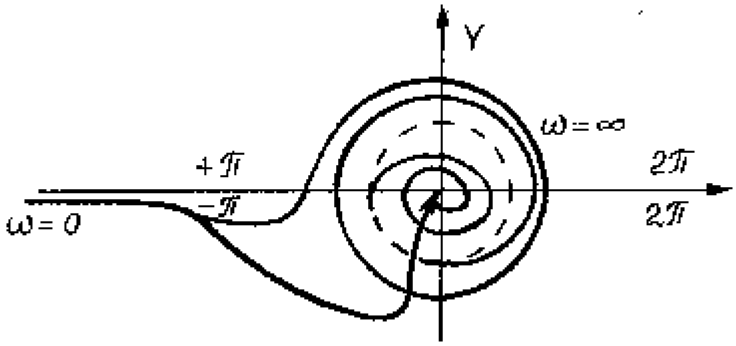
4 .Строим приближенную АФЧХ (по виду ЛАХ).

При: $\omega\to 0$, $\varphi(\omega)\to -\pi$, $L(\omega)\to\infty$, $W_f(\omega)\to\infty$,

$\omega\uparrow, \qquad \varphi(\omega)\uparrow, \qquad L(\omega)\downarrow, \qquad W_f(\omega)\downarrow,$

$\omega\to\infty, \quad \varphi(\omega)\to-\pi, \;\; L(\omega)\to-\infty, \;\; W_a(\omega)\to 0,$

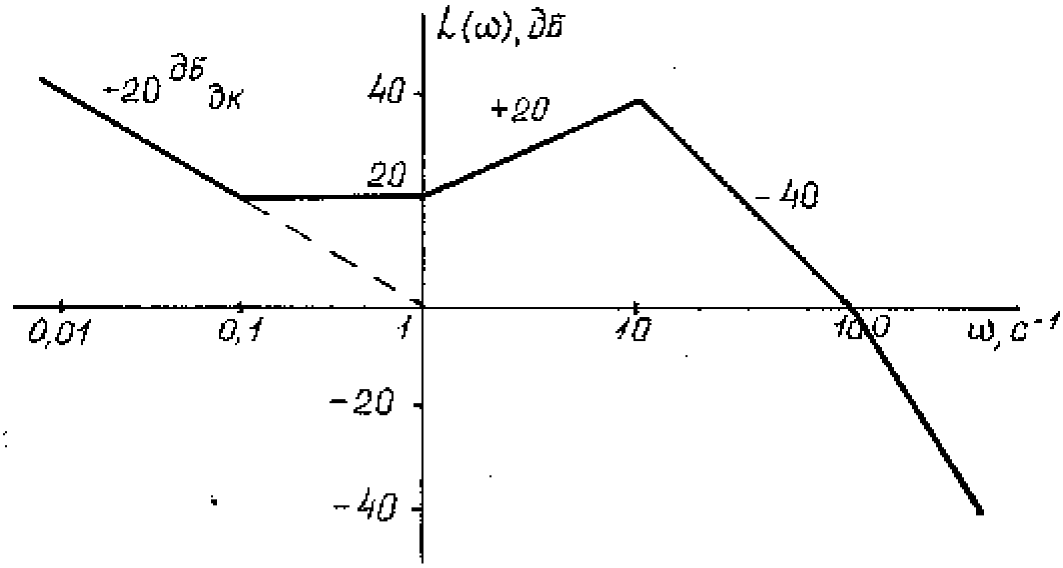
$$L(\omega)=0 \to W_a(\omega)=1 \to \varphi=-\frac{\pi}{2}.$$



Добавить $e^{-\tau p}$ и решить задачу.

Задача №2.

Записать выражение для *Ф(р)* системы ЛАХ которой имеет вид (звеньев второго порядка нет):



Решение:

1. Определяется число интегрирующих и дифференцирующих звеньев и общий коэффициент усиления *К*

20(d-i)=-20дб/дк$\Rightarrow$*d=0; I =1* – интегрирующее звено.

На частоте $\omega=1$ низкочастотная асимптота ЛАЧХ имеет значение

L(1) =20 lg K ±20 lg1 =0 (для интегрирующих и дифференцирующих звеньев)

Откуда *К=1.*

2. Определяем постоянные времени звеньев из частот сопряжения

$$\omega_1=0{,}1 \Rightarrow T_1=\frac{1}{\omega_1}=10,$$

$$\omega_2=1 \Rightarrow T_2=1,$$

$$\omega_3=10 \Rightarrow T_3=0{,,}1$$

$$\omega_4=100 \Rightarrow T_4=0{,}01.$$

3. По изменению наклона на частотах сопряжения определяются передаточные функции элементарных звеньев системы

$$-20\to 0 \Rightarrow 10\,p+1,$$

$$0\to +20 \Rightarrow p+1,$$

$$+20\to -40 \Rightarrow \frac{1}{(0{,}1p+1)^3},$$

$$-40\to -60 \Rightarrow \frac{1}{0{,}01p+1}.$$

4. Записывается общая передаточная функция системы

$$\Phi(p)=\frac{1(10p+1)(p+1)}{p(O{,}1p+1)^3(0{,}01p+1)}.$$

2.7. Устойчивость ЛСС.
Оценка устойчивости непрерывных систем.

1. Какие системы называются устойчивыми?

Под устойчивостью обычно понимают способность АС после прекращения действия на нее внешних возмущений возвращаться в исходное положение.

Выходной сигнал линейной АС: $y(t)= y_B(t)+y_C(t)$.

Для нормальной работоспособности АС необходимо, чтобы свободная составляющая выходного сигнала $y_c(t)$ стремилась к нулю при увеличении времени наблюдения процесса. Системы, удовлетворяющие этому требованию, называются устойчивыми.

2. Необходимое и достаточное условие устойчивости непрерывных АС.

Собственное движение системы можно описать набором экспонент:

$$y_c(t)=\sum_{i=1}^{n} C_i e^{Pit},$$

где p_i – корни характеристического полинома системы, C_i – постоянные коэффициенты.

$y_c(t)$ будет уменьшаться, если будет стремиться к нулю каждая экспоненциальная составляющая, а это полностью определяется знаком соответствующего корня pi.

Необходимым и достаточным математическим условием устойчивости АС является отрицательность вещественных частей корней характеристического полинома, т.е. расположение корней слева от мнимой оси на комплексной плоскости.

Если хотя бы один из корней лежит на мнимой оси, а все остальные корни лежат в левой полуплоскости, то говорят, что АС находится на границе устойчивости. В этом случае устойчивость системы можно обеспечить сколь угодно малым изменением параметров АС.

Система, у которой хотя бы один из корней характеристического уравнения имеет положительную вещественную часть, называется неустойчивой.

Если корни известны, то вопрос устойчивости АС решается довольно просто. Однако определение корней является трудоемким процессом. Поэтому для оценки устойчивости были разработаны критерии, позволяющие судить об устойчивости системы по коэффициентам характеристического уравнения, не решая его.

3. Необходимое условие устойчивости. Критерий Гурвица.

Необходимым условием устойчивости АС является положительность всех коэффициентов характеристического полинома.

Среди алгебраических критериев наибольшее распространение получил критерий Гурвица. Его применение связано с построением матрица размером n×n из коэффициентов характеристического полинома и определением знаков ее диагональных миноров

$$R=\underbrace{\left\|\begin{matrix} a_0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_2 & a_1 & a_0 & 0 & \cdot & \cdot \\ a_4 & a_3 & a_2 & 0 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 0 & a_n & a_{n-1} \end{matrix}\right\|}_{n}\left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\\a\\a\\a\end{matrix}}\right\} n$$

Матрица Гурвица составляется следующим образом

По диагонали от верхнего левого до нижнего правого угла выписываются все коэффициенты по порядку от a_0 до a_{n-1}. Каждая строка дополняется справа коэффициентами с убывающими индексами, слева – с возрастающими. Оставшиеся пустые места заполняются нулями. Из матрицы R в пересечении последовательно вычерчиваемых крайних правых столбцов и нижних строк получают n подматриц

$$detR_1 = a_{n-1};\quad detR_2 = a_{n-2}a_{n1}-a_na_{n-3};\quad detR = a_nR_{n-1}.$$

Критерий устойчивости Гурвица :

Вещественная часть корней характеристического уравнения отрицательна только тогда, когда все *det* подматрицы матрицы Гурвица больше нуля:

$$detR_1 > 0;\quad detR_2 > 0;\quad detR > 0.$$

Для уравнений первого и второго порядка необходимое условие устойчивости является и достаточным, т.е. положительность всех коэффициентов a_i.

Условие устойчивости для систем третьего порядка впервые получил русский ученый И.А. Вышнеградский. Система третьего порядка будет устойчивой , если:

а) коэффициент $a_3 > 0$;

б) произведение "средних" коэффициентов больше произведения "крайних"

$$a_1\, a_2 > a_0\, a_3.$$

Для системы четвертого порядка устойчивость определяется положительностью $det\ R_3$ при условии $a_4 > 0$:

$$detR_3 = a_1(a_2\, a_3 - a_1\, a_4) - a_0\, a_3^2 > 0.$$

Условие нахождения АС на границе устойчивости:

$$\Delta = detR = a_0 \left\| R_{n-1} \right\| = 0.$$

Для замкнутых АС как правило a_0# 0, тогда это условие трансформируется

$$detR_{n-1} = 0.$$

Это равенство используется для определения критического значения параметров АС.

4. Частотный критерий устойчивости Михайлова.

В 1936 советским ученым А.В. Михайловым, для исследования на устойчивость АС высокого порядка, был предложен частотный критерий устойчивости.

АС устойчива только тогда, когда угол поворота радиус-вектора функции Михайлова $A(j\omega)$ при изменении частоты от 0 до ∞ равен $n \cdot \frac{\pi}{2}$, а модуль его нигде не обращался в 0. Где n –порядок характеристического полинома замкнутой АС

$$\Delta\varphi_A = argA(j\infty) - argA(j0) = n\cdot\pi//2,$$

где $A(j\omega)$ – функция Михайлова, получаемая заменой p на $j\omega$ в характеристическом полиноме $A(p)$.

Для устойчивых АС кривая Михайлова (годограф $A(j\omega)$) всегда имеет плавную спиралевидную форму, причем конец ее уходит в бесконечность в том квадранте комплексной плоскости, номер которого равен степени характеристического полинома.

Следствие: корни мнимой и вещественной частей функции Михайлова, расположенные в порядке возрастания, чередуются между собой, а их число равно порядку системы

$$A(j\omega) = X(\omega) + jY(\omega).$$

При наличии нулевого корня в характеристическом уравнении ($a_0=0$) кривая Михайлова при $\omega=0$ выходит из начала координат. При наличии пары мнимых корней $\pm j\omega_0$, вектор $A(j\omega)=0$, т.е. кривая проходит через начало координат при $\omega=\omega_0$, а $X(\omega_0)=0$, $Y(\omega_0)=0$.

С помощью этих соотношений можно определить критическое значение параметров АС. В этом случае одно из равенств позволит выразить частоту ω_0, при которой годограф проходит через начало координат, а второе – критическое значение параметра.

II. Решение задач.

Задача № 1.

Оценить устойчивость продольного движения самолета, если характеристическое уравнение имеет вид:

$$0,7p^3+20p^2+p+0,1=0.$$

Решение:

1 .Необходимое условие выполняется

$$\forall_I:\ a_i>0;\quad I=0.1,2,3.$$

2. Т.к. система третьего порядка, то воспользуемся правилом Вышнеградского:

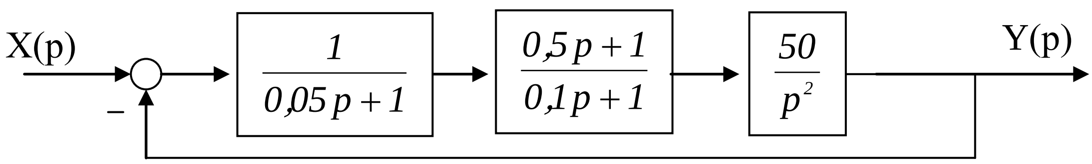
$$a_1\,a_2>a_0\,a_3\,;$$

$$1\cdot 20-0,1\cdot 0,7>0$$

Вывод: АС – устойчива.

Задача № 2.

Структурная схема АС имеет вид:



С помощью критерия Гурвица исследовать устойчивость замкнутой АС.

Решение:

1 .Чтобы исследовать устойчивость необходимо получить характеристический полином системы

$$\Phi(p)=\frac{W(p)}{1+W(p)}=\frac{B(p)}{Q(p)+B(p)};$$

$$W(p)=\frac{50(0,5p+1)}{(0,05p+1)(0,1p+1)p^2}=\frac{25p+50}{0,005p^4+0,15p^3+p^2};$$

$$\Phi(p)=\frac{25p+50}{0,005p^4+0,15p^3+p^2+25p+50}=\frac{B(p)}{A(p)};$$

$$A(p)=0,005p^4+0,15p^3+p^2+25p+50.$$

2. Проверяем: $a_n \neq 0$.

3. Составим матрицу Гурвица из коэффициентов характеристического полинома:

$$R=\begin{array}{c}\left\|\begin{matrix} 50 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 25 & 50 & 0 \\ 0{,}005 & 0{,}15 & 1 & 25 \\ 0 & 0 & 0{,}005 & 0{,}15 \end{matrix}\right\|\end{array}\begin{matrix} \\ \to R_3 \\ \to R_2 \\ \to R_1 \end{matrix}$$

5. Вычислим определители подматриц R_3 матрицы Гурвица R:

$$\Delta_1 = detR_1 = \left|0.15\right| > 0;$$

$$\Delta_2 = detR_2 = \begin{vmatrix} 1 & 25 \\ 0{,}005 & 0{,}15 \end{vmatrix} = 1\cdot 0{,}15 - 0{,}005\cdot 25 > 0,$$

$$\Delta_3 = detR_3 = \begin{vmatrix} 25 & 50 & 0 \\ 0{,}15 & 1 & 25 \\ 0 & 0{,}005 & 0{,}15 \end{vmatrix} 25\cdot 1\cdot 0{,}15+0\cdot 0{,}005\cdot 0{,}15+0\cdot 50\cdot 25-0\cdot 1\cdot 0-0{,}15-$$

$$-25\cdot 25\cdot 0{,}005=25(1\cdot 0{,}15-25\cdot 0{,}005)-50\cdot 0{,}15\cdot 0{,}15=--0{,}5<0.$$

Вывод: Т.к. определитель одной из подматриц меньше нуля, то АС неустойчива.

Задача №3

Передаточная функция разомкнутой системы имеет вид:

$$W(p) = \frac{0{,}1K(p+1)}{p(5p+1)(3p+1)}.$$

Используя критерий Гурвица найти критическое значение коэффициента усиления разомкнутой системы.

1. Определим передаточную функцию замкнутой АС:

$$Ф(p) = \frac{W(p)}{1+W(p)} = \frac{B(p)}{Q(p)+B(p)} = \frac{B(p)}{A(p)};$$

$$W(p) = \frac{0{,}1K(p+1)}{p(5p+1)(3p+1)+0{,}1K(p+1)} = \frac{0{,}1Kp+0{,}1K}{15p^3+8p^2+(1+0{,}1K)p+0{,}1K};$$

$$A(p)=15p^3+8p^2+(1+0{,}1K)p+0{,}1K.$$

2. Критический коэффициент усиления соответствует нахождению АС на границе устойчивости.

Анализируя соответствие коэффициентов *A(p)* необходимому условию устойчивости можно видеть, что с одной стороны

$$K_{кр}=0,\ т.к.\ \forall_I\ \ a_i > (I=0\div 3),\ при\ к>0.$$

Учитывая, что $a_0 \neq 0$, воспользовавшись критерием Гурвица для АС находящейся на границе устойчивости.

$$det\ R = a_0 \left|R_{n-1}\right| = 0 \text{ можно записать:}$$

$$det\ R_{n-1} = 0.$$

Для системы третьего порядка $n=3$.

Тогда определим R_2^ ($a_3>0$):

$$R = \begin{vmatrix} 0{,}1K & 0 & 0 \\ 8 & 1+0{,}1K & 0{,}1K \\ 0 & 15 & 8 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \\ \to R_2 \\ \to R_1 \end{array}$$

Из условия $detR_2=0$ определим $K_{кр}$:

$$(1+0{,}1K)8-15\cdot 0{,}1K=0; \quad (1+о{,}1K)8=15\cdot 0{,}1K.$$

Откуда $K_{кр} \approx 11{,}43$.

Вывод: АС будет устойчива при коэффициенте усиления разомкнутой системы

$$0 < K < 11{,}43.$$

Итак, методика оценки устойчивости по критерию Гурвица следующая:

1. Проверка выполнения необходимого условия устойчивости по коэффициентам $A(p)$.

2. Составление матрицы Гурвица и коэффициентов $A(p)$ замкнутой системы.

3. Определяем знаки определителей подматриц матрицы Гурвица.

4. Если хотя бы один из определителей отрицателен – система неустойчива. В противном случае – устойчива.

Задача №4.

С помощью критерия Михайлова оценить устойчивость АС, характеристическое уравнение которой имеет вид:

$$0{,}0014p^4+0{,}022p^3+0{,}7p^2+1{,}6p+5=0.$$

Решение:

1. Проверяем выполнение необходимого условия:

$$\forall_I \ a_i>0 \ \ (i=0\text{-}4).$$

2. $\Delta\varphi = n\cdot\frac{\pi}{2} = 4\frac{\pi}{2} = 2\pi$.

3. Подставляем в любую часть уравнения вместо комплексной переменной p, комплексную переменную $j\omega$. Полученную таким образом вектор-функцию Михайлова запишем в виде:

$$A(j\omega)=X(\omega)+jY(\omega),$$

$$A(j\omega)=0{,}0014\omega^4-j0{,}022\omega^3-0{,}7\omega^2+j1{,}6\omega+5,$$

$$A(j\omega)=(0{,}0014\omega^4-0{,}7\omega^2+5)+j(1{,}6\omega-0{,}022\omega^3),$$

где $X(\omega)=5-0{,}7\omega^2)+0{,}0014\omega^4$, $Y(\omega)=1{,}6\omega-0{,}022\omega^3$.

4. Задаваясь различными значениями частоты ω построим годограф вектор-функции Михайлова:

ω	0	1	3	5	10	30	∞
$X(\omega)$	5	4,3	-1,2	-11,6	-51	508	∞
$Y(\omega)$	0	1,6	4,2	5,25	-6	-546	$-\infty$

Вывод: Т.к. исходная АС 4-го порядка и годограф вектор-функции Михайлова проходит в положительном направлении 4 квадранта ($n\cdot\pi/2$), то условия критерия Михайлова выполняются. Система устойчива.

Задача №5

Определить устойчивость АС с характеристическим уравнением

$$p^5+p^4+3p^3+2p^2+p+0,5=0.$$

Решение:

1. Функция Михайлова

$$A(j\omega)=(j\omega)^5+(j\omega)^4+3(j\omega)^3+2(j\omega)^2+(j\omega)+0,5= j\omega^5+\omega^4-j3\omega^3-j\omega+0,5=$$
$$=\omega^4-2\omega^2+0,5+j(\omega^5-3\omega^3+\omega).$$

2 .Определяем корни действительной и мнимой частей $A(j\omega)$.

$$\omega^4-2\omega^2+0,5=0, \qquad x_{1,2}=\frac{-в\pm\sqrt{в^2-4ac}}{2a},$$

$$\omega^2=\frac{2\pm\sqrt{4-2}}{2}=\frac{2\pm\sqrt{2}}{2}=\begin{matrix}1,7\\0,3\end{matrix}, \qquad x_{1,2}=-\frac{в}{2}\pm\sqrt{\frac{в^2}{4}-c},$$

$$\omega_1=\sqrt{1,7}=1,2, \qquad x_1\cdot x_2=c;\ x_1+x_2=-6,$$

$$\omega_2=\sqrt{0,3}=0,52, \quad X((\omega_{1,2})=0.$$

Из физических соображений $\omega_1=-1,2$ *и* $\omega_2=-0,52$ *не учитываем, т.к. отрицательных частот не существует*

$$\omega^5-3\omega^3+\omega=0,$$
$$\omega^3=0,$$
$$\omega^4-3\omega^2+1=0;\ \ \omega^2=\frac{3\pm\sqrt{9-4}}{2}=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}=\begin{matrix}2,\\6\end{matrix}$$

$$\omega_4=1,6;\quad \omega_6=0,64,\ \ Y\left(\omega_{3,4,5}\right)=0.$$

3. Располагаем корни в порядке возрастания

$$\omega_3=0,\quad \omega_2=0,52,\ \ \omega_5=0,64,\quad \omega_1=1,2;\quad \omega_4=1,6.$$
$$Y_1 \qquad X_1 \qquad Y_2 \qquad X_2 \qquad Y_3$$

4. Корни чередуются – система устойчива.

Итак, методика оценки устойчивости системы по следствию критерия Михайлова следующая:

а) определяем для замкнутой АС функцию Михайлова

$$A(j\omega)=X(\omega)+jY(\omega).$$

б)вычисляем корни вещественной и мнимой составляющих

$$X(\omega)=0; \qquad Y(\omega)=0$$

и располагаем их в порядке возрастания их значений.

в) анализируем порядок следования корней вещественной и мнимой частей.

Если они чередуются между собой, т.е. вектор-функция Михайлова последовательно пересекает координатные оси, - система устойчива. В противном случае – неустойчива.

2.8. Устойчивость ЛСС. Оценка устойчивости непрерывных систем с помощью критерия Найквиста.

1. Формулировка частотного критерия Найквиста?

Для того, чтобы АС была устойчива необходимо и достаточно чтобы полное приращение аргумента функции Найквиста $N(j\omega) = 1 + W(j\omega)$ при изменении частоты от 0 до ∞ было равно:

$$\Delta\varphi_N = \frac{\pi}{2}(2\mu_p + \nu_p), \text{ где}$$

μ_p *и* ν_p - количество корней характеристического уравнения разомкнутой АС с положительной и нулевой вещественными частями.

$W(p) = \dfrac{B(p)}{S(p)}$ - передаточная функция разомкнутой системы.

$\Phi(p) = \dfrac{W(p)}{1+W(p)} = \dfrac{B(p)}{S(p)+B(p)} = \dfrac{B(p)}{A(p)}$ – передаточная функция замкнутой АС.

$N(j\omega) = 1 + W(j\omega) = \dfrac{A(j\omega)}{S(j\omega)}$ – функция Найквиста.

Т.о. частотный критерий Найквиста характеризуется тем, что он позволяет судить об устойчивости замкнутой АС по виду АФЧХ разомкнутой АС, которая может быть неустойчива или нейтральна.

Применение критерия Найквиста состоит в построении годографа вектора $W(j\omega)$, т.е. АФЧХ разомкнутой системы и поворот вектора $N(j\omega)=1+ W(j\omega)$ на угол φ_N отсчитывается относительно точки ($-1; j0$).

2. Сформулировать первое следствие критерия Найквиста.

Замкнутая АС устойчива, если годограф АФЧХ устойчивой или нейтральной разомкнутой системы не охватывает точку с координатами ($-1; j0$).

В этом случае, если годограф АФЧХ разомкнутой системы несколько раз пересекает ось ($0; \infty$), то используется ещё одна формулировка следствия:

Замкнутая АС устойчива, если число частот ω_π, на которых $W_a(\omega_\pi)>1$ равно нулю или четное.

Если разомкнутый контур содержит ν интегрирующих звеньев, но структурный признак неустойчивости не выполняется, то АФЧХ разомкнутой системы необходимо дополнить дугой бесконечного радиуса от $+R$ с центральным углом $\nu(-\dfrac{\pi}{2})$ и далее использовать формулировку критерия.

Если годограф АФЧХ $W(j\omega)$ проходит через точку с координатами ($-1; j0$), т.е. выполняется условие $W_a(\omega_\pi)=1$, замкнутая АС находится на границе устойчивости.

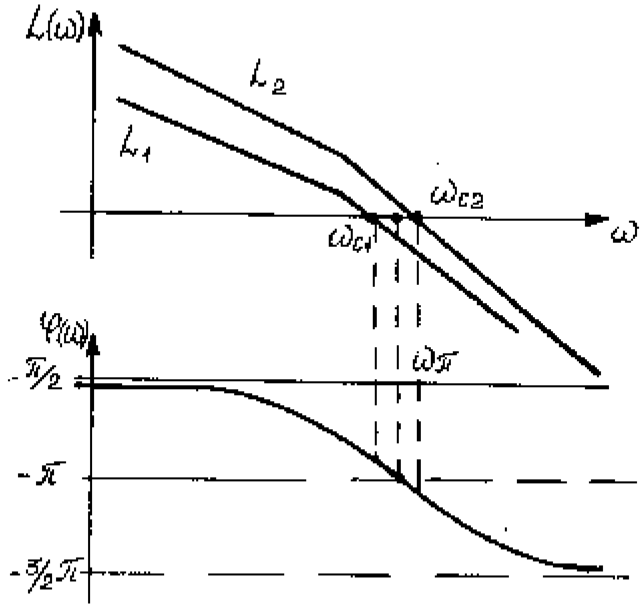
3. Второе следствие критерия Найквиста («логарифмический» критерий Найквиста)?

Для анализа устойчивости АС по критерию Найквиста на практике, как правило, используют ЛЧХ разомкнутой системы, построение которых значительно проще построения годографа $W(j\omega)$.

Замкнутая АС устойчива, когда она устойчива или нейтральна в разомкнутом состоянии и выполняется условие

$$\omega_c < \omega_\pi .$$

На практике для определения частот ω_c и ω_π используют ЛЧХ:



АС, ЛЧХ разомкнутой системы которой L_1 – устойчива.

Для устойчивых АС:

$L(\omega_\pi)=20 \lg W_a(\omega_\pi)<0;$

$\varphi(\omega_\pi)>-\pi.$

В общем случае, если ω_π несколько, то “логарифмический” критерий Найквиста можно сформулировать так:

Замкнутая АС устойчива, если число частот ω_π, на которых $L(\omega_\pi)>0$, равно нулю или четное. ($\varphi(\omega)$ тоже дополняется).

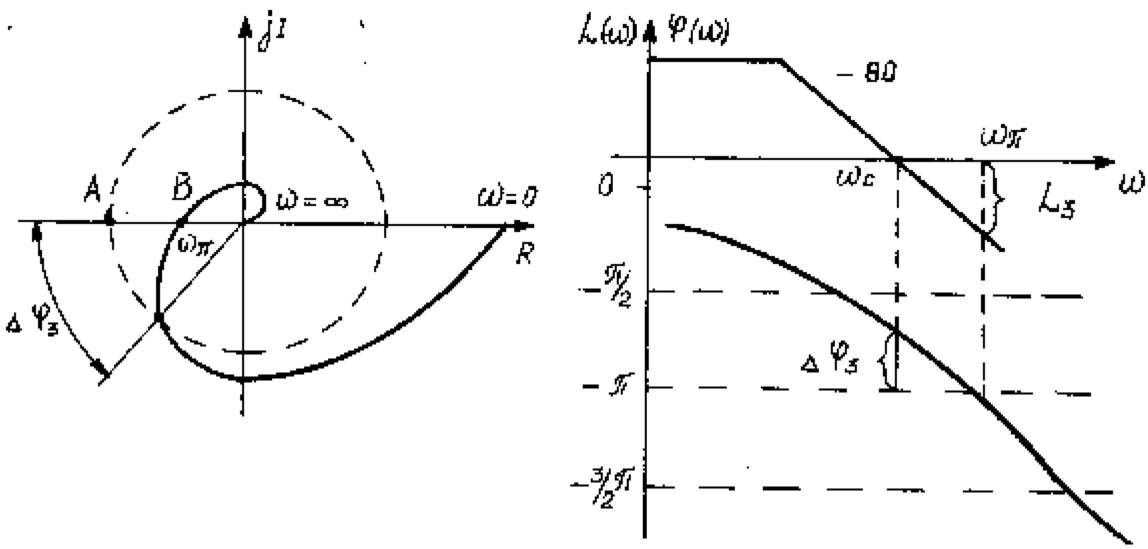
4. Запас устойчивости?

При проектировании АС необходимо определить и предусмотреть некоторый запас устойчивости, характеризующий степень удаленности от границ устойчивости.

Положение АС на границе устойчивости определяется двумя условиями:

$$W_a(\omega)=1; \arg W(j\omega)=-\pi,$$

Т.е. если $\begin{cases} AB=0 \\ \Delta\varphi_3=0 \end{cases}$



Чем больше отрезок АВ или угол $\Delta\varphi_З$, тем дальше АС находится от границы устойчивости. Т.о. Величину отрезка АВ и угла $\Delta\varphi_З$ можно рассматривать как запас устойчивости.

Запасом устойчивости по амплитуде $\Delta L_З$ называется величина в децибелах, на которую можно увеличить коэффициент усиления разомкнутой системы, чтобы вывести замкнутую АС на границу устойчивости:

$$\Delta L_З = 20\left|lg\,W_a(\omega_\pi)\right| = \left|L(\omega_\pi)\right|;$$

Запасом устойчивости по фазе $\Delta\varphi_З$ называется угол, на который необходимо повернуть АФЧХ разомкнутой АС, чтобы замкнутая система оказалась на границе устойчивости:

$$\Delta\varphi_З = \pi + \varphi(\omega_c).$$

Для авиационных АС рекомендуется обеспечивать:

$$\Delta L_З \geq 6\ дб;\ \Delta\varphi_З \geq \pi/6.$$

Критерий устойчивости Найквиста целесообразно применять в тех случаях, когда разомкнутый контур АС представляет собой последовательное соединение простых звеньев. В этом случае легко определяются корни характеристического полинома разомкнутой системы и величина $\Delta\varphi_N$. В противном случае рекомендуется использовать критерий устойчивости Михайлова.

Задача №1.

Определить устойчивость замкнутой АС по критерию Найквиста, если её передаточная функция в разомкнутом состоянии имеет вид:

$$W(p) = \frac{20(0{,}1p+1)}{p(0{,}05p-1)}.$$

Решение:

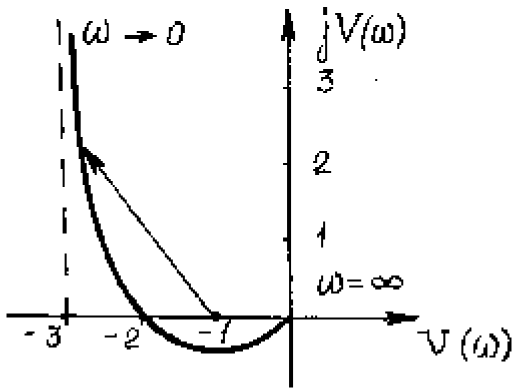
Как следует из вида передаточной функции, характеристический полином разомкнутой АС имеет один нулевой корень ($\nu_p=1$) и один корень в правой полуплоскости ($\mu_p=1$). Разомкнутая система неустойчива.

Строим АФЧХ разомкнутой системы:

$$W(j\omega)=\frac{20(0{,}1j\omega+1)}{j\omega(0{,}05j\omega-1)}=\frac{20(0{,}1j\omega+1)(-0{,}05\omega^2+j\omega}{\omega^2(0{,}0025\omega^2+1)}=\frac{-3}{(0{,}0025\omega^2+1)}+$$

$$+j\frac{20-0{,}1\omega^2}{\omega(0{,}0025\omega^2+1)}=U(\omega)+jV(\omega).$$

ω	0	5	10	20	100	∞
$U(\omega)$	-3	-2,82	-2,4	-1,5	-0,115	0
$V(\omega)$	$+\infty$	+3,29	+0,8	-0,5	-0,377	0



Для устойчивости АС:

$$\Delta\varphi_N=\Delta arg\ N(j\omega)=\pi/2(2\mu_p+\nu_p).$$

Вычислим:

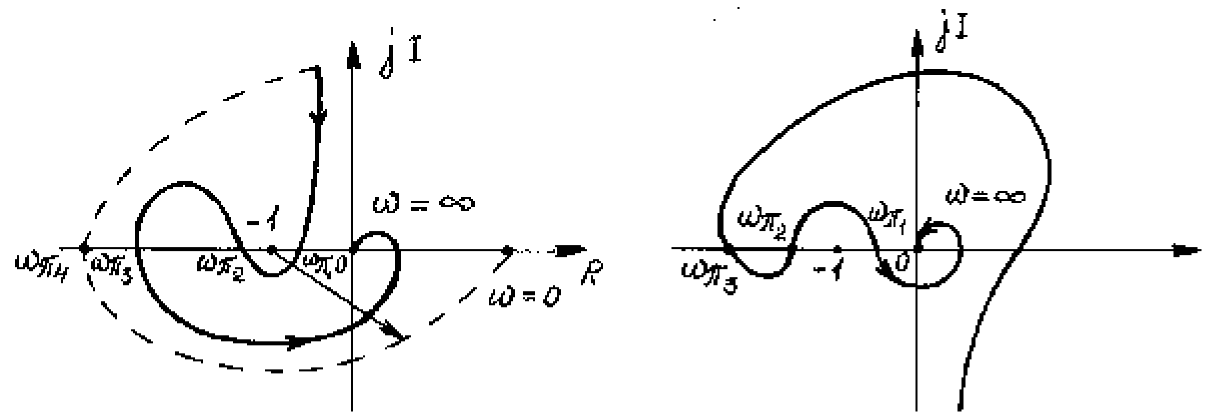
$$\Delta\varphi_N=\pi/2(2\cdot1+1)=3/2\pi..$$

По графику получаем :

$\Delta\varphi_N= 3/2\pi$, т.е. замкнутая АС устойчива.

Задача №2.

Годограф АФЧХ разомкнутой системы имеет вид:



а)

по критерию:

$\Delta\varphi_N = \pi/2(2\mu_p + \nu_p) = 3/2\pi.$

имеем:

$\Delta\varphi_N = -2\pi;$

$\mu_p=0$	разомкн.
$\nu_p=3$	АС нейтр.

б)

$\mu_p=2$	разомкнутая
$\nu_p=1$	АС неустойчива,

По первому следствию критерия Найквиста оценить устойчивость замкнутой системы.

Решение:

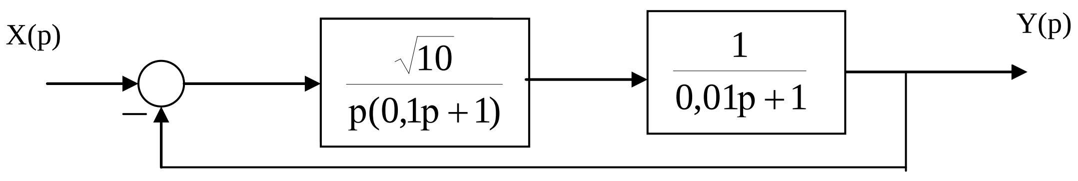
а) - годограф $W(j\omega)$ охватывает точку с координатами (-1; $j0$), система неустойчива.

-частота ω_π на которых $W_a(\omega_\pi)>1$ три, т.е. нечетное число – система неустойчива;

б) 1-е следствие не работает.

Задача №3.

Оценить устойчивость замкнутой АС и определить запасы устойчивости: $\Delta L_З$, $\Delta\varphi_З$.



Решение:

Воспользуемся вторым следствием критерия Найквиста, т.к. $\mu_p=0$, $\nu_p=1$.

1. Определим выражение для передаточной функции разомкнутой системы:

$$W(p) = \frac{\sqrt{10}}{p(0{,}1p+1)(0{,}01p+1)}.$$

Разомкнутая АС нейтральна.

2. Строим ЛЧХ разомкнутой системы:

а) определяем наклон низкочастотной асимптоты

$$20(\alpha\text{-}i) = 20(0\text{-}1) = -20,\ дб/дк.$$

б) определяем точку на плоскости, через которую пройдет низкочастотная асимптота:

$$L(1) = 20\ lg\sqrt{10} = 10,\ дб.$$

в) определяем частоты сопряжения звеньев:

$$\omega_1 = \frac{1}{0{,}1} = 10, c^{-1}; \quad \omega_1 = \frac{1}{0{,}1} = 10, c^{-1}.$$

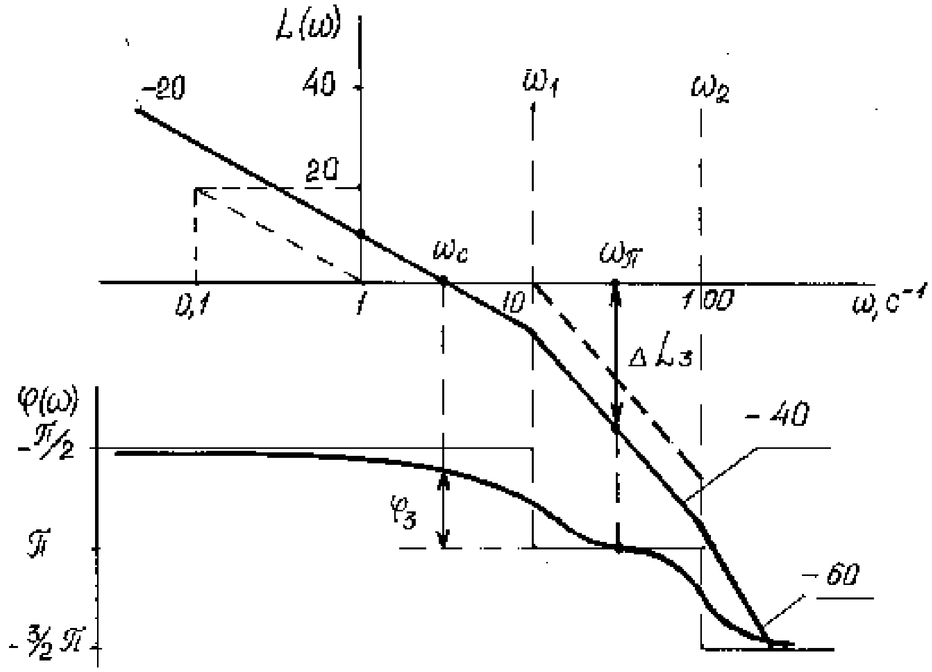
3. По ЛАХ определяем выполнение условия устойчивости замкнутой АС по критерию Найквиста:

$\omega_c < \omega_\pi$ - замкнутая АС устойчива.

