Министерство сельского хозяйства РФ

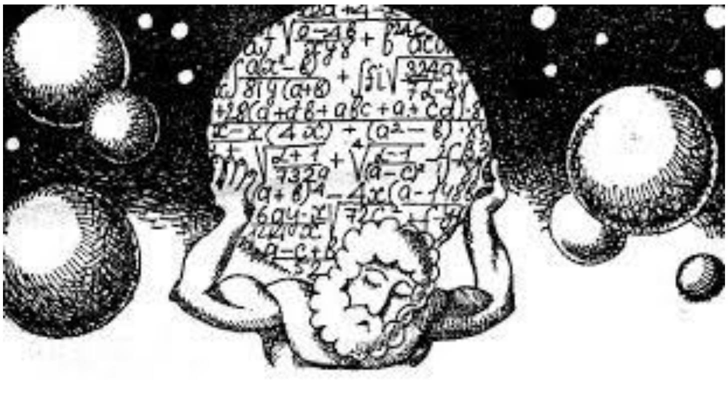
ФГОУ ВО Иркутский государственный аграрный университет им. А.А. Ежевского
Кафедра Математики

М.А. Быкова
Е.В. Елтошкина
Н.И. Овчинникова

МАТЕМАТИКА

Учебное пособие

ЧАСТЬ II



Иркутск – 2021

УДК 517(07)

Б 88.

Печатается по решению Методического Совета Иркутского государственного аграрного университета им. А.А. Ежевского от 31 мая 2021 г., протокол № 9.

Рецензенты:

Бураев М.К., д.т.н., профессор, зав. кафедрой технического сервиса и общеинженерных дисциплин Иркутского государственного аграрного университета им. А.А. Ежевского

Кузьмина Н.Д., к.ф.-м.н., доцент, зав. отделением физико-математического, естественнонаучного и технологического образования Педагогического института ФГБОУ ВО «ИГУ»

Быкова М.А., Елтошкина Е.В., Овчинникова Н.И. Математика: Учебное пособие. Ч. II. – Иркутск: Изд-во ИрГАУ им А.А. Ежевского, 2021. – 241 с.

Учебное пособие включает разделы «Введение в математический анализ», «Дифференциальное исчисление функции одной переменной», «Интегральное исчисление функции одной переменной». В учебном пособии приведен обзор основных теоретических понятий и положений указанных разделов с иллюстрацией их на конкретных примерах; даны вопросы для самопроверки знаний студентов; выделены тестовые задания по теории и практике для самоподготовки; представлены контрольные работы, составленные по двадцати вариантной системе с решением типового варианта. Учебное пособие предназначено для студентов инженерного и экономического бакалавриата очной и заочной форм обучения аграрного вуза.

СОДЕРЖАНИЕ

Раздел I.	ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ	7
1.1.	Функция одной переменной, способы ее задания	8
1.2.	Предел функции в точке. Основные теоремы о пределах	19
1.3.	Бесконечно малые и бесконечно большие функции	22
1.4.	Замечательные пределы	25
1.5.	Раскрытие неопределенностей	26
1.6.	Непрерывность функции в точке. Точки разрыва, их классификация	31
	Вопросы для самопроверки	36
	ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ № 1 «Введение в математический анализ» (теория)	37
	Контрольная работа № 1 «Введение в математический анализ»	41
	Решение типового варианта контрольной работы № 1	50
	ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ № 2 «Введение в математический анализ», (практика)	56
Раздел II	ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ	60
2.1.	Понятие производной функции одной переменной, ее геометрический и физический смысл	60
2.2.	Основные правила дифференцирования функции	66
2.3.	Производная сложной функции	68
2.4.	Производные функций, заданных неявно и параметрически	68
2.5.	Метод логарифмического дифференцирования	70
2.6.	Дифференциал функции, его геометрический смысл	72
2.7.	Производные и дифференциалы высших порядков	74
2.8.	Правило Лопиталя	79
2.9.	Применение производной к исследованию функции	82

2.9.1.	Интервалы монотонности	82
2.9.2.	Экстремумы функции	83
2.9.3.	Наибольшее и наименьшее значения функции	85
2.9.4.	Промежутки выпуклости графика функции. Точки перегиба	86
2.9.5.	Асимптоты графика функции	88
2.9.6.	Общая схема исследования функции	88
	Вопросы для самопроверки	93
	ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ № 3 «Дифференциальное исчисление функции одной переменной» (теория)	94
	Контрольная работа № 2 «Дифференциальное исчисление функции одной переменной»	99
	Решение типового варианта контрольной работы № 2	108
	Контрольная работа № 3 «Приложения производной»	112
	Решение типового варианта контрольной работы № 3	116
	ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ № 4 «Дифференциальное исчисление функции одной переменной» (практика)	121
Раздел III	ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ	126
3.1.	Понятие первообразной функции	126
3.2.	Понятие неопределенного интеграла, его геометрический смысл	127
3.2.1.	Свойства неопределенного интеграла	128
3.2.2.	Основные формулы неопределенного интеграла	130
3.3.	Методы интегрирования функции в неопределенном интеграле	133
3.3.1.	Непосредственное интегрирование	133
3.3.2.	Замена переменной в неопределенном интеграле	134
3.3.3.	Метод интегрирования по частям	136
3.3.4.	Интегралы, содержащие квадратный трехчлен и его иррациональность в знаменателе	138

3.3.5.	Интегрирование рациональных дробей	143
3.3.6.	Интегрирование тригонометрических функций	148
3.3.7.	Интегрирование некоторых иррациональных функций	152
	Вопросы для самопроверки	154
	ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ № 5 «Неопределенный интеграл» (теория)	155
	Контрольная работа № 4 «Интегральное исчисление функции одной переменной»	161
	Решение типового варианта контрольной работы № 4	168
	ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ № 6 «Неопределенный интеграл» (практика)	171
3.4.	Определенный интеграл, его геометрический смысл Формула Ньютона-Лейбница	177
3.5.	Свойства определенного интеграла	179
3.6.	Методы интегрирования в определенном интеграле	181
3.6.1	Замена переменной в определенном интеграле	181
3.6.2.	Интегрирование по частям в определенном интеграле	182
3.7.	Геометрические приложения определенного интеграла	183
3.7.1.	Площадь плоской фигуры	183
3.7.2.	Длина дуги плоской фигуры	188
3.7.3.	Объем тела вращения	189
3.7.4.	Площадь поверхности тела вращения	192
3.8.	Физические приложения определенного интеграла	193
3.9.	Применение определенного интеграла к решению экономических задач	199
3.10.	Несобственные интегралы	202
3.10.1.	Несобственный интеграл первого рода	202
3.10.2.	Несобственный интеграл второго рода	206
	Вопросы для самопроверки	207
	ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ № 7 «Определенный и	

несобственный интегралы» (теория) 208
Контрольная работа № 5 «Определенный интеграл и несобственный интегралы» 217
Решение типового варианта контрольной работы № 5 225
ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ № 8 «Определенный и несобственный интегралы» (практика) 231
Рекомендуемая литература 237
Информационные ресурсы 239

Раздел I. ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

При изучении природных, экономических и технических процессов исследователи сталкиваются с величинами, одни из которых сохраняют одно и то же численное значение и называются *постоянными*. Постоянные величины принято обозначать буквами латинского алфавита: a, b, c и т.д. Примерами постоянных величин могут служить: температура кипения воды при нормальном давлении; скорость тела, движущегося равномерно и прямолинейно. Некоторые постоянные величины остаются неизменными в условиях любой задачи, такие величины называются *абсолютными постоянными*. Например, отношение длины окружности к диаметру равно π , скорость света (299800 км/сек), сумма углов треугольника (180^{o}), число месяцев в году (12). Величина называется *переменной*, если она в условиях данной задачи (процесса, исследования) принимает различные числовые значения. Переменные величины будем обозначать буквами греческого алфавита: x, y, z и т.д. *Областью изменения переменной величины* x называется совокупность всех принимаемых ею числовых значений. Например, высота стебля пшеницы в период вегетации или вес животного в период откорма меняются, изменяются и соответствующие им числа. Их можно считать переменными величинами.

Математический анализ – раздел математики, объектами изучения которого являются функции, т.е. переменные величины, зависящие от других переменных величин.

Математический анализ является основным среди фундаментальных курсов, читаемых на инженерных и экономических специальностях. Он формирует базу для последующего изучения таких разделов, как дифференциальные уравнения, ряды, кратные интегралы и т.д. Аппарат математического анализа является необходимым инструментом для построения и исследования математический моделей, с помощью которых изучаются самые разнообразные процессы и явления окружающего нас мира.

1.1. Функция одной переменной, способы ее задания

Переменная *y* называется *функцией* от переменной *x*, если каждому значению *x* из области ее изменения по определенному правилу или закону ставится в соответствие определенное значение *y*, обозначают функцию

$$x \overset{f}{\mapsto} y, \text{ или } y = f(x). \tag{1.1}$$

При этом, переменную *x* называют *независимой переменной* или *аргументом*, а переменную *y* – *зависимой переменной* или *функцией*, *f* – закон или правило соответствия между переменными *x* и *y* [1], [3], [6]. Если уравнение (1.1) не разрешено относительно *y*, то говорят, что *функция задана неявно*, ее уравнение имеет вид

$$F(x, y) = 0 \tag{1.1'}$$

Значение *y*, соответствующее заданному значению *x*, называют *значением функции* и обозначают:

$$y_0 = f(x_0). \tag{1.2}$$

Пример 1.1. Найти значение функции $y = x^2$ в точке $x_0 = -3$.

Решение. Подставим в функцию вместо x значение -3, получим

$$y_o = y(-3) = (-3)^2 = 9.$$

Областью определения функции $y = f(x)$ называется совокупность всех действительных значений аргумента *x*, при которых функция существует (имеет смысл) и обозначается *D*(*f*) или *D*(*y*).

Пример 1.2. Найти область определения функции $f(x) = \sqrt{1-2x} + \arcsin\frac{3x}{2}$.

Решение. Квадратный корень можно вычислять только из положительного или равного нулю числа, а обратная тригонометрическая функция «арксинус» имеет смысл, если ее аргумент принадлежит промежутку [-1;1], поэтому область определения данной функции будем находить из системы неравенств:

$$\begin{cases} 1-2x \ge 0, \\ -1 \le \dfrac{3x}{2} \le 1 \end{cases}, \quad \begin{cases} x \le \dfrac{1}{2} \\ -\dfrac{2}{3} \le x \le \dfrac{2}{3} \end{cases}.$$

Решая систему, получим $D(f)$: $-\frac{2}{3} \le x \le \frac{1}{2}$.

Совокупность всех тех значений, которые принимает при этом сама функция y, называется *областью значений* этой функции и обозначается $E(f)$ или $E(y)$. Например, функция $y = \cos x$ имеет область значений $E(f)$: [-1;1].

Графиком функции $y = f(x)$ называется совокупность всех точек плоскости, абсциссы которых являются значениями аргумента x, а ординаты – соответствующими значениями функции y. Для того чтобы множество точек координатной плоскости являлось *графиком* некоторой функции, *необходимо и достаточно*, чтобы любая прямая параллельная оси Oy, пересекалась с графиком не более чем в одной точке (рис.1.1).

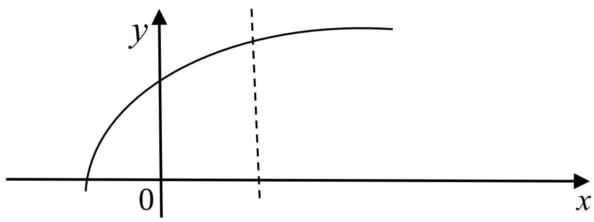


Рисунок 1.1 – График функции $y = f(x)$

Значения аргумента x, при которых функция обращается в ноль (y=0), называется *нулями функции*. Это абсциссы точек пересечения графика функции с осью Ox. Промежутки значений x, на которых значения функции y либо только положительные, либо только отрицательные, называются *промежутками знакопостоянства функции.*

Существуют различные способы задания функции: *табличный*, *графический* и *аналитический*. При *табличном* способе функция задана в виде *таблицы*, содержащей ряд числовых значений аргумента и соответствующих им значений функции:

x	x_1	x_2	…	x_n
y	y_1	y_2	…	y_n

Задание функции с помощью таблицы удобно тем, что в ней даны готовые значения функции, но проанализировать полностью ее свойства мы не можем. Табличный способ широко используется в экспериментах и наблюдениях.

Графический способ задания функции состоит в том, что зависимость между x и y задается в виде кривой (графика) на плоскости xOy (рис.1.1). Преимуществом графического способа задания функции является его наглядность, недостатком – его неточность, ибо графически найти значения функции можно только приближенно.

Аналитический способ задания функции состоит в том, что закон соответствия между x и y задается в виде аналитического выражения, т.е. в виде математической формулы, в которой указаны те действия, какие должны быть произведены над аргументом, чтобы получить соответствующее значение функции. Например, $y = x^3$; $y = \begin{cases} x, -\infty \le x \le 5, \\ 2 - x, x \rangle 5. \end{cases}$; $S = \frac{gt^2}{2}$; $l = 2\pi r$. Аналитический способ задания функции является наиболее совершенным, так как к нему применимы методы математического анализа по исследованию функции, и, в случае надобности, можно по формуле составить таблицу значений x и y, а также построить ее график.

Функция $y = f(x)$ называется *четной* на своей области определения, если для любого $x \in D(y)$ выполняется равенство

$$f(-x) = f(x), \tag{1.3}$$

т.е. при изменении знака у аргумента знак и значение функции сохраняется. Например, функция $f(x) = x^4$ – четная, т.к. $f(-x) = (-x)^4 = x^4 = f(x)$. *График четной функции симметричен относительно оси ординат* (рис.1.2).

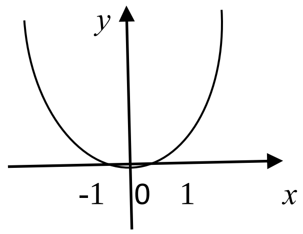


Рисунок 1.2 – График четной функции

Функция называется *нечетной* на своей области определения, если для любого $x \in D(y)$ выполняется равенство

$$f(-x) = -f(x), \tag{1.4}$$

т.е. при изменении знака у аргумента знак у функции меняется на противоположный. Например, функция $f(x) = x^3$– нечетная, т.к. $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$. *График нечетной функции симметричен относительно начала координат* (рис.1.3).

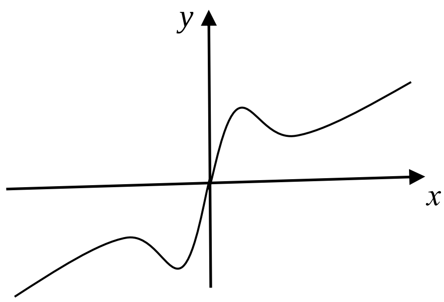


Рисунок 1.3 – График нечетной функции

Четные и нечетные функции относительно операций сложения, вычитания, умножения, деления обладают следующими свойствами:

1) сумма или разность четных (или нечетных) функций есть функция четная (нечетная);

2) произведение или частное двух нечетных функций есть функция четная;

3) произведение четной на нечетную функцию есть функция нечетная.

Функция, не являющееся ни четной, ни нечетной, называется *функцией общего вида.*

Пример 1.3. Доказать, что функция $f(x)=x^5-3x\cdot\sin^2 x-2tgx$ – нечетная.

Решение. Проверим равенство (1.4)

$$f(-x)=(-x)^5-3(-x)\cdot\sin^2(-x)-2tg(-x)=-x^5+3x\cdot\sin^2 x-2tgx=$$

$$=-(x^5-3x\cdot\sin^2 x-2tgx)=-f(x),$$

что подтверждает его выполнение, следовательно, данная функция нечетная.

Функция $y=f(x)$ называется *периодической*, если существует такое число T, что при любом x из области определения выполняется равенство

$$f(x\pm T)=f(x), \tag{1.5}$$

где T - период функции. Всякая периодическая функция имеет бесконечное множество периодов. На практике обычно рассматривают наименьший положительный период. График периодической функции получается путем повторения части ее графика, соответствующей одному периоду (рис.1.4).

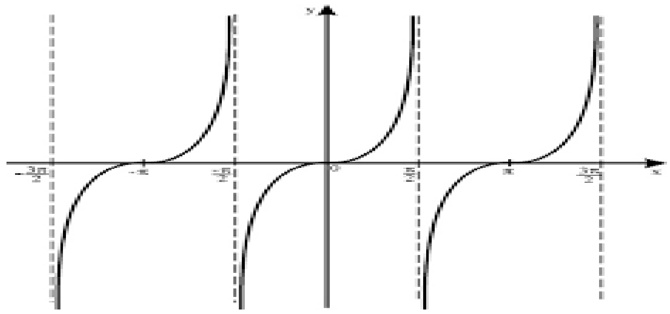


Рисунок 1.4 – График периодической функции

Функция $y=f(x)$ называется *возрастающей* (*убывающей*) на множестве $M\subseteq D(f)$, если большему значению аргумента соответствует большее значение функции, т.е. для любых $x_2>x_1\in M$ выполняются условия

$$f(x_2)>f(x_1),\ \left(f(x_2)<f(x_1)\right) \tag{1.6}$$

Функции возрастающие и убывающие называются *монотонными.*

Пример 1.4. Исследовать функцию $f(x)=x^3,\ D(f)=R.$ на монотонность на всем множестве R.

Решение. Пусть $x_1>x_2$ – произвольные $\in R$. Тогда

$$f(x_1)-f(x_2)=x_1^3-x_2^3=(x_1-x_2)(x_1^2+x_1x_2+x_2^2),\ x_1-x_2>0$$

и, по крайней мере, одно из чисел x_1, x_2 отлично от нуля, для определенности считаем $x_2 \neq 0$. Поэтому

$$f(x_1) - f(x_2) = (x_1 - x_2) \times \left[\left(\frac{x_1}{x_2} \right)^2 + \frac{x_1}{x_2} + 1 \right] x_2^2 > 0,$$

т.к. при $\forall t$ квадратный трехчлен $t^2 + t + 1 > 0$. Отсюда следует, что $f(x_1) > f(x_2)$, т.е. функция $f(x) = x^3$ возрастает на всем множестве R.

Монотонные функции обладают следующими свойствами:

1) Если функции $f(x)$ и $g(x)$ - возрастающие (неубывающие) на множестве G, то функция, представляющая их сумму $f(x) + g(x)$, также - возрастающая (неубывающая) функция на этом множестве.

2) Если функция $f(x)$ монотонна на множестве G, а функция $g(t)$ монотонна на множестве H и множество ее значений $g(H) \subseteq G$, то *сложная функция* (композиция) $f(g(t))$ также монотонна на H.

Функция $f(x)$ называется *ограниченной сверху* (*снизу*) на множестве $G \subseteq D(f)$, если существуют такие числа N и K, что для всех x из этого множества выполняются неравенства

$$f(x) \leq N, \ (f(x) \geq K). \tag{1.7}$$

В этом случае число N называется *верхней границей*, а число K – нижней границей функции $f(x)$ на G, и записывается

$$N = \sup f(G) = \sup_{x \in G} f(x), \ K = \inf f(G) = \inf_{x \in G} f(x). \tag{1.7'}$$

Так, например, функция $f(x) = x^2$ – ограничена снизу на множестве действительных чисел R числом $K = 0$, т.к. $\forall x \in R \ x^2 \geq 0$.

Ограниченные функции обладают следующим свойством: если функции $f(x)$ и $g(x)$ ограничены на множестве G, то функции, представляющие их алгебраическую сумму $f(x) \pm g(x)$ и произведение $f(x) \cdot g(x)$ также ограничены на этом множестве.

Функция $f(x)$ называется *неограниченной* на множестве $G \subseteq D(f)$, если она неограниченна хотя бы с одной стороны, или снизу, или сверху. Если функция неограниченна снизу, то будем писать $\inf_{x \in G} f(x) = -\infty$, если функция неограниченна сверху, то $\sup_{x \in G} f(x) = +\infty$.

Если из данного уравнения $y = f(x)$ можно аналитически выразить x как функцию от y в виде уравнения $x = \varphi(y)$ так, чтобы каждому значению y соответствовало определенное значение x, то функция $x = \varphi(y)$ будет называться *обратной функцией* по отношению к функции $y = f(x)$. Если сохранить обычные обозначения, т.е. x считать аргументом, а y – функцией, то получим, что функция $x = \varphi(y)$ является *обратной* по отношению к функции $y = f(x)$. График обратной функции $x = \varphi(y)$ симметричен относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов, т.е. относительно прямой $y = x$ (рис. 1.5).

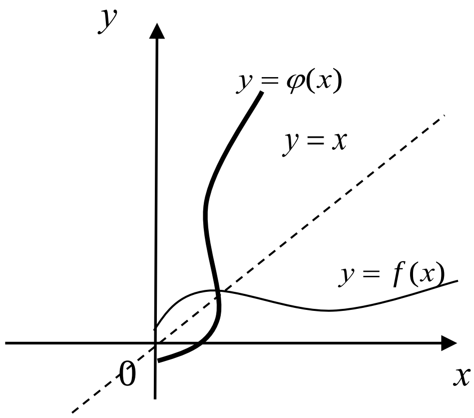


Рисунок 1.5 – График обратной функции

Пример 1.5. Найти обратную функцию для функции $y = 2x + 3$.

Решение. Решая уравнение $y = 2x + 3$ относительно x, получим: $x = \frac{1}{2}y - \frac{3}{2}$ – эта функция и является обратной по отношению к исходной, но запишем ее в привычном для нас виде, заменив x на y, а y на x, т.е. $y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$. (Самостоятельно постройте графики данной и обратной функции).

Если переменная y является функцией от переменной u, $y = f(u)$, а переменная u, в свою очередь, является функцией от переменной x, $u = \varphi(x)$, то функция $y = f[\varphi(x)]$ называется *сложной функцией*. Переменная u в этом случае называется *промежуточным аргументом*, а x – *основным аргументом*. Так, например, функция $y = sin(5x+1)$ - есть сложная функция, т.к. ее можно представить в виде $y = sinu$, где $u = 5x+1$.

Неявной функцией называется функция, заданная уравнением (не разрешенным относительно y), связывающим значения функции и значения независимой переменной. В общем виде уравнение, связывающее переменные x и y, записывается в виде

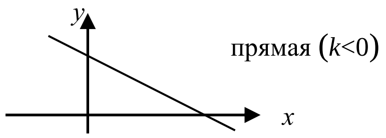
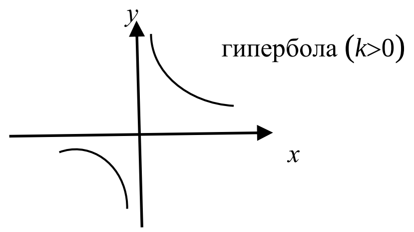
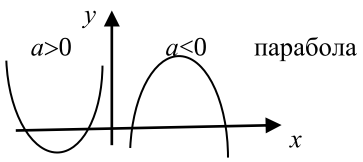
$$F(x,y)=0. \tag{1.8}$$

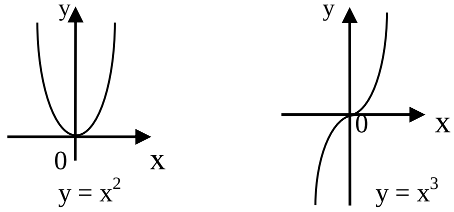
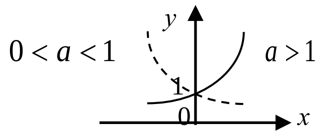
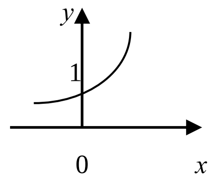
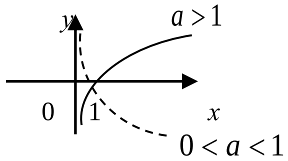
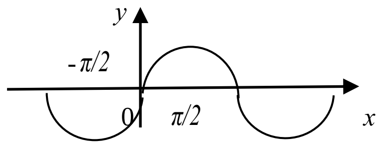
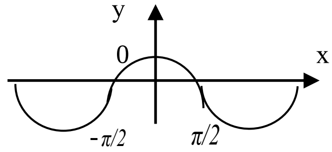
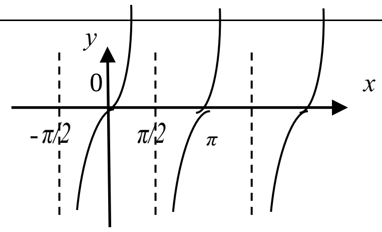
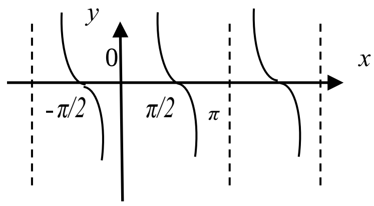
Примером неявной функции может служить функция, заданная уравнением $e^y + y^2 - 2y = 0$.

К простейшим элементарным функциям относятся: линейная, дробно-линейная, квадратичная, степенная, показательная, логарифмическая, тригонометрические, обратные тригонометрические и гиперболические функции (табл.1.1).

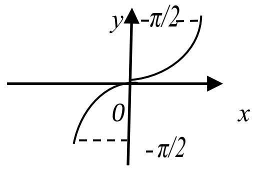
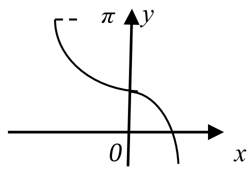
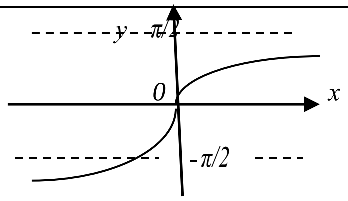
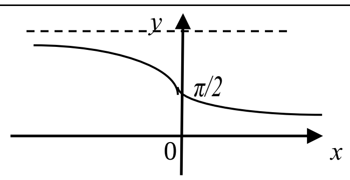
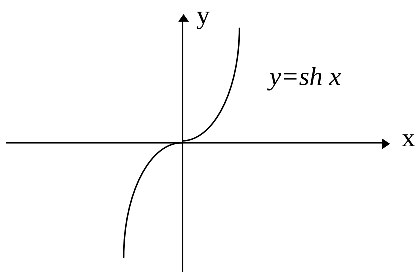
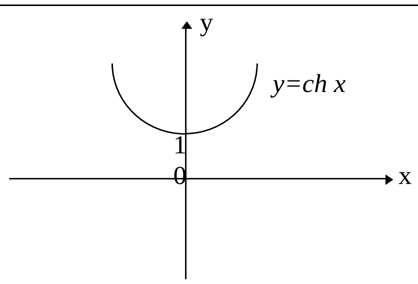
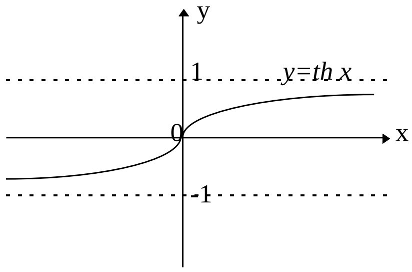
Таблица 1.1

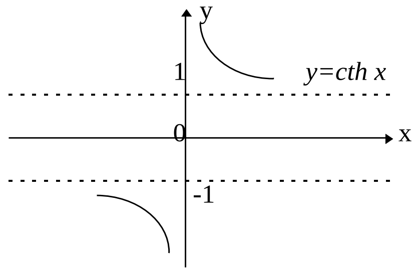
Элементарные функции, их графики

№ п/п	Название и вид функции	Область определения функции $D(f)$	График функции
1	Линейная функция $y = kx + b$	$x \in (0; +\infty)$.	
2	Дробно-линейная функция $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ приводится к виду $y = \dfrac{k}{x}$	$x \in \left(-\infty; -\dfrac{d}{c}\right) \cup \left(-\dfrac{d}{c}; \infty\right)$. $x \in (-\infty; 0) \cup (0; \infty)$.	
3	Квадратичная функция $y = ax^2 + bx + c$		

4	Степенная функция $y = x^n$, $n \in (-\infty; +\infty)$.	$x \in (0; +\infty)$.	
5	Показательная функция $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$.	$x \in (-\infty; +\infty)$.	
6	Экспоненциальная функция $y = e^x$. (частный случай показательной функции при $a = e \approx 2{,}7172...$)	$x \in (-\infty; +\infty)$.	
7	Логарифмическая функция $y = log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$.	$x \in (0; +\infty)$	
Тригонометрические функции 8	$y = sinx$	$x \in (-\infty; +\infty)$.	
9	$y = cosx$	$x \in (-\infty; +\infty)$.	
10	$y = tgx$	$x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$, $n \in Z$.	
11	$y = ctgx$	$x \in (\pi n; \pi + \pi n)$, $n \in Z$	

Продолжение таблицы 1.1

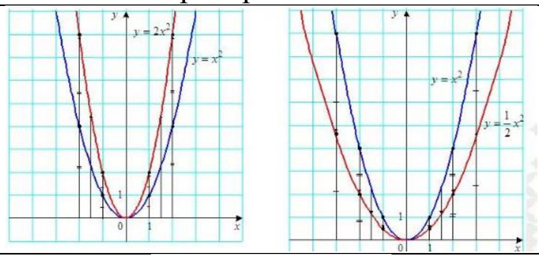
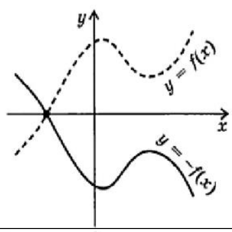
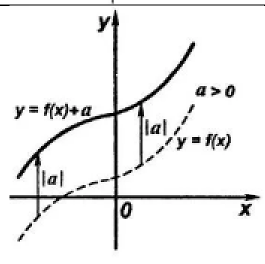
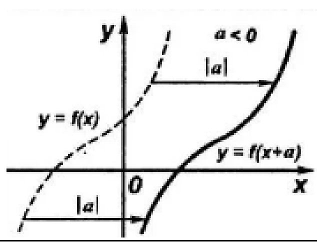
Обратно-тригонометрические функции	12	$y = arcsinx$	$x \in [-1; 1]$.	
	13	$y = arccosx$	$x \in [-1; 1]$.	
	14	$y = arctgx$	$x \in (-\infty; +\infty)$.	
	15	$y = arcctgx$	$x \in (-\infty; +\infty)$.	
Гиперболические функции	16	$sh\, x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$	$x \in (-\infty; +\infty)$.	
	17	$ch\, x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$	$x \in (-\infty; +\infty)$.	
	18	$th\, x = \dfrac{sh\, x}{ch\, x} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$	$x \in (-\infty; +\infty)$.	

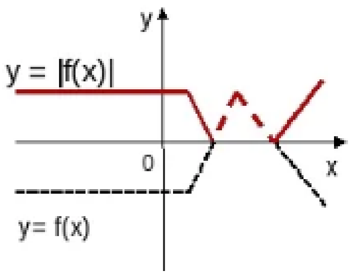
	19	$cth\ x = \dfrac{ch\ x}{sh\ x} = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$	$x \in (-\infty; 0) \cup (0; \infty)$.	

При решении практических задач бывает известны графики каких-либо функций, а требуется построить графики других функций, выраженных через первые. Приведем несколько примеров таких преобразований графиков (табл. 2).

Таблица 1.2

Преобразование графиков функций

№ п/п	Преобразование графика	Описание преобразования	Графическая иллюстрация преобразования
1	$f(x) \to af(x)$	График функции $y = af(x)$ получается из графика функции $y = f(x)$ растяжением ($\|a\|>1$) или сжатием ($\|a\|<1$) в a раз по оси Oy.	
2	$f(x) \to -f(x)$	График функции $y = -f(x)$ получается из графика функции $y = f(x)$ зеркальным его отражением относительно оси Ox.	
3	$f(x) \to f(x)+a$	График функции $f(x) \to f(x)+a$ получается из графика функции $y = f(x)$ сдвигом вдоль оси Oy вверх при $a>0$ или вниз при $a<0$.	
4	$f(x) \to f(x+a)$	График функции $f(x) \to f(x+a)$ получается из графика функции $y = f(x)$ сдвигом вдоль оси Ox влево при $a>0$ или вправо при $a<0$.	

5	$f(x) \to \lvert f(x) \rvert$	Чтобы из графика функции $y = f(x)$ получить график функции $f(x) \to \lvert f(x) \rvert$, нужно участки графика $y = f(x)$, лежащие выше оси абсцисс оставить без изменения, а участки, лежащие ниже оси Ox, отобразить зеркально относительно этой оси.	

1.2. Предел функции в точке. Основные теоремы о пределах

Число A называется *пределом функции* $f(x)$ при $x \to a$, если для каждого числа $\varepsilon > 0$ можно найти такое число $\delta > 0$, что выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$, когда $|x - a| < \delta$, при $x \neq a$ [ ]. Обозначается предел функции

$$\lim_{x \to a} f(x) = A. \tag{1.9}$$

Указанные неравенства можно заменить двойными неравенствами

$$a - \delta < x < a + \delta, \quad A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon. \tag{1.10}$$

Построим график функции $y = f(x)$ и точку $M(a; A)$, (рис. 1.6).

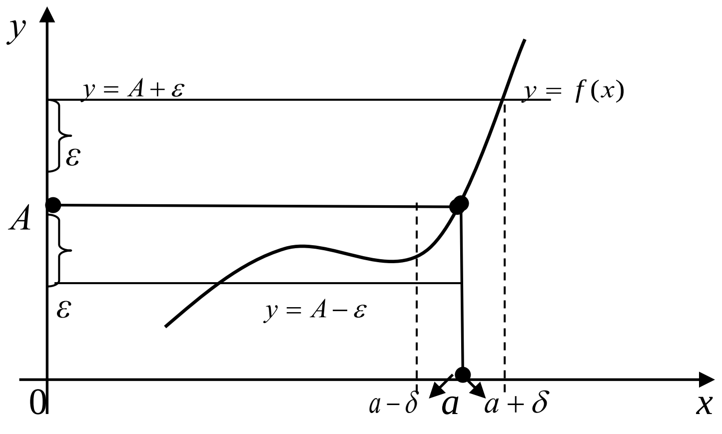


Рисунок 1.6 - Геометрическая иллюстрация предела функции

Выполнение неравенств (1.10) геометрически означает, что часть графика функции $y = f(x)$ должна находиться внутри полосы, ограниченной прямыми

$y = A - \varepsilon$, $y = A + \varepsilon$ при условии существования такой окрестности $(a-\delta; a+\delta)$ точки a, что для любого $x \in (a-\delta; a+\delta)$ условие (1.9) будет выполняться.

Число A_1 называется *левосторонним пределом* функции $y = f(x)$, если x стремится к a, оставаясь все время меньше a

$$\lim_{x \to a-0} f(x) = A_1. \tag{1.11}$$

Число A_2 называется правосторонним пределом функции $y = f(x)$, если x стремится к a, оставаясь все время больше a

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = A_2. \tag{1.12}$$

Для существования предела A при $x \to a$ функции $y = f(x)$ необходимо и достаточно, чтобы существовали в этой точке левосторонний и правосторонний пределы и, чтобы они были равны между собой, т.е. $A_1 = A_2 = A$.

Если функции $y = f(x)$ и $y = \varphi(x)$ при $x \to a$ имеют конечные пределы, то справедливы следующие теоремы:

Теорема 1. Предел постоянной равен самой постоянной

$$\lim_{x \to a} C = C, \text{ где } C = const. \tag{1.13}$$

Теорема 2. Функция $y = f(x)$ не может иметь двух пределов.

Теорема 3. Функция $y = f(x)$, имеющая предел, является ограниченной.

Теорема 4. Предел алгебраической суммы двух функций равен алгебраической сумме пределов этих функций

$$\lim_{x \to a} \left[f(x) \pm \varphi(x) \right] = \lim_{x \to a} f(x) \pm \lim_{x \to a} \varphi(x). \tag{1.14}$$

Теорема 5. Предел произведения двух функций равен произведению пределов этих функций

$$\lim_{x \to a} \left[f(x) \cdot \varphi(x) \right] = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} \varphi(x). \tag{1.15}$$

Следствие 1. Постоянный множитель можно выносить за знак предела

$$\lim_{x\to a} C\cdot f(x)=C\cdot\lim_{x\to a} f(x). \qquad (1.16)$$

Следствие 2. Предел целой положительной степени функции равен той же степени предела этой функции

$$\lim_{x\to a}\left[f(x)\right]^n=\left[\lim_{x\to a} f(x)\right]^n. \qquad (1.17)$$

Теорема 6. Предел частного от деления двух функций равен частному пределов этих функций, при условии, что предел знаменателя не равен нулю

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)}, \text{ если } \lim_{x\to a}\varphi(x)\neq 0. \qquad (1.18)$$

Теорема 7. Если для функций $f(x)$ и $\varphi(x)$ выполняется неравенство $f(x)\le\varphi(x)$, то справедливо $\lim\limits_{x\to a} f(x)\le\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)$.

Теорема 8. Если в процессе изменения значения функции $\psi(x)$ остаются заключенными между значениями двух других функций $f(x)$ и $\varphi(x)$, т.е. $f(x)\le\psi(x)\le\varphi(x)$, имеющих общий предел $A\left(\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=A\right)$, то и функция $\psi(x)$ имеет такой же предел $\lim\limits_{x\to a}\psi(x)=A$.

Пример 1.6. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 2}\frac{3x^2-x-2}{2x^2+x-3}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{3x^2-x-2}{2x^2+x-3}=\frac{12-2-2}{8+2-3}=\frac{8}{7}$.

Пример 1.7. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x}+1}{x\sqrt{x}+x+\sqrt{x}}:\frac{1}{x^2-\sqrt{x}}$, предварительно упростив выражение.

Решение.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x}+1}{x\sqrt{x}+x+\sqrt{x}}:\frac{1}{x^2-\sqrt{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{x}+1)\sqrt{x}(x^{\frac{3}{2}}-1)}{\sqrt{x}(x+\sqrt{x}+1)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)}{x+\sqrt{x}+1}=\lim_{x\to 0}(x-1)=-1.$$

Метод вычисления пределов 1.6 и 1.7 называют *методом непосредственной подстановки*.

1.3. Бесконечно малые и бесконечно большие функции

Функция $f(x)$ называется *бесконечно малой* при $x \to a$, если ее предел равен нулю, т.е.

$$\lim_{x\to a} f(x) = 0. \qquad (1.19)$$

и *бесконечно большой*, если

$$\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty. \qquad (1.20)$$

Бесконечно большая функция не имеет предела, и ее абсолютная величина может принимать как угодно большие значения.

Между бесконечно малой и бесконечно большой функциями существует обратная связь: функция, обратная бесконечно большой, есть функция бесконечно малая и, наоборот, функция, обратная бесконечно малой, есть функция бесконечно большая. Символически это обозначают так:

$$\frac{1}{\infty} = 0 \text{ и } \frac{1}{0} = \infty. \qquad (1.21)$$

Имеет место и более общий результат. Для любого действительного числа $a > 0$ при предельном переходе выполняются следующие равенства:

$$\left\{\frac{a}{+0}\right\} = +\infty;\ \left\{\frac{a}{-0}\right\} = -\infty;\ \left\{\frac{a}{0}\right\} = \infty;\ \left\{\frac{a}{+\infty}\right\} = 0;\ \left\{\frac{a}{-\infty}\right\} = -0;\ \left\{\frac{a}{\infty}\right\} = 0. \qquad (1.22)$$

Бесконечно малые функции обладают следующими свойствами:

1. Алгебраическая сумма любого конечного числа бесконечно малых функций есть также функция бесконечно малая.
2. Произведение ограниченной функции на функцию бесконечно малую есть функция бесконечно малая.
3. Частное от деления бесконечно малой функции на функцию величину, имеющую предел, отличный от нуля, есть также функция бесконечно малая.
4. Произведение конечного числа бесконечно малых функций есть функция бесконечно малая.

Две бесконечно малые функции сравниваются друг с другом при помощи исследования их отношения.

Если $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$, то функция $\alpha(x)$ называется *бесконечно малой высшего порядка малости* по сравнению с бесконечно малой функцией $\beta(x)$, а $\beta(x)$ называется *бесконечно малой низшего порядка малости*, по сравнению с $\alpha(x)$.

Если $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=C=const\neq 0$, то функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются *бесконечно малыми одного и того же порядка малости*.

Если $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{[\beta(x)]^k}=C=const\neq 0$, то функция $\alpha(x)$ называется *бесконечно малой k-го порядка малости* по сравнению с функцией $\beta(x)$.

Пример 1.8. Сравнить бесконечно малые функции $\alpha(x)=1-cosx$ и $\beta(x)=x$ при $x\to 0$.

Решение. Находим предел отношения $\dfrac{1-cosx}{x}$ при $x\to 0$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-cosx}{x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{2sin^2\frac{x}{2}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\cdot\lim_{x\to 0}sin\frac{x}{2}=1\cdot 0=0\cdot$$

Так как предел равен нулю, то функция $\alpha(x)=1-cosx$ - есть бесконечно малая функция высшего порядка малости по сравнению с величиной $\beta(x)=x$.

Если $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$, то функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются *эквивалентными* (или *равносильными*). В этом случае принято записывать: $\alpha(x)$ ~ $\beta(x)$. Эквивалентные бесконечно малые функции обладают следующими свойствами:

1. При нахождении предела отношения двух бесконечно малых функций можно каждую из них (или только одну) заменить другой бесконечно малой, ей эквивалентной.

2. Для того, чтобы две бесконечно малые функции были эквивалентными, необходимо и достаточно, чтобы их разность была бесконечно малой более высокого порядка малости по сравнению с каждой из них.

Применение эквивалентных бесконечно малых функций значительно упрощает вычисление пределов. Приведем некоторые из них, где $\alpha(x)$ - бесконечно малая функция при $x \to 0$ (табл. 1.3).

Таблица 1.3

Таблица эквивалентных бесконечно малых функций

1	$\sin\alpha(x) \sim \alpha(x)$	7	$a^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x) \cdot \ln a$
2	$tg\alpha(x) \sim \alpha(x)$	8	$e^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x)$
3	$\arcsin\alpha(x) \sim \alpha(x)$	9	$\sqrt{1+\alpha(x)} - 1 \sim \frac{\alpha(x)}{2}$
4	$arctg\alpha(x) \sim \alpha(x)$	10	$\ln(1+\alpha(x)) \sim \alpha(x)$
5	$1 - \cos\alpha(x) \sim \frac{\alpha^2(x)}{2}$	11	$\lg(1+\alpha(x)) \sim 0{,}4343\alpha(x)$
6	$(1+\alpha(x))^p - 1 \sim p \cdot \alpha(x)$	12	$\sqrt[n]{1+\alpha(x)} - 1 \sim \frac{1}{n} \cdot \alpha(x)$

Пример 1.9. Вычислить предел $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{\sin 5x}$.

Решение. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{\sin 5x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{x/2}{5x} = \frac{1}{10}$.

Бесконечно большие функции обладают следующими свойствами:

1. Сумма бесконечно большой функции и функции ограниченной есть функция бесконечно большая.

2. Сумма двух бесконечно больших функций одинакового знака есть функция бесконечно большая.

3. Произведение конечного числа бесконечно больших функций есть функция бесконечно большая.

Пример 1.10. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x^4+8x^2+10\right)$.

Решение. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x^4+8x^2+10\right)=\lim\limits_{x\to\infty}x^4+8\lim\limits_{x\to\infty}x^2+10=\infty$.

1.4. Замечательные пределы

В математическом анализе есть пределы особой важности, их называют *замечательными*.

Первый замечательный предел

Предел отношения синуса бесконечно малой дуги к самой дуге, выраженной в радианах, равен единице

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1. \tag{1.23}$$

Пример 1.11. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{x}$.

Решение. Введем замену переменной $3x = t$, $x=\dfrac{t}{3}$. При $x\to 0$, $t\to 0$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{\frac{t}{3}}=\lim_{t\to 0}\frac{3\sin t}{t}=3\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=3\cdot 1=3.$$

Применяя теоремы о пределах и формулу (1.23), легко получить формулы

$$\lim_{x\to 0}\frac{tgx}{x}=1,\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin^n kx}{(kx)^n}=1,\ \lim_{x\to 0}\frac{tg^n kx}{(kx)^n}=1,\ \lim_{x\to 0}\frac{\arcsin^n kx}{(kx)^n}=1,\ \lim_{x\to 0}\frac{arctg^n kx}{(kx)^n}=1. \tag{1.24}$$

Пример 1.12. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{1-\cos 4x}$.

Решение. Применим тригонометрическую формулу $\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}\cdot\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\cos 6x-\cos 4x}=\left(\frac{0}{0}\right)=-\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\sin x\cdot\sin 5x}=-\frac{1}{2\cdot 5}\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{\sin x}\right)\cdot\left(\frac{5x}{\sin 5x}\right)=-\frac{1}{10}.$$

Второй замечательный предел

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e,\quad \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e, \tag{1.25}$$

где e – натуральное число, его приближенное значение $e \approx 2{,}718281\ldots$. Логарифм числа a по основанию e называется *натуральным логарифмом* и обозначается $\log_e a = \ln a$.

Пример 1.13. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{5x}\right)^x$

Решение. Подставим предельное значение x и сделаем замену переменной

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{5x}\right)^x=\left(1^\infty\right)=\left\{5x=y, x=\frac{y}{5}, \text{если } x\to\infty, \text{то } y\to\infty\right\}=$$

$$=\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{\frac{y}{5}}=\lim_{y\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{y}\right)^y\right]^{1/5}=\sqrt[5]{e}.$$

Пример 1.14. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to\infty} x\left[\ln(2x-1)-\ln(2x+1)\right]$.

Решение. Применим свойства логарифмов и замену переменной.

$$\lim_{x\to\infty} x\left[\ln(2x-1)-\ln(2x+1)\right]=\left(\infty\cdot(\infty-\infty)\right)=\lim_{x\to\infty}\ln\left(\frac{2x-1}{2x+1}\right)^x=\ln\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x-1}{2x+1}\right)^x=$$

$$=\ln\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{2x+1}\right)^x=\ln\left(1^\infty\right)=\left\{y=-\frac{2}{2x+1}, x=-\frac{1}{y}-\frac{1}{2}, \text{если } x\to\infty, \text{то } y\to 0\right\}=$$

$$=\ln\lim_{y\to 0}(1+y)^{-\frac{1}{y}-\frac{1}{2}}=\ln\lim_{y\to 0}\left\{\left[(1+y)^{\frac{1}{y}}\right]^{-1}\cdot(1+y)^{-\frac{1}{2}}\right\}=\ln\left\{\left[\lim_{y\to 0}(1+y)^{\frac{1}{y}}\right]^{-1}\cdot\lim_{y\to 0}(1+y)^{-\frac{1}{2}}\right\}=$$

$$=\ln\left(e^{-1}\cdot 1\right)=-1.$$

1.5. Раскрытие неопределенностей

Пределы с неопределенностью вида $\frac{0}{0}$

Рассмотрим предел дроби $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\left(\frac{0}{0}\right)$. Символ $\left(\frac{0}{0}\right)$ называется неопределенностью «ноль делить на ноль». Эта неопределенность раскрывается в зависимости от вида функций $f(x)$ и $\varphi(x)$. Рассмотрим возможные случаи и методы решения таких пределов.

1. $f(x)$ и $\varphi(x)$ – *многочлены*. Для раскрытия неопределенности $\left(\frac{0}{0}\right)$ необходимо выделить *критический множитель* $(x - a)$ в числителе и знаменателе, применяя способ группировки, *формулы сокращенного умножения*

$$x^2 - a^2 = (x-a)(x+a);\; x^3 \pm a^3 = (x \pm a)(x^2 \mp ax + a^2), \qquad (1.26)$$

и разложение квадратного трехчлена на линейные множители

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2), \text{где } x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \qquad (1.27)$$

Пример 1.15. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-1}{5x^2-x-4}$.

Решение.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{5x^2-x-4} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{5(x-1)\left(x+\frac{4}{5}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{x^2+x+1}{5x+4} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}.$$

2. $f(x)$ и $\varphi(x)$ – *иррациональные функции*. В этом случае для раскрытия указанной неопределенности необходимо избавиться от иррациональности: а) в случае квадратных корней домножением числителя и знаменателя на сопряженное выражение множителю, обращающегося в ноль; б) в случае кубических корней – домножением на неполный квадрат суммы или разности выражений; в) в случае корней более высоких степеней – подстановкой, избавляющей от иррациональности.

Пример 1.16. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{x-1}-1}{2-\sqrt[3]{x+6}}$.

Решение.

$$\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{x-1}-1}{2-\sqrt[3]{x+6}}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to2}\frac{\left(\sqrt{x-1}-1\right)\left(\sqrt{x-1}+1\right)\left(4+2\sqrt[3]{x+6}+\sqrt[3]{(x+6)^2}\right)}{\left(2-\sqrt[3]{x+6}\right)\left(4+2\sqrt[3]{x+6}+\sqrt[3]{(x+6)^2}\right)\left(\sqrt{x-1}+1\right)}=$$

$$=\lim_{x\to2}\frac{(x-1-1)\left(4+2\sqrt[3]{x+6}+\sqrt[3]{(x+6)^2}\right)}{(8-x-6)\left(\sqrt{x-1}+1\right)}=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)\left(4+2\sqrt[3]{x+6}+\sqrt[3]{(x+6)^2}\right)}{-(x-2)\left(\sqrt{x-1}+1\right)}=$$

$$=-\lim_{x\to2}\frac{4+2\sqrt[3]{x+6}+\sqrt[3]{(x+6)^2}}{\sqrt{x-1}+1}=-\frac{4+2\sqrt[3]{8}+\sqrt[3]{8^2}}{\sqrt{2-1}+1}=-\frac{12}{2}=-6.$$

Пример 1.17. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt[4]{x}-1}{1-\sqrt{x}}$.

Решение.
$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt[4]{x}-1}{1-\sqrt{x}}=\left(\frac{0}{0}\right)=\left\{\begin{matrix}x=t^4,\sqrt{x}=t^2,\\ \text{при}\,x\to1\ t\to1\end{matrix}\right\}=\lim_{t\to1}\frac{t-1}{1-t^2}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$
$$=-\lim_{t\to1}\frac{(t-1)}{(t-1)(t+1)}=-\lim_{t\to1}\frac{1}{t+1}=-\frac{1}{2}.$$

3. $f(x)$ и $\varphi(x)$ – *тригонометрические функции* и $x\to0$. Указанная неопределенность раскрывается с помощью приведения к первому замечательному пределу с использованием формул тригонометрии. Если $x\to a$, то необходимо ввести подстановку $x-a=t$.

Пример 1.18. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos6x}{tg^2 5x}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos6x}{tg^2 5x}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2\sin^2 3x}{tg^2 5x}=2\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\sin3x}{3x}\right)^2\cdot\left(\dfrac{5x}{tg5x}\right)^2\cdot\dfrac{9}{25}=\dfrac{18}{25}.$

Пример 1.19. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1-x^2}{\sin\pi(x-1)}$.

Решение.
$$\lim_{x\to1}\frac{1-x^2}{\sin\pi(x-1)}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\left\{\begin{matrix}z=x-1,x=z+1\\ \text{если}\ x\to1,\text{то}\ z\to0\end{matrix}\right\}=$$
$$=\lim_{z\to0}\frac{1-z^2-2z-1}{\sin\pi z}=-\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\lim\limits_{z\to0}(z+2)}{\lim\limits_{z\to0}\dfrac{\sin\pi z}{\pi z}}=-\frac{2}{\pi}.$$

4. $f(x)$ и $\varphi(x)$ – *бесконечно малые функции* и $x\to0$. Для раскрытия неопределенности используется таблица эквивалентных бесконечно малых функций.

Пример 1.20. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2 arctg7x}{\ln\left(1+2x^3\right)}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2 arctg\,7x}{\ln\left(1+2x^3\right)}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\left\{arctg\,7x\sim 7x, \ln\left(1+2x^3\right)\sim 2x^3\right\}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{7x^3}{2x^3}=\dfrac{7}{2}.$

Пределы с неопределенностью вида $\dfrac{\infty}{\infty}$

Рассмотрим предел дроби $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$, где $f(x)$ и $\varphi(x)$ – бесконечно большие функции. *Общее правило* раскрытия такой неопределенности состоит в *почленном делении* числителя и знаменателя *на старшую степень* x.

Пример 1.21. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2-x+13}{2x^2-3x-1}$.

Решение.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2-x+13}{2x^2+3x-1}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{5x^2}{x^2}-\dfrac{x}{x^2}+\dfrac{13}{x^2}}{\dfrac{2x^2}{x^2}+\dfrac{3x}{x^2}-\dfrac{1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{5-\dfrac{1}{x}+\dfrac{13}{x^2}}{2+\dfrac{3}{x}-\dfrac{1}{x^2}}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}5-\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}+\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{13}{x^2}}{\lim\limits_{x\to\infty}2+\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3}{x}-\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^2}}=\frac{5-0+0}{2+0-0}=\frac{5}{2}.$$

Из этого правила вытекает формула раскрытия неопределенности $\dfrac{\infty}{\infty}$:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_1x^n+a_2x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_0}{b_1x^m+b_2x^{m-1}+\ldots+b_{m-1}x+b_0}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\begin{cases}0, \text{ если } n<m,\\ \infty, \text{ если } n>m,\\ \dfrac{a_1}{b_1}, \text{ если } n=m.\end{cases} \qquad (1.28)$$

Пример 1.22. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-3x+1}{5x^3+2x^2-x+7}$.

Решение. При подстановке предельного значения аргумента x, приходим к неопределенности указанного вида. Применим формулу (1.28). Степень многочлена, стоящего в числителе, меньше степени многочлена, стоящего в знаменателе, следовательно, знаменатель быстрее стремится к бесконечности, чем числитель. Вся дробь при этом будет стремиться к нулю,

т.е. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-3x+1}{5x^3+2x^2-x+7}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)=0.$

Пределы с неопределенностью вида $0\cdot\infty$

Применяя связь между бесконечно малой и бесконечно большой функциями (1.21) неопределенность $0\cdot\infty$ легко приводится к неопределенностям, рассмотренным выше. Символически это можно записать

$$0\cdot\infty = \frac{1}{\infty}\cdot\infty = \frac{\infty}{\infty},\ 0\cdot\infty = 0\cdot\frac{1}{0} = \frac{0}{0}.$$

Пример 1.23. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to\pi/2}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\cdot tgx$.

Решение.
$$\lim_{x\to\pi/2}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\cdot tgx = (0\cdot\infty) = \left\{x-\frac{\pi}{2}=t,\ x=t+\frac{\pi}{2},\text{при}\,x\to\frac{\pi}{2},t\to 0\right\} =$$
$$= \lim_{t\to 0}\left[t\cdot tg\left(t+\frac{\pi}{2}\right)\right] = (0\cdot\infty) = \lim_{t\to 0} t\cdot(-ctgt) = -\lim_{t\to 0}\frac{t}{tgt} = \left(\frac{0}{0}\right) = -1.$$

Пределы с неопределенностью вида ∞ - ∞

Если функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ – рациональные дроби, то путем приведения дробей к общему знаменателю эта неопределенность приводится к неопределенности $\frac{\infty}{\infty}$ или $\frac{0}{0}$.

Пример 1.24. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x^2-1}\right)$.

Решение.
$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x^2-1}\right). = (\infty-\infty) = \lim_{x\to 1}\frac{x+1-2}{x^2-1} = \lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x^2-1} = \left(\frac{0}{0}\right) =$$
$$= \lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x\to 1}\frac{1}{x+1} = \frac{1}{2}.$$

Если $f(x)$ и $\varphi(x)$ – иррациональные функции, то необходимо поступить также, как при раскрытии неопределенности $\frac{0}{0}$, п.2.

Пример 1.25. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+3x}-x\right)$.

Решение.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+3x}-x\right)=(\infty-\infty)=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+3x}-x\right)\cdot\left(\sqrt{x^2+3x}+x\right)}{\sqrt{x^2+3x}+x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+3x-x^2}{\sqrt{x^2+3x}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{3x}{\sqrt{x^2+3x}+x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\frac{3}{2}.$$

Пределы с неопределенностью вида $1^\infty, \left(\frac{0}{0}\right)^\infty, \left(\frac{\infty}{\infty}\right)^\infty$

Указанные неопределенности раскрываются с помощью применения второго замечательного предела.

Пример 1.26. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{ctg^2 x}$.

Решение.

$$\lim_{x\to 0}(\cos 2x)^{ctg^2 x}=\left(1^\infty\right)=\left\{\cos 2x=1-2\sin^2 x, ctg^2 x=\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}\right\}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\left(1-2\sin^2 x\right)^{-\frac{1}{2\sin^2 x}}\right]^{-2\cos^2 x}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\left(-2\cos^2 x\right)}=e^{-2}=\frac{1}{e^2}.$$

При вычислении пределов надо выполнять *главное правило*: сначала подставляется предельное значение аргумента в функцию.

1.6. Непрерывность функции в точке. Точки разрыва, их классификация

Существует несколько определений непрерывности функции в точке:

1. Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке $x = x_0$, если выполняются следующие условия:

а) функция определена в точке x_0 и некоторой её окрестности;

б) существует предел функции $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ при $x\to x_0$;

в) предел функции совпадает со значениям функции в этой точке, т.е.

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0). \tag{1.29}$$

Замечание: Так как $\lim\limits_{x \to x_0} x = x_0$, то равенство (1.29) можно переписать в виде

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f\left(\lim_{x \to x_0} x\right) = f(x_0). \qquad (1.29')$$

Это означает, что при нахождении предела непрерывной функции $f(x)$ можно перейти к пределу под знаком функции, т.е. в функцию $f(x)$ вместо аргумента x подставить его предельное значение x_0 (или менять местами знак предела и знак функции).

Пример 1.27. Вычислить предел $\lim\limits_{x \to 0} e^{\frac{\sin 2x}{x}}$.

Решение. $\lim\limits_{x \to 0} e^{\frac{\sin 2x}{x}} = e^{\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{x}} = e^2$. Функция и предел поменялись местами в силу непрерывности экспоненциальной функции e^x.

2. Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке $x = x_0$, если её односторонние пределы при $x \to x_0$ равны между собой и совпадают со значением функции в этой точке, т.е.

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0). \qquad (1.30)$$

3. Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке $x = x_0$, если она определена в точке x_0 и некоторой её окрестности и выполняется равенство

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0, \qquad (1.31)$$

т.е. бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции. Пусть функция $y=f(x)$ определена в некотором интервале $(a;b)$, рис.1.7. Возьмем произвольную точку $x_o \in (a;b)$. Для любого $x \in (a;b)$ разность $x-x_o$ называется *приращением аргумента* x в точке x_0 и обозначается Δx, т.е. $\Delta x = x - x_0$. Отсюда $x = x_0 + \Delta x$. Разность соответствующих значений функций $f(x) - f(x_0)$ называется *приращением функции* $f(x)$ в точке x_0 и обозначается Δy (или Δf или $\Delta f(x_0)$):

$$\Delta y = f(x) - f(x_0), \text{ или } \Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0). \qquad (1.32)$$

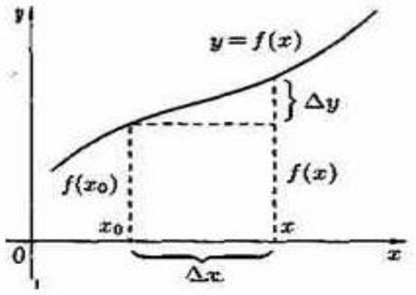


Рисунок 1.7.- График непрерывной функции

Непрерывные функции обладают следующими свойствами:

1. Сумма, произведение и частное двух непрерывных функций есть функция непрерывная (для частного за исключением тех значений аргумента, в которых делитель равен нулю).

2. Пусть функции $u=\varphi(x)$ непрерывна в точке x_o, а функция $y=f(u)$ непрерывна в точке $u_0=\varphi(x_o)$. Тогда сложная функция $f(\varphi(x))$, состоящая из непрерывных функций, непрерывна в точке x_o.

3. Если функция $y=f(x)$ непрерывна и строго монотонна на $[a;b]$ оси Ox , то обратная функция $y=\varphi(x)$ также непрерывна и монотонна на соответствующем отрезке $[c;d]$ оси Oy.

Если функция непрерывна в каждой точке некоторого интервала, то она называется *непрерывной на всем интервале*. Все *основные элементарные функции непрерывны* при всех значениях x, для которых они определены.

Точки, в которых нарушается непрерывность функции, называются *точками разрыва* этой функции. Если $x=x_o$ - точка разрыва функции $y=f(x)$, то в ней не выполняется по крайне мере одно из условий первого определения непрерывности функции. Разрыв функции в точке x_o называется *разрывом* I *рода*, если односторонние пределы существуют, но не равны между собой

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) = A_1, \lim_{x\to x_0+0} f(x) = A_2 \Rightarrow A_1 \neq A_2. \qquad (1.33)$$

Величина $h = |A_1 - A_2|$ называется *скачком* функции в точке x_o.

Пример 1.28. Исследовать на непрерывность функцию $y=\begin{cases} x^2, & x\le 1. \\ 4-x, & x>1 \end{cases}$

Решение. Данная функция определена и непрерывна на интервалах $(-\infty;1)\cup(1;+\infty)$. При x=1 меняется аналитическое выражение функции, и поэтому только в этой точке функция может иметь разрыв. Определим односторонние пределы в этой точке:

$$\lim_{x\to 1-0} y=\lim_{x\to 1-0} x^2=(1-0)^2=1; \quad \lim_{x\to 1+0} y=\lim_{x\to 1+0}(4-x)=4-1+0=3.$$

Так как односторонние пределы конечны, но не равны между собой, то x=1 является точкой разрыва I рода. Скачок функции в этой точке равен $h=|1-3|=2$. График функции изображен на рисунке. Если односторонние пределы функции совпадают, т.е. A_1 = A_2, то точка называется точкой *устранимого разрыва*.

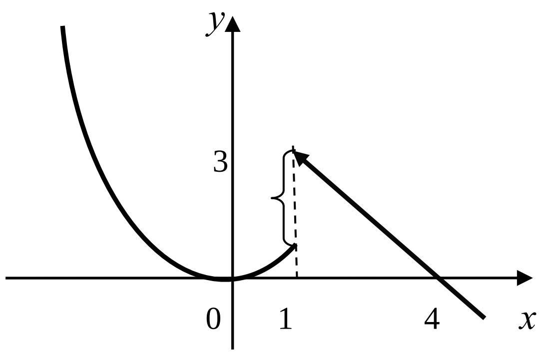


Рисунок к примеру 1.28.

Пример 1.29. Исследовать на непрерывность функцию $y=e^{-\frac{1}{x^2}}$.

Решение. Эта функция определена и непрерывна на интервалах $(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$. При x=0 функция терпит разрыв. Так как при $x\to 0$

$\lim\limits_{x\to\mp 0} e^{-\frac{1}{x^2}}=0$, то имеем устранимый разрыв. Функция становится непрерывной на всей вещественной оси, если положить $f(0)$ = 0.

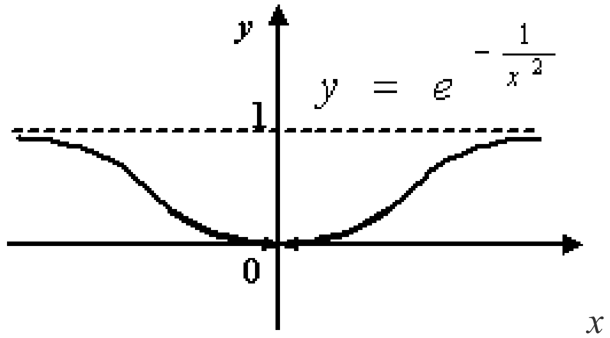


Рисунок к примеру 1.29.

Разрыв функции в точке x_o называется *разрывом* II *рода*, если хотя бы один из односторонних пределов не существует или равен бесконечности, т.е. выполняется условие

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \pm\infty, \text{ или } \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = \pm\infty, \text{или } \lim_{x \to x_0 \pm 0} f(x) \text{ не существует.} \quad (1.34)$$

Пример 1.30. Исследовать на непрерывность функцию $y = \frac{1}{x}$.

Решение. Данная функция имеет разрыв II рода в точке x=0, так как

$$\lim_{x \to -0} \frac{1}{x} = -\infty, \ \lim_{x \to +0} \frac{1}{x} = +\infty.$$

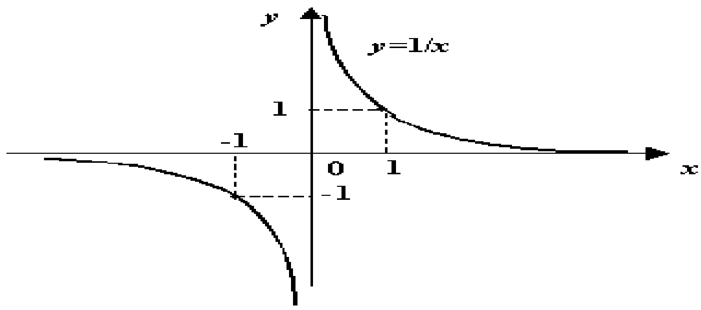


Рисунок к примеру 1.30.

Вопросы для самопроверки

1. Понятие математического анализа.
2. Постоянные и переменные величины, примеры.
3. Область изменения переменной величины.

4. Определение функции одной переменной.

5. Частное значение функции. Нули функции.

6. Областью определения и область значений функции. Интервалы знакопостоянства.

7. Способы задания функции. Преимущества и недостатки каждого способа задания функции.

8. Основные элементарные функции.

9. Преобразование графиков функций.

10. Четная, нечетная функции, их свойства и графики.

11. Периодическая функция, ее график.

12. Обратная функция, ее график.

13. Монотонные и ограниченные функции.

14. Сложные и неявно заданные функции.

15. Предел функции, его геометрическое представление.

16. Односторонние пределы функции.

17. Основные теоремы о пределах функции.

18. Бесконечно малые и бесконечно большие функции, их свойства. Связь между бесконечно малой и бесконечно большой функциями.

19. Сравнение бесконечно малых функций, эквивалентные бесконечно малые функции.

20. Замечательные пределы.

21. Математические неопределенности, методы их раскрытия.

22. Понятие непрерывности функции (3 определения).

23. Свойства непрерывных функций.

24. Классификация точек разрыва функции.

ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ № 1 «Введение в математический анализ» (теория)

1.1. Совокупность всех принимаемых переменной величиной числовых значений называется …

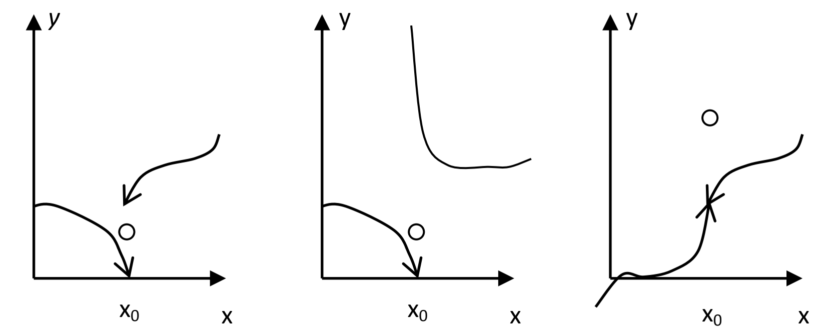
1) областью определения; 2) областью значений;
3) интервалом монотонности; 4) интервалом знакопостоянства.

1.2. Функция $f(x)$ называется четной, если выполняются условия …

1) $f(-x) = -f(x)$; 2) $f(-x) = f(x)$; 3) $f(x+T) = f(x)$; 4) $|f(x)|<M, M>0$.

1.3. Установите соответствие между графиком функции в окрестности точки x_0 и характером разрыва

А Б В



1) точка непрерывности; 2) точка устранимого разрыва;
3) точка неустранимого разрыва; 4) точка разрыва второго рода.

1.4. Правило или закон, по которому каждому значению переменной x ставится в соответствие определенное значение переменной y, называется …

1) функцией одной переменной; 2) функцией общего вида;
3) ограниченной функцией; 4) пределом функции;
5) неявной функцией; 6) обратной функцией.

1.5. Если при изменении знака у аргумента меняется значение функции, то она называется функцией…

1) четной; 2) нечетной; 3) общего вида;
4) монотонной; 5) ограниченной; 6) разрывной.

1.6. Ограниченными функциями обязательно являются …

1) сумма двух ограниченных функций;
2) разность двух ограниченных функций;
3) произведение двух ограниченных функций;
4) частное двух ограниченных функций.

1.7. К элементарной не относится функция …

1) линейная; 2) тригонометрическая; 3) логарифмическая;
4) неявная; 5) показательная; 6) квадратичная.

1.8. Пределы $a)\ \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$, $b)\ \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$, $c)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ называют соответственно…

1) $a)$ - первый замечательный предел; $b)$ - второй замечательный предел; $c)$ - первый замечательный предел;
2) $a)$ - второй замечательный предел; $b)$ - второй замечательный предел; $c)$ - первый замечательный предел;
3) $a)$ - первый замечательный предел; $b)$ - первый замечательный предел; $c)$ - второй замечательный предел;
4) $a)$ - второй замечательный предел; $b)$ - первый замечательный предел; $c)$ - первый замечательный предел.

1.9. Если предел функции $y=f(x)$ в точке $x=a$ существует, но в этой точке $f(x)$ не определена, то точка $x=a$ называется …

1) точкой разрыва первого рода; 2) точкой разрыва второго рода;
3) устранимой точкой разрыва; 4) точкой экстремума;
5) точкой перегиба; 6) нулем функции.

1.10. Число A называется пределом функции $y=f(x)$ в точке $x=a$ (или при $x\to a$) по Коши, если для любого положительного $\varepsilon>0$ найдется отвечающее ему $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ такое, что для всех x, удовлетворяющих условиям

1) $0<|x-a|<\varepsilon$, справедливо неравенство $|f(x)-A|<\delta$;
2) $0<|x-a|<\delta$, справедливо неравенство $|f(x)-A|<\varepsilon$;
3) $0<|x-a|<\delta$, справедливо неравенство $|f(x)-A|>\varepsilon$;
4) $|x-a|\geq\delta$, справедливо неравенство $|f(x)-A|<\varepsilon$.

1.11. Если функция непрерывна в каждой точке интервала, то она называется на этом интервале …

1) ограниченной; 2) возрастающей; 3) убывающей;
4) непрерывной; 5) четной; 6) периодической.

1.12. Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке $x=a$, если для любого $\varepsilon>0$ найдется $\delta>0$ такое, что выполняются условия

1) $|x-a|<\varepsilon$, $|f(x)-f(a)|<\delta$;; 2) $|x-a|<\delta$, $|f(x)-f(a)|>\varepsilon$;
3) $|x-a|<\delta$, $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$; 4) $|x-a|>\delta$, $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$.

1.13. Если функция $y = f(x)$ определена в точке x_0 и имеет значение равное $f(x_0)$, существуют односторонние пределы равные $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = A_1$ и $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = A_2$, причем $A_1 = A_2 = f(x_0)$, то …

1) x_0 - точка устранимого разрыва;

2) x_0 – точка разрыва второго рода;

3) x_0 – точка непрерывности;

4) x_0 – точка разрыва первого рода.

1.14. Значения аргумента x, при которых функция обращается в ноль (y=0), называется …

1) периодом; 2) нулем; 3) точкой разрыва; 4) экстремумом функции.

1.15. График нечетной функции симметричен относительно

1) оси Ox; 2) оси Oy; 3) начала координат;
4) биссектрисы $y=x$; 5) биссектрисы $y=-x$; 6) прямой $x=a$.

1.16. Две бесконечно малые функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ в точке x_0 являются эквивалентными, если

1) $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \infty$; 2) $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$;

3) $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$; 4) $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) \cdot \beta(x) = 0$.

1.17. Если большему значению аргумента соответствует большее значение функции, то она называется…

1) ограниченной сверху; 2) ограниченной снизу; 3) возрастающей;
4) убывающей; 5) непрерывной; 6) разрывной.

1.18. Наглядность - это преимущество способа задания функции…

1) табличного; 2) графического; 3) аналитического;
4) неявного; 5) параметрического; 6) многозначного.

1.19. Функция $y = \alpha(x)$ называется бесконечно малой в точке $x = a$, если предел $\lim\limits_{x \to a} \alpha(x)$ равен …

1) $\alpha(a)$; 2) бесконечности; 3) нулю; 4) единице.

1.20. Если две ограниченные функции сложить, получим функцию

1) неограниченную; 2) ограниченную; 3) имеющую предел;

4) возрастающую; 5) неубывающую; 6) ничего сказать нельзя.

1.21. График функции получается сдвигом вдоль оси Oy с помощью преобразования

1) $f(x) \to af(x)$; 2) $f(x) \to f(x+a)$; 3) $f(x) \to f(x)+a$;
4) $f(x) \to -f(x)$; 5) $f(x) \to |f(x)|$; 6) $f(x) \to f(ax)$.

1.22. Функция $\alpha(x)$ является в точке $x=a$ бесконечно малой функцией более высокого порядка малости чем $\beta(x)$, если выполняются равенства

1) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$; 2) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)}=0$; 3) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$; 4) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)}=1$.

1.23. При вычислении предела приёмом раскрытия неопределённости не является …

1) почленное деление числителя и знаменателя на одну и ту же степень x;
2) замена в знаке предела величины, к которой стремится переменная;
3) домножение на сопряжённое выражение;
4) использование формул сокращенного умножения.

1.24. Символ $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=A$ или $f(a+0)=A$ называется правосторонним пределом функции $f(x)$ в точке $x=a$ и означает выполнение равенств

1) $\lim\limits_{\begin{cases}x\to a\\ x>a\end{cases}} f(x)=A$; 2) $\lim\limits_{\begin{cases}x\to a\\ x\neq a\end{cases}} f(x)=A$; 3) $\lim\limits_{\begin{cases}x\to a\\ x<a\end{cases}} f(x)=A$.

1.25. Бесконечно большой функцией не обязательно является …

1) сумма двух бесконечно больших функций одинакового знака;
2) сумма двух бесконечно больших функций разного знака;
3) произведение двух бесконечно больших функций;
4) частное двух бесконечно больших функций.

1.26. При вычислении предела функции, можно менять местами знак предела и функции, если функция …

1) монотонная; 2) ограниченная; 3) непрерывная;
4) разрывная; 5) четная; 6) периодическая.

1.27. Функция $f(x)$ на множестве $\{x\}$ имеет порядок функции $\varphi(x)$, если выполнено условие …

1) $\left|\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}\right|>C$; 2) $\left|\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}\right|\le C$; 3) $\lim\limits_{x\to a}\left|\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}\right|=0$.

1.28. Приращением функции $y = f(x)$ в точке x_0 при приращении аргумента Δx называется число …

1) $\Delta y = f(\Delta x) - f(x_0)$; 2) $\Delta y = f(x_0) - f(x_0 - \Delta x)$;

3) $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$; 4) $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(\Delta x)$.

1.29. Период функции – это число, которое при прибавлении к аргументу …

1) меняет значение функции; 2) сохраняет значение функции;
3) меняет знак функции; 4) сдвигает график функции по оси Ox;
5) сдвигает график функции по оси Oy;
6) поворачивает график функции на 90^0.

1.30. Если функция $y = f(x)$ имеет предел $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ и $\alpha(x)$ – бесконечно малая функция, то между ними существует связь …

1) $f(x) = A - \alpha(x)$; 2) $f(x) = A + \alpha(x)$; 3) $\left|\dfrac{f(x)}{\alpha(x)}\right| = A$;

4) $\left|\dfrac{\alpha(x)}{f(x)}\right| = A$; 5) $\left|\dfrac{f(x)}{A}\right| = \alpha(x)$; 6) $\sqrt[A]{f(x)} = \alpha(x)$.

Контрольная работа № 1 «Введение в математический анализ»

Задание 1. Найти область определения функции

1.1. $y = \dfrac{\sqrt{x^2 + x - 6}}{x^2 - 4} + \arcsin\dfrac{x}{4}$.

1.2. $y = \dfrac{x}{\ln(x-3)} + \sqrt{7-x}$.

1.3. $y = 2^{-\lg(x+3)} \arcsin\dfrac{x}{5}$.

1.4. $y = \lg(-x^2-3x+10)$.

1.5. $y = 2^{\sqrt{\frac{1}{2} - x}} - \sqrt{9 - x^2}$.

1.6. $y = \sqrt{\dfrac{4x+6}{1-4x}} + \arcsin\dfrac{x}{2}$.

1.7. $y = \log_2\left[\log_3(x-1)\right]$.

1.8. $y = \dfrac{1}{3 - \log_2(x-3)} + \arcsin\dfrac{x}{13}$.

1.9. $y = 10^{\sqrt{x+1}} + \dfrac{1}{\sqrt{4 - x^2}}$.

1.10. $y = \sqrt{x^2 + 4x - 5} \cdot \lg(x+1)$.

1.11. $y=\sqrt{2-x}+\ln\dfrac{1}{x}$

1.12. $y=e^{2/\sqrt{x}}+\dfrac{2}{\sqrt{3x-6}}$

1.13. $y=\dfrac{\sqrt{9-x^2}}{\lg(5-x)}$.

1.14. $y=\arccos\left(\dfrac{2x}{x-3}\right)$.

1.15. $y=\dfrac{\sqrt{x+2}}{16-x^2}+\lg(x-5)$.

1.16. $y = \ln(x^2 - 5x + 4)$.

1.17. $y=\log_3\left[\log_4(x+2)\right]$

1.18. $y=\dfrac{\sqrt{x+6}}{x^2-9}+\arccos\dfrac{x-2}{2}$.

1.19. $y=5^{\sqrt{1-x}}-\sqrt{4-3x-x^2}$.

1.20. $y=\dfrac{1}{1-\lg(x-2)}+\arcsin\dfrac{x}{2x-5}$.

Задание 2. Вычислить пределы функций

2.1. а) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{6x^2-x-1}{x-\frac{1}{2}}$;

б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-2x+1}{x^4-2x+1}$;

в) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2-\sqrt{x}}{3-\sqrt{2x+1}}$;

г) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-\sqrt{x}}{1-\sqrt[3]{x}}$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^4-2x^2+7}{9x^4+6x+5}$;

е) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{2x tg 2x}$;

ж) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1+x}{x+2}\right)^x$;

з) $\lim\limits_{x\to\infty}(2x+3)\left[\ln(x+2)-\ln x\right]$.

2.2. а) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{2x^2-11x+5}{3x^2-14x-5}$;

б) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3+4x^2+5x+2}{x^3-3x+2}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{2-\sqrt{x+4}}$;

г) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{1+x}-\sqrt{2x}}$;

д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{1-\cos x}$;

е) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+1}}{x-1}$;

ж) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x+2}\right)^{2x+1}$;

з) $\lim\limits_{x\to\infty}(x-4)\left[\ln(2-3x)-\ln(5-3x)\right]$.

2.3. а) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{3}} \dfrac{6x^2-5x+1}{3x^2+17x-6}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3-x+5x^4}{x^4-12x+1}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+4}-2}{\sqrt{x+16}-4}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{2x-3}{2x+5}\right)^{x-2}$;

д) $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{x^2+2x-3}{x^3+4x^2+3x}$; е) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1-\cos 2x}}{3x}$;

ж) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x^3-8}$; з) $\lim\limits_{x\to\infty} (2x-3)[\ln(4x+1)-\ln(4x-3)]$.

2.4. а) $\lim\limits_{x\to 8} \dfrac{3x^2-40x+128}{x^2-64}$; б) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2+x-12}{\sqrt{x-2}-\sqrt{4-x}}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x\sin x}{1-\cos x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+5x}-x\right)$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^3+7x^2+4}{3x^3+4x-5}$; е) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{x^2+1}$;

ж) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4x^3-3x^2+2}{2x^2-4x+7}$; з) $\lim\limits_{x\to\infty} (4x+3)[\ln(5x+2)-\ln(5x-1)]$.

2.5. а) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$; б) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^3+5x^2+8x+4}{x^3+7x^2+16x+12}$;

в) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+6}}{2x^2-7x-15}$; г) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{8+3x+x^2}-2}{x+x^2}$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{10x^5-5x^2+5}{5x^5+2x-1}$; е) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x-1}{x\,tg\,2x}$;

ж) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x}{x+1}\right)^{\frac{x}{2}}$; з) $\lim\limits_{x\to\infty} (x+7)[\ln(3x+1)-\ln(3x-1)]$.

2.6. а) $\lim\limits_{x\to -7} \dfrac{2x^2+15x+7}{x^2-49}$; б) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3+x^2-5x+3}{x^3-x^2-x+1}$;

в) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$; г) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt[3]{4x}-2}{\sqrt{2+x}-\sqrt{2x}}$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+4x-x^4}{2x^4-3x^2+x-1}$;

е) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{2}{x^2-1}\right)$;

ж) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x-\sin 3x}{x\sin x}$;

з) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x-1}{5x+4}\right)^{2x+1}$.

2.7. а) $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{3x^2-40x+128}{x^2-64}$;

б) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3+5x^2+8x+4}{x^3+3x^2-4}$;

в) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+x-12}{\sqrt{x-2}-\sqrt{4-x}}$;

г) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt[3]{x+6}-2}{x^2-4}$;

д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x\sin x}{1-\cos x}$;

е) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+5x}-x\right)$;

ж) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+7x^2+4}{3x^3+4x-5}$;

з) $\lim\limits_{x\to 1}(2-x)^{\frac{2x}{3-x}}$.

2.8. а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$;

б) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3+5x^2+8x+4}{x^3+7x^2+16x+12}$;

в) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+6}}{2x^2-7x-15}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{8+3x+x^2}-2}{x+x^2}$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{10x^5-5x^2+5}{5x^5+2x-1}$;

е) $\lim\limits_{x\to\infty}(3x-2)[\ln(2x-1)-\ln(2x+1)]$;

ж) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^{\frac{x}{2}}$;

з) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{9x^2+4x}-3x\right)$..

2.9. а) $\lim\limits_{x\to -7}\dfrac{2x^2+15x+7}{x^2-49}$;

б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+x^2-5x+3}{x^3-x^2-x+1}$;

в) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4+2x+x^2}-2}{x^2}$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+4x-x^4}{2x^4-3x^2+x-1}$;

е) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{2}{x^2-1}\right)$;

ж) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x\sin x}$;

з) $\lim\limits_{x\to\infty}(3x-7)[\ln(4x+1)-\ln(4x-1)]$.

2.10. а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2-5x-2}{x^2-4}$;

б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4-1}{2x^4-3x^2+1}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{2-\sqrt{x+4}}$;

г) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}\dfrac{\sqrt[3]{\frac{x}{4}}-\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{1}{2}+x}-\sqrt{2x}}$;

д) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{2x^4-2x-1}{x^5+x^4-2}$;

е) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 7x}{1-\cos 9x}$;

ж) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x+3}{x+1}\right)^{2x}$;

з) $\lim\limits_{x\to \infty}(2x+1)[\ln(7x+1)-\ln(7x-1)]$.

2.11. а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-8x+12}{x^2-6x+8}$;

б) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{4x^5-x^3+2}{3x^5+2x-1}$;

в) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+3x+4}{x+x^2}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2}}{x^2-x}$;

д) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x^2}-4}$;

е) $\lim\limits_{x\to 0} x ctg 2x$;

ж) $\lim\limits_{x\to 1}(3-2x)^{\frac{x}{1-x}}$.

з) $\lim\limits_{x\to \infty}(8x-3)[\ln(2x+5)-\ln(2x-3)]$.

2.12. а) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{5x^2-7x-24}{x^2-9}$;

б) $\lim\limits_{x\to -2}\left(\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{4}{x^2-4}\right)$;

в) $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{\sqrt{x+12}-\sqrt{4-x}}{2x^2+3x-20}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 3x}{3x^2}$;

д) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-4x^2-3x+18}{x^3-5x^2+3x+9}$;

е) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(x-\sqrt{x^2+5x}\right)$;

ж) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt[3]{9x}-3}{\sqrt{3+x}-\sqrt{2x}}$;

з) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{5x+2}{5x+1}\right)^{4x-1}$.

2.13. а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x^2-3x+4}$;

б) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{5x^3-4x^2+4}{6x^3+2x^2+x-2}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x}-1}{\sqrt{1+x}-1}$;

г) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(2x^2-x-1)^2}{x^3+2x^2-x-2}$;

д) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{\sqrt{x+10}-\sqrt{4-x}}{2x^2-x-21}$;

е) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{2-x}-\dfrac{4}{4-x^2}\right)$;

ж) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos^5 x}{x^2}$;

з) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{9x+5}{9x+1}\right)^{3x-5}$.

2.14. а) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{2x^2-13x-7}{x^2-49}$;

б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\left(x^3+2x-1\right)^2}{x^4-2x+1}$;

в) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt{2-x}-\sqrt{6+x}}{x^2-x-6}$;

г) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+1}{1-\sqrt[3]{x}}$;

д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg\,3x}{7x}$;

е) $\lim\limits_{x\to \infty} x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$;

ж) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sin(x+1)}{1-x^2}$;

з) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{3x+7}{3x+5}\right)^{2x-3}$.

2.15. а) $\lim\limits_{x\to -6}\dfrac{2x^2+15x+18}{x^2-36}$;

б) $\lim\limits_{x\to \pi}\sin^2 2x\cdot ctg^2 x$;

в) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{3+x}-\sqrt{5-x}}{3x^2-4x+1}$;

г) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{2x^4-3x^2+1}$;

д) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{5x^4+4x^3-3}{x^4-x^2+2}$;

е) $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{\sqrt[3]{x-5}-1}{x^2-36}$;

ж) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 6x}{1-\cos 9x}$;

з) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{2-3x}{1-3x}\right)^{11x+7}$.

2.16. а) $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{3}}\dfrac{6x^2-x-1}{9x^2-1}$;

б) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\left(x^3-2x-1\right)(x+1)}{x^4+4x^2-5}$;

в) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-7x+6}{\sqrt{6-x}-\sqrt{x+2}}$;

г) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt[3]{x-2}-1}{x^2-9}$;

д) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{8x^3+4x^2-5x+4}{2x^3-3x^2+5}$;

е) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{7^x-3}{7^{x+2}+4}$;

ж) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x\sin x}$;

з) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x+3}{x+9}\right)^{7x+5}$.

2.17. а) $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{3x^2-31x+56}{x^2-64}$; б) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{1+\sqrt[3]{2x^2-3}}{\sqrt[3]{x^2+1}}$;

в) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3x^2+2x-1}{\sqrt{x+5}-\sqrt{7+3x}}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 3x-1}{x\,tg 5x}$;

д) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\left(x^2-2x-3\right)^2}{x^5+2x^2-x-2}$; е) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{2-\sqrt[3]{2x-2}}{x^2-7x+10}$;

ж) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{5x^4+2x-1}{3x^4-x^2+4}$; з) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{3x}{3x+1}\right)^{\frac{5x-1}{2}}$.

2.18. а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-5x+3}{x^2-1}$; б) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3-4x-3}{x^2-3x+2}$;

в) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x^2-5x-3}{\sqrt{6-x}-\sqrt{x}}$; г) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-25}{\sqrt[3]{x+3}-2}$;

д) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{6x^5-2x^3-3}{7x^5-x^4+2}$; е) $\lim\limits_{x\to 1}(2x-1)^{\frac{2x}{x-1}}$;

ж) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos^3 x}{3x\sin 2x}$; з) $\lim\limits_{x\to \infty}(2x-3)[\ln(11x+2)-\ln(11x-1)]$.

2.19. а) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{3}}\dfrac{15x^2-2x-1}{x-\frac{1}{3}}$; б) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3+5x^2+8x+4}{x^3+3x^2-4}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{3-\sqrt{x+9}}$; г) $\lim\limits_{x\to -8}\dfrac{10-x-6\sqrt{1-x}}{2+\sqrt[3]{x}}$;

д) $\lim\limits_{x\to 0}3x\,ctg 7x$; е) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\sqrt{x^2+2x-4}-\sqrt{x^2+2x}\right)$;

ж) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{4x^3-5x+2}{x^3-2x^2+x-2}$; з) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{7x+5}{7x-1}\right)^{3x-5}$.

2.20. а) $\lim\limits_{x\to 5}\frac{6x^2-32x+5}{x^2+25}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x\sin x}{\sec x-1}$.