4. По ЛАХ определим запас устойчивости

$$\Delta L_3 = 20\left|lg\, W_a(\omega_\pi)\right| = \left|L(\omega_\pi)\right| \approx 35, дб,$$

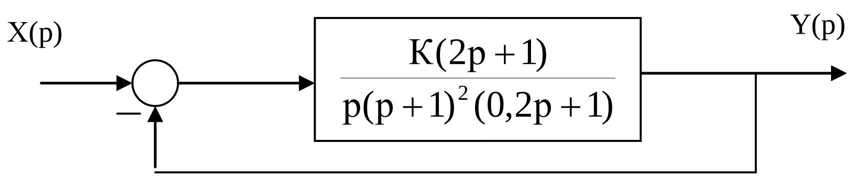
$$\Delta\varphi_3 = \pi + \varphi(\omega_c) \approx \pi - 105^0 \approx 75^0.$$



Примечание: если хотя бы один из параметров запаса устойчивости находится в районе нуля, то необходимо пользоваться не асимптотическими, а точными ЛАХ.

Задача №4.

Для системы, структурная схема которой имеет вид:



Требуется, пользуясь критерием устойчивости Найквиста определить значения К = К$_1$, *при котором* $\Delta\varphi_3 = 30^0$ *и* К = К$_2$, *при котором* $\Delta L_3 = 6, дб$.

Решение:

Разомкнутая АС нейтральна.

1. Допустим, что $K = 1$. Построим ЛАХ разомкнутой системы:

а) определяем наклон низкочастотной асимптоты ЛФХ

$$20(\alpha\text{-i}) = 20(0\text{-}1) = -20, \text{ дб/дк},$$

$$\pi/2(\alpha\text{-}i) = \pi/2\,(0\text{-}1) = -\pi/2, \text{ рад}.$$

б) Определяем точку на плоскости, через которую проходит след низкочастотной асимптоты ЛАХ при $\omega = 1$

$$20\, lgK\big|_{\omega=1} = 20\, lg1 = 0, \text{ дб}.$$

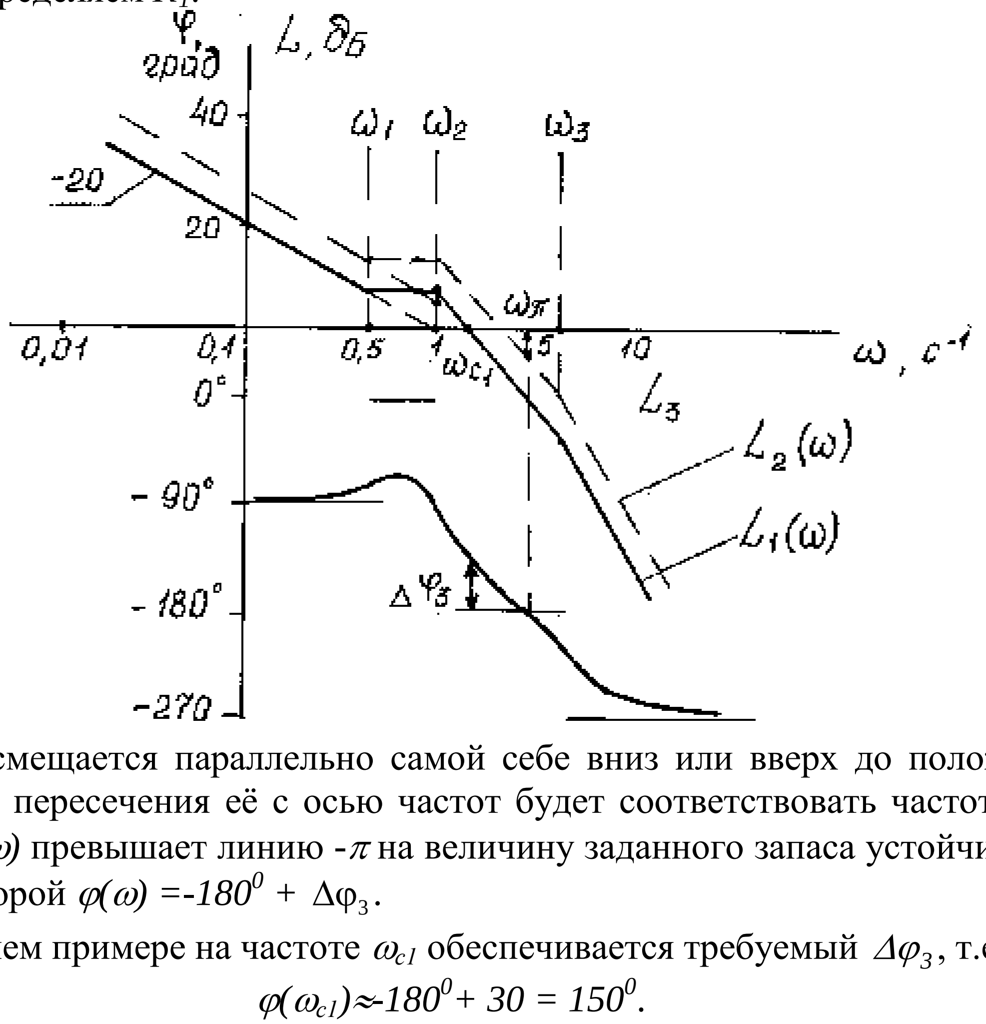
в) определяем частоты сопряжения звеньев.

$\omega_1 = 0,5,\ c^{-1}$ – форсирующее звено –1,

$\omega_2 = 1,\ c^{-1}$ – апериодическое звено –2,

$\omega_3 = 5,\ c^{-1}$ – апериодическое звено –1.

2. Определяем K_1:



$L(\omega)$ смещается параллельно самой себе вниз или вверх до положения, когда точка пересечения её с осью частот будет соответствовать частоте, при которой $\varphi(\omega)$ превышает линию $-\pi$ на величину заданного запаса устойчивости, т.е. при которой $\varphi(\omega) = -180^0 + \Delta\varphi_3$.

В нашем примере на частоте ω_{c1} обеспечивается требуемый $\Delta\varphi_3$, т.е.

$$\varphi(\omega_{c1}) \approx -180^0 + 30 = 150^0.$$

Следовательно, произвольно выбранный нами коэффициент усиления $K = 1$ и есть K_1.

3. Определяем K_2:

$L(\omega)$ смещается параллельно самой себе вверх до положения, когда её ордината при частоте ω_π станет равной $-\Delta L_3$.

- определяется ордината первой асимптоты $L_2(\omega)$ при $\omega = 1$

$$L_2(1) \approx 4,\ дб;$$

- из равенства $L_2(1) = 20\ lgK_2 = 4$ вычисляется $K_2 = 1{,}585,\ c^{-1}$.

2.9. Качество ЛСС. Определение установившейся ошибки АС.

1. Понятие качества процесса управления или качества АС?

Качество характеризует точность и характер протекания переходных процессов в АС.

2. Методы оценки качества и критерии качества АС?

Качество АС может быть оценено прямыми и косвенными методами. Критерии качества, полученные при использовании прямых методов, основанных на анализе кривых переходных процессов, называются прямыми. К ним относятся:

- время регулирования;
- перерегулирование;
- число колебаний за время регулирования;
- время срабатывания; полоса пропускания;
- ошибка в установившемся режиме;
- ошибка при воздействии случайных возмущений и т. д.

Косвенные методы оценки качества АС основаны на использовании математического аппарата при исследовании передаточных функций, частотных характеристик и интегральных оценок.

Основным показателем качества АС является точность в установившемся режиме, которую можно оценить по установившейся ошибке АС при типовом воздействии. В этом случае целесообразно воспользоваться первой предельной теоремой:

$$e(t)\big|_{t\to\infty} = \lim_{p\to o} pE(p).$$

Задача №1.

Определить установившуюся ошибку АС с передаточной функцией разомкнутой системы

$$W(p) = \frac{K}{(0{,}1p+1)(2p+1)},$$

при входном сигнале $x(t)=a1(t)$.

Решение:

1. Определим выражение для ошибки в изображении по Лапласу:

$$E(p)=S(p)X(p).$$

$$X(p)=\mathbf{L}[x(t)] = \frac{a}{p},\quad S(p)=-\frac{1}{1+W(p)} = -\frac{(0{,}1p+1)(2p+1)}{(0{,}1p+1)(2p+1)+K}.$$

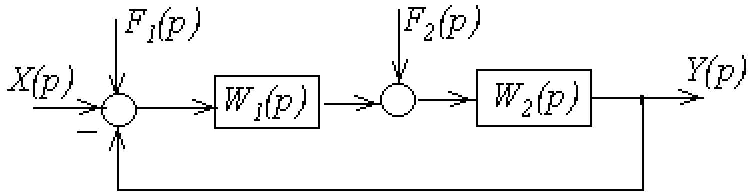
Тогда $\quad E(p) = -\dfrac{(0{,}1p+1)(2p+1)}{(0{,}1p+1)(2p+1)+K}\cdot\dfrac{a}{p}.$

2. Используя теорему “о конечном значении” определим оригинал ошибки *e(t)* в установившемся режиме:

$$e(t) = \lim_{p\to 0} p\,\frac{-(0{,}1p+1)(2p+1)}{(0{,}1p+1)(2p+1)+K}\cdot\frac{a}{p} = -\frac{a}{1+K}.$$

Однако чаще возникает задача оценки точности работы АС при воздействии на неё произвольных (в том числе и случайных) входных сигналов.

Допустим, на АС заданной структуры воздействуют медленно меняющиеся сигналы:



где $X(p)$ – задающий сигнал; $F_1(p)$, $F_2(p)$ – помехи.

Требуется определить ошибку системы $E(p)$ - ?

По определению

$$E(p) = -X(p)+Y(p) = -X(p)+\Phi(p)X(p)+\Phi_{F1Y}(p)F_1(p)+\Phi_{F2Y}(p)F_2(p) =$$

$$= [-1+\Phi(p)]X(p)+\frac{W_1(p)W_2(p)}{1+W_1(p)W_2(p)}F_1(p)+\frac{W_2(p)}{1+W_1(p)W_2(p)}F_2(p) =$$

$$= S(p)X(p)+\Phi(p)F_1(p)+\frac{W_2(p)}{1+W_1(p)W_2(p)}F_2(p) = E_x(p)+E_{f1}(p)+E_{f2}(p).$$

Но любая передаточная функция может быть представлена в полиномиальном виде:

$$\Phi(p) = \frac{B(p)}{A(p)} = S_0 + S_1 p + S_2 p^2 + \ldots,$$

Тогда $E(p) = (S_{0x}+S_{1x}p+S_{2x}p^2+\ldots)X(p)+\left(\tilde{S}_{0F_1}+\tilde{S}_{1F_1}\,p+\tilde{S}_{2F_1}\,p^2+\ldots\right)F_1(p)+$

$$+\left(\overset{\approx}{S}_{0F_2}+\overset{\approx}{S}_{1F_2}\,p+\overset{\approx}{S}_{2F_2}\,p^2+\ldots\right)F_2.$$

Применив операцию обратного преобразования Лапласа, получим оригинал ошибки:

$$e(t) = S_{0x}x(t)+S_{1x}x^{(1)}(t)+S_{2x}x^{(2)}(t)+\ldots+\tilde{S}_{0F_1}\,f_1(t)+\tilde{S}_{1F_1}\,f^{(1)}(t)+\ldots+$$

$$+\overset{\approx}{S}_{0F_2}\,f_2(t)+\overset{\approx}{S}_{1F_2}\,f_2^{(1)}(t)+\overset{\approx}{S}_{2F_2}\,f_2^{(2)}(t)+\ldots.$$

Из формулы видно, что необходимое число вычисляемых коэффициентов ошибок в полиномиальном представлении передаточных функций определяется порядком максимальной производной воздействующих на систему сигналов равной нулю.

Т.о., можно составить следующую методику определения ошибки АС при воздействии на неё сигналов, заданных в полиномиальном виде:

1. Определить передаточные функции АС по ошибке

$$S(p) = \Phi_{XE}(p), \quad \Phi_{F_i E}(p).$$

2. Определить необходимое число вычисляемых коэффициентов ошибок S_i $(I=0,1,\dots)$ для каждой передаточной функции по ошибке.

3. Определить численные значения S_i и порядок астатизма системы (при необходимости)

2. Определить частные и общую ошибки АС.

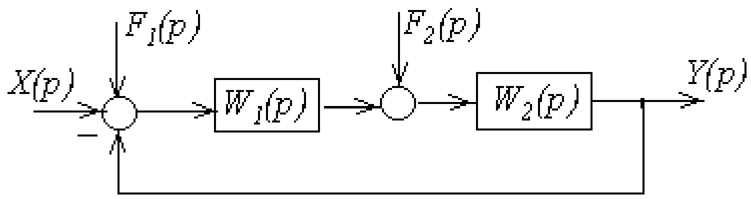
В тех случаях, когда входной сигнал представлен в гармоническом виде, то ошибку системы на этот сигнал определяют через частотные характеристики АС:

$$x(t)=A_x sin(\omega t+\psi_x), \text{ тогда } e(t)=A_e sin(\omega t+\psi_e),$$

где $A_e=A_x S_a(\omega_x), \quad \psi_e=\psi_x+\varphi_e(\omega_x)$.

Задача №2.

Структурная схема АС имеет вид:



где $W_1(p) = \dfrac{5}{p+1}, \quad W_2(p) = \dfrac{2}{p}$.

Определить установившуюся ошибку $e(t)$, если входной сигнал и помеха описываются выражениями:

$$x(t)=(2+t)^2; \; f_1(t)=sin\, t; \; f_2(t)=0{,}1t.$$

Решение:

$$e(t) = e_x(t) + e_{f_1}(t) + e_{f_2}(t).$$

Сигналы $x(t)$ и $f_2(t)$ заданы полиномиально от t, а сигнал $f_2(t)$ – гармонический. Реакцию системы $e_{f_1}(t)$ мы научились определять на предыдущих занятиях, здесь же определим ошибку АС обусловленную сигналами $x(t)$ и $f_2(t)$. Для этого воспользуемся приведенной выше методикой:

1. Определим передаточные функции по ошибке:

$$S(p) = -\frac{1}{1+W(p)} = -\frac{1}{1+\dfrac{5}{p+1}\cdot\dfrac{2}{p}} = \frac{p(p+1)}{p^2+p+10}.$$

$$\Phi_{F_2 E}(p) = \frac{W_2(p)}{1+w(p)} = \frac{\dfrac{2}{p}}{1+\dfrac{10}{p(p+1)}} = \frac{2(p+1)}{p^2+p+10.}$$

2. Определим необходимое число вычисляемых коэффициентов ошибок S_i для составляющих ошибки $e_x(t)$ и $e_{f_2}(t)$:

$$e(t)=S_0x(t)+S_1x^{(1)}(t)+\ldots+A_{ef_1}\sin(\omega_{f_1}t+\psi_{ef_1})+\tilde{S}_0\,f_2(t)+\tilde{S}_1\,f_2^{(1)}(t)+\ldots$$

$x(t)=(2+t)^2\neq 0,\Rightarrow S_0=?;\qquad f_2(t)=0{,}1t\neq 0,\Rightarrow \tilde{S}_0=?;$

$x^{(1)}(t)=2(2+t)\neq 0,\Rightarrow S_1=?;\qquad f_2^{(1)}(t)=0{,}1\neq 0,\Rightarrow \tilde{S}_1=?;$

$x^{(2)}(t)=2\neq 0,\Rightarrow S_2=?;\qquad f_2^{(2)}(t)=0.$

$x^{(3)}(t)=0.$

Т.е., необходимо определить численные значения коэффициентов S_0, S_1, S_2, $\tilde{S}_0$, $\tilde{S}_1$.

3. Определим численные значения коэффициентов ошибок S_i, $\tilde{S}_i$ и порядок астатизма системы по отношению к задающему сигналу и помехам:

а) S_i: $\quad -\dfrac{p(p+1)}{p^2+p+10}=S_0+S_1p+S_2p^2+\ldots,$

$-p^2-p=(p^2+p+10)(S_0+S_1p+S_2p^2+\ldots),$

$$\begin{array}{l|l} p^0 & 0=10S_0\Rightarrow S_0=0; \\ p^1 & -1=10S_1+S_0\Rightarrow S_1=-0{,}1; \\ p^2 & -1=10S_2+S_1+S_0\Rightarrow S_2=-0{,}09. \end{array}$$

в) $\tilde{S}_i$: $\quad \dfrac{2(p+1)}{p^2+p+10}=\overline{S_0}+\overline{S_1}p+\overline{S_2}p^2+\ldots,$

$$\begin{array}{l|l} p^0 & 2=10\overline{S_0}\Rightarrow \overline{S_0}=0{,}2, \\ p^1 & 2=10\,\overline{S_1}+\overline{S_0}\Rightarrow \overline{S_1}=0{,}18. \end{array}$$

Т.к. $S_0=0$, а $S_1\neq 0$, то АС астатическая первого порядка по отношению к по-лезному сигналу. Структурный признак астатизма 1-го порядка по отношению к задающему воздействию – наличие одного интегрирующего звена в разомкнутом контуре.

$\overline{S_0}\neq 0$ - АС статическая по отношению к возмущению $f_2(t)$. Структурный признак статической АС по отношению к возмущениям $f_2(t)$ и $f_1(t)$ – отсутствие дифференцирующих звеньев между точкой ввода возмущения и выходом системы.

2. Определим $e_x(t)$, $e_{f_2}(t)$ и $e(t)$.

$$e_x(t)=S_0x(t)+S_1x^{(1)}(t)+S_2x^{(2)}(t)=0\cdot x(t)-0{,}1\cdot 2(2+t)-0{,}09\cdot 2=-(0{,}2t+0{,}58).$$

$$e_{f_2}(t)=\overline{S_0}\,f_2(t)+\overline{S_1}\,f_1^{(1)}(t)=0{,}2\cdot 0{,}1t+0{,}18\cdot 0{,}1=0{,}02t+0{,}018.$$

Тогда $\quad e(t)=-(0{,}2t+0{,}58)+0{,}02t+0{,}018+e_{f_1}(t)=-(0{,}18t+0{,}562)+e_{f_1}(t).$

Для эффективного сравнения между собой близких систем, выбора оптимальных значений параметров АС, в смысле удовлетворения выбранного функционала качества, широко используются интегральные оценки качества, позволяющие дать общую характеристику качества АС без определения какого-либо её показателя в отдельности.

Простейшей интегральной оценкой качества может служить функционал вида:

$$I = \int_0^\infty |e(t)| dt,$$

где $e(t)=h_ж(t)-h(t)$ – динамическая ошибка АС.

Данный интеграл интерпретируется алгебраической суммой площадей под кривой динамической ошибки. Оценка качества АС по минимуму данного интеграла дает удовлетворительные результаты только в случае монотонного изменения переходного процесса системы. При колебательном его характере наблюдается компенсация положительных и отрицательных площадей при интегрировании, и даже неудовлетворительная по качеству АС может иметь очень хорошую интегральную оценку. Поэтому наиболее распространенной является интегральная квадратичная оценка качества вида:

$$I = \int_0^\infty e^2(t) dt.$$

А.А. Красовский, решая данный интеграл, получил для него выражение через параметры ПФ АС

$$E(p) = \frac{\tilde{B}(p)}{\tilde{A}(p)} = \frac{b_0 + b_1 p + ... + b_m p^m}{a_0 + a_1 p ... + a_n p^n}.$$

Т.е. $$I = \int_0^\infty e^2(t) dt = \frac{\Delta_B}{2 a_n \Delta},$$

где $$\Delta = |R| = \begin{vmatrix} a_0 & 0 & ... & & 0 \\ -a_2 & a_1 & -a_0 & ... & 0 \\ ... & -a_3 & a_2 & ... & \vdots \\ . & . & . & . & . \\ 0 & ... & 0 & -a_n & a_{n-1} \end{vmatrix};$$

$$\Delta_B = |B| = \begin{vmatrix} a_0 & 0 & ... & & B_0 \\ -a_2 & a_1 & -a_0 & ... & B_1 \\ ... & -a_3 & a_2 & ... & \vdots \\ . & . & . & . & . \\ 0 & ... & 0 & -a_n & B_m \end{vmatrix};$$

$$B_0 = b_0^2,\ B_1 = b_1^2 - 2b_0 b_2,\ B_2 = b_2^2 - 2b_1 b_3 + 2b_0 b_4,\ \ldots,\ B_m = b_m^2.$$

Методика определения ИКО:

1.Определить изображение по Лапласу подынтегральной функции $E(p)$.

2. Составить и вычислить определители Δ и Δ_B.

3. Вычислить ИКО по формуле А.А. Красовского.

Задача №3.

Для АС с передаточной функцией

$$\Phi(p) = \frac{K}{T^2 p^2 + 2T\xi p + 1}$$

определить оптимальное значение коэффициента ξ_{opt} в смысле минимума ИКО вида:

$$I = \int_0^\infty [h_{ж}(t) - h(t)]^2 dt.$$

В качестве $h_{ж}(t)$ выбрать $K(t)$.

Решение:

1. Определяем изображение по Лапласу подынтегральной функции:

$$E(p) = H_{ж}(p) - H(p) = \frac{K}{p} - \frac{\Phi(p)}{p} = \frac{K - \Phi(p)}{p} = \frac{K - \dfrac{K}{T^2 p^2 + 2T\xi p + 1}}{p} =$$

$$= \frac{KT^2 p + 2Kt\xi}{T^2 p^2 + 2T\xi p + 1};$$

2. Составляем и находим значения определителей:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -T^2 & 2T\xi \end{vmatrix} = 2T\xi;$$

$$\Delta_B = \begin{vmatrix} 1 & B_0 \\ -T^2 & B_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & (2KT\xi)^2 \\ -T^2 & (KT^2)^2 \end{vmatrix} = K^2 T^4 (1 + 4\xi^2).$$

3. Определяем ИКО:

$$I = \frac{\Delta_B}{2a_n \Delta} = \frac{K^2 T^4 (1 + 4\xi^2)}{2T\xi \cdot 2T^2} = \frac{K^2 T}{4\xi}(1 + 4\xi^2) = \frac{K^2 T}{4}\left(\frac{1}{\xi} + 4\xi\right).$$

4. Определяем ξ_{opt}:

$$\frac{dI}{d\xi} = \frac{K^2 T}{4}\left(-\frac{1}{\xi^2} + 4\right) = 0, \Rightarrow \frac{1}{\xi^2} = 4; \quad \xi = 0,5$$ – экстремум.

$$\frac{d^2 I}{d\xi^2} = \frac{K^2 T}{4} \cdot 2 \frac{1}{\xi^3}\Bigg|_{\xi=0,5} > 0 \Longrightarrow$$ экстремум соответствует минимуму функции.

Следовательно, при $\xi=0,5$ и фиксированных параметрах K и T достигается минимум ИКО данной АС.

В дальнейшем данную методику расчета ИКО вы можете использовать при синтезе ЛС АС методом ИКО.

2.10. Синтез ЛСС методом стандартных коэффициентов.

1. В чем суть метода стандартных коэффициентов (МСК)?

МСК предполагает такой выбор параметров элементов АС с заданной структурой, при котором коэффициенты её передаточной функции принимают заранее назначенные (стандартные) значения. При этом и переходная характеристика системы будет иметь желаемую (стандартную) форму.

Коэффициенты передаточной функции являются функциями параметров элементов АС. Зная коэффициенты – задаваясь ими, можно вычислить значения параметров элементов синтезируемой АС – в этом физическая суть метода стандартных коэффициентов.

2.Какие показатели качества АС рассматриваются в качестве исходных данных при синтезе? В чем различие порядков синтеза статических и астатических систем?

Для статических систем, ПФ разомкнутого контура которых имеет вид:

$$W(p) = \frac{K}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \ldots + a_1 p + 1}$$

в качестве исходных данных при синтезе задают:

- величину коэффициента статизма – S_0;
- время регулирования – t_p;
- величину перерегулирования - Δh_m.

Тогда коэффициент усиления K определится исходя из требований по величине статизма – S_0:

$$|S_0| = \left|\frac{-1}{1+K}\right|, \text{ откуда } \quad K = \frac{1 - S_0}{S_0}.$$

Коэффициенты полинома знаменателя ПФ $W(p)$ – a_i определяются из табл. №1 в зависимости от порядка исходной системы – n.

Переходные характеристики АС с табличными коэффициентами a_i в передаточных функциях разомкнутых контуров будут иметь перерегулирование $\Delta h_m < 5\%$.

Таблица №1.

n	t_p	a_1	a_2	a_3	a_4
2	2,9	$\frac{1{,}38(1+K)}{\Omega}$	$\frac{1+K}{\Omega^2}$	—	—
3	4,4	$\frac{2{,}39(1+K)}{\Omega}$	$\frac{2{,}05(1+K)}{\Omega^2}$	$\frac{1+K}{\Omega^3}$	—
4	4,6	$\frac{2{,}8(1+K)}{\Omega}$	$\frac{3{,}8(1+K)}{\Omega^2}$	$\frac{2{,}6(1+K)}{\Omega^3}$	$\frac{1+K}{\Omega^4}$

3. Порядок синтеза статической АС МСК:

1). Выбирают вид передаточной функции разомкнутой цепи $\tilde{W}(p)$

2). Определяют значения коэффициента усиления K

$$K = \frac{1 - S_0}{S_0}.$$

3). Вычисляют значение среднегеометрического корня

$$\Omega = \frac{t_p \Omega}{t_p}.$$

4). Вычисляют необходимое значение коэффициентов $a_1, \ldots, a_n$ по формулам таблицы 1 и составляют ПФ $W(p)$ разомкнутой системы, удовлетворяющую требованиям качества S_0 и t_p, Δh_m для замкнутой АС.

5). Приравнивая коэффициенты при равных степенях p знаменателей ПФ $W(p)$ и $\tilde{W}(p)$ определяют значения параметров элементов АС.

6). Проверяют качество АС с синтезированными параметрами.

4. В чем отличие синтеза МСК астатических систем от статических?

Синтез астатических систем отличается формулами вычисления a_i , причем для систем с различными порядками астатизма эти формулы различны. Например, для астатических систем первого порядка, передаточная функция разомкнутого контура которых имеет вид:

$$W(p) = \frac{K}{p(a_n p^{n-1} + a_{n-1} p^{n-2} + \ldots + a_2 p + 1)},$$

таблица расчета стандартных a_i имеет вид:

Таблица №2

n	$t_p\Omega$	K	a_2	a_3	a_4
2	2,9	$\frac{\Omega}{1{,}38}$	$\frac{1}{1{,}38\Omega}$	—	—
3	4,4	$\frac{\Omega}{2{,}39}$	$\frac{0{,}858}{\Omega}$	$\frac{1}{2{,}39\Omega^2}$	—
4	4,6	$\frac{\Omega}{2{,}8}$	$\frac{1{,}357}{\Omega}$	$\frac{0{,}929}{\Omega^2}$	$\frac{1}{2{,}8\Omega^3}$

Для астатических систем второго порядка, чтобы замкнутая АС была устойчива по структурному признаку, необходимо чтобы ПФ разомкнутой системы содержала форсирующее звено, т.е.:

$$W(p) = \frac{K(b_1 p + 1)}{p^2(a_n p^{n-2} + a_{n-1} p^{n-3} + \ldots + a_3 p + 1)}.$$

В данном случае необходимо вычислять a_i и b_i по соответствующим формулам, которые тоже сведены в таблицы.

При синтезе астатических систем МСК в качестве исходных данных выбирается один из двух показателей качества: либо величина коэффициента астатической точности S_i , где $i=1,\dots,n$ в зависимости от порядка астатизма, либо время регулирования t_p.

Если задан S_1, то K определяется по формуле $K=\frac{1}{S_1}$. Далее, используя таблицу, определяют Ω, а затем t_p.

Если задано t_p и известен порядок системы n, то по таблице 2 определяют Ω, а затем K системы.

Перерегулирование Δh_m при решении инженерных задач синтеза АС МСК в любом случае будет меньше 5%.

5. Чем объясняется ограниченное применение МСК на практике?

Для систем n – го порядка согласно МСК должно быть n варьируемых параметров (не меньше), что не всегда возможно. Кроме того, вычисленные значения параметров не всегда могут быть физически реализованы, т.к. стандартные переходные функции в значительной степени идеализированы, особенно по $\Delta h_m < 5\%$.

II. Решение задач.

Задача №1.

Передаточная функция разомкнутой системы имеет вид:

$$\tilde{W}(p)=\frac{K}{T^2p^2+2T\xi p+1}.$$

Определить значения параметров системы, при которых коэффициент статизма $S_0=0{,}02$, время регулирования $t_p\le 0{,}3c$ и перерегулирование $\Delta h_m \le 10\%$.

Решение:

1. Определим необходимое значение K:

$$K=\frac{1-S_0}{S_0}=\frac{1-0{,}02}{0{,}02}=49.$$

2. Вычислим значение среднегеометрического корня характеристического уравнения второго порядка разомкнутой системы:

$$\Omega=\frac{t_p\Omega}{t_p}=\frac{2{,}9}{0{,}3}\approx 10.$$

3. Вычислим необходимые значения коэффициентов a_i по формулам таблицы 1 для $n=2$:

$$a_1=\frac{1{,}38(1+K)}{\Omega}=\frac{1{,}38(1+49)}{10}=6{,}9;$$

$$a_2=\frac{1+K}{\Omega^2}=\frac{1+49}{100}=0{,}5.$$

Следовательно $$W(p)=\frac{49}{0{,}5p^2+6{,}9p+1}.$$

4. Составим алгебраическое уравнение, приравняв коэффициенты при одинаковых степенях p характеристических полиномов $W(p)$ и $\tilde{W}(p)$:

$$T^2p^2+2T\xi p+1+0{,}5p^2+6{,}9p+1;$$

$$T^2=0{,}5; \quad 2T\xi=6{,}9; \quad T=0{,}7; \quad \xi=\frac{6{,}9}{2T}=\frac{6{,}9}{1{,}4}\approx 5.$$

Следовательно, для удовлетворения требований качества системы параметры ПФ $\tilde{W}(p)$ должны быть:

$$K=49; \;\; T\cong 0{,}7; \;\; \xi=5.$$

Задача №2.

Передаточная функция разомкнутой АС имеет вид:

$$\tilde{W}(p)=\frac{K}{p(Tp+1)}.$$

Выбрать K и T так, чтобы время регулирования $t_p\leq o{,}5c$, а перерегулирование $\Delta h_m\leq 15\%$.

Решение:

1. Определим значение коэффициента усиления K.

Т. к. в задаче рекомендовано синтезировать систему по быстродействию ($t_p\leq 0{,}5c$), то коэффициент усиления определяется по таблице 2 (система астатична 1-го порядка).

$n=2;\;\; t_p\Omega=2{,}9$ откуда $\quad \Omega=\dfrac{2{,}9}{t_p}=\dfrac{2{,}9}{0{,}5}=5{,}8.$

Тогда $\quad K=\dfrac{\Omega}{1{,}38}=\dfrac{5{,}8}{1{,}38}\approx 4{,}2.$

2. Единственный коэффициент a_2 определим по формуле таблицы №2:

$$a_2=\frac{1}{1{,}38\Omega}=\frac{1}{1{,}38\cdot 5{,}8}\approx 0{,}125.$$

Следовательно, $\quad W(p)=\dfrac{4{,}2}{p(0{,}125p+1)}; \quad T=0{,}125c.$

Метод Лина.

Очевидно, что синтез МСК весьма прост для АС, характеристический полином ПФ в разомкнутом состоянии которых не выше второго порядка.

Рассмотрим пример синтеза статической АС, которая в разомкнутом состоянии описывается ПФ с характеристическим полиномом третьего порядка.

Задача №3.

Передаточная функция разомкнутой АС имеет вид:

$$\tilde{W}(p)=\frac{K}{(T_1^2p^2+2T\xi p+1)(T_2p+1)}.$$

Определить значения параметров АС, при которых она будет удовлетворять следующим показателям качества: $S_0=0{,}02$; $t_p\le 0{,}2c$; $\Delta h_m\le 10\%$.

Решение:

1. Определим необходимое значение K:

$$K=\frac{1-S_0}{S_0}=\frac{1-0{,}02}{0{,}02}=49.$$

2. Вычислим значение среднегеометрического корня основываясь на формулах таблицы 1 и учитывая, что $n=3$:

$t_p\Omega=4{,}4$, тогда $\Omega=\frac{t_p\Omega}{t_p}=\frac{4{,}4}{0{,}2}=22.$

3. Основываясь на формулах той же таблицы 1, вычислим значения коэффициентов a_i:

$$a_1=\frac{2{,}39(1+K)}{\Omega}=\frac{2{,}39(1+49)}{22}\approx 5{,}43;$$

$$a_2=\frac{2{,}05(1+K)}{\Omega^2}=\frac{2{,}05(1+49)}{22^2}\approx 0{,}212;$$

$$a_3=\frac{1+K}{\Omega^3}=\frac{1+49}{22^3}\approx 0{,}0047.$$

Следовательно $W(p)=\frac{49}{0{,}0047p^3+0{,}0212p^2+5{,}43p+1}.$

4. Определим параметры элементов АС T_1, T_2, ξ. Для этого приравняем коэффициенты характеристических полиномов ПФ $\tilde{W}(p)$ и $W(p)$:

$$T_1^2T_2p^3+(T_1^2+2T_1T_2\xi)p^2+(T_2+2T_1\xi)p+1=$$
$$=0{,}0047p^3+0{,}212p^2+5{,}43p+1;$$

$$\begin{cases} T_1^2T_2=0{,}0047; \\ (T_1^2+2T_1T_2\xi)=0{,}212; \\ T_2+2T_1\xi=5{,}43. \end{cases}$$

Решить данную систему нелинейных алгебраических уравнений очень сло-жно. Этих трудностей можно избежать, если применить к знаменателю ПФ $W(p)$ метод Лина, который позволяет разложить полиномы порядка $n\ge 3$ на элементарные множители вида:

(T_ip+1) и $(T_j^2p^2+2T_j\xi p+1)$ при $\xi<1$.

Данный метод реализовывается последовательными приближениями.

Попробуем выделить трехчлен вида $1+b_1p+b_2p$, а в частном получим r_0+r_1p. Для этого зададимся первым приближением:

$$b_{1_1} = \frac{a_2}{a_1} = \frac{0{,}212}{5{,}43} \approx 0{,}039;$$

$$b_{2_1} = \frac{a_3}{a_1} = \frac{0{,}0047}{5{,}43} \approx 0{,}000864.$$

Выполним деление $A(p)$ на трехчлен, начиная с младших членов:

$$\begin{array}{r|l} -\;1+5{,}43p+0{,}212p^2+0{,}0047p^3 & 1+0{,}039p+0{,}000864p^2 \\ \cline{2-2} 1+0{,}039p+0{,}000864p^2 \phantom{+0{,}0047p^3} & 1+5{,}39p \\ \hline -\;5{,}39p+0{,}2112p^2+0{,}0047p^3 & \\ 5{,}39p+0{,}2102p^2+0{,}00466p^3 & \\ \hline 0{,}001p^2+0{,}00004p^3 & \end{array}$$

При делении необходимо стремится к *min* остатку, поэтому уточним коэффициенты b_1 и b_2 исходя из полученного остатка по формулам:

$$b_{1_l} = \frac{a_{n-1} - r_{n-3} b_{2_{l-1}}}{r_{n-2}}; \quad b_{2_l} = \frac{a_n}{r_{n-2}},$$

где r_i – коэффициенты частного.

До тех пор, пока коэффициенты остатка не будут исчезающе малы (не более *1-2%* от соответствующих коэффициентов полинома *A(p))* необходимо уточнять коэффициенты b_1, b_2 и повторять деление, но не менее двух раз для того, чтобы убедится, что процесс сходится.

Выполним второе приближение:

$$b_{1_2} = \frac{a_{3-1} - r_{3-3} b_{2_{2-1}}}{r_{3-2}} = \frac{a_2 - r_0 b_{2_1}}{r_1} = \frac{0{,}212 - 1 \cdot 0{,}000864}{5{,}39} \approx 0{,}0391;$$

$$b_{2_2} = \frac{a_3}{r_1} = \frac{0{,}0047}{5{,}39} \approx 0{,}000871.$$

Разделим $A(p)$ на трехчлен с новыми коэффициентами:

$$\begin{array}{r|l} -\;1+5{,}43p+0{,}212p^2+0{,}0047p^3 & 1+0{,}0391p+0{,}000871p^2 \\ \cline{2-2} 1+0{,}0391p+0{,}000871p^2 \phantom{+0{,}0047p^3} & 1+5{,}39p \\ \hline -\;5{,}39p+0{,}2111p^2+0{,}0047p^3 & \\ 5{,}39p+0{,}21077p^2+0{,}004695p^3 & \\ \hline 0{,}0004p^2+0{,}000005p^3 & \end{array}$$

Т.е., остаток меньше *1-2%* от соответствующих коэффициентов $A(p)$ и процесс сходится.

В результате разложения по методу Лина полином $A(p)$ примет вид:

$$A(p)=(0{,}000871p^2+0{,}0391p+1)(5{,}39p+1).$$

Составляем алгебраические уравнения для определения T_1, T_2, ξ:

$$T_1^2=0{,}000871;\quad 2T_1\xi=0{,}0391;\quad T_2=5{,}39;$$

$$T_1=\sqrt{0{,}000871}\approx 0{,}0295;$$

$$\xi=\frac{0{,}0391}{2\cdot 0{,}0295}\approx 0{,}662.$$

Следовательно, для удовлетворения заданных требований к качеству АС параметры $\tilde{W}(p)$ должны быть:

$$\tilde{W}(p)=\frac{49}{(0{,}000871p^2+0{,}0382p+1)(5{,}39p+1)},$$

$$K=49;\quad T_1=0{,}0295{:}\quad \xi+0{,}664{:}\quad T_2=5{,}39.$$

2.11. Синтез последовательного КУ методом ЛЧХ.

В чем заключается сущность задачи синтеза?

Сущность задачи синтеза в широком смысле заключается в таком выборе структурной схемы системы и её параметров и таком конструкторском решении, при которых обеспечиваются требуемые показатели качества, а сама АС состоит из наиболее простых устройств управления.

1. Из каких элементов состоит АС?

В любую АС обычно входят объект управления и два типа устройств управления. К первому типу устройств обычно относятся исполнительные устройства, усилитель мощности и измерительное устройство, которое практически невозможно изменять в процессе синтеза систем. Ко второму типу относится корректирующее устройство и согласующий электронный усилитель, т.е. устройства, которые легко можно изменять в процессе синтеза.

АС можно разделить на две части:

Объект управления, исполнительное устройство, усилитель мощности и измерительное устройство – неизменяемая часть системы, и корректирующее устройство с согласующим усилителем – изменяемая часть системы.

Задачу синтеза АС обычно сводят к выбору лишь изменяемых устройств управления, а именно усилительных и корректирующих устройств. Эту задачу обычно называют задачей инженерного синтеза, которая впервые была поставлена и решена В.В.Солодовниковым на основе применения частотного метода с использованием ЛЧХ.

Итак, целью инженерного синтеза АС является определение структуры и параметров передаточной функции КУ, которые необходимо добавить к неизменяемой части системы, чтобы обеспечить требуемые показатели качества.

При синтезе КУ обычно предполагаются заданными объект управления, устройства управления неизменяемой части системы, а также показатели качества системы.

2. Какие основные этапы инженерного синтеза АС?

Частотный метод синтеза с использованием ЛЧХ включает в себя следующие этапы:

1) Определение структуры и параметров передаточной функции $W_н(p)$ нескорректированной системы.

2) Определение передаточной функции желаемой системы $W_{ж}(p)$, удовлетворяющей поставленным выше требованиям.

3) Выбор типа КУ и его параметров.

4) Проверка полученного решения.

Одним из основных параметров системы является коэффициент усиления K. Он определяется допустимой установившейся ошибкой $E_{уст}$. Поэтому синтез желаемой АС обычно начинается с выбора системы (если он не задан в ТТТ).

Если $W_н(p) = \dfrac{KQ(p)}{P^{\nu}B(p)}$, *где* $Q(0) = B(0) = 1$,

то $S(p) = -\dfrac{1}{1 + W_н B(p)} = S_0 + S_1 p + \cdots$

и для статической системы $\nu = 0$, $S_0 = 1/(1+K)$, а для астатической $\nu = 1$, $S_1 = 1/K$.

В следствие этого установившаяся ошибка будет

$$e_{x_{max}}(t) = \left|\frac{x(t)}{1+K}\right| \text{ при } \nu = 0 \text{ и } e_{x\,max}(t) = \left|\frac{\dot{x}(t)}{K}\right| \text{ при } \nu = 1.$$

Тогда $K = \left|\dfrac{x}{e_{x_{max}}} - 1\right|$ при $\nu = 0$ и $K = \left|\dfrac{\dot{x}}{e_{x_{max}}}\right|$ при $\nu = 1$.

где $x(t)$ и $\dot{x}(t)$ - заданные максимальные величины входного сигнала и его производной.

При синтезе КУ с использованием ЛЧХ в качестве основной динамической характеристики желаемой АС используется ЛАЧХ разомкнутой системы, называемая желаемой ЛАХ.

Теоретической основой рекомендаций для построения $L_{ж}(\omega)$ является связь ЛАХ разомкнутой системы с показателями качества замкнутой системы. С этой точки зрения можно выделить три области:

- область низких частот $L_{нч}(\omega)$ $0 \le \omega \le 0{,}1\omega_c$
- область средних частот $L_{ср}(\omega)$ $0{,}1\omega_c \le \omega \le 10\omega_c$
- область высоких частот $L_{вч}(\omega)$ $10\omega_c \le \omega \le \infty$.

Параметры $L_{нч}(\omega)$ и особенно её первой асимптоты определяют точность АС в установившемся режиме, а именно ордината первой асимптоты при $\omega = 1$ определяет общий коэффициент усиления разомкнутой системы K, который и определяет $e_{уст}(t)$ при заданном $x(t)$. Наклон первой асимптоты $\alpha = -\nu\, 20$ *дб/дк* определяет порядок астатизма системы по отношению к заданному воздействию.

Параметры $L_{ср}(\omega)$ и особенно её средней части определяют такие показатели качества как t_p и Δh_m. Для типовых $L(\omega)$ (см. стенд) связь между их параметрами ω_1, ω_2, ω_3, μ и показателями качества устанавливается номограммами Чесната-Майера. В общем случае отметим следующие связи:

а) система имеет хорошее качество управления (малое Δh_m) если наклон отрезка ЛАХ, принадлежащего частоте среза и имеющего верхнюю границу ω_3, равен –20 дб/дк, а его длина не меньше одной декады, т.е.

$$\omega_3/\omega_2 \geq 10,\ \omega_3/\omega_c = (2\ldots4);$$

б) время регулирования обратно пропорционально частоте среза, т.е.

$$t_p \approx K_p/\omega_c,\ где\ K_p = 3\ldots12.\ \text{(расчетный)}$$

Параметры $L_{вч}(\omega)$ не имеют прямой связи с показателями качества и не влияют существенно на динамические свойства системы, а посему не нуждаются в коррекции.

При последовательном включении КУ передаточная функция прямого тракта (разомкнутой) желаемой АС будет иметь вид

$$W_ж(p) = W_{ку}(p)\, W_н(p),\ \text{откуда}\ W_{ку}(p) = \frac{W_ж(p)}{W_н(p)}$$

$$\text{или}\ L_{ку}(\omega) = L_ж(\omega) - L_н(\omega).$$

Данное соотношение и определяет условие простоты и реализуемости последовательного КУ, а именно:

а) последовательное КУ будет технически реализуемо, если наклон последней асимптоты $L_ж(\omega)$ будет равен наклону последней асимптоты исходной системы $L_н(\omega)$; (порядок n тот же)

в) последовательное КУ тем проще, чем больше совпадений частот сопряжений $\omega_{iж}$ и $\omega_{iн}$ соответственно $L_ж(\omega)$ и $L_н(\omega)$.

II. Правила и порядок синтеза последовательного КУ:

1. Из ТТТ к точности АС определить требуемое значение K разомкнутой АС и необходимый порядок астатизма ν.

2. С учетом полученных K и ν построить $L_н(\omega)$ низкочастотная асимптота которой и будет определять первую (низкочастотную) асимптоту $L_ж(\omega)$.

3. Построить среднечастотную асимптоту $L_ж(\omega)$. При этом:

– $\omega_{сж} = \dfrac{K_p}{t_p}$, где $K_p \approx K_0 \cdot \pi$ определяется по заданным в ТТТ значениям t_p и Δh_m с помощью графика $\omega_c t_p = f(\Delta h_m)$;

– частота $\omega_{сж}$ наносится на оси частот и через неё проводится среднечастотная асимптота с наклоном –20 дб/дк;

– с учетом условий

$\frac{\omega_{зж}}{\omega_{2ж}} \geq 10$; $\frac{\omega_{зж}}{\omega_{2ж}} = (2...4)$ определяются её допустимые границы.

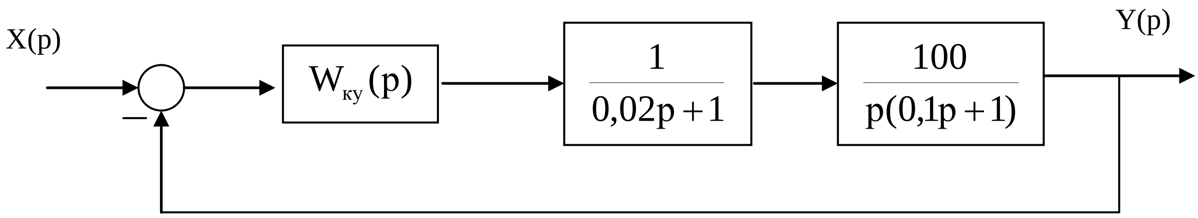
4. Из условия обеспечения устойчивости замкнутой АС и простоты реализации КУ выполнить сопряжение низкочастотной и среднечастотной асимптот и построение высокочастотной асимптоты $L_{ж}(\omega)$.

5. Графическим решением уравнения $L_{ку}(\omega) = L_{ж}(\omega) - L_{н}(\omega)$ определить $L_{ку}(\omega)$. По виду $L_{ку}(\omega)$ определяется $W_{ку}(\omega)$.

6. Рассчитать схему технической реализации КУ.

II. Решение задачи.

Структурная схема АС с последовательным КУ имеет вид:



Определить параметры и рассчитать схему технической реализации КУ, чтобы замкнутая АС имела следующие показатели качества:

$e(t) = 0$, при $x(t) = const$; $t_p < 0,5\ c$; $\Delta h_m < 20\%$; $\Delta\varphi_з > \frac{\pi}{6}$.

($e(t) = 0,02$ *град.*, при $\dot{x}(t) = 2$ *град/с*).

Решение:

1. Строим $L_н(\omega)$ и анализируем удовлетворяет ли исходная замкнутая АС:
- заданным показателям качества?
- запасу устойчивости по фазе?

Т.к. $K = 100$, то $L(1) = 20\lg 100 = 40$, *дб.*

$\nu = 1$, т.к. по структурному признанию астатизма $W_н(p)$ содержит одно интегрирующее звено, а следовательно наклон низкочастотной асимптоты $L_н(\omega)$ будет –20 дб/дк.

$$\frac{1}{0{,}02} = 50c^{-1};\ \frac{1}{0{,}1} = 10c^{-1};$$ -апериодические звенья.

Низкочастотная асимптота $\varphi_н(\omega)$ определяется интегрирующим звено и равна $-\pi/2$.

Т.к. $\omega_{сн} \approx \omega_{\pi н}$, то исходная замкнутая АС неустойчива. Кроме того, даже если бы она была устойчива, т.к. $\omega_{сн}$ находится на участке с наклоном –40 дб/дк, то исходная не скорректированная АС обладала бы заведомо плохими показателями качества.

2. Поскольку коэффициент усиления АС задан $K = 100$, определим необходимый порядок астатизма желаемой системы:

– т.к. $e(t) = 0$ при $x(t) = const$, то $\nu = 1$, т.е. наклон первой асимптоты $L_{ж}(\omega)$ должен быть –20 дк/дб.

$$K = \frac{\dot{x}(t)}{e(t)} = \frac{2}{0{,}02} = 100 .$$

Т.к. $\omega_c < \omega_\pi$, то синтезированная замкнутая АС устойчива.

3. Строим асимптотическую $L_{ж}(\omega)$ и $\varphi_{ж}(\omega)$:

а) Строим низкочастотную асимптоту $L_{ж}(\omega)$ по данным пункта 2.

Т.к. коэффициент усиления и астатизм желаемой системы и исходной одинаковы, то низкочастотные асимптоты $L_{н}(\omega)$ и $L_{ж}(\omega)$ совпадают.

б) Строим среднечастотную асимптоту $L_{ж}(\omega)$:

-определяем ω_c по заданному $\Delta h_m < 20\%$

$$\omega_c \approx K_0 \frac{\pi}{t_p} = \left|\omega_c t_p = f(\Delta h_m) \rightarrow \omega_c t_p = 7\right| = \frac{7}{t_p} = \frac{7}{0{,}5} = 14{,}c^{-1}$$

Т.к. $t_p < 0{,}5c$, то выбираем $\omega_c \geq 14c^{-1}$, т.е. $\boldsymbol{\omega_c = 20c^{-1}}$.

- определяем допустимые границы, т.е. $\omega_{3ж}$ и $\omega_{2ж}$:

$\omega_3 \approx (2 \div 4)\ \omega_c\ \omega_3 \approx (2 \div 4)20 \approx 40 \div 80,\ c^{-1}$.

Из условия простоты реализации КУ выбираем $\boldsymbol{\omega_3 = 50{,}c^{-1}}$.

Левая граница среднечастотной асимптоты определяется из соотношения $\omega_2 \leq \omega_3/10 \quad \omega_2 \leq 50/10 = 5{,}c^{-1}$. Выбираем $\boldsymbol{\omega_2 = 5c^{-1}}$.

- через частоту $\omega_c = 20c^{-1}$ проводим среднечастотную асимптоту с наклоном – 20 дб/дк. Левая и правая границы $\omega_2 = 5c^{-1}$, $\omega_3 = 50{,}c^{-1}$.

в) Выполним сопряжение среднечастотной асимптоты с низкочастотной асимптотой:

Из условия обеспечения устойчивости замкнутой желаемой АС, *max* запаса устойчивости и простоты реализации КУ - сопрягаем среднечастотную и низкочастотную асимптоты с *min* наклоном прямой.

г) Строим высокочастотную асимптоту:

высокочастотная асимптота не оказывает существенного влияния на показатели качества АС, поэтому если не удается добиться точного совпадения высокочастотных $L_{ж}(\omega)$ с $L_{н}(\omega)$ на частоте $\omega_3 = 50c^{-1}$, то её проводят параллельно $L_{н}(\omega)$.

д) Построение $\varphi_{ж}(\omega)$ трудностей не вызывает.

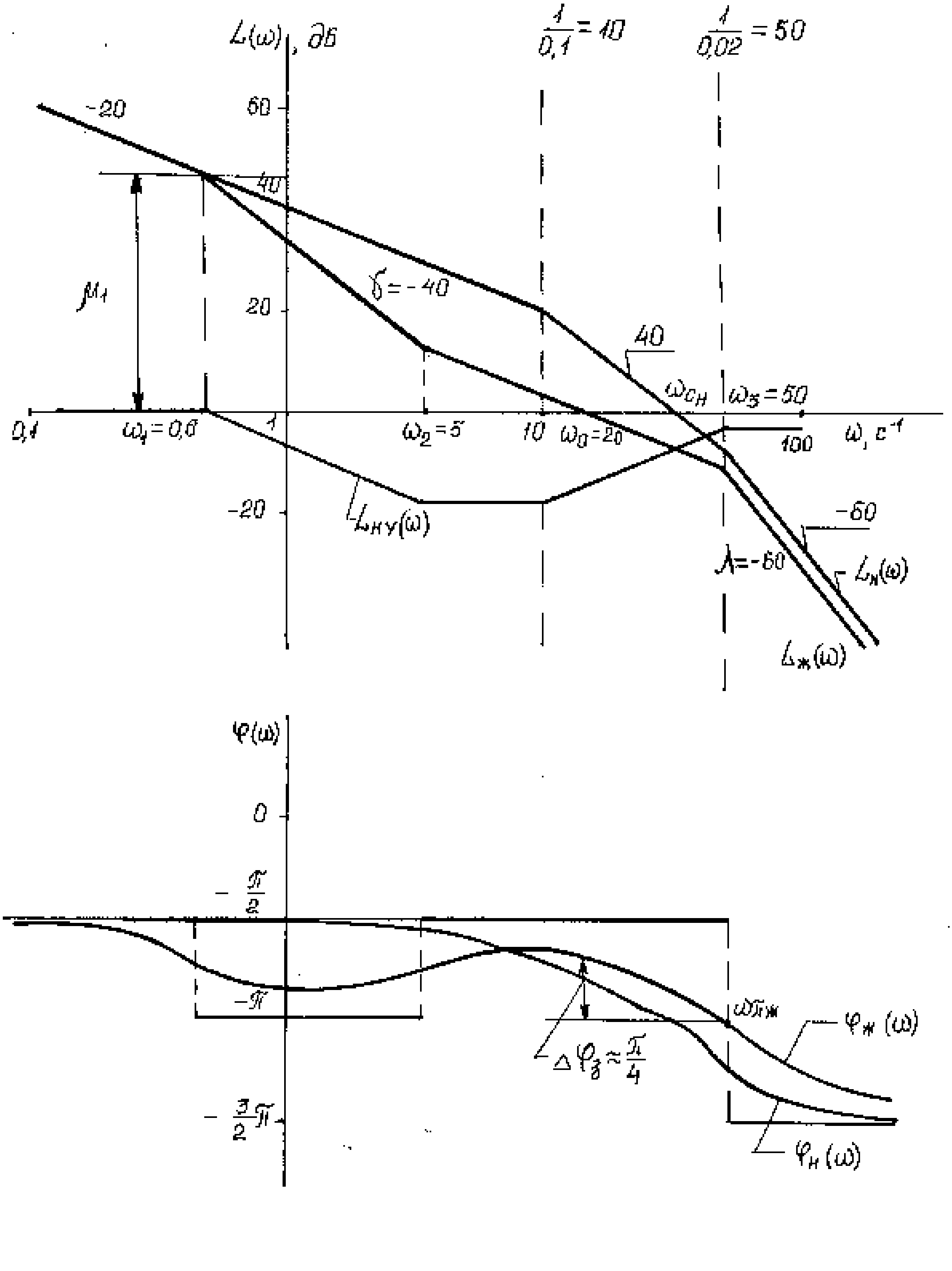
4. Проверим соответствие синтезированной АС с ЛАХ разомкнутой системы $L_{ж}(\omega)$ заданным показателям качества:

Данная задача решается приближенно, с помощью номограмм Чесната-Майера и при положительном результате показатели качества синтезированной АС уточняются более точными методами.

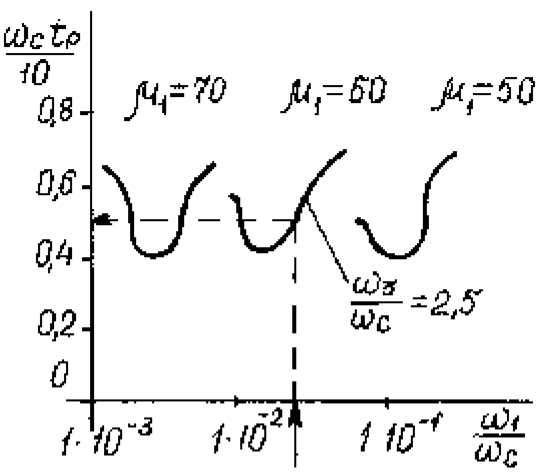
Чтобы воспользоваться номограммами, необходимо определить координаты входа в номограммы:

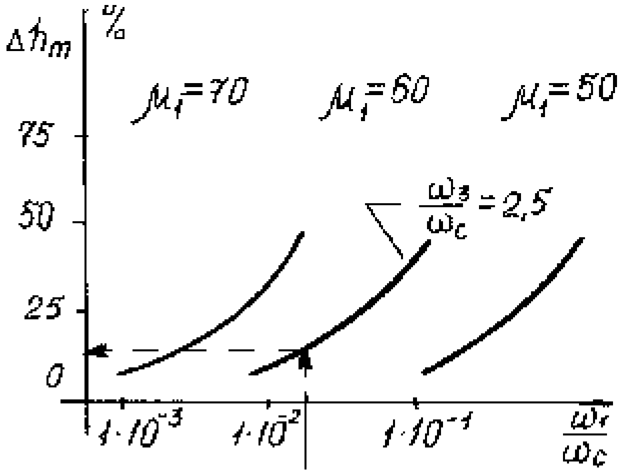
$$\mu_1 \approx 60\ дб;\ \gamma = -40;\ \lambda = -60;\ \frac{\omega_3}{\omega_c} = \frac{50}{20} = 2{,}5;\ \frac{\omega_1}{\omega_c} = \frac{50}{20} = 0{,}03;$$

По данным координатам отыскиваем нужную номограмму и определяем t_p и Δh_m системы



L(ω), дб
60
40
20
-20
-20
$\frac{1}{0,1}=10$
$\frac{1}{0,02}=50$
μ1
δ=-40
40
ωсн
ω3=50
0,1
ω1=0,6
1
ω2=5
10
ω0=20
100
ω, с-1
Lну(ω)
-60
λ=-60
Lн(ω)
Lж(ω)
φ(ω)
0
$-\frac{\pi}{2}$
$-\pi$
$-\frac{3}{2}\pi$
ωπж
φж(ω)
$\Delta\varphi_з\approx\frac{\pi}{4}$
φн(ω)





$$\frac{\omega_1}{\omega_c} = 0{,}03 \qquad\qquad \frac{\omega_1}{\omega_c} = 0{,}03$$

$$\frac{\omega_c t_p}{10} \approx 0{,}5 \;\; t_p = \frac{5}{20} = 0{,}25c; \;\; \Delta h_m \approx 15\%;$$

Т.о. получили, что

$$t_p < t_{p\ зад.} = 0{,}5c$$

$$\Delta h_m < \Delta h_{m\ зад.} = 20\%$$

Т.е. синтезированная замкнутая АС по этим показателям качества удовлетворяет требованиям ТЗ на проектируемую систему.

Запас устойчивости по фазе $\Delta\varphi_з$ определяем по $\varphi_{ж}(\omega)$ на частоте ω_c:

$$\Delta\varphi_з \approx \frac{\pi}{4} > \Delta\varphi_{з\,зад} = \frac{\pi}{6}.$$

5. Определим передаточную функцию КУ:

Графическим решением уравнения

$$L_{ку}(\omega) = L_{ж}(\omega) - L_{н}(\omega)$$

Определяем $L_{ку}(\omega)$. По виду $L_{ку}(\omega)$ определим $W_{ку}(p)$.

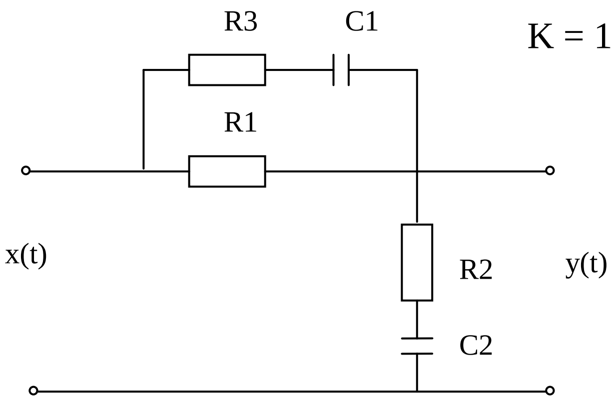
$$W_{ку}(p) = \frac{K(T_2 p + 1)(T_3 p + 1)}{(T_1 p + 1)(T_4 з + 1)}; \; K = 1;$$

$$T_2 = \frac{1}{5}; \; T_3 = \frac{1}{10}; \; T_1 = \frac{1}{6}; \; T_4 = \frac{1}{50};$$

$$W_{ку}(p) = \frac{(0{,}2p + 1)(0{,}1p + 1)}{(1{,}66p + 1)(0{,}02p + 1)}.$$

6.Рассчитает схему технической реализации КУ:

По виду $L_{ку}(\omega)$ из таблицы типовых КУ выбираем соответствующие КУ, реализованное на R-C элементах:



K = 1

$$T_2 = R2 \cdot C2$$
$$T_3 = \frac{R1 + R3}{C1}$$
$$T_1 T_4 = C_1 C_2 (R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3)$$
$$T_1 + T_4 = (R_1 + R_3) C_1 \, (R_1 + R_2) C_2$$

Задаваясь гостированным значением одного из параметров, например $C_2=100мкФ$, получим

$$R_2 = \frac{T_2}{C_2} = \frac{0{,}2}{100} = 2кОм;$$
$$R_1 = 13{,}2\ кОм;$$
$$C_1 = 5\ мкФ;$$
$$R_3 = 100\ Ом.$$

2.12. Синтез параллельного КУ методом ЛАЧХ.

1. Достоинства параллельных КУ?

В АС средней и большой мощности для обеспечения заданных требований по точности и качеству управления применяются параллельные КУ, т.е. КУ, включенные в обратные связи внутренних контуров, т.к. последовательные КУ обладают двумя существенными недостатками:

- высокие требования к стабильности параметров КУ;
- наличие дифференцирующих звеньев приводит к увеличению уровня широкополосных помех, которые перегружают оконечные каскады, создают нелинейный режим работы АС. Данные недостатки последовательного КУ и ограничивают возможность их применения в АС средней и большой мощности.

При удачном выборе параллельного КУ динамические свойства звена, охваченного обратной связью, определяются динамическими свойствами КУ.

Т.о., основными достоинствами параллельного КУ являются:

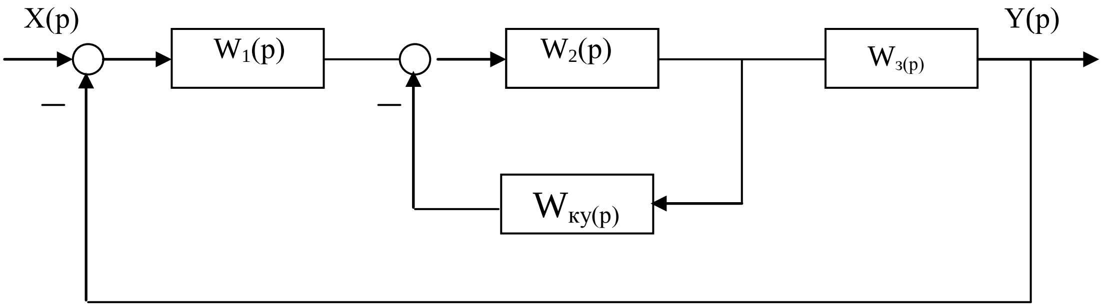
1). Применение параллельных КУ позволяет уменьшить зависимость качества АС от изменения ее параметров (звена, охваченного обратной связью с КУ)

2). Нелинейные характеристики элементов, охваченных ОС, линеаризуются, т.к. передающие свойства такого звена определяются параметрами контура ОС, т.е. параметрами параллельного КУ.

3). Выходными сигналами параллельного КУ является мощные сигналы оконечных каскадов АС, поэтому нет необходимости в их усилении.

4). Значительно меньший, по сравнению с последовательным КУ, уровень высокочастотных помех.

2. Сущность синтеза параллельного КУ?



Передаточная функция желаемой разомкнутой системы будет:

$$W_к(p)=\frac{W_1(p)W_2(p)W_3(p)}{1+W_2(p)W_{ку}(p)}=W_1(p)\overline{W_2}(p)W_3(p),$$

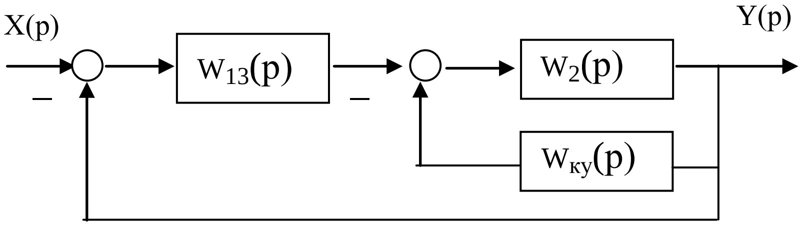
где

$$\overline{W_2}(p)=W_2(p)\frac{1}{1+W_2(p)W_{ку}(p)}=W_2(p)\overline{W_{ку}}(p).$$

Т.о., сущность синтеза параллельного КУ вытекает из возможности замены последовательного КУ $W_{ку}(p)$ эквивалентным параллельным КУ $W_{ку}(p)$.

3.Синтез параллельного КУ методом ЛАХ?

Структуру скорректированной системы можно представить в виде:



Тогда для разомкнутой системы:

$$W_ж(p)= W_{13}(p)\overline{W_2}(p),\ где\ \ W_{13}(p)= W_1(p)\ W_3(p).$$

Тогда $\qquad L_ж(\omega)= L_{13}(\omega)+\overline{L}_2(\omega).$

Для того, чтобы найти $L_{ку}(\omega)$ и $W_ж(p)$ рассмотрим более подробно связь частотной характеристики внутреннего контура $\overline{W_2}(j\omega)$ с частотными характеристиками $W_2(j\omega)$ и $W_{ку}(j\omega)$:

$$W_ж(p)= W_{13}(p)\cdot\overline{W_2} = W_{13}(p)\ W_2(p)\overline{W_{ку}}(p)= W_{13}(p)\ W_2(p)\cdot\frac{1}{1+W_2(p)W_{ку}(p)}.$$

Рассматривают два частных случая:

а) $$\left|W_2(j\omega)W_{ку}(j\omega)\right| << 1.$$

Тогда $$\left|W_{ку}(j\omega)\right|\cong 1,\ \overline{L}_{ку}(\omega)\cong 0,$$

$$|W_{ж}(j\omega)| = |W_{13}(j\omega)W_2(j\omega)| = |W_н(j\omega)|.$$

Следовательно, $L_{ж}(\omega)=L_н(\omega)$ и в этом случае:

$$L_2(\omega)+L_{ку}(\omega)<<0,\ L_{ку}(\omega)<<-L_2(\omega).$$

б) $$|W_2(j\omega)W_{ку}(j\omega)|>>1.$$

Тогда $$|W_{ку}(j\omega)| \cong \left|\frac{1}{W_2(j\omega)W_{ку}(j\omega)}\right|,$$

$$\overline{L}_{ку}(\omega)=-\lfloor L_2(\omega)+L_{ку}(\omega)\rfloor,$$

$$W_{ж}(j\omega)=W_{13}(j\omega)\cdot\frac{1}{W_{ку}(j\omega)}.$$

Следовательно,

$$L_{ж}(\omega)=L_{13}(\omega)-L_{ку}(\omega)<-L_н(\omega)$$

и в этом случае

$L_2(\omega)+L_{ку}(\omega)>>0,\ L_{ку}(\omega)>>-L_2(\omega),$ но при известной $L_{ж}(\omega)$в диапазоне частот, где $L_{ж}(\omega)<L_н(\omega)\quad L_{ку}(\omega)=L_{13}(\omega)-L_{ж}(\omega).$

Т.о. во всем диапазоне частот при параллельном КУ:

$$L_{ж}(\omega)\le L_н(\omega).$$

Если $L_{ж}(\omega)=L_н(\omega)$, то $\quad L_{ку}(\omega)<-L_2(\omega),$

Если $L_{ж}(\omega)<L_н(\omega)$, то $\quad L_{ку}(\omega)>-L_2(\omega),$

Данные соотношения накладывают на желаемую ЛАХ при параллельном способе коррекции следующие ограничения из условия реализуемости и простоты КУ:

1) параллельное КУ будет реализовано, если во всем диапазоне частот

$$L_{ж}(\omega)\le L_н(\omega).$$

2) параллельное КУ будет тем проще, чем больше будет совпадений частот сопряжений $L_{ж}(\omega)$ и $L_{13}(\omega)$ в диапазоне частот где $L_{ж}(\omega)<L_н(\omega)$.

4. Порядок синтеза параллельного КУ?

1). Построить ЛАХ неизменной частоты системы $L_н(\omega)$,$L_{13}(\omega)$ и $-L_2(\omega)$. Методика построения $L_н(\omega)$ ничем не отличается от методики построения ЛАХ разомкнутой системы.

2). Построить желаемую ЛАХ разомкнутой системы.

Методика построения ЖЛАХ аналогична методике построения $L_{ж}(\omega)$ в случае последовательного КУ. При этом исходя из условий реализуемости и простоты параллельного КУ , необходимо:

– по возможности обеспечить $L_{ж}(\omega)=L_н(\omega)$ на низких и высоких частотах, т.к. в этом случае $L_{ку}(\omega)$ может иметь произвольный вид, ограничиваясь лишь условием

$$L_{ку}(\omega)<-L_2(\omega);$$

– для области частот, где $L_{ж}(\omega)<L_н(\omega)$, то возможности обеспечить совпадение частот сопряжения $L_{ж}(\omega)$ и $L_{13}(\omega)$.

3). Проверить выполнение условия $L_{ж}(\omega)\le L_н(\omega)$ на всем диапазоне частот.

Если это условие нарушается, то следует увеличить коэффициент усиления исходной разомкнутой системы *К* до значений K^*, обеспечивающего выполнение данного условия.

Общий коэффициент усиления следует увеличить за счет K_y элементов с передаточной функцией $W_2(p)$, до K_y^*. Это выполняется следующим образом:

– $L_н(\omega)$ перемещается параллельно вверх до положения $L_н^*(\omega)$ удовлетворяющего на всем диапазоне частот условию $L_{ж}(\omega) \le L_н^*(\omega)$;

– по первой асимптоте $L_н^*(\omega)$ определяется K_y^*;

– по значению K_y^* определяется $K_2^* и K_y^*$:

$$K_2^* = \frac{K^*}{K_1 \cdot K_3}, но K_2^* = K_y K_2, тогда K_y^* = \frac{K_2^*}{K_2}.$$

– строится $-L_2^* = L_{13}(\omega) - L_н^*(\omega)$, т.е. обратная ЛАХ элементов, охватываемых КУ, с коэффициентом усиления K_2^*.

4). Оценить устойчивость замкнутой АС, у которой ЛАХ разомкнутой системы $L_ж(\omega)$ и с помощью номограмм Чесната-Майера соответствие показателей качества требованиям ТЗ.

5). Определить $L_{ку}(\omega)$ и $W_{ку}(p)$ параллельного КУ исходя из:

– для областей частот где $L_ж(\omega)=L_н(\omega)$ или $L_ж(\omega)= L_н^*(\omega)$,$L_{ку}(\omega)$ строится произвольно, но с учетом условия $L_{ку}(\omega)<-L_2(\omega)$ или $-L_2^*$ и простоты реализации КУ;

– для области частот где $L_ж(\omega)<L_н(\omega)$ или $L_ж(\omega)= L_н^*(\omega)$,$L_ж(\omega)$ определяется графическим решением уравнения

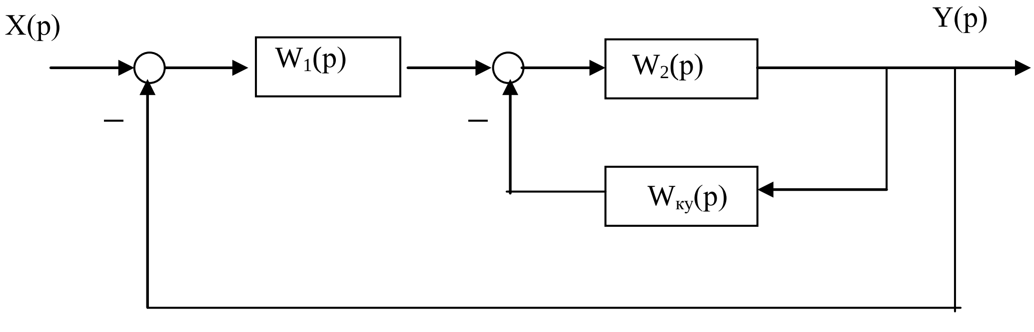
$$L_{ку}(\omega)=L_{13}(\omega)-L_ж(\omega).$$

По виду полученной $L_{ку}(\omega)$ находится $W_{ку}(p)$.

6). Определить и рассчитать схему технической реализации параллельного КУ.

II. Решение задач.

Структурная схема АС имеет вид



где $W_1(p)=\dfrac{1}{0.02p+1}$; $W_2(p)=\dfrac{K^2}{P(0,1p+1)}$.

Определить параметры параллельного КУ обеспечивающего работу АС со следующими показателями качества:

$$t_p < 0{,}5c\ ; \quad \Delta h_m < 20\%; \quad \Delta\varphi > \pi/6;$$

$$e(t)=0{,}02c^{-1} \quad \text{при} \quad \dot{x}_{max}(t)=2c^{-1} \quad \text{и } e(t)=0 \text{ при } x(t) = const.$$

Решение:

1. Определим величину коэффициента усиления разомкнутой системы исходя из условий, предъявляемых по точности к АС.

$$e(t)=S_0x(t)+ S_1x(t)+ S_2x(t)+\ldots,$$

т.к. $S_0x(t)=0$, то $\nu=1$ $e(t)=S_1x(t)$; $0{,}02= S_1\cdot 2$; откуда $S_1=0{,}01$;

В нашем примере $K=K_1\cdot K_2=1\cdot K_2$ и т.к. $\nu=1$, то $K=1/S_1$, или $K=x^{(1)}(t)/e(t)$:

$$K=\frac{1}{S_1}=\frac{x^{(1)}(t)}{e(t)}=\frac{2}{0{,}02}=100\,.$$

2. Убедиться в необходимости коррекции исходной АС. Для этого:

а) оценить устойчивость и запах устойчивости по фазе.