в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2-\sqrt{4-x}}{3-\sqrt{9-x}}$; г) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^3+3x+4}{x+x^2}$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{15x^2+x-2}{3x^2-x+1}$; е) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+4x}-1}{x}$;

ж) $\lim\limits_{x\to 0}(1-4x)^{\frac{1-x}{x}}$; з) $\lim\limits_{x\to\infty}(2-3x)[\ln(6x+7)-\ln(6x-1)]$.

Задание 3. Задана функция $y = f(x)$ и два значения аргумента x_1 и x_2. Требуется установить, является ли данная функция непрерывной или разрывной для каждого из данных значений аргумента; в случае разрыва функции найти ее пределы в точке разрыва слева и справа. Сделать чертеж графика функции:

3.1. $f(x)=3^{\frac{1}{3-x}};\ x_1=3,\ x_2=1.$ 3.2. $f(x)=2^{\frac{1}{2-x}};\ x_1=2,\ x_2=3.$

3.3. $f(x)=3^{\frac{1}{x+2}};\ x_1=0,\ x_2=-2.$ 3.4. $f(x)=2^{\frac{1}{1+x}};\ x_1=-1,\ x_2=-3.$

3.5. $f(x)=5^{\frac{1}{x+1}};\ x_1=-1,\ x_2=3.$ 3.6. $f(x)=3^{\frac{1}{x-2}};\ x_1=-5,\ x_2=2.$

3.7. $f(x)=7^{\frac{1}{x-3}};\ x_1=0,\ x_2=3.$ 3.8. $f(x)=e^{\frac{1}{x-1}};\ x_1=1,\ x_2=5.$

3.9. $f(x)=7^{\frac{1}{x+2}};\ x_1=-2,\ x_2=0.$ 3.10. $f(x)=6^{\frac{1}{7-x}};\ x_1=6,\ x_2=7.$

3.11. $f(x)=5^{\frac{1}{2-x}};\ x_1=2,\ x_2=3.$ 3.12. $f(x)=9^{\frac{1}{7-x}};\ x_1=9,\ x_2=7.$

3.13. $f(x)=10^{\frac{1}{1-x}};\ x_1=1,\ x_2=2.$ 3.14. $f(x)=e^{\frac{1}{3-x}};\ x_1=2,\ x_2=3.$

3.15. $f(x)=11^{\frac{1}{x+1}};\ x_1=0,\ x_2=-1.$ 3.16. $f(x)=16^{\frac{1}{7-x}};\ x_1=3,\ x_2=7.$

3.17. $f(x)=9^{\frac{1}{5-x}};\ x_1=3,\ x_2=5.$ 3.18. $f(x)=25^{\frac{1}{x-2}};\ x_1=2,\ x_2=4.$

3.19. $f(x)=4^{\frac{1}{x+3}};\ x_1=-4,\ x_2=-3.$

3.20. $f(x)=4^{\frac{1}{x-7}};\ x_1=5,\ x_2=7.$

Задание 4. Задана функция $y=f(x)$. Найти точки разрыва функции, если они существуют. Сделать чертеж.

4.1. $y=\begin{cases} x^2+1, & x\le 1, \\ 2x, & 1<x\le 3, \\ x+2, & x>3. \end{cases}$

4.2. $y=\begin{cases} x-3, & x<0, \\ x+1, & 0\le x\le 4, \\ 3+\sqrt{x}, & x>4. \end{cases}$

4.3. $y=\begin{cases} x^2+4, & x<-1, \\ x^2+2, & -1\le x<1, \\ 2x, & x\ge 1. \end{cases}$

4.4. $y=\begin{cases} x+2, & x\le -1, \\ x^2+1, & -1<x\le 1, \\ -x+3, & x>1. \end{cases}$

4.5. $y=\begin{cases} \cos x, & \frac{\pi}{2}<x\le 0, \\ 2x, & 0<x\le 1, \\ 3, & x>1. \end{cases}$

4.6. $y=\begin{cases} \sin x, & -\frac{\pi}{2}<x\le 0, \\ x^2, & 0<x<2, \\ 2x, & x\ge 2. \end{cases}$

4.7. $y=\begin{cases} tgx, & \frac{\pi}{2}<x\le 0, \\ -(x+1)^2, & 0<x\le 2, \\ x+3, & x\ge 2. \end{cases}$

4.8. $y=\begin{cases} e^x, & x\le 0, \\ x^2+1, & 0<x<1, \\ 3x, & x\ge 1. \end{cases}$

4.9. $y=\begin{cases} \sqrt{1+x^2}, & x\le 0, \\ 1, & 0<x\le 2, \\ x-2, & x>2. \end{cases}$

4.10. $y=\begin{cases} \cos x, & x\le 0, \\ 1-x, & 0<x\le 2, \\ x^2, & x>2. \end{cases}$

4.11. $y=\begin{cases} 2^x, & x\le 0, \\ x^2+1, & 0<x\le 2, \\ x+1, & x>2. \end{cases}$

4.12. $y=\begin{cases} -x, & x\le 0, \\ \sin x, & 0<x\le \pi, \\ x-2, & x>\pi. \end{cases}$

4.13. $y=\begin{cases} 3\sin x, & x<0, \\ x^3, & 0<x\le 1, \\ 2x+1, & x>1. \end{cases}$

4.14. $y=\begin{cases} 2x, & x\le 0, \\ tgx, & 0<x\le \frac{\pi}{4}, \\ 3, & x>\frac{\pi}{4}. \end{cases}$

4.15. $y=\begin{cases}3^x, & x\le -1,\\ \frac{1}{3}(x+2)^2, & -1<x\le 0,\\ x, & x>0.\end{cases}$ 4.16. $y=\begin{cases}-x^2, & x\le 0,\\ tgx, & 0<x\le \frac{\pi}{4},\\ 2, & x>\frac{\pi}{4}.\end{cases}$

4.17. $y=\begin{cases}5^x, & x\le 0,\\ x^2+1, & 0<x\le 1,\\ 3, & x>1.\end{cases}$ 4.18. $y=\begin{cases}\ln(2+x), & -2<x\le -1,\\ \sqrt[3]{x+1}, & -1<x<0,\\ 2, & x\ge 0.\end{cases}$

4.19. $y=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ tgx, & 0<x<\frac{\pi}{2},\\ x, & x\ge \frac{\pi}{2}.\end{cases}$ 4.20. $y=\begin{cases}ctgx, & 0<x\le \frac{\pi}{2},\\ 0, & \frac{\pi}{2}<x<\pi,\\ \frac{\pi}{2}, & x\ge \pi.\end{cases}$

Решение типового варианта контрольной работы № 1

Задание 1. Найти область определения функции $y=\ln(3x^2-5x+2)+\dfrac{1}{\sqrt{1-4x^2}}$.

Решение. Область определения функции будет определяться из двух условий: $\begin{cases}3x^2-5x+2>0\\ 1-4x^2>0\end{cases}$, так как логарифмируемое и подкоренное выражения (в знаменателе дроби) должны быть положительными. Решаем систему неравенств методом интервалов. Найдем корни левых частей неравенств и расположим их в порядке возрастания. Отметим интервалы, в которых выполняются данные неравенства.

$3x^2-5x+2=0 \to D=b^2-4ac=25-24=1,\ x_1=\dfrac{-b+\sqrt{D}}{2a}=\dfrac{5+1}{6}=1,\ x_2=\dfrac{2}{3}.$

$6-4x^2=0 \to x_3=\dfrac{1}{2},\ x_4=-\dfrac{1}{2}.$

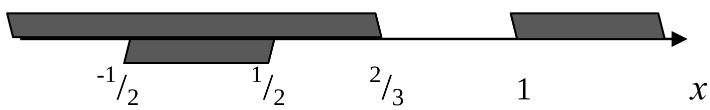


Рисунок к заданию 1

Первое неравенство выполняется для $x \in \left(-\infty; \frac{2}{3}\right) \cup (1; \infty)$. Второе неравенство справедливо на интервале $\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$. Наложение областей происходит в интервале $\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$, значит этот интервал и является областью определения данной функции.

Задание 2. Вычислить пределы функций:

а) $\lim\limits_{x\to 3} \frac{x^2+x-12}{x^2-5x+6}$; б) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+x+x^2}-\sqrt[3]{1-x+x^2}}{x^2-x}$; в) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{tg\, 2x}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0} x ctg\, 3x$; д) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{5x^3+7x-1}{9x^3-2x^2+3}$; е) $\lim\limits_{x\to 2} (3x-5)^{\frac{4}{x-2}}$;

ж) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x^2-1}\right)$; з) $\lim\limits_{x\to\infty} x[\ln(2x+1)-\ln 2x]$.

Решение. а) Подставим предельное значение x в функцию, получим неопределенность $\left\{\frac{0}{0}\right\}$. Разложим числитель и знаменатель дроби на множители по формуле (1.27). После сокращения на критический множитель $(x-3)$ приходим к ответу.

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2+x-12}{x^2-5x+6} = \left\{\frac{0}{0}\right\} = \lim_{x\to 3} \frac{(x-3)(x+4)}{(x-3)(x-2)} = \lim_{x\to 3} \frac{x+4}{x-2} = 7.$$

б) При подстановке предельного значения аргумента получим неопределенность $\left\{\frac{0}{0}\right\}$. В числителе дроби имеем кубические корни. Избавимся от иррациональности домножением числителя и знаменателя на неполный квадрат числителя, что позволит применить формулу «разность кубов» и получить ответ.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+x+x^2}-\sqrt[3]{1-x+x^2}}{x^2-x} = \left\{\frac{0}{0}\right\} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\left(\sqrt[3]{1+x+x^2} - \sqrt[3]{1-x+x^2}\right)\left(\sqrt[3]{\left(1+x+x^2\right)^2} + \sqrt[3]{(\left(1+x^2\right)^2 - x^2\right)} + \sqrt[3]{\left(1-x+x^2\right)^2}\right)}{x(x-1)\left(\sqrt[3]{\left(1+x+x^2\right)^2} + \sqrt[3]{\left(1+x^2\right)^2 - x^2} + \sqrt[3]{\left(1-x+x^2\right)^2}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1+x+x^2 - 1 + x - x^2}{x(x-1)\left(\sqrt[3]{\left(1+x+x^2\right)^2} + \sqrt[3]{1+x^2+x^4} + \sqrt[3]{\left(1-x+x^2\right)^2}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2}{(x-1)\left(\sqrt[3]{\left(1+x+x^2\right)^2} + \sqrt[3]{1+x^2+x^4} + \sqrt[3]{\left(1-x+x^2\right)^2}\right)} = -\frac{2}{3}.$$

в) Для вычислении этого предела применим первый замечательный предел и свойства пределов

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{tg\,2x} = \left\{\frac{0}{0}\right\} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{3x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{2x}{tg\,2x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{3x}{2x} = 1\cdot 1\cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{2}.$$

г) При подстановке предельного значения x имеем неопределенность $(0\cdot\infty)$, которая легко раскрывается, представив $ctg3x$ обратной величиной $tg3x$.

$$\lim_{x\to 0} x\,ctg\,3x = (0\cdot\infty) = \lim_{x\to 0} \frac{x}{tg\,3x} = \left\{\frac{0}{0}\right\} = \frac{1}{3} \lim_{x\to 0} \frac{3x}{tg\,3x} = \frac{1}{3}\cdot 1 = \frac{1}{3}.$$

д) Неопределенность $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$ раскрываем следующим образом:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{5x^3+7x-1}{9x^3-2x^2+3} = \left\{\frac{\infty}{\infty}\right\} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3(5+\frac{7}{x^2}-\frac{1}{x^3})}{x^3(9-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^3})} = \frac{5}{9}.$$

е) При $x \to 2$ основание $(3x-5)$ стремится к единице, а показатель степени $\frac{4}{x-2}$ стремится к бесконечности. Положим $3x-5=1+\alpha,$ где $\alpha \to 0$ при $x \to 2$.

Тогда $3x = 6+\alpha;$ $x = 2+\frac{\alpha}{3}$ и $x-2=\frac{\alpha}{3}$. Выразив основание и показатель степени через α, получим вторую форму «второго замечательного предела»

$$\lim_{x\to 2}(3x-5)^{\frac{4}{x-2}}=\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{12}{\alpha}}=e^{12}.$$

ж) При $x\to\infty$ имеем неопределенность (∞ - ∞). Приведем выражение, стоящее под пределом, к общему знаменателю

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x^2-1}\right)=\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{2}{(x-1)(x+1)}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{x+1-2}{(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{x+1}=\frac{1}{2}.$$

з) Преобразуем выражение, стоящее под пределом, используя свойства логарифмов: 1) $a\ln x=\ln x^a$; 2) $\ln x-\ln y=\ln(x/y)$.

$$\lim_{x\to\infty} x[\ln(2x+1)-\ln 2x]=\lim_{x\to\infty}\ln\left(\frac{2x+1}{2x}\right)^x.$$

В силу непрерывности логарифмической функции знак предела и знак функции можно поменять местами. Получим:

$$\lim_{x\to\infty}\ln\left(\frac{2x+1}{2x}\right)^x=\ln\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{2x}\right)^x.$$

При $x\to\infty$ основание степени $\frac{2x+1}{2x}$ стремится к 1, а показатель степени стремится к бесконечности. Следовательно, имеем неопределенность вида $ln1^{\infty}$. Представим основание степени в виде суммы 1 и некоторой бесконечно малой величины и применим для вычисления второй замечательный предел:

$$\ln\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{2x}\right)^x=\ln\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{2\cdot\frac{1}{2}x}=$$

$$=\ln\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{2x}\right]^{\frac{1}{2}}=\ln e^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}.$$

Задание 3. Задана функция $y=f(x)=e^{\frac{1}{x-2}}$ и два значений аргумента $x_1=2, x_2=3$. Требуется установить, является ли данная функция непрерывной или разрывной для каждого из данных значений аргумента. В случае разрыва функции определить вид точки разрыва. Сделать схематический чертеж.

Решение. Функция $y = e^{\frac{1}{x-2}}$ является элементарной. Она определена в интервалах $x \in (-\infty, 2) \cup (2; +\infty)$, в которых непрерывна. Значит, точка $x_2 = 3 \in (2; \infty)$ есть точка непрерывности функции *y*, а точка $x_1 = 2$ есть точка разрыва нашей функции. Для выяснения вида точки разрыва найдем левосторонний и правосторонний пределы функции:

$$\lim_{x \to 2-0} e^{\frac{1}{x-2}} = e^{-\infty} = 0, \lim_{x \to 2+0} e^{\frac{1}{x-2}} = e^{\infty} = \infty, \quad y(3) = e.$$

Точка $x_2 = -3$ – точка разрыва второго рода функции. Найдем еще $\lim_{x \to \pm\infty} e^{\frac{1}{x-2}} = 1$. В результате имеем следующий схематический чертеж данной функции.

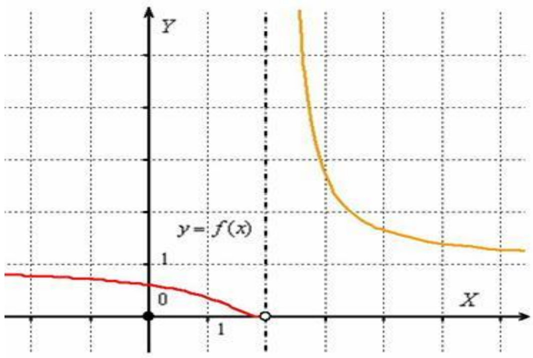


Рисунок к заданию 3- Схематический график функции $y = e^{\frac{1}{x-2}}$

Задание 4. Дана функция $f(x) = \begin{cases} x + 2, x \le -1; \\ x^2 + 1, -1 \angle x \le 1; \\ -x + 3, x \rangle 1. \end{cases}$. Найти точки разрыва функции. Построить график.

Решение. Очевидно, что все три части функции непрерывны на соответствующих интервалах, поэтому осталось проверить только две точки «стыка» между кусками. Сначала выполним чертёж. В силу неравенства $x \le$ -1 значение x = -1 принадлежит прямой $y = x + 2$ (зелёная точка), и в силу неравенство $x \le 1$ значение $x = 1$ принадлежит параболе $y = x^2 + 1$ (красная точка):

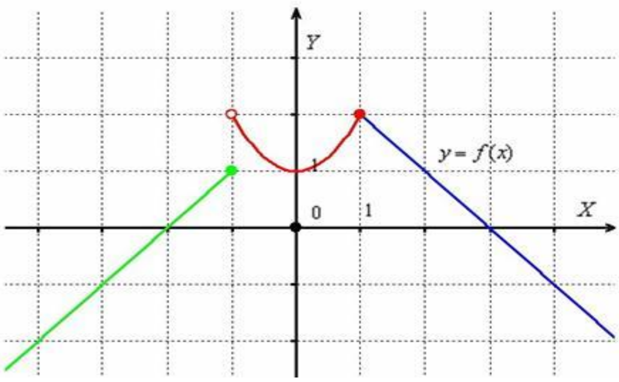


Рисунок к заданию 4

Для каждой из двух «стыковых» точек проверяем 3 условия непрерывности. Исследуем на непрерывность точку x = -1:

1) $f(-1) = -1 + 2 = 1$ – функция определена в данной точке;

2) найдём односторонние пределы:

$$\lim_{x\to -1-0} f(x) = \lim_{x\to -1-0} (x+2) = 1$$
$$\lim_{x\to -1+0} f(x) = \lim_{x\to -1+0} (x^2+1) = 1+1 = 2$$

Односторонние пределы конечны и различны, значит, функция $y = f(x)$ терпит разрыв 1-го рода со скачком в точке $x = -1$. Вычислим скачок разрыва как разность правого и левого пределов:

$$\lim_{x\to -1+0} f(x) - \lim_{x\to -1-0} f(x) = 2 - 1 = 1,$$

то есть, график сдвинулся на одну единицу вверх.

Исследуем на непрерывность точку x = 1:

1) $f(1) = 1^2 + 1 = 2$ – функция определена в данной точке;

2) найдём односторонние пределы:

$$\lim_{x\to 1-0} f(x) = \lim_{x\to 1-0} (x^2+1) = 1+1 = 2$$
$$\lim_{x\to 1+0} f(x) = \lim_{x\to 1+0} (-x+3) = -1+3 = 2.$$

$\lim_{x\to 1-0} f(x) = \lim_{x\to 1+0} f(x)$ – односторонние пределы конечны и равны, значит, существует общий предел.

3) $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = f(1) = 2$ – предел функции в точке равен значению данной функции в данной точке.

Таким образом, функция $y = f(x)$ непрерывна в точке $x = 1$ по определению непрерывности функции в точке.

Приходим к *ответу*: функция непрерывна на всей числовой прямой, кроме точки $x = -1$, в которой она терпит разрыв первого рода со скачком, равном 1.

ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ № 2 «Введение в математический анализ» (практика)

2.1. Область определения функции $y = \sqrt{x+4} + \dfrac{1}{|x|}$ равна…

1) $(0;+\infty)$; 2); $(-4;0)\cup(0;+\infty)$ 3) $[-4;0)\cup(0;+\infty)$;

4) $(-4;+\infty)$; 5) $[-4;4)$; 6) $(-\infty;-4)\cup(0;+\infty)$.

2.2. Областью значений функции $y = 3sin(2x+4)$ является множество …

1) $[-3;3]$; 2) $[-6;6]$; 3) $[-1;1]$; 4) $(-\infty;+\infty)$.

2.3. Значение *f*(3) функции $y = \dfrac{2x^2 - x - 7}{4 - 3x}$ равно…

1) $\frac{3}{5}$; 2) $-\frac{8}{5}$; 3) 0; 4) ∞; 5) $-\frac{2}{5}$; 6) 1.

2.4. Функция *y* = cos(2*x*-1) является…

1) четной; 2) нечетной; 3) общего вида; 4) периодической.

2.5. Из предложенных функций при указанном стремлении *x* бесконечно большой функцией является …

1) $y = \dfrac{x}{x+1}, x\to\infty$; 2) $y = 2^{-x}, x\to -\infty$; 3) $y = (x-2)^5, x\to 2$;

4) $y = \dfrac{5}{x^2-9}, x\to 3$; 5) $y = 3tg\,2x + x,\ x\to\pi$ 6) $y = \sqrt{3x+1},\ x\to 1$

2.6. Функция $y = 3^{1-x}$ имеет обратную функцию …

1) $y = \lg x - 3$; 2) $y = 1 - \log_3 x$; 3) $y = \log_3 x$ -1 ;

4) $y = \dfrac{1}{3^{1-x}}$; 5) $y = \sqrt{3^{x-1}+1}$; 6) $y = (1 - x)^3$.

2.7. Нулями функции $y = \ln(x^2 - 5x + 7)$ являются значения …

1) $x_1 = 1, x_2 = 2$; 2) $x_1 = -1, x_2 = 0$; 3) $x_1 =3, x_2 =-2$;

4) $x_1 = 3, x_2 = 2$; 5) $x_1 = {}^5/_2, x_2 =-1$; 6) $x_1 =2, x_2 =-{}^5/_2$.

2.8. Точками разрыва функции $f(x)= \dfrac{x^2-16}{9-x^2}$ являются …

1) 4, 3; 2) 16, 9; 3) 4, –4; 4) 3, –3.

2.9. Данная функция $f(x) = \sqrt[5]{\lg\left(\sin x^2\right)}$ является композицией нескольких функций …

1) двух; 2) трех; 3) четырех; 4) пяти.

2.10. Предел функции $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\arcsin(4-x)}{x^2-16}$ равен…

1) 1; 2) $\dfrac{1}{8}$; 3) 0; 4) ∞; 5) 4; 6) -4 .

2.11. Предел функции $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^2-3x+4}{5+2x-3x^2}$ равен…

1) $\dfrac{2}{5}$; 2) $\dfrac{4}{5}$; 3) 0 ; 4) ∞; 5) $-\dfrac{2}{3}$; 6) $-\dfrac{3}{2}$.

2.12. График функции $y = \ln(x-1)$ получается из графика функции $y = \ln x$ ...

1) сдвигом вдоль оси Ox; 2) сдвигом вдоль оси Oy;

3) зеркальным отражением относительно оси Ox;

4) зеркальным отражением относительно оси Oy;

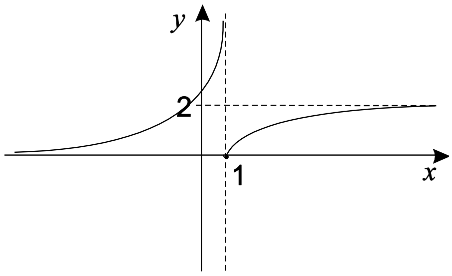
5) симметричным отображением относительно прямой $x = 1$.

2.13. Функция $y = 2x^2 - x - 1$ отрицательна на интервалах …

1) $(1;+\infty)$; 2) $\left(-\dfrac{1}{2};1\right)$; 3) $\left(-\infty;\dfrac{1}{2}\right)\cup(1;+\infty)$;

4) $(-\infty;+\infty)$; 5) $\left[\dfrac{1}{2};+\infty\right)$; 6) $\left(-\infty;-\dfrac{1}{2}\right)\cup[1;+\infty)$.

2.14. Функция $f(x)$ задана графиком:



Верно утверждение:

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$; 2) $\lim\limits_{x\to1+0} f(x)=0$; 3) $\lim\limits_{x\to1-0} f(x)=0$; 4) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=2$.

2.15. Графиком функции $y = 3x^2$ является…

1) прямая; 2) гипербола; 3) парабола;
4) эллипс; 5) ступенчатая фигура; 6) окружность.

2.16. Из предложенных функций четной является …

1) $f(x)=\dfrac{sin^2x-x\cdot tgx}{3x^2+cosx}$; 2) $f(x)=x^2-5^x+x$;

3) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^2-1}{x^2+1}}$; 4) $f(x)=\lg(x^3-x)$.

2.17. Из указанных линий, заданных на плоскости xOy, G_1: $xy=4$; G_2: $\dfrac{x}{2}-\dfrac{y}{2}=1$; G_3: $x^2+2 = y$ пересекают ось Ox только…

1) G_1 и G_2; 2) G_3; 3) G_1;
4) G_1 и G_3; 5) G_2; 6) G_2 и G_3.

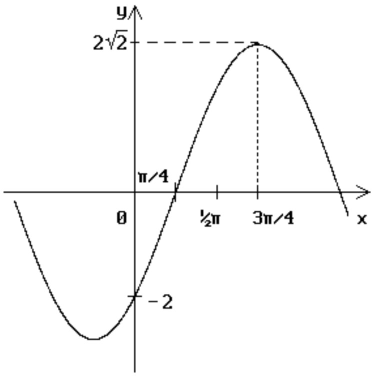
2.18. Число точек разрыва функции $y=\dfrac{1}{(x+3)^2}$ равно …

1) 1; 2) 2; 3) 0; 4) 3.

2.19. Предел функции $\lim\limits_{x\to0} sin8x\cdot ctg4x$ равен…

1) 1; 2) -2; 3) -1; 4) ∞; 5) 2; 6) sin4 .

2.20. Приведенному графику соответствует функция …



1) $y = 2\sqrt{2}\cos(x - \pi/4)$;

2) $y = 2\sqrt{2}\cos(x + \pi/4)$;

3) $y = 2\sqrt{2}\sin(x - \pi/4)$;

4) $y = 2\sqrt{2}\sin(x + \pi/4)$;

5) $y = 2\sqrt{2}\sin(x + 3\pi/4)$.

2.21. Линия $xy = 4$ пересекает линию $x^2+2 = y$ …

1) в I четверти; 2) нет точек пересечения;

3) во II четверти; 4) в III четверти;

5) в IV четверти; 6) в начале координат.

2.22. Бесконечно малыми функциями при $x \to x_0$

а) $\alpha(x) = \frac{1}{x}, x_0 = \infty$; б) $\alpha(x) = \frac{2}{x^2}, x_0 = 0$; в) $\tau(x) = \frac{\sin x}{x}, x_0 = \infty$;

г) $\delta(x) = 2000x, x_0 = 0$; д) $\varsigma(x) = \frac{1}{x^3}, x_0 = 1$

являются …

1) все, кроме д); 2) а); в); г); 3) а); г); д);

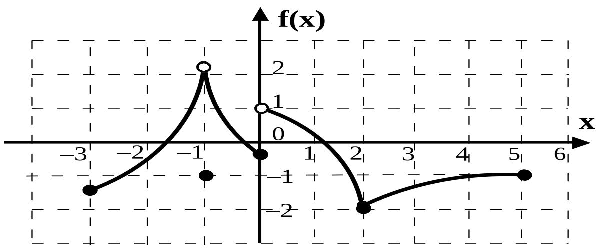
4) б); г); д); 5) а); в); г); 6) другой ответ.

2.23. Функция $f(x) = \frac{3}{x-2}$ при $x \to \infty$

1) является бесконечно большой; 2) является бесконечно малой;

3) монотонно возрастает; 4) не имеет предела.

2.24. Функция $f(x)$ задана на отрезке [-3;5] графиком:



Верно утверждение:

1) уравнение $f(x)=-1$ имеет четыре корня;

2) при любом значении x выполняется неравенство $f(x) < 2$;

3) на отрезке [-3;-1] функция $f(x)$ возрастает;

4) множеством значений функции $f(x)$ является отрезок [-2;2].

2.25. Если $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{2+x}{2x+1}\right)^x = A, \lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = B$, то $A-B$ равно …

1) e^2; 2) $2e$; 3) $2 - e$; 4) ∞; 5) $^{16}/_{25} - e$; 6) 0 .

2.26. Значение $f(R$-3), где R - число точек разрыва функции $f(x)=\dfrac{2x-1}{1-x+\sqrt{2x^2-3x-5}}$ равно …

1) $^2\!/_3$ 2) $^3\!/_2$; 3) $-^3\!/_2$; 4) 0 ; 5) $-^5\!/_6$; 6) $^5\!/_6$.

2.27. Если $f(x)=\dfrac{4x+1}{2x-5}$, то $f(x+2) - f(x+3)$ принимает вид

1) $\dfrac{4}{4x^2-1}$; 2) $\dfrac{22}{4x^2-1}$; 3) $\dfrac{2-x}{x^2-1}$; 4) $\dfrac{x^2+11}{1-4x^2}$.

2.28. Параметры α и β удовлетворяют уравнению $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-\alpha x-\beta\right)=0$, тогда сумма $\alpha + 2\beta$ равна …

1) 1; 2) 2; 3) 0; 4) 3; 5) -2; 6) 4 .

2.29. Точки пересечения графика неявно заданной функции $4x+\sqrt{y^2+x+1}-10=0$ с осью Oy равны …

1) (0;-3) и (0;1); 2) (0;2) и (0;-1); 3) (0;-3) и (0;3);

4) (0;2) и (0;3); 5) (0;$^1/_2$) и (0; 1); 6) (0;-$^3/_2$) и (0;1).

2.30. Ограниченной на указанном интервале является функция …

1) $y=x^2-1$, $x\in(-\infty;+\infty)$. 2) $y=tgx$, $x\in\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$.

3) $y=2^x$, $x\in(0;+\infty)$. 4) $y=\dfrac{1}{x}$, $x\in(0;+\infty)$.

Раздел II. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

2.1. Понятие производной функции одной переменной, ее геометрический и физический смысл

Пусть функция $y = f(x)$ задана в некоторой окрестности точки x_0. Значению аргумента x_0 задаем произвольное приращение Δx (рис.1.7). Функция получает приращение $\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$. Если существует *предел отношения приращения функции к приращению аргумента*, когда последнее стремится к нулю

$$f'(x_0) = \frac{df(x_0)}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \tag{2.1}$$

то он называется *производной функции* $f(x)$ *в точке* x_0 и обозначается через $f'(x_0)$ или $\dfrac{df(x_0)}{dx}$. Если же такой предел не существует, то функция $f(x)$ не имеет производной в точке x_0. Нахождение производной функции называется *дифференцированием*, а функция, имеющая производную, - *дифференцируемой.*

Пример 2.1. Найти производную функции $f(x) \equiv C = const$ в произвольной точке $x \in R$.

Решение. Согласно определению производной, значению $x \in R$ зададим произвольное приращение Δx и найдем предел $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{C - C}{\Delta x} = 0$, поэтому

$$C' = 0. \tag{2.2}$$

Пример 2.2. Пользуясь определением производной, найти производную функции $f(x) = e^{\sin x}$ в произвольной точке $x \in R$.

Решение. Точке $x \in R$ задаем приращение Δx и находим предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда последнее стремится к нулю.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x \to x_0} \frac{e^{\sin(x+\Delta x)} - e^{\sin x}}{\Delta x} = \lim_{x \to x_0} \frac{e^{\sin x}(e^{\sin(x+\Delta x) - \sin x} - 1)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{e^{\sin x}(e^{2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos(x+\frac{\Delta x}{2})} - 1)}{\Delta x} = e^{\sin x} \lim_{x \to x_0} \frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos(x+\frac{\Delta x}{2})}{\Delta x} =$$

$$= e^{\sin x} \lim_{x \to x_0} \cos(x + \frac{\Delta x}{2}) = e^{\sin x} \cos x.$$

Для вычисления предела воспользовались эквивалентными бесконечно малыми функциями $e^{\alpha(\Delta x)}-1\sim\alpha(\Delta x)$ при $\alpha(\Delta x)\to 0$, первым замечательным пределом и непрерывностью функции *g(x)=cosx*. Следовательно, $(e^{\sin x})'=e^{\sin x}\cos x,\quad \forall x\in R$.

Для *вычисления производной функции по определению* необходимо пользоваться следующим *алгоритмом*:

1) зафиксировать значение x, найти $f(x)$;

2) найти приращение аргумента $x+\Delta x$, и значение приращения функции $f(x+\Delta x)$;

3) найти приращение функции $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$;

4) составить отношение $\Delta y/\Delta x$ и по возможности его упростить;

5) вычислить $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

Пример 2.3. По определению найти производную функции $y = 2x^2 - x + 1$.

Решение. Будем пользоваться алгоритмом нахождения производной:

1) для фиксированного значения x, значение функции $y = 2x^2 - x + 1$;

2) в точке $x+\Delta x$, $y = f(x+\Delta x) = 2(x+\Delta x)^2 - (x+\Delta x) + 1=$

$$= 2(x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2) - (x + \Delta x) + 1;$$

3) найдем приращение функции

$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = 2x^2 + 4x\Delta x + 5\Delta x^2 - x - \Delta x + 1 - 2x^2 + x - 1=$

$= 4x\Delta x + 5\Delta x^2 - \Delta x$;

4) составим отношение $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{4x\Delta x+5\Delta x^2-\Delta x}{\Delta x}=4x+5\Delta x-1;$$

5) найдем предел

$$f'(x)=\left(2x^2-x+1\right)'=\lim_{\Delta x\to 0}(4x+5\Delta x-1)=4x-1.$$

Приведенные примеры показывают, что вычисление производной непосредственно по определению является довольно трудоемким процессом, даже при хороших навыках вычисления пределов функций.

Между дифференцируемостью функции и ее непрерывностью существует *связь*, выражаемая следующей *теоремой*: «если функция $y = f(x)$ *дифференцируема в точке* x_0, то она и непрерывна в этой точке». Обратное утверждение неверно, т.е. из непрерывности функции в точке (или на интервале) не следует ее дифференцируемость в этой точке.

Пример 2.4. Показать, что функция $y=\sqrt{x}$ не дифференцируема в точке $x = 0$.

Решение. Найдем производную данной функции по определению (2.1)

$$y'(0)=\frac{df(0)}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{0+\Delta x}-\sqrt{0}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{\Delta x}}{\Delta x}=$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\sqrt{\Delta x}}=\frac{1}{0}=\infty.$$

Выясним геометрический и механический смысл производной функции в точке. Построим график некоторой функции $y = f(x)$. На графике функции зафиксируем точку $M_0(x_0;\ f(x_0))$ и возьмем произвольную точку $M\ (x;\ f(x))$. Проведем секущую M_0M. (рис. 2.1). Пусть $x - x_0 = \Delta x$ - приращение аргумента, тогда $f(x)-f(x_0)=\Delta f(x_0)$ - приращение функции в точке x_0. В этих обозначениях $M_0N = \Delta x,\quad MN = \Delta f(x_0),\quad \dfrac{MN}{M_0N} = tg\varphi -$ угловой коэффициент секущей M_0M.

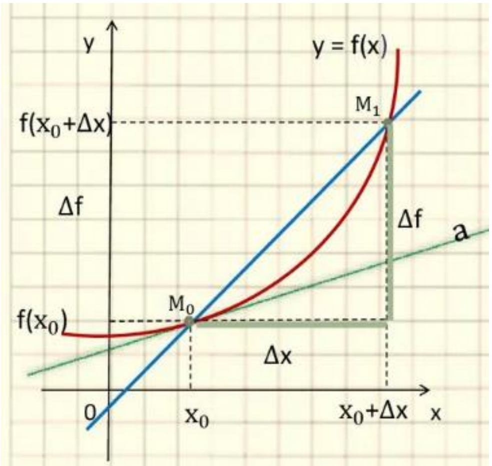


Рисунок 2.1 – Касательная к кривой графика функции $y=f(x)$

Касательной к кривой L в точке M_0 называется предельное положение секущей M_0M (если оно существует), когда точка M произвольным образом стремится по этой кривой к точке M_0. Касательная M_0T к графику функции будет найдена, если найдем ее угловой коэффициент $k=tg\alpha$. При $\Delta x \to 0$ точка $M\to$ к точке M_0 по данной кривой, $\varphi\to\alpha$ и, в силу своей непрерывности, $tg\varphi \to tg\alpha$. Следовательно,

$$k = tg\alpha = \lim_{\varphi\to\alpha} tg\varphi = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}. \qquad (2.3)$$

Отсюда вытекает *геометрический смысл производной функции одной переменной*: если кривая L является графиком функции $f(x)$, которая имеет производную в точке $x_0 \in D(f)$, то *ее производная в этой точке* $f'(x_0)$ - *есть угловой коэффициент касательной к кривой L в точке* $M_0(x_0, f(x_0))$.

Используя из аналитической геометрии формулу, определяющую уравнение пучка прямых, получим *уравнение касательной*

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0). \qquad (2.4)$$

С понятием касательной к кривой тесно связано понятие нормали к этой кривой. *Нормалью к кривой* называется *прямая, перпендикулярная касательной к этой кривой в точке касания.* Если $k_1 = f'(x_0) \neq 0 -$ угловой коэффициент касательной, $k_2 -$ угловой коэффициент нормали, то из условия перпендикулярности прямых: $k_1k_2 = -1$ уравнение нормали примет вид

$$y = f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0). \qquad (2.5)$$

Если же $f'(x_0) = 0$, то касательная к кривой L в точке M_0 параллельна оси абсцисс и имеет уравнение $y = f(x_0)$. Тогда нормаль к кривой в этой параллельна оси ординат и имеет уравнение $x = x_0$.

Пример 2.5. Записать уравнения касательной и нормали к кривой

$y = x^2 - 9x - 4$ в точке с абсциссой $x_0 = -1$.

Решение. Ордината точки касания определяется $y(-1) = 1 + 9 - 4 = 6$. Находим производную от функции y: $y' = 2x - 9$. В точке касания $y'(x_0) = y'(-1) = -11$. Подставим найденные значения в уравнение касательной (2.4)

$$y - 6 = -11(x + 1).$$

Аналогично подставляем значения $x_0 = -1$, $y_0 = 6$, $y'(x_0) = -11$ в уравнение нормали:

$$y - 6 = \frac{1}{11}(x + 1), \quad y = \frac{1}{11}x + \frac{1}{11} + 6 \Rightarrow y = \frac{1}{11}x + 6\frac{1}{11}.$$

После упрощения получим $y = -11x - 5$ - уравнение касательной, $x - 11y + 67 = 0$ - уравнение нормали.

Пусть материальная точка движется по прямой в одном направлении по закону $S = f(t)$, где t – время, а S – путь, пройденный за время t. Зафиксируем последовательно два момента времени t_o и t и обозначим приращение $\Delta t = t - t_0$. Тогда за промежуток Δt точка прошла путь $\Delta S = f(t_o + \Delta t) - f(t_o)$. Отношение $\frac{\Delta S}{\Delta t}$ - есть средняя скорость за время t. Тогда предел

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = f'(t_o) = v_o \qquad (2.6)$$

определяет *мгновенную скорость точки в момент времени t_o как производную от пути по времени.* В этом и заключается *физический смысл производной* функции одной переменной.

Пример 2.6. Тело движется прямолинейно по закону $S(t) = \frac{2}{3}t^3 - 2t^2 + 4t$ (м). Определить скорость его движения в момент t =10 с.

Решение. Искомая скорость - это производная от пути по времени, т.е.

$$v(t) = S'(t) = \left(\frac{2}{3}t^3 - 2t^2 + 4t\right)' = \frac{2}{3}\left(t^3\right)' - 2\left(t^2\right)' + 4t' = 2t^2 - 4t + 4.$$

В заданный момент времени

$$v(10) = 2(10)^2 - 4(10) + 4 = 164 \text{ (м/с).}$$

2.2. Основные правила дифференцирования

К основным правилам дифференцирования функции одной переменной относятся: нахождение производной от алгебраической суммы функций, от произведения двух и более функций, частного двух функций и их частные случаи.

$$(u + v - w)' = u' + v' - w'. \tag{2.7}$$

$$(uv)' = u'v + uv'. \tag{2.8}$$

$$(uvw)' = u'vw + uv'w + uvw'. \tag{2.8'}$$

$$(cu)' = cu'. \tag{2.9}$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}. \tag{2.10}$$

$$\left(\frac{c}{v}\right)' = -\frac{cv'}{v^2}. \tag{2.11}$$

Эти правила могут быть легко доказаны на основе теорем о пределах.

Таблица 2.1.

Основные формулы производных

Простая функция $y = f(x)$	Сложная функция $y = f(u)$, $u = \varphi(x)$
1. $C' = 0$, $C = const$.	
2. $x' = 1$.	
3. $(Cx)' = C$.	$(C \cdot u)' = C \cdot u'$.
4. $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$, $n \in R$.	$(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$.
а) $\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.	$\left(\sqrt{u}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$.

б) $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$.	$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{1}{u^2} \cdot u'$.
в) $\left(\sqrt[n]{x^m}\right)' = \left(x^{\frac{m}{n}}\right)' = \frac{m}{n} \cdot x^{\frac{m}{n}-1}$.	$\left(\sqrt[n]{u^m}\right)' = \left(u^{\frac{m}{n}}\right)' = \frac{m}{n} \cdot u^{\frac{m}{n}-1} \cdot u'$.
5. $(a^x)' = a^x \cdot lna$, $a > 0, a \neq 1, a = const$.	$(a^u)' = a^u \cdot lna \cdot u'$
6. $(e^x)' = e^x$.	$(e^u)' = e^u \cdot u'$.
7. $(lnx)' = \frac{1}{x}$	$(lnu)' = \frac{1}{u} \cdot u'$.
8. $\left(log_a x\right)' = \frac{1}{x \cdot lna}$.	$\left(log_a u\right)' = \frac{1}{u \cdot lna} \cdot u'$.
9. $(sinx)' = cosx$.	$(sinu)' = cosu \cdot u'$
10. $(cosx)' = -sinx$.	$(cosu)' = -sinu \cdot u'$
11. $(tgx)' = \frac{1}{cos^2 x}$.	$(tgu)' = \frac{1}{cos^2 u} \cdot u'$.
12. $(ctgx)' = -\frac{1}{sin^2 x}$.	$(ctgu)' = -\frac{1}{sin^2 u} \cdot u'$.
13. $(arcsinx)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.	$(arcsinu)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$.
14. $(arccosx)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.	$(arccosu)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$.
15. $(arctgx)' = \frac{1}{1+x^2}$.	$(arctgu)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'$.
16. $(arcctgu)' = -\frac{1}{1+u^2} \cdot u'$.	$(arcctgu)' = -\frac{1}{1+u^2} \cdot u'$.
17. $(shx)' = chx$.	$(shu)' = chu \cdot u'$.
18. $(chx)' = shx$.	$(chu)' = shu \cdot u'$.
19. $(thx)' = \frac{1}{ch^2 x}$.	$(thu)' = \frac{1}{ch^2 u} \cdot u'$.

20. $(cthx)' = -\dfrac{1}{sh^2 x}$.	$(cthu)' = -\dfrac{1}{sh^2 u} \cdot u'$.

Пример 2.7. Найти производную функции $y = x^3 \sin x$.

Решение. По правилу дифференцирования произведения (2.8) и применя формулы производных степенной (4) и тригонометрической функций (9) дл простых функций (первый столбец из таблицы 2.1), получаем:

$$y' = \left(x^3 sinx\right)' = \left(x^3\right)' sinx + x^3 (sinx)' = 3x^2 sinx + x^3 cosx .$$

2.3. Производная сложной функции

Пусть $y = f(u)$; $u = g(x)$, причем область значений функции u входит в область определения функции $f(x)$. Тогда производная сложной функции равна произведению производной функции по промежуточной переменной на производную промежуточной переменной по переменной x

$$y' = f_u'(u) \cdot u_x' . \tag{2.12}$$

Пример 2.8. Найти производную сложной функции $h(x) = \sqrt{9 - x^2}$.

Решение. Так как $h(x) = g(f(x))$, где $g(y) = \sqrt{y}$, $y = f(x) = 9 - x^2$, то используя формулу 4) а второго столбца таблицы формул производных, получим

$$g'(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}} \text{ и } y' = f'(x) = -2x \text{, откуда } h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{y}} \cdot y' = \frac{-2x}{2\sqrt{9 - x^2}} = -\frac{x}{\sqrt{9 - x^2}} .$$

2.4. Производные функций, заданных неявно и параметрически

Если зависимость между переменными x и y задана уравнением $F(x, y) = 0$, которое не разрешено относительно y, то *y называется неявной функцией от аргумента x*. Чтобы найти производную y' неявной функции y, определяемой данным уравнением, надо продифференцировать по переменной x обе части этого равенства, считая y функцией от x, затем полученное уравнение решить относительно производной y'.

При дифференцировании неявной функции надо помнить, что x – независимая переменная, ее производная равна 1, а y – функция от x, ее производная равна y'.

Пример 2.9. Найти производную от неявно заданной функции $x^2y - y^2 = 5x$.

Решение. Если две функции равны, то их производные тоже равны. Дифференцируем обе части равенства по x.

$$2xy + x^2y' - 2y \cdot y' = 5$$

Разрешая уравнение относительно y', получим $y' = \dfrac{5-2xy}{x^2-2y}$.

Рассмотрим задание линии на плоскости, при котором переменные x, y являются функциями третьей переменной t (называемой *параметром*)

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = g(t) \end{cases}. \qquad (2.13)$$

Для каждого значения t из некоторого интервала соответствуют определенные значения x и y, а, следовательно, определенная точка M (x, y) плоскости. Когда t пробегает все значения из заданного интервала, то точка M (x, y) описывает некоторую линию L. Уравнения (2.13) называются *параметрическими уравнениями* линии L.

Функция $x = \varphi(t)$ на некотором интервале изменения t имеет обратную функцию $t = \Phi(x)$, тогда $y = g(\Phi(x))$. Пусть $x = \varphi(t)$, $y = g(t)$ имеют производные, причем $x'_t \neq 0$. Согласно правилу дифференцирования сложной функции имеем $y'_x = y'_t \cdot t'_x$. *Производная обратной функции равна обратной величине производной данной функции* $t'_x = \dfrac{1}{x'_t}$, поэтому:

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}. \qquad (2.14)$$

Полученная формула (2.14) позволяет находить производную для функции, заданной параметрически.

Пример 2.10. Найти производную первого и второго порядков от функции $\begin{cases} x = \sin^2 t \\ y = \sin 2t \end{cases}.$

Решение. $\quad y'_x = \dfrac{2\cos 2t}{2\sin t \cdot \cos t} = 2ctg\, 2t.$

2.5. Метод логарифмического дифференцирования

Пусть задана показательно-степенная функция

$$y = u(x)^{v(x)} \text{ или } y = u^v \qquad (2.15)$$

где $u(x) > 0$, $u(x)$, $v(x)$ – дифференцируемые функции. Прологарифмируем равенство (2.15), получим $\ln y = v \ln u$.

Дифференцируем полученную неявную функцию

$$\frac{1}{y} y' = v' \ln u + v \frac{1}{u} \cdot u',$$

откуда $y' = y(v' \ln u + v \frac{1}{u} \cdot u')$, подставляя сюда $y = u^v$, имеем

$$y' = (u^v)' = u^v \cdot \ln u \cdot v' + v \cdot u^{v-1} \cdot u'. \qquad (2.16)$$

Из формулы (2.16) видно, что *производная показательно-степенной функции находится как сумма производных от сложных показательной и степенной функций.*

Пример 2.11. Найти производную от показательно-степенной функции $y = (\sin x)^x$.

Решение. Прологарифмируем обе части уравнения:

$$\ln y = \ln (\sin x)^x = x \ln \sin x.$$

Дифференцируем неявную функцию по переменной x.

$$\frac{1}{y}\cdot y' = 1\cdot \ln\sin x + x\cdot\frac{\cos x}{\sin x};\ \ y' = y\left(\ln\sin x + x\cdot\frac{\cos x}{\sin x}\right);$$

$$y' = (\sin x)^x\left(\ln\sin x + x\cdot\frac{\cos x}{\sin x}\right);\ \ y' = (\sin x)^x \ln\sin x + x(\sin x)^{x-1}\cdot\cos x.$$

Прием нахождения производной показательно-степенной функции, а также сложной функции, содержащей степени, произведения и частное после логарифмирования, называется *методом логарифмического дифференцирования.*

Пример 2.12. Найти производную от функции $y = \sqrt[4]{\frac{x^3(x+1)}{(x^2+3)^5}}$.

Решение. Прологарифмируем по основанию *e* обе части равенства и применим свойства логарифмов.

$$\ln y = \ln\left(\frac{x^3(x+1)}{(x^2+3)^5}\right)^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{4}\left[\ln x^3\cdot(x+1) - \ln(x^2+3)^5\right] =$$

$$= \frac{1}{4}\left[\ln x^3 + \ln(x+1) - 5\ln(x^2+3)\right] = \frac{3}{4}\ln x + \frac{1}{4}\ln(x+1) - \frac{5}{4}\ln(x^2+3).$$

Продифференцируем левую и правую часть уравнения

$$\frac{y'}{y} = \frac{3}{4x} + \frac{1}{4(x+1)} - \frac{5\cdot 2x}{4(x^2+3)} = \frac{3(x+1)(x^2+3) + x(x^2+3) - 10x^2(x+1)}{4x(x+1)(x^2+3)} =$$

$$= \frac{-6x^3 - 7x^2 + 12x}{4x(x+1)(x^2+3)}.$$

Выразим производную функции из полученного равенства

$$y' = y\cdot\frac{-6x^3 - 7x^2 + 12x}{4x(x+1)(x^2+3)} = \sqrt[4]{\frac{x^3(x+1)}{(x^2+3)^5}}\cdot\frac{-6x^3 - 7x^2 + 12x}{4x(x+1)(x^2+3)}.$$

2.6. Дифференциал функции, его геометрический смысл

Пусть функция $y = f(x)$ имеет производную в точке x. По определению производной имеем

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y' \cdot$$

Так как переменная величина отличается от своего предела на величину бесконечно малую, то справедливо равенство

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = y' + \alpha, \text{ где } \alpha \to 0 \text{ при } \Delta x \to 0.$$

Следовательно,

$$\Delta y = y' \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x. \qquad (2.17)$$

Из равенства (2.17) видно, что приращение функции состоит из двух слагаемых, первое из которых является *главной частью приращения функции*, которая пропорциональна приращению аргумента и линейна относительно него.

Дифференциалом функции $y = f(x)$ в точке x *называется главная часть приращения функции* $y' \cdot \Delta x$, линейная относительно Δx, т.е.

$$dy = y' \cdot \Delta x. \qquad (2.18)$$

По определению дифференциал независимой переменной равен её приращению, т.е. $dx = \Delta x$,

тогда получим $$dy = y' \cdot dx = f'(x) \cdot dx. \qquad (2.19)$$

Итак, *дифференциал функции в точке x равен произведению производной функции в этой точке на дифференциал аргумента*.

Пример 2.13. Найти дифференциал функции dy и приращение функции Δy для функции $y = x^2$ при:

1) произвольных x и Δx; 2) $x_0 = 20$, $\Delta x = 0{,}1$.

Решение.

1) $\Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2 = x^2 + 2x\Delta x + \Delta x)^2 - x^2 = 2x\Delta x + (\Delta x)^2$, $dy = 2x\Delta x$.

2) Если $x_0 = 20$, $\Delta x = 0{,}1$, то $\Delta y = 40\cdot 0{,}1 + (0{,}1)^2 = 4{,}01$; $dy = 40\cdot 0{,}1 = 4$.

Запишем равенство (2.17) в виде

$$\Delta y = dy + \alpha \cdot \Delta x. \qquad (2.20)$$

Приращение Δy отличается от дифференциала dy на бесконечно малую высшего порядка, по сравнению с Δx, поэтому можно записать приближенное равенство $\Delta y \approx dy$, если Δx достаточно мало. Учитывая, что $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$, получаем приближенную формулу

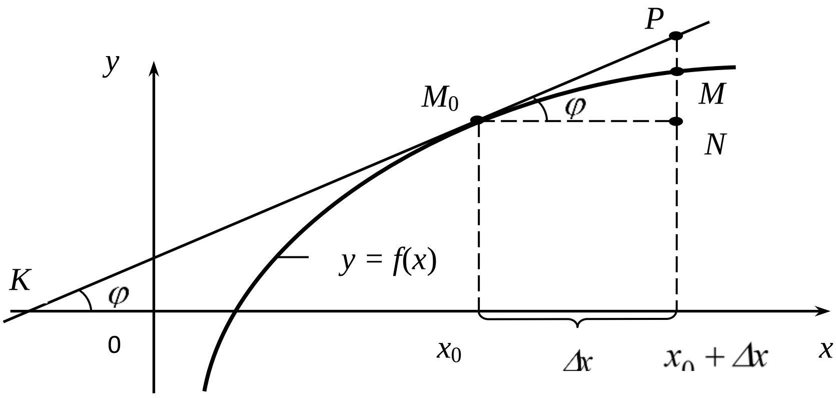


Рисунок 2.2 – Геометрический смысл дифференциала функции

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + dy. \qquad (2.21)$$

Пример 2. 14. Вычислить приближенно $\sqrt{4{,}1}$ с точностью до 10^{-3}.

Решение. Рассмотрим $f(x) = \sqrt{x}$; $x_0 = 4$, $\Delta x = 0{,}1$;

тогда $\sqrt{4{,}1} = f(x_0 + \Delta x)$. Используя формулу (2.21), получим

$$\sqrt{4{,}1} = f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + dy, \quad f(x_0) = \sqrt{4} = 2,$$

$$dy = f'(x_0)\cdot \Delta x = \frac{1}{2\sqrt{4}}\cdot 0{,}1 = \frac{0{,}1}{4} = 0{,}025.$$

Значит, $\sqrt{4{,}1} \approx 2 + 0{,}025 \approx 2{,}025$.

Рассмотрим геометрический смысл дифференциала $df(x_0)$ (рис. 2.2). Проведем к графику функции $y = f(x)$ касательную в точке $M_0(x_0, f(x_0))$, пусть φ – угол между касательной KM_0 и осью Ox, тогда $f'(x_0) = \mathrm{tg}\varphi$. Из треугольника M_0NP выразим

$$PN = \mathrm{tg}\varphi \cdot \Delta x = f'(x_0)\cdot \Delta x = df(x_0).$$

В свою очередь PN является приращением ординаты касательной при изменении x от x_0 до $x_0 + \Delta x$. Следовательно, *дифференциал функции* $f(x)$ *в точке* x_0 *равен приращению ординаты касательной*. В этом заключается его геометрический смысл.

Если $u(x)$, $v(x)$ – дифференцируемые функции, то справедливы следующие формулы для дифференциала алгебраической суммы этих функций, произведения и частного:

$$d(u \pm v) = du + dv. \quad (2.22)$$

$$d(u \cdot v) = u \cdot dv + v \cdot du. \quad (2.23)$$

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{du \cdot v - u \cdot dv}{v^2}, \quad (v \neq 0). \quad (2.24)$$

Рассмотрим дифференциал сложной функции $y = f(x)$, $x = \varphi(t)$, т.е. $y = f(\varphi(t))$. Тогда $dy = y'_t dt$, но $y'_t = y'_x x'_t$, поэтому $dy = y'_x x'_t dt$. Учитывая, что $x'_t dt = dx$, получаем $dy = y'_x dx = f'(x)dx$. Таким образом, дифференциал сложной функции $y = f(x)$, где $x = \varphi(t)$, имеет вид $dy = f'(x)dx$, такой же, как в том случае, когда x является независимой переменной. Это свойство называется *инвариантностью формы дифференциала*.

2.7. Производные и дифференциалы высших порядков

Пусть функция $f(x)$ в каждой точке некоторого промежутка $G \subseteq D(f)$ имеет производную $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f(x)}{\Delta x}$. Тогда каждой точке $x \in G$ по данному закону ставится в соответствие число $f'(x)$, т.е. $f'(x)$ в свою очередь является функцией. Следовательно, можно вести речь о производной этой функции.

Производная от производной $f'(x)$ называется *производной второго порядка* (второй производной) функции $f(x)$ и обозначается через $f''(x)$.

Итак,

$$f''(x) = (f'(x))'.$$

Также будем пользоваться обозначением

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{df(x)}{dx}\right).$$

Если необходимо подчеркнуть по какой переменной берется производная, будем обозначать $f''_{xx}(x)$, $f''_{x^2}(x)$.

Если же функция $f(x)$ имеет вторую производную $f''(x)$ на некотором промежутке $G_1 \subseteq G$, то ее производная называется производной третьего порядка (третьей производной) функции $f(x)$ и обозначается через $f'''(x) = \dfrac{d^3 f(x)}{dx^3} = = f'''_{xxx}(x)$, $f'''_{x^3}(x)$.

Таким образом,

$$f'''(x) = (f''(x))'.$$

И так далее, по индукции, если функция $f(x)$ имеет на некотором промежутке производную (n - 1)-го порядка, то ее производная называется производной n-го порядка (n-ной производной) функции $f(x)$ и обозначается через $f^{(n)}(x) = \dfrac{d^n f(x)}{dx^n}$.

Итак,
$$f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))'. \qquad (2.25)$$

Все производные функции $f(x)$, *начиная с производной второго порядка*, *называются производными высших порядков*. Из определения производных высших порядков следует, что при их вычислении используются те же правила и формулы, что и при вычислении первой производной.

Пример 2.15. $f(x) = \sqrt{x}$. Найти $f'''(x)$ и $f'''(4)$.

Решение. $f'(x) = \left(x^{1/2}\right)' = \frac{1}{2}\,x^{-1/2}$, $f''(x) = -\frac{1}{4}\,x^{-3/2}$,

$$f'''(x) = \frac{3}{8}\,x^{-5/2} = \frac{3}{8\sqrt{x^5}}, \quad f'''(4) = \frac{3}{8\sqrt{4^5}} = \frac{3}{8\cdot 2^5} = \frac{3}{256}.$$

Перейдем к рассмотрению дифференциалов высших порядков.

Пусть $y = f(x)$, $x \in X$. Дифференциал этой функции $dy = f'(x)dx$ является функцией от x (если x – не фиксированное число), dx – приращение аргумента x, оно не зависит от x.

Дифференциал от дифференциала функции называется дифференциалом второго порядка и обозначается d^2y или $d^2f(x)$. Итак,

$$d^2y = d(dy), \text{ но } dy = f'(x)dx, \text{ поэтому}$$

$$d^2y = d(f'(x)dx) = (f''(x)dx)dx = f''(x)(dx)^2.$$

Будем вместо $(dx)^2$ писать dx^2.

Дифференциалом третьего порядка называется дифференциал от дифференциала второго порядка и обозначается d^3y или $d^3f(x)$.

$$d^3y = d(d^2y) = d(f''(x)dx^2) = f'''(x)dx^3 \text{ и т.д.}$$

Дифференциалом n-го порядка называется дифференциал от дифференциала $(n – 1)$ –го *порядка*

$$d^ny = d(d^{n-1}y) = d(f^{(n-1)}(x)dx^{n-1}) = f^{(n)}(x)dx^n. \tag{2.26}$$

Итак, $d^ny = f^{(n)}(x)dx^n$. Отсюда

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^ny}{dx^n}. \tag{2.27}$$

Пример 2.16. Найти d^3y для функции $y = \cos^2x$.

Решение. $d^3y = y'''dx^3$. Вычислим y''', находя последовательно y', y'', y''', получим

$y' = (\cos^2x)' = -2\cos x\sin x = -\sin 2x$, $y'' = (-\sin 2x)' = -2\cos 2x$, $y''' = 4\sin 2x$.

Следовательно, $d^3y = 4\sin 2x dx^3$.

Рассмотрим нахождение производных высших порядков для функций, заданных параметрически и неявно.

Пусть функция y, зависящая от x, задана параметрически уравнениями

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = g(t) \end{cases}, \quad t \in T$$

(T – некоторый промежуток).

Найдем $\frac{d^2y}{dx^2}$. Известно, что $\frac{dy}{dx} = y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$, поэтому

$$\frac{d^2y}{dx^2} = (y'_x)'_x = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \frac{\left(y'_t/x'_t\right)'_t}{x'_t} = \frac{y''_t x'_t - x''_t y'_t}{(x'_t)^3}. \qquad (2.28)$$

Аналогично будут вычисляться $\frac{d^3y}{dx^3}$ и т.д.

Пример 2.17. Функция y от x задана параметрически уравнениями:

$$\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}, \quad 0 \le t \le \pi. \quad \text{Найти } \frac{d^2y}{dx^2}.$$

Решение. $\frac{dy}{dx} = y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{3a\sin^2 t\cos t}{-3a\cos^2 t\sin t} = -\mathrm{tg}t;$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \frac{(-\mathrm{tg}t)'}{(a\cos^3 t)'} = -\frac{1}{\cos^2 t(-3a\cos^2 t\sin t)} = \frac{1}{3a\cos^4 t\sin t}.$$

Нахождение производных высших порядков от функций, заданных неявно, рассмотрим на примере.

Пример 2.18. Найти $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ для функции, заданной неявно уравнением $e^y + xy = e$. Вычислить $y'(0)$, $y''(0)$.

Решение. Найдем сначала y':

$$(e^y + xy)' = e', \; e^y\cdot y' + y + xy' = 0, \; y'(e^y + x) = -y, \; y' = -\frac{y}{e^y + x}.$$

Для нахождения y'' будем дифференцировать равенство $e^y\cdot y' + y + xy' = 0$, получим

$$e^y\cdot(y')^2 + e^y\cdot y'' + y' + y' + xy'' = 0,$$

отсюда найдем y'', затем подставим найденное значение y'

$$y''(e^y + x) = -e^y\cdot(y')^2 - 2y',$$

$$y'' = -\frac{e^y(y')^2 + 2y'}{e^y + x} = -\frac{e^y\left(-\frac{y}{e^y + x}\right)^2 + 2\left(-\frac{y}{e^y + x}\right)}{e^y + x} = \frac{-e^y y^2 + 2y(e^y + x)}{(e^y + x)^3} =$$

$$= \frac{-e^y y^2 + 2e^y y + 2yx}{(e^y + x)^3}$$

Итак, $y' = -\dfrac{y}{e^y + x}$, $y'' = \dfrac{-e^y y^2 + 2e^y y + 2yx}{(e^y + x)^3}$.

Подставим $x = 0$ в исходное уравнение $e^y + xy = e$, получим

$e^y + 0 \cdot y = e$, откуда $y = 1$, значит,

$$y(0) = 1; \quad y'(0) = -\frac{1}{e}; \quad y''(0) = \frac{e}{(e)^3} = \frac{1}{e^2}.$$

Рассмотрим *физический смысл второй производной*.

Пусть путь S, пройденный телом по прямой за время t, выражается формулой $S = f(t)$. Известно, что при этом скорость V в момент времени t равна производной от пути по времени: $V = S'(t)$. В момент времени $t + \Delta t$ скорость получит приращение

$$\Delta V = V(t + \Delta t) - V(t).$$

Отношение $\dfrac{\Delta V}{\Delta t}$ называется *средним ускорением* за время Δt. *Ускорением* a в данный момент времени называется предел среднего ускорения, когда $\Delta t \to 0$, т.е.

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta V}{\Delta t}, \text{ т.е. } a = V'(t) = (S(t))' = S''(t). \tag{2.29}$$

Следовательно, *ускорение при прямолинейном движении равно второй производной от пути по времени*. В этом заключается *физический смысл второй производной.*

Пример 2.19. Тело движется по прямой согласно закону $x(t) = t^3 - 2t + 5$. Найти ускорение точки в момент времени $t_0 = 4$.

Решение. Скорость движения – это производная от пути по времени, следовательно,

$$v(t) = x'(t) = \left(t^3 - 2t + 5\right)' = 3t^2 - 2.$$

Так как нам известна скорость движения как функция времени, мы можем найти ускорение этого движения

$$a(t) = v'(t) = \left(3t^2 - 2\right)' = 6t.$$

Значит, в момент времени $t_0 = 4$ ускорение данного движения равно

$$a(4) = 6 \cdot 4 = 24.$$

2.8. Правило Лопиталя

Правило Лопиталя является эффективным средством нахождения предела функции в тех случаях, когда аргумент неограниченно возрастает или стремится к значению, которое не входит в область определения функции.

Пусть функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ дифференцируемы при $0 < |x - a| < h$, причём производная одной из них не обращается в ноль. Если $f(x)$ и $g(x)$ - обе бесконечно малые или бесконечно большие при $x \to a$ т.е., частное $\frac{f(x)}{g(x)}$ представляет в точке $x = a$ неопределённость вида $\left(\frac{0}{0}\right)$ или $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$, то:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ldots = \lim_{x \to a} \frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)} \tag{2.30}$$

при условии, что предел отношения существует.

Формула (2.30) выражает *правило Лопиталя*: *предел отношения двух бесконечно малых или двух бесконечно больших величин равен пределу отношения их производных.*

Это правило применимо в случае, когда $a = \infty$. Если частное $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ в точке $x = a$ вновь дает неопределенность одного из указанных видов, $f'(x)$ и $g'(x)$ удовлетворяют ранее сформулированным требованиям, то необходимо в пределе перейти к отношению вторых производных и т.д.

Пример 2.20. Вычислить предел $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x \sin x - 5x}{4x^2 + 7x}$ по правилу Лопиталя.

Решение. При $x \to 0$ числитель и знаменатель дроби обращаются в ноль, получаем неопределенность вида $\left(\frac{0}{0}\right)$. Применяя правило Лопиталя, находим

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x\sin x-5x}{4x^2+7x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\left(e^x\sin x-5x\right)'}{\left(4x^2+7x\right)'}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x\sin x+e^x\cos x-5}{8x+7}=-\frac{4}{7}.$$

Пример 2.21. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln x}{\operatorname{ctg} x}$.

Решение. При $x\to 0$ и $x>0$ $\lim\limits_{x\to 0}\ln x=\infty$, $\lim\limits_{x\to 0}\operatorname{ctg} x=\infty$, следовательно, имеем отношение двух бесконечно больших при $x\to 0$ и неопределенность типа $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$. Вычислим

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\operatorname{ctg} x}=\lim_{x\to 0}\frac{1/x}{-1/\sin^2 x}=-\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x}=-\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x\cos x}{1}=0.$$

Правило Лопиталя можно применять и при раскрытии других неопределенностей $(0\cdot\infty)$, $(\infty-\infty)$, (∞^0) после сведения их к неопределенностям типа $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ или $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$.

Для раскрытия неопределенности $(0\cdot\infty)$ необходимо преобразовать произведение $f(x)g(x)$, где $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\infty$, в частное вида $f(x):\dfrac{1}{g(x)}$ или $g(x):\dfrac{1}{f(x)}$.

Пример 2.22. Найти $\lim\limits_{x\to 0} x^2\ln x$.

Решение. Так как $\lim\limits_{x\to 0}\ln x=\infty$, то имеем неопределенность типа $(0\cdot\infty)$. Преобразуем ее к виду $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$: $\lim\limits_{x\to 0} x^2\ln x=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln x}{1/x^2}$,

и применим правило Лопиталя,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{1/x^2}=\lim_{x\to \infty}\frac{(\ln x)'}{\left(1/x^2\right)'}=\lim_{x\to 0}\frac{1/x}{-2/x^3}=\lim_{x\to 0}\left(-\frac{x^2}{2}\right)=0.$$

В случае неопределенности $(\infty-\infty)$ необходимо преобразовать соответствующую разность $f(x)-g(x)$, где, $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\infty$ в произведение $g(x)\left(1-\dfrac{g(x)}{f(x)}\right)$ и раскрыть сначала неопределенность $\dfrac{g(x)}{f(x)}$. Если $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{g(x)}{f(x)}=1$, то следует привести выражение к виду $\dfrac{1-\frac{g(x)}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)}}$.

Пример 2.23. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\sin x}\right)$, используя правило Лопиталя.

Решение. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\sin x}\right)=(\infty-\infty)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-x}{x\sin x}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(\sin x-x)'}{(x\sin x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{\sin x+x\cos x}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(\cos x-1)'}{(\sin x+x\cos)'}=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{\cos x+\cos x-x\sin x}=0$$

Неопределенности видов (1^{∞}), (0^{0}), (∞^{0}) раскрываются с помощью предварительного логарифмирования. Пусть

$$\lim_{x\to a}[f(x)]^{g(x)}=A.$$

Так как логарифмическая функция непрерывна, то $\lim\limits_{x\to a}\ln y=\ln\lim\limits_{x\to a} y$, тогда

$$\ln A=\lim_{x\to a}[g(x)\ln f(x)] \qquad (2.31)$$

и неопределенности трех рассматриваемых видов сводятся к неопределенности вида $(0\cdot\infty)$.

Пример 2.24. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}(e^x+x)^{\frac{1}{x}}$.

Решение.. Обозначим искомый предел через *A*. Тогда

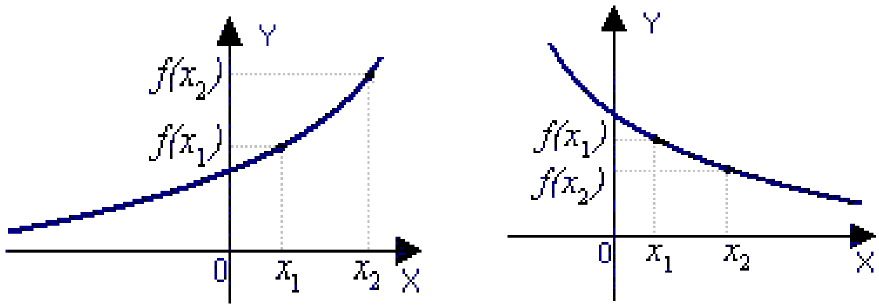
$$\ln A=\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}\ln(e^x+x)\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(e^x+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\ln(e^x+x))'}{x'}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{e^x+1}{e^x+x}}{1}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+1}{e^x+x}=2, \ln A=2\Rightarrow A=e^2.$$

2.9. Применение производной к исследованию функции

2.9.1. Интервалы монотонности функции

Функция $y = f(x)$ называется *возрастающей* (*убывающей*) в некотором интервале, если при $x_1 < x_2$ выполняется неравенство $f(x_1) < f(x_2)$ ($f(x_1) > f(x_2)$). Возрастающие и убывающие функции называются *монотонными*. Для монотонных функций их приращение на отрезке не меняет знака, то есть либо всегда отрицательное, либо всегда положительное.



а) б)

Рисунок 2.3 – Графики возрастающей а) и убывающей б) функций

Достаточное условие монотонности функции. Если дифференцируемая функция $y = f(x)$ на отрезке $[a, b]$ возрастает (убывает), то ее производная на этом отрезке $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$).

Точка x_0 называется *критической точкой* 1 *рода* функции $f(x)$, если

1) x_0 – внутренняя точка области определения $f(x)$;

2) $f'(x_0) = 0$ или $f'(x_0)$ не существует.

Пример 2.25. Найти промежутки монотонности функции $f(x) = x^3 - 3x^2$.

Решение. Найдем первую производную функции $f'(x) = 3x^2 - 6x$.

Найдем критические точки 1 рода, решив уравнение

$$3x^2 - 6x = 0,\ 3x\cdot(x-2) = 0,\ x = 0 \quad \text{или} \quad x = 2.$$

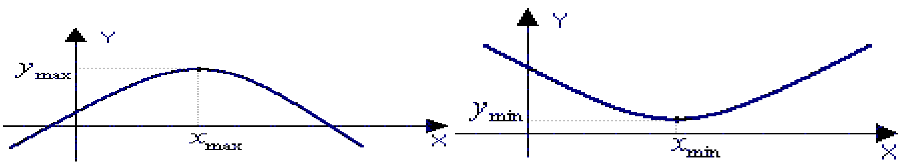
Исследуем поведение первой производной в критических точках и на промежутках между ними.

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 2)$	2	$(2, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

Итак, функция возрастает при $x \in (-\infty;0) \cup (2;+\infty)$; функция убывает при $x \in (0;2)$.

2.9.2. Экстремум функции

Точка x_0 называется *точкой локального максимума* (*локального минимума*), если для любого x из окрестности точки x_0 выполняется неравенство $f(x_0) > f(x)$ $\left(f(x_0) < f(x)\right)$.



а) б)

Рисунок 2.4 – Графики функций, имеющих максимум а) и минимум б)

Точки минимума и максимума функции называются *точками экстремума* данной функции, а значения функции в этих точках – *экстремумами* функции. Точками экстремума могут служить только *критические точки* I *рода*, т.е. точки, принадлежащие области определения функции, в которых производная $f'(x)$ обращается в ноль или терпит разрыв.

Необходимое условие экстремума. Если x_0 – точка экстремума функции $f(x)$, то ее производная в этой точке равна нулю. Геометрически это условие означает, что в экстремуме дифференцируемой функции

Первое достаточное условие экстремума. Если при переходе через критическую точку 1 рода x_0 производная функции меняет знак с «+» на «-», то x_0 – точка *максимума* функции $f(x)$. Если же производная функции меняет знак с «-» на «+», то x_0 – точка *минимума* функции $f(x)$.

Если же при переходе через критическую точку 1 рода x_0 производная функции $f'(x)$ сохраняет знак, то в точке x_0 функция $f(x)$ не имеет экстремума.

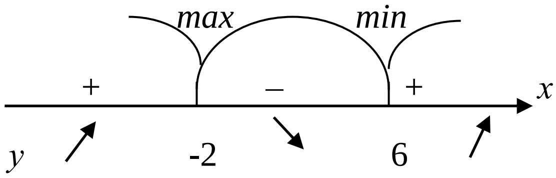
Второе достаточное условие экстремума. Если функция $f(x)$ имеет непрерывные производные в критической точке 1 рода x_0 первого и второго порядка, и $f''(x_0)\angle 0$, то функция $f(x)$ имеет в точке x_0 *максимум*, если $f''(x_0)\rangle 0$, то функция $f(x)$ имеет в точке x_0 *минимум*.

Пример 2.26. Найти экстремумы функции $y=\frac{1}{12}x^3-\frac{1}{2}x^2-3x+10$.

Решение. Найдем первую производную y', приравняем ее к нулю и найдем критические точки I рода.

$$y'=\frac{1}{4}x^2-x-3;\ \frac{1}{4}x^2-x-3=0\Rightarrow x^2-4x-12=0.$$

Корни этого уравнения: $x_{1,2}=-2;6$ – критические точки I рода. Точки –2 и 6 разбивают числовую ось на три интервала: $(-\infty;-2)$, $(-2;6)$, $(6;+\infty)$.



На интервалах $(6;+\infty)\cup(6;+\infty)$ $y'>0$, поэтому (по достаточному признаку возрастания (убывания) функции) на данных интервалах функция возрастает, а на промежутке $(-2;6)$ $y'<0$, следовательно, на нем функция убывает. Так как при переходе через критическую точку $x_0=-2$ производная y' меняет знак с «+» на «–», то (по I достаточному признаку существования экстремума) в точке $x_0=-2$ функция имеет максимум – y_{max}, а точка –2 является абсциссой точки максимума, т.е. $x_{max}=-2$,

$$y_{max}=f(x_{max})=f(-2)=-\frac{8}{12}-2+10=13\frac{1}{3}.$$

При переходе через критическую точку $x_0=6$ производная y' меняет знак с «–» на «+», следовательно, в точке $x_0=6$ функция имеет минимум – y_{min}, а точка 6 является точкой минимума, т.е. $x_{min}=6$, тогда

$$y_{min} = f(x_{min}) = f(6) = 18 - 18 - 18 + 10 = -8.$$

Итак, $A(-2; 13\frac{1}{3})$ – точка максимума, $B(6; -8)$ – точка минимума графика функции.

Пример 2.27. Требуется изготовить закрытый цилиндрический бак вместимостью $V = 16\pi \approx 50$ м^3. Каковы должны быть размеры бака (радиус R и высота H), чтобы на его изготовление пошло наименьшее количество материала?

Решение. Площадь полной поверхности цилиндра равна

$S = 2\pi R(R + H)$. Мы знаем объем цилиндра $V = \pi R^2 H \Rightarrow$

$H = V/\pi R^2 = 16\pi/\pi R^2 = 16/R^2$. Значит, $S(R) = 2\pi(R^2 + 16/R)$.

Находим производную этой функции

$S'(R) = 2\pi(2R - 16/R^2) = 4\pi(R - 8/R^2)$. $S'(R) = 0$ при $R^3 = 8$,

следовательно, $R = 2$. Найдем $S''(R) = 4\pi(1 + 16/R) \Rightarrow S''(2) > 0$, значит при $R = 2$ имеем min. Найдем высоту $H = 16/4 = 4$. *Ответ*: $R = 2$, $H = 4$.

2.9.3. Наибольшее и наименьшее значения функции

Чтобы найти набольшее ($y_{наиб} = M$) и наименьшее ($y_{наим} = m$) значения функции $y = f(x)$, непрерывной на отрезке $[a; b]$, нужно:

1. Найти критические точки I рода. Из них выбрать те, которые принадлежат отрезку $[a; b]$.

2. Найти значения функции в этих точках (не исследуя их на экстремум).

3. Найти значения функции на концах отрезка $[a; b]$: $f(a)$ и $f(b)$.

4. Из всех значений, найденных в п. 2 и 3, выбрать самое маленькое и самое большое. *Самое маленькое* будет являться *наименьшим*, а *самое большое – наибольшим значением функции* на указанном отрезке.

Пример 2.28. Найти $y_{наиб}$ и $y_{наим}$ функции $y = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 3$ на отрезке $[-1; 2]$.

Решение. 1. Найдем критические точки I рода. Для этого первую производную приравняем к нулю

$$y' = 5x^4 - 20x^3 + 15x^2.$$

$5x^4 - 20x^3 + 15x^2 = 0 \Rightarrow 5x^2(x^2 - 4x + 3) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \\ x = 3 \end{array}\right.$ – критические точки

первого рода, из которых $x = 0; 1 \in [-1; 2]$, а $x = 3 \notin [-1; 2]$.

2. Найдем значения функции $y = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 3$ в точках $x = 0$ и $x = 1$: $f(0) = 3$; $f(1) = 4$.

3. Найдем значения функции на концах отрезка $[-1; 2]$: $f(-1) = -8$; $f(2) = -5$.

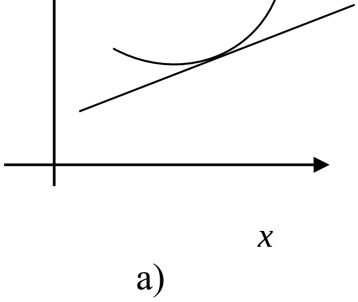
4. Сравнивая значения из п. 2 и 3, получаем, что $y_{наиб} = 4$, $y_{наим} = -8$.

Замечание. Не следует путать $y_{наиб}$ и $y_{наим}$ с y_{max} и y_{min}. Последние функция принимает только во внутренних точках отрезка $[a; b]$, а $y_{наиб}$ и $y_{наим}$ значения она может принимать и на концах указанного отрезка.

2.9.4. Промежутки выпуклости графика функции. Точки перегиба

Кривая $y = f(x)$ называется *выпуклой вниз* (*вогнутой*) в промежутке $(a; b)$, если она лежит выше касательной в любой точке этого промежутка.

Кривая $y = f(x)$ называется *выпуклой вверх* (*выпуклой*) в промежутке $(a; b)$, если она лежит ниже касательной в любой точке этого промежутка.



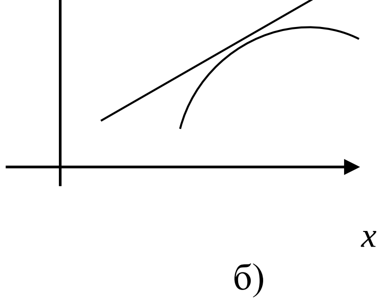


Рисунок 2.5 – Графики выпуклой вниз а) и выпуклой вверх б) функций

Промежутки, в которых график функции обращен выпуклостью вверх или вниз, называются *промежутками выпуклости* графика функции.

Выпуклость вниз или вверх кривой, являющейся графиком функции $y = f(x)$, характеризуется знаком ее второй производной: *если в некотором промежутке* $f''(x) > 0$, *то кривая выпукла вниз* на этом промежутке; *если* же $f''(x) < 0$, *то кривая выпукла вверх* на этом промежутке**.**

Точка графика функции $y = f(x)$, *разделяющая промежутки выпуклости противоположных направлений этого графика*, называется *точкой перегиба.*

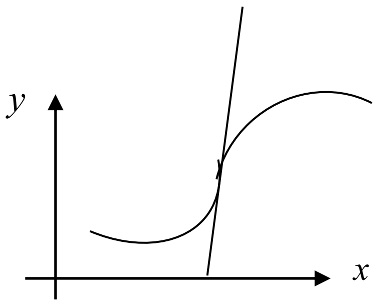


Рисунок 2.6 – График функции, имеющей точку перегиба

Точками перегиба могут служить только *критические точки* II *рода*, т.е. точки, принадлежащие области определения функции $y = f(x)$, в которых вторая производная $f''(x)$ обращается в ноль или терпит разрыв.

Пример 2.29. Найти промежутки выпуклости и точки перегиба следующей кривой $f(x) = 6x^2 - x^3$.

Решение. Находим $f'(x) = 12x - 3x^2$, $f''(x) = 12 - 6x$.

Найдем критические точки по второй производной, решив уравнение $12 - 6x = 0$. $x = 2$.

x	$(-\infty; 2)$	2	$(2; +\infty)$
$f''(x)$	+	0	-
$f(x)$		точка перегиба 16	

$f(2)=6\cdot 2^2-2^3=16$. Функция выпукла вверх при $x\in(2;+\infty)$; функция выпукла вниз при $x\in(-\infty;\,2)$; точка перегиба $(2;16)$.

2.9.5. Асимптоты графика функции

Асимптота — прямая линия к которой неограниченно приближается график функции по мере удаления его от начала координат в бесконечность. График может иметь неограниченное количество асимптот. Различают три вида асимптот: вертикальная, горизонтальная и наклонная.

Вертикальная асимптота — прямая вида

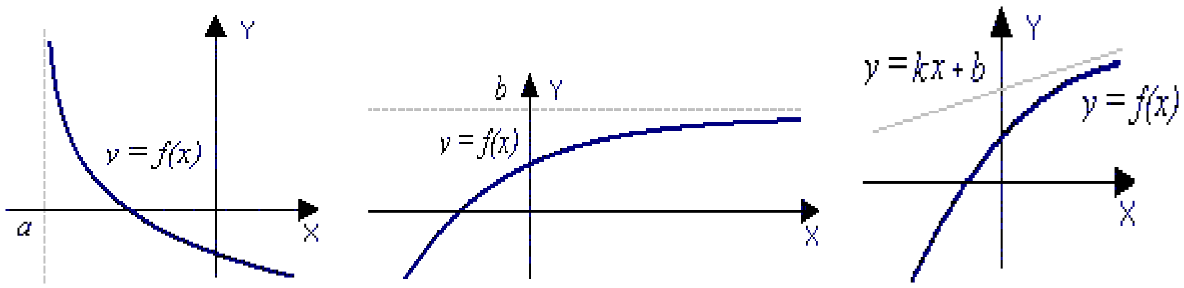
$x=a$, если . (2.32)

Горизонтальная асимптота — прямая вида

$y=a$, если . (2.33)

Наклонная асимптота — прямая вида

$y=kx+b$, если . (2.34)



а) б) в)

Рисунок 2.7 – Графики функций, имеющих вертикальную а), горизонтальную б) и наклонную в) асимптоты

2.9.6. Общая схема исследования функций

При полном исследовании функции $y=f(x)$ и построении ее графика можно придерживаться следующей схемы:

1) указать область определения функции;

2) исследовать функцию на симметричность;

3) найти точки пересечения графика функции с осями координат;

4) найти точки разрыва функции;

5) определить уравнения асимптот графика функции;

6) найти критические точки первого рода;

7) исследовать функцию на монотонность и экстремумы;

8) найти критические точки второго рода;

9) определить интервалы выпуклости и вогнутости, точки перегиба;

10) произвести необходимые дополнительные вычисления;

11) построить график функции.

Пример 2.30. Исследовать методами дифференциального исчисления функцию $y=\frac{x^3}{x^2-1}$ и построить ее график.

Решение. 1) Областью определения функции является вся числовая ось, за исключением точек, в которых знаменатель дроби обращается в нуль, то есть $x^2-1=0$. Отсюда $(x-1)(x+1)=0$, $x_1=1$, $x_2=-1$. Итак, область определения $D=(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,\infty)$.

2) Найдем $f(-x)$: $f(-x)=\frac{(-x)^3}{(-x)^2-1}=-\frac{x^3}{x^2-1}=-f(x)$,

так как $f(-x)=-f(x)$, то функция $y=\frac{x^3}{x^2-1}$ является нечетной, и ее график симметричен относительно начала координат.

3) Точка пересечения с осью Ox определяется равенством $y=0$, т.е.

$$\frac{x^3}{x^2-1}=0, \quad x=0.$$

Точка пересечения с осью Oy определяется равенством $x=0$:

$$f(0)=\frac{0^3}{0^2-1}=0,$$

т.е. $y=0$. Итак, график функции имеет единственную точку пересечения с осями координат – начало координат $O(0,0)$.

4) Так как при $x_1=1$ и $x_2=-1$ не выполняется первое условие непрерывности функции в точке, то эти точки являются точками разрыва

функции $y=\dfrac{x^3}{x^2-1}$. Причем эти точки являются точками разрыва второго рода, так как

$$\lim_{x\to 1-0}\frac{x^3}{x^2-1}=-\infty,\quad \lim_{x\to 1+0}\frac{x^3}{x^2-1}=+\infty \quad \text{и} \quad \lim_{x\to -1-0}\frac{x^3}{x^2-1}=-\infty,\ \lim_{x\to -1+0}\frac{x^3}{x^2-1}=+\infty.$$

5) Так как данная функция имеет точки разрыва второго рода (точки бесконечного разрыва функции), то существуют вертикальные асимптоты графика функции и их уравнения: $x=1$ и $x=-1$.

Найдем уравнения наклонных асимптот, для этого вычислим коэффициенты в уравнении прямой $y=kx+b$:

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3}{x\cdot\left(x^2-1\right)}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3}{x^3-x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{1-x^{-2}}=1,$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-kx]=\lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{x^3}{x^2-1}-x\right]=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{x^2-1}=0.$$

Следовательно, прямая $y=x$ является наклонной асимптотой при $x\to+\infty$ и $x\to-\infty$.

6) Найдем производную $f'(x)$:

$$f'(x)=\left(\frac{x^3}{x^2-1}\right)'=\frac{3x^2\cdot\left(x^2-1\right)-x^3\cdot 2x}{\left(x^2-1\right)^2}=\frac{x^4-3x^2}{\left(x^2-1\right)^2}.$$

Для того чтобы найти критические точки первого рода, решим уравнение: $f'(x)=0$ и выясним, в каких точках не существует $f'(x)$. Уравнение $\dfrac{x^4-3x^2}{\left(x^2-1\right)^2}=0$ равносильно уравнению $x^4-3x^2=0$ или $x^2\cdot\left(x^2-3\right)=0$, отсюда находим стационарные точки: $x_1=0$, $x_2=\sqrt{3}$, $x_3=-\sqrt{3}$. Производная не существует в том случае, когда знаменатель $\left(x^2-1\right)^2=0$, т.е. при $x_4=1$, $x_5=-1$. Таким образом, получили пять критических точек первого рода: $x_1=0$, $x_2=\sqrt{3}$, $x_3=-\sqrt{3}$, $x_4=1$, $x_5=-1$.

7) Для нахождения экстремумов и интервалов монотонности функции на числовой прямой отметим все критические точки и определим знак производной в каждом из получившихся интервалов.

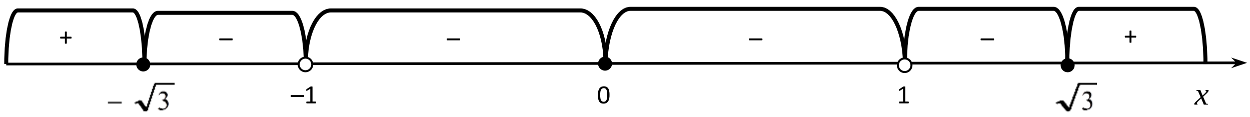


Рисунок к *примеру* 2.30. – Метод интервалов для определения интервалов монотонности и экстремума функции

Для этого достаточно взять по одной произвольной точке из каждого интервала и вычислить значения производной.

Например: $f'(-2)=\dfrac{16-3\cdot 4}{3^2}=\dfrac{2}{9}>0$; $\quad f'(-\sqrt{2})=\dfrac{4-3\cdot 2}{1}=-2<0$;

$f'(-\sqrt{1/2})=\dfrac{1/4-3\cdot(1/2)}{1/4}=-5<0$; $\quad f'(\sqrt{1/2})=-5<0$; $\quad f'(\sqrt{2})=-2<0$;

$$f'(2)=2/9<0.$$

Так как при переходе через критические точки $x=\pm\sqrt{3}$ производная меняет знак, то эти точки являются точками экстремума функции. В частности, при $x=\sqrt{3}$ достигается минимум функции, а при $x=-\sqrt{3}$ – максимум. Кроме того, на интервалах $(-\infty,-\sqrt{3})$ и $(\sqrt{3},+\infty)$ функция возрастает, а на интервалах $(-\sqrt{3},-1)$, $(-1,1)$ и $(1,\sqrt{3})$ – убывает.