Устойчивость нескорректированной системы удобно оценить по второму следствию критерия Найквиста, т.к. исходная АС нейтральна в разомкнутом состоянии. Строим ЛАХ разомкнутой системы $L_н(\omega)$ и анализируем соотношение ω_c и ω_π, а также вычисляем $\Delta\varphi_з$ (см.рис.на Л7).

Исходная АС оказалась неустойчивой, т.к.

$$\omega_{сн} > \omega_{\pi н},$$

следовательно, необходима коррекция.

Если бы исходная АС оказалась устойчивой с удовлетворительным $\Delta\varphi_з$, то необходимо:

б) оценить показатели качества $e(t)$, t_p, Δh_m и т.д.

Т.к. наклон асимптоты ЛАХ нескорректированной система, на которой находится $\omega_{сн}$ -40дб/дк, то исходная АС обладает заведомо неудовлетворительными показателями качества t_p и Δh_m. По $e(t)$ исходная АС нас удовлетворяет, т.к. при выборе K мы исходим из $e(t)_{max}$.

Если бы наклон среднечастотной асимптоты был -20дб/дк, то для оценки качества АС можно воспользоваться номограммами либо определить:

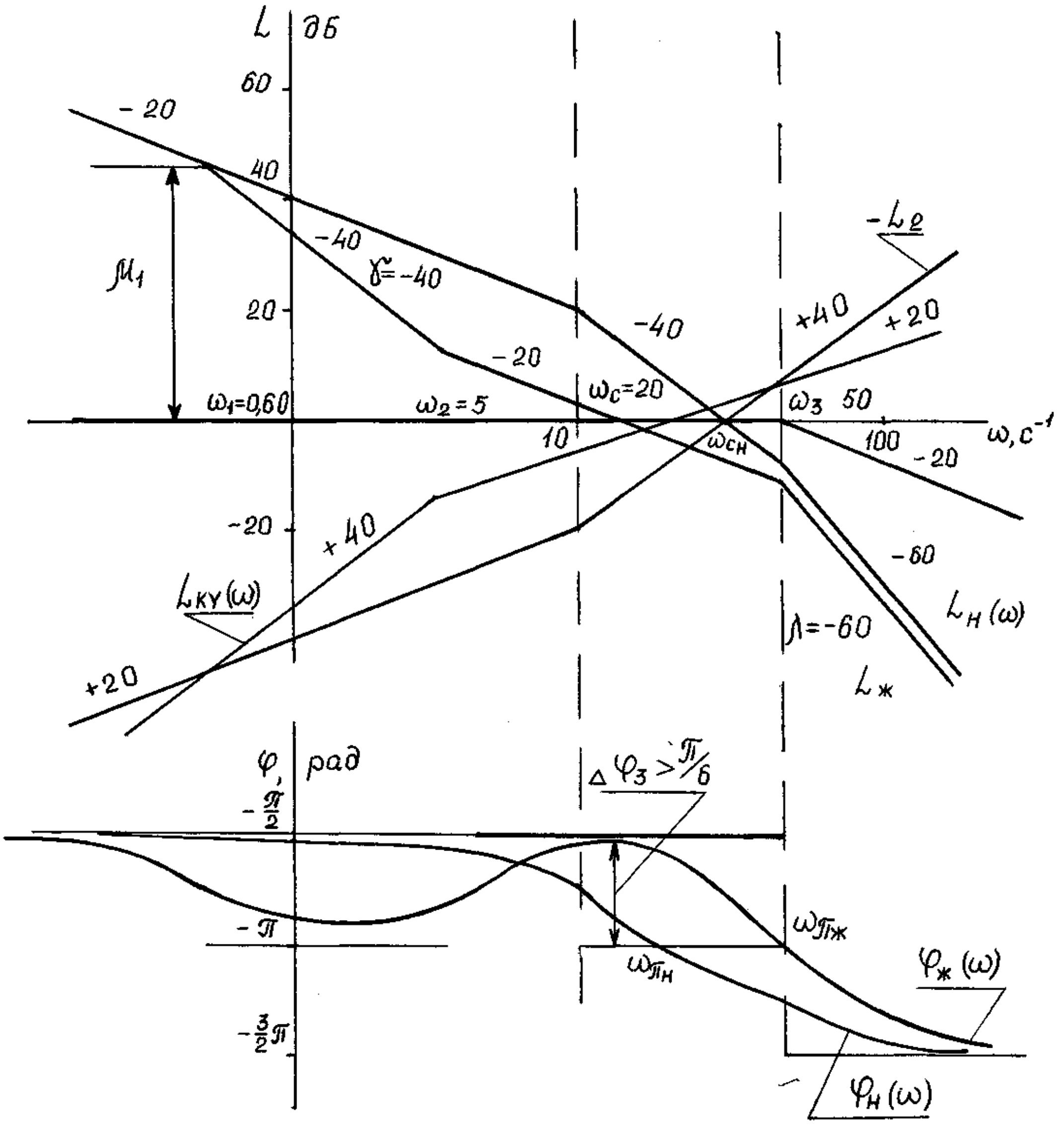
$$H(p)=\frac{\Phi(p)}{P}\Rightarrow h(t)=L^{-1}\left[H(p)\right] \begin{cases} \nearrow t_p \\ \searrow \Delta h \end{cases}$$

При устойчивой исходной АС сравнить $\Delta\varphi_{з,,}$), t_p, ,Δh_m с показателями качества в ТЗ и сделать вывод о целесообразности коррекции.

3. Построим ЛАХ желаемой системы, т.е. такой, которая обеспечивает требуемые показатели качества:

– так как полученные K и ν для исходной и желаемой систем одинаковы, то

$$L_{жн}(\omega)=L_{нн}(\omega),$$

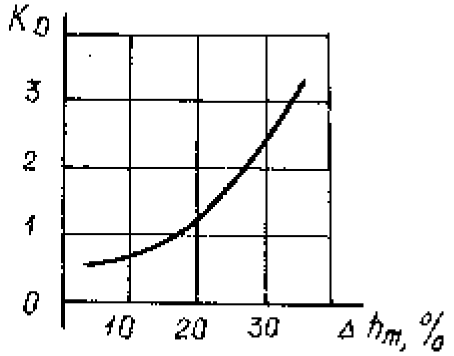


$$W_н(\omega)=\frac{100}{p(0{,}1p+1)(0{,}02p+1)};\ W_ж(\omega)=\frac{100(0{,}2p+1)}{p(1{,}66p+1)(0{,}02p+1)^2};$$

$$L(1)=20lg100=40,дб.$$

– строим среднечастотную асимптоту $L_{жс}(\omega)$:

а) определим *min* допустимую частоту среза ω_{cmin} из условия обеспечения заданного времени регулирования $t_p<0{,}5c$ и $\Delta h_m=20\%$.



$$\left(\omega_c = K_0 \frac{\pi}{t_h}\right) \qquad \omega_c t_p = j(\Delta h_m)\text{- из пособия по КП}$$

$$\left(\omega_{c\,min} = 1{,}2\frac{3{,}14}{t_{p\,max}} = 1{,}2 \cdot \frac{3{,}14}{0{,}5} = 7{,}5, c^{-1}\right)$$

$$\omega_{c\,min}\, t_{p\,max} \approx 7{,}5 \qquad \omega_{c\,min} \approx 15c^{-1}$$

С целью обеспечения $t_{p\,min}$ необходимо увеличить частоту среза.

Выбираем $\omega_c \approx 20c^{-1}$.

б) определяем допустимые границы, т.е. $\omega_{3ж}$ и $\omega_{2ж}$:

$$\omega_{3ж} \geq (2\text{-}4)\,.\,\omega_{сж}; \quad .\ \omega_3 \geq 40\text{-}80,\ c_{-1}$$

Из условия простоты реализации КУ выбираем

$$\omega_{3=}\,\omega_{сопр} = 50,\ c^{-1}$$

Левая граница среднечастотной асимптоты определяется из соотношения

$$\omega_{2ж} \leq \omega_3/10, \quad \omega_2 \leq 5,\ c^{-1}$$

Выбираем $\omega_2 = 5,\ c^{-1}$

в) через частоту $\omega_c = 20c^{-1}$ проводим среднечастотную асимптоту с наклоном *–20дб/дк*. Левая и правая границы: $\omega_2 = 5,\ c^{-1};\ \omega_{3=}50\ c^{-1}$:

- выполним сопряжение среднечастотной асимптоты с низкочастотной.

Данное сопряжение осуществляется прямой с *min* возможным наклоном, что обеспечит max запас устойчивости по фазе желаемой АС

- строим высокочастотную асимптоту.

Высокочастотная асимптота не оказывает существенного влияния на качество системы, поэтому, если не удается добиться точного совпадения высокочастотных $L_ж(\omega)$ с $L_н(\omega)$ на частоте $\omega_3 = 5,\ c^{-1}$, то ее проводим параллельно $L_н(\omega)$.

- строим $\varphi_ж(\omega)$.

4. С помощью номограмм Чесната-Майера определяем Δh_m и t_p, предварительно оценив устойчивость, и $\Delta\omega_з$ синтезированной системы.

$$\omega_{сж} <.\ \omega_{\pi ж,} \text{ – АС устойчива}{}_{,}\ \Delta\omega_з > \pi/6.$$

Определим параметры входа в номограммы:

μ_1=50 дб, γ=-40дб/дк, λ=-60дб/дк, $\frac{\omega_1}{\omega_c}=0{,}03$, $\frac{\omega_3}{\omega_c}=2{,}5$.

По этим данным входим в соответствующие номограммы из которых определяем

$$\frac{\omega_c t_p}{10}\approx 0{,}5 \rightarrow t_p \approx 0{,}25; \Delta h_m \approx 15\% .$$

Следовательно: $t_p=0{,}25<t_{p\ зад}= 0{,}5\ c,\quad \Delta h_m=15\%<\Delta h_{m\ зад}=20\%.$

Т.о. синтезированная АС по всем показателям качества удовлетворяет требованиям ТЗ на проектируемую систему.

5. Определяем $L_{ку}(\omega)$ и $W_{ку}(\omega)$ параллельного КУ.

Для диапазонов частот, где $L_{ж}(\omega)=L_{ж}(\omega)$

$$L_{ку}(\omega) \leq -L_2(\omega)$$

С целью упрощения КУ частоты сопряжения ω_1 и ω_3 можно не учитывать.

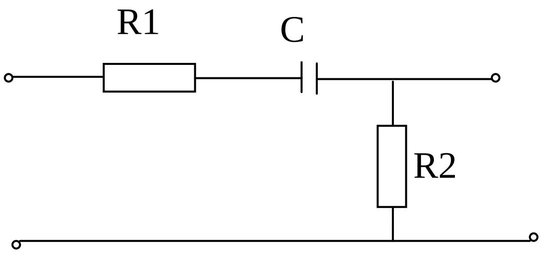
По виду $L_{ку}(\omega)$ запишем передаточную функцию полученного параллельного корректируюшего устройства.

$$W_{ку}(p)=\frac{KP^2}{T_2P+1}=P\cdot\frac{KP}{T_2P+1}.$$

С помощью справочника подбираем электрическую схему реализации КУ и рассчитываем ее параметры::

-дифференцирующее звено реализуется обычно с помощью тахогенератора;

$W_p=\frac{KP}{T_2P+1}$ реализуется на пассивных R–·C цепочках:



$K=R_2C$

$T_2=(R_1+R_2)C.$

Задаваясь значением одного из параметров электрической цепи из единого ряда, можем вычислить два других параметра.

Вывод: в качестве параллельных КУ обычно применяются фазоопережающие звенья, которые вводят в прямой тракт АС производные от выходного сигнала устройства, охваченного внутренней обратной связью. В результате уменьшается отрицательное фазовое смещение, возникающее в разомкнутой АС. Это позволяет увеличить запас устойчивости и быстродействия системы.

С целью достижения физической реализуемости полученного КУ нужно учитывать инерционность тахогенератора, либо, не нарушая правила, что для частот где $L_{ж}(\omega)=L_{ж}(\omega)$ $L_{ку}<- L_2,$ в передаточную функции $W_{ку}(p)$ ввести инерционные звенья.

2.13. Основы линеаризации дифференциальных уравнений нелинейных АС.

В общем случае любая АС является нелинейной, т.е. к ней не применим принцип суперпозиции. Исследование же нелинейных АС связано со значительными трудностями (работы А.М. Ляпунова и др.) , поэтому уже на этапе математического описания систем стараются линеаризовать их операторы. Для этого применяется метод линеаризации, позволяющий заменить точные нелинейные дифференциальные уравнения приближенными линейными дифференциальными уравнениями того же порядка.

Суть метода: рассматривается движение системы в малой окрестности одного конкретного движения, называемого *опорным.*

В качестве опорного может выступать установившееся движение АС.

Основные допущения метода линеаризации:

1. Величины, вызывающие отклонение фактического движения от опорного являются малыми, т.е. малыми являются:

$\Delta x(t)=x(t)-x^o(t)$; $f_i(t)\neq 0$; $\Delta y_{i_0}(t)=y_{i_0}(t)-y^o_{i_0}(t)$ (НУ).

2. Функции f_i (оператор АС) являются гладкими, т.е. дифференцируемы по всем аргументам в точке, соответствующей опорному движению.

При выполнении 1-го допущения, второе допущение определяет малость отклонения фактического движения от опорного: $\Delta y_i = y_{i-}y_i^o$.

Рассмотрим методику линеаризации на примере нелинейного дифференциального уравнения 2-го порядка, описывающего АС с одним входом и одним выходом:

$$F[y^{(2)}(t),y^{(1)}(t),y(t),x^{(1)}(t),x(t),f(t),t]=0, \qquad (1)$$

где $y(t)$ – выходной сигнал, $x(t)$ – входной сигнал, $f(t)$ – помеха.

За опорное движение принимаем установившееся движение системы, т.е.

$x(t)=x^o(t)$, $y(t)=y^o(t)$, $f(t)=0$, t – фиксированный параметр.

С учетом принятых допущений, функцию (1) можно разложить в ряд Тейлора:

$$F[y^{(2)}(t),y^{(1)}(t),y(t),x^{(1)}(t),x(t),f(t),t]=F[y^{(2)^o},y^{(1)^o}y^0,x^{(1)^o},x^o,0,t]+$$

$$+\left(\frac{dF}{dy^{(2)}}\right)^o\Delta y^{(2)}+\left(\frac{dF}{dy^{(1)}}\right)^o\Delta y^{(1)}+\left(\frac{dF}{dy}\right)^o\Delta y+\left(\frac{dF}{dx^{(1)}}\right)^o\Delta x^{(1)}+\left(\frac{dF}{dx}\right)^o\Delta x+$$

$$+\left(\frac{dF}{df}\right)^o f+\underbrace{\frac{1}{2!}\left(\frac{d^{(2)}F}{dy^{(2)}}\right)^o\Delta y^{(2)}+\frac{1}{2!}\left(\frac{d^2F}{dy^{(2)}y^{(1)}}\right)^o\Delta y^{(2)}y^{(1)}+\ldots}_{O_1}=0.$$

O_1–члены высшего порядка малости, которые полагаются равные нулю.

$F[y^{(2)^o},y^{(1)^o}y^0,x^{(1)^o},x^o,0,t]$ – уравнение опорного движения, из которого определяются координаты опорного движения.

Тогда линеаризованное дифференциальное уравнение системы будет иметь вид:

$$a_2\Delta y^{(2)} + a_1\Delta y^{(1)} + a_0\Delta y - b_1\Delta x^{(1)} - b_0\Delta x - cf = 0,$$

где $\left(\dfrac{dF}{dy^{(2)}}\right)^o = a_2;\quad \left(\dfrac{dF}{dy^{(1)}}\right)^o = a_1;\quad \left(\dfrac{dF}{dy}\right)^o = a_0;$

$$\left(\frac{dF}{dx^{(1)}}\right)^o = -b_1;\quad \left(\frac{dF}{dx}\right)^o = -b_0;\quad \left(\frac{dF}{df}\right)^o = -c.$$

Или в стандартной форме

$$a_2\Delta y^{(2)} + a_1\Delta y^{(1)} + a_0\Delta y = b_1\Delta x^{(1)} + b_0\Delta x + cf.$$

Т.к. t – фиксированный параметр, то коэффициенты линеаризованного уравнения представляют a_i собой константы. В общем случае они являются функциями времени $a_i(t), b_i(t), c_i(t),$ т.к. t входит в список аргументов функций f_i, а сам оператор АС при этом является нестационарным.

1. Оператор НАС записывается в виде [1];
2. По заданным значениям опорного входного сигнала $x^{(1)^o}, x^o$ и при отсутствии возмущения $f_i=0$ из уравнения опорного движения определяются координаты опорного выходного сигнала $y^{(2)^o}, y^{(1)^o}, y^o$.

3. Разлагаем в ряд Тейлора исходное линеаризуемое дифференциальное уравнение и на опорном движении определяем частные производные (при фиксированном t для стационарной АС):

$$\left(\frac{dF}{dy^{(2)}}\right)^o;\quad \left(\frac{dF}{dy^{(1)}}\right)^o;\ldots\left(\frac{dF}{df}\right)^o.$$

4. Записывается линейное дифференциальное уравнение АС (оператор АС) с вычисленными коэффициентами.

Примечание: если оператор АС задан системой дифференциальных уравнений, то указанные выше операции осуществляются по отношению к каждому уравнению системы.

Задача №1.

Оператор НАС имеет вид:

$$F=y^{(3)}(t)+2y^{(1)}(t)[1+y^{(2)}(t)]+[1+f(t)]y^{(1)}(t)+y(t)-x(t)=0.$$

За опорное принято движение с постоянной скоростью при $x^o(t)=2t+1$.

Требуется построить структурную схему линеаризованной системы.

Решение:

1. Оператор НАС запишем в виде [1]:

$$F[y^{(3)}(t),y^{(2)}(t),y^{(1)}(t),y(t),x(t),f(t)]=0.$$

2. Запишем уравнение опорного движения, вытекающее из исходного нелинейного оператора, и вычислим его координаты.

$$F^o = y^{(3)^o} + 2y^{(1)^o}[1+y^{(2)^o}] + [1+f^o]y^{(1)^o} + y^o - x^o = 0.$$

По условию $y^{(1)^o}(t) = const = a$, тогда $y^o(t)=at+b$, $y^{(2)^o} = y^{(3)^o} = 0$. Кроме того $f^o=0$. Неизвестными координатами опорного движения являются коэффициенты a и b. Тогда

$$F^o=0+2a[1+0]+[1+0]a+at+b-2t-1=0 \text{ или } 3a+b+at-2t-1=0.$$

Полученное равенство справедливо при любом t только тогда, когда коэффициенты при различных степенях переменной t в правой и левой частях равны.

$$\begin{array}{c|l} t^0 & 3a+b-1=0, \\ t^1 & a-2=0. \end{array}\Bigg\} \Rightarrow \quad \begin{array}{l} a=2; \\ b=-5. \qquad y^o(t)=2t-5. \end{array}$$

3. Разлагаем вряд Тейлора исходное дифференциальное уравнение и на опорном движении определяем значения частных производных:

$$\left(\frac{dF}{dy^{(3)}}\right)^o \Delta y^{(3)} + \left(\frac{dF}{dy^{(2)}}\right)^o \Delta y^{(2)} + \left(\frac{dF}{dy^{(1)}}\right)^o \Delta y^{(1)} + \left(\frac{dF}{dy}\right)^o \Delta y +$$

$$+\left(\frac{dF}{dx}\right)^o + \left(\frac{dF}{df}\right)^o f = 0 ....(т.к. \Delta f = f - f^o = f).$$

$$\left(\frac{dF}{dy^{(3)}}\right)^o = 1; \quad \left(\frac{dF}{dy^{(2)}}\right)^o = \left(2y^{(1)}\right)^o = 2a = 4;$$

$$\left(\frac{dF}{dy^{(1)}}\right)^o = 2\left(1 + y^{(2)^o}\right) + \left(1 + f^o\right) = 3; \quad \left(\frac{dF}{dy}\right)^o = 1; \quad \left(\frac{dF}{dx}\right)^o = -1;$$

4. Записываем линеаризованное дифференциальное уравнение в малых приращениях с вычисленными коэффициентами:

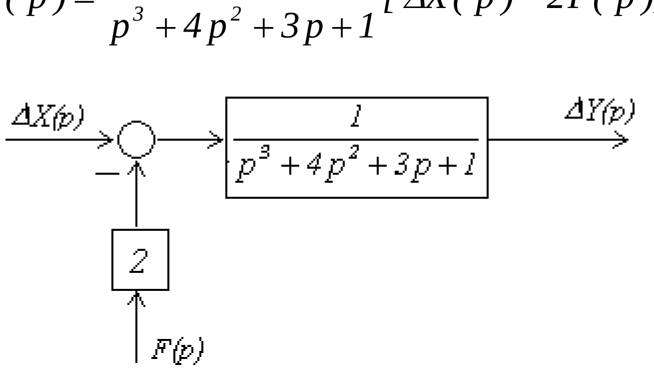
$$\Delta y^{(3)}(t) + 4\Delta y^{(2)}(t) + 3\Delta y^{(1)}(t) + \Delta y(t) = \Delta x(t) - 2f(t).$$

5. Построим структурную схему линеаризованной АС.

Оператор линейной системы в изображении по Лапласу при нулевых НУ ($\Delta y_0 = \Delta y_o^{(1)} = \Delta_0^{(2)} = \ldots = 0$) имеет вид:

$$(p^3+4p^{(2)}+3p+1)\Delta Y(p)=\Delta X(p)-2F(p);$$

$$\Delta Y(p) = \frac{1}{p^3+4p^2+3p+1}[\Delta X(p) - 2F(p)].$$



Задача №2.

Оператор НАС имеет вид:

$$\begin{cases} y_1^{(1)^2}(t) - 2y_1(t) + f^2(t) + 2 = 0, \\ y_2^{(1)}(t)[1 + f(t)] + y_1(t) - u(t) + y_2(t) + t = 0, \end{cases}$$

где u – управление (входной сигнал),

y_1, y_2 – выходы системы,

f – помеха (шумы) системы.

За опорное движение принимается движение системы с линейно изменяющимися фазовыми координатами:

$$y_1^o(t) = a_1 t + b_1; \quad y_2^o(t) = a_2 t + b_2; \quad \text{при} \quad u^o(t) = 2t + 1.$$

Требуется изобразить структурную схему линеаризованной АС.

Решение:

1. Определяем параметры опорного движения из исходной системы нелинейных уравнений: a_1, a_2, b_1, b_2.

Т.к. $y_1^o(t) = a_1 t + b_1$, то $y_1^o(t) = a_1$, аналогично $y_2^o(t) = a_2$.

$$\begin{cases} F_1(y_1^{(1)^o}, y_1^o, u^o, 0) = a_1^2 - 2(a_1 t + b_1) - 3(2t + 1) + 2 = 0, \\ F_2(y_2^{(1)^o}, y_2^o, y_1^o, u^o 0, t) = a_2(1 + 0) + (a_1 t + b_1) - (2t + 1) + (a_2 t + b_2) + t = 0, \end{cases}$$

($f^o = 0$ для опорного движения).

$$\begin{array}{l|l} t^0 & a_1^2 - 2b_1 - 1 = 0, \\ t^1 & -2a_1 - 6 = 0. \end{array} \Bigg\} \Longrightarrow \begin{array}{l} a_1 = -3; \\ b_1 = 4. \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} t^0 & a_2 + b_1 + b_2 - 1 + 0, \\ t^1 & a_1 + a_2 - 1 = 0. \end{array} \Bigg\} \Longrightarrow \begin{array}{l} a_2 = 1 - a_1 = 4; \\ b_2 = 1 - a_2 - b_1 = -7. \end{array}$$

Таким образом $\begin{array}{ll} y_1^o(t) = -3t + 4, & y_1^{(1)^o} = -3, \\ y_2^o(t) = 4t - 7, & y_2^{(2)^o} = 4. \end{array}$

2. Разлагаем систему нелинейных дифференциальных уравнений, описывающих НАС, в ряд Тейлора и определяем частные производные функций F_1 и F_2 на опорном движении:

$$\begin{cases} \left(\dfrac{dF_1}{dy_1^{(1)}}\right)^o \Delta y_1^{(1)} + \left(\dfrac{dF_1}{dy_1}\right)^o \Delta y_1 + \left(\dfrac{dF_1}{du}\right)^o \Delta u + \left(\dfrac{dF_1}{df}\right)^o f = 0; \\ \left(\dfrac{dF_2}{dy_2^{(1)}}\right)^o \Delta y_2^{(1)} + \left(\dfrac{dF_2}{dy_2}\right)^o \Delta y_2 + \left(\dfrac{dF_2}{dy_1}\right)^o \Delta y_1 + \left(\dfrac{dF_2}{du}\right)^o \Delta u = 0. \end{cases}$$

$$\left[\left(\dfrac{dF_2}{dt}\right) = 0, \quad \text{т.к. } t \text{ фиксировано.} \right]$$

$$\left(\dfrac{dF_1}{dy_1^{(1)}}\right)^o = 2(y_1^{(1)})^o = 6; \quad \left(\dfrac{dF_1}{dy_1}\right)^o = -2; \quad \left(\dfrac{dF_1}{du}\right)^o = -3; \quad \left(\dfrac{dF_1}{df}\right)^o = 2f^o = 0;$$

$$\left(\frac{dF_2}{dy_2^{(1)}}\right)^o = (1+f^o) = 1;\ \left(\frac{dF_2}{dy_2}\right)^o = 1;\ \left(\frac{dF_2}{dy_1}\right)^o = 1;\ \left(\frac{dF_2}{du}\right)^o = -1;$$

$$\left(\frac{dF_2}{df}\right)^o = (y_2^{(1)})^o = 4.$$

3. Записываем систему линеаризованных дифференциальных уравнений в малых приращениях с постоянными коэффициентами, описывающую движение линейной системы относительно выбранного опорного движения:

$$-6\Delta y_1^{(1)}(t) - 2\Delta y_1(t) = 3\Delta u(t);$$

$$\Delta y_2^{(1)}(t) + \Delta y_2(t) + \Delta y_1(t) = \Delta u(t) - 4f(t).$$

Или в операторной форме:

$$(-6p-2)\Delta Y_1(p)=3\Delta U(p);$$

$$(p+1)\Delta Y_2(p)+\Delta Y_1(p)=\Delta U(p)-4F(p).$$

2.14. Исследование устойчивости автоколебаний в нелинейных системах методом Гольдфарба.

1. Сущность метода гармонической линеаризации?

Сущность метода гармонической линеаризации заключается в распространении частотных методов на нелинейные системы. Для этого необходимо НЭ аппроксимировать посредством приближенной линейной передаточной функцией (ПФ) $W_н(p)$.

Указанная аппроксимация выполняется в частотной области путем разложения в ряд Фурье реакции НЭ на гармонический входной сигнал.

Для различных типов НЭ существуют аппроксимирующие ПФ:

$W_н(p,A) = \dfrac{4B}{\pi A}$ – идеальное реле;

$W_н(p,A) = \dfrac{4B}{\pi A}\sqrt{1-\dfrac{a^2}{A^2}}$, A$\geq a$ – реле с зоной нечувствительности (трехпозиционное реле);

$W_н(p,A) = \dfrac{4B}{\pi A}\sqrt{1-\dfrac{a^2}{A^2}} - j\dfrac{a}{A}$, A$\geq a$ – реле с зоной неоднозначности (двухпозиционное реле).

2. Что называется передаточной функцией (ПФ) НЭ?

ПФ НЭ называется отношение изображения по Лапласу первой гармоники выходного сигнала НЭ к изображения по Лапласу гармонического входного сигнала при нулевых н. у.

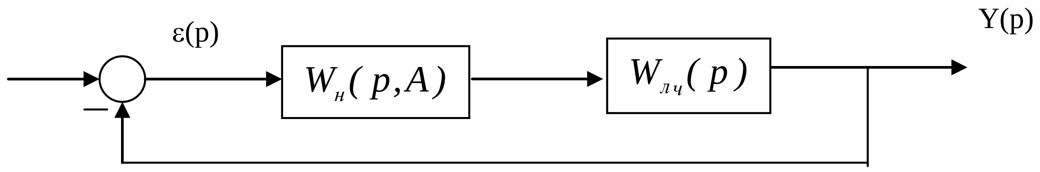
3. Что называется автоколебаниями (АК) в нелинейных АС и чем они характеризуются?

АК называется периодическое движение нелинейной АС с постоянной амплитудой A_a и частотой ω_a под действием постоянного, в том числе и нулевого входного сигнала.

АК характеризуются амплитудой A_a и частотой ω_a.

Для линейной АС, в состав которой включены гармонически линеаризованные НЭ, АК соответствуют нахождению ее на границе устойчивости.

Параметры АК A_a и ω_a аналитически можно определить из решения комплексного уравнения гармонического баланса (УГБ), которое, для указанной АС, имеет вид:



$$\varepsilon(p)=-Y(p),\ \text{при}\ X(p)=0. \quad Y(p)=\varepsilon(p)\cdot W_0(p); \Rightarrow W_0(p)=-1;$$
$$W_0(j\omega)=W_н(j\omega,A)\cdot W_{лч}(j\omega)=-1$$

Это уравнение эквивалентно двум скалярным равенствам:

- уравнению баланса амплитуд:

$$|W_н(j\omega),A|\cdot|W_{лч}(j\omega)|=1.$$

- уравнению баланса фаз:

$$\arg W_н(j\omega,A)+\arg W_{лч}(j\omega)=-\pi+2\kappa\pi,$$

где $\kappa=0;\ \pm1;\ \pm2\ldots$

Автоколебания в системе существуют, если управление гармонического баланса имеет решение.

4. Сущность графоаналитического метода Гольдфарба?

Метод Гольдфарба позволяет решить вопрос об устойчивости автоколебаний в системе.

При использовании метода Гольдфарба пользуются обратной частотной характеристикой гармонически линеаризованного НЭ:

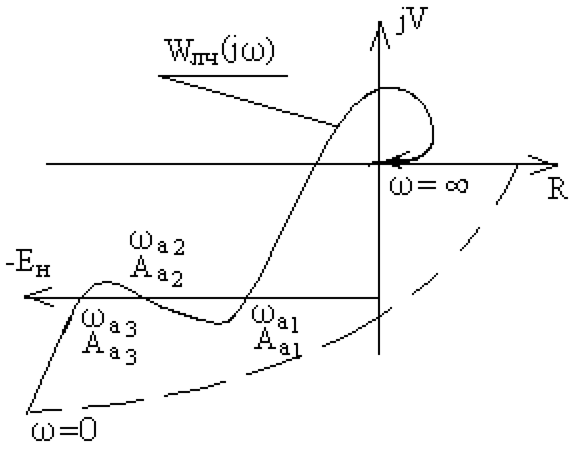
$$E_н(j\omega,A)=W_н^{-1}(j\omega,A).$$

Тогда управление гармонического баланса преобразуется к виду:

$$W_{лч}(j\omega)=-E_н(j\omega,A)$$

Графоаналитическому решению этого уравнения соответствует точка пересечения годографа линейной части АС, размеченного частотной, и годографа отрицательной обратной частотной характеристики НЭ, размеченного амплитудой.

Если указанные годографы не пересекаются, то автоколебания в системе отсутствуют.



Автоколебания с найденными параметрами A_{a_i}, ω_{a_i} будут устойчивыми, если годограф - $E_н(j\omega, A)$ при переходе через точку пересечения с годографом $W_{лч}(j\omega)$ выходит из области, охватываемой годографом $W_{лч}(j\omega)$.

Задача №1.

Передаточная функция линейной части АС имеет вид:

$$W_{лч}(p) = \frac{K}{Tp+1};$$

Определить выражение для АЧХ и ФЧХ.

1. $p \to j\omega$: $\quad W_{лч}(j\omega) = \dfrac{K}{1+jT\omega};$

2. $\cdot \left|W_{лч}(j\omega)\right| = \left|\dfrac{K}{1+jT\omega}\right| = \dfrac{|K|}{|1+jT\omega|} = \dfrac{K}{\sqrt{T^2\omega^2+1}}.$

3. $arg\ W_{лч}(j\omega) = arg\ K - arg\ (1+jT\omega) = -\ arctgT\omega.$

Задача №2.

Передаточная функция АС имеет вид:

$$W_{лч}(p) = \frac{2p+3}{(4p+1)^2};$$

Определить выражения для АЧХ и ФЧХ.

Решение:

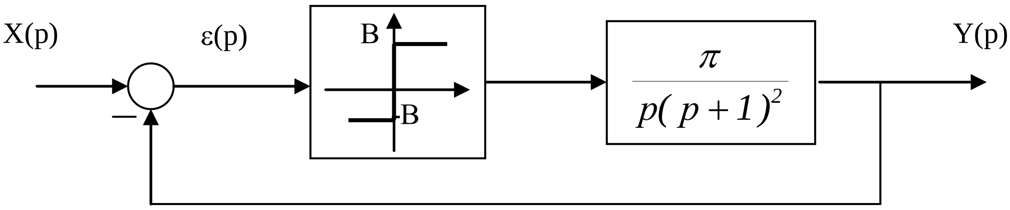
1. $p \to j\omega \quad W_{лч}(j\omega) = \dfrac{2j\omega+3}{(4j\omega+1)^2};$

2. $\cdot \left|W_{лч}(j\omega)\right| = \left|\dfrac{2j\omega+3}{(4j\omega+1)^2}\right| = \dfrac{|2j\omega+3|}{\left|(4j\omega+1)^2\right|} = \dfrac{\sqrt{4\omega^2+9}}{16\omega^2+1}.$

3. $arg\ W_{лч}(j\omega) = arg\dfrac{2j\omega+3}{(4j\omega+1)^2} = arg\ (2j\omega+3) - 2arg(4j\omega+1) = arctg\dfrac{2}{3}\omega -$ $arctg4\omega$

Задача №3.

Определить параметры устойчивых автоколебаний в АС, структурная схема которой имеет вид:



$$B=10,\ В\quad W_н(A)=\frac{4B}{\pi A}.$$

Решение:

1. Поскольку АФЧХ гармонически линеаризованного НЭ от частоты не зависит, то из уравнения баланса фаз определим частоту возможных автоколебаний:

$$ar\ W_н(j\omega,A)+ argW_{лч}(j\omega)= -\pi+2\kappa\pi,$$

т.к. $argW_н(j\omega,A)=0,$ а $argW_{лч}(j\omega)=arg\frac{\pi}{j\omega(1+j\omega)^2}$, то

$$arg\frac{\pi}{j\omega(1+j\omega)^2}=-\pi+2\kappa\pi,$$

$arg\pi - arg(j\omega) -2\ arg(1+j\omega)=-\pi+2\kappa\pi;$

$-\pi/2 - 2arctg\omega=-\pi+2\kappa\pi$

$arctg\omega=\pi/4 -\kappa\pi;\quad \omega=\omega_a=1,\ c^{-1}$

2. Подставив в уравнение баланса амплитуд частоту возможных автоколебаний в системе ω_a, определим амплитуду автоколебаний A_a:

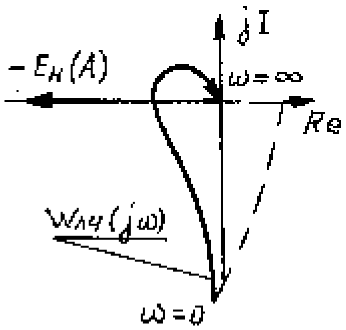
$$|W_н(j\omega),A|\cdot|W_{лч}(j\omega)|=1.$$

$$\frac{4B}{\pi A}\cdot\frac{\pi}{\omega_a(1+\omega_a^2)}=1;\ A=A_a=\left.\frac{4B}{\omega_a(1+\omega_a^2)}\right|_{\omega_{a=1}};$$

$$A_a=20,\ В.$$

3. Вопрос об устойчивости автоколебаний решается методом Гольдфарба. Для этого графически решается уравнение

$$W_{лч}(j\omega)=-\ E_н(j\omega,\ A).$$

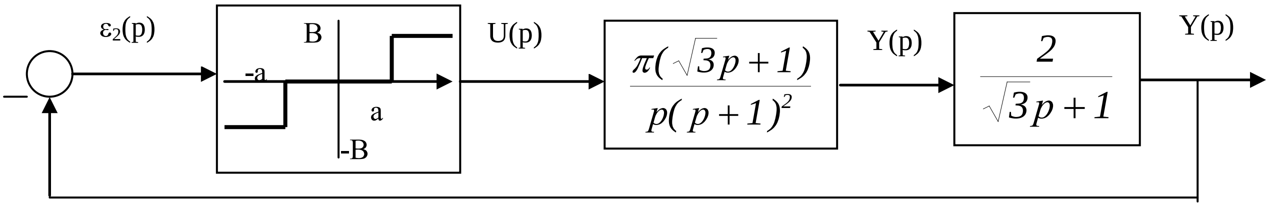


Единственная точка пересечения годографов - $E_н(A)$ и $W_{лч}(j\omega)$ с координатами (ω_a, A_a) и соответствует устойчивым автоколебаниям.

Примечание:
При единственном решении можно и не строить годографы.

Задача №4.

Определить параметры устойчивых автоколебаний в АС, структурная схема которой имеет вид:



$$B=0{,}25,\ В;\ a=0{,}3,\ В;\ W_н(A)=\frac{4B}{\pi A}\sqrt{1-\frac{a^2}{A^2}};$$

Решение:

1. Из уравнения балансов фаз определяем частоту автоколебаний для Y(p):

$$argW_н(A)+argW_{лч}(j\omega)=-\pi+2\kappa\pi,$$

где $argW_н(A)=0,$ а $W_{лч}(j\omega)=\dfrac{2\pi}{j\omega(1+j\omega)^2}.$

Тогда $argW_{лч}(j\omega)=arg\dfrac{2\pi}{j\omega(1+j\omega)^2}=-\pi+2\kappa\pi,$

$$-\pi/2-2arctg\,\omega=-\pi+2\kappa\pi;$$

Откуда $\omega=\omega_a=1.$

2. Подставив найденную частоту ω_a в уравнение баланса амплитуд, определим амплитуду АК-й для $Y(p)$:

$$|W_н(A)|\cdot|W_{лч}(j\omega)|=1;$$

$$\frac{4B}{\pi A}\cdot\sqrt{1-\frac{a^2}{A^2}}\cdot\left.\frac{2\pi}{\omega(1+\omega^2)}\right|_{\omega_{a=1}}=1;$$

откуда $A^2-a^2=A^4;$

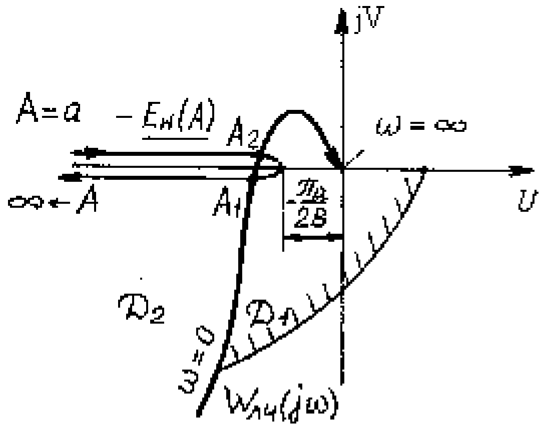
$A^4-A^2+a^2=0 \Rightarrow A^4-A^2+0{,}09=0;$

$A^2=0{,}5\pm0{,}4;\quad A_1^2=0{,}9;\quad A_2^2=0{,}1;$

Существующий считаются АК-я с положительной амплитудой, поэтому

$$A\approx0{,}95;\qquad A\approx0{,}34;$$

3. Методом Гольдфарба определяем параметры устойчивых АК-й:



Устойчивыми являются АК-я с большой амплитудой, т.е. $A_a = A_1 \approx 0{,}95$, т.к. годограф - $E_н(A)$ при увеличении амплитуды A выходит из области $Д_1$ в область $Д_2$.

III. Порядок решения задач.

1. Структурная схема системы приводится к виду, когда на НЭ воздействует гармонический входной сигнал. В этом случае его можно гармонически линеаризовать.

2. Строится приближенно АФЧХ линейной части системы.

3. Строится отрицательная обратная частотная характеристика линеаризованного НЭ - $E_н(A)$ и анализируются точки её пересечения с годографом АФЧХ на предмет существования в АС устойчивых автоколебаний.

Если пересечение годографов невозможно, то автоколебаний в системе не возникает.

Если приближенно построенные годографы имеют точку (или точку) пересечения, то решая последовательно уравнения баланса фаз или амплитуд определяют значения частоты (частот) и амплитуды (амплитуд) устойчивых автоколебаний.

Решение уравнения гармонического баланса можно искать как аналитически, так и графоаналитически.

4. Если необходимо, определяется амплитуда автоколебаний выходного сигнала исходной системы.

2.15. Определение передаточных функций дискретных АС на основе Z-преобразований.

1. Что называется ДАС?
2. Какая функция называется решетчатой?

$-\{x_i\} = \{x(t = iT)\} = \{x_0, x_1, x_2 ...\};$

$-\{x_i\} = \sum_{i=0}^{\infty} x_i \delta(t - iT).$

3. Чем описываются процессы, происходящие в дискретных АС?

В непрерывных системах процессы описываются дифференциальными уравнениями. Аналогом дифференциальных уравнений в импульсных АС являются разностные уравнения:

-первая разность $\{\Delta x_i\} = \{x_i\} - \{x_{i-1}\}, \quad \Delta x_0 = x_0;$

-разность n-ного порядка $\{\Delta^n x_i\} = \{\Delta^{n-1} x_i\} - \{\Delta^{n-1} x_{i-1}\} = \sum_{\kappa=0}^{n} \{x_{i-\kappa}\} C_n^\kappa (-1)^\kappa$,

где $C_n^\kappa = \dfrac{n!}{\kappa!(n-\kappa)!}$.

Аналогом процесса интегрирования в импульсных системах является операция дискретного Σ:

$\dfrac{1}{\Delta}\{x_i\} = \{\lambda_i\}$, где $\lambda_i = \sum_{\kappa=0}^{i} x_\kappa, \quad i = 0,1...$

4. Что называется Z-преобразованием?

Под Z-преобразованием решетчатой функции $\{x_i\}$ понимается степенной ряд относительно переменной z^{-i}, где $z=e^{pT}$.

$$Z[\{x_i\}] = X(z) = \sum_{i=0}^{\infty} x_i z^{-i}, \quad i = 0 \div \infty.$$

Тогда Z-преобразование последовательностей сдвинутых на κ тактов в сторону запаздывания или опережения:

$$Z[\{x_{i-\kappa}\}] = z^{-\kappa} X(z); \qquad Z[\{x_{i+\kappa}\}] = z^{\kappa} X(z);$$

Z-преобразование решетчатой функции κ-ой разности:

$$Z[\{\Delta^\kappa x_i\}] = (1 - z^{-1})^\kappa X(z).$$

Z – преобразование суммы числовой последовательности:

$$\left| Z\left[\frac{1}{\Delta}\{x_i\}\right] = \lambda(z) = \frac{X(z)}{1 - z^{-1}}.\right.$$

5. Что называется λ_p^Z-преобразованием?

Преобразованием λ_p^Z называется операция перехода от функции с комплексной переменной p к функции с комплексной переменной z.

$\lambda_p^Z[X(p)] = Z[\{L^{-1}(X(p))\}] = X(z).$

λ_p^Z-преобразование, так как и L^{-1} линейно, поэтому

$\lambda_p^Z[X(p)Y(p)] \neq \lambda_p^Z[X(p)] \cdot \lambda_p^Z[Y(p)] \cdot$

L^{-1}- обратное преобразование Лапласа, которое позволяет перейти от функции с комплексной переменной p к функции от времени t.

Методы обращения преобразования Лапласа:

а) прямой

$$y(t) = L^{-1}[Y(p)] = \frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} Y(p) e^{pt} dt,$$

где c- вещественное число

$j=\sqrt{-1}$ - мнимая единица.

б) табличный (в случае элементарных функций).

в) по теореме разложения:

$$Y(p)=\frac{B(p)}{A(p)}=\frac{в_m+в_{m-1}p+\cdots+в_0p^m}{a_n+a_{n-1}p+\cdots+a_0p^n}$$

- в случае когда корни p_i уравнения $A(p)=0$ простые:

$$y(t)=y_0\delta(t)+\sum_{i=1}^{n}C_ie^{p_it},$$

где $y_0\begin{cases}\dfrac{в_m}{a_n} & при \quad m\ge n\\ y_0=0 & при \quad m\le n\end{cases}$, $C_i=\left.\dfrac{B(p)}{A'(p)}\right|_{p=p_i}$, p_i – корни $A(p)=0$;

-в случае кратных корней необходимо исходную рациональную дробь $Y(p)$ разложить на элементарные дроби:

$$Y(p)=\frac{B(p)}{A(p)}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{к}\frac{в_ij}{(p-p_i)}=\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{в_{i_1}}{p-p_i}+\frac{в_{i_2}}{(p-p_i)^2}+\cdots+\frac{в_{iк}}{(p-p_i)^к}\right],$$

где $к$ – количество кратных корней, а затем воспользоваться таблицами λ_p^Z-преобразований,

6. Что называется Z-передаточной функцией дискретной и непрерывной части АС?

$W_Д(z)=\dfrac{Y(z)}{X(z)}$ - Z – передаточная функция дискретной части АС.

$\widetilde{W}_H(z)=\dfrac{Z[y(t)]}{Z[x(t)]}$ - Z – передаточная функция непрерывной части.

Z –передаточной функцией непрерывного элемента называется отношение Z-преобразования аналогового выходного сигнала к Z-преобразованию кусочно-постоянного входного сигнала. Применив Z-преобразование – получим:

$$\widetilde{W}_H(z)=(1-z^{-1})\,\lambda_p^Z\left[\frac{1}{p}W_H(p)\right].$$

Задача №1.

Определить Z-изображение функции

$$x(t)=1+2t^2-e^{-2t},\quad \text{если } T=0{,}2c.$$

Решение:

$$X(z)=Z[\{x_i\}]=Z[x(iT)];\qquad i=0,\ldots$$

1. Находим решетчатую функцию $\{x_i\}$:

$\{x_i\}=\{x_0, x_1, x_2, \ldots\}$,

$i=0\quad x_0=1+2(0\cdot 0{,}2)^2-e^{-2(0\cdot 0{,}2)}=0;$

$i=1\quad x_1=1+2(1\cdot 0{,}2)^2-e^{-2(0\cdot 0{,}2)}=1{,}08-e^{-0{,}4};$

$i=2\quad x_2=1+2(2\cdot 0{,}2)^2-e^{-2(0\cdot 0{,}2)}=1{,}32-e^{-0{,}8};$

$$\{x_i\}=\{0;\ 1{,}08-e^{-0{,}4};\ 1{,}32-e^{-0{,}8};\ \ldots\}.$$

2. $X(z)=\sum_{i=0}^{\infty} x_i z^{-1} = x_0 + x_1 z^{-1} + x_2 z^{-2} + ...$

$X(z)= 0+ (1{,}08- e^{-0{,}4})z^{-1}+(1{,}32- e^{-0{,}8})z^{-2}+....$

Задача №2.

Задан оператор ЦВМ:

$2y_i+5y_{i-1}-7y_{i-3}=0{,}5x_{i-2}+3x_{i-5}$.

Определить *W(Z)* ЦВМ.

Решение:

$$W_Д(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}.$$

1. Применим *Z*-преобразование к разностному уравнению, описывающему работу ЦВМ:

$2Y(z)+5z^{-1}Y(z)-7z^{-3}Y(z)=0{,}5\, z^{-2}X(z)+3\, z^{-5}X(z);$

$Y(z)[2+5z^{-1}-7z^{-3}]=X(z)[\,0{,}5z^{-2}+3z^{-5}].$

2. Определим $W_Д(z)$ как отношение *Y(z)* к *X(z)*:

$$\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{0{,}5z^{-2}+3z^{-5}}{2+5z^{-1}-7z^{-3}}=W_Д(z).$$

Задача №3.

Задана передаточная функция непрерывного элемента

$$W(p)=\frac{5(p+1)}{(0{,}5p+1)(2p+1)},$$

на которой воздействует дискретный сигнал с периодом дискретности $T=0{,}2c$.

Требуется определить *Z*-передаточную функцию *W*(*z*) этого элемента.

Решение:

1.Разложим передаточную функцию *W(p)* на элементарные дроби:

$$W(p)=\frac{5(p+1)}{(0{,}5p+1)(2p+1)}=\frac{5(p+1)}{(p+2)(p+0{,}5)}=\frac{C_1}{p-p_1}+\frac{C_2}{p-p_2},$$

где $p_1=-2$; $p_1=-0{,}5$ корни $A(p)=0$.

1. Определим коэффициенты C_1 и C_2:

Можно предложить два метода:

а) $\dfrac{C_1}{p-2}+\dfrac{C_2}{p-0{,}5}=\dfrac{5(p+1)}{(p+2)(p+0{,}5)};$

$C_1(p+0{,}5)+ C_2(p+2)= 5(p+1);$

Приравняв коэффициенты в правой и левой частях равенства при одинаковых степенях *p* получим:

$$\begin{array}{l|l} p^0 & 0{,}5C_1 + 2C_2 = 5, \\ p^{-1} & \;C_1 + C_2 = 5 \quad \Rightarrow C_1=3{,}33;\;\; C_2=1{,}667. \end{array}$$

б) $C_1 = \left.\dfrac{B(p)}{A'(p)}\right|_{p=p_1} = \left.\dfrac{5(p+1)}{2p+2,5}\right|_{p=-2} = 3,33,$

$$C_2 = \left.\frac{B(p)}{A'(p)}\right|_{p=p_2} = \left.\frac{5(p+1)}{2p+2,5}\right|_{p=-0,5} = 1,667.$$

2. Определим $W(z)$.

$$W(z) = \lambda_p^Z [W(p)] = \lambda_p^Z \left[\frac{3,33}{p+2} + \frac{1,667}{p+0,5}\right] =$$

$$= Z\left[\left\{L^{-1}\left(\frac{3,33}{p+2}\right)\right\}\right] + Z\left[\left\{L^{-1}\left(\frac{1,667}{p+0,5}\right)\right\}\right] =$$

$$= Z\left[3,33\left\{e^{-2(iT)}\right\}\right] + Z\left[1,667\left\{e^{-0,5(iT)}\right\}\right] = 3,33(1+e^{-2\cdot 0,2}z^{-1}+e^{-2\cdot 0,2\cdot 2}z^{-2}+\ldots)+$$

$$+1,667(1+e^{-0,5\cdot 0,2}z^{-1}+e^{-0,5\cdot 0,2\cdot 2}z^{-2}+\ldots) = \left|\begin{array}{l} 1+q+q^2+q^3+\cdots = \dfrac{q^n-1}{q-1} \\ 1+q^{-1}+q^{-2}+\cdots = \dfrac{1}{1-q^{-1}} \end{array}\right| =$$

$$= \frac{3,33}{1-e^{-2\cdot 0,2}z^{-1}} + \frac{1,667}{1-e^{-0,5\cdot 0,2}z^{-1}} = \frac{5-4,12z^{-1}}{(1-0,67z^{-1})(1-0,9z^{-1})}.$$

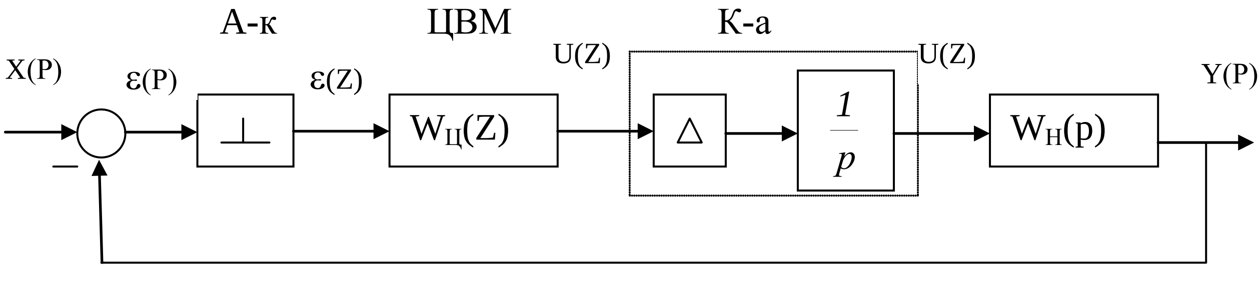
Данный результат можно получить непосредственно из выражения:

$$W(z) = \lambda_p^Z \left[\frac{3,33}{p+2} + \frac{1,667}{p+0,5}\right].$$

Используя таблицы λ_p^Z-преобразований и учитывая, что $T=0,2c$.

Задача №4.

Структурная схема импульсной АС имеет вид:



где $W_Д(z)=1-z^{-1}$; $W_H(P) = \dfrac{5(p+1)}{p(2p+1)^2}$; $T=1,c$;

алгоритм ЦВМ: $2y_i - y_{i-2} + y_{i-3} = 5x_{i-1} + x_{i-2}$.

Определить Z-передаточную функцию импульсной АС для выходного сигнала и ошибки.

Решение.

1. Вспомним выражения для передаточной функции замкнутой системы и по ошибке:

$$\Phi(z)=\frac{W(z)}{1+W(z)}; \qquad S(z)=\Phi(z)-1=-\frac{1}{1+W(z)};$$

2. Определим Z-передаточную функцию разомкнутой системы:

$$W(z)=W_{AK}(z)W_{Ц}(z)W_{KA}(z)\tilde{W}_{H}(z). \quad W_{AK}(z)=\frac{Z\{\varepsilon_i\}}{Z\{\varepsilon(t)\}}=1;$$

а) определим $W_{Ц}(z)$:

$$Y(z)[2-z^{-2}+z^{-3}]=X(z)[5z^{-1}+z^{-2}]; \qquad W_{Ц}(z)=\frac{z^{-2}+5z^{-1}}{z^{-3}-z^{-2}+2};$$

б)Определим Z-передаточную функцию непрерывной части АС:

$$\tilde{W}_{НЧ}(z)=(1-z^{-1})\,\lambda_p^Z\left[\frac{1}{p}W_H(p)\right]==(1-z^{-1})\,\lambda_p^Z\left[\frac{5(p+1)}{p^2(2p+1)^2}\right]=$$

$$=\left|\begin{matrix}корни \quad кратные\\ p_{1,2}=0;\, p_{3,4}=-0{,}5\end{matrix}\right|=(1-z^{-1})\,\lambda_p^Z\left(\frac{C_1}{p}+\frac{C_2}{p^2}+\frac{C_3}{p+0{,}5}+\frac{C_4}{(p+0{,}5)^2}\right).$$

Определим коэффициенты C_i:

$C_1p(p+0{,}5)^2+C_2(p+0{,}5)^2+C_3p^2(p+0{,}5)+C_4p^2=1{,}25(p+1)$

$$\begin{array}{l|l}
P^0 & 0{,}25C_2=1{,}25 \Rightarrow C_2=5,\\
P^{/} & 0{,}25C_1+C_2=1{,}25 \Rightarrow C_1=-15,\\
P^2 & C_1+C_2+0{,}5C_3+C_4=0;\ 0{,}5C_3+C_4=10,\\
P^3 & C_1+C_3=0 \Rightarrow C_3=15;\ C_4=2{,}5.
\end{array}$$

Тогда $\tilde{W}_{НЧ}(z)=(1-z^{-1})\,\lambda_p^Z\left(-\frac{15}{p}+\frac{5}{p^2}+\frac{15}{p+0{,}5}+\frac{2{,}5}{(p+0{,}5)^2}\right)=$

$$=5(1-z^{-1})\left[-\frac{3}{1-z^{-1}}+\frac{Tz^{-1}}{(1-z^{-1})^2}+\frac{3}{1-e^{-0{,}5T}z^{-1}}+\frac{0{,}5Te^{-0{,}5T}z^{-1}}{(1-e^{-0{,}5T}z^{-1})^2}\right]=$$

$$=5\left[-3+\frac{z^{-1}}{1-z^{-1}}+\frac{3(1-z^{-1})}{1-e^{-0{,}5}z^{-1}}+\frac{0{,}5(1-z^{-1})e^{-0{,}5}z^{-1}}{(1-e^{-0{,}5}z^{-1})^2}\right]=$$

$$=5\left[\begin{matrix}\dfrac{-3(1-z^{-1})(1-e^{-0{,}5}z^{-1})^2+(1-e^{-0{,}5}z^{-1})^2z^{-1}}{(1-z^{-1})(1-e^{-0{,}5}z^{-1})^2}+\\ +\dfrac{3(1-z^{-1})^2(1-e^{-0{,}5}z^{-1})+0{,}5e^{-0{,}5}(1-z^{-1})^2z^{-1}}{(1-z^{-1})(1-e^{-0{,}5}z^{-1})^2}\end{matrix}\right].$$

Дальнейшее решение поставленной задачи тривиально и затруднений, с точки зрения автоматики, не вызывает

2.16. Определение временных характеристик дискретных АС.

1. Что называется временной характеристикой АС? Какие временные характеристики вы знаете?

Временной характеристикой АС (звена) называется закон изменения выходной координаты *y(t)* в функции времени при изменении во времени по определенному закону внешнего воздействия с условием, что до приложения воздействия АС находилась в покое. Т.о. временная характеристика есть реакция АС на некоторые типовые входные сигналы. Они позволяют оценить динамические свойства АС.

Основными временными характеристиками дискретной АС являются переходная и весовая функции.

2. Что называется весовой функцией дискретной АС?

Весовой функцией дискретной АС называется её реакция на дискретный δ- импульс.

$\{y_i\} = Z^{-1}[\Phi(z)X(z)]$, если $\{x(iT)\} = \{\delta(iT)\} = \{1{,}0{,}0{,}...\}$, то $Z[\{\delta(iT)\}] = 1$,
тогда $\{g_i\} = Z^{-1}[\Phi(z)] = Z^{-1}[G(z)]$.

3. Что называется переходной функцией дискретной АС?

Переходной функцией дискретной АС называется её реакция на единичную ступенчатую функцию.

$\{y_i\} = Z^{-1}[\Phi(z)X(z)]$, если $\{x(iT)\} = \{1(iT)\} = \{1{,}1{,}1{,}...\}$, то

$$X(z) = Z[\{1(iT)\}] = z^0 + z^{-1} + z^{-2} + \ldots = S = \frac{a_0}{1-q} = \frac{1}{1-z^{-1}},$$ тогда

$$\{h_i\} = Z^{-1}\left[\Phi(z)\frac{1}{1-z^{-1}}\right] = Z^{-1}[H(z)].$$

4. Методы определения оригиналов решетчатых функций?

а) аналитически решая разностное уравнение, представляющее оператор ДАС;

б) по таблицам соответствия оригиналов и изображений с последующим вычислением значений x_i в моменты $t_i = iT$;

в) методом разложения функции *Y(z)* в степенной ряд (ряд Лорана):

если $Y(z) = \sum_{i=0}^{\infty} y_i z^{-i} = y_0 + y_1 z^{-1} + y_2 z^{-2} + \ldots,$ то $\{y_i\} = \{y_0, y_1, y_2, \ldots\}$;

если $Y(z) = \dfrac{B(z)}{A(z)} = \dfrac{b_m + b_{m-1}z^{-1} + \ldots + b_0 z^{-m}}{a_n + a_{n-1}z^{-1} + \ldots + a_0 z^{-n}}$, то в соответствии с определением *Z* – преобразования можно записать:

$$Y(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{b_m + b_{m-1}z^{-1} + \ldots + b_0 z^{-m}}{a_n + a_{n-1}z^{-1} + \ldots + a_0 z^{-n}} = y_0 + y_1 z^{-1} + y_2 z^{-2} + \ldots$$

Откуда, приравняв коэффициенты при одинаковых степенях z^{-i} в обеих частях равенства, найдем значения y_0; y_1; y_2;…, т.е. $\{y_i\}$.

г) аналитический метод с применением теоремы разложения.

Если $Y(z)=\dfrac{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \ldots + b_0}{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_0}$ и полюса функции $Y(z)$ $z_1,\ldots,z_n$ не кратные, то можно записать:

$$Y(z)=C_0+\sum_{k=1}^{n}\frac{C_k}{z-z_k}=C_0+\sum_{k=1}^{n}\frac{C_k z^{-1}}{1-z_k z^{-1}}=C_0+\sum_{k=1}^{n}C_k z^{-1}(1+z_k z^{-1}+z_k^2 z^{-2}+\ldots)=$$

$$=C_0+\sum_{k=1}^{n}C_k z^{-1}+\sum_{k=1}^{n}C_k z_k z^{-2}+\sum C_k z_k^2 z^{-3}+\ldots$$

Но $Y(z)=y_0+y_1z^{-1}+y_2z^{-2}+\ldots$ Сравним две формулы, получим:

$y_0=\dfrac{b_m}{a_n}=Y(\infty)$, при $m=n$, $y_0=C_0=0$, при $m<n$;

$$C_k=\frac{B(z_k)}{A^{(1)}(z_k)},\ k=1,\ldots,n;\quad y_i=\sum_{k=1}^{n}C_k z_k^{i-1},\ i=1,2,\ldots$$

Если среди n полюсов функции $Y(z)$ есть l кратных, то $Y(z)$ раскладывается по формуле:

$$Y(z)=C_0+\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{l}\frac{C_{k_l}}{(z-z_k)^l}=C_0+\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{C_{k_1}}{(z-z_k)}+\frac{C_{k_2}}{(z-z_k)^2}+\ldots+\frac{C_{k_l}}{(z-z_k)^l}\right].$$

5. Дискретный аналог интеграла Дюамеля и связь между решетчатыми весовой и переходной функциями?

С помощью дискретного аналога интеграла Дюамеля можно определить реакцию ДАС, если известна её весовая функция, на любой произвольный входной сигнал:

$$y_i=\sum_{k=0}^{i}x_k g_{i-k}=\sum_{k=0}^{i}x_{i-k}g_k.$$

Если входной сигнал $\{x_i\}=1(iT)$, то получим следствие дискретного интеграла Дюамеля, отражающее связь между весовой и переходной функциями ДАС:

$$h_i=\sum_{k=0}^{i}g_{i-k}=\sum_{k=0}^{i}g_k.$$

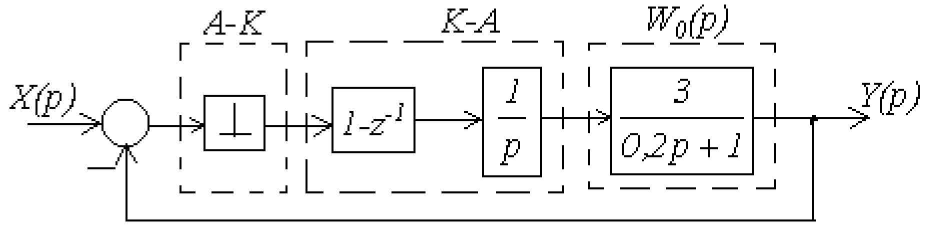
При известной $\{h_i\}$ легко вычислить $\{g_i\}$:

$$g_i=h_i-h_{i-1}=\Delta h_i.$$

II. Решение задач.

Задача №1.

Определить $\{h_i\}$, $\{g_i\}$ ДАС, структурная схема которой имеет вид:



Период дискретности ИЭ *T=0,1c.*

Решение:

Для определения $\{h_i\}$, $\{g_i\}$ необходимо вычислить *H(z), G(z),* а затем любым удобным методом найти оригиналы требуемых временных характеристик

1. Находим *Z* – передаточную функцию замкнутой дискретной АС.

$\Phi(z)=\dfrac{W(z)}{1+W(z)}$, где *W(z)* – *Z*-передаточная функция разомкнутой системы.

$$W(z)=(1-z^{-1})\Lambda_p^z\left[\frac{1}{p}W_0(p)\right]=(1-z^{-1})\Lambda_p^z\left[\frac{3}{p(0,2p+1)}\right]=$$

$$=3(1-z^{-1})\Lambda_p^z\left[\frac{5}{p(p+5)}\right]=3(1-z^{-1})\Lambda_p^z\left[\frac{C_1}{p}+\frac{C_2}{p+5}\right]=\left\{\begin{matrix}C_1(p+5)+C_2p=5;\\ C_1=1;C_2=-1.\end{matrix}\right\}=$$

$$=3(1-z^{-1})Z\left[\{1(iT)\}-\{e^{-5(iT)}\}\right]=3(1-z^{-1})\begin{bmatrix}(1+z^{-1}+z^{-2}+...)-\\ -(1+e^{-5T}z^{-1}+e^{-5\cdot 2T}z^{-2}+...)\end{bmatrix}=$$

$$=3(1-z^{-1})\left[\frac{1}{1-z^{-1}}-\frac{1}{1-e^{-5T}z^{-1}}\right]=\left\{\begin{matrix}T=0,1c\\ e^{-5T}\approx 0,61\end{matrix}\right\}=3-\frac{3(1-z^{-1})}{1-0,61z^{-1}}=\frac{1,17z^{-1}}{1-0,61z^{-1}};$$

Тогда

$$\Phi(z)=\frac{W(z)}{1+W(z)}=\frac{1,17z^{-1}}{1+1,17z^{-1}-0,61z^{-1}}=\frac{1,17z^{-1}}{1+0,56z^{-1}};$$

Определим весовые коэффициенты, решая разностное уравнение, представляющее оператор ДАС:

$$Y_i+0,56y_{i-1}=1,17x_{i-1};\quad \{x(iT)\}=\{1,0,0,0,...\},$$

$i=0 \Longrightarrow g_0+0,56g_{-1}=1,17x_{-1}\quad g_0=0;$

$i=1 \Longrightarrow g_1+0,56g_0=1,17x_0\quad g_1=1,17;$

$i=2 \Longrightarrow g_2+0,56g_1=1,17x_1\quad g_2=-0,56\cdot 1,17=-0,66;$

i=3 ….

3. Определим весовую функцию ДАС, методом разложения её изображения в ряд Лорана:

$$G(z)=\Phi(z)=\frac{1,17z^{-1}}{1+0,56z^{-1}}=g_0+g_1z^{-1}+g_2z^{-2}+...,$$

$$1,17z^{-1}=(g_0+g_1z^{-1}+g_2z^{-2}+\ldots)(1+0,56z^{-1}),$$

$$\begin{array}{l|l}z_0 & 0=g_0,\\ z^{-1} & 1,17=0,56g_0+g_1 \Longrightarrow g_1=1,17,\\ z^{-2} & 0=0,56g_1+g_2 \Longrightarrow g_2=-1,17\cdot 0,56=-0,6552,\\ z^{-3} & 0=0,56g_2+g_3 \Longrightarrow g_3=0,6552\cdot 0,56\approx 0,37,\ldots\end{array}$$

$$\{g_i\} = \{0;1{,}17;-0{,}66;0{,}37;...\}$$

4. Определим переходные коэффициенты ДАС, используя теорему разложения:

$$H(z) = \Phi(z)X(z) = \frac{\Phi(z)}{1-z^{-1}} = \frac{1{,}17z^{-1}}{(1+0{,}56z^{-1})(1-z^{-1})} = \left|\times\frac{z^2}{z^1\cdot z^1}\right| =$$

$$= \frac{1{,}17z}{(z+0{,}56)(z-1)}.$$

Так как $m<n$, то $h_0=0$. $h_i=\sum_{k=1}^{n} C_k z_k^{i-1}$, где $k=\overline{1,n}$, $i=1,2,...$

$Z_1=-0{,}56$; $z_2=1$; $A^{(1)}(z)=2z-0{,}44$;

$$h_1 = C_1 z_1^{1-1} + C_2 z_2^{1-1} = C_1 + C_2 = 1{,}17;$$

$$h_2 = C_1 z_1^{2-1} + C_2 z_2^{2-1} = \frac{0{,}65}{1{,}56}(-0{,}56) + \frac{1{,}17}{1{,}56} = 0{,}515;$$

$$h_3 = C_1 z_1^{3-1} + C_2 z_2^{3-1} = ...$$

$$\{h_i\} = \{0;1{,}17;0{,}515;0{,}882;0{,}676;0{,}791;0{,}727;...\}$$

Переходные коэффициенты можно получить, воспользовавшись уравнением связи между $\{g_i\}$ и $\{h_i\}$:

$$h_i = \sum_{k=0}^{i} g_k.$$

Задача №2.

Получить с помощью теоремы разложения оригинал переходной функции по её Z – изображению:

а) $H(z) = \dfrac{0{,}5z+1}{(z-0{,}1)(z^2-1{,}2z+0{,}36)}$; б) $H(z) = \dfrac{0{,}5z^2}{(z-1)(z-0{,}5)}$.

Решение:

а) Корни Z – характеристического уравнения $A(z)=0$ будут $z_1=0{,}1$; $z_{2,3}=0{,}6$.

Поскольку z_2 и z_3 кратные, применять теорему разложения сразу не правомочно. Оригинал решетчатой функции $\{h_i\}$ целесообразно вычислять либо с применением таблиц Z – обращения, либо методом разложения Z – изображения функции в ряд Лорана.

В таблицах данного выражения нет, поэтому применим метод разложения в ряд Лорана, предварительно домножив числитель и знаменатель функции $H(z)$ на z^{-3}.

$$H(z) = \frac{0{,}5z^{-2}+z^{-3}}{1-1{,}3z^{-1}+0{,}48z^{-2}-0{,}036z^{-3}} = h_0 + h_1 z^{-1} + h_2 z^{-2} + ...;$$

$$0{,}5z^{-2}+z^{-3} = (1-1{,}3z^{-1}+0{,}48z^{-2}-0{,}036z^{-3})(h_0 + h_1 z^{-1} + h_2 z^{-2} + ...);$$

z^0 | $0=h_0$,

z^{-1} | $0=h_1-1{,}3h_0 \quad \Longrightarrow \quad h_1=0$;

z^{-2} $0{,}5=h_2-1{,}3h_1+0{,}48h_0 \Longrightarrow h_2=0{,}5;$

z^{-3} $1=h_3-1{,}3h_2+0{,}48h_1-0{,}036h_0=h_3-0{,}65 \Longrightarrow h_3=1{,}65;$ и т.д.

б) Корни $A(z)=0$ $z_1=1$, $z_2=0{,}5$. Тогда $\{h_i\}=\left\{C_0+\sum_{k=1}^{n} C_k z_k^{i-1}\right\}$.

Так как $n=m$, то $h_0=C_0=\dfrac{b_m}{a_n}=0{,}5$; $C_k=\dfrac{B(z_k)}{A^{(1)}(z_k)}$; $A^{(1)}(z)=2z-1{,}5;$

$$C_1=\frac{B(z_1)}{A^{(1)}(z_1)}=\frac{0{,}5z_1^2}{2z_1-1{,}5}=\frac{0{,}5\cdot 1}{2\cdot 1-1{,}5}=1;$$

$$C_2=\frac{B(z_2)}{A^{(1)}(z_2)}=\frac{0{,}5z_2^2}{2z_2-1{,}5}=\frac{0{,}5\cdot 0{,}25}{2\cdot 0{,}5-1{,}5}=-0{,}25.$$

$$h_0=0{,}5;$$

$$h_1=C_1z_1^{1-1}+C_2z_2^{1-1}=1-0{,}25=0{,}75;$$

$$h_2=C_1z_1^{2-1}+C_2z_2^{2-1}=1-0{,}25\cdot 0{,}5=0{,}875;$$

$$h_3=C_1z_1^{3-1}+C_2z_2^{3-1}=1-0{,}25(0{,}5)^2=1-0{,}0625=0{,}9375;$$

$$h_4=\ldots$$

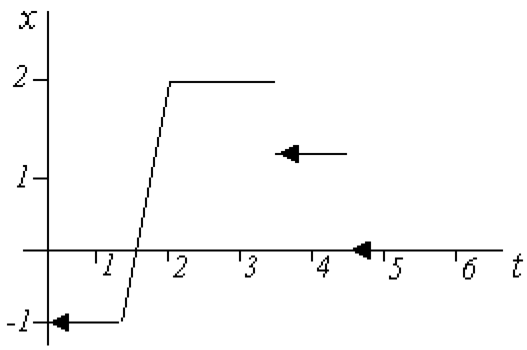
Мы получили переходную функцию ДАС. Как в этом случае определить $\{g_i\}$?

Воспользуемся формулой связи между весовой и переходной функциями ДАС $g_i = h_i-h_{i-1} = \Delta h_i$, тогда

$$\{g_i\}=\{05;0{,}25;0{,}125;\ldots\}.$$

ЗАДАЧА №3.

Задана весовая функция ДАС: $\{g_i\}=\{0;1;2;3;3;2;1;0;\ldots\}$. На вход системы действует сигнал, график которого имеет вид:



Период дискретности $T=0{,}5c$.

Определить выходной сигнал $\{y_i\}$-?

Решение:

В данном случае целесообразно воспользоваться дискретным аналогом интеграла Дюамеля:

$$y_i=\sum_{k=0}^{i} x_k g_{i-k}.$$

Определим решетчатую функцию входного сигнала:

$$\{x_i\}=\{-1;-1;-1;-1;2;2;2;1;1;0;\ldots\}.$$

Определим значения элементов решетчатой функции выходного сигнала y_i:

$$y_0 = x_0 g_0;$$

$$y_1 = \sum_{k=0}^{1} x_k g_{1-k} = x_0 g_1 + x_1 g_0 = -1;$$

$$y_2 = \sum_{k=0}^{2} x_k g_{2-k} = x_0 g_2 + x_1 g_1 + x_2 g_0 = -3;$$

$$y_3 = ...$$

Таким образом $\{y_i\} = \{0;-1;-3;-6;-9;...\}$.

2.17. Определение устойчивости дискретных ЛСС.

1 .Дать определение устойчивой дискретной АС?

Дискретная АС устойчива, если для любого положительного ε существует такое положительное η, что из неравенства $|x_i| \le \eta \quad i=1,2\ldots$ следует неравенство $|y_i| \le \varepsilon$ (т.е. реакция системы на ограниченный выходной сигнал ограничена).

2. Сформулировать необходимое и достаточное условие устойчивости дискретных АС.

Исходя из определения устойчивой дискретной АС, условие выполняется в том случае, если

1). $$\sum_{i=0}^{\infty} |g_i| < \infty,$$

т.е. абсолютная сходимость ряда весовых коэффициентов.