8) Найдем $f''(x)$:

$$f''(x)=\left(\frac{x^4-3x^2}{(x^2-1)^2}\right)'=\frac{(4x^3-6x)(x^2-1)^2-(x^4-3x^2)2(x^2-1)2x}{(x^2-1)^4}=\frac{2x^3+6x}{(x^2-1)^3}.$$

Определим критические точки второго рода. Приравняем вторую производную к нулю:

$$\frac{2x^3+6x}{(x^2-1)^3}=\frac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}=0,$$

это уравнение равносильно уравнению $2x(x^2+3)=0$, откуда $x_1=0$.

Производная второго порядка не существует при $x=\pm 1$. В итоге получили три критические точки второго рода: $x_1=0$, $x_2=1$, $x_3=-1$.

9) На числовой оси отложим все критические точки второго рода и определим знаки второй производной аналогично тому, как это сделано в пункте 7.

$$f''(-2)=\frac{2\cdot(-8)+3\cdot(-2)}{(4-3)^3}=-\frac{22}{27}<0,\quad f''(-0{,}5)=\frac{2\cdot(-0{,}125)+3\cdot(-0{,}5)}{(0{,}25-1)^3}\approx 4{,}5>0,$$

$$f''(0{,}5)\approx -4{,}4<0,\qquad f''(2)=22/27>0.$$

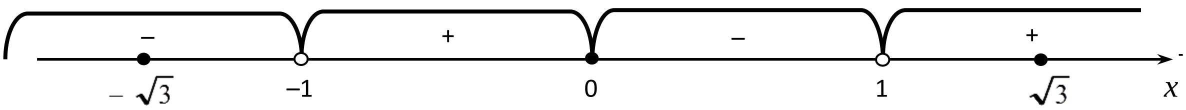


Рисунок к *примеру* 2.30 – Метод интервалов для определения интервалов выпуклости и точек перегиба

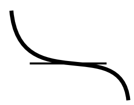
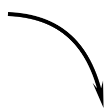
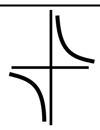
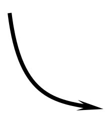
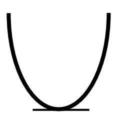
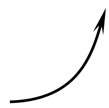
При переходе через точку $x_1=0$ вторая производная меняет знак, следовательно, x_1 – точка перегиба графика функции. На интервалах (-∞, -1) и (0, 1) график функции является выпуклым, а на интервалах (-1, 0) и (1, +∞) – вогнутым.

10) Вычислим значения функции в точках экстремума и перегиба:

$$f(-\sqrt{3})=\frac{3\cdot\sqrt{3}}{3-1}\approx -2{,}6,\qquad f(0)=0,\qquad f(\sqrt{3})\approx 2{,}6.$$

Для более точного построения графика найдем значения функции в дополнительных точках: $f(0{,}5)=\dfrac{0{,}125}{0{,}25-1}\approx -0{,}2$, $f(-0{,}5)\approx 0{,}2$.

11) Полученные данные занесем в таблицу:

x	0	(0, 1)	1	$(1,\sqrt{3})$	$\sqrt{3}$	$(\sqrt{3},+\infty)$
$f'(x)$	0	–	∞	–	0	+
$f''(x)$	0	–	∞	+	+	+
$f(x)$						

Теперь построим график функции.

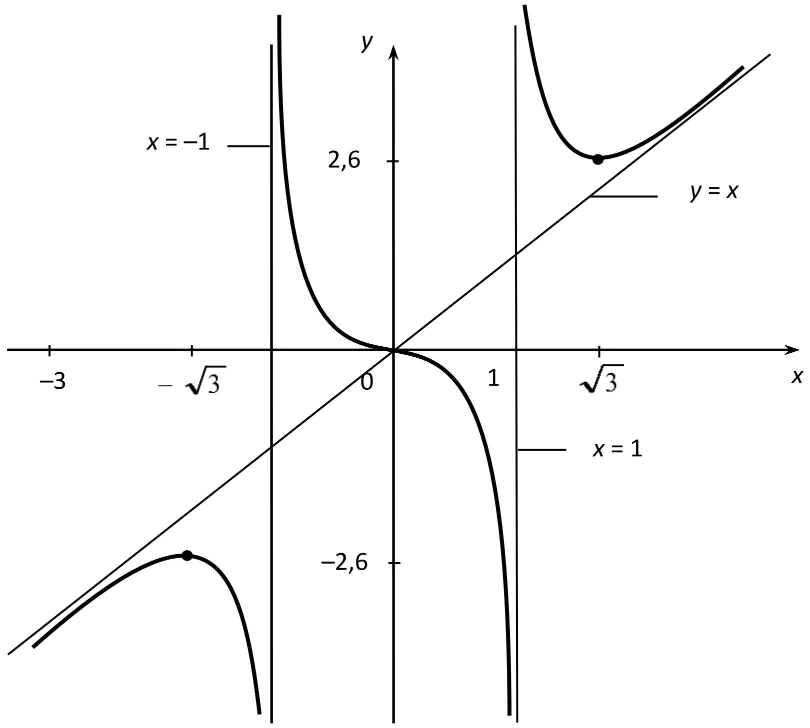


Рисунок к *примеру* 2.30 – График функции
$$y = \frac{x^3}{x^2 - 1}$$

Вопросы для самопроверки

1. Определение производной функции одной переменной.
2. Четыре шага для нахождения производной функции.
3. Связь между дифференцируемостью и непрерывностью функции.
4. Геометрический смысл производной.
5. Уравнения касательной и нормали к графику функции.
6. Физический смысл производной функции.
7. Правила дифференцирования суммы, произведения, частного.
8. Формулы дифференцирования основных элементарных функций.
9. Производная сложной и обратной функций.
10. Дифференцирование функции, заданной неявно.
11. Производная функции, заданной параметрически.
12. Метод логарифмического дифференцирования.
13. Дифференциал функции, его геометрический смысл.
14. Применение дифференциала к приближенным вычислениям.
15. Производные и дифференциалы высших порядков.

16. Производная второго порядка от функции, заданной параметрически.
17. Физический смысл производной второго порядка.
18. Правило Лопиталя.
19. Раскрытие неопределенностей $(0\cdot\infty)$, $(\infty-\infty)$, (∞^0), (1^∞) с помощью правила Лопиталя.
20. Достаточные признаки возрастания и убывания функции.
21. Определение точек максимума и минимума функции.
22. Необходимое условие экстремума функции.
23. Первый и второй достаточные признаки экстремума функции.
24. Нахождения наибольшего и наименьшего значений функции на отрезке.
25. Определение выпуклого и вогнутого графиков функции.
26. Достаточные условия выпуклости и вогнутости графика.
27. Точка перегиба, необходимое и достаточное условия ее существования.
28. Определение асимптоты плоской кривой графика функции. Уравнения вертикальной, горизонтальной и наклонной асимптот.
29. Общая схема исследования функции.

ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ № 3 «Дифференциальное исчисление функции одной переменной» (теория)

3.1. Приращением функции $y = f(x)$ в точке x_0 при приращении аргумента Δx называется число…

1) $\Delta y = f(\Delta x) - f(x_0)$; 2) $\Delta y = f(x_0) - f(x_0 - \Delta x)$;
3) $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$; 4) $\Delta y = f(x_0 - \Delta x) - f(x_0)$.

3.2. Производная функции $y = f(x)$ в точке x_0 определяется через …

1) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta x}{\Delta y}$; 2) $\lim\limits_{\Delta x\to x_0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$; 3) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$; 4) $\lim\limits_{\Delta x\to x_0}\dfrac{\Delta x}{\Delta y}$.

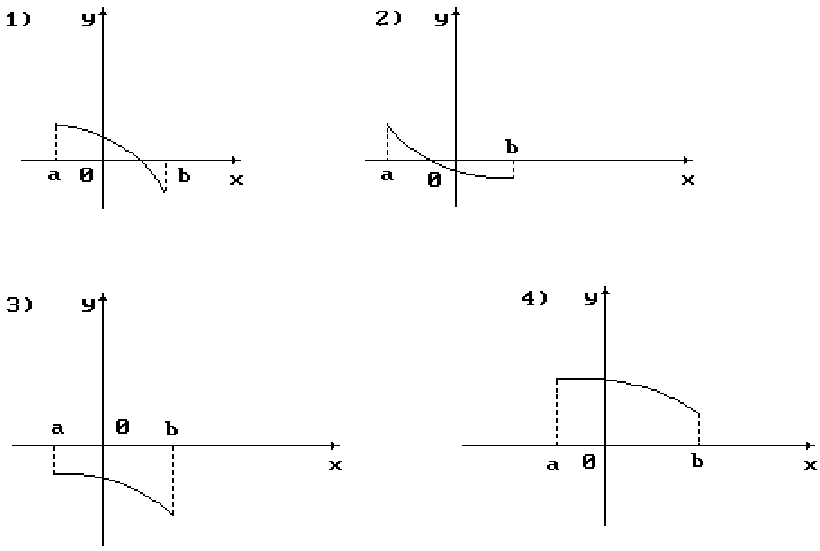
3.3. Функция $y = f(x)$, определенная в точке x_0 и в ее окрестности, называется дифференцируемой при $x = x_0$, если она …

1) непрерывна; 2) имеет производную; 3) имеет предел;
4) разрывна; 5) имеет экстремум; 6) периодическая.

3.4. Если $x = C$ - критическая точка функции $y = f(x)$, в которой $f'(C) = 0$, то в точке $x = C$ будет максимум, если

1) $f''(C) > 0$; 2) $f''(C) < 0$; 3) $f''(C) = 0$;
4) $f''(C) > 0$ при $x < C$ и $f''(C) < 0$ при $x > C$.

3.5. Укажите вид графика функции, для которой на всем отрезке $[a;b]$ одновременно выполняются три условия: y>0, $y' < 0$, $y'' < 0$.



1) только 4; 2) только 3; 3) только 2;
4) только 1; 5) только 3 и 2; 6) только 1 и 3.

3.6. Если приращение функции $y = f(x)$ в точке x_0 равно $\Delta y = A(x_0)\cdot\Delta x + \alpha(\Delta x)\cdot\Delta x$, то дифференциалом функции называется…

1) $A(x_0)\Delta x$ и обозначается $y'(x_0)$; 2) $\alpha(x)\Delta x$ и обозначается $y'(x_0)$;
3) $A(x_0)\Delta x$ и обозначается $df(x_0)$; 4) $\alpha(x)\Delta x$ и обозначается $df(x_0)$.

3.7. Действие нахождения производной функции называется …

1) дифференцированием; 2) потенцированием;
3) логарифмированием; 4) интегрированием.

3.8. Если функции $U(x)$ и $V(x)$ дифференцируемы, то $(U\cdot V)'$ и $\left(\dfrac{U}{V}\right)'$ вычисляются соответственно по формулам …

1) $U'\cdot V - V'\cdot U$ и $\dfrac{V'\cdot U - U'\cdot V}{V^2}$; 2) $U'\cdot V + V'\cdot U$ и $\dfrac{V'\cdot U - U'\cdot V}{V^2}$;

3) $U'\cdot V + V'\cdot U$ и $\dfrac{U'\cdot V + V'\cdot U}{V^2}$; 4) $U'\cdot V - V'\cdot U$ и $\dfrac{U'\cdot V + V'\cdot U}{V^2}$.

3.9. Если в точке x_0 к графику функции $y = f(x)$ проведена касательная, то производная и дифференциал функции геометрически истолковываются соответственно как …

1) приращение ординаты касательной на $[x_0; x_0 + \Delta x]$ и тангенс угла наклона касательной к оси Ox в точке x_0;

2) тангенс угла наклона касательной к оси Ox и приращение функции на $[x_0; x_0 + \Delta x]$;

3) тангенс угла наклона касательной к оси Ox в точке x_0 и приращение ординаты касательной на $[x_0; x_0 + \Delta x]$;

4) приращение функции на $[x_0; x_0 + \Delta x]$ и тангенс угла наклона касательной к оси Ox в точке x_0.

3.10. Если функция $y = f(x)$ непрерывна и монотонна в некоторой окрестности точки x_0 и при $x = x_0$ существует производная $f'(x_0) \neq 0$, тогда обратная функция $x = f^{-1}(y)$ имеет производную вычисляемую по формуле …

1) $\frac{df^{-1}(y_0)}{dy} = \frac{1}{f'(x_0)}$; 2) $\frac{df^{-1}(x_0)}{dx} = \frac{1}{f'(y_0)}$;

3) $\frac{df^{-1}(y_0)}{dx} = \frac{1}{f'(y_0)}$; 4) $\frac{df^{-1}(x_0)}{dx} = \frac{1}{f'(x_0)}$.

3.11. Если кривая расположена выше касательной, проведенной в любой ее точке, то график функции …

1) возрастает; 2) убывает; 3) выпуклый вниз;

4) выпуклый вверх; 5) имеет минимум; 6) имеет максимум.

3.12. Если функция $y = f(x)$ задана параметрически, т.е. $x = \varphi(t)$ и $y = \psi(t)$, где t – параметр, то $y'(x)$ вычисляется по формуле…

1) $\frac{d\psi(t)}{dt}$; 2) $\frac{d\psi(t)}{d\varphi(t)}$; 3) $\frac{d\varphi(t)}{d\psi(t)}$; 4) $\frac{d\varphi(t)}{dt}$.

3.13. Если при переходе через критическую точку $f'(x)$ меняет знак с «+» на «-», то это точка …

1) минимума; 2) максимума; 3) перегиба; 4) разрыва.

3.14. Угловой коэффициент нормали к графику функции $y = f(x)$ равен …

1) $tg\alpha$, где α - угол наклона нормали к положительному направлению оси абсцисс;

2) *-ctg* α, где α - угол между касательной и положительным направлением оси абсцисс;

3) - $f'(x_0)$, где x_0 - точка касания нормали к графику функции;

4) $f'(x)$.

3.15. Точка x_0 называется точкой минимума, если для всех точек из окрестности точки x_0 выполняется неравенство…

1) $f(x_0) > f(x)$; 2) $f'(x_0) > f'(x)$; 3) $f(x_0) < f(x)$; 4) $f'(x_0) < f'(x)$.

3.16. Достаточным условием выпуклости вниз функции $y = f(x)$ на $(a;b)$ является…

1) $f'(x) < 0$ в любой точке $x \in (a;b)$; 2) $f''(x) < 0$ в любой точке $x \in (a;b)$;

3) $f'(x) > 0$ в любой точке $x \in (a;b)$; 4) $f''(x) > 0$ в любой точке $x \in (a;b)$.

3.17. Точка x_0 называется точкой перегиба, если при переходе через эту точку график функции меняет…

1) возрастание на убывание; 2) выпуклость на вогнутость;

3) симметричность относительно оси *0y* на несимметричность;

4) периодичность на непериодичность.

3.18. Прямая $y = kx + b$ является наклонной асимптотой для функции $y = f(x)$, если …

1) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{x} = k$ и $\lim\limits_{x\to a}(f(x) - kx) = b$; 2) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{x} = b$ и $\lim\limits_{x\to a}(f(x) - kx) = k$;

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x} = k$ и $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x) - kx) = b$; 4) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x} = b$ и $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x) - kx) = k$.

3.19. Правило Лопиталя: если $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны и дифференцируемы в некоторой проколотой окрестности точки $x = C$, $g(x) \neq 0$ и $\lim\limits_{x\to C} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to C} g(x) = 0$, то…

1) $\lim\limits_{x\to C}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to C} f(x)}{\lim\limits_{x\to C} g(x)}$; 2) $\lim\limits_{x\to C}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to C}\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)'$;

3) $\lim\limits_{x\to C}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to C}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$; 4) $\lim\limits_{x\to C}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to C}\dfrac{g'(x)}{f'(x)}$.

3.20. Метод логарифмического дифференцирования состоит в …

1) дифференцировании после логарифмирования;
2) логарифмировании после дифференцирования;
3) потенцировании после логарифмирования;
4) потенцировании после дифференцирования.

3.21. Достаточным условием возрастания функции $y = f(x)$ на $(a;b)$ является:

1) $f'(x) < 0$ в любой точке $x \in (a;b)$; 2) $f''(x) < 0$ в любой точке $x \in (a;b)$;
3) $f'(x) > 0$ в любой точке $x \in (a;b)$; 4) $f''(x) > 0$ в любой точке $x \in (a;b)$.

3.22. Условия $y''=0$ или y'' не существует определяют…

1) необходимые условия существования экстремума;
2) достаточное условия монотонности функции;
3) достаточные условия выпуклости, вогнутости графика функции;
4) достаточные условия существования экстремума;
5) необходимые условия существования точки перегиба;
6) достаточные условия существования экстремума.

3.23. Вторая производная от пути по времени определяет …

1) скорость; 2) ускорение; 3) силу;
4) момент силы; 5) работу; 6) плечо.

3.24. Установить соответствие между функцией и ее производной

Функция	Производная
1. u^n	А. $\frac{u'}{u}$
2. $cosu$	Б. $u' \pm v'$
3. $arctg\ u$	В. $nu^{n-1}u'$
4. $ln\ u$	Г. $\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
5. a^u	Д. $\frac{u'}{2\sqrt{u}}$
	Е. $-\sin u \cdot u'$
	Ж. $a^u lna \cdot u'$
	З. $\frac{u'}{1+u^2}$

Ответ: 1 _, 2 _, 3 _, 4 _, 5 _.

3.25. Производная второго порядка от функции, заданной параметрически, определяется по формуле

1) $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{y_t''x_t' - x_t''y_t'}{(x_t')^3}$; 2) $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{x_t''y_t' - y_t''x_t'}{(x_t')^2}$;

3) $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{y_t''x_t' + x_t''y_t'}{(x_t')^4}$; 4) $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{x_t''y_t' - y_t''x_t'}{(x_t')^3}$.

3.26. При дифференцировании неявно заданной функции надо сначала…

1) прологарифмировать обе части уравнения;
2) продифференцировать обе части уравнения;

3) применить подстановку;

4) возвести обе части равенства в степень.

3.27. Критические точки 2–го рода функции $y = f(x)$ определяются из условия …

1) $y = 0$, либо y не существует;

2) $y' = 0$, либо y' не существует;

3) $y'' = 0$, либо y'' не существует;

4) $y''' = 0$, либо y''' не существует.

3.28. График функции выпукл вверх, если

1) $f'(x) > 0$; 2) $f'(x) < 0$; 3) $f''(x) > 0$;

4) $f''(x) < 0$4 5) $f'(x) = 0$; 6) $f''(x) = 0$.

3.29. Уравнение касательной к графику функции в точке x_o имеет вид

1) $y - y(x_o) = y'(x_o)(x - x_o)$; 2) $y - y(x_o) = -y'(x_o)(x - x_o)$;

3) $y - y(x_o) = \frac{1}{y'(x_0)}(x - x_0)$; 4) $y - y(x_o) = -\frac{1}{y'(x_0)}(x - x_0)$.

3.30. В экстремуме функции касательная к графику

1) параллельна оси Oy; 2) параллельна оси Ox;

3) проходит через начало координат;

4) симметрична биссектрисе $y = x$.

Контрольная работа № 2

Задание 1. Применяя определение производной, вывести формулу для вычисления производной функции

1.1. $y = \sqrt{2x}$. 1.2. $y = 4x^2 - 3 + 5$.

1.3. $y = 3^x$. 1.4. $y = \log_2(1 + 3x)$.

1.5. $y = \sqrt[3]{x^3 - 3x}$. 1.6. $y = x^3 + 5$.

1.7. $y = \sqrt{3x^2 + 2}$. 1.8. $y = 8x^2 + 3x - 2$.

1.9. $y = \frac{3}{x - 3}$. 1.10. $y = \frac{1}{x^2 + 3}$.

1.11. $y = ctg(3x + 2)$. 1.12. $y = x^3 + x^2 - 1$.

1.13 $y=\frac{2}{4-x}$.

1.14. $y=\sqrt{x^2-5}$.

1.15. $y=\sin 3x$.

1.16. $y=e^{x^2}$.

1.17. $y=\frac{1}{x^2+3}$.

1.18. $y=3\sin 5x$.

1.19. $y=3\sin x+\cos x$.

1.20. $y=-ctgx-x$.

Задание 2. Найти y'

2.1. а) $y=\sqrt[4]{(4x-3)^3}-2\sqrt{4x-3}$;

б) $y=e^{\cos^2 5x}$;

в) $y=\frac{1+tgx}{2-tgx}$;

г) $y=(ctg2x)^x$;

д) $\begin{cases} x=t+\ln\cos t \\ y=t-\ln\sin t \end{cases}$;

е) $xy+\sin(x+y)=0$;

2.2 а) $y=\left(3x^4-\frac{4}{\sqrt[x]{x}}+2\right)^5$;

б) $y=2^{tgx}+x\sin 2x$;

в) $y=\frac{\sqrt{1+tg^2x}}{\sqrt{1-tg^2x}}$;

г) $y=(ctgx)^{x^2}$;

д) $\begin{cases} x=2t-\sin 2t \\ y=\sin^3 t \end{cases}$;

е) $e^y\sin x=e^{-x}\cos y$.

2.3. а) $y=\frac{\sqrt{1+3x^2}}{2+3x^2}$;

б) $y=xarctg^3 5x+\ln tgx$;

в) $y=\ln\sqrt[5]{\left[\frac{1-5x}{1+5x}\right]^3}$;

г) $y=(1+x)^{\frac{1}{\ln x}}$;

д) $\begin{cases} x=t+\frac{1}{2}\sin 2t \\ y=\cos^3 t \end{cases}$;

е) $y\ln x-x\sin 2y=x+y$.

2.4. а) $y=(5x^2+4\sqrt[4]{x^5}+4)^3$;

б) $y=3^{2x}-2xtg3x$;

в) $y=e^{-x^2}\cos^3(2x+3)$;

г) $y=(\sin x)^{\sqrt{x}}$;

д) $\begin{cases} x = t^5 + 2t \\ y = t^3 + 8t - 1 \end{cases}$;

е) $y = e^x - e^y - x.$

2.5. а) $y = \arcsin^2 \dfrac{2x}{1+x^4}$;

б) $y = (e)^{-\cos^2 5x}$;

в) $y = \ln \sqrt[3]{\dfrac{1+x^2}{1-x^2}}$;

г) $y = (\sin x)^{\sqrt{x}}$;

д) $\begin{cases} x = \arcsin\left(t^2 - 1\right) \\ y = \arccos 2t \end{cases}$;

е) $e^{x+y} = (x-2y)^3.$

2.6. а) $y = \sqrt[3]{1 + x\sqrt{x+5}}$;

б) $y = e^{\frac{1}{x^2}+3}$;

в) $y = \dfrac{1+\ln 3x}{1-\ln 3x}$;

г) $y = (\sin 3x)^{\cos 2x}$;

д) $\begin{cases} x = \dfrac{1}{3}t^3 + \dfrac{1}{2}t^2 + t \\ y = \dfrac{1}{2}t^2 + \dfrac{1}{t} \end{cases}$;

е) $e^{x+3y} = tg\,\dfrac{y}{x}.$

2.7. а) $y = \ln\sqrt{\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x}}$;

б) $y = 3^{\cos x} - x\,sh 2x$;

в) $y = 2^{\sqrt{x}} + tg^2\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}$;

г) $y = (2x-1)^{\sqrt{x^2+1}}$;

д) $\begin{cases} x = t^2 + t + 1 \\ y = t^3 + t \end{cases}$;

е) $x^3 \cos y + y^3 \cos x = 5.$

2.8. а) $y = (\frac{1}{5}x^5 - 3x\sqrt[3]{x} - 4)^4$;

б) $y = arctg\sqrt{3x-2}$;

в) $y = \ln\sqrt[3]{\dfrac{x^2-3}{x^2+2}}$;

г) $y = (ctg 3x)^{\sqrt{x^2-3}}$;

д) $\begin{cases} x = ctg\, t \\ y = \dfrac{1}{\cos^2 t} \end{cases}$;

е) $\cos 3x + \sin 4y = e^{x-y}.$

2.9. а) $y = x\sqrt{\dfrac{2}{1-x}}$;

б) $y = 3^{\frac{1-x}{1+x}}$;

в) $y = \cos\ln^2 x$;

г) $y = (\ln x)^{3+x}$;

д) $\begin{cases} x=\dfrac{2-t}{2+t^2}; \\ y=\dfrac{t^2}{2+t^2} \end{cases}$ е) $xy+tgy-3^x=4$.

2.10. а) $y=\left(\dfrac{1}{3}x^3+5\sqrt[5]{x^2}-3\right)^3$; б) $y=\sqrt{x}ctg3x-3^{x^2}$;

в) $y=\ln\left(\sqrt[5]{\left(\dfrac{5x+3}{x^5+1}\right)^2}\right)$; г) $y=(\cos 3x)^{\sin 5x}$;

д) $\begin{cases} x=2\cos^3 2t; \\ y=\sin^3 2t \end{cases}$ е) $3^y+3^x=xy$.

2.11. а) $y=\dfrac{1}{\sqrt[3]{2x-2}}+\dfrac{5}{\sqrt[5]{\left(x^3+2\right)^2}}$; б) $y=\sin^3(tg3x)$;

в) $y=\dfrac{1+\sin 3x}{1-\sin 3x}$; г) $y=x^{\arcsin\sqrt{x}}$;

д) $\begin{cases} x=tg\,t \\ y=\dfrac{1}{\sin 2t} \end{cases}$; е) $\cos\dfrac{x}{y}=\dfrac{y}{x}$.

2.12. а) $y=\left(\dfrac{1}{4}x^4-\dfrac{2}{x\sqrt{x}}+3\right)^5$; б) $y=3^{\sqrt{x}}+\dfrac{1-\sin 3x}{1+\sin 3x}$;

в) $y=\ln\left(\sqrt[4]{\dfrac{1-8x}{x^3+1}}\right)$; г) $y=(tg3x)^{\ln x}$;

д) $\begin{cases} x=\sqrt{t-1}; \\ y=\dfrac{t}{\sqrt{t-1}} \end{cases}$ е) $e^x\sin y-e^y\cos x=0$.

2.13. а) $y=x+\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}$; б) $y=\ln ctg\sqrt[3]{x}$;

в) $y=\sin\sqrt{1+x^2}$; г) $y=tgx^{\frac{1}{x}}$;

д) $\begin{cases} x=\sqrt{t} \\ y=\sqrt[3]{t-1} \end{cases}$; е) $xe^y+ye^x=xy$.

2.14. а) $y=\left(4x^3+\dfrac{3}{x\sqrt[3]{x}}-2\right)^5$; б) $y=3^{x^2+1}-x\sin 5x$

в) $y=\ln\sqrt[6]{\dfrac{x^6-1}{6x+5}}$;

г) $y=\left(\sqrt{x}\right)^{\cos 3x}$;

д) $\begin{cases} x=\sqrt{1-t^2} \\ y=\arcsin t \end{cases}$;

е) $e^x arctge^y=\ln\sqrt{1+e^x}$.

2.15. а) $y=\sqrt{\dfrac{1+x^2}{1-x^2}}$;

б) $y=3^{\cos^2 x}$;

в) $y=ctg^3\ln\sqrt{x}$;

г) $y=x^{tgx}$;

д) $\begin{cases} x=\sqrt{t^3-1}; \\ y=\ln t \end{cases}$

е) $ch(x+y)-2x+5y=0$.

2.16. а) $y=\sqrt[3]{\dfrac{1+x^3}{1-x^3}}$;

б) $y=3^{tgx}-\sqrt{x}\cos 2x$;

в) $y=\ln tg^2\sqrt{x}$;

г) $y=(\arcsin x)^{\ln x}$;

д) $\begin{cases} x=\sin t \\ y=tg^2 t \end{cases}$;

е) $sh\left(x+y^2\right)+ch\left(x^2+y\right)=4$.

2.17. а) $y=\dfrac{1}{5}\left(\dfrac{1+x^2}{1-x^2}\right)^5$;

б) $y=3^{\sqrt{x}}+\arcsin\dfrac{1}{x}$;

в) $y=3^{4+\ln^2 x}$;

г) $y=x^{arctgx}$;

д) $\begin{cases} x=\sqrt{t-1} \\ y=\dfrac{t-1}{\sqrt{t}} \end{cases}$;

е) $y^2\sin x+\cos(x-y)-x^3=0$.

2.18. а) $y=\sqrt[4]{x^4-4x^3}-\sqrt[3]{(2x-3)^2}$;

б) $y=(arcctg\,3x)^{4x}$;

в) $y=\ln^2\dfrac{1+e^{2x}}{1-e^{2x}}$;

г) $y=2^{x^3+1}-x^2\sin 3x$;

д) $\begin{cases} x=\cos^2 t \\ y=tg^2 t \end{cases}$;

е) $xy^2+\cos(2x+y)=0$.

2.19. а) $y=\dfrac{3x}{\sqrt[3]{2+x}}-6\sqrt[3]{2+x}$;

б) $y=x^2\arcsin x+\sqrt{1-x^2}$;

в) $y=\sin^3\sqrt{\ln\frac{1}{x}+2}$;

г) $y=x^{tgx}$;

д) $\begin{cases} x=\sqrt{t-3} \\ y=\ln(t-2) \end{cases}$;

е) $e^{xy}-x^2y^2=0$.

2.20. а) $y=\left(\frac{1}{4}x^4-\frac{4}{\sqrt[4]{x}}-5\right)^5$;

б) $y=x^3tg3x+2^{x^2-3}$;

в) $y=\ln\sqrt{\left(\frac{x^6-3}{6x+2}\right)^3}$;

г) $y=(arctg3x)^{\sin 5x}$;

д) $\begin{cases} x=\sin 2t \\ y=\ln\cos 2t \end{cases}$;

е) $y^2x=\cos\left(x+y^2\right)$.

Задание 3. Вычислить значения производной функции $f(x)$ в точке $x=x_0$.

3.1. $y=\ln tg\frac{x}{2},\quad x=\frac{\pi}{2}$.

3.2. $y=\arcsin\frac{\sin x}{\sqrt{1+\sin^2 x}},\quad x=\frac{\pi}{4}$.

3.3. $y=e^{\sqrt{\ln x}},\quad x=e$.

3.4. $y=(\ln x)^{\sqrt{x}},\quad x=e$.

3.5. $y=\arg tg\sqrt{4x^2-1},\quad x=1$.

3.6. $y=\frac{x\ln x}{e^{x^2}},\quad x=1$.

3.7. $y=\frac{e^x-e^{-x}}{\sin x^2},\quad x=\frac{\pi}{4}$.

3.8. $y=\frac{e^x\arcsin x^3}{\sqrt{1+x^2}},\quad x=0{,}5$.

3.9. $y=x^3arctg\ x^3,\quad x=-1$.

3.10. $y=\left(x^2+1\right)^{\sin x},\quad x=0$.

3.11. $y=\cos^2\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}},\quad x=1$.

3.12. $y=(x+3)^{\cos x},\quad x=0$.

3.13. $y=e^x\sqrt{1-e^{2x}},\ x=\frac{1}{2}$.

3.14. $y=x^{x^2},\quad x=1$.

3.15. $y=(\cos x)^{\sin x},\quad x=0$.

3.16. $y=(\sqrt{x})^{\ln x},\quad x=1$.

3.17. $y=arctg\frac{2x^4}{1-x^8},\quad x=0$.

3.18. $y=x^{x^3},\quad x=1$.

3.19. $y=b\arcsin\frac{x}{b}-\sqrt{b^2-x^2},\ x=\frac{b}{a}$.

3.20. $y=e^x\sin\sqrt{x^2+1},\quad x=0$.

Задание 4. Найти дифференциал функции

4.1 $y=\sqrt{x}-(1+x)arctg\sqrt{x}.$

4.2. $y=x(\sin\ln x-\cos\ln x).$

4.3. $y=x\sqrt{x^2-1}+\ln(x+\sqrt{x^2-1}).$

4.4. $y=\cos x\ln tgx-\ln tg\frac{x}{2}.$

4.5. $y=\sqrt{3+x^2}-x\ln(x+\sqrt{3+x^2}).$

4.6. $y=e^x(\cos 2x+\sin 2x).$

4.7. $y=arctg^2(\sqrt{x}+\ln\frac{1}{x}).$

4.8. $y=arcctg\,\dfrac{x^2-3}{x}.$

4.9. $y=\ln\sqrt[5]{\dfrac{x+2}{x-2}}.$

4.10. $y=\sqrt{ctg^3(\sin 2x)+1}.$

4.11. $y=\ln tg\frac{x}{2}-\dfrac{x}{\sin x}.$

4.12. $y=\dfrac{\arccos(x^2-1)}{\sqrt{2}\cdot x^2}.$

4.13. $y=x\arcsin\frac{1}{x}.$

4.14. $y=\sqrt{1+2x}-\ln(x+\sqrt{1+2x}).$

4.15. $y=tg(2\arccos\sqrt{1+2x^2}).$

4.16. $y=x^2arctg\sqrt{x^2-1}.$

4.17. $y=\ln^2(\sin 3x+\cos 4x).$

4.18. $y=\ln(e^{3x}+\sqrt{e^{2x}}-1).$

4.19. $y=\arcsin^2 e^{-3x+1}.$

4.20. $y=e^{2\sqrt{x-1}}\sqrt{x-1}.$

Задание 5. Найти $\dfrac{d^2y}{dx^2}$

5.1. а) $y=e^{-x}\sin x;$ б) $x=\dfrac{2-t}{2+t^2},\quad y=\dfrac{t^2}{2+t^2}.$

5.2. а) $y=\ln\ln 3x;$ б) $x=2\cos^3 2t,\quad y=\sin^3 2t.$

5.3. а) $y=e^{5x}\sin 2x;$ б) $x=arctg\,t,\quad y=\ln(1+t^2).$

5.4. а) $y=xe^{\frac{1}{x}};$ б) $x=ctg\,t,\quad y=\dfrac{1}{\cos^2 t}.$

5.5. а) $y=arctg\,e^x;$ б) $x=3\cos^2 t,\quad y=2\sin^3 t.$

5.6. а) $y=\cos^2\ln x;$ б) $x=1+\sin t\cos 2t,\ y=1-\sin 2t\,ctg\,t.$

5.7. а) $y=x^3\ln x;$ б) $x=t+\dfrac{1}{2}\sin 2t,\quad y=\cos^3 t.$

5.8. а) $y=\sqrt[3]{(1-x)^2}$; б) $x=\arcsin\sqrt{1-t^2}, \quad y=\arccos 2t.$

5.9. а) $y=\ln ctg 2x$; б) $x=\arcsin t, \quad y=\arcsin\sqrt{1-t^2}.$

5.10. а) $y=\ln tg 2x$; б) $x=a(\varphi-sin\varphi), \ y=a(1-cos\varphi)$

5.11. а) $y=\arcsin e^x$; б) $x=\cos 2t, \quad y=t-\sin 2t.$

5.12. а) $y=\sin^2 e^x$; б) $x=\ln(1+t^2), \quad y=t-arctg\, t.$

5.13. а) $y=\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$; б) $x=t-\sin t, \quad y=1-\cos t.$

5.14. а) $y=x^2\sin 3x$; б) $x=\dfrac{1+\ln t}{t^2}, \quad y=\dfrac{3+2\ln t}{t}.$

5.15. а) $y=x\, arctg\, x$; б) $x=e^{2t}, \quad y=\cos t.$

5.16. а) $y=arctg\, x^2$; б) $x=2t-\sin 2t, \quad y=\sin^3 t.$

5.17. а) $y=e^{ctg 5x}$; б) $x=3\cos t, \quad y=4\sin^2 t.$

5.18. а) $y=e^{-x}\sin 3x$; б) $x=t+\ln t, \quad y=t-\ln t.$

5.19. а) $y=e^{3x}\cos 5x$; б) $x=a\cos t, \ y=\dfrac{a\sin^3 t}{2+\sin t}.$

5.20. а) $y=x\sqrt{1+x^2}$; б) $x=t+ln\, cos\, t, \ y=t-ln\, sin\, t.$

адание 6. Вычислить с помощью дифференциала приближенное значение функции в заданной точке

6.1. $y=\dfrac{1}{\sqrt{2x+1}}, \quad x=1{,}58.$

6.2. $y=\sqrt[4]{2x-\sin\frac{\pi x}{2}}, \ x=1{,}02.$

6.3. $y=\sqrt{1+x+\sin x}, \ x=0{,}01.$

6.4 . $y=\sqrt[3]{3x+\cos x}, \ x=0{,}01.$

6.5. $y=\sqrt{4x-3}, x=1{,}78.$

6.6. $y=x^5+\sqrt{6+x}, \ x=2{,}997.$

6.7. $y=\sqrt[5]{x^2+28}, \ x=1{,}99.$

6.8. $y=\dfrac{1}{\sqrt{2x^2+x+1}}, x=1{,}016.$

6.9. $y=\sqrt{x}, \quad x=8{,}86.$

6.10. $y=\sqrt{x^2+x+3}, x=1{,}97.$

6.11. $y = x^2 + \sqrt{x}$, $x = 1{,}021$.

6.12. $y = \dfrac{x + \sqrt{5 - x^2}}{2}$, $x = 0{,}98$.

6.13. $y = \sqrt[3]{x^3 + 7x}$, $x = 1{,}012$.

6.14. $y = \arcsin x$, $x = 0{,}08$.

6.15. $y = \arccos x$, $x = 0{,}6$.

6.16. $y = \sqrt[3]{x^2}$, $x = 1{,}03$.

6.17. $y = \sqrt[5]{x}$, $x = 234$.

6.18. $y = \sqrt{x^2 + 5}$, $x = 1{,}97$.

6.19. $y = \sqrt{4x - 1}$, $x = 2{,}56$.

6.20. $y = \sqrt[3]{x^2 + 2x + 5}$, $x = 0{,}97$.

Задание 7. Найти пределы функций, применяя правило Лопиталя

7.1. а) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3 - 4x^2 + 4x}{x^2 - 10x + 16}$, б) $\lim\limits_{x \to 0} x ctg\, 2x$.

7.2. а) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^4 - 16}{x^3 + 5x^2 - 6x - 16}$, б) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos 2x}{1 - \cos 3x}$.

7.3. а) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\ln^2 x}{x}$, б) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x\, arctgx}{x^3}$,

7.4. а) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^5 - 5x + 4}{(x - 1)^2}$, б) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{arctg\, 2x}{arctg\, 5x}$,

7.5. а) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x}{\ln^2(1 + x)}$, б) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{tgx - \sin x}{x - \sin x}$,

7.6. а) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - \sin x}{3x^2}$, б) $\lim\limits_{x \to +0} \sqrt[3]{x} \ln x$,

7.7. а) $\lim\limits_{x \to 1} (2 - x)^{tg \frac{\pi x}{2}}$, б) $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{1}{\ln x} - \dfrac{x}{x - 1} \right)$,

7.8. а) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{\sin^2 x}$, б) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{1}{x \sin x} - \dfrac{1}{x^2} \right)$,

7.9. а) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln \cos x}{x^2}$, б) $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{x}{x - 1} - \dfrac{1}{\ln x} \right)$,

7.10. а) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln \sin x}{\ln \sin 2x}$, б) $\lim\limits_{x \to +\infty} x^3 e^{-2x}$, 7.11. а) $\lim\limits_{x\to 0}(xctg\pi x)$, б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\pi-2arctgx}{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$,

7.12. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x-tgx}$, б) $\lim\limits_{x\to 0}(\arcsin x\cdot ctgx)$,

7.13. а) $\lim\limits_{x\to +0}\dfrac{e^{\sqrt{x}}-1}{\sqrt{\sin 2x}}$, б) $\lim\limits_{x\to 0}ctgx\ln\left(x+e^{x}\right)$,

7.14. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4-4x+5}{x^5+3}$, б) $\lim\limits_{x\to 0}x^2e^{\frac{1}{\sqrt{x}}}$,

7.15. а) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x}{\ln(1+x)}$, б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx-\sin x}{x\sin x}$,

7.16. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x}$, б) $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[3]{x}\cdot\ln x$,

7.17. а) $\lim\limits_{x\to 1}(2-x)^{tg\frac{\pi x}{2}}$, б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{tgx}-e^{x}}{tgx-x}$,

7.18. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x\, e^{2x}-x}{5x^2+x^3}$, б) $\lim\limits_{x\to 0}(\ln(x+e))^{\frac{1}{x}}$,

7.19. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e-(1+x)^{\frac{1}{x}}}{x}$, б) $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{5}{x^2-x-6}\right)$,

7.20. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln\left(1+x^2\right)}{\ln\left(\frac{\pi}{2}-arctgx\right)}$, б) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\pi-2x)tgx$.

Решение типового варианта контрольной работы № 2

Задание 1. Применяя определение производной, вывести формулу для вычисления производной функций: а) $y=a^{x}$, б) $y=\dfrac{1}{x^2}$.

Решение. а) $\Delta y=a^{x+\Delta x}-a^{x}=a^{x}\left(a^{\Delta x}-1\right)=\{$ в силу

$a^{\Delta x}-1\approx\Delta x\ln a,\ \Delta x\to 0\ \}=\Delta x\ln a\cdot a^{x},\ \Delta x\to 0.$ Тогда

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^{x}\Delta x\ln a}{\Delta x}=a^{x}\ln a.$$

Правая часть в точке x есть число. Значит, предел левой части существует, и он же является определением производной от функции

Таким образом, $\quad \left(a^x\right)' = a^x \ln a.$

$$\text{б) } \Delta y = \frac{1}{(x+\Delta x)^2} - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - x^2 - 2x\Delta x - (\Delta x)^2}{x^2(x+\Delta x)^2} = -\frac{2x\Delta x - (\Delta x)^2}{x^2(x+\Delta x)^2}.$$

$$y' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2x\Delta x - (\Delta x)^2}{\Delta x\cdot x^2(x+\Delta x)^2} = -\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2}{x(x+\Delta x)^2} - \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{x^2(x+\Delta x)^2} =$$

$$= -\frac{2}{x^3} \Rightarrow \left(\frac{1}{x^2}\right)' = -\frac{2}{x^3}.$$

Задание 2. Найти производные y' данных функций

а) $y = \left(2x^5 - 3\sqrt{x^3} + 1\right)^6$; б) $y = e^{-x^2}\sin^3(4-5x)$, в) $y = \dfrac{tg3x}{\ln\cos 2x}$,

г) $y = (\sin x)^x$. д) $\begin{cases} x = \sin^2 t \\ y = \sin 2t \end{cases}$; е) $\sin x\cos y + xy^2 = 7$.

Решение. а) $\dfrac{dy}{dx} = 6\left(2x^5 - 3x^{\frac{3}{2}} + 1\right)^5 \cdot \left(2x^5 - 3x^{\frac{3}{2}} + 1\right)' =$

$$= 6(2x^5 - 3x^{\frac{3}{2}} + 1)^5\left(10x^4 - \frac{9}{2}x^{\frac{1}{2}}\right) = 6\left(2x^5 - 3\sqrt{x^3} + 1\right)^5\left(10x^4 - \frac{9}{2}\sqrt{x}\right).$$

б) $y' = \left(e^{-x^2}\right)'\sin^3(4-5x) + e^{-x^2}\left(\sin^3(4-5x)\right)' = -2xe^{-x^2}\sin^3(4-5x) +$
$+ e^{-x^2}\cdot 3\sin^2(4-5x)\cos(4-5x)(-5) = -e^{-x^2}\sin^2(4-5x)[2x\sin(4-5x) + 15\cos(4-5x)].$

в) $$y' = \frac{(tg3x)'\ln\cos 2x - (\ln\cos 2x)'\,tg\,3x}{\ln^2\cos 2x} = \frac{\frac{1}{\cos^2 3x}3\ln\cos 2x - \frac{1}{\cos 2x}(-\sin 2x)\cdot 2tg\,3x}{\ln^2\cos 2x} =$$

$$= \frac{3\cos 2x\ln\cos 2x + \sin 2x\sin 6x}{\cos 2x\cdot\cos^2 3x\cdot\ln^2\cos 2x}.$$

г) Прологарифмируем обе части уравнения:

$$\ln y = \ln(\sin x)^x = x\ln\sin x.$$

Дифференцируем неявную функцию по переменной x

$$\frac{1}{y}\cdot y' = 1\cdot\ln\sin x + x\cdot\frac{\cos x}{\sin x};\;\; y' = y\left(\ln\sin x + x\cdot\frac{\cos x}{\sin x}\right);$$

$$y' = (\sin x)^x\left(\ln\sin x + x\cdot\frac{\cos x}{\sin x}\right);\;\; y' = (\sin x)^x\ln\sin x + x(\sin x)^{x-1}\cdot\cos x.$$

д) $y'_x = \dfrac{2\cos 2t}{2\sin t\cdot\cos t} = 2ctg\,2t.$

е) Функция задана неявно. Дифференцируем обе части равенства по x, считая y функцией x.

$$(\sin x)'\cos y + \sin x(\cos y)' + x'y^2 + x\left(y^2\right)' = 7'.$$

$$\cos x\cos y - \sin x\sin y\cdot y' + y^2 + 2xyy' = 0 \Rightarrow$$

$$y'(2xy - \sin x\sin y) = -y^2 - \cos x\cos y \Rightarrow\;\; y' = \frac{y^2 + \cos x\cos y}{\sin x\sin y - 2xy}.$$

Задание 3. Вычислить значения производной функции $y = \ln ctg\frac{x}{4}$ в точке $x=\pi$.

Решение. $y' = \dfrac{1}{ctg\frac{x}{4}}\left(-\dfrac{1}{\sin^2\frac{x}{4}}\right)\cdot\dfrac{1}{4} = -\dfrac{1}{2\sin\frac{x}{2}}$, $y'(\pi) = -\dfrac{1}{2}.$

Задание 4. Найти дифференциал функции $y = tg^3\sqrt{\ln\frac{1}{x}+5}.$

Решение.

$$dy = \left(tg^3\sqrt{\ln\tfrac{1}{3}+5}\right)' dx = 3tg^2\sqrt{\ln\tfrac{1}{x}+5}\cdot\frac{1}{\cos^2\sqrt{\ln\frac{1}{x}+5}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\ln\frac{1}{x}+5}}\cdot\left(\frac{1}{\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)\right)dx =$$

$$= -\frac{3}{2}\cdot\frac{\sin^2\sqrt{\ln\frac{1}{x}+5}}{\cos^4\sqrt{\ln\frac{1}{x}+5}}\cdot\frac{x}{\sqrt{\ln\frac{1}{x}+5}}dx.$$

Задание 5. Найти производную второго порядка $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ функций:

а) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x-1} + e^x\sin(2x+1)$, и б) заданной параметрически $\begin{cases} x = e^t\sin t, \\ y = e^t\cos t. \end{cases}$

Решение. а) Согласно определению, для того, чтобы найти $f''(x)$, сначала нужно найти $f'(x)$, а затем полученную функцию продифференцировать еще один раз

$$f'(x)=\frac{2x(x-1)-\left(x^2+1\right)\cdot 1}{(x-1)^2}+e^x\,sin(2x+1)+e^x\cdot 2cos(2x+1)=$$

$$=\frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2}+e^x[sin(2x+1)+2cos(2x+1)],$$

$$f''(x)=\frac{2(x-1)(x-1)^2-\left(x^2-2x-1\right)\cdot 2(x-1)}{(x-1)^4}+e^x[sin(2x+1)+2cos(2x+1)]+$$

$$+e^x[2cos(2x+1)-4sin(2x+1)]=\frac{2(x-1)\left[(x-1)^2-\left(x^2-2x-1\right)\right]}{(x-1)^4}+$$

$$+e^x[4cos(2x+1)-3sin(2x+1)]=\frac{4}{(x-1)^3}+e^x[4cos(2x+1)-3sin(2x+1)]$$

б) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\left(e^t\,cos\,t\right)'}{\left(e^t\,sin\,t\right)'}=\dfrac{e^t\,cos\,t-e^t\,sin\,t}{e^t\,sin\,t+e^t\,cos\,t}=\dfrac{cos\,t-sin\,t}{sin\,t+cos\,t}$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dt}\left(\frac{\cos t-\sin t}{\cos t+\sin t}\right)\cdot\frac{1}{x_t'}=\frac{-(\cos t+\sin t)^2-(\cos t-\sin t)^2}{(\cos t+\sin t)^2\cdot e^t(\cos t+\sin t)}=-\frac{2}{e^t(\cos t+\sin t)^3}.$$

Задание 6. Вычислить приближенно с помощью дифференциала $tg\,44{,}8°$.

Решение.

$$tg\,44{,}8^\circ\approx tg\,45^\circ+(tgx)'\big|_{x=45^\circ}\cdot\Delta x=\left\{\Delta x=-0{,}2^o=-0{,}2\frac{\pi}{180}=-0{,}0034\right\}=$$

$$=1-\frac{1}{\cos^2 45^\circ}\cdot 0{,}0034=1-\frac{1}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}\cdot 0{,}0034=0{,}9971.$$

Задание 7. Пользуясь правилом Лопиталя, найти пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{7x^5-7}{\ln\,x}=\left\{\dfrac{0}{0}\right\}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}((\pi-2arctgx)\ln\,x)=\{0\cdot\infty\}$

Решение. а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{7x^5-7}{\ln\,x}=\left\{\dfrac{0}{0}\right\}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{35x^4}{\frac{1}{x}}=35\lim\limits_{x\to 1}x^5=35.$

б) $$\lim_{x\to\infty}((\pi-2arctgx)\ln x)=\{0\cdot\infty\}=\lim_{x\to\infty}\frac{\pi-2arctg\,x}{\frac{1}{\ln x}}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(\pi-2arctg\,x)'}{\left(\frac{1}{\ln x}\right)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{-2}{1+x^2}}{\frac{-1}{\ln^2 x}\cdot\frac{1}{x}}==\lim_{x\to\infty}\frac{x\ln^2 x}{1+x^2}=$$

$$=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=2\lim_{x\to\infty}\frac{\ln^2 x+x\frac{2\ln x}{x}}{2x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln^2 x+2\ln x}{x}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2\ln x}{x}+\frac{2}{x}}{1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x+1}{x}=2\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0.$$

Контрольная работа № 3

Задание 1. Провести полное исследование функций и построить их графики

1.1. а) $y=\dfrac{x^3+4}{x^2}$, б) $y=\ln\left(x^2-2x+2\right)$.

1.2. а) $y=\sqrt[3]{1-x^3}$, б) $y=x+e^{-x}$.

1.3. а) $y=\dfrac{1}{x}+4x^2$, б) $y=\ln\left(2x^2+3\right)$.

1.4. а) $y=\dfrac{x^3+1}{x^2}$, б) $y=e^{2x-x^2}$.

1.5. а) $y=\dfrac{x^3}{2(x+1)^2}$, б) $y=\ln x-\ln(x-1)$.

1.6. а) $y=\dfrac{x^3}{x^2-4}$, б) $y=(3-x)\cdot e^{x-2}$.

1.7. а) $y=\dfrac{x^2+x}{x-1}$, б) $y=\dfrac{\ln x}{x}$.

1.8. а) $y=\dfrac{x^4}{x^3-1}$, б) $y=x^2\cdot e^{-x}$.

1.9. а) $y=\dfrac{x^3}{(x-2)^2}$, б) $y=x+\dfrac{\ln x}{x}$.

1.10. а) $y=\dfrac{x^3}{x-1}$, б) $y=\dfrac{1}{e^x-1}$.

1.11. а) $y=\dfrac{x^4}{(1+x)^3}$, б) $y=x-2arctgx$.

1.12. а) $y=\dfrac{x^2(x-1)}{(x+1)^2}$, б) $y=\dfrac{e^x}{x}$.

1.13. а) $y=\dfrac{(1+x)^4}{(1-x)^4}$, б) $y=3-3\ln\frac{x}{x+1}$.

1.14. а) $y=\dfrac{2x}{\sqrt{x-1}}$, б) $y=x\cdot e^{\frac{1}{x}}$.

1.15. а) $y=\dfrac{2x-1}{(x-1)^2}$, б) $y=2\ln\frac{x+3}{x}-3$.

1.16. а) $y=\dfrac{x^2+1}{x-1}$, б) $y=x+\ln\left(x^2-1\right)$.

1.17. а) $y=\dfrac{x}{(x-1)^2}$, б) $y=\ln\frac{1+x}{1-x}$.

1.18. а) $y=\dfrac{x^2-4}{x^2-9}$, б) $y=x^3\cdot e^{-x}$.

1. 19. а) $y=\dfrac{(x+1)^3}{(x-1)^2}$, б) $y=2\ln\frac{x}{x+1}-1$.

1.20. а) $y=\dfrac{(x+1)^2}{(x-1)^2}$, б) $y=\dfrac{e^{2-x}}{2-x}$.

Задание 2. Найти наибольшее и наименьшее значения функции на заданном отрезке

2.1. $y=x^2+\dfrac{16}{x}-6$, $[1;4]$. 2.2. $y=\sqrt[3]{2(x-2)^2(8-x)}-1$, $[0;6]$.

2.3. $y=4-x-\dfrac{4}{x^2}$, $[1;4]$. 2.4. $y=\dfrac{2\left(x^2+3\right)}{x^2-2x+5}$, $[-3;3]$.

2.5. $y = 2\sqrt{x} - x,\ [0;4]$.

2.6. $y = x - 4\sqrt{x} + 5,\ [1;9]$.

2.7. $y = \dfrac{10x}{1 + x^2},\ [0;3]$.

2.8. $y = 2x^2 + \dfrac{108}{x} - 59,\ [2;4]$.

2.9. $y = 3 - x - \dfrac{4}{(x+2)^2},\ [-1;2]$.

2.10. $y = \sqrt[3]{2x^2(x-3)},\ [-1;6]$.

2.11. $y = x - 4\sqrt{x+2} + 8,\ [-1;7]$.

2.12. $y = \dfrac{4x}{4 + x^2},\ [-4;2]$.

2.13. $y = \sqrt[3]{2(x+1)^2(x-2)}, [-2;5]$.

2.14. $y = \dfrac{4}{x^2 - 8x - 15},\ \left[-2;-\dfrac{1}{2}\right]$.

2.15. $y = \sqrt[3]{2(x-2)^2(5-x)},\ [1;5]$.

2.16. $y = \sqrt[3]{2(x-1)^2(x-4)},\ [0;4]$.

2.17. $y = -\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{8}{x} + 8,\ [-4;-1]$.

2.18. $y = \dfrac{-2x(2x+3)}{x^2 + 4x + 5},\ [-2;1]$.

2.19. $y = \sqrt[3]{2x^2(x-6)^2},\ [-2;1]$.

2.20. $y = \sqrt[3]{2(x+2)^2(1-x)},\ [-3;4]$.

Задание 3. Решить текстовые задачи о наибольших и наименьших значениях величин

3.1. Из углов квадратного листа картона размером *a*×*a* (см^2) нужно вырезать одинаковые квадраты так, чтобы, согнув лист, получить коробку наибольшего объема. Какова должна быть сторона вырезанного квадрата?

3.2. Полотняный шатер объемом *V* имеет форму прямого кругового конуса. Каково должно быть отношение высоты конуса к радиусу основания, чтобы на шатер ушло наименьшее количество полотна?

3.3. В прямоугольной системе координат через точку (1;4) проведена прямая, пересекающаяся с положительными полуосями координат. Написать уравнение прямой, если сумма отрезков, отсекаемых ею на осях координат, принимает наименьшее значение.

3.4. Из полосы шириной 11 см требуется изготовить открытый сверху желоб, поперечное сечение которого имеет форму равнобокой трапеции. Дно желоба должно иметь ширину 7 см. Какова должна быть ширина желоба наверху, чтобы он вмещал наибольшее количество воды?

3.5. Окно имеет форму прямоугольника, завершенного полукругом. Определить размеры окна при заданном периметре, имеющего наибольшую площадь.

3.6. Определить наибольшую площадь равнобедренного треугольника, вписанного в круг радиуса R.

3.7. В прямоугольной системе координат через точку (1;2) проведена прямая с отрицательным угловым коэффициентом, которая вместе с осями координат образует треугольник. Каковы должны быть отрезки, отсекаемые прямой на осях координат, чтобы площадь треугольника была наименьшей?

3.8. Определить наименьшую площадь равнобедренного треугольника, описанного вокруг окружности радиуса R.

3.9. Из полосы жести шириной 30 см требуется сделать открытый сверху желоб, поперечное сечение которого имеет форму равнобочной трапеции. Дно желоба должно иметь ширину 10 см. Каков должен быть угол, образуемый стенками желоба с дном, чтобы он вмещал наибольшее количество воды?

3.10. Определить максимальную площадь четырехуголь-ника, вписанного в круг радиуса R.

3.11. Требуется изготовить открытый цилиндрический бак данного объема V, причем стоимость квадратного метра материала, из которого изготовляется дно бака, равна p_1 рублей, а стоимость квадратного метра материала, идущего на стенки, p_2 рублей. При каком отношении радиуса дна к высоте бака затраты на материал будут наименьшими?

3.12. Какой из прямоугольных треугольников с заданным периметром P имеет наибольшую площадь?

3.13. Из круглого бревна диаметром d требуется вырезать балку прямоугольного сечения с основанием a и высотой h. Прочность балки пропорциональна ah^2. При каких значениях a и h прочность балки будет наименьшей?

3.14. Из круга вырезан сектор с центральным углом α. Из оставшейся части круга свернута воронка. При каком значении угла α вместимость воронки будет наибольшей?

3.15. Найти отношение радиуса цилиндра к его высоте, при котором цилиндр объемом V имеет наименьшую полную поверхность.

3.16. В эллипс $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ вписать прямоугольник наибольшей площади со сторонами, параллельными осям эллипса.

3.17. В полукруг вписана трапеция, основание которой есть диаметр полукруга. Определить угол трапеции при основании так, чтобы площадь трапеции была наибольшей.

3.18. Сечение тоннеля имеет форму прямоугольника, завершенного полукругом. Периметр сечения 18 см. При каком радиусе полукруга площадь сечения будет наибольшей?

3.19. Из данного круга вырезать такой сектор, чтобы, свернув его, получить конус с наибольшим объемом.

3.20. Два самолета летят в одной плоскости прямолинейно под углом 120° с одинаковой скоростью V км в час. В некоторый момент один самолет пришел в точку пересечения линий движения, а другой не дошел до нее на a км. Через какой промежуток времени расстояние между самолетами будет наименьшим и чему оно равно?

Решение типового варианта контрольной работы № 3

Задание 1. Построить графики функции а) $y=\frac{x^4}{x^3+1}$; б) $y=x\ln^2|x|$.

Решение. а) $D\{f\}=(-\infty,1)\cup(-1,+\infty)$ – область определения функции y.

2. $y(-1-0)=\lim\limits_{x\to-1,\, x<-1}\frac{x^4}{x^3+1}=-\infty$, $y(-1+0)=\lim\limits_{x\to-1,\, x>-1}\frac{x^4}{x^3+1}=+\infty$.

Прямая x = -1 - есть вертикальная асимптота.

Функция y непрерывна в области $D\{f\}$, как элементарная функция.

3. Исследуемая функция не является ни четной, ни нечетной и ни периодической.

4. Вычислим производную от функции:

$$y'=\frac{4x^3(x^3+1)-3x^2\cdot x^4}{(x^3+1)^2}=\frac{x^6+4x^3}{(x^3+1)^2}=\frac{x^3(x^3+4)}{(x^3+1)^2}$$

Производная обращается в ноль при $x_1 = 0$ и $x_2 = \sqrt[3]{-4} = -\sqrt[3]{4}$, при этом $y(0)=0$, $y(-\sqrt[3]{4}) = -\frac{4}{3}\sqrt[3]{4}$. $y'(x<0)<0$ и $y'(x>0)>0$, значит, точка (0,0) – точка минимума. Далее $y'(x<-\sqrt[3]{4})>0$ и $y'(x>-\sqrt[3]{4})<0$, следовательно, точка $(-\sqrt[3]{4}, -\frac{4}{3}\sqrt[3]{4})$ – точка максимума.

5. $y = 0 \Rightarrow \dfrac{x^4}{x^3+1} = 0 \Rightarrow x = 0$. Значит, точка (0;0) - есть точка касания функции с осью Ox.

6. $$y'' = \left[\frac{x^6+4x^3}{\left(x^3+1\right)^2}\right]' = \frac{\left(6x^5+12x^2\right)\left(x^3+1\right)^2 - 2\left(x^3+1\right)3x^2\left(x^6+4x^3\right)}{\left(x^3+1\right)^4} =$$

$$= 6\frac{x^8+3x^5+2x^2-x^8-4x^5}{\left(x^3+1\right)^3} = -6\frac{x^2\left(x^3-2\right)}{\left(x^3+1\right)^3}$$

Вторая производная функции y обращается в ноль при $x_1 = 0$ и $x_2 = \sqrt[3]{2}$. $y''\left(\sqrt[3]{2}-0\right) > 0$ и $y''(\sqrt[3]{2}+0) < 0$, $y\left(\sqrt[3]{2}\right) = \dfrac{2\sqrt[3]{2}}{2+1} = \dfrac{2}{3}\sqrt[3]{2}$.

Точка $\left(\sqrt[3]{2}, \dfrac{2}{3}\sqrt[3]{2}\right)$ – точка перегиба.

7. Уравнение наклонной асимптоты $y = kx + b$, где

$$k = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x\to\pm\infty}[f(x) - kx].$$

$$k = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^4}{x(x^3+1)} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{x^3}} = 1.$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{x^4}{x^3+1} - x\right] = -\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{x^3+1} = -\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{3x^2} = 0.$$

Предел вычислен по правилу Лопиталя. Тогда $y = x$ – наклонная асимптота.

$$\left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^4}{x^3+1} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^4}} = \pm\infty.$$

Полученные данные исследования удобно внести в таблицу

x	$(-\infty;-\sqrt[3]{4})$	$-\sqrt[3]{4}$	$(-\sqrt[3]{4};-1)$	-1	$(-1;0)$	0	$(0;\sqrt[3]{2})$	$\sqrt[3]{2}$	$(\sqrt[3]{2};\infty)$
y'	>0	$\overset{+\to-}{0}$	<0		<0	$\overset{-\to+}{0}$	>0		>0
y	$\nearrow$	$-\frac{4}{3}\sqrt[3]{4}$	$\searrow$	Вертикальная асимптота	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{2}{3}\sqrt[3]{2}$	$\nearrow$
y''	<0	<0	<0		>0	0	>0	0	<0
y	выпук-ла кверху	max	выпукла кверху		выпукла книзу	min	выпукла книзу	точка перегиба	выпукла кверху

По данным исследования строим график.

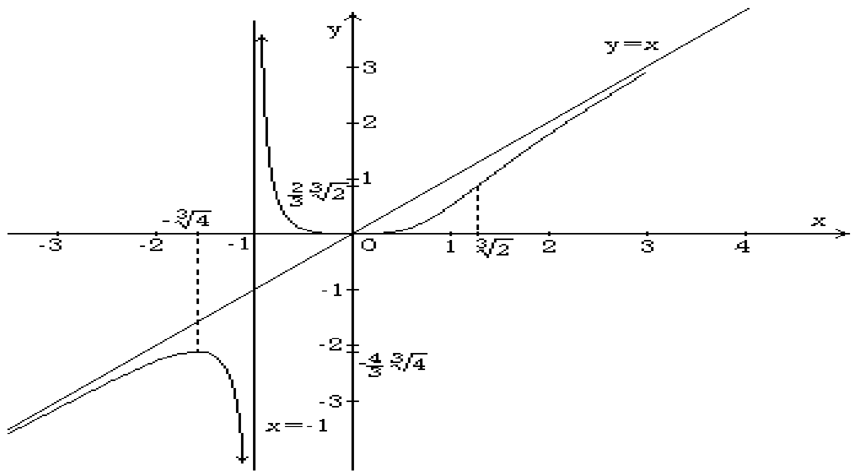


Рисунок к заданию 1 а)

б) $y = x\ln^2|x|$.

1. $D\{f\} = (-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ – область определения функции y.

2. $y(-0) = \lim\limits_{\substack{x\to 0,\\ x<0}} x\ln^2|x| = \{0\cdot\infty\} = \lim\limits_{\substack{x\to 0,\\ x<0}} \dfrac{\ln^2|x|}{\frac{1}{x}} = \left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\} = \lim\limits_{\substack{x\to 0,\\ x<0}} \dfrac{2\ln|x|\cdot\frac{signx}{|x|}}{-\frac{1}{x^2}} =$

$$= -\lim_{\substack{x\to 0,\\ x<0}} 2\ln|x|\cdot x = -2\lim_{\substack{x\to 0,\\ x<0}} \frac{\ln|x|}{\frac{1}{x}} = \left\{\frac{\infty}{\infty}\right\} = -2\lim_{\substack{x\to 0,\\ x<0}} \frac{\frac{1}{|x|}\cdot signx}{-\frac{1}{x^2}} = 2\lim_{\substack{x\to 0,\\ x<0}} x = 0.$$

Здесь мы применили правило Лопиталя и тождество

$$|x| = x \cdot signx, \text{ где } signx = \begin{cases} 1, x > 0, \\ 0, x = 0, \\ -1, x < 0. \end{cases}$$

Аналогично $y(+0) = 0$. Точка $x = 0$ - есть точка устранимого разрыва функции. Вертикальных асимптот для кривой функции $y = x\ln^2|x|$ нет, так как элементарная функция непрерывна на $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.

3. $y(-x) = -x\ln^2|-x| = -x\ln^2|x| = -y(x)$ – нечетная функция. График симметричен относительно начала координат. Эта функция не является периодической.

4. $y' = \left(x\ln^2|x|\right)' = \ln^2|x| + x \cdot 2\ln|x| \cdot \dfrac{1}{|x|} signx = \left\{|x|' = sign\, x\right\} = \ln|x|(\ln|x| + 2)$.

Из равенства $y' = 0 \Rightarrow \begin{cases} \ln|x| + 2 = 0 \\ \ln|x| = 0 \end{cases}$, так как $x > 0 \Rightarrow \ln x = 0$,

$\ln x = -2 \Rightarrow x_1 = 1, x_2 = \dfrac{1}{e^2}$ – есть стационарные точки функции y.

$$y'(-0) = \infty, y'(+0) = \infty .$$

$$y'' = \left(\ln^2|x| + 2\ln|x|\right)' = 2\ln|x| \cdot \frac{1}{|x|} signx + \frac{2}{|x|} signx = \frac{2\ln|x|}{x} + \frac{2}{x};$$

$$y''\left(\frac{1}{e^2}\right) = -4e^2 + 2e^2 = -2e^2 < 0 \cdot \ y''(1) = 2 > 0 \cdot \ y(1) = 0 \cdot$$

$y\left(1/e^2\right) = 4/e^2$. Точки (1;0) и $\left(1/e^2; 4/e^2\right)$ – есть точки соответственно минимума и максимума для функции y.

5. Из $y' = 0 \Rightarrow x\ln^2|x| = 0$. Так как $x > 0$, то $\ln^2 x = 0 \Rightarrow x = 1$. В точке $x = 1$ кривая y касается оси Ox.

6. Из $y'' = 0 \Rightarrow \dfrac{2}{x}(\ln|x| + 1) = 0 \Rightarrow \ln x + 1 = 0, x = e^{-1} = \dfrac{1}{e}$.

$$y''' = -\frac{2}{x^2}(\ln|x| + 1) + \frac{2}{x} \cdot \frac{1}{|x|} signx = -\frac{2}{x^2}[\ln|x| + 1 - 1] = -\frac{2}{x^2}\ln|x| \cdot$$

$y'''\left(\frac{1}{e}\right)=2e^2\neq 0$. $y\left(\frac{1}{e}\right)=\frac{1}{e}$; точка $\left(\frac{1}{e};\frac{1}{e}\right)$ есть точка перегиба.

7. Найдем $k=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{y}{x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{x\ln^2|x|}{x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\ln^2|x|=\infty$.

Наклонных асимптот нет. Составляем таблицу.

x	∓ 0	$\left(0;\frac{1}{e^2}\right)$	$\frac{1}{e^2}$	$\left(\frac{1}{e^2};\frac{1}{e}\right)$	$\frac{1}{e}$	$\left(\frac{1}{e};1\right)$	1	$(1;\infty)$
y'	$+\infty$, $+\infty$	<0	0	<0		<0	− + 0	>0
y	не опре- делена	↘	$\frac{4}{e^2}$	↘	$\frac{1}{e}$	↘	0	↗
y''	+ -	–	<0	<0	0	>0	2>0	>0
y	точка перегиба $y(\pm 0)=0$	выпукла вверх	max	выпукла вверх	точка перегиба $y'''\neq 0$	выпукла вниз	min	выпукла вниз

По данным таблицы строим график функции y для $x>0$, а затем симметрично началу координат продолжим график для $x<0$.

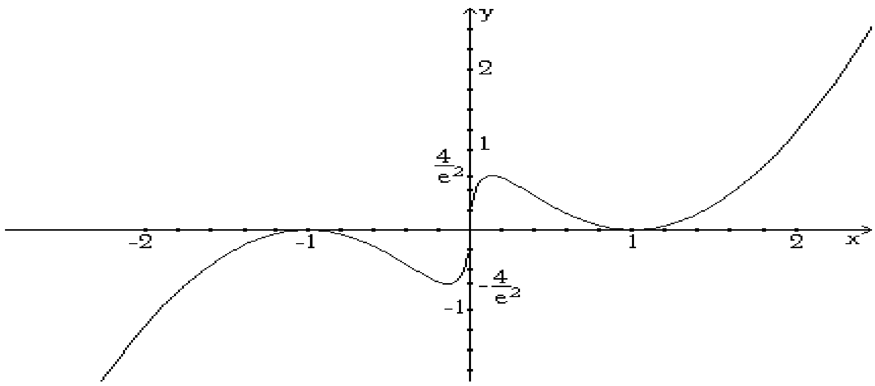


Рисунок к заданию 1 б)

Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y=\dfrac{1-x+x^2}{1+x-x^2}$ на отрезке [0;1].

Решение. Функция y на [0,1] непрерывна. Она достигает на [0,1] своего наибольшего и наименьшего значения в стационарных точках или на концах отрезка.

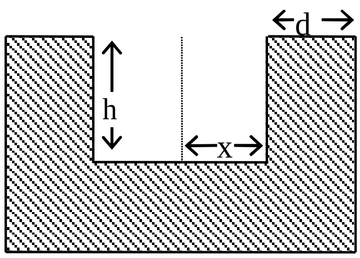
$$y'=\frac{(2x-1)\left(1+x-x^2\right)-(1-2x)\left(1-x+x^2\right)}{\left(1+x-x^2\right)^2}=\frac{(2x-1)\left(1+x-x^2+1-x+x^2\right)}{\left(1+x-x^2\right)^2}==2\frac{2x-1}{\left(1+x-x^2\right)^2}.$$

Из $y' = 0 \Rightarrow 2x - 1 = 0,\ x = \dfrac{1}{2} \in [0;1]$.

$$y(0) = 1,\ y\left(\tfrac{1}{2}\right) = \frac{3}{5},\quad y(1) = 1,\ y_{\min} = \frac{3}{5},\ y_{\max} = 1.$$

Задание 3. Требуется построить открытый цилиндрический резервуар вместимостью V_0. Материал имеет толщину d. Каковы должны быть размеры резервуара (радиус основания и высота), чтобы расход материала был наименьшим?

Решение. Радиус основания внутреннего цилиндра обозначим x, высоту внутреннего цилиндра – h; объем дна и стенок резервуара – Q.



Тогда $Q = \pi(x + d)^2 \cdot d + \pi|(x + d)^2 - x^2| \cdot h =$
$= \pi(x + d)^2 \cdot d + \pi hd(2x + d)$

По условию задачи $V_0 = \pi x^2 h$, отсюда $h = \dfrac{V_0}{\pi x^2}$.

$$Q = \pi d(x + d)^2 + \frac{2V_0 d}{x} + \frac{V_0 d^2}{x^2},$$

Рисунок к заданию 3

Из $Q'(x) = 0 \Rightarrow \quad \pi dx^3(x + d) - V_0 d(x + d) = 0 \ \Rightarrow\ \pi x^3 = V_0, x + d \neq 0$ по условию задачи. $x = \sqrt[3]{\dfrac{V_0}{\pi}}$ – единственный положительный корень производной, и при переходе через него слева направо производная меняет знак минус на плюс. Имеем минимум, который и является решением задачи. При этом $h = \sqrt[3]{\dfrac{V_0}{\pi}}$.

ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ № 4 «Дифференциальное исчисление функции одной переменной» (практика)

4.1. Производная функции $y = \dfrac{3x + 2}{5 - 2x}$ имеет вид

1) $y=\frac{1}{(5-2x)^2}$; 2) $y=\frac{11-12x}{(5-2x)^2}$; 3) $y=\frac{19}{(5-2x)^2}$; 4) другой ответ.

4.2. Значение производной функции $y=\frac{e^{1+x}}{x}$ в точке $x=-1$ равно …

1) 2; 2) -2; 3) $e + 1$; 4) 0; 5) e; 6) $e - 1$.

4.3. Промежутки возрастания функции $y = x^3 - 6x^2 - 5$ равны …

1) $(-\infty;0) \cup (4;+\infty)$; 2) (0;4); 3) $(2;+\infty)$; 4) $(-\infty;-2) \cup (2;+\infty)$.

4.4. Наибольшее и наименьшее значение функции $y = x^3 - 3x + 1$ на [0;2] равны…

1) $y_{наиб.}= 4$, $y_{наим.}=-1$; 2) $y_{наиб.}$ - нет, $y_{наим.}=-1$; 3) $y_{наиб.}=3$, $y_{наим.}$ -нет;
4) $y_{наиб.}=3$, $y_{наим.}=-1$; 5) $y_{наиб.}=3$, $y_{наим.}=1$; 6) $y_{наиб.}=2$, $y_{наим.}=-1$.

4.5. Производная функции $y = \sin^2(x^5+3)$ равна…

1) $(x^5 + 3)\cdot cos(x^5 + 3)$; 2) $cos(5x^4)$; 3) $-5x^2 \cdot cos(2x^5 + 6)$;
4) $5x^4\cdot sin(2x^5 + 6)$; 5) $5x^4 \cdot sin(x^5 + 3)$; 6) другой ответ.

4.6. Точки экстремума функции $y = x^3 - 3x + 1$ равны …

1) *max*(1; -1), *min* нет; 2) *max* нет; *min* (1; -1);
3) *max*(1;- 3); *min* (-1; 1); 4) *max*(-1; 3); *min* (1;- 1);
5) *max*(-1; 3); *min* нет; 6) нет точек *ext*.

4.7. Интервалы вогнутости функции $y = x^4 - 4x + 1$ определились …

1) (-1; 0); 2) $(-\infty; 0)\cup(1; +\infty)$; 3) $(-\infty; 1)$;
4) $(-\infty; -1)$; 5) $(-\infty; +\infty)$; 6) $(0; +\infty)$.

4.8. Предел $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^2-3x+2}$, вычисленный по правилу Лопиталя, равен…

1) 2; 2) $-{}^1/_2$; 3) –2; 4) 1; 5) 0; 6) ${}^2/_3$.

4.9. Установить соответствие между функцией и ее производной

Функция	Производная
1. *arctg 3x*	А. $\frac{y^3}{1-2xy^2}$

2. $x \cdot e^{-5x}$

3. $\begin{cases} x = \sin 5t, \\ y = \cos^3 5t. \end{cases}$

4. $xy^2 - lny = 2$

Б. $-\dfrac{1}{1+9x^2}$

В. $e^{-5x}(1-5x)$

Г. $\dfrac{3}{1+9x^2}$

Д. $\dfrac{y^2}{2xy^3-1}$

Е. $3\ sin10t$

Ж. $-1{,}5\ sin10t$

Ответ: 1_, 2_, 3_, 4 _.

4.10. Для функции $y = \dfrac{x^2-2x+2}{x-1}$

1) $x=1$ является вертикальной асимптотой;
2) $y = x-1$ является наклонной асимптотой;
3) $y=0$ является горизонтальной асимптотой;
4) не существует асимптот.

4.11. Дифференциал d^2y функции $y = \cos^2 3x$ равен …

1) $6\cos6xdx$; 2) $12\sin3xdx$; 3) $-18\cos6xdx$; 4) $-12\sin6xdx$.

4.12. Закон движения материальной точки $S = t^4 - 3t^2 + 2t - 4$.
Скорость и ускорение движения в момент времени $t = 3$ *с* равны…

1) 92 и 102; 2) 100 и 90; 3) 86 и 98; 4) 106 и 94; 5) 104 и 98.

4.13. Знак первой производной $f'(x)$ меняется по схеме

x	(-∞;-1)	(-1;1)	(1;7)	(7;+∞)
$f'(x)$	-	+	+	-

Функции $f(x)$ убывает на интервалах…

1) (-1;1) и (1;7); 2) (-∞;-1) и (7;+∞); 3) (-1;1) и (7;+∞); 4) (-∞;-1) и (1;7).

4.14. Установить соответствие между функцией и уравнением нормали к ее графику в указанной точке

Функция, точка	Уравнение нормали
1. $y = x^2 \cdot lnx$, (1;0)	А. $x + y + 4 = 0$

2. $y = \dfrac{x-4}{x^2+1}$, (0;-4)

Б. $x - y - 1 = 0$
В. $x + y - 1 = 0$
Г. $x + y - 4 = 0$
Д. $x - y - 4 = 0$

Ответ: 1_, 2_.

4.15. Вторая производная функции $y = 3^{5x-1}$ в точке $x = 0$ равна…

1) $^5/_3$ ln3; 2) $^{25}/_3$ ln^{2}3; 3) $^5/_3$ ln^{2}3; 4) $^9/_{25}$ ln^{2}5; 5) $^9/_5$ ln5.

4.16. Приближенное значение sin 29^0 равно …

1) 0,4625; 2) 0,4738; 3) 0,4849; 4) 0,4795; 6) 0, 4904.

4.17. Определена производная неявно заданной функции $x^3 + y^3 - 3xy = 0$ …

1) $y' = \dfrac{x^2-y}{x^2+y}$; 2) $y' = \dfrac{y^2-x}{x^2-y}$; 3) $y' = \dfrac{x^2+y}{x+y}$; 4) $y' = \dfrac{y-x^2}{y^2-x}$.

4.18. Приращение функции $f(x) = (x - 1)^3$ в точке x_0 , если $x_0 = 1$, $\Delta x = 0{,}1$ равно…

1) -0,001; 2) -0,01; 3) 0,001; 4) 0,01; 5) 0,015; 6) -0,015.

4.19. Тангенс угла наклона к оси абсцисс касательной, проходящей через точку $M(\pi; 2)$, к графику функции $y = 2sinx$ равен…

1) 1; 2) -1; 2) 2; 3) -2; 4) 3; 5) -3; 6) 4.

4.20. Критические точки первого рода функции $y = 3 - cos2x - 4\sin x$ определены…

1) $^{\pi n}/_2$, $n \in$ Z; 2) $^{\pi}/_2 + \pi n$, $n \in Z$; 3) $\pi + \pi n$, $n \in Z$;4) πn, $n \in Z$

4.21. Значение параметра a, при котором функция $y = e^{ax}$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $y'' - 4y' + 4 = 0$, равно …

1) 4; 2) 2; 2) 0; 3) 1; 4) 3; 5) -2; 6) 4.

4.22. Материальная точка движется по закону $x(t) = 12 + t^2 - t^3/3$. Скорость точки будет наибольшей из промежутка [1;4] в момент времени …

1) 1; 2) 2; 3) 3; 4) 4.

4.23. Абсцисса точки перегиба графика функции $y = 4\arcsin\sqrt{x}$ равна …

1) 2; 2) -1;   2) 0; 3) -2;   4) $^1/_2$;   5) -3;   6) $-^1/_3$.

4.24. Количество асимптот графика функции $y=\dfrac{3x^2+3x+5}{x^2+5x+6}$ равно …

1) 0;   2) 1;   3) 2;   4) 3.

4.25. $y^{(10)}$ от функции $y = e^{2x}$ равна …

1) $2^{10}\, e^{2x}$;   2) $2^9\, e^{2x}$;   3) $2^{10}\, e^x$;   4) e^{2x}.

4.26. Предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg\,4x-4\ln(1+\sin 3x)}{\arcsin 3x}$, вычисленный по правилу Лопиталя, равен…

1) $-^1/_3$;   2) $-^1/_{10}$;   3) $-^8/_3$;   4) 1;   5) 0;   6) $^2/_3$.

4.27. Решением неравенства $\dfrac{f'(x)}{g'(x)}\le 0$, если $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-3x^2+5x$, $g(x)=2x-1{,}5x^2$, являются интервалы …

1) $\left(-\dfrac{2}{3};0\right]\cup(-5;5)$;   2) $\left(-\dfrac{1}{3};0\right]\cup(1;5)$;   3) $\left(\dfrac{2}{3};1\right]\cup[5;\infty[$;   4) $(-\infty;0]\cup\left(1;\dfrac{5}{3}\right)$.

4.28. Такие положительные два числа, что их сумма равна 12, а произведение их квадратов максимальное, равны …

1) 5 и 7;   2) 6 и 6;   3) 12 и 0;   4) 8 и 4;   5) 3 и 9.

4.29. Дана вторая производная $f''(x) = (x - 10)(x - 7)$ функции $f(x)$, тогда график функции является вогнутым на промежутке (промежутках)…

1) (7;10); 2) $(-\infty; -10)\cup(-7; \infty)$; 3) $(-10; 7)$; 4) $(-\infty;7)\cup(10;+\infty)$; 5) $(-\infty;7)$.

4.30. Если x_1 и x_2 - абсциссы экстремумов функции $y = (x + 6)^2(5x - 1)$, то произведение $(x_1\cdot x_2)$ равно …

1) $^{58}/_5$;   2) $-^{57}/_5$;   3) $^{56}/_5$;   4) $^6/_5$;   5) 0;   6) $^5/_6$.

Раздел III. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

3.1. Понятие первообразной функции

Функция $F(x)$ называется *первообразной функцией* для функции $f(x)$ на интервале $(a;b)$, если в любой точке x этого интервала функция $F(x)$ дифференцируема, и ее производная $F'(x)$ равна $f(x)$, т.е.

$$F'(x) = f(x) . \qquad (3.1)$$

Первообразные функции обладают следующими свойствами:

1) Если функция $F(x)$ является первообразной функцией для функции $f(x)$ на интервале $(a;b)$, то и функция $F(x)+C$, где C — произвольная постоянная, также является первообразной функцией для функции $f(x)$ на интервале $(a;b)$.

Действительно, $\left(F(x)+C\right)' = F'(x) = f(x)$.

2) Если $F_1(x)$ и $F_2(x)$ — первообразные функции для функции $f(x)$ на интервале $(a;b)$, то повсюду на этом интервале $F_1(x)-F_2(x)=C$, где C — некоторая постоянная.

Положим $F_1(x)-F_2(x)=\Phi(x)$. Так как каждая из функций $F_1(x)$ и $F_2(x)$ дифференцируема на интервале $(a;b)$, то и $\Phi(x)$ дифференцируема на этом интервале. Причем всюду на интервале $(a;b)$ справедливо равенство

$$\Phi'(x) = F_1'(x) - F_2'(x) = f(x) - f(x) = 0 .$$

Так как производная $\Phi'(x)$ равна нулю в любой точке интервала $(a;b)$, то функция $\Phi(x)$ является постоянной на этом интервале.

3) Если функция $F(x)$ является первообразной функцией для функции $f(x)$ на интервале $(a;b)$, то любая первообразная функция $\Phi(x)$ для функции $f(x)$ на интервале $(a;b)$ имеет вид $\Phi(x)=F(x)+C$, где C — некоторая постоянная.

Это утверждения является следствием свойства 2.

3.2. Понятие неопределенного интеграла, его геометрический смысл

Совокупность всех первообразных функции $f(x)$ на интервале $(a;b)$ называется *неопределенным интегралом* от функции $f(x)$ и обозначается символом $\int f(x)dx$.

$$\int f(x)dx = F(x) + C. \qquad (3.2)$$

В этом обозначении знак $\int$ называется знаком интеграла, $f(x)dx$ — подынтегральным выражением, $f(x)$ — подынтегральной функцией, x. — переменной интегрирования. *Процесс нахождения первообразных* или нахождения неопределенного интеграла функции называется *интегрированием этой функции*. *Условием существования* неопределенного интеграла на некотором отрезке является *непрерывность функции* на этом отрезке. *Интегрирование* функции представляет собой *операцию, обратную дифференцированию.* Согласно равенству (3.1) мы определяем функцию, производная которой стоит под знаком интеграла.

Геометрически равенство (3.2) означает (рис.3.1), что *неопределенный интеграл* $\int f(x)dx$ *представляет собой семейство кривых* $y = F(x) + C$, каждая из которых может быть получена путём параллельного переноса другой вдоль оси Oy. Эти кривые называются *интегральными кривыми*. Все кривые данного семейства обладают общим свойством: если провести касательные в точках с одинаковой абсциссой $x = x_0$, то эти касательные будут параллельны. Действительно, их угловые коэффициенты равны

$$[F(x) + C]'\big|_{x = x_0} = F'(x)\big|_{x = x_0} = f(x_0).$$

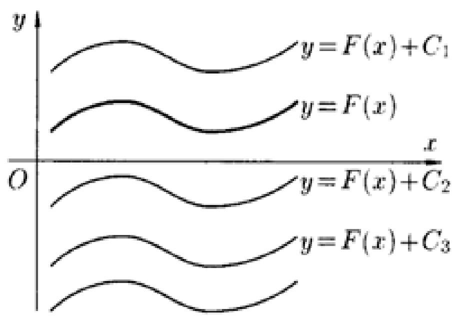


Рисунок 3.1 – Семейство интегральных кривых

Заметим также, что, если для функции $f(x)$ на интервале $(a;b)$ существует первообразная функция, то *подынтегральное выражение представляет собой дифференциал любой первообразной.* Действительно, если $F(x)$ является первообразной функцией для функции $f(x)$ на интервале $(a;b)$, то

$$f(x)dx = F'(x)dx = dF\,. \tag{3.3}$$

3.2.1. Свойства неопределенного интеграла

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют на некотором интервале первообразные $F(x)$ и $G(x)$, тогда

1. Дифференциал от неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению, т.е.

$$d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx\,. \tag{3.4}$$

Действительно, используя определение неопределенного интеграла, имеем

$$d\left(\int f(x)dx\right) = d(F(x)+C) = F'(x)dx = f(x)dx$$

2. Неопределенный интеграл от дифференциала некоторой функции равен сумме этой функции и произвольной постоянной C, т.е.

$$\int dF = F(x) + C\,. \tag{3.5}$$

Так как $dF = F'(x)dx$, а первообразной для функции $F'(x)$ является функция $F(x)$, то согласно определению неопределенного интеграла получим

$$\int dF = \int F'(x)dx = F(x) + C\,.$$

1. Неопределенный интеграл от алгебраической суммы нескольких функций равен алгебраической сумме неопределенных интегралов от каждой функции, т.е.

3. Неопределенный интеграл от алгебраической суммы функций равен алгебраической сумме неопределенных интегралов от каждого слагаемого, т.е.

$$\int \left(f(x) \pm g(x) \right) dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx . \qquad (3.6)$$

Пусть $G(x)$ — первообразная для функции $g(x)$. Тогда свойство 3 можно записать в виде

$$\int \left(f(x) \pm g(x) \right) dx = F(x) \pm G(x) + C ,$$

Следовательно, свойство 3 означает, что $F(x) \pm G(x)$ — это первообразная для функции $f(x) \pm g(x)$. Покажем, что последнее утверждение справедливо. Действительно,

$$(F(x) \pm G(x))' = F'(x) \pm G'(x) = f(x) \pm g(x) .$$

4. В неопределенном интеграле постоянный множитель можно выносить за знак интеграла, т.е.

$$\int \left(Af(x) \right) dx = A \int f(x)dx , \qquad (3.7)$$

где A — некоторая постоянная.