2). $$|Z_к| < 1, \quad к=1,2,\ldots, n.$$

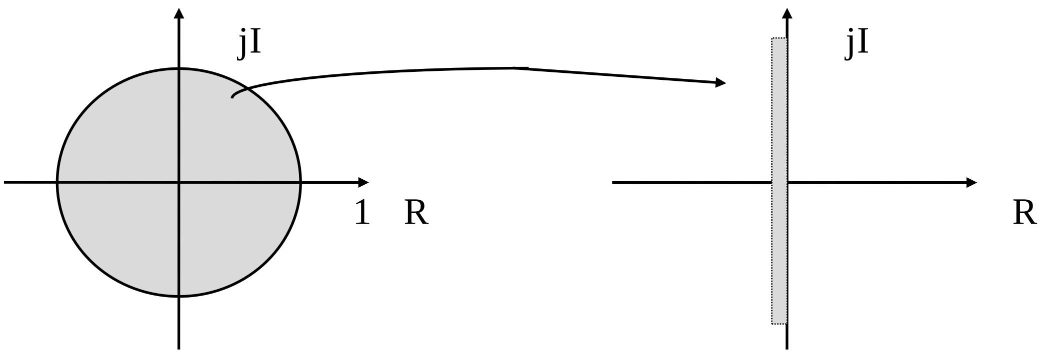
Т.е. , для устойчивой замкнутой дискретной АС необходимо и достаточно, чтобы все корни характеристического уравнения $A(Z)=0$ были расположены вну-три окружности единичного радиуса плоскости Z.

Т.о., чтобы оценить устойчивость дискретной АС необходимо и достаточно найти все корни ее Z –характеристического уравнения или все весовые коэффициенты.

3. Сущность билинейного преобразования?

Оценка устойчивости по необходимому и достаточному условию обычно сопряжена с достаточно громоздкими вычислительными процедурами и на практике применяется для АС не выше третьего порядка.

Для того, чтобы избежать громоздких вычислений и применить к дискретным АС критерии устойчивости непрерывных систем, необходимо с помощью какого – либо преобразования перевести внутреннюю часть единичного круга плоскости Z в левую полуплоскость, а саму окружность – в мнимую ось некоторой другой плоскости q.



Z–плоскость q–плоскость

Такое преобразование существует, оно называется билинейным или q–преобразованием:

$$Z = \frac{q+1}{q-1}; \qquad q = \frac{Z+1}{Z-!}.$$

Т.о., если исходное характеристическое уравнение дискретной АС *A(z)=0* преобразовать к виду *A(q)=0,* то необходимое и достаточное условие устойчивости для дискретной АС $(|Z|<1)$ трансформируется в необходимое и достаточное условие устойчивости непрерывных АС – отрицательность вещественных частей корней характеристического полинома *A(q) =0*.

Именно вследствие этого к характеристическому уравнению замкнутой дискретной АС *A(q)=0* можно применить методику оценки устойчивости непрерывных АС: Рауса-Гурвица, Михайлова. А для *A(q)=0* разомкнутой системы – методику критерия Найквиста.

Задача № 1.

Дискретная АС описывается передаточной функцией

$$\Phi(z) = \frac{0{,}1z^2 + z + 0{,}8}{2z^3 + z^2 - 3z + 1}.$$

Оценить устойчивость данной АС по сходимости ряда весовых коэффициентов.

Решение.

1. Определим весовые коэффициенты $\{q_i\}$

$$\Phi(z) = G(z) = q_0 + q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2} + \ldots$$

Для удобства работы приведем выражение *Ф(z)* к отрицательным степеням

$$\frac{0{,}1z^2 + z + 0{,}8}{2z^3 + z^2 - 3z + 1} x \frac{z^{-3}}{z^{-3}} = \frac{0{,}1z^{-1} + 0{,}8z^{-3}}{2 + z^{-1} - 3z^{-2} + z^{-3}}.$$

Приравняем данное выражение к степенному ряду весовых коэффициентов относительно z^{-i}, получим :

$$0,1z^{-1}+z^{-2}+0.8z^{-3}=(2+z^{-1}-3z^{-2}+z^{-3})(q_0+q_1z^{-1}+q_2z^{-2}+\ldots),$$

$$\begin{array}{l|l}
z^0 & 0=2q_0 \rightarrow q_0=0; \\
z^{-1} & 0,1=q_0+2q_1 \rightarrow q_1=0,05; \\
z^{-2} & 1=-3q_0+q_1+2q_2 \rightarrow q_2=0,475; \\
z^{-3} & 0,8=q_0-3q_1+q_2+2q_3 \rightarrow q_3=0,2375; \\
z^{-4} & 0=2q_4+q_3-3q_2+q_1 \rightarrow q_4=0,7125; \\
z^{-5} & 0=2q_5+q_4-3q_3+q_2 \rightarrow q_5=-0,2375; \\
\vdots & \vdots \text{ и т.д.}
\end{array}$$

2. Оценим сходимость ряда весовых коэффициентов

$$\sum_{0}^{\infty}|q_i| = \infty .$$

Вывод: Дискретная АС с данной передаточной функцией неустойчива.

Задача №2.

С помощью необходимого и достаточного условия устойчивости оценить устойчивость АС, передаточная функция которой имеет вид:

$$\Phi(z)=\frac{1.1Z+0,8}{Z^2+0,2Z+1.2}.$$

Решение:

1. Вычислим корни характеристического уравнения

$$A(z)= z^2+0,2z+1.2=0,$$

$$Z_{1,2}=\frac{-0,2\pm\sqrt{0,04-4,8}}{2}=\frac{-0,2\pm\sqrt{-4,76}}{2},$$

$$z_1=-0.1+j1,09; \qquad z_2=-0,1-j1,09$$

2. Оценим соответствие корней характеристического уравнения необходимому и достаточному условию устойчивости

$$|z_i|<1,$$

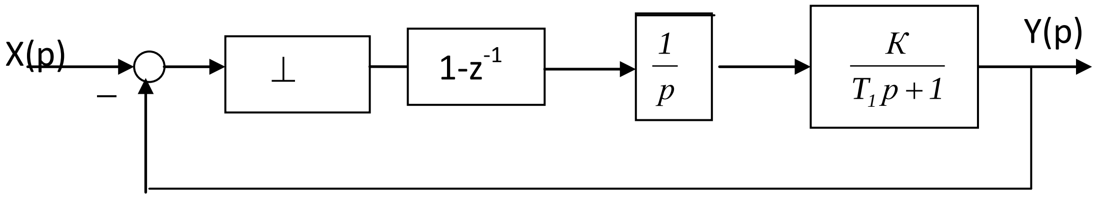
$$|z_1|=|-0,1+j1,09|=\sqrt{1,198}>1,$$

$$|z_2|=|-0,1+j1,09|=\sqrt{1,198}>1.$$

Вывод: то, что $|z_i|>1$, свидетельствует о невыполнении необходимого и достаточного условия устойчивости дискретной АС, т.е. система неустойчива.

Задача №3.

Дискретная АС задана структурной схемой



Определить критическое значение коэффициента усиления разомкнутой системы, если T_1 и T – период дискретности – заданы.

Решение:

1. Определим Z – передаточную функцию разомкнутой системы

$$W(z)=(1-z^{-1})\lambda_p^Z\left[\frac{K}{p(T_1p+1)}\right]=(1-z^{-1})K\cdot Z\left[\{1(iT)-e^{-\frac{iT}{T_1}}\}\right]=$$

$$=(1-z^{-1})\left(\frac{1}{1-z^{-1}}-\frac{1}{1-\alpha z^{-1}}\right)=\frac{K(1-\alpha)z^{-1}}{1-\alpha z^{-1}};$$

где $\alpha= e^{-T/T_1}$.

2. Определим характеристический полином замкнутой АС

$$\Phi(z)=\frac{B(z)}{A(z)}=\frac{W(z)}{1+W(z)}=\frac{K(1+\alpha)z^{-1}}{1-\alpha z^{-1}+K(1-\alpha)z^{-1}};$$

Домножив числитель и знаменатель на z, получим:

$$\Phi(z)=\frac{K(1+\alpha)}{z-\alpha+K(1-\alpha)};$$

$$A(z)= z-\alpha+K(1-\alpha).$$

3. Исходя из необходимого и достаточного условия устойчивости и учитывая, что в данном случае передаточная функция АС имеет единственный полюс, коэффициент усиления соответствующий нахождениюАС на границе устойчивости можно определить из равенства

$$|z_1|=|\alpha-K(1-\alpha)|=1.$$

Данное уравнение эквивалентно двум уравнениям:

$$\alpha - K(1-\alpha)=1, \qquad -\alpha + K(1-\alpha)=1.$$

Решение этих уравнений определяет значения критического коэффициента усиления разомкнутой системы:

$$K_{кр1}=-1, \qquad K_{кр2}=\frac{1+\alpha}{1-\alpha}.$$

Вывод: замкнутая дискретная АС будет устойчива, если коэффициент усиления разомкнутой системы K будет находиться в пределах

$$-1 < K < \frac{1+\alpha}{1-\alpha}.$$

Задача №4.

Исследовать устойчивость дискретной АС по критерию Гурвица, если Z-передаточная функция АС имеет вид:

$$\Phi(z) = \frac{0{,}2z^{-1} - z}{1 - 2{,}1z^{-1} + 1{,}44z^{-2} - 0{,}32z^{-3}}.$$

Решение.

1. Определим характеристическое уравнение АС с положительными степенями z. Для этого домножим числитель и знаменатель на z^3:

$$A(z)=z^3-2.1z^{+2}+1{,}44z^{+1}-0{,}32=0.$$

2. Применим билинейную подстановку

$$z = \frac{q+1}{q-1};$$

$$A(q) = \left(\frac{q+1}{q-1}\right)^3 - 2{,}1\left(\frac{q+1}{q-1}\right)^2 + 1{,}44\left(\frac{q+1}{q-1}\right) - 0.32 = 0.$$

Домножив левую и правую части уравнения на $(q\text{-}1)^3$, раскрыв скобки и приведя подобные члены, получим уравнение:

$$0{,}02q^3+0{,}42q^2+2{,}7q+4{,}86=0.$$

3.Оценим устойчивость эквивалентной АС с преобразованным характеристическим полиномом $A(q)$ по методике критерия Гурвица.

а) $\forall_{\mathrm{I}}: \ a_i > 0, (i = 0\ldots3)$

$$R = \begin{array}{c}\left|\begin{array}{ccc} 4{,}86 & 0 & 0 \\ 0{,}42 & 2{,}7 & 4{,}76 \\ 0 & 0{,}02 & 0{,}42 \end{array}\right|\end{array} \begin{array}{l} R_2 \\ R_1 \\ \end{array}$$

в) $R_1=0{,}42>0,$

$R_2=2{,}7\cdot 0{,}42-0{,}02\cdot 4{,}86>0,$

$R_3=R_2\cdot 4?86>0.$

Вывод: т.к. определители диагональных миноров положительны, система устойчива.

Примечание: Для системы третьего порядка из R_2 вытекает формулировка правила Вишнеградского.

Задача №5.

С помощью логарифмического критерия устойчивости исследовать замкнутую АС, если ее Z – передаточная функция разомкнутой системы имеет вид:

$$W(z)=\frac{5(4{,}5z^2-0{,}5)}{Z(1.!\,z-0{,}9)}.$$

Решение:

Разомкнутая АС устойчива, т.к. $|z_к|<1.$

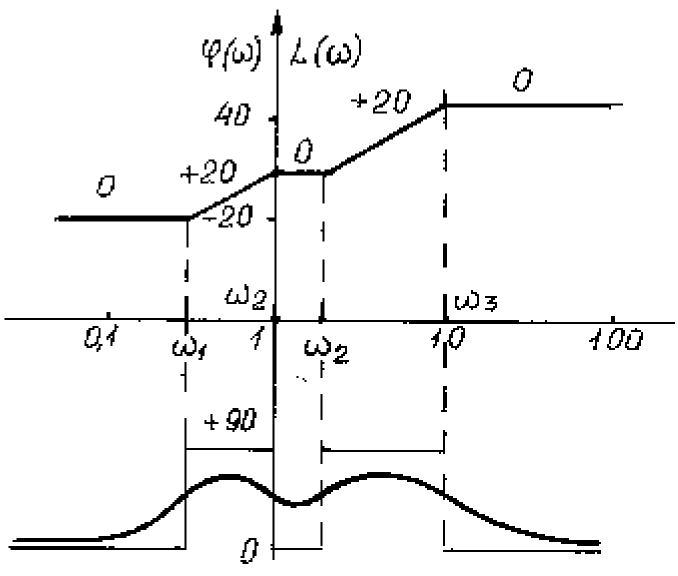
1. Применим билинейную подстановку

$$W(z)=\frac{5[4{,}5\left(\dfrac{q+1}{q-1}\right)^2-0{,}5]}{\dfrac{q+1}{q-1}(1.!\dfrac{q+1}{q-1}-0{,}9)}=\frac{5\left[4{,}5(q+1)^2-0{,}5(q-1)^2\right]}{\left(q+1)(1.!q+1{,}1-0{,}9q+0.9)\right)}=$$

$$=\frac{5(4.5q^2 9q+4.5-0{,}5q^2+q-0{,}5)}{(q-1)(0{,}2q+2)}=\frac{5(2q^2+5q+2}{(q+1)(0{,}1q+1)}=$$

$$=\frac{10(q^2+2{,}5q+1}{(q+1)(0.!q+1)}=\frac{10(2q+1)(0{,}5q+1)}{(q+1)(0{,}1q+1)}.$$

2. Оценим устойчивость замкнутой дискретной АС по преобразованной передаточной функции разомкнутой системы применяя второе следствие критерия Найквиста



а) $20(0\text{-}0)=0$,*дб/дк*,

$20lgK\,|_{\omega=1}=20\lg 10|_{\omega=1}=20$,*дб*,

$\pi/2(0\text{-}0)\,/_{\omega=0}=0$,*град*.

б) $\omega_1=0,5c^{-1}$ – форсирующее звено –1,
$\omega_2=1\ c^{-1}$ –апериодическое звено –1,
$\omega_3=2\ c^{-1-}$ форсирующее звено –2,
$\omega_4=10\ c^{-1}$- апериодическое звено –2.

Вывод: Т.к. ЛФЧХ на всем диапазоне частот не пересекает уровень -π, т.е. ω_π - отсутствует (ω_c- отсутствует), то определить устойчивость АС с таким характеристическим полиномом передаточной функции разомкнутой АС по Нейквисту невозможна ($n=2$).

2.18. Определение статистических характеристик выходного сигнала АС, находящихся под воздействием случайных сигналов, представленных в канонической форме (степенной ряд).

1. Дать определения стохастических и детерминированных АС.
2. Дать определение случайного сигнала (процесса).
3. Назовите основные количественные характеристики случайных сигналов.

Случайные сигналы как функции времени характеризуются следующими неслучайными количественными характеристиками:

-математическим ожиданием

$$m_x(t)=M\left[x(t)\right]=\int_{-\infty}^{\infty} x\cdot f(x,t)dx,$$

где $f(x, t)$ – одномерная плотность вероятности;

- корреляционной функцией (моментом)

$$K_x(t_1, t_2)=M\left[\overset{\circ}{x}(t_1)\overset{\circ}{x}(t_2)\right],$$

где $\overset{\circ}{x}(t)=x(t)-m_x(t)$- центрированная случайная функция;

-дисперсией

$$D_x(t)=M\left[\overset{\circ}{x}{}^2(t)\right]=K_x(t, t);$$

-среднеквадратическим отклонением

$$\sigma_x(t)=\sqrt{D_x(t)}.$$

4. Физический смысл неслучайных характеристик случайных сигналов?

II. Основные расчетные соотношения.

Если $z(t)=x(t)+u(t)$,
где $x(t)$ и $u(t)$- взаимно некоррелированные случайные функции, то

$$m_z(t)=m_x(t)+m_u(t);$$
$$K_z(t_1, t_2)=K_x(t_1, t_2)+K_u(t_1, t_2);$$

$$D_z(t) = D_x(t) + D_u(t);$$

$$\sigma_z(t) = \sqrt{\sigma_x^2(t) + \sigma_u^2(t)} = \sqrt{D_x(t) + D_u(t)}.$$

Статические характеристики случайного выходного сигнала $y(t)$, $e(t)$ при известных статистических характеристиках входного сигнала $m_x(t)$, $K_z(t_1, t_2)$ и известной весовой функции АС – $g(t)$, могут быть определены с помощью интеграла Дюамеля:

$$m_y(t) = \int_0^{t-t_0} g(\tau) m_x(t-\tau) d\tau;$$

$$K_y(t_1, t_2) = \int_0^{t_1-t_0} g(\tau_1) \left[\int_0^{t_2-t_0} g(\tau_2) K_x(t_1-\tau_1, t_2-\tau_2) d\tau_2 \right] d\tau_1.$$

Применение данных формул связано с большими вычислительными трудностями.

Решение этой задачи существенно упрощается, если входной случайный сигнал может быть представлен в каноническом виде:

$$x(t) = m_x(t) + \sum_{i=1}^{\kappa} U_i \varphi_i(t), \qquad i=1,\ldots\kappa,$$

где U_i – взаимно некоррелированные центрированные случайные величины, т.е.

$$M[U_i] = 0,$$

$$M[U_i\, U_j] = \begin{cases} 0 & при \quad i \neq j \\ D_i & при \quad i = j \end{cases},$$

$\varphi_i(t)$ – неслучайные координатные функции,

$m_x(t)$, $D_i(t)$, $\varphi_i(t)$ – считаются известными.

В этом случае выходной сигнал ЛС АС будет тоже иметь канонический вид:

$$y(t) = m_y(t) + \sum_{i=1}^{\kappa} U_i \psi_i(t) \quad \text{или} \quad e(t) = m_e(t) + \sum_{i=1}^{\kappa} U_i \psi_i(t),$$

а статистические характеристики $K_y(t_1, t_2)$, $K_e(t_1, t_2)$, $D_y(t)$, $D_e(t)$ вычисляются по формулам:

$$K_y(t_1, t_2) = \sum_{i=1}^{\kappa} D_i \psi_i(t_1) \psi_i(t_2);$$

$$K_e(t_1, t_2) = \sum_{i=1}^{\kappa} D_i \psi_{e_i}(t_1) \psi_{e_i}(t_2);$$

$$D_y(t) = K_y(t, t) = \sum_{i=1}^{\kappa} D_i \psi_i^2(t);$$

$$D_e(t) = K_e(t, t) = \sum_{i=1}^{\kappa} D_i \psi_{e_i}^2(t).$$

Т.о., если случайный входной сигнал АС имеет канонический вид, то определение статистических характеристик выходного сигнала фактически заключается в вычислении математического ожидания и координатных функций, т.е. $m_y(t)$, $m_e(t)$, $\psi_i(t)$, $\psi_{ei}(t)$.

Допустим, что математическое ожидание и координатные функции случайного входного сигнала имеют вид:

$$m_x(t)=a_0+a_1t+a_2t^2+\ldots,$$
$$\psi_i(t)= в_0+в_1t+в_2t^2+\ldots.$$

Тогда . $m_y(t)$ и $\psi_i(t)$ можно вычислить посредством коэффициентов ошибок:

$$m_y(t)=S_0\, m_x(t)+S_1\dot{m}_x(t)+S_2\ddot{m}_x(t)+\ldots,$$
$$\psi_i(t)= S_0\, \varphi_i(t)+S_1\dot{\varphi}_i(t)+S_2\ddot{\varphi}_i(t)+\ldots.$$

В случае если $m_x(t)$ либо $\varphi_i(t)$ постоянны, т.е. $m_x(t)=const$, то

$$m_y(\infty)=m_x(t)\int_0^\infty g(\tau)d\tau = m_x(\infty)h(\infty)=m_x(\infty)\Phi(0).$$

Аналогично $\psi_i(\infty)=\varphi_i(\infty)\Phi(0).$

1. Определить функции канонического разложения случайного входного сигнала

$$m_x(t),\ \varphi_i(t),\ D_i,\ m_f(t),\ \varphi_{fi}(t),\ D_{fi}.$$

2. Определить требуемую передаточную функцию для данного входного сигнала

$$\Phi(p),\ S(p),\ \Phi_{F_iY}(p)\ \Phi_{F_iE}(p)\ldots.$$

3. Вычислить соответствующие математические ожидания и координатные функции выходного сигнала посредством метода коэффициентов ошибок:

$$m_y(t),\ m_E(t),\ \psi_i(t)\ \psi_{ei}(t)\ldots.$$

4. Определить сам выходной сигнал и его неслучайные статистические характеристики:

$$y(t),\ e(t),\ K_y(t_1, t_2),\ K_E(t_1, t_2),\ D_y(t),\ D_E(t).$$

Задача №1.

Определить функции канонического разложения случайных сигналов и их статистические характеристики $K_x(t_1, t_2)$ и $D_x(t)$.

а) $x(t)=2-t+Cos2t;$

$m_y(t)= 2-t+Cos2t$ $K_x(t_1, t_2) =0;$ $D_x(t)=0,$ т.к.

б) $x(t)=1+5U_1t^2-2U_2t,$ $M[U_1^2]=D_1=0{,}2,$ $M[U_2^2]=D_2=0{,}5.$

$$m_x(t)=1;\ \varphi_1(t)=5t^2;\ \varphi_2(t)=-2t.$$

$K_x(t_1, t_2)= D_1\varphi_1(t_1)\varphi_1(t_2)+D_2\varphi_2(t_1)\varphi_2(t_2)=0{,}2\cdot 5t_1^2\cdot 5t_2^2+0{,}5(-2t_1)(-2t_2);$

$D_x(t)= K_x(t, t)=0{,}2\cdot 25t^4+0{,}5\cdot 4t^2$

в) $x(t)=U_1t^2-U_2(1-t)+2U_3Cost,$ $M[U_1^2]=D_1;\ M[U_2^2]=D_2;$ $M[U_3^2]=D_3.$

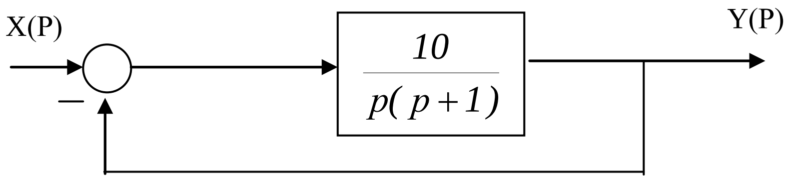
$$m_x(t)=0;\ \varphi_1(t)=t^2;\ \varphi_2(t)=-(1-t);\ \varphi_3(t)=Cos\,t;$$

$$K_x(t_1, t_2)= D_1\varphi_1(t_1)\varphi_1(t_2)+D_2\varphi_2(t_1)\varphi_2(t_2)+D_3\varphi_3(t_1)\varphi_3(t_2)=$$
$$=D_1t_1^2t_2^2+D_2(1-t_1)(1-t_2)+2D_3\cdot Cost_1\cdot 2Cost_2;$$

$$D_x(t)= K_x(t, t)= = D_1 t^4 + D_2(1-t)^2 + D_3 4Cos^2 t.$$

Задача №2.

На АС заданной структуры действует случайный входной сигнал вида:



$$x(t)=0,5\text{-}2Ut^2, \qquad M[U^2]=0,5.$$

Определить сигналы *y(t) и e(t)* в установившемся режиме и их неслучайные статистические характеристики.

Решение.

1. Определим функции канонического разложения случайного входного сигнала

$$m_x=0,5=const;\ \varphi(t)=-2t^2,\ D_x=0,5.$$

2. Определим требуемые передаточные функции *Φ(p)* и *S(p):*

$$\Phi(p)=\frac{10}{p^2+p+10};\quad S(p)=-\frac{1}{1+W(p)}=-\frac{p^2+p}{p^2+p+10}.$$

3. Вычислим соответствующие математические ожидания и координатные функции выходных сигналов.

Т.к. $m_x=0,5=const$, то $m_y(\infty)= m_x(t)\cdot\Phi(0)$, $m_e(\infty)= m_x(t)\cdot S(0)$,

$$m_y(\infty)=0,5\frac{10}{p^2+p+10}\Big|_{p=0}=0,5.$$

$m_e(\infty)=0$, т.к. по структурному признаку АС имеет астатизм I порядка по отношению к задающему воздействию.

$\psi(t)$ и $\psi_e(t)$ определим через коэффициенты ошибок, как реакцию АС на координатную функцию входа.

$$\psi(t)=\tilde{S}_0\varphi(t)+\tilde{S}_1\dot{\varphi}(t)+\tilde{S}_2\ddot{\varphi}(t)=-2t^2\text{-}0,1(-4t)\text{-}0,09(-4),$$

$$\psi_e(t)=S_0\varphi(t)+S_1\dot{\varphi}(t)+S_2\ddot{\varphi}(t)=-0,1(-4t)\ -\ 0,09(-4),$$

$$\psi(t)= -2t^2;\ \dot{\varphi}(t)=--4t;\ \ddot{\varphi}(t)=-4;\ \dddot{\varphi}(t)=0.$$

Следовательно, необходимо определять по три коэффициента ошибок из каждой передаточной функции:

$$\Phi(p)=\frac{10}{p^2+p+10}=\tilde{S}_0+\tilde{S}_1 p+\tilde{S}_2 p^2+\cdots,$$

$$10=(\tilde{S}_0+\tilde{S}_1 p+\tilde{S}_2 p^2+\cdots)(p^2+p+10);$$

$$\begin{array}{l|l} p^0 & 10=10\tilde{S}_0 \qquad \tilde{S}_0=1; \\ p^1 & 0=\tilde{S}_0+10\tilde{S}_1 \quad \tilde{S}_1=-1; \\ & \end{array}$$

p^2 $0=\tilde{S}_0+\tilde{S}_1+10\tilde{S}_2 \quad \tilde{S}_2=-0,09.$

$$S(p)=-\frac{p^2+p}{p^2+p+10}=S_0+S_1p+S_2p^2+\cdots,$$

$$-(p^2+p)=(S_0+S_1p+S_2p^2+\cdots)(p^2+p+10),$$

p^0 | $0=10S_0 \quad S_0=0;$ *(астатизм I)*,

p^1 | $-1=S_0+10S_1 \quad S_1=-1;$

p^2 | $-1=S_0+S_1+10S_2 \quad S_2=-0,09.$

4. Определим статистические характеристики случайных выходных сигналов и сам вид сигналов:

$y(t)=m_y(t)+U\psi(t)=0,5+U(-2t^2+0,4t+0,36),$

$e(t)=m_e(t)+U\psi_e(t)=U(0,4t+0,36),$

$K_Y(t_1, t_2)= D_x\psi(t_1)\psi(t_2)=0,5(-2t_1^2+0,4t_1+0,36)(-2t_2^2+0,4t_2+0,36),$

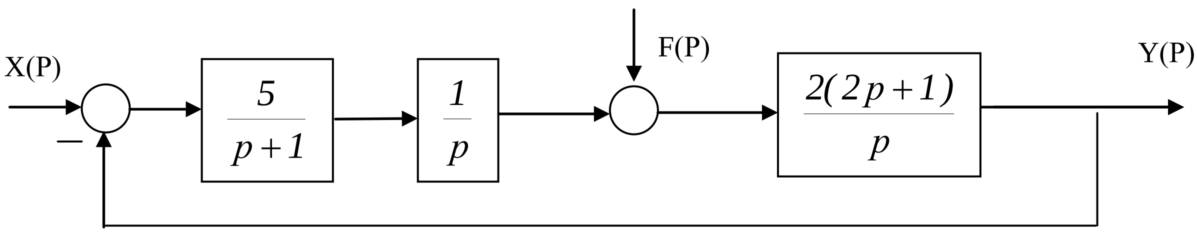
$D_y(t)= K_Y(t, t)= 0,5(-2t^2+0,4t+0,36)^2,$

$K_E(t_1, t_2)= D_x\psi_e(t_1)\psi_e(t_2)=0,5(0,4t_1+0,36)(0,4t_2+0,36),$

$D_E(t)= K_E(t, t)= 0,5(0,4t+0,36)^2.$

Задача №3.

На АС заданной структуры действуют взаимонезависимые случайные сигналы:



$$x(t)=0,5t-2U_1t^2+U_2, \quad M[U_1^2]=0,5;\ M[U_2^2]=1;$$

$$f(t)=1+t+0,2U_3t, \quad M[U_3^2]=0,2.$$

Определить статистические характеристики $m_y(t)$, $K_Y(t_1, t_2)$, $D_y(t)$.

Решение.

1. Т.к. на ЛС АС действует 2 взаимонезависимых входных сигнала, то неслучайные статистические характеристики полезного выходного сигнала будут состоять из двух слагаемых:

$m_y(t)=m_{y_x}(t)+m_{y_f}(t);\ K_Y(t_1, t_2)= K_{Yx}(t_1, t_2)+ K_{Yf}(t_1, t_2);\ D_Y(t)= D_{Yx}(t)+ D_{Yf}(t)=K_Y(t, t).$

2. Определяем функции канонического разложения случайных входных сигналов:

$m_x(t)=0,5t;\ \varphi_1(t)=-2t^2;\ \varphi_2(t)=0;\ D_1=0,5;\ D_2=1.$

$m_f(t)=1+t;\ \varphi_3(t)=0,2t;\ D_3=0,2$

3. Определим требуемые передаточные функции:

$$\Phi(p)=\frac{10(2p+1)}{10(2p+1)+p^2(p+1)}=\frac{20p+10}{p^3+p^2+20p+10};$$

$$\Phi_{FY}(p)=\frac{2(2p+1)/p}{1+W(p)}=\frac{2(p+1)(2p+1)p}{p^3+p^2+20p+10}=\frac{4p^3+6p^2+2p}{p^3+p^2+20p+10}.$$

4. Вычислим математическое ожидание и координатные функции выходного сигнала посредством коэффициентов ошибок, т.к. одноименные характеристики входных сигналов представлены в полиномиальном виде:

$m_{y_x}(t)=\tilde{S}_0 m_x(t)+\tilde{S}_1 \dot{m}_x(t);$

$\psi_1(t)=\tilde{S}_0\varphi_1(t)+\tilde{S}_1\dot{\varphi}_1(t)+\tilde{S}_2\ddot{\varphi}(t);$

$\psi_2(t)=\tilde{S}_0\varphi_2,$

$$\Phi(p)=\frac{20p+10}{p^3+p^2+20p+10}=\tilde{S}_0+\tilde{S}_1 p+\tilde{S}_2 p^2+\cdots,$$

$$20p+10=(S_0+S_1 p+S_2 p^2+\cdots)(p^3+p^2+20p+10),$$

$$\begin{array}{l|ll} p^0 & 10=10S_0 & \tilde{S}_0=1; \\ p^1 & 0=20S_0+10S_1 & \tilde{S}_1=0; \\ p^2 & 0=S_0+20S_1+10S_2 & \tilde{S}_2=-0{,}1. \end{array}$$

$$\dot{m}_x(t)=0{,}5;\quad \dot{\varphi}_1(t)=-4t;\quad \ddot{\varphi}(t)=-4;$$

$$m_{y_x}(t)=0{,}5t;$$

$$\psi_1(t)=-2t^2+0{,}4;\quad \psi_2(t)=1;$$

б) $m_{y_f}(t)=S_{f0}m_f(t)+S_{f1}\dot{m}_f(t);$

$\psi_3(t)=S_{f0}\varphi_3(t)+S_{f1}\dot{\varphi}_3(t);$

$$\Phi_{FY}(p)=\frac{4p^3+6p^2+2p}{p^3+p^2+20p+10}=S_{f0}+S_{f1}p+S_{f2}p^2+\cdots,$$

$$4p^3+6p^2+2p=(S_{f0}+S_{f1}p+S_{f2}p^2+\cdots)$$

$$(S_0+S_1 p+S_2 p^2+\cdots)(p^3+p^2+20p+10),$$

$$\begin{array}{l|ll} p^0 & 0=10S_{f0}; & S_{f0}=0; \\ p^1 & 2=20S_{f0}+10S_{f1} & S_{f1}=0{,}2; \end{array}$$

$\dot{m}_f(t)=1;\quad \varphi_3(t)=0{,}2;$

$m_{y_f}(t)=0{,}2;\quad \psi_3(t)=0{,}2\cdot 0{,}2=0{,}04.$

5. Вычислим статические характеристики полезного выходного сигнала:

$m_y(t)=0{,}5t+0{,}2;$

$K_y(t_1,t_2)=K_{Yx}(t_1,t_2)+K_{Yf}(t_1,t_2),$

$K_Y(t_1,t_2)=D_1\psi_1(t_1)\,\psi_1(t_2)+D_2\psi_2(t_2)\,\psi_2(t_2)+D_3\psi_3(t_1)\,\psi_3(t_2)=$

$=0{,}5(-2t_1^2+0{,}4)(-2t_2^2+0{,}4)+1+0{,}2\cdot 0{,}04^2;$

$D_y(t)=K_y(t,t)=0{,}5(-2t^2+0{,}4)^2+1+0{,}32\cdot 10^{-3}.$

На самостоятельной подготовке определить $m_E(t)$, $K_E(t_1, t_2)$, $D_E(t)$ и записать выражения для $y(t)$ и $e(t)$.

$$y(t)= m_{yx}(t)+\sum_{i=1}^{2}U_i\psi_i(t)+m_{y_f}(t)+U_3\psi_3(t);$$

$$e(t)= m_{ex}(t)+\sum_{i=1}^{2}U_i\psi_{e_i}(t)+m_{y_f}(t)+U_3\psi_3(t).$$

2.19. Определение статистических характеристик выходного сигнала АС, находящихся под воздействием случайных сигналов, представленных в канонической форме (гармоническая функция).

Статистические характеристики выходных сигналов стохастических АС, функции канонического разложения случайных входных сигналов которых представлены в виде степенного ряда, т.е.

$$m_x(t) = a_0+a_1t+ a_2t^2+\ldots,$$
$$\varphi_I(t)= в_0+в_1t+ в_2t^2+\ldots.$$

1. Как определяются неслучайные характеристики случайных выходных сигналов АС?

Неслучайные характеристики случайных выходных сигналов АС в этом случае могут быть определены по формулам:

$$m_y(t)=S_0m_x(t)+S_1\dot{m}_x(t)+\ldots,\quad \psi_I(t)=S_0\,\varphi(t)+ S_1\dot{\varphi}(t)\ldots,$$

$$K_y(t_1, t_2)=\sum_{i=1}^{к}D_i\psi_i(t_1)\psi_i(t_2),\quad D_y(t)= K_y(t, t)=\sum_{i=1}^{к}D_i\psi_i^2(t),$$

где $k=1,2,\ldots$- количество случайных составляющих в выходном сигнале.

На сегодняшнем занятии рассмотрим случаи, когда функции канонического разложения случайного входного сигнала:

$$x(t)=m_x(t)+ \sum_{i=1}^{к}U_i\varphi_i(t),$$

т.е. $m_x(t)$ и $\varphi_i(t)$ представлены в гармоническом виде:

$$m_x(t)= A_{m_x}\,sin(\omega_{m_x}t+\Delta_{m_x}),$$

$$\varphi_i(t)= A_{\varphi_i}\,coo(\omega_{\varphi_i}t+\Delta_{\varphi_i}).$$

2. Как в этом случае определяются неслучайные характеристики случайных выходных сигналов АС?

В этом случае математическое ожидание выходных сигналов и их координатные функции можно найти как реакцию АС на соответствующие гармонические составляющие входного сигнала посредством соответствующих частотных характеристик:

$$m_y(t)= A_{my}Sin(\omega_{m_x}t+\Delta_{m_y}),$$

где $\qquad A_{my} = A_{m_x}\left|\Phi(j\omega_{m_x})\right|;$

$$\Delta_{m_y} = arg\,\Phi(j\omega_{m_x}) + \Delta_{m_x}$$

$$m_E(t) = A_{mE}\,Sin(\omega_{m_x}t + \Delta_{m_E}),$$

где $\qquad A_{mE} = A_{m_x}\left|S(j\omega_{m_x})\right|;$

$$\Delta_{mE} = arg\,S(j\omega_{m_x}) + \Delta_{m_x}.$$

$$\psi_{yi}(t) = A_{\psi_{yi}}Cos(\omega_{\varphi i}t + \Delta_{\psi_{yi}}),$$

где $\qquad A_{\psi\,yi} = A_{\varphi i}\left|\Phi(j\omega_{\varphi_i})\right|;$

$$\Delta_{\psi_i} = arg\,\Phi(j\omega_{\psi_i}) + \Delta_{\psi_i}.$$

$$\psi_{Ei}(t) = A_{\psi_{Ei}}Cos(\omega_{\varphi i}t + \Delta_{\psi_{Ei}}),$$

где $\qquad A_{\psi\,Ei} = A_{\varphi i}\left|S(j\omega_{\varphi_i})\right|;$

$$\Delta_{\psi_{Ei}} = arg\,S(j\omega_{\psi_i}) + \Delta_{\psi_i}.$$

Остальные статические характеристики $K_y(t_1, t_2)$; $K_E(t_1, t_2)$; $D_y(t)$; $D_E(t)$ вычисляются по тем же формулам, что и в предыдущем случае.

Задача №1.