Перепишем свойство 4 в виде $\int \left(Af(x) \right) dx = AF(x) + C$ и покажем, что $AF(x)$ является первообразной функцией для функции $Af(x)$. Действительно,

$$(AF(x))' = AF'(x) = Af(x) .$$

5. Если $F(x)$- первообразная для функции $f(x)$, то $\dfrac{F(kx+a)}{k}$ является первообразной для функции $f(kx+a)$, т.е.

$$\int f(kx+a)dx = \frac{F(kx+a)}{k} + C. \qquad (3.8)$$

Пусть $t = kx + a$. Тогда

$$\left(\frac{F(kx+a)}{k} \right)'_x = \frac{F'(t)(kx+a)'}{k} = F'(t) = f(t) = f(kx+a) .$$

Следовательно, $\dfrac{F(kx+a)}{k}$ является первообразной подынтегральной функции $f(kx+a)$.

3.2.2. Основные формулы неопределенных интегралов

Поскольку неопределенный интеграл — это совокупность первообразных $F(x)+C$ для подынтегральной функции, то для нахождения неопределенного интеграла $\int f(x)dx$, требуется отыскать функцию $F(x)$, удовлетворяющую соотношению $F'(x)=f(x)$. Непосредственной проверкой этого соотношения можно убедиться в справедливости следующих формул.

Таблица 3.1.

Таблица основных интегралов

Простая функция	*Сложная функция*
1. $\int dx = x + C$; $\int dt = t + C$;	$\int du = u + C$; $\int dv = v + C$.
2. $\int 0dx = C$.	$\int 0du = C$.
3. $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$, $n \in R$, $n \neq -1$.	$\int u^n dx = \dfrac{u^{n+1}}{n+1} + C$, $n \in R$, $n \neq -1$.
3 а) $\int \sqrt{x}dx = \dfrac{2x^{3/2}}{3} + C$.	$\int \sqrt{u}du = \dfrac{2u^{3/2}}{3} + C$.
3 б) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C$.	$\int \dfrac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + C$.
3 в) $\int \dfrac{dx}{x^n} = \dfrac{1}{(1-n)x^{n-1}} + C$, $n \neq 1$.	$\int \dfrac{du}{u^n} = \dfrac{1}{(1-n)u^{n-1}} + C$, $n \neq 1$.
3 г) $\int \sqrt[n]{x^m}dx = \dfrac{x^{\frac{m}{n}+1}}{\frac{m}{n}+1} + C$, $\dfrac{m}{n} \neq -1$.	$\int \sqrt[n]{u^m}du = \dfrac{u^{\frac{m}{n}+1}}{\frac{m}{n}+1} + C$, $\dfrac{m}{n} \neq -1$.
4. $\int \dfrac{dx}{ax+в} = \dfrac{1}{a}ln\lvert ax+в\rvert + C$.	$\int \dfrac{du}{au+в} = \dfrac{1}{a}ln\lvert au+в\rvert + C$.
4 а) $\int \dfrac{dx}{x} = ln\lvert x\rvert + C$.	$\int \dfrac{du}{u} = ln\lvert u\rvert + C$.
5. $\int e^x dx = e^x + C$.	$\int e^u du = e^u + C$.

6. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$, $a > 0, a \neq 1, a = const$. $\qquad \int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C$,

$a > 0, a \neq 1, a = const$.

7. $\int \sin x dx = -\cos x + C$. $\qquad \int \sin u du = -\cos u + C$.

8. $\int \cos x dx = \sin x + C$. $\qquad \int \cos u du = \sin u + C$.

9. $\int tgx dx = -\ln|\cos x| + C$. $\qquad \int tgu du = -\ln|\cos u| + C$.

10. $\int ctgx dx = \ln|\sin x| + C$. $\qquad \int ctgu du = \ln|\sin u| + C$.

11. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$. $\qquad \int \frac{du}{\cos^2 u} = tgu + C$.

12. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$. $\qquad \int \frac{du}{\sin^2 u} = -ctgu + C$.

13. $\int shx dx = chx + C$. $\qquad \int shu du = chu + C$.

14. $\int chx dx = shx + C$. $\qquad \int chu du = shu + C$.

15. $\int \frac{dx}{ch^2 x} = thx + C$. $\qquad \int \frac{du}{ch^2 u} = thu + C$.

16. $\int \frac{dx}{sh^2 x} = -cthx + C$. $\qquad \int \frac{du}{sh^2 u} = -cthu + C$.

17. $\int \frac{dx}{x^2 - 1} = \frac{1}{2} \cdot \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C$. $\qquad \int \frac{du}{u^2 - 1} = \frac{1}{2} \cdot \ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right| + C$.

18. $\int \frac{dx}{x^2 + 1} = \left[\begin{array}{l} arctgx + C \\ -arcctgx + C \end{array}\right.$. $\qquad \int \frac{du}{u^2 + 1} = \left[\begin{array}{l} arctgu + C \\ -arcctgu + C \end{array}\right.$.

19. $\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \left[\begin{array}{l} \arcsin x + C \\ -\arccos x + C \end{array}\right.$. $\qquad \int \frac{du}{\sqrt{1 - u^2}} = \left[\begin{array}{l} \arcsin u + C \\ -\arccos u + C \end{array}\right.$

20. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm 1}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm 1}\right| + C$. $\qquad \int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm 1}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm 1}\right| + C$

21. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \cdot \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$, $\qquad \int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \cdot \ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + C$,

a - const $\qquad$ a - const

22. $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \left[\begin{array}{l} \frac{1}{a} \cdot arctg\frac{x}{a} + C \\ -\frac{1}{a} \cdot arcctg\frac{x}{a} + C \end{array}\right.$. $\qquad \int \frac{du}{u^2 + a^2} = \left[\begin{array}{l} \frac{1}{a} \cdot arctg\frac{u}{a} + C \\ -\frac{1}{a} \cdot arcctg\frac{u}{a} + C \end{array}\right.$,

23. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \left[\begin{array}{l} arcsin\frac{x}{a}+C \\ -arccos\frac{x}{a}+C \end{array}\right.$. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \left[\begin{array}{l} arcsin\frac{u}{a}+C \\ -arccos\frac{u}{a}+C \end{array}\right.$.

24. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm m}} = ln\left|x+\sqrt{x^2 \pm m}\right| + C$, $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm m}} = ln\left|u+\sqrt{u^2 \pm m}\right| + C$.

m - const

25. $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right| + C$. $\int \frac{du}{\sin u} = \ln\left|\mathrm{tg}\frac{u}{2}\right| + C.$

26. $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| + C$. $\int \frac{du}{\cos u} = \ln\left|\mathrm{tg}\left(\frac{u}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| + C.$

Покажем, например, справедливость формулы 4а. Так как

$$\ln|x| = \begin{cases} \ln x, \ x > 0, \\ \ln(-x), \ x < 0, \end{cases}$$

то $(\ln|x|)' = 1/x$ при $x > 0$ и $(\ln|x|)' = (-x)'/(-x) = 1/x$ при, $x < 0$ то есть при любом значении *x*, отличном от нуля, функция $\ln|x|$ является первообразной для функции $\frac{1}{x}$.

Аналогично, вычисляя производную правой части и сравнивая ее с подынтегральной функцией, можно убедиться в справедливости остальных формул.

Замечание. Не все неопределенные интегралы выражаются через элементарные функции. Примерами таких интегралов могут служить следующие: 1) $\int e^{-x^2} dx$, 2) $\int \cos(x^2) dx$, 3) $\int \sin(x^2) dx$, 4) $\int \frac{\sin x}{x} dx$ ($x \neq 0$), 5) $\int \frac{\cos x}{x} dx$ ($x \neq 0$) и другие. Первообразные для указанных подынтегральных функций не являются элементарными функциями. Однако они реально существуют, имеют свои названия и хорошо изучены. Для этих функций разработаны специальные методы вычисления и составлены таблицы. Первый из приведенных интегралов называется *интегралом Пуассона* или *интегралом ошибок*. Вы встретитесь с ним при изучении теории вероятностей и математической статистики. Второй и третий интегралы называются *интегралами Френеля*, четвертый — *интегральным синусом*, а пятый — *интегральным косинусом*.

3.3. Методы интегрирования в неопределенном интеграле

3.3.1. Непосредственное интегрирование

Интегрирование, основанное на применении таблицы основных интегралов, свойств неопределенного интеграла, а также тождественных преобразований подынтегральной функции, называют *непосредственным интегрированием*.

Пример 3.1. Вычислить интегралы: а) $\int\left(4x^3-\sqrt{x}+\frac{6}{x^2}\right)dx$; б) $\int\frac{dx}{25x^2-4}$;

в) $\int\left(\frac{1}{\sqrt{16-9x^2}}+\frac{5}{cos^2(6x-7)}-e^{-\frac{6}{7}x-8}\right)dx$.

Решение. а) Вводя дробные и отрицательные показатели и, применяя формулу интегрирования для степенной функции 3, 3а и 3в соответственно, а также свойства 3 и 4 неопределенного интеграла, получим:

$$\int\left(4x^3-\sqrt{x}+\frac{6}{x^2}\right)dx=\int 4x^2dx-\int\sqrt{x}dx+\int\frac{6}{x^2}dx=$$

$$=4\int x^2dx-\int\sqrt{x}dx+6\int x^{-2}dx=\frac{4x^3}{3}-\frac{2x^{3/2}}{3}+\frac{6x^{-1}}{-1}+C=\frac{4x^3}{3}-\frac{2x^{3/2}}{3}-\frac{6}{x}+C.$$

б) Преобразуем выражение в знаменателе, применив формулу (21) и, введенное выше свойство 5:

$$\int\frac{dx}{25x^2-4}=\int\frac{dx}{(5x)^2-2^2}=\frac{1}{2\cdot 2}\cdot\frac{1}{5}ln\left|\frac{5x-2}{5x+2}\right|+C=\frac{1}{20}ln\left|\frac{5x-2}{5x+2}\right|+C,$$

где $\frac{1}{5}$ - *компенсирующий множитель – это число, обратное к коэффициенту* 5 *при x.*

в) Применив к слагаемым подынтегральной функции формулы (23), (11) и (5) соответственно для сложных функций, получим:

$$\int\left(\frac{1}{\sqrt{16-9x^2}}+\frac{5}{cos^2(6x-7)}-e^{-\frac{6}{7}x-8}\right)dx=\int\frac{1}{\sqrt{16-9x^2}}dx+\int\frac{5}{cos^2(6x-7)}dx-$$

$$-\int e^{-\frac{6}{7}x-8}dx=\frac{1}{3}arcsin\frac{3x}{4}+\frac{5}{6}tg(6x-7)+\frac{7}{6}e^{-\frac{6}{7}x-8}+C.$$

3.3.2. Замена переменной в неопределенном интеграле

Пусть функция $t=\varphi(x)$ определена и непрерывна на множестве $\{x\}$ и пусть $\{t\}$ — множество всех значений этой функции. Пусть далее для функции $f(t)$ существует на множестве $\{t\}$ первообразная функция $F(t)$, то есть

$$\int f(t)dt=F(t)+C\,.$$

Тогда всюду на множестве $\{x\}$ для функции $f(\varphi(x))\varphi'(x)$ существует первообразная функция, равная $F(\varphi(x))$, т.е. справедливо равенство

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx=F(\varphi(x))+C\,. \tag{3.9}$$

Формула (3.9) определяет *метод замены переменной в неопределенном интеграле.* Покажем применение этого метода на выводе формул 25 и 26. В № 25 преобразуем подынтегральную функцию

$$\frac{1}{\sin x}=\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}=\frac{1}{2\,\mathrm{tg}\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}}$$

и сделаем замену переменной $u=\mathrm{tg}\frac{x}{2}$. Тогда $du=\dfrac{dx}{2\cos^2\frac{x}{2}}$ и

$$\int\frac{dx}{\sin x}=\int\frac{dx}{2\,\mathrm{tg}\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}}=\int\frac{du}{u}=\ln|u|+C=\ln\left|\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right|+C..$$

При выводе формулы 26 заметим, что $\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$, и сделаем замену переменной $u=x+\frac{\pi}{2}$. В результате получим

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{dx}{\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)} = \int \frac{du}{\sin u} = \ln|\,\mathrm{tg}\frac{u}{2}\,| + C = \ln\left|\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C .$$

При интегрировании путем замены переменной (3.9) преобразования нередко записывают в сокращенном виде

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int f(\varphi(x))d\varphi = F(\varphi(x)) + C . \qquad (3.10)$$

В этом случае, говорят, что функция $\varphi(x)$ подведена под знак дифференциала. При такой форме записи вычисление интеграла по формуле 9 приобретает вид

$$\int \mathrm{tg} x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\int \frac{d\cos x}{\cos x} = -\ln|\cos x| + C .$$

Приведем еще несколько примеров

Пример 3.2. Вычислить интегралы: а) $\int \frac{e^{\mathrm{arctg}\, x}}{1+x^2} dx$; б) $\int 2x(x^2+5)^5 dx$; в) $\int \sin^2 x \cos x dx$.

Решение. а) В этом интеграле сделаем замену $u = \mathrm{arctg}\, x$, $du = \frac{dx}{1+x^2}$.

$$\int \frac{e^{\mathrm{arctg}\, x}}{1+x^2} dx = \int e^{\mathrm{arctg}\, x} d(\mathrm{arctg} x) = e^{\mathrm{arctg}\, x} + C =$$

$$\int e^{\mathrm{arctg}\, x} d(\mathrm{arctg} x) = \int e^u du = e^u + C = e^{\mathrm{arctg}\, x} + C .$$

б) $\int 2x(x^2+5)^5 dx = \int (x^2+5)^5 d(x^2+5) = \frac{1}{6}(x^2+5)^6 + C$.

В данной записи вычисления интеграла мы опустили часть преобразований, подведя под знак дифференциала функцию $u = x^2 + 5$, $du = 2xdx$.

в) $\int \sin^2 x \cos x dx = \int \sin^2 x \, d(\sin x) = \frac{1}{3}\sin^3 x + C$.

Здесь под знак дифференциала подведена функция $u = \sin x, du = \cos x dx.$.

3.3.3. Метод интегрирования по частям

Метод интегрирования по частям применяется для подынтегральных выражений, представляющих собой *произведение разнохарактерных элементарных функций.* Пусть каждая из функций $u(x)$ и $v(x)$ дифференцируема на множестве $\{x\}$ и, кроме того, на этом множестве существует первообразная для функции $v(x)u'(x)$. Тогда на множестве $\{x\}$ существует первообразная и для функции $u(x)v'(x)$, причем справедлива формула

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx. \qquad (3.11)$$

Учитывая, что $v'(x)dx = dv$, а $u'(x)dx = du$, формулу (3.11) можно записать в виде

$$\int u(x)dv = u(x)v(x) - \int v(x)du. \qquad (3.11)$$

Формула (3.11') называется *формулой интегрирования по частям.*

Пример 3.3. Найти интегралы: а) $\int xe^x dx$; б) $\int x^2 \cos x dx$; в) $\int e^x \cos x dx$.

Решение. а) Применим формулу интегрирования по частям (3.11'), полагая $u = x$, $du = dx$, $v = e^x$, $dv = e^x dx = de^x$. В результате получим

$$\int xde^x = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C.$$

б) Полагая в формуле интегрирования по частям (3.11') $u = x^2$, $du = 2xdx$, $dv = \cos x dx = d\sin x$, получим

$$\int x^2 d\sin x = x^2 \sin x - 2\int x\sin x dx.$$

Для вычисления интеграла $\int x\sin x dx$ еще раз применим формулу (3.11') ($u = x$, $du = dx$, $dv = \sin x dx = d(-\cos x)$, $v = -\cos x$). В результате имеем

$$\int x^2 \cos x dx = x^2 \sin x - 2\left(-x\cos x + \int \cos x dx\right) =$$
$$= x^2 \sin x + 2x\cos x - 2\sin x + C.$$

в) Пусть $u = e^x$, $dv = \cos x dx = d\sin x$. Тогда по формуле (3.11')

$$I=\int e^x \cos x dx = e^x \sin x - \int e^x \sin x dx,$$

При вычислении интеграла $\int e^x \sin x dx$ снова используем формулу интегрирования по частям ($u=e^x$, $dv=\sin x dx = d(-\cos x)$)

$$I = e^x \sin x - \left(-e^x \cos x + \int e^x \cos x dx\right) = e^x \sin x + e^x \cos x - I.$$

В результате мы получили линейное алгебраическое уравнение относительно I

$$I = e^x \sin x + e^x \cos x - I.$$

Решая его, находим $\qquad I = (e^x \sin x + e^x \cos x)/2 + C.$

С помощью метода интегрирования по частям вычисляются интегралы следующих видов:

1) $\int P_n(x)e^{ax}dx$, $\int P_n(x)\cos axdx$, $\int P_n(x)\sin axdx$, где

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + \mathrm{a_n}$$

- многочлен степени n.

При вычислении этих интегралов следует положить $u = P_n(x)$. Поскольку $du = P_n'(x)dx = Q_{n-1}(x)dx$, то в результате интегрирования по частям степень многочлена уменьшается на единицу. Применяя формулу интегрирования по частям n раз придем к табличным интегралам .

2) $\int e^{ax}\cos bxdx$, $\int e^{ax}\sin bxdx$.

Обозначим любой из этих интегралов через I. После двукратного интегрирования по частям $(u=e^{ax})$ приходим к уравнению первого порядка относительно рассматриваемого интеграла. получается выражение

$$I = F(x) + kI, \quad \text{где } k = const \neq 1.$$

Отсюда $I = \dfrac{1}{1-k}F(x) + C$.

Применяя дважды формулу интегрирования по частям, Решив это уравнение найдем искомый интеграл.

3) В интегралах $\int P_n(x)\arcsin\beta x dx,\quad \int P_n(x)\arccos\beta x dx, \int P_n(x) arctg\beta x dx,$ $\int P_n(x) arcctg\beta x dx,\quad \int P_n(x)\ln\beta x dx$

подынтегральная функция содержит множитель: $\ln\beta x$, $\arcsin\beta x$, $\arccos\beta x$, $\mathrm{arctg}\,\beta x$. В этом случае в формуле интегрирования по частям надо положить функцию $u(x)$, равной одной из указанных функций.

При вычислении приведенных выше интегралов придерживаются *правила*: через *u* следует обозначать такую функцию, которая после дифференцирования (возможно многократного) упрощается и обращается в константу.

3.3.4. Интегралы, содержащие квадратный трехчлен и его иррациональность в знаменателе

Рассмотрим интеграл $\mathrm{I}_1 = \int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$. Для его вычисления преобразуем квадратный трехчлен ax^2+bx+c к виду:

$$ax^2+bx+c = a\cdot\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right) = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right] = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 \pm k^2\right].$$

Знак «плюс» или «минус», стоящий перед k^2, берется в соответствии со знаком выражения $\frac{c}{a}-\left(\frac{b}{2a}\right)^2$. Интеграл запишем в виде

$$\int\frac{dx}{ax^2+bx+c} = \frac{1}{a}\int\frac{dx}{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 \pm k^2}.$$

Выполняя замену переменной $x+\frac{b}{2a}=t$, получим $dx=dt$. Тогда

$$\frac{1}{a}\int\frac{dx}{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 \pm k^2} = \frac{1}{a}\int\frac{dt}{t^2 \pm k^2}.$$

Последний интеграл табличный $\int\frac{du}{u^2-a^2} = \frac{1}{2a}\cdot ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + C\cdot$

Выполняя замену переменной $x+\frac{b}{2a}=t$, получим $dx = dt$. Тогда

$$\frac{1}{a}\int\frac{dx}{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2\pm k^2}=\frac{1}{a}\int\frac{dt}{t^2\pm k^2}.$$

Последний интеграл табличный $\int\frac{du}{u^2-a^2}=\frac{1}{2a}\cdot ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right|+C$.

Пример 3.4. Найти интеграл $\int\frac{dx}{2x^2+4x-6}$.

Решение. Преобразуем знаменатель:

$$2x^2+4x-6=2(x^2+2x-3)=2\left[(x+1)^2-1-3\right]=2\left[(x+1)^2-4\right]=2\left[(x+1)^2-2^2\right].$$

Запишем интеграл в виде $\int\frac{dx}{2x^2+4x+6}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{(x+1)^2-2^2}$.

Делаем замену переменной $x+1=t$, $dx=dt$. Подставляя в интеграл, получим

$$\frac{1}{2}\int\frac{dx}{(x+1)^2-2^2}=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2-2^2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2\cdot 2}\cdot\ln\left|\frac{t-2}{t+2}\right|+C.$$

Тогда

$$\int\frac{dx}{2x^2+4x+6}=\frac{1}{8}\cdot\ln\left|\frac{x+1-2}{x+1+2}\right|+C=\frac{1}{8}\ln\left|\frac{x-1}{x+3}\right|+C.$$

Рассмотрим интеграл, у которого в числителе стоит линейное выражение, а в знаменателе – квадратный трехчлен

$$\mathrm{I}_2=\int\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}dx=\int\frac{\frac{A}{2a}(2ax+b)+B-\frac{Ab}{2a}}{ax^2+bx+c}dx=$$

$$=\frac{A}{2a}\int\frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}dx+\left(B-\frac{Ab}{2a}\right)\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}.$$

Последний интеграл есть интеграл I_1, вычисленный выше.

Выполняя замену переменной $ax^2+bx+c=t$, получим $(2ax+b)dx=dt$. Следовательно,

$$\frac{A}{2a}\int\frac{(2ax+b)dx}{ax^2+bx+c}=\frac{A}{2a}\int\frac{dt}{t}=\frac{A}{2a}\ln|t|+R=\frac{A}{2a}\ln\left|ax^2+bx+c\right|+R.$$

Окончательно получим

$$\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}dx = \frac{A}{2a}\ln\left|ax^2+bx+c\right| + \left(B-\frac{AB}{2a}\right)\cdot I_1 .$$

Пример 3.5. Найти интеграл $\int \frac{3x+5}{2x^2+4x-6}dx$.

Решение. Выполняя тождественные преобразования подынтегральной функции, получим

$$\int \frac{3x+5}{2x^2+4x-6}dx = \int \frac{\frac{3}{4}(4x+4)-3+5}{2x^2+4x-6}dx = \frac{3}{4}\int \frac{(4x+4)\,dx}{2x^2+4x-6} + 2\int \frac{dx}{2x^2+4x-6} .$$

Второй интеграл вычислен (см. *пример* 3.4). В первом интеграле, заменяя $2x^2+4x-6=t$, получим $(4x+4)\,dx = dt$. Интеграл запишем в виде

$$\frac{3}{4}\int \frac{(4x+4)\,dx}{2x^2+4x-6} = \frac{3}{4}\int \frac{dt}{t} = \frac{3}{4}\ln\left|2x^2+4x-6\right| + C .$$

Тогда $$\int \frac{3x+5}{2x^2+4x-6}dx = \frac{3}{4}\ln\left|2x+4x-6\right| + \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+3}\right| + C .$$

Рассмотрим интеграл $\mathrm{I}_3 = \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$, при $a > 0$ и при $a < 0$.

Если $a > 0$, то интеграл преобразуем к виду:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \frac{1}{\sqrt{a}}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+px+q}} = \frac{1}{\sqrt{a}}\int \frac{dx}{\sqrt{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2-\frac{p^2}{4}+q}} = \frac{1}{\sqrt{a}}\int \frac{dx}{\sqrt{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 \pm k^2}} ,$$

где $p=\frac{b}{a}$, $q=\frac{c}{a}$, а знак перед k^2 (см. I_1).

Выполняя замену $x+\frac{p}{2}=t$, интеграл сведем к табличному

$$\frac{1}{\sqrt{a}}\int \frac{dt}{\sqrt{t^2 \pm k^2}} = \frac{1}{\sqrt{a}}\ln\left|t+\sqrt{t^2 \pm k^2}\right| + C .$$

Тогда

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \frac{1}{\sqrt{a}}\ln\left|\left(x+\frac{p}{2}\right)+\sqrt{x^2+px+q}\right| + R =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a}}\ln\left|\left(x+\frac{b}{2a}\right)+\sqrt{x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}}\right| + R.$$

В случае $a < 0$, так что $a = -|a|$, радикал преобразуем к виду:

$$\sqrt{a\left(x^2 + px + q\right)} = \sqrt{a\left[\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 \pm k^2\right]} =$$

обозначив $x + \frac{p}{2} = t$, получим $\qquad = \sqrt{at^2 \pm k^2}$.

Вычисляемый интеграл преобразуется к табличному

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = \int \frac{dt}{\sqrt{at^2 + k^2}} = \int \frac{dt}{\sqrt{k^2 + at^2}},$$

при условии, что знак перед k^2 положительный.

Тогда, выполняя замену $\sqrt{|a|}\, t = U$, получим:

$$\int \frac{dt}{\sqrt{k^2 + at^2}} = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \int \frac{dU}{\sqrt{k^2 - U^2}} = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \arcsin\frac{U}{k} + C = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \arcsin\frac{\sqrt{|a|}}{k} x + C.$$

Рассмотрим интеграл вида $\mathrm{I}_4 = \int \frac{Ax + B}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}\, dx$, который вычисляется с помощью преобразований, аналогичных тем, которые ранее рассмотрены в вычислении интеграла I_2:

$$\int \frac{Ax + B}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}\, dx = \int \frac{\frac{A}{2a}(2ax + b) + \left(B - \frac{Ab}{2a}\right)}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}\, dx =$$

$$= \frac{A}{2a} \int \frac{(2ax + b)dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} + \left(B - \frac{Ab}{2a}\right) \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}.$$

Выполняя в первом из полученных интегралов подстановку $ax^2 + bx + c = \text{t}$, получим $(2ax + b)dx = dt$. Тогда

$$\frac{A}{2a} \int \frac{(2ax + b)dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = \frac{A}{2a} \int \frac{dt}{\sqrt{t}} = \frac{A}{a}\sqrt{t} + R = \frac{A}{a}\sqrt{ax^2 + bx + c} + R.$$

Второй интеграл был рассмотрен (см. I_3).

Пример 3.6. Найти интеграл $\int \frac{2x - 3}{\sqrt{2x^2 + 8x + 1}}\, dx$.

Решение. Вычисляя производную подкоренного выражения $2ax+b=\left(2x^2+8x+1\right)'$, находим, что $2ax+b=4x+8$. Подставляя найденное значение в интеграл, последний запишем в виде:

$$\int\frac{2x-3}{\sqrt{2x^2+8x+1}}dx=\int\frac{\frac{2}{4}(4x+8)-4-3}{\sqrt{2x^2+8x+1}}dx=\frac{2}{4}\int\frac{4x+8}{\sqrt{2x^2+8x+1}}dx-7\int\frac{dx}{\sqrt{2x^2+8x+1}}=$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{\sqrt{t}}-\frac{7}{\sqrt{2}}\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+\frac{1}{2}}}=\sqrt{t}-\frac{7}{\sqrt{2}}\int\frac{dx}{\sqrt{(x+2)^2-4+\frac{1}{2}}}=$$

$$=\sqrt{2x^2+8x+1}-\frac{7}{\sqrt{2}}\int\frac{dV}{\sqrt{V^2-\left(\sqrt{\frac{7}{2}}\right)^2}}=\sqrt{2x^2+8x+1}-\frac{7}{\sqrt{2}}\ln\left|V+\sqrt{V^2-\frac{7}{2}}\right|+C=$$

$$=\sqrt{2x^2+8x+1}-\frac{7}{\sqrt{2}}\ln\left|x+2+\sqrt{x^2+4x+\frac{1}{2}}\right|+C.$$

Пример 3.7. Найти интеграл $\int\frac{2x+1}{\sqrt{-3x^2+6x+9}}dx$.

Решение. В вычисляемом интеграле $a<0$. Выполняя тождественные преобразования подынтегральной функции, получим:

$$\int\frac{2x+1}{\sqrt{-3x^2+6x+9}}dx=\int\frac{-\frac{2}{6}(-6x+6)+3+1}{\sqrt{-3x^2+6x+9}}dx=$$

$$=-\frac{2}{6}\int\frac{-6x+6}{\sqrt{-3x^2+6x+9}}dx+4\int\frac{dx}{\sqrt{-3(x-1)^2+12}}=$$

Производя замену $t=-3x^2+6x+9$ в первом и втором $(x-1)=U$ интеграле, запишем:

$$=-\frac{1}{3}\int\frac{dt}{\sqrt{t}}+4\int\frac{dU}{\sqrt{\left(\sqrt{12}\right)^2-\left(\sqrt{3}U\right)^2}}=-\frac{2}{3}\sqrt{-3x^2+6x+9}+\frac{4}{\sqrt{3}}\arcsin\sqrt{\frac{3}{12}}U+C$$

$$\int\frac{2x+1}{\sqrt{-3x^2+6x+9}}dx=-\frac{2}{3}\sqrt{-3x^2+6x+9}+\frac{4}{\sqrt{3}}\arcsin\frac{1}{2}(x-1)+C.$$

3.3.5. Интегрирование рациональных дробей

Интеграл $\int f(x)dx$ от рациональной функции $f(x)=\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ всегда может быть, и притом стандартным способом, выражен через элементарные функции. Основной трудностью при практическом вычислении интеграла является разложение интеграла на сумму простых интегралов.

Рациональная дробь записывается в виде

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+...+b_m}, \tag{3.12}$$

где $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ – многочлены (полиномы), n и m – степени, соответственно. Если $n<m$, то дробь называется *правильной*, а если $n\geq m$, то дробь называется *неправильной*.

Приведем примеры рациональных дробей:

– правильные дроби

$$\frac{x}{x^2+5}\ \begin{pmatrix} n=1, m=2 \\ 1<2 \end{pmatrix}, \quad \frac{x^3}{x^4+3x^2+7}\ \begin{pmatrix} n=3, m=4 \\ 3<4 \end{pmatrix}, \frac{1}{x+3}\ \begin{pmatrix} n=0, m=1 \\ 0<1 \end{pmatrix};$$

– неправильные дроби

$$\frac{x^2}{x^2+3x+1}\ (m=n=2), \quad \frac{x^3+2}{x^2-4}\ \begin{pmatrix} n=3, m=2 \\ 3>2 \end{pmatrix}, \quad \frac{x^5+3}{x-1}\ \begin{pmatrix} n=5, m=1 \\ 5>1 \end{pmatrix}.$$

Неправильную дробь в результате деления числителя на знаменатель можно представить в виде:

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=G_k(x)+\frac{R_\alpha(x)}{Q_m(x)}, \tag{3.13}$$

где $G_k(x)$ – многочлен, $\dfrac{R_\alpha(x)}{Q_m(x)}$ – правильная дробь, $\alpha<m$.

Пример 3.8. Неправильную дробь $\dfrac{3x^5+x^4-2x^3+x^2-7}{x+1}$ представить в виде многочлена и правильной дроби.

Решение. Выполняя деление

$$\begin{array}{r|l} 3x^5+x^4-2x^3+x^2-7 & x+1 \\ \cline{2-2} -\underline{3x^5+3x^4} \qquad\qquad\qquad & 3x^4-2x^3+x-1 \\ -2x^4-2x^3+x^2-7 & \\ -\underline{-2x^4-2x^3} \qquad\quad & \\ x^2-7 & \\ -\underline{x^2+x} \quad & \\ -x-7 & \\ -\underline{-x-1} & \\ -6, & \end{array}$$

получим $$\frac{3x^5+x^4-2x^3+x^2-7}{x+1}=3x^4-2x^3+x-1-\frac{6}{x+1},$$

где $3x^4-2x^3+x-1$ – многочлен, а $\dfrac{6}{x+1}$ – правильная дробь.

Из алгебры известно, что правильную дробь $\dfrac{R_\alpha(x)}{Q_m(x)}$ можно разложить на сумму простейших дробей. Под простейшими дробями понимают дроби вида:

$$\frac{A}{x-a};\ \frac{A}{(x-a)^\alpha};\ \frac{Mx+N}{x^2+px+q}\ \text{ и }\ \frac{Mx+N}{\left(x^2+px+q\right)^\beta}.$$

Разложение правильной дроби в виде суммы простейших дробей записывается:

а) в случае *простых корней*

$$\frac{R_\alpha(x)}{(x-a_1)(x-a_2)\cdot\ldots\cdot(x-a_m)}=\frac{A_1}{(x-a_1)}+\frac{A_2}{(x-a_2)}+\ldots+\frac{A_m}{(x-a_m)}, \qquad (3.14)$$

где каждому простому корню $x_i=a_i\left(i=\overline{1,m}\right)$ соответствует простейшая дробь вида $\dfrac{A_i}{x-a_i}$.

б) в случае *кратных корней*

$$\begin{aligned}\frac{R_\alpha(x)}{(x-a_1)^{\gamma_1}(x-a_2)^{\gamma_2}\cdot\ldots\cdot(x-a_m)^{\gamma_m}}&=\frac{A_1}{(x-a_1)}+\frac{A_2}{(x-a_1)^2}+\ldots+\frac{A_{\gamma_1}}{(x-a_1)^{\gamma_1}}+\\&+\ldots+\frac{B_1}{(x-a_m)}+\frac{B_2}{(x-a_m)^2}+\ldots+\frac{B_{\gamma_m}}{(x-a_m)^{\gamma_m}},\end{aligned} \qquad (3.15)$$

где каждому корню кратности γ_i – соответствуют γ_i простейших дробей вида $\dfrac{A_i}{(x-a_1)^i}$.

в) в случае *комплексных корней*

$$\frac{R_\alpha(x)}{\left(x^2+p_1x+q_1\right)\cdot\ldots\cdot\left(x^2+p_rx+q_r\right)}=\frac{M_1x+N_1}{x^2+p_1x+q_1}+\ldots+\frac{M_rx+N_r}{x^2+p_rx+q_r}, \quad (3.16)$$

где каждой паре комплексных корней или множителю второй степени в знаменателе соответствует простейшая дробь вида $\dfrac{M_ix+N_i}{x^2+p_ix+q_i}$.

Таким образом, разложение правильной дроби запишем

$$\begin{aligned}&\frac{R_\alpha(x)}{Q_m(x)}=\frac{A_1}{(x-a_1)}+\frac{A_2}{(x-a_1)^2}+\ldots+\frac{A_{\gamma_1}}{(x-a_1)^{\gamma_1}}+\ldots+\\&+\frac{M_1x+N_1}{x^2+p_rx+q_r}+\ldots+\frac{D_1x+L_1}{x^2+p_rx+q_r}+\ldots+\frac{D_{\beta_r}+L_{\beta_r}}{\left(x^2+p_rx+q_r\right)^{\beta_r}},\end{aligned} \quad (3.17)$$

где $A_1,A_2,\ldots,A_{\gamma_1},\ldots,M_1,N_1,\ldots,D_1,L_1,\ldots,D_{\beta_r},L_{\beta_r}$ – коэффициенты, которые вычисляются по методу неопределенных коэффициентов.

Задача интегрирования выражения вида $\int\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}dx$ свелась к отысканию интегралов от простейших дробей.

I. $\displaystyle\int\frac{A}{x+a}dx=A\ln|x+a|+C$.

II. $\displaystyle\int\frac{A}{(x+a)^n}dx=A\frac{(x+a)^{-n+1}}{-n+1}+C$.

III. $\displaystyle\int\frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx$.

Нахождение неизвестных коэффициентов в разложении правильной дроби на простейшие дроби покажем на примере.

Пример 3.9. Найти интеграл $\displaystyle\int\frac{x+3}{x^3-2x^2+x}dx$.

Решение. Подынтегральная дробь – правильная, разложим ее на простейшие дроби. Для этого знаменатель дроби разложим на множители

$$x^3-2x^2+x=x\left(x^2-2x+1\right)=x(x-1)(x-1)=x(x-1)^2.$$

Обнаруживаем, что многочлен имеет три действительных корня: $x_1=0,\ \ x_2=1$ и $x_3=1$, один из которых $x_1=0$ — простой и два $x_2=1$ и $x_3=1$ – кратные. Согласно формуле (6) разложение правильной дроби на простейшие дроби запишем в виде

$$\frac{x+3}{x(x-1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x-1)^2}. \qquad (*)$$

Приведя правую часть равенства к общему знаменателю

$$\frac{x+3}{x(x-1)^2}=\frac{A(x-1)^2+B(x-1)x+Cx}{x(x-1)^2},$$

отметим, что дроби с равными знаменателями равны, когда равны их числители. Знаменатели дробей равны, значит должны быть равны и числители, т.е.

$$x+3=A(x-1)^2+B(x-1)x+Cx.$$

Приравнивая в тождестве

$$0\cdot x^2+x+3=x^2(A+B)+x(C-B-2A)+A,$$

коэффициенты при одинаковых степенях x получим систему трёх линейных уравнений с тремя неизвестными A, B, C вида

$$\begin{cases} A+B=0 \quad \text{при} \quad x^2 \\ -2A-B+C=1 \quad \text{при} \quad x \\ A=3 \quad \text{при} \quad x^0 \end{cases}$$

Решая её, находим $A=3,\ \ B=-3$ и $C=4$. Подставляя в (*) найденные значения $A,\ \ B,$ и C, получим:

$$\frac{x+3}{x^3-2x+x}=\frac{3}{x}-\frac{3}{x-1}+\frac{4}{(x-1)^2}.$$

Тогда интеграл от заданной дроби запишется

$$\int \frac{x+3}{x^3-2x^2+x}dx = \int\left(\frac{3}{x}-\frac{3}{x-1}+\frac{4}{(x-1)^2}\right)dx = 3\int\frac{dx}{x}-3\int\frac{dx}{x-1}+4\int\frac{dx}{(x-1)^2} =$$

$$= 3\ln|x|-3\ln|x-1|-\frac{4}{x-1}+C.$$

Третий пункт метода неопределенных коэффициентов можно видоизменить, пользуясь тем, что если многочлены совпадают, то их значения равны при каждом конкретном значении аргумента. В этом случае нахождение неизвестных коэффициентов значительно упрощается, если знаменатель разлагается на линейные множители, а аргументу придаются значения, равные корням знаменателя.

Пример 3.10. Вычислить $\int \frac{x^2+1}{x^3-3x^2+2x}dx$.

Решение. Разложим знаменатель дроби на множители

$$x^3-3x^2+2x = x(x^2-3x+2) = x(x-1)(x-2)\,.$$

Представим дробь в виде суммы простых дробей и, приведя их к общему знаменателю, приравняем числители. Определим неизвестные коэффициенты, придав значения аргументу *x* равные корням знаменателя

$$\frac{x^2+1}{x^3-3x^2+2x} = \frac{x^2+1}{x(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x-2}\,.$$

$$x^2+1 = A(x-1)(x-2)+Bx(x-2)+Cx(x-1)$$

$$\mathrm{x}=0 \quad \Rightarrow 1 = 2\mathrm{A}, \quad \mathrm{A}=\frac{1}{2}$$

$$\mathrm{x}=1 \quad \Rightarrow 2 = -\mathrm{B}, \quad \mathrm{B}=-2$$

$$\mathrm{x}=2 \quad \Rightarrow 5 = 2\mathrm{C}, \quad \mathrm{C}=\frac{5}{2}$$

Найденные коэффициенты подставим в сумму и проинтегрируем

$$\int \frac{x^2+1}{x^3-3x^2+2x}dx = \int\left(\frac{1}{2x}-\frac{2}{x-1}+\frac{5}{2(x-2)}\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x| - 2\ln|x-1| + \frac{5}{2}\ln|x-2| + C.$$

Очевидно, что можно комбинировать оба приема вычисления неизвестных коэффициентов.

Пример 3.11. Вычислить интеграл $\int \frac{x^4-11}{x^3+2x^2+3x+6}dx$.

Решение. Подынтегральная дробь – неправильная. Представим ее в виде (3.13).

$$\begin{array}{l|l} x^4-11 & x^3+2x^2+3x+6 \\ \underline{x^4+2x^3+3x^2+6x} & x-2 \\ \quad -2x^3-3x^2-6x-11 & \\ \quad \underline{-2x^3-4x^2-6x-12} & \\ \qquad\qquad x^2+1 & \end{array}$$

$$\int \frac{x^4-11}{x^3+2x^2+3x+6}dx = \int\left(x-2+\frac{x^2+1}{x^3+2x^2+3x+6}\right)dx,$$

$$x^3+2x^2+3x+6 = x^2(x+2)+3(x+2) = (x+2)(x^2+3),$$

$$\frac{x^2+1}{x^3+2x^2+3x+6} = \frac{A}{x+2}+\frac{Bx+C}{x^2+3},$$

$$x^2+1 = A(x^2+3)+(Bx+C)(x+2)$$

$$x=-2, \quad 5=7A,$$

$$x=0, \quad 1=3A+2C$$

$$x^2\,| \qquad 1=A+B$$

$$A=\frac{5}{7}, \quad B=\frac{2}{7}, \quad C=-\frac{4}{7},$$

$$\int \frac{x^4-11}{x^3+2x^2+3x+6}dx = \int\left(x-2+\frac{5}{7(x+2)}+\frac{2x-4}{7(x^2+3)}\right)dx =$$

$$= \frac{x^2}{2}-2x+\frac{5}{7}\ln|x+2|+\frac{1}{7}\ln|x^2+3|-\frac{4}{7\sqrt{3}}arctg\frac{x}{\sqrt{3}}+C.$$

3.3.6. Интегрирование тригонометрических функций

Рассмотрим интегралы вида $\int R(\cos x, \sin x)dx$, где $R(\cos x, \sin x)$ - рациональная функция от тригонометрических функций синуса и косинуса. Такие интегралы приводятся к интегралу от рациональной функции путём замены

$$t = \mathrm{tg}\frac{x}{2}, \tag{3.18}$$

которая называется *универсальной тригонометрической подстановкой*. Это достигается тем, что $\sin x$, $\cos x$ и dx выражаются через $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ рационально:

$$\sin x=\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}\;;\quad \cos x=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}\;;\quad x=2\operatorname{arctg}t\;\Rightarrow\; dx=\frac{2dt}{1+t^2}. \qquad (3.18')$$

Пример 3.12. Найти интеграл $\int\frac{dx}{\sin x-2\cos x+2}$.

Решение. Воспользуемся формулами (3.18) и (3.18')

$$\int\frac{dx}{\sin x-2\cos x+2}=\left(t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)=\int\frac{2dt}{\left(\frac{2t}{1+t^2}-\frac{2-2t^2}{1+t^2}+2\right)(1+t^2)}=\int\frac{dt}{t(2t+1)}=$$

$$=\int\frac{dt}{t}-2\int\frac{dt}{2t+1}=\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|-\ln\left|2\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1\right|+\ln|C|=\ln\left|\frac{C\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}\right|.$$

Замечание. Использование такой подстановки часто приводит к громоздким выражениям, поэтому ее следует применять, если $\sin x$ и $\cos x$ входят в дробное выражение в первой степени.

Рассмотрим частные случаи универсальной тригонометрической подстановки.

Случай 1. Если подынтегральная функция $R(\cos x,\ \sin x)$ – четная относительно $\cos x$ и $\sin x$, т.е. выполняется условие

$$R(-\cos x,\ -\sin x)=R(\cos x,\ \sin x),$$

то целесообразно применять подстановку

$$t=tgx,\;\; x=arctgt,\;\; dx=\frac{dt}{1+t^2},$$

$$\sin x=\frac{tgx}{\sqrt{1+tg^2x}}=\frac{t}{\sqrt{1+t^2}},\cos x=\frac{1}{\sqrt{1+tg^2x}}=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}. \qquad (3.19)$$

Случай 2. Если подынтегральная функция $R(\cos x,\ \sin x)$ – нечетная относительно $\sin x$, т.е. выполняется условие

$$R(\cos x,\ -\sin x)=-R(\cos x,\ \sin x),$$

то целесообразно применять подстановку

$$t = cosx,\ x = \arccos t,\ dx = -\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}, \sin x = \sqrt{1-\cos^2 x} = \sqrt{1-t^2}. \quad (3.20)$$

Случай 3. Если подынтегральная функция $R(\cos x,\ \sin x)$ – нечетная относительно $\cos x$, т.е. выполняется условие

$$R(-\cos x,\ \sin x) = -R(\cos x,\ \sin x),$$

то целесообразно применять подстановку

$$t = \sin x,\ x = \arcsin t,\ dx = \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}, \cos x = \sqrt{1-\sin^2 x} = \sqrt{1-t^2}. \quad (3.21)$$

Пример 3.13. Вычислить $\int \frac{\sin^3 xdx}{2+\cos x}$.