Определить функции канонического разложения случайного сигнала и его статические характеристики.

$$x(t)=5Cost-2+U_1\,Sin(2t+\pi/4).$$

Решение:

$$m_x(t)=5Cost-2\ (m_x= m_{x1}+ m_{x2}),$$

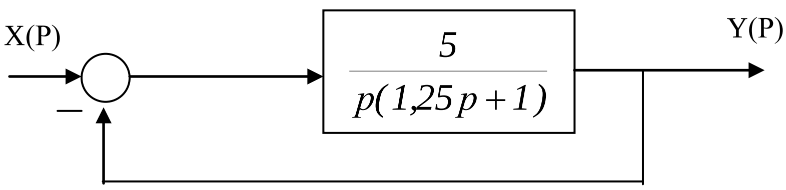
$$\varphi_1(t)= Sin(2t+\pi/4) \quad (A_{\varphi I}=1;\ \omega_{\varphi I}=2;\ \Delta_{\varphi I}=\pi/4),$$

$$K_x(t_1, t_2)=D_1\varphi_1(t_1)\ \varphi_1(t_2)= D_1\ Sin(2t_1+\pi/4)\ Sin(2t_2+\pi/4),$$

$$D_x(t) = K_x(t, t) =D_1\ Sin^2(2t+\pi/4)\ .$$

Задача №2.

Структурная схема АС имеет вид:



Определить $m_y(t)$; $K_y(t_1, t_2)$; $D_y(t)$ и на самоподготовке $m_E(t)$; $K_E(t_1, t_2)$; $D_E(t)$, если

x(t) – случайный входной сигнал, заданный каноническим разложением:

$$x(t)=0,5Sin\ t+ 0,4U\,Sin(2t+\pi/6), \quad M[U^2]=0,2.$$

Решение:

1. Определить функции канонического разложения случайного входного сигнала и вид выходного сигнала:

$$m_x(t)=5Sin\ t;\quad A_{mx}=0{,}5;\quad \omega_{mx}=1\ c^{-1};\quad \Delta_{mx}=0.$$

$$\varphi(t)=0{,}4\ Sin(2t+\pi/6);\ A_\varphi=0{,}4;\quad \omega_\varphi=2\ c^{-1};\quad \Delta_\varphi=\pi/6\ рад.$$

$$y(t)=m_y(t)+U\psi(t).$$

2. Определить функции канонического разложения выходного случайного сигнала как реакцию АС на функции канонического разложения случайного входного сигнала:

$$m_y(t)=A_{my} Sin(\omega_{m_x} t+\Delta_{m_y}),$$

$$A_{my}=A_{m_x}\left|\Phi(j\omega_{m_x})\right|;$$

$$\Delta_{m_y}=arg\,\Phi(j\omega_{m_x})+\Delta_{m_x}.$$

$$\psi(t)=A_\psi Sin(\omega t+\Delta_\psi),$$

$$A_\psi=A_\varphi\left|\Phi(j\omega_\varphi)\right|;$$

$$\Delta_{\psi y}=arg\,\Phi(j\omega_\psi)+\Delta_\psi.$$

Следовательно, для нахождения $m_y(t)$ и $\psi(t)$ необходимо вычислить значения АЧХ и ФЧХ АС на соответствующих частотах ω_{mx} и ω_φ

$$\Phi(p)=\frac{W(p)}{1+W(p)}=\frac{5}{p(1{,}25p+1)+5};$$

$$\Phi(j\omega)=\frac{5}{5-1{,}25\omega^2+j\omega};$$

$$\left|\Phi(j\omega)\right|=\frac{5}{\sqrt{(5-1{,}25\omega^2)^2+\omega^2}};\ arg\,\Phi(j\omega)=-arctg\frac{\omega}{5-1{,}25\omega^2}.$$

$$\left|\Phi(j\omega_{mx})\right|=\frac{5}{\sqrt{(5-1{,}25)^2+1}}=\frac{5}{\sqrt{15{,}0625}}\cong\frac{5}{3{,}9}\approx 1{,}3;$$

$$\left|\Phi(j\omega_\varphi)\right|=\frac{5}{\sqrt{(5-1{,}25\cdot 4)^2+4}}=2{,}5;$$

$$arg\,\Phi(j\omega_{m_x})=-arctg\frac{1}{5-1{,}25}\approx -arctg0{,}27,$$

.

Тогда $m_y(t)=0{,}5\cdot 1{,}3\ Sin(t - arctg0{,}27)=0{,}65\ 3\ Sin(t - arctg0{,}27).$

$\psi(t)=0{,}4\cdot 2{,}5\ Sin(2t-\pi/2+\pi/6)=1\ Sin(2t-\pi/3).$

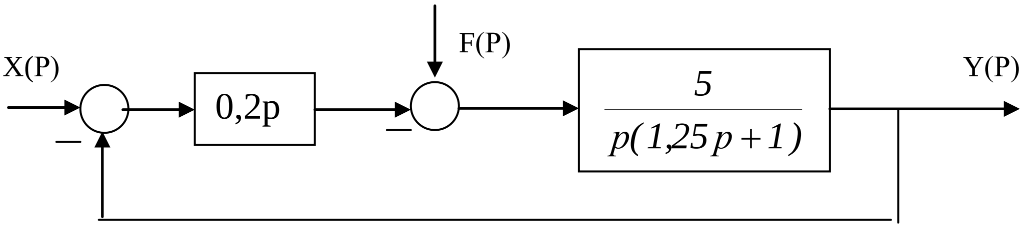
3. Определим $K_y(t_1, t_2)$ и $D_y(t)$:

$$K_y(t_1, t_2)=D_1\psi(t_1)\ \psi(t_2)=0{,}2\cdot 1\ Sin(2t_1+\pi/3)\ Sin(2t_2+\pi/3)$$

$$D_y(t)=K_y(t,t)=0{,}2Sin^2(2t-\pi/3)\ .$$

Задача №3.

Для автоматической АС заданной структуры:



Определить статистические характеристики ошибки АС в установившемся режиме, если случайные сигналы $x(t)$ и $f(t)$ имеют вид:

$x(t)=U_1\ Sin\sqrt{3}\,t;\ \ M[U_1^2]=1.$

$f(t)=0{,}1+Sin\ 2t+U_2\ Cost;\ M[U_2^2]=0{,}01.$

Решение:

1. Определим функции канонического разложения случайных входных сигналов и общий вид выражений для $m_E(t);\ K_E(t_1,t_2)$; $D_E(t)$:

$$m_x(t)=0;\ \varphi_x(t)=Sin\sqrt{3}\,t;\ A_{\varphi x}=1;\ \omega_{\varphi x}=\sqrt{3}\,;\ \ \Delta_{\varphi x}=0.$$

$$m_f(t)=m_1+m_2=0{,}1+Sin\ 2t;\ m_1=0{,}1=Cos\ t;$$

$$m_2=Sin\ 2t;\ \ Am_2=1;\ \omega m_2=2;\ \Delta m_2=0.$$

$$\varphi_f=Cos\ t;\ A\varphi_f=1;\ \omega\varphi_f=1;\ \Delta\varphi_f=0.$$

Тогда

$$m_E(t)=m_1(t)\cdot\Phi_{FE}(0)+Am_2\left|\Phi_{F_E}(j\omega_{m_2})Sin(\omega_{m_2}t+\Delta m_{E_2}\right|;$$

$$K_E(t_1,t_2)=D_1\psi_{Ex}(t_1)\ \psi_{Ex}(t_2)+D_2\psi_{Ef}(t_1)\ \psi_{Ef}(t_2);$$

$$D_E(t)=K_E(t,t).$$

2. Вычислим потребные сомножители для дальнейшего определения выше перечисленных характеристик.

$$\psi_{Ex}(t)=A_{Ex}Sin(\omega_{\varphi x}t+\Delta_{\varphi x});$$

$$\psi_{Ef}(t)=A_{Ef}Cos(\omega_{\varphi f}t+\Delta_{\varphi f});$$

где

$$A_{Ex}=A_{\varphi x}\left|S(j\omega_{\varphi_x})\right|;\quad \Delta_{\psi\,x}=arg\,S(j\omega_{\varphi_x})+\Delta_{\varphi\,x}\,.$$

$$A_{Ef}=A_{\varphi f}\left|\Phi_{F_E}(j\omega_{\varphi f})\right|;\quad \Delta_{\psi\,f}=arg\,\Phi_{F_E}(j\omega_{\varphi f})+\Delta_{\varphi\,f}\,.$$

$$S(p)=-\frac{1}{1+W(p)}=-\frac{0{,}6p+1}{p+1};\qquad\qquad S(j\omega)=-\frac{1+j0{,}6\omega}{1+j\omega};$$

$$\left|S(j\omega)\right| = \frac{\sqrt{1+(0{,}6\omega)^2}}{\sqrt{1+\omega^2}}; \qquad arg\,S(j\omega) = arg\frac{-0{,}6\omega}{-1} - arctg\omega;$$

$$\Phi_{F_E}(p) = \frac{2/(0{,}6p+1)}{1+W(p)} = \frac{2}{p+1}; \qquad \Phi_{F_E}(j\omega) = \frac{2}{1+j\omega};$$

$$\left|\Phi_{F_E}(j\omega)\right| = \frac{2}{\sqrt{1+j\omega^2}}; \quad arg\,\Phi_{F_E}(j\omega) = -arctg.$$

Тогда: $\Phi_{F_E}(0) = 2;$

$$\left|\Phi_{F_E}(j\omega_{m_2})\right| = \frac{2}{\sqrt{1+2^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}};$$

$$\Delta m_{E_2} = arcrc\omega_{m_2} = -arctg2;$$

$$\left|S(j\omega_{\varphi_x})\right| = \frac{\sqrt{1+(0{,}6\sqrt{3})^2}}{\sqrt{1+\sqrt{3}^2}} \approx \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\Delta_{\psi\,x} = arcrc\frac{-0{,}6\sqrt{3}}{-1} - arctg\sqrt{3};$$

$$\left|\Phi_{F_E}(j\omega_{\varphi_f})\right| = \frac{2}{\sqrt{1+1}} = \sqrt{2};$$

$$\Delta_{\psi\,f} = -arcrc1 = -\pi/4;$$

3. Вычислим конечные значения статистических характеристик ошибки АС:

$$m_E(t) = m_1(t)\cdot\Phi_{FE}(0) + Am_2\left|\Phi_{F_E}(j\omega_{m_2})Sin(\omega_{m_2}t + \Delta m_{E_2}\right| =$$

$$= 0{,}1\cdot 2 + 1\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}Sin(2t - arctg2);$$

$$K_E(t_1, t_2) = D_1\psi_{Ex}(t_1)\ \psi_{Ex}(t_2) + D_2\psi_{Ef}(t_1)\ \psi_{Ef}(t_2) =$$

$$= 1\cdot 1\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}Sin(\sqrt{3}t_1 + arctg\frac{-0{,}6\sqrt{3}}{-1} - arctg\sqrt{3})\times$$

$$\times Sin(\sqrt{3}t_2 + arctg\frac{-0{,}6\sqrt{3}}{-1} - arctg\sqrt{3}) +$$

$$+0{,}01\cdot 1\cdot\sqrt{2}\cdot Cos(t_1-\pi/4)\ Cos(t_2-\pi/4);$$

$$D_E(t) = K_E(t, t) = \sqrt{2}\times$$

$$\times\left[\frac{1}{2}Sin^2(\sqrt{3}t + arctg\frac{-0{,}6\sqrt{3}}{-1} - arctg\sqrt{3}) + 0{,}01Cos^2(t-\pi/4)\right].$$

На самостоятельной подготовке вычислить статистические характеристики случайного выходного сигнала *y(t)*.

2.20. Метод формирующего фильтра.

Не все случайные сигналы можно представить в канонической форме. В этом случае задача определения случайной ошибки или случайного полезного выходного сигнала АС существенно упрощается, если воздействующие на нее случайные входные сигналы стационарны (ССС).

1. Какой случайный сигнал называется стационарным?

Случайный сигнал называется стационарным, если

$$M[x(t)] = const;\ K_x(t_1,t_2)=K_x(t_2-t_1)=K_x(\tau).$$

В этом случае для оценки количественных характеристик случайных сигналов широко используется функция спектральной плотности

$$S_x(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} K_x(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau = 2\int_0^{\infty} K_x(\tau)\cos\omega\tau \cdot d\tau .$$

2. Что характеризует собой спектральная плотность (физический смысл)?

Спектральная плотность характеризует собой распределение мощности сигнала по частотам и является функцией действительной и четной, т.е.

$$S_x(\omega)=S_x(-\omega).$$

Она связана с $K_x(\tau)$ посредством обратного преобразования Фурье:

$$K_x(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega)e^{j\omega\tau}d\omega = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} S_x(\omega)\cos\omega\tau d\omega .$$

Дисперсия стационарного, случайного сигнала определяется через спектральную плотность:

$$D_x = K_x(0)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} S_x(\omega)d\omega .$$

3. Как определяется спектральная плотность выходного сигнала (например, ошибки)?

Спектральная плотность выходного сигнала определяются по формуле:

$$S_{E_x}(\omega)=\left|\Phi_{XE}(j\omega)\right|^2 S_x(\omega).$$

4. Как определяется спектральная плотность выходного сигнала, если на АС воздействует несколько стационарных некоррелированных, случайных входных сигналов?

Если на АС воздействует несколько стационарных некоррелированных, случайных входных сигналов, то

$$S_E(\omega)=\sum_{i=1}^{m} S_{EX_i}(\omega)=\sum_{i=1}^{m}\left|\Phi_{x_iE}(j\omega)\right|^2 S_{xi}(\omega).$$

Определив функцию спектральной плотности выходного сигнала (ошибки) можно вычислить его корреляционную функцию и дисперсию, используя обратное преобразование Фурье:

$$K_E(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}S_E(\omega)e^{j\omega\tau}d\omega=\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty}S_E(\omega)\cos\omega\tau\cdot d\omega,$$

$$D_E=K_E(0)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty}S_E(\omega)d\omega.$$

Вычисление дисперсии $D_E(t)$ существенно упрощается, если на вход АС воздействует «белый шум».

5. Какой случайный сигнал называется «белым шумом»?

«Белым шумом» называется стационарный, случайный сигнал, для которого

$$K_{б.ш.}(\tau)=S_{б.ш.}\delta(\tau),$$

где $S_{б.ш.}$- интенсивность или спектральная плотность «белого шума»

$$S_{б.ш.}=const.$$

6. Как определяются статистические характеристики выходного сигнала стохастической АС в случае воздействия на нее сигналов типа «белый шум»?

В этом случае

$$S_{E_x}(\omega)=\left|\Phi_{XE}(j\omega)\right|^2 S_{б.ш.},$$

т.е. определяется как в обычном случае, а дисперсия

$$D_E=S_{б.ш.}\int\limits_{0}^{\infty}g_E^2(\tau)d\tau=S_{б.ш.}\frac{\Delta_B}{2a_m\Delta}, \qquad (1)$$

$$L[g_E(\tau)]=\frac{b_0+b_1p+b_2p^2+\cdots+b_mp^m}{a_0+a_1p+a_2p^2+\cdots+a_np^n}=\Phi_{E_{б.ш.}}(p),$$

где n – порядок характеристического полинома передаточной функции,

$$\Delta=.\begin{vmatrix} a_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_2 & a_1 & -a_0 & \cdots & 0 \\ a_4 & -a_3 & a_2 & -a_1\;-a_0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0\;\;0 & 0 & 0 & -a_n & a_{n-1} \end{vmatrix}; \quad \Delta_B=.\begin{vmatrix} a_0 & 0 & 0 & \cdots & B_0 \\ -a_2 & a_1 & -a_0 & \cdots & B_1 \\ a_4 & -a_3 & a_2 & -a_1\;-a_0 & B_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0\;\;0 & 0 & 0 & 0 & B_{n-1} \end{vmatrix},$$

$$\begin{cases} B_0=в_0^2 \\ B_1=в_1^2-2в_0в_2 \\ B_2=в_2^2-2в_1в_3+2в_0в_4 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ B_{n-1}=в_{m-1}^2 \end{cases} \qquad \begin{matrix} если\ n=1, то \\ a_{n-1}=a_0 \\ B_{n-1}=B_0 \end{matrix}$$

7. Что представляет собой «метод формирующего фильтра»?

Если входной, случайный сигнал не является «белым шумом», т.е. $S_x(\omega)\neq const$, то с целью применения формулы (1), его представляют как результат преобразования «белого шума» формирующим фильтром.

Итак, формирующим фильтром для стационарного, случайного сигнала $x(t)$ называется устойчивая линейная стационарная система преобразующая сигнал типа «белый шум» в данный случайный стационарный сигнал.

$$\xrightarrow{\text{б.ш.}} \boxed{W_{\Phi}(P)} \xrightarrow{X.(p)} \qquad x(t)=L^{-1}\left[X(p)\right].$$

В соответствии с общей формулой определения спектральной плотности выходного стационарного, случайного сигнала

$$S_x(\omega)=.\left|W_\phi(j\omega)\right|^2\cdot S_{б.ш.}=W_\phi(j\omega)\cdot W_\phi(-j\omega)\cdot S_{б.ш.}$$

Пусть $S_x(\omega)=S_1(j\omega)\cdot S_1(-j\omega)$, тогда

$$S_1(j\omega)\cdot S_1(-j\omega)=W_\phi(j\omega)\cdot\sqrt{S_{б.ш.}}\cdot W_\phi(-j\omega)\cdot\sqrt{S_{б.ш.}}\text{, откуда}$$

$$W_\phi(j\omega)\cdot=\frac{S_1(j\omega)}{\sqrt{S_{б.ш.}}};,$$

$$W_\phi(p)=\frac{1}{\sqrt{S_{,б.ш.}}}S_1(p)$$

Пусть на АС воздействует один стационарный случайный входной сигнал ($S_x(\omega)\neq const$).

1. Определяем передаточную функцию формирующего фильтра $W_{ф.}(p)$ из уравнения

$$S_x(\omega)=.\left|W_\phi(j\omega)\right|^2\cdot S_{б.ш.}=W_\phi(j\omega)\cdot W_\phi(-j\omega)\cdot S_{б.ш.},$$

принимая $S_{б.ш.}=1$.

2. Определяем передаточную функцию для выходного сигнала (ошибки) от заданного входного стационарного, случайного сигнала : $\Phi_{XE}(p)$.

3. Определяем передаточную функцию АС для выходного сигнала (ошибки) в случае воздействия на ее вход «белого шума»

$$\Phi_{б.ш.е.}(p)=W_{.ф.}(p)\cdot W_{xe}(p).$$

4. По формуле $D_E=S_{б.ш.}\int\limits_0^\infty g_E^2(\tau)d\tau=S_{б.ш.}\dfrac{\Delta_B}{2a_m\Delta}$ определяем дисперсию ошибки (выходного сигнала $y(t)$): D_E.

Примечание: Если входной сигнал – «белый шум», то пункты 1 и 3 не выполняются.

Если на АС воздействуют случайные и детерминированные входные сигналы, то детерминированный входной сигнал правомочно представить как случайный, заданный в канонической форме:

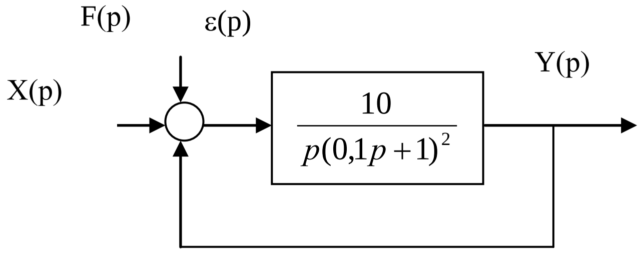
$$X_i(t)=m_{xi}(t);\ D_{xi}=0;\ \phi_1,\phi_{2\ldots}=0.$$

Математическое ожидание ошибки для сигнала $x_i(t)$ определяется в этом случае либо частотным методом, либо с использованием коэффициентов ошибок, а дисперсия ошибки $D_{Exi}=0$.

При воздействии на АС нескольких случайных входных сигналов, задача решается для каждого некоррелированного сигнала, а полученные в результате характеристики выходного сигнала m_{Ei}; K_{Ei}; D_{Ei} складываются.

Решение задач.

Задача №1.



Для АС с заданной структурой определить математическое ожидание и дисперсию ошибки в установившемся режиме, если:

$x(t)=2\text{-}5t$ - неслучайный полезный сигнал,

$F(t)$ – « белый шум» с интенсивностью $S_F=0,1$.

Сигналы $x(t)$ и $F(t)$ – некоррелированы.

Решение.

1. Определение математического ожидания выходного сигнала (ошибки):

$$m_E(t)= m_{Ex}(t)+m_{EF}(t)ю$$

Математическое ожидание выходного сигнала – это реакция АС на математическое ожидание входного сигнала.

Т.к. $m_x(t)=2\text{-}5t$, то реакцию АС на такой входной сигнал можно определить, используя разложение выходного сигнала (математического ожидания ошибки) по производным входного сигнала (т.е. $m_x(t)$

$$m_{Ex}(t)=S_o m_x(t)+S_1 m_x^{(1)}(t)+S_2 m_x^{(2)}(t)+\ldots.$$

Коэффициенты Si определяются:

$$\Phi_{Ex}=\frac{1}{1+W(p)}=-\frac{P(0{,}1p+1)^2}{P(0{,}1p+1)^2+10}=S_0+S_1p+S_{\cdot 2}\,p^2+\cdots$$

$$S_{\cdot 0}=\Phi_{,Ex}(0)=0;$$

$$-1=10S_1\rightarrow S_1=-0{,}1;$$

Тогда $\quad m_{Ex}(t)=S_1 \cdot m_x^{(1)}(t)=0.5.$

$m_{EF}(t)=)$, т.к. $m_F(t)=0$ – по определению белого шума» как центрированного с с с .

Т.о. $m_E(t)=m_{Ex}(t)=0,5.$

2.Определение дисперсии ошибки:

$D_E=D_{Ex}+D_{EF}$, но т.к.

$x(t)$ –неслучайный сигнал, то $D_{Ex}=0,$

$F(t)$ –« белый шум», то

$$D_{EF}=S_F\int_0^{\infty} g^2(\tau)d\tau=S_F\,\frac{\Delta B}{2a_n\Delta}.$$

Элементы определителей Δ_B и Δ определяются по передаточной функции:

$$\Phi_{FE}(p)=\frac{W(p)}{1+W(p)}=\frac{10}{0{,}1p^3+0{,}2p^2+p+10};$$

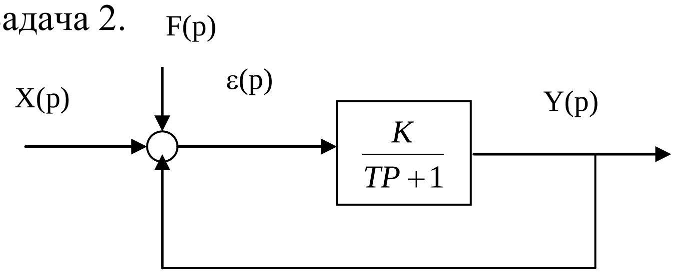
$n=3,$

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_0 & 0 & 0\\ -a_2 & a_1 & -a_0\\ 0 & -a_3 & a_2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 10 & 0 & 0\\ -0{,}2 & 1 & -10\\ 0 & 0{,}01 & 0{,}2\end{vmatrix}=10(1\cdot 0.2-1-10\cdot 0{,}01)=1;$$

$$\Delta_B=\begin{vmatrix} a_0 & 0 & B_0\\ -a_2 & a_1 & B_1\\ 0 & -a_3 & B_2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 10 & 0 & 100\\ -0{,}2 & 1 & 2\\ 0 & 0{,}01 & 0\end{vmatrix}=100(0{,}2\cdot 0{,}01-0)=0{,}2$$

$$B_0=в_0^2=100,$$
$$B_1=в_1^2-2в_0в_2=0,$$
$$B_2=0,$$
$$Т.о.\quad D_E=D_{EF}=0{,}1\frac{0{,}2}{2\cdot 0{,}01\cdot 1}=1.$$

Задача 2.



Для автоматической системы с заданной структурой определить спектральную плотность $S_E(\omega)$ и дисперсию D_E ошибки в установившемся режиме, если $S_x(\omega)=\dfrac{1}{1+\tau^2\omega^2}$; $F(t)$ – «белый шум» с интенсивностью $S_F=0{,}1,\ K=4,$ $T=0{,}5,\ \tau=0{,}4.$

Решение:

1. Определение $S_E(\omega)$:

$$S_E(\omega)=\left|\Phi_{Ex}(j\omega)\right|^2\cdot S_x(\omega)+\left|\Phi_{EF}(j\omega)\right|^2\cdot S_F(\omega);$$

$$\Phi_{Ex}(p)=-\frac{1}{1+W(p)}=-\frac{Tp+1}{Tp+(1+K)}.$$

Тогда

$$S_E(\omega)=\frac{T^2\omega^2+1}{T^2\omega^2+(k+1)}\cdot\frac{1}{1+\tau^2\omega^2}+\frac{K^2\cdot 0{,}1}{T^2\omega^2+(\kappa+1)};$$

2.Определение дисперсии ошибки:

$$D_E=D_{Ex}+D_{EF};$$

2.1. Т.к. $x(t)$ не «белый шум», то предварительно определяем для сигнала x(t) передаточную функцию формирующего фильтра, при условии, что на его вход действует «белый шум» с $S_{б.ш.}=1$.

$$S_x(\omega)=\left|W_ф(j\omega)\right|^2\cdot S_{б.ш.};$$

$$S_x(\omega)=.\frac{1}{1+\tau^2\omega^2}=\frac{1}{1+j\omega\tau}\cdot\frac{1}{1-j\omega\tau}=W_ф(j\omega)\cdot W_ф(-j\omega);$$

Откуда

$$W_ф(j\omega)=\frac{1}{1+j\omega\tau};\Rightarrow W_ф(p)=\frac{1}{\tau p+1};$$

В этом случае дисперсия

$$D_E=D_{EX}+D_{EF}=S_{б.ш.}\int_0^\infty g_1^2(\tau)d\tau+S_F\int_0^\infty g_2^2(\tau)d\tau,\quad где$$

$$.\,L\left[g_1(\tau)\right]=\Phi_{EX}(p)\cdot W_ф(p);\ L\left[g_2(\tau)\right]=\Phi_{EF};$$

2.2. $.\,\Phi_{EX}(p)=\dfrac{Tp+1}{Tp+(\kappa+1)};\quad \Phi_{EX}(p)=\dfrac{K}{Tp+(\kappa+1)};$

Тогда $L\left[g_1(\tau)\right]=-\dfrac{Tp+1}{(Tp+1+\kappa)(\tau p+1)};\ \ L\left[g_2(\tau)\right]=-\dfrac{K}{Tp+(\kappa+1)}.$

2.3. Применяем метод интегральной квадратичной оценки

$$D_{Ex}=S_{б.ш.}\frac{\Delta_B}{2a_n\Delta};\quad n=2,$$

$$\Delta=\begin{vmatrix}a_0 & 0\\ -a_2 & a_1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}(1+\kappa) & 0\\ -T\tau & \left[T+(1+\kappa)\tau\right]\end{vmatrix}=(1+\kappa)\left[T+(1+\kappa)\tau\right];$$

$$\varDelta=\begin{vmatrix} a_0 & B_0 \\ -a_2 & B_1 \end{vmatrix} = \begin{matrix} B_0=в_0^2=1 \\ B_1=в_1^2=T^2 \end{matrix} = \begin{vmatrix} (1+к) & 1 \\ -T\tau & T^2 \end{vmatrix} = T^2(1+к)+T\tau\,;$$

$$D_{EX}=\frac{T\left[T(1+к)+\tau\right]}{2\cdot T\tau\cdot(1+к)\left[T+(1+к)\tau\right]}=\frac{2{,}9}{10}=O{,}29;$$

.

$$D_{EF}=S_{\cdot F}\ \frac{\varDelta B}{2a_n\varDelta}\quad n=1,$$

$$\varDelta_A=\left|a_0\right|=1+к;\quad \varDelta_B=\left|B_0\right|=к^2\,;$$

$$D_{EF}=S_{\cdot F}\ \frac{K^2}{2T(1+к)}=0{,}32\,.$$

И окончательно имеем:

$$D_E=0{,}29+0{,}32=0{,}61.$$

Полученные формулы дисперсии в общем виде позволяют выбирать оптимальные значения параметров АС (*К,Т*) с точки зрения минимальной ошибки.

Задача №3 выдается для самостоятельного решения.

2.21. Синтез модального управления для линейной многомерной стационарной АС.

1. В чем суть метода модального управления? Чем отличается метод модального управления от метода стандартных коэффициентов?

Термин “модальное управление” означает управление корнями характеристического уравнения многомерной АС за счет формирования цепей обратных связей. Корни характеристического уравнения *det(Ep-A)=0* многомерной АС называются собственными числами или “модами” матрицы состояния *А*, отсюда название метода – “модальное уравнение”.

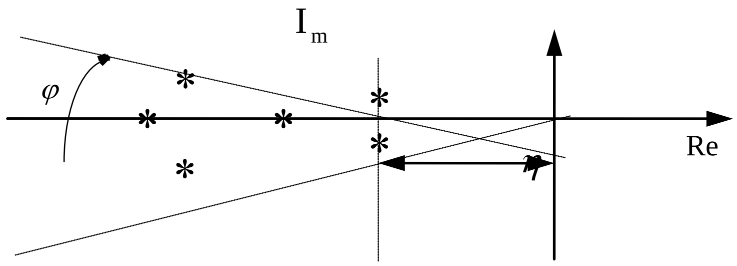
Целью метода стандартных коэффициентов является улучшение качества АС за счет обеспечения заданного распределения корней характеристического уравнения. Как видим – цель метода стандартных коэффициентов и модального управления одна и та же. Однако достигается она разными путями. В МСК – за счет подбора параметров элементов АС при неизменной структуре или за счет подбора параметров элементов АС при неизменной структуре или за счет введения корректирующих элементов АС и расчета их параметров. При решении задачи модального управления – за счет организации цепей обратных связей,т.е. за счет существенного изменения структуры АС.

2. Какими параметрами оценивается влияние расположения корней характеристического уравнения АС на качество её динамических процессов?

Влияние расположения корней характеристического уравнения АС на качество её динамических процессов исследовал Я.З. Цыпкин. Он предложил оценивать его двумя параметрами:

η- степень устойчивости, равна удалению от мнимой оси ближайших к ней действительного или пары комплексно-сопряженных корней.

$\mu = tg\varphi$- степень колебательности, где φ - половина угла минимального центрального сектора, охватывающего все полюса АС.



*–корни характеристического полинома передаточной функции АС.

Величина η определяет время регулирования АС. Очень грубо можно принять $t_p \approx 3/\eta$.

Степень колебательности μ тесно связана с перерегулированием

$$\Delta h_m \le e^{-\pi/\mu} \cdot 100\%$$ – формула Фельдбаума А.А.

Следовательно: $\downarrow\varphi \Rightarrow \downarrow\mu \Rightarrow \downarrow\Delta h_m$.

3. Каким свойством должен обладать объект управления

$$\dot{\vec{y}}(t) = A\vec{y}(t) + Bu(t)$$

для того, чтобы синтез модального управления был возможен?

Т.к. управление синтезируется за счет организации обратных связей

$$u(t) = -K^T y(t),$$

то объект должен быть полностью управляем, т.е. матрицы A и B должны удовлетворять условию полной управляемости:

$$rank[B \vdots AB \vdots A^2B \vdots \cdots \vdots A^{n-1}B] = n,$$

где n – порядок системы.

4. К чему сводится на практике поиск управления $u(t)$?

На практике поиск управления $u(t)$ сводится к определению элементов матрицы обратной связи K.

5. Чем отличается синтез управления для случаев скалярного и векторного управлений объектов?

В случае скалярного управления объектом задача модального управления разрешается однозначно (строго).

В случае векторного управления решение задачи модального управления не единственно, т.е. количество искомых элементов матрицы K больше количества алгебраических уравнений, из которых они определяются.

6. Из какого соотношения определяются элементы матрицы K в случае скалярного управления? Поясните компоненты этого соотношения.

Элементы матрицы K в случае скалярного управления определяются из ура-внения:

$$K^T C(p) = Q(p) - F(p),$$

где $C(p)$ – вектор столбец размерностью ($n\times 1$), каждый элемент которого является полиномом числителя элемента матричной передаточной функции, связывающего управление с соответствующей фазовой координатой для исходного (разомкнутого) объекта;

$F(p) = det(Ep\text{-}A)$ – характеристический полином исходного (разомкнутого) объекта управления;

$Q(p)$ – задаваемый полином стандартной формы того же порядка, что и $F(p)$.

7. Какие стандартные формы задаваемого полинома $Q(p)$ для статических АС, числитель ПФ которых постоянная величина, вы знаете?

Из лекций известны три стандартные формы задаваемого полинома $Q(p)$:

а) биноминальное

$$(p+\omega_0)^n = \sum_{K=0}^{n} Q_n^K p^{n-K} \omega_0^K,$$

где $Q_n^K = \dfrac{n!}{K!(n-K)!}$;

n – порядок полинома;

Q_n^K – коэффициенты бинома Ньютона.

Такая форма обеспечивает одинаковость всех корней полинома, n- кратность корней, все они действительны, отрицательны, а модуль каждого корня равен ω_0. Величина ω_0 – задается.

При выборе ω_0 руководствуется двумя посылками: первая – исходя из требований к быстродействию системы $(|\omega_0| = \eta; \quad t_p = 3/\eta);$ вторая – исходя из минимума энергетических затрат для управления с заданным качеством, ω_0 выбирают ≤ величины собственной частоты объекта управления.

Переходные характеристики для систем с биноминальными полиномами не имеют перерегулирования $(\varphi = 0, \mu = tg\varphi = 0, \Delta h_m = f(\mu))$, носят апериодический характер и именно поэтому они не являются оптимальными по времени регулирования, их быстродействие мало.

б) форма Баттерворта:

$p + \omega_0;$

$p^2+1{,}4\omega_0+\omega_0^2;$

$p^3+2\omega_0 p^2+2\omega_0^2+ \omega_0^3;$

$p^4+2{,}6\omega_0 p^3+3{,}4\omega_0^2 p^2+ 2{,}6\omega_0^3 p+ \omega_0^4$ и т.д.

Реакция систем с характеристическим полиномом Баттерворта на ступенчатое воздействие, по сравнению с аналогичными биноминальными системами, более колебательна и обладает более высоким быстродействием.

в) стандартная форма, доставляющая минимум интегральной квадратичной оценке

$$I = \int_0^\infty e^2(t)dt = \int_0^\infty [1-h(t)]^2 dt$$

определяется по формуле:

$$(p+\omega_0)^n = \sum_{K=0}^{n} Q_l^K \omega_0^K p^{n-K}, \quad Q_l^K = \frac{l!}{K!(l-K)!},$$

где n – порядок полинома;

$l=(K+n)/2$, если $K+n$ – четно;

$l=(K+n-1)/2$, если $K+n$ – нечетно.

Системы с такими характеристическими полиномами обладают еще большей колебательностью, естественно, за счет увеличения быстродействия.

Все перечисленные стандартные формы характеристических полиномов не универсальны (и не исчерпывают их перечень),т.к. обеспечивают описанное протекание процессов только в случае статических систем, числитель передаточной функции которых постоянная величина.

Порядок решения задачи синтеза модального управления для многомерных АС со скалярным управлением.

1. Из дифференциальных уравнений многомерной АС определяются элементы векторов y, u и матриц A, B.

2. Проверяются условия полной управляемости исходного объекта

$$rank[B \vdots AB \vdots A^2 B \vdots \cdots \vdots A^{n-1} B]=n,$$

Если это условие не выполняется, синтез модального управления невозможен.

3. Вычисляется характеристический полином исходного объекта управления (разомкнутой системы) и определяется второе условие возможности модального управления $F(p)\neq 0$:

$$F(p) = det(Ep-A).$$

4. Вычисляются элементы обратной матрицы

$$(Ep-A)^{-1}.$$

5. Определяется матричная передаточная функция

$$(Ep-A)^{-1}B=\frac{C(p)}{F(p)}.$$

Если элементы матричной передаточной функции представляют собой передаточные функции статических систем с числителем в виде константы, то синтез модального управления с применением рассмотренных стандартных форм полинома $Q(p)$ возможен. Если нет – необходимо обращаться к другим формам.

6. Выбирается форма полинома $Q(p)$ и величина ω_0.

7. Искомое управление, а именно коэффициенты матрицы K определяются из уравнения:

$$K^T C(p)=Q(p)-F(p).$$

Методом “модального управления” синтезировать систему управления боковым движением ЛА повышенного быстродействия с учетом инерционности привода рулевой поверхности (элеронов).

Линеаризованное уравнение изолированного движения ЛА по крену имеет вид:

$$\dot{\omega}_x = a_{m_x}^{\omega_x}\omega_x + a_{m_x}^{\delta_э}\delta_э,$$

где ω_x – скорость вращения ЛА вокруг продольной оси ОХ;

$\delta_э$ – отклонение элеронов;

$a_{m_x}^{\omega_x}\omega_x = 2{,}5$ – коэффициент демпфирования;

$a_{m_x}^{\delta_э}\omega_x = 3{,}5$ – коэффициент эффективности элеронов.

Привод описывается уравнением:

$$\dot{\delta}_э = -\frac{\delta_э}{T} + K_Э\frac{u}{T},$$

где $T=0{,}1$ – постоянная времени привода;

$K_Э=1$ – коэффициент усиления привода;

$u(t)$ – входной (управляющий) сигнал.

Решение.

1. Записываем систему дифференциальных уравнений объекта управления и привода, и определяем элементы векторов y, u и матриц A, B:

$$\begin{cases}\dot{\omega}_x = a_{m_x}^{\omega_x}\omega_x + a_{m_x}^{\delta_э}\delta_э \\ \dot{\delta}_э = -\delta_э/T + K_б u/T\end{cases}$$ порядок системы $n=2$.

или в матричной форме

$$\begin{bmatrix}\dot{\omega} \\ \dot{\delta}_э\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a_{m_x}^{\omega_x} & a_{m_x}^{\delta_э} \\ 0 & -\dfrac{1}{T}\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}\omega_x \\ \delta_э\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0 \\ \dfrac{K\delta}{T}\end{bmatrix}u,$$

где $\vec{y} = \begin{bmatrix}\omega_x \\ \delta_э\end{bmatrix}$; $A = \begin{bmatrix}a_{m_x}^{\omega_x} & a_{m_x}^{\delta_э} \\ 0 & -\dfrac{1}{T}\end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix}0 \\ \dfrac{K\delta}{T}\end{bmatrix}$; $U = u.$

Для этой системы необходимо синтезировать управление вида:

$$u = -\vec{K}^T y = -[K_1 K_2] \times \begin{bmatrix}\omega_x \\ \delta_э\end{bmatrix} = -K_1\omega_x - K_2\delta_э,$$

повышающее её быстродействие (т.е. определить коэффициенты K_1 и K_2).

2. Проверяем выполнение условия полной управляемости исходной системы

$$rank[B \vdots AB] = \begin{bmatrix}0 & \begin{bmatrix}-2{,}5 & -35 \\ 0 & -10\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 \\ 10\end{bmatrix} \\ 10 & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & -350 \\ 10 & -100\end{bmatrix} = 2$$

Следовательно,

$$rank[B \vdots AB] = dimA,$$

т.е. *rank* - облочной матрицы равен порядку системы – исходная система полностью управляема.

3. Вычисляем характеристический полином исходной (разомкнутой) системы:

$$F(p)=det(Ep\text{-}A)=\left|\begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & p \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} -2{,}5 & -35 \\ 0 & -10 \end{bmatrix}\right|=\begin{vmatrix} p+2{,}5 & 35 \\ 0 & p+10 \end{vmatrix}=$$

$$=(p+2{,}5)(p+10)=p^2+12{,}5p+25.$$

4. Вычисляем обратную матрицу $(Ep\text{-}A)^{-1}$.

Порядок вычисления обратной матрицы

$$(Ep\text{-}A)^{-1}=\frac{\tilde{S}(p)}{det(Ep-A)},$$

где $\tilde{S}(p)$-присоединенная матрица:

а) вычисляется определитель $det(E_p\text{-}A)$;

б) элементы матрицы $(E_p\text{-}A)$ замещаются их алгебраическими дополнениями.

Алгебраическим дополнением элемента a_{ij} называется выражение

$$\Delta_{ij}=(-1)^{i+j}(Ep-A)_{ij},$$

где $(Ep\text{-}A)_{ij}$ – определитель, получаемый после вычеркивания i-ой строки и j-го столбца (на пересечении которых находится элемент a_{ij});

в) матрица, составленная из алгебраических дополнений, транспортируется; т.е. получ. $\tilde{S}(p)$.

г) элементы полученной присоединенной матрицы $\tilde{S}(p)$ делятся на определитель исходной матрицы.

Итак, составим матрицу алгебраических дополнений для матрицы $(Ep\text{-}A)$, получим:

$$\begin{bmatrix} p+10 & 0 \\ -35 & p+2{,}5 \end{bmatrix}.$$

Транспортируем матрицу алгебраических дополнений и получаем присоединенную матрицу $\tilde{S}(p)$:

$$\tilde{S}(p)=\begin{bmatrix} p+10 & -35 \\ 0 & p+2{,}5 \end{bmatrix}$$

Разделим каждый элемент матрицы $\tilde{S}(p)$ на определитель исходной матрицы $det(Ep\text{-}A)=F(p)$, получим матрицу:

$$(Ep\text{-}A)^{-1}=\begin{bmatrix} \dfrac{p+10}{(p+2{,}5)(p+10)} & \dfrac{-35}{(p+2{,}5)(p+10)} \\ 0 & \dfrac{p+2{,}5}{(p+2{,}5)(p+10)} \end{bmatrix}.$$

5. Определим матричную передаточную функцию разомкнутой системы:

$$(Ep\text{-}A)^{-1}\vec{B} = \begin{bmatrix} \dfrac{p+10}{(p+2{,}5)(p+10)} & \dfrac{-35}{(p+2{,}5)(p+10)} \\ 0 & \dfrac{p+2{,}5}{(p+2{,}5)(p+10)} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{-350}{(p+2{,}5)(p+10)} \\ \dfrac{10(p+2{,}5)}{(p+2{,}5)(p+10)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_{u_{\omega_x}}(p) \\ W_{u_{\delta_э}}(p) \end{bmatrix} = \frac{\overrightarrow{C(p)}}{F(p)};$$

$$\overrightarrow{C(p)} = \begin{bmatrix} -350 \\ 10(p+2{,}5) \end{bmatrix}, \quad F(p)=(p+2{,}5)(p+10).$$

$W_{u_{\omega_x}}(p)\, и\, W_{u_{\delta_э}}(p)$- представляют собой передаточные функции статических систем с числителями в виде константы.

Следовательно, возможен синтез модального управления с применением рассмотренных стандартных форм полинома.

6. Выбираем форму полинома $Q(p)$ и величину ω_0.

Быстродействием исходной системы определяется расположением корней её характеристического уравнения:

$p_1=-2{,}5;\ p_2=-10.$

Следовательно, корнем p_1: $\eta = |p_1| = 2{,}5.$

Отсюда $t_p \approx 3/2{,}5 \approx 1{,}2$ c.

Т.к. оба корня действительные, то $\Delta h_m = 0$, т.е. динамические процессы системы носят апериодический характер.

Собственная частота объекта управления (ЛА) равна 2,5 с$^{-1}$

Если $Q(p)$ выбрать в виде биноминальной формы, то для увеличения быстродействия необходимо выбирать $\omega_0>2{,}5$, что приведет к дополнительным энергозатратам при управлении.

Если $Q(p)$ выбрать в форме Баттерворта, то при $\omega_0=2{,}5$ быстродействие системы повысится за счет колебательности в динамических процессах.

Обе формы полинома $Q(p)$ малоприемлевые для объекта управления, который является летательным аппаратом, но учитывая прогрессивное развитие источников энергии на ЛА, остановимся на биноминальной форме $Q(p)$.

Величину ω_0 выбираем равной 3.

$\omega_0=3.$ $t_p \approx 3/3 \approx 1$ c.

Т.е. быстродействие увеличивается на 0,2 с.

$$Q(p) = \sum_{K=0}^{n} Q_n^K p^{n-K} \omega_0^K, \qquad Q_n^K = \frac{n!}{K!(n-K)!}; \quad n=2,$$

$$Q(p)=\sum_{K=0}^{2} Q_2^K p^{2-K}\omega_0^K = p^2+6p+9.$$

7. Определяем элементы матрицы K, т.е. K_1, K_2:

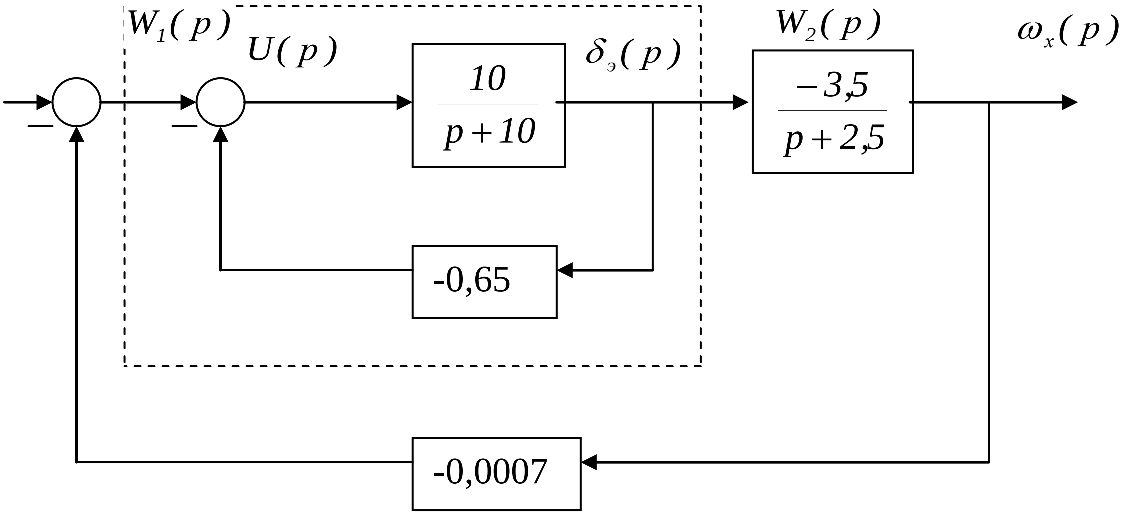
$$\vec{K}^T\vec{C}(p)=Q(p)-F(p).$$

$$\begin{bmatrix} K_1 & K_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -350 \\ 10(p+2{,}5) \end{bmatrix}=p^2+6p+9-(p^2+12{,}5p+25);$$

$-K_1 350+K_2 10p+K_2 25=-6{,}5p-16;$

$$\begin{array}{l|l} p^0 & -K_1 350+K_2\, 25=-16; \\ p^1 & 10K_2=-6{,}5; \qquad\qquad K_2=-0{,}65;\ \ K_1\approx-0{,}0007. \end{array}$$

8. Составим структурную схему синтезированной системы и убедимся в правильности синтеза.



$$W_1(p)=\frac{10}{p+10-6{,}5}=\frac{10}{p+3{,}5};\qquad W_1(p)W_2(p)=\frac{-350}{p^2+6p+8{,}75};$$

$$\Phi(p)=\frac{-350}{p^2+6p+8{,}75+(-0{,}0007)(-350)}=\frac{-350}{p^2+6p+9}.$$

2.22. Решение задачи параметрической идентификации методом наименьших квадратов (МНК).

1. Краткие способы получения информации о параметрах математических моделей ЛА вы знаете?

Существует три способа получения информации о параметрах математической модели ЛА:

а) математические расчеты аэродинамических характеристик ЛА на основе движения тела в среде;

б) экспериментальное исследование физической модели ЛА в аэродинамической трубе;

в) идентификация аэродинамических характеристик по результатам летных экспериментов.

2. Что понимается под идентификацией в “широком” и в “узком” смыслах слова?

Идентификация в “широком” смысле – это определение структуры модели объекта управления, основанной на обработке входных и выходных сигналов. (Априорная информация об объекте незначительна, либо вообще отсутствует.)

Идентификация в “узком” смысле – определение параметров математической модели заданной структуры по результатам обработки входных и выходных сигналов.

3. На какие классы подразделяются алгоритмы идентификации? Назовите преимущества и недостатки каждого класса алгоритмов.

Все алгоритмы идентификации по способу организации вычислительных процедур разделяются на два больших класса:

а) прямые;

б) с настраиваемыми моделями.

Первые из них предполагают непосредственное определение параметров математической модели объекта по результатам наблюдения его входных и выходных сигналов на некоторых интервалах времени.

Вторые же предполагают настройку коэффициентов некоторой модели, той же структуры, что и идентифицируемый объект, до тех пор, пока выходы объекта и модели не совпадут.

Прямые алгоритмы характеризуются относительной простотой, но и невысокой точностью вычислений.

Алгоритмам с настраиваемыми моделями присуща с одной стороны высокая точность идентификации, с другой стороны, относительная сложность и громоздкость в реализации.

4. Какие методы рассматривались на лекциях и к каким классам они относятся?

МНК – прямые;

Алгоритм Красовского А.А – с настраиваемыми моделями.

5. Приведите расчетную формулу МНК для объекта:

$$\vec{y}^{(1)} = A\vec{y} + B\vec{u}\,.$$

Поясните компоненты этой формулы?

Расчетная формула МНК имеет вид:

$$\left[A \hat{\vdots} B \right] = WF^T (FF^T)^{-1},$$

где $\left[A \hat{\vdots} B \right]$- облочная матрица оценок;

$W = \left[\dot{Y}(t_1) \vdots \dot{Y}(t_2) \vdots \ldots \vdots \dot{Y}(t_r) \right]$- облочная матрица, составленная из производных вектора состояния, r – число измерений;

$F = \left\lfloor Y_p(t_1)\vdots Y_p(t_2)\vdots\ldots\vdots Y_p(t_r)\right\rfloor$ - облочная матрица, составленная из расширенных векторов состояния

$$\vec{y}_p = \begin{bmatrix} \vec{y} \\ \vec{u} \end{bmatrix}.$$

6. Какие условия являются обязательными для осуществления процедуры идентификации МНК?

Для успешной идентификации необходимо, чтобы число измерений *r* было равно или превышало число столбцов матрицы $[A\vdots B]$, а матрица FF^T, была невыраженной.

1. Из уравнений, описывающих движение объекта определяются матрицы *A* и *B*, выбирается число измерений *r*.
2. По результатам измерений составляются матрицы *W* и *F*.
3. Вычисляется матрица $FF^T=C$.
4. Вычисляется обратная матрица $(FF^T)^{-1}=C^{-1}$.
5. Вычисляется произведение матриц $WF^T=D$.
6. Вычисляется оценка.

$$\left\lfloor \hat{A\vdots B}\right\rfloor = WF^T(FF^T)^{-1} = DC^{-1}.$$

Решение задачи идентификации параметров матмодели ЛА.

Условие задачи:

Методом наименьших квадратов определить параметры математической модели изолированного движения ЛА по крену, используя результаты летных испытаний.

Модель изолированного движения ЛА по крену имеет вид:

$$\dot{\omega}_x = a_{m_x}^{\omega_x}\omega_x + a_{m_x}^{\delta_э}\delta_э,$$

где ω_x – скорость вращения ЛА вокруг продольной оси OX;

$\delta_э$ – отклонение элеронов;

В процессе летных испытаний измерялись параметры: $\dot{\omega}_x$, $\omega_{x;}$ $\delta_э$. Электроны при этом отклонялись по синусоидальному закону: $\delta_э=2Sin2\pi t$.

Результаты измерений сведены в таблицу:

T, с	*0*	*0,1*	*0,2*	*0,3*	*0,4*	*0,5*
$\dot{\omega}_x, град/с^2$	*0*	*-36,23*	*-50,31*	*-38,71*	*-7.29*	*30,85*
$\omega_x, град/с^2$	*0*	*-1,96*	*-6,5*	*-11,15*	*-13,57*	*-12,38*
$\delta_э$*,град.*	*0*	*1,18*	*1,9*	*1,9*	*1,18*	*0,003*

где *t* текущее время измерений.

Решение:

1. Определим матрицы *A, B* из уравнения объекта

$$\vec{y}^{(1)} = A\vec{y} + B\vec{u},$$

а так же минимально необходимое число измерений r.

$$\dot{\omega}_x = a_{m_x}^{\omega_x}\omega_x + a_{m_x}^{\delta_э}\delta_э,$$

или

$$y^{(1)} = Ay + Bu.$$

Тогда

$$y^{(1)} = \dot{\omega}_x;\ \ A=a_{m_x}^{\omega_x}\omega_x;\ \ y=\omega_x;\ \ B=a_{m_x}^{\delta_э};\ \ u=\delta_э.$$

Тогда $$[A\vdots B]=\left[a_{m_x}^{\omega_x}\omega_x + a_{m_x}^{\delta_э}\delta_x\right];\ \ \vec{y}_p = \begin{bmatrix}\omega_x\\ \delta_э\end{bmatrix}.$$

Следовательно, $r \geq 2$, *т.к.* блочная матрица $[A\vdots B]$ имеет два столбца. С целью упрощения расчетов остановимся на двух измерениях при $t_1=0{,}1$ и $t_2=0{,}2$.

2. По результатам измерений сформируем матрицы W и F:

$$\vec{W} = \left[y^{(1)}(t_1)\vdots y^{(1)}(t_2)\right] = [-36{,}23 - 50{,}31];$$

$$F = \left[\vec{y}_p(t_1)\vdots\vec{y}_p(t_2)\right] = \begin{bmatrix}-1{,}96 & -6{,}5\\ 1{,}18 & 1{,}9\end{bmatrix}.$$

3. Вычислим матрицу $C=FF^T$:

$$C=\begin{bmatrix}-1{,}96 & -6{,}5\\ 1{,}18 & 1{,}9\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}-1{,}96 & 1{,}18\\ -6{,}5 & 1{,}9\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}1{,}96^2+6{,}5^2 & (-1{,}96)1{,}18+(-6{,}5)1{,}9\\ 1{,}18(-1{,}96)+1{,}9(-6{,}5) & 1{,}18^2+1{,}9^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}46{,}1 & -14{,}66\\ -14.66 & 5\end{bmatrix}.$$

4. Вычислим матрицу $C^{-1}=(FF^T)^{-1}$:

$C^{-1}=\dfrac{\tilde{C}}{\det C}$, где $\tilde{C}$ - присоединенная матрица относительно матрицы C той же размеренности, что и C. Присоединенной матрицей $\tilde{C}$ называется матрица, составленная из алгебраических дополнений транспонированной матрицы C^T.

Следовательно, для нахождения обратной матрицы C^{-1} необходимо:

а) определить матрицу C^T;

Т.к. матрица C симметрична, то необходимость её транспонирования отпадает, поскольку $C= C^T$.

б) вычислить алгебраические дополнения матрицы C^T(в нашем случае C).

$$\Delta_{11} = (-1)^{1+1}C_{22} = (-1)^2\cdot 5 = 5;$$

$$\Delta_{12} = (-1)^{1+2}C_{21} = (-1)^3\cdot(-14{,}66) = 14{,}66;$$

$$\Delta_{21} = (-1)^{2+1}C_{12} = (-1)^3\cdot(-14{,}66) = 14{,}66;$$

$$\Delta_{22} = (-1)^{2+2}C_{11} = (-1)^4\cdot 46{,}1 = 46{,}1.$$

в) составить матрицу $\tilde{C}$;

$$\tilde{C}=\begin{bmatrix}5 & 14{,}66\\ 14{,}66 & 46{,}1\end{bmatrix}\qquad \tilde{C}=\begin{bmatrix}\Delta_{11} & \Delta_{21}\\ \Delta_{12} & \Delta_{22}\end{bmatrix}.$$

г) вычислить определитель исходной матрицы C;

$detC=46{,}1\cdot 5-(-14{,}66)^2=230{,}5-214{,}9=15{,}6.$

Тогда

$$C^{-1}=\frac{\tilde{C}}{\det C}=\frac{\begin{bmatrix}5 & 14{,}66\\ 14{,}66 & 46{,}1\end{bmatrix}}{15{,}6}=\begin{bmatrix}\frac{5}{15{,}6} & \frac{14{,}66}{15{,}6}\\ \frac{14{,}66}{15{,}6} & \frac{46{,}1}{15{,}6}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0{,}32 & 0{,}94\\ 0{,}94 & 2{,}96\end{bmatrix}.$$

5. Вычислим матрицу $D=WF^T$;

$$D=\begin{bmatrix}-36{,}23 & -50{,}31\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}-1{,}96 & 1{,}18\\ -6{,}5 & 1{,}9\end{bmatrix}=$$

$$=[(-36{,}23)(-1{,}96)+(-50{,}31)(-6{,}5)\ \ (-36{,}23)1{,}18+(-50{,}31)1{,}9]=[398\ \ -138{,}34]$$

D=[398 -138,34].

6. Определим оценку матрицы $[A \vdots B]$:

$$\left[\hat{A \vdots B}\right]=WF^T(FF^T)^{-1}=DC^{-1}=$$

$$=[398\ \ -138{,}34]\times\begin{bmatrix}0{,}32 & 0{,}94\\ 0{,}94 & 2{,}96\end{bmatrix};$$

$$\hat{A}=398\cdot 0{,}32+(-138{,}34)\cdot 0{,}94=127{,}36-130{,}04=-2{,}68;$$

$$\hat{B}=398\cdot 0{,}94+(-138{,}34)\cdot 2{,}96=374{,}12-409{,}49=-34{,}87,$$

$$\left[\hat{A \vdots B}\right]=\begin{bmatrix}-2{,}68 & -34{,}87\end{bmatrix}.$$

Проверим правильность оценок матриц A и B. Для этого посмотрим, выполняются ли соотношения между левой и правой частью уравнения движения ЛА по крену для любого момента времени с учетом полученных оценок $\hat{A}$ и $\hat{B}$.

Возьмем для примера $t_3 = 0{,}3$ c:

$$\dot{\omega}_x=-2{,}68\cdot(-11{,}15)+(-34{,}87)\cdot 1{,}9=29{,}88-66{,}25=-36{,}71.$$

Согласно табличных данных $\dot{\omega}_x(t_3)=-38{,}71$

Расхождение показаний значений $\dot{\omega}_x$ расчетного и табличного обусловлено погрешностью идентификации матриц А и В методом наименьших квадратов (истинные значения: А=-2,5; В=-35).

Рассмотренный пример подтверждает, что прямые алгоритмы характеризуются с одной стороны относительной простотой и с другой стороны – невысокой точностью вычислений, которая особенно страдает при наличии ошибок измерений вектора состояния и его производной.

3. ЗАДАНИЯ ДЛЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ И УКАЗАНИЯ ПО ЕЕ ВЫПОЛНЕНИЮ

3.1. Общие указания по выполнению контрольной работы

Контрольная работы должна выполняться студентом после изучения теоретического курса.

Контрольная работа состоит из 5 задач, задания к каждой их них представлены в 18 вариантах. Студент выбирает в таблицах 2-6 тот вариант задания, который соответствует сумме двух последних цифр его учебного шифра.

При выполнении контрольной работы необходимо соблюдать следующие требования:

– записать условие задачи;

– решение сопровождать кратким пояснительным текстом, в котором должно быть указано, какая величина определяется и по какой формуле, какие величины подставляются в формулу (из условия задачи, из справочника, определена ранее и т.д.);

– вычисления давать в развернутом виде;

– проставлять размерности всех заданных и расчетных величин в международной системе СИ;

– графический материал должен быть выполнен четко в масштабе на миллиметровой бумаге.

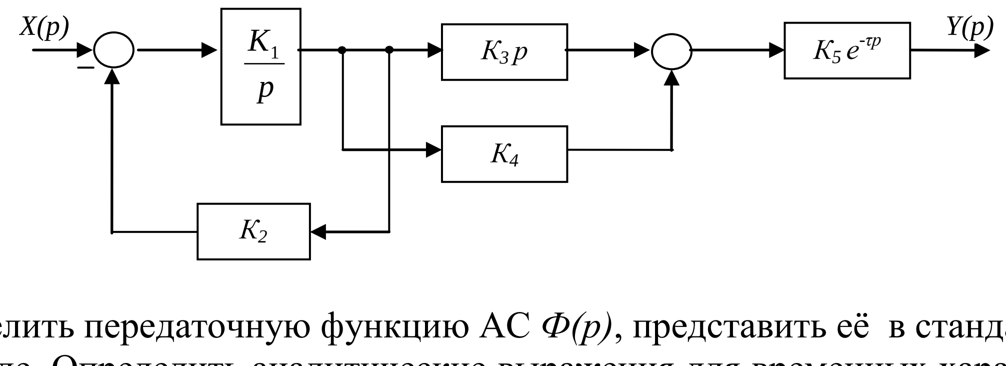
После решения задачи должен быть произведен краткий анализ полученных результатов и сделаны соответствующие выводы.

В конце работы дать перечень использованной литературы.

3.2. Задания для контрольной работы

Задача 1.

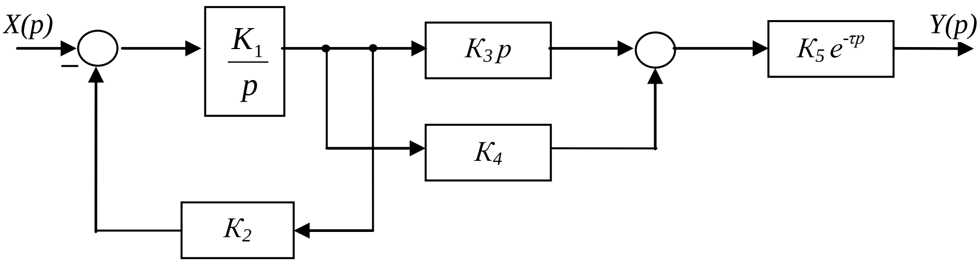
Дана АС со структурной схемой:



Определить передаточную функцию АС *Ф(р)*, представить её в стандартном виде. Определить аналитические выражения для временных характеристик *q(t)* и *h(t)*, оценить их начальные и конечные значения, изобразить общий вид графиков *q(t)* и *h(t)*.

Задача 2.

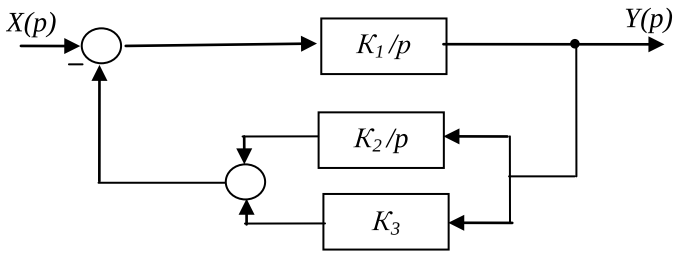
Дана АС со структурной схемой:



Определить передаточную функцию АС *Φ(p)*, представить её в стандартном виде. Определить аналитические выражения для временных характеристик *q(t)* и *h(t)*, оценить их начальные и конечные значения, изобразить общий вид графиков *q(t)* и *h(t)*.

Задача 3.

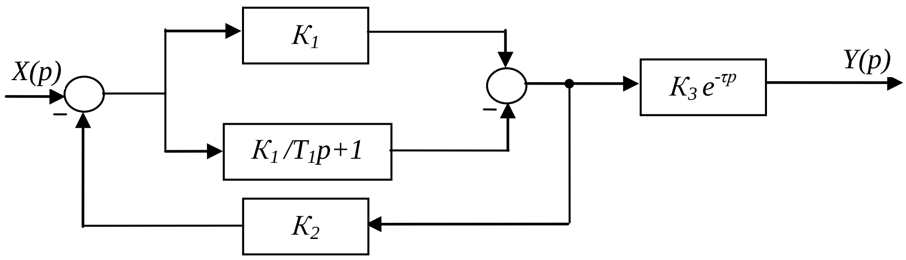
Дана АС со структурной схемой:



Определить передаточную функцию АС *Φ(p)*, представить её в стандартном виде. Определить аналитические выражения для временных характеристик *q(t)* и *h(t)*, оценить их начальные и конечные значения, изобразить общий вид графиков *q(t)* и *h(t)*.

Задача 4.

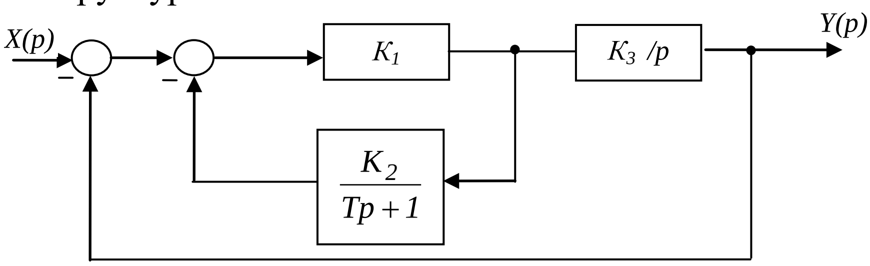
Дана АС со структурной схемой:



Определить передаточную функцию АС *Φ(p)*, представить её в стандартном виде. Определить аналитические выражения для временных характеристик *q(t)* и *h(t)*, оценить их начальные и конечные значения, изобразить общий вид графиков *q(t)* и *h(t)*.

Задача 5.

Дана АС со структурной схемой:



Определить передаточную функцию АС *Ф(p)*, представить её в стандартном виде. Определить аналитические выражения для временных характеристик *q(t)* и *h(t),* оценить их начальные и конечные значения, изобразить общий вид графиков *q(t)* и *h(t)*.

4. ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ

Таблица 2. Данные для задачи № 1

Сумма двух последних цифр шифра	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5	τ
0	0,1	5	0,1	0,2	100	0,2
1	0,2	6	0,3	0,2	90	0,3
2	0,4	4	0,5	0,1	70	0,5
3	0,1	2	0,2	0,2	65	0,2
4	0,6	8	0,4	0,3	84	0,4
5	0,4	5	0,3	0,3	98	0,3
6	0,3	7	0,2	0,2	85	0,2
7	0,2	6	0,1	0,1	75	0,1
8	0,1	4	0,2	0,2	90	0,1
9	0,6	3	0,4	0,2	95	0,6
10	0,4	5	0,3	0,3	64	0,4
11	0,2	4	0,1	0,1	88	0,2
12	0,2	8	0,4	0,2	97	0,2
13	0,3	9	0,2	0,2	86	0,3
14	0,4	6	0,5	0,3	84	0,4
15	0,1	7	0,2	0,2	78	0,3
16	0,3	4	0,4	0,4	77	0,5
17	0,2	2	0,1	0,2	95	0,2
18	0,5	5	0,3	0,3	93	0,4

Таблица 3. Данные для задачи № 2

Сумма двух последних цифр шифра	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5	τ
0	0,2	5	0,2	0,1	100	0,1
1	0,3	6	0,2	0,2	90	0,3
2	0,5	4	0,1	0,4	70	0,5
3	0,2	2	0,2	0,1	65	0,2
4	0,4	8	0,3	0,6	84	0,4
5	0,3	5	0,3	0,4	98	0,3
6	0,2	7	0,2	0,3	85	0,2
7	0,1	6	0,1	0,2	75	0,1
8	0,1	4	0,2	0,1	90	0,2
9	0,6	3	0,2	0,6	95	0,4
10	0,4	5	0,3	0,4	64	0,3
11	0,2	4	0,1	0,2	88	0,1
12	0,2	8	0,2	0,2	97	0,4
13	0,3	9	0,2	0,3	86	0,2
14	0,4	6	0,3	0,4	84	0,5
15	0,3	7	0,2	0,1	78	0,2
16	0,5	4	0,4	0,3	77	0,4
17	0,2	2	0,2	0,2	95	0,1
18	0,4	5	0,3	0,5	93	0,3

Таблица 4. Данные для задачи № 3

Сумма двух последних цифр шифра	*K*	K_1	K_2	K_3
0	0,2	0,1	5	15
1	0,3	0,3	6	12
2	0,5	0,5	4	16
3	0,2	0,2	2	14
4	0,4	0,4	8	15
5	0,3	0,3	5	12
6	0,2	0,2	6	18
7	0,1	0,1	4	10
8	0,1	0,2	7	15
9	0,6	0,4	4	14
10	0,4	0,3	5	16
11	0,2	0,1	6	12
12	0,2	0,4	4	13
13	0,3	0,2	5	14
14	0,4	0,5	6	15
15	0,3	0,2	8	14
16	0,5	0,4	4	12
17	0,2	0,1	3	11
18	0,4	0,3	8	10

Таблица 5. Данные для задачи № 4

Сумма двух последних цифр шифра	K_1	T_1	K_2	K_3	τ	K	T
0	10	0,25	1,9	4	0,4	10	5
1	11	0,3	1,5	4	0,3	15	6
2	10	0,25	1,6	5	0,5	12	4
3	12	0,4	1,5	6	0,2	16	2
4	14	0,2	1,4	4	0,4	14	8
5	13	0,3	1,8	8	0,3	15	5
6	15	0,2	1,7	3	0,2	12	6
7	16	0,3	1,6	5	0,1	18	4
8	14	0,35	1,4	4	0,2	10	7
9	12	0,25	1,4	6	0,4	15	4
10	10	0,3	1,5	4	0,3	14	5
11	10	0,1	1,6	5	0,1	16	6
12	15	0,4	1,8	8	0,4	12	4
13	14	0,35	1,9	2	0,2	13	5
14	13	0,2	1,5	3	0,5	14	6
15	12	0,35	1,6	7	0,2	15	8
16	10	0,25	1,7	5	0,4	14	4
17	14	0,2	1,5	4	0,1	12	3
18	16	0,3	1,6	6	0,3	11	8

Таблица 6. Данные для задачи № 5

Сумма двух последних цифр шифра	K_1	K_2	T	K_3
0	0,2	2,5	4	11
1	0,3	2,8	6	12
2	0,5	2,9	4	16
3	0,2	3,0	2	14
4	0,4	3,2	8	15
5	0,3	3,5	5	12
6	0,2	2,8	6	18
7	0,1	2,7	4	10
8	0,1	2,6	7	15
9	0,6	2,8	4	14
10	0,4	3,1	5	16
11	0,2	3,5	6	12
12	0,2	2,1	4	13
13	0,3	2,9	5	14
14	0,4	2,8	6	15
15	0,3	2,4	8	14
16	0,5	2,5	4	12
17	0,2	2,2	3	11
18	0,4	2,6	8	10

ПЕРЕЧЕНЬ РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Колесов Л.В. Основы автоматики / Л.В. Колесов. – М.: Колос, 1984. – С. 159-165.

2. Загинайлов В.И. Основы автоматики / В.И. Загинайлов, Л.Н. Шеповалова. – М.: Колос, 2001. – С. 101-115.

3. Шавров А.В. Автоматика / А.В. Шавров, А.П. Коломиец. – М.: Колос, 2000. – С. 158-172.

4. Мартыненко И.И. Проектирование систем автоматики / И.И. Мартыненко, В.Ф. Лысенко. – М.: Агропромиздат, 1990. – С. 116-143.

5. Автоматика. Расчет частотно-регулируемых асинхронных двигателей: учеб. пособие для вузов / Авт. -сост.: Ю.П. Коськин, А.Г. Иванов, Б.Б. Криссинель, А.Г. Черных; под ред. Ю.П. Коськина. – 2-е изд., перераб. и доп. – Иркутск: ИрГСХА, 2008. – 285 с.

6. Бородин И.Ф. Автоматизация технологических процессов / И.Ф. Бородин, Ю.А. Судник. – М.: Колос, 2004. – 179 с.

7. Бородин И.Ф. Автоматизация технологических процессов / И.Ф. Бородин и [др.]. – М.: Колос, 2007. – 214 с.

8. Корнеев Н.В. Теория автоматического управления с практикумом: учеб. пособие для вузов: допущено Учеб.-метод. об-нием / Н.В. Корнеев, Ю.С. Кустарёв, Ю.Я. Морговский. – М.: Академия, 2008. – 219 с.

9. Крылов, Ю.А. Энергосбережение и автоматизация производства в теплоэнергетическом хозяйстве города. Частотно-регулируемый электропривод: учеб. пособие для вузов / Ю.А. Крылов, А.С. Карандаев, В.Н. Медведев. – СПб.: Лань, 2013. – 176 с.

10. Нагорный В.С. Средства автоматики гидро- и пневмосистем [Электронный ресурс] / В.С. Нагорный. - Электрон. текстовые дан. – Москва: Лань, 2014. – Режим доступа: http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=52612. – ISBN 978-5-8114-1652-3. – Рекомендовано УМО по университетскому политехническому образованию в качестве учебного пособия для студентов вузов, обучающихся по направлению подготовки «Технологические машины и оборудование».

11. Ощепков А.Ю. Система автоматического управления: теория, применение, моделирование в MATLAB [Электронный ресурс]: учеб. пособие / А.Ю. Ощепков. – Электрон. текстовые дан. – Москва: Лань, 2013. – 208 с. – Режим доступа: http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_cid=25&pl1_id=5849. – ISBN 978-5-8114-1471-0.

12. Первозванский А.А. Курс теории автоматического управления [Электронный ресурс]: учеб. пособие / А.А. Первозванский. – Электрон. текстовые дан. – Москва: Лань, 2015. – 624 с.: ил. – Режим доступа: http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=68460. – ISBN 978-5-8114-0995-2.

13. Шипицына В.М. Автоматика: типовые задачи и примеры их решения / В.М. Шипицына; Иркут. гос. с.-х. акад. – Иркутск: ИрГСХА, 2008. – 45 с.

СОДЕРЖАНИЕ

Составители
Кудряшев Геннадий Сергеевич
Третьяков Александр Николаевич

АВТОМАТИКА

Методические указания и контрольные задания по дисциплине «Автоматика» для студентов очной и заочной форм обучения направления подготовки 35.03.06 Агроинженерия (уровень бакалавриата) Профили «Технические системы в агробизнесе», «Технологическое оборудование для хранения и переработки сельскохозяйственной продукции», «Технический сервис в агропромышленном комплексе»

Лицензия на издательскую деятельность
ЛР № 070444 от 11.03.98 г.
Подписано в печать 04.04.2016. Формат 60×86/16. Печ. л. 10,0
Тираж 100 экз.

Издательство Иркутский государственный
аграрный университет
664038, Иркутская обл., Иркутский район
пос. Молодежный