Решение. Попадаем во второй случай, когда подынтегральная функция нечетная относительно синуса.

$$\int \frac{\sin^3 xdx}{2+\cos x} = \int \frac{(1-\cos^2 x)\sin xdx}{2+\cos x} = \begin{vmatrix} \cos x = t, \\ \sin xdx = -dt \end{vmatrix} =$$
$$= \int \frac{t^2-1}{t+2}dt = \int \left(t - 2 + \frac{3}{t+2} \right) dt = \frac{t^2}{2} - 2t + 3\ln|t+2| + C =$$
$$= \frac{\cos^2 x}{2} - 2\cos x + 3\ln|\cos x + 2| + C.$$

Рассмотрим интегралы вида $\int \sin^m x \cos^n xdx$. Метод решения таких интегралов зависит от показателей степеней синуса и косинуса m и n. Возможны следующие случаи:

Случай 1. Из целых положительных степеней m и n. по крайней мере, одно нечетное. Если $m = 2k + 1 > 0$, то вводится подстановка $\cos x = t$, если $n = 2k + 1 > 0$, то вводится подстановка $\sin x = t$.

Случай 2. Оба показателя $m = 2k$ и $n = 2k$ – четные. В этом случае применяются формулы тригонометрии понижения степени

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}, \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}. \quad (3.22)$$

Случай 3. Когда $m + n = 2k < 0$ применяется основное тригонометрическое тождество

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1. \tag{3.23}$$

Пример 3.14. Найти $\int \frac{\cos^5 x dx}{\sin^3 x}$.

Решение. Имеем *случай* 1, когда m = -3, n = 5 – нечетное, положительное.

$$\int \frac{\cos^5 x dx}{\sin^3 x} = \int \frac{\cos^4 x \cdot \cos x}{\sin^3 x} dx = \begin{pmatrix} t = \sin x \\ dt = \cos x dx \end{pmatrix} =$$

$$= \int \frac{(1-t^2)^2}{t^3} dt = \int t^{-3} dt - 2\int \frac{dt}{t} + \int t dt = -\frac{1}{2\sin^2 x} - 2\ln|\sin x| + \frac{\sin^2 x}{2} + C.$$

Рассмотрим интегралы вида $\int tg^n x dx$ или $\int ctg^n x dx$. Для нахождения этих интегралов используется подстановка

$$t = tg\, x \text{ или } t = ctg x \tag{3.24}$$

и формулы тригонометрии $tg^2 x + 1 = \frac{1}{\cos^2 x}, ctg^2 x + 1 = \frac{1}{\sin^2 x}$. (3.25)

Пример 3.15. Найти интеграл $\int tg^3 x dx$

Решение. $\int \mathrm{tg}^3\, dx = \begin{pmatrix} t = \mathrm{tg}\, x \\ dx = \dfrac{dt}{1+t^2} \end{pmatrix} = \int \frac{t^3 dt}{1+t^2} = \int t dt - \int \frac{t dt}{1+t^2} =$

$$= \frac{\mathrm{tg}^2 x}{2} - \frac{1}{2}\ln(1 + \mathrm{tg}^2 x) + C = \frac{\mathrm{tg}^2 x}{2} + \ln|\cos x| + C.$$

Рассмотрим интегралы вида

$$\int \sin\alpha x \cos\beta x dx;\ \int \sin\alpha x \sin\beta x dx;\ \int \cos\alpha x \cos\beta x dx.$$

Эти интегралы находятся с использованием формул тригонометрии преобразования произведений в суммы:

$$\sin\alpha x \cos\beta x = \frac{1}{2}\left(\sin(\alpha+\beta)x + \sin(\alpha-\beta)x\right);$$

$$\sin\alpha x \sin\beta x = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta)x - \cos(\alpha+\beta)x\right);$$

(3.26)

$$\cos\alpha x\cos\beta x=\frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta)x+\cos(\alpha+\beta)x\right).$$

Пример 3.16. Найти $\int\cos 3x\cos 7xdx$.

Решение. Преобразуем произведение косинусов в сумму, интеграл сведется к простым табличным интегралам, т.е.

$$\int\cos 3x\cos 7xdx=\frac{1}{2}\int\cos 10xdx+\frac{1}{2}\int\cos 4xdx=\frac{1}{20}\sin 10x+\frac{1}{8}\sin 4x+C.$$

3.3.7. Интегрирование некоторых иррациональных функций

Рассмотрим только некоторые случаи, когда интеграл от иррациональной функции выражается через элементарные функции. Пусть интеграл имеет вид $\int R\left(x,x^{\frac{m}{n}},\dots,x^{\frac{p}{q}}\right)dx$. Для его вычисления определим наименьшее кратное знаменателей дробей $k=HOK(n,\dots,q)$ и введем подстановку

$$x=t^k\text{, тогда } dx=kt^{k-1}dt. \qquad (3.27)$$

После чего интегрирование сводится к интегрированию рациональных дробей.

Пример 3.17. Вычислить интеграл $\int\frac{\left(1+2\sqrt[6]{x}\right)}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}dx$.

Решение. Показатели корней 6, 2 и 3, значит их наименьшее кратное равно 6. Подстановка запишется $x=t^6$.

$$\int\frac{(1+2\sqrt[6]{x})}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}dx=\begin{pmatrix}x=t^6\\dx=6t^5dt\end{pmatrix}=6\int\frac{(1+2t)t^5}{t^3+t^2}dt=6\int\frac{2t^4+t^3}{1+t}dt=$$

$$=12\int t^3dt-6\int t^2dt+6\int tdt-6\int dt+6\int\frac{dt}{1+t}=$$

$$=3x^{\frac{2}{3}}-2\sqrt{x}+3x^{\frac{1}{3}}-6x^{\frac{1}{6}}+6\ln\left(1+x^{\frac{1}{6}}\right)+C.$$

Замечание. Если выражение под знаком радикала линейное, т.е. имеет вид $ax+b$, то мы применяем тот же подход и вводим подстановку

$$ax+b=t^k. \tag{3.28}$$

Рассмотрим интегралы вида $\int R\left(x\ ,\ \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m}{n}}\ ,\ \dots\ ,\ \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p}{q}}\right)dx$.

Аналогично, если $k = HOK(n,...,q)$, то подстановка

$$t^k=\frac{ax+b}{cx+d} \tag{3.29}$$

также приводит к интегрированию рациональных дробей.

Пример 3.18. Найти интеграл $\int\frac{1}{(x-1)^2}\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}dx.$

Решение. $$\int\frac{1}{(x-1)^2}\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}dx=\begin{pmatrix}\frac{x+1}{x-1}=t^3 & x=1+\frac{2}{t^3-1}\\ & dx=-\frac{6t^2dt}{(t^3-1)^2}\end{pmatrix}=$$

$$=-\int\frac{t}{\frac{4}{(t^3-1)^2}}\cdot\frac{6t^2dt}{(t^3-1)^2}=-\frac{3}{2}\int t^3dt=-\frac{3}{8}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{\frac{4}{3}}+C.$$

Рассмотрим интегралы вида: $\int R\left(x,\ \sqrt{a^2-x^2}\right)dx$, $\int R\left(x,\ \sqrt{a^2+x^2}\right)dx$ и $\int R\left(x,\ \sqrt{x^2-a^2}\right)dx$. Для приведения этих интегралов от иррациональной функции к рациональной функции используются подстановки:

для первого интеграла

$$x=a\cos t\ \ dx = -\ a\sin t\ dt,\text{ или } x=a\sin t,\ dx = a\cos t\ dt; \tag{3.30}$$

для второго

$$x=a\,\mathrm{tg}\,t\ ,dx=\frac{adt}{\cos^2 t},\text{ или } x=a\,\mathrm{ctg}\,t,dx=-\frac{adt}{\sin^2 t}; \tag{3.31}$$

для третьего

$$x=\frac{a}{\cos t}\ \text{ или }\ x=\frac{a}{\sin t} \tag{3.32}$$

соответственно.

Пример 3.19. Найти интеграл $\int\frac{\sqrt{x^2-1}}{x^3}dx$.

Решение. Интеграл относится к третьему типу, где a = 1. Применяем соответствующую подстановку

$$\int\frac{\sqrt{x^2-1}}{x^3}dx=\left(\begin{matrix} x=\dfrac{1}{\sin t}; \quad t=\arcsin\dfrac{1}{x} \\ dx=-\dfrac{\cos t}{\sin^2 t}dt \end{matrix}\right)=\int\frac{\sqrt{\dfrac{1}{\sin^2 t}-1}\cdot\dfrac{\cos t}{\sin^2 t}}{\dfrac{1}{\sin^3 t}}dt=$$

$$=-\int\frac{\sin^3 t\cos^2 t}{\sin^3 t}dt=-\int\cos^2 t dt=-\frac{1}{2}\int(1+\cos 2t)dt=-\frac{t}{2}-\frac{\sin 2t}{4}+C=$$

$$=\begin{matrix}-\dfrac{t}{2}-\dfrac{2\sin t\cos t}{4}+C=-\dfrac{t}{2}-\dfrac{\sin t\sqrt{1-\sin^2 t}}{2}+C= \\ =-\dfrac{1}{2}\arcsin\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{x}\sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}}+C=-\dfrac{1}{2}\arcsin\dfrac{1}{x}-\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{2x^2}+C.\end{matrix}$$

Вопросы для самопроверки

1. Определение первообразной функции, ее свойства.
2. Понятие неопределенного интеграла, его геометрический смысл.
3. Интегральные кривые, их свойство.
4. Свойства неопределенного интеграла.
5. Таблица основных формул неопределенного интеграла.
6. Метод непосредственного интегрирования.
7. Метод замены переменной в неопределенном интеграле.
8. Метод интегрирования по частям.
9. Вычисление интеграла $\mathrm{I}_1=\int\dfrac{dx}{ax^2+bx+c}$.
10. Вычисление интеграла $\mathrm{I}_2=\int\dfrac{Ax+B}{ax^2+bx+c}dx$.
11. Вычисление интеграла $\mathrm{I}_3=\int\dfrac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$.
12. Вычисление интеграла $\mathrm{I}_4=\int\dfrac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$.
13. Правильные и неправильные рациональные дроби.
14. Представление неправильной рациональной дроби.
15. Методы разложения многочлена знаменателя дроби на множители.

16. Разложение правильной дроби на простые дроби.

17. Метод неопределенных коэффициентов для нахождения неизвестных коэффициентов в разложении правильной рациональной дроби на простые.

18. Метод определения неизвестных коэффициентов с помощью корней знаменателя дроби.

19. Интегрирование рациональных дробей от тригонометрических функций синуса и косинуса.

20. Универсальная тригонометрическая подстановка, ее частные случаи.

21. Интегрирование произведения степеней синуса и косинуса.

22. Интегрирование степени тангенса или котангенса.

23. Интегралы от произведения синуса и косинуса.

24. Вычисление интегралов вида $\int R\left(x, x^{\frac{m}{n}}, \ldots, x^{\frac{p}{q}}\right)dx$.

25. Интегралы, содержащие линейные дроби под радикалами.

26. Тригонометрические подстановки при вычислении интегралов вида $\int R\left(x, \sqrt{a^2 - x^2}\right)dx$, $\int R\left(x, \sqrt{x^2 - a^2}\right)dx$ и $R\left(x, \sqrt{a^2 + x^2}\right)$.

ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ № 5 «Неопределенный интеграл» (теория)

5.1. Функция $F(x)$, называется первообразной для функции $f(x)$, если выполняется условие …

1) $f'(x) = F(x)$; 2) $F'(x) = f(x) + C$;
3) $f(x) = F'(x) + C$; 4) $F'(x) = f(x)$.

5.2. Неопределенным интегралом от функции $f(x)$ называется …

1) $\int F(x)dx = f(x) + C$; 2) $\int f(x)dx = F(x) + C$;
3) $\int (f(x) + C)dx = F(x)$; 4) $\int [F(x) + C]dx = f(x)$.

5.3. Укажите, какой ответ правильно отражает свойства неопределенного интеграла:

1) $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$; $d\int f(x)da = f(x)+C$; $\int df(x) = f(x)dx$;

2) $\left(\int f(x)dx\right)' = f'(x)$; $d\int f(x)dx = f(x)dx$; $\int df(x) = F(x)+C$;

3) $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$; $d\int f(x)dx = f(x)dx$; $\int df(x) = f(x)+C$.

5.4. Функция $f(x)$ интегрируема, если она …

1) монотонная; 2) четная; 3) периодическая;
4) непрерывная; 5) разрывная; 6) трансцендентная.

5.5. Геометрически неопределенный интеграл представляет семейство кривых, заданных уравнениями

1) $y = f(x)+C$; 2) $y = F(x)+C$;
3) $y = f'(x)+C$; 4) $y = F'(x)+C$.

5.6. Первообразными для функций $\frac{1}{\cos^2 x}$; $\frac{1}{a^2+x^2}$; $\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$; $\frac{1}{x}$ будут соответственно …

а) $a^x + C$; б) $\arcsin\frac{x}{a}+C$; в) $\frac{1}{2a}\ln\left(\frac{x-a}{x+a}\right)+C$; г) $\operatorname{ctg} x + C$;

д) $\operatorname{tg} x + C$; е) $\ln|x| + C$; ж) $\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}$.

1) а), в), б), е); 2) д), в), б), е); 3) д), б), в), е);
4) д), ж), б), е); 5) д), б), ж), е); 6) г), в), ж), е).

5.7. Укажите, какой ответ правильно отражает свойства неопределенного интеграла:

1) $\int\left(f(x)\pm g(x)\right)dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$;
$\int af(x)dx = a\int f(x)dx$; $\int f(x+b)dx = \int f(x)dx + \int f(b)dx$;

2) $\int\left(f(x)\pm g(x)\right)dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$; $a\int f(x)dx = \int af(x)dx$;
$\int f(x+b)dx = F(x+b)+C$;

3) $\int\left(f(x)\pm g(x)\right)dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$; $\int af(x)dx = F(x\cdot a)+C$;
$\int f(x+b)dx = F(x+b)+C$.

5.8. Метод непосредственного интегрирования базируется на использовании…

1) подстановки; 2) свойств неопределенного интеграла;
3) тригонометрических формул;

4) тождественных преобразований подынтегральной функции;

5) корней подынтегральной функции;

6) основных формул интегралов.

5.9. Замена переменной в неопределенном интеграле $\int f(x)dx$ при $x=\varphi(t)$ осуществляется по формуле …

1) $\int f(\varphi(t))dt$; 2) $\int f(\varphi(t))\cdot t'dt$;

3) $\int f(\varphi(t))\cdot f'(t)dt$; 4) $\int f(\varphi(t))\cdot\varphi(t)dt$.

5.10. Интеграл $\int\cos\left(x^2\right)dx$ называется …

1) интегралом Пуассона; 2) интегральным синусом;

3) интегральным косинусом; 4) интегралом Френеля.

5.11. Метод интегрирования по частям состоит в том, что $\int u\,dv$ будет равен …

1) $uv+\int vdu$; 2) $uv-\int vdu$; 3) $u'v+v'u$;

4) $u'v-v'u$; 5) $uv-\int vdv$; 6) $uv-\int udu$.

5.12. Первообразные для функций $\frac{B}{x-b}$ и $\frac{B}{(x-b)^n}$, где b, n, B - постоянные, равны …

1) $B\ln|x-b|+C$ и $\frac{B}{(1-n)(x-b)^{n-1}}+C$; 2) $\frac{1}{B}\arcsin\frac{x}{b}+C$ и $Bn\ln|x-b|+C$;

3) $\frac{1}{2B}\ln\left(\frac{x-b}{x+b}\right)+C$ и $\frac{Bn}{(x-b)^{n+1}}+C$; 4) $\mathrm{ctg}(x-b)+C$ и $B\ln\left|\frac{x-b}{n}\right|+C$.

5.13. Интеграл вида $\int R(\sin x,\cos x)dx$ в случае $R(\sin x,-\cos x)=-R(\sin x,\cos x)$ вычисляется путем подстановки…

1) $t=\sin x$; 2) $t=\cos x$; 3) $t=\mathrm{tg}x$; 4) $t=\mathrm{tg}\frac{x}{2}$; 5) $t=\mathrm{ctg}\,x$.

5.14. Метод интегрирования по частям применяется для вычисления интегралов

1) $\int\frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$; 2) $\int P_n(x)e^{ax}dx$;

3) $\int R\left(x,\ \sqrt{a^2-x^2}\right)dx$; 4) $\int P_n(x)\arcsin\beta x dx$

1) а) и г); 2) б) и в); 3) а) и г); 4) б) и г); 5) а) и в).

5.15. Универсальная тригонометрическая подстановка применяется для интегрирования …

1) иррациональных функций; 2) правильных рациональных дробей;

3) степеней тригонометрических функций;
4) рациональных выражений от синуса и косинуса;
5) выражений, содержащих квадратный трехчлен в знаменателе дроби;
6) произведения разнохарактерных функций.

5.16. Для вычисления интеграла $\int \sin^m x \cos^n x dx$, когда $m = 2k + 1 > 0$ применяется подстановка …

1) $t = \frac{1}{\sin x}$; 2) $t = \cos x$; 3) $t = \operatorname{tg} x$; 4) $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$; 5) $t = \frac{1}{\cos x}$.

5.17. Интеграл $\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}dx$ путем выделения полного квадрата в знаменателе и замены переменной приводится к табличным интегралам вида …

1) $\int \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{u} + C$; 2) $\int \frac{du}{u} = ln|u| + C$;
3) $\int \frac{du}{u^2+a^2} = \frac{1}{a} arctg\frac{u}{a} + C$; 4) $\int \frac{du}{ch^2 u} = thu + C$;
5) $\int \frac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + C$; 6) $\int \frac{du}{u^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + C$.

5.18. Метод интегрирования по частям применяется для интегралов, где подынтегральная функция представляет собой …

1) неправильную рациональную дробь;
2) произведение степеней синуса и косинуса;
3) произведение разнохарактерных функций;
4) иррациональное выражение.

5.19. Установить соответствие между интегралом и подстановкой, с помощью которой он вычисляется

Интеграл	Подстановка
1. $\int P_n(x)\ln \beta x dx$	А. $t = ctgx$
2. $\int R\left(x, \sqrt{a^2+x^2}\right)dx$	Б. $x = t^k$ $k = HOK(n, ..., q)$
3. $\int ctg^n x dx$	В. $u = P_n(x)$
4. $\int R\left(x, x^{\frac{m}{n}}, ..., x^{\frac{p}{q}}\right)dx$	Г. $u = ln\beta x$
	Д. $x = a\ ctgt$
	Е. $x = \frac{a}{\sin t}$
	Ж. $t = cost$

Ответ: 1__, 2__, 3__, 4__.

5.20. Формулы тригонометрии понижения степени $\sin^2 \beta x = \frac{1-\cos 2\beta x}{2}$,

$\cos^2 \beta x = \frac{1+\cos 2\beta x}{2}$ применяются для вычисления интеграла …

1) $\int tg^n \beta x dx$; 2) $\int \cos\alpha x \sin\beta x dx$; 3) $\int \cos^{2k}\beta x \sin^{2k}\beta x dx$

4) $\int R(\cos\beta x, \sin\beta x) dx$; 5) $\int R\left(x, \sqrt{x^2-a^2}\right) dx$; 6) $\int P_n(x)\cdot\sin\beta x dx$.

5.21. Дифференциал от неопределенного интеграла равен …

1) подынтегральной функции; 2) подынтегральному выражению;
3) первообразной; 4) множеству первообразных.

5.22. Интеграл вида $\int R(\sin x, \cos x) dx$ в случае $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ вычисляется с помощью подстановки …

1) $t = -\sin x$; 2) $t = \cos x$; 3) $t = \operatorname{tg} x$; 4) $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$; 5) $t = \frac{1}{\cos x}$.

5.23. Интегралы, содержащие линейные дроби под радикалами, вычисляются с помощью подстановки …

1) $ax + b = t^k,\ k = HOK(n, ..., q)$; 2) $t = \frac{ax+b}{cx+d}$;

2) $t^k = \frac{ax+b}{cx+d},\ k = HOK(n, ..., q)$; 4) $ax + b = t$.

5.24. Установить соответствие между табличным интегралом и первообразной

Интеграл	Первообразная
А. $\int\frac{du}{\sqrt{u}}$	1. $shu + C$
Б. $\int\frac{du}{sh^2u}$	2. $- sh\mathrm{u} + C$
В. $\int\frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a}}$	3. $2\sqrt{u} + \mathrm{C}$
Г. $\int a^u du$	4. $-cthu + C$
Д. $\int chudu$	5. $lnu + C$
	6. $ln\lvert u + \sqrt{u^2 \pm a}\rvert + C$
	7. $thu + C$
Ответ: А__, Б__, В__, Г__, Д__.	8. $\frac{a^u}{\ln a} + C$.

5.25. Формулы тригонометрии преобразования произведений в суммы применяются для вычисления uинтегралов вида …

1) $\int P_n(x)\cdot\cos\beta x dx$; 2) $\int R(\sin x,\cos x)dx$; 3) $\int ctg^n \beta x dx$;
4) $\int \sin\alpha x \sin\beta x dx$; 5) $\int \cos^m x \sin^n x dx$; 6) $\int \cos\alpha x \cos\beta x dx$.

5.26. К «неберущимся» интегралам относятся …

1) $\int R(ch\alpha x, sh\alpha x)dx$; 2) $\int \frac{\cos x}{x}dx$; 3) $\int \sqrt[n]{tg^m x}dx$;
4) $\int \sin\left(x^2\right)dx$; 5) $\int \frac{\ln x}{x^n}dx$; 6) $\int P_n(x)arctg\alpha x dx$.

5.27. Подстановка $x=\frac{a}{\sin t}$ применяется для вычисления интеграла …

1) $\int R\left(x, \sqrt{x^2-a^2}\right)dx$; 2) $\int R\left(x, \sqrt{x^2+a^2}\right)dx$;
3) $\int R\left(x, \sqrt{a^2-x^2}\right)dx$; 4) $\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$;
5) $\int \cos^m ax \sin^n ax dx$; 6) $\int R\left(x,(ax+b)^{m/n},\ldots(ax+b)^{p/q}\right)dx$.

5.28. Нахождение функции по заданной производной называется …

1) дифференцированием; 2) интегрированием;
3) логарифмированием; 4) потенцированием;
5) преобразованием; 6) обратимостью.

5.29. Установить соответствие между правильной рациональной дробью и ее разложением на простые дроби

Рациональная дробь	Сумма простых дробей
1. $\frac{P_n(x)}{(x-a)^k}$	А. $\frac{A_1}{x-a}+\ldots+\frac{A_m}{(x-a)^m}+\frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q}+\ldots+\frac{M_kx+N_k}{\left(x^2+px+q\right)^k}$
2. $\frac{P_n(x)}{\left(x^2+px+q\right)^k}$	Б. $\frac{A_k}{(x-a)^k}+\frac{M_kx+N_k}{\left(x^2+px+q\right)^k}$
3. $\frac{P_n(x)}{(x-a)^m\left(x^2+px+q\right)^k}$	В. $\frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q}+\frac{M_2x+N_2}{\left(x^2+px+q\right)^2}\ldots+\frac{M_kx+N_k}{\left(x^2+px+q\right)^k}$
	Г. $\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q}+\frac{M_2x+N_2}{\left(x^2+px+q\right)^2}$
	Д. $\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\ldots+\frac{A_k}{(x-a)^k}$.

Ответ: 1__, 2__, 3__.

5.30. Первообразные для функций $shax$, $\frac{1}{\cos^2 ax}$ и $\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$, где a - постоянная, соответственно равны …

1) $-\cos ax + C$, $ctgax + C$ и $\arcsin ax + C$;

2) $\frac{chax}{a}+C$, $\frac{tgax}{a}+C$ и $-\arccos\frac{x}{a}+C$;

3) $-\frac{chax}{a}+C$, $\frac{tgax}{a}+C$ и $-\frac{1}{a}\arcsin\frac{x}{a}+C$;

4) $-chax + C$, $-tgax + C$ и $\arccos ax + C$;

5) $\frac{chax}{a}+C$, $\frac{ctgax}{a}+C$ и $\frac{1}{a}\arccos ax+C$;

6) $\frac{chax}{a}+C$, $\frac{1}{a}arctgax+C$ и $\arcsin ax+C$.

Контрольная работа № 4 на тему «Неопределенный интеграл».
Найти неопределенные интегралы

1.1. а) $\int\left(2x-\frac{5}{x}+\sqrt[3]{x^2}+\frac{4}{sin^2 6x}\right)dx$; б) $\int\frac{x^2dx}{3x^3+4}$; в) $\int\frac{\sin x\,dx}{\sqrt[3]{3+2\cos x}}$.

1.2. а) $\int\left(2-\frac{3}{x^4}-\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)dx$; б) $\int\frac{dx}{(2x+3)^5}$; в) $\int\frac{3^{arctgx}}{1+x^2}dx$.

1.3. а) $\int\left(5x^4-\frac{2}{x^4}-\frac{1}{\sqrt[5]{x^2}}\right)dx$; б) $\int(e^{3x}-1)^2dx$; в) $\int\frac{\sqrt{2+\ln x}}{x}dx$.

1.4. а) $\int\left(5x^4+\frac{3}{x^6}-\frac{3}{\sqrt[4]{x}}\right)dx$; б) $\int sin(4x-1)dx$; в) $\int\frac{\arcsin^3 x}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

1.5. а) $\int\left(4x^3-\frac{2}{x^3}-\frac{5}{\sqrt[7]{x^2}}\right)dx$; б) $\int(2+e^{5x+3})^2dx$; в) $\int\frac{\sin 2x\,dx}{3\sin^2 x+4}$.

1.6. а) $\int\left(5x^4-\frac{4}{\sqrt{x}}+\frac{9}{\sqrt[4]{x}}\right)dx$; б) $\int\frac{x^2dx}{3x^3+1}$; в) $\int\frac{arctg^4 x}{x^2+1}dx$.

1.7. а) $\int\left(6x^5-\frac{1}{x^2}-8\sqrt[5]{x^3}\right)dx$; б) $\int 5^{2x+1}dx$; в) $\int\sin x\cdot\cos^3 xdx$.

1.8. а) $\int\left(7x^6-\dfrac{3}{x}+3\sqrt{x}\right)dx$; б) $\int\dfrac{dx}{\sqrt[3]{3x+2}}$; в) $\int\dfrac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$.

1.9. а) $\int\left(8x-\dfrac{5}{x^6}+7\sqrt[6]{x}\right)dx$; б) $\int\dfrac{e^{2x}dx}{e^{2x}+5}$; в) $\int\dfrac{dx}{(\arcsin x)^2\sqrt{1-x^2}}$.

1.10. а) $\int\left(4-\dfrac{4}{2x+5}-\dfrac{1}{\sqrt[5]{x^3}}\right)dx$; б) $\int\dfrac{x^3dx}{x^4+3}$; в) $\int\dfrac{1-\cos x}{\sin x}dx$.

1.11. а) $\int\left(7-\dfrac{3}{x^4}-\dfrac{10}{\sqrt[5]{x^2}}\right)dx$; б) $\int\dfrac{dx}{(-5x+4)^{1/7}}$; в) $\int\sin(1-3x)dx$.

1.12. а) $\int\left(2-\dfrac{\sqrt{x}}{x^{-2/5}}-\dfrac{5}{\sqrt[7]{x^2}}\right)dx$; б) $\int\dfrac{dx}{(2x-3)^8}$; в) $\int\dfrac{dx}{(1+4x)^2 arctg2x}$.

1.13. а) $\int\left(\sqrt[7]{x^2}+\dfrac{5\sqrt{x}}{x^{1/5}}-\dfrac{2}{\sqrt[3]{x^2}}\right)dx$; б) $\int\dfrac{dx}{(1-6x)^{1/5}}$; в) $\int\dfrac{x^4}{\sin^2 x^5}dx.$

1.14. а) $\int\left(3x-\dfrac{5\sqrt[3]{x}}{x^4}-\dfrac{8}{\sqrt[5]{x^2}}\right)dx$; б) $\int\dfrac{dx}{(-8x+3)^{-1/4}}$; в) $\int\dfrac{\sin 5x}{4-\cos^2 5x}dx.$

1.15. а) $\int\left(9-\dfrac{5\sqrt{x}}{x^4}-\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)dx$; б) $\int\dfrac{dx}{(10-5x)^5}$; в) $\int\dfrac{dx}{tg2x cos^2 2x}$.

1.16. а) $\int\left(7-\dfrac{3}{\sqrt{x}}-\dfrac{x}{\sqrt[3]{x^2}}\right)dx$; б) $\int\dfrac{dx}{(2+3x)^{3/7}}$; в) $\int\dfrac{e^x}{\sqrt{e^{2x}-7}}dx$.

1.17. а) $\int\left(3-\dfrac{1}{x^{-7}}-\dfrac{4}{\sqrt[3]{x^2}}\right)dx$; б) $\int(2x-5)^{-5}dx$; в) $\int tg^2 x dx$.

1.18. а) $\int\left(5x^4+\dfrac{2}{x^{-1/4}}+\dfrac{5}{\sqrt[3]{x^2}}\right)dx$; б) $\int\dfrac{dx}{(-2x+3)^{-4/7}}$; в) $\int 4x\cdot cos(x^2+5)dx$.

1.19. а) $\int\left(2\sqrt{x}-\dfrac{4}{x^{4/7}}-\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)dx$; б) $\int\dfrac{dx}{(x+3)^{3/5}}$; в) $\int\dfrac{sinx dx}{9+cos^2 x}$.

1.20. а) $\int\left(2x-\dfrac{5}{x}-\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)dx$; б) $\int\dfrac{dx}{(2x+3)^5}$; в) $\int\dfrac{dx}{x(1+ln^2 x)}$.

2.1. а) $\int(2x-1)\cdot\sin 3xdx$; б) $\int x^2e^{-2x}dx$; в) $\int 2\arcsin 3xdx$.

2.2. а) $\int(3x+1)\cdot\sin 2xdx$; б) $\int(x+1)^2e^{-2x}dx$; в) $\int \arccos 2xdx$.

2.3. а) $\int x^2\sin 5xdx$; б) $\int\ln(x^2+1)dx$; в) $\int e^x\cos 4xdx$.

2.4. а) $\int\frac{xe^{-4x}}{2}dx$; б) $\int x^2\ln(1+x)dx$; в) $\int x\,arctg\frac{x}{2}dx$.

2.5. а) $\int x\ln(x-1)dx$; б) $\int\frac{xdx}{\cos^2 4x}$; в) $\int e^{-x}\sin 2xdx.$

2.6. а) $\int\frac{xdx}{\sin^2 5x}$; б) $\int(2x-1)^2e^{-3x}dx$; в) $\int arcctg(3x)dx$.

2.7. а) $\int(2-4x)\sin 5xdx$; б) $\int \arcsin 7xdx$; в) $\int x\cdot\ln 2xdx$.

2.8. а) $\int(4+6x)\cdot\sin\frac{4}{3}xdx$; б) $\int(1-x^2)e^{-5x}dx$; в) $\int x\cdot arctgxdx$.

2.9. а) $\int x^2\cdot e^{-3x}dx$; б) $\int\arcsin 4xdx$; в) $\int 2^{-x}\cos 3xdx$.

2.10. а) $\int x^2\cos(3x+5)dx$; б) $\int\ln^2 xdx$; в) $\int arcctg(7x)dx$.

2.11. а) $\int(2-3x)\ln xdx$; б) $\int\arcsin 5xdx$; в) $\int 3^{-2x}\cos 4xdx$.

2.12. а) $\int\frac{xdx}{\cos^2 3x}$; б) $\int(3x-2)^2e^{-2x}dx$; в) $\int arc\cos(6x)dx$.

2.13. а) $\int(1-3x)^2\sin 2xdx$; б) $\int arc\cos 9xdx$; в) $\int 5^{-2x}\cos xdx$.

2.14. а) $\int(14-3x)\cdot\sin\frac{2}{3}xdx$; б) $\int arcctg(11x)dx$; в) $\int x^2\ln(1-3x)dx$.

2.15. а) $\int(1-5x)\ln xdx$; б) $\int 3^{-2x}\cos 4xdx$; в) $\int 2x\cdot arctg 3xdx$.

2.16. а) $\int(3x-2)\sin 2xdx.$; б) $\int\ln^2(2x+3)dx$; в) $\int\arcsin 8xdx$.

2.17. а) $\int x^2\cos(1-3x)dx$; б) $\int\arcsin\left(\frac{5}{2}x\right)dx$; в) $\int\ln^2(1-4x)dx$.

2.18. а) $\int(3x-1)\cdot\sin 7xdx$; б) $\int(1-2x^2)e^{-3x}dx$; в) $\int x^2\ln(7-2x)dx$.

2.19. а) $\int(3x^2-1)\cdot e^{-2x}dx$; б) $\int\arcsin\left(\frac{3}{7}x\right)dx$; в) $\int\ln^2(1-2x)dx$.

2.20. а) $\int (x-2)^2 \cos(7x+5)dx$; б) $\int arc\cos 5x dx$; в) $\int 5^{-2x} \sin 3x dx$.

3.1. а) $\int \frac{x}{2x^2-3x-2}dx$; б) $\int \frac{(3-5x)dx}{\sqrt{5x-2x^2}}$; в) $\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}dx$.

3.2. а) $\int \frac{1-3x}{x^2-3x+2}dx$; б) $\int \frac{(3x+4)dx}{\sqrt{2x^2-12x+15}}$; в) $\int \frac{x^5-2x^4-1}{x^4+4x^2+4}dx$.

3.3. а) $\int \frac{5x+2}{x^2+2x+10}dx$; б) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+10x+28}}$; в) $\int \frac{3x^5-2x^4+1}{x^4+6x^2+9}dx$

3.4. а) $\int \frac{(x+2)}{x^2-9x+25}dx$; б) $\int \frac{(3x+1)dx}{\sqrt{3-2x-x^2}}$; в) $\int \frac{2x^3-5x+1}{x^3-2x^2+x}dx$.

3.5. а) $\int \frac{1-5x}{2x^2-3x-2}dx$; б) $\int \frac{(x+4)dx}{\sqrt{5x^2-x-1}}$; в) $\int \frac{3x^5+2x^3-3}{x^3-x}dx$

3.6. а) $\int \frac{2x+7}{x^2+x-2}dx$; б) $\int \frac{(5x-4)dx}{\sqrt{3x^2-3x+8}}$; в) $\int \frac{3x^2-x+5}{x^3-8}dx$.

3.7. а) $\int \frac{x-4}{x^2-11x+18}dx$; б) $\int \frac{(2x-7)dx}{\sqrt{5x^2+6x+1}}$; в) $\int \frac{x^4-3x^3+2x}{x^2+2x+1}dx$.

3.8. а) $\int \frac{3-x}{2x^2+3x+2}dx$; б) $\int \frac{(3-x)dx}{\sqrt{3-66x-11x^2}}$; в) $\int \frac{(x+1)^3}{x^2-x}dx$.

3.9. а) $\int \frac{7x-1}{x^2-x-6}dx$; б) $\int \frac{(3x-1)dx}{\sqrt{x^2+6x+20}}$; в) $\int \frac{x^5-1}{4x^3-x}dx$.

3.10. а) $\int \frac{(5x+1)dx}{x^2-2x+3}$; б) $\int \frac{(1-3x)dx}{\sqrt{x^2+4x+20}}$; в) $\int \frac{x^5+4x}{x^3-25x}dx$.

3.11. а) $\int \frac{(3x+1)dx}{x^2+8x-7}$; б) $\int \frac{(1-8x)dx}{\sqrt{27-x^2+4x}}$; в) $\int \frac{3-x^4}{x(x^2-64)}dx$.

3.12. а) $\int \frac{3x-1}{x^2-4x+8}dx$; б) $\int \frac{(5x+3)dx}{\sqrt{7-2x-x^2}}$; в) $\int \frac{x^4-4x^2+1}{x^3-16x}dx$.

3.13. а) $\int \frac{(5x-3)dx}{2x^2+2x+5}$; б) $\int \frac{3x-4}{\sqrt{25+12x-9x^2}}dx$; в) $\int \frac{x^5-3x}{x^3-9x^2}dx$.

3.14. а) $\int \frac{(8x-3)dx}{x^2+6x+10}$; б) $\int \frac{(2x+9)dx}{\sqrt{4x^2+4x+3}}$; в) $\int \frac{x^6}{x^4-3x^2+2}dx$.

3.15. а) $\int \frac{(1-4x)dx}{x^2+5x-1}$; б) $\int \frac{4x+5}{\sqrt{11-20x-4x^2}}dx$; в) $\int \frac{x^5+3x^4-8}{x^3-25x}dx$.

3.16. а) $\int \frac{(3x-1)dx}{x^2-8x+20}$; б) $\int \frac{2x+3}{\sqrt{7-6x-x^2}}dx$; в) $\int \frac{2x^3+41x^2-91}{(x-1)(x+3)(x-4)}dx$.

3.17. а) $\int \frac{9x-5}{x^2-2x+10}dx$; б) $\int \frac{2x-7}{\sqrt{25+4x-x^2}}dx$; в) $\int \frac{2x^5-5x^3}{x^4-5x^2+6}dx$.

3.18. а) $\int \frac{(7x-3)dx}{x^2+2x+5}$; б) $\int \frac{3x-5}{\sqrt{13-10x-x^2}}dx$; в) $\int \frac{x^4+2x^2-6}{(x^2-9)(x+1)^2}dx$.

3.19. а) $\int \frac{3x-7}{x^2+2x-8}dx$; б) $\int \frac{4x-1}{\sqrt{x^2-4x+13}}dx$; в) $\int x\cdot\left(\frac{x+2}{x-1}\right)^2 dx.$

3.20. а) $\int \frac{x-3}{4x^2+3x-2}dx$; б) $\int \frac{(1-4x)dx}{\sqrt{2x^2+4x-15}}$; в) $\int \frac{5x^5+2x^3-4x^2+1}{x(x+3)^2(x-2)^2}dx$.

4.1. а) $\int \frac{dx}{5cosx+10sinx}$; б) $\int ctg^3 xdx$; в) $\int sin^2 3x\cdot cos^2 3xdx$.

4.2. а) $\int \frac{dx}{3cosx-2sinx}$; б) $\int tg^4 xdx$; в) $\int sin^5 2x\cdot cos^2 2xdx$.

4.3. а) $\int \frac{dx}{cos2x-\sin 2x}$; б) $\int tg^5 xdx$; в) $\int cos7x\cdot cos5xdx$.

4.4. а) $\int \frac{dx}{\sin x(2+\cos x-2\sin x)}$; б) $\int \cos^2 5xdx$; в) $\int sin^4 4x\cdot cos^2 4xdx$.

4.5. а) $\int \frac{dx}{9+8\cos x+\sin x}$; б) $\int \cos^3 x\cdot\sin^3 xdx$; в) $\int ctg^3(5x-6)dx$.

4.6. а) $\int \frac{1+\sin x}{1+\cos x+\sin x}dx$; б) $\int (tg2x+ctg2x)^2 dx$; в) $\int sin6x\cdot cos8xdx$.

4.7. а) $\int \frac{dx}{5cosx+1}$; б) $\int tg^7 xdx$; в) $\int sin^3 x\cdot cos^4 xdx$.

4.8. а) $\int \frac{dx}{8+7cosx-4sinx}$; б) $\int \sin^2\left(\frac{x}{4}\right)dx$; в) $\int (1-tg2x)^2 dx$.

4.9. а) $\int \frac{dx}{3cosx+5sinx+3}$; б) $\int sin^2 x\cdot cos^4 xdx$; в) $\int sin4x\cdot sin9xdx$.

4.10. а) $\int \frac{dx}{3cosx+2sinx+2}$; б) $\int cos^4 3xdx$; в) $\int ctg^3 6xdx$.

4.11. а) $\int \frac{dx}{4cosx+3sinx}$; б) $\int (1-ctg\,3x)^2 dx$; в) $\int cos15x\cdot cos13xdx$.

4.12. а) $\int \frac{(2-sinx+3\cos x)dx}{1+cosx}$; б) $\int \sin^2\left(\frac{x}{8}\right)\cdot\cos^2\left(\frac{x}{8}\right)dx$; в) $\int tg^4 \frac{2x}{3}dx$.

4.13. а) $\int \frac{dx}{5+3cosx+sinx}$; б) $\int \sin^3 2xdx$; в) $\int sin2x\cdot cos3xdx$.

4.14. а) $\int \frac{dx}{3cosx+4sinx+5}$; б) $\int \sin^2 3x\cdot\cos^2 3xdx$; в) $\int (1+3ctg\,2x)^2 dx$.

4.15. а) $\int \frac{(7+6sinx-5cosx)dx}{1+cosx}$; б) $\int \cos^2 4xdx$; в) $\int (tg3x-ctg3x)^2 dx$.

4.16. а) $\int \frac{(6+sinx+cosx)dx}{1+cosx}$; б) $\int sin^3 x\cdot cos^8 xdx$; в) $\int cosx\cdot cos5xdx$.

4.17. а) $\int \frac{dx}{3cosx-4sinx+4}$; б) $\int tg^4(3x+5)dx$; в) $\int sin4x\cdot sin23xdx$.

4.18. а) $\int \frac{dx}{cosx-3sinx}$; б) $\int (1-tg5x)^3 dx$; в) $\int cos14x\cdot cos5xdx$.

4.19. а) $\int \frac{dx}{2cosx-5\sin x+1}$; б) $\int \cos^3 7x\cdot\sin^3 7xdx$; в) $\int tg^3 \frac{3x}{5}dx$.

4.20. а) $\int \frac{dx}{5cosx-7sinx}$; б) $\int ctg^3 7xdx$; в) $\int sin^2 x\cdot cos^5 xdx$.

5.1. а) $\int \frac{\sqrt[3]{7x+3}+2}{1+\sqrt[3]{7x+3}}dx$; б) $\int \frac{1-\sqrt[6]{x}}{\sqrt[6]{x^5}+\sqrt[4]{x^3}}dx$; в) $\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}dx$.

5.2. а) $\int \frac{x+\sqrt{3x-2}-10}{\sqrt{3x-2}+7}dx$; б) $\int \frac{\sqrt[6]{x}}{1+\sqrt[3]{x}}dx$; в) $\int x^2\sqrt{4-x^2}dx$.

5.3. а) $\int \frac{x^2+\sqrt{2x+1}}{\sqrt[3]{2x+1}}dx$; б) $\int \frac{1-\sqrt[6]{x}}{\sqrt[6]{x^5}+\sqrt[4]{x^3}}dx$; в) $\int \frac{\sqrt{x^2+9}}{x}dx$.

5.4. а) $\int \frac{\sqrt{5x-1}}{(1+\sqrt[3]{5x-1})^2}dx$; б) $\int \frac{\sqrt[3]{x}}{x(\sqrt[3]{x}+\sqrt{x})}dx$; в) $\int \frac{\sqrt{25-x^2}}{x^4}dx$.

5.5. а) $\int \frac{1}{\sqrt[3]{4x+1}-\sqrt{4x+1}}dx$; б) $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3}+1}dx$; в) $\int \frac{1}{\sqrt{\left(1+x^2\right)^3}}dx$.

5.6. а) $\int \frac{1-\sqrt{3x+1}}{(1+\sqrt[3]{3x+1})\sqrt{3x+1}}dx$; б) $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[4]{x}}dx$; в) $\int \frac{1}{\sqrt{\left(x^2-1\right)^3}}dx$.

5.7. а) $\int \frac{1}{2\sqrt[4]{3x+4}+\sqrt{3x+4}}dx$; б) $\int \frac{1}{3x-4\sqrt{x}}dx$; в) $\int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x}dx$.

5.8. а) $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\cdot\frac{dx}{x}$; б) $\int \frac{1}{7\cdot\sqrt[4]{x}-\sqrt{x}}dx$; в) $\int \sqrt{9-x^2}\cdot x^3 dx$.

5.9. а) $\int \frac{4x}{\sqrt[3]{(3x-8)^2}-1}dx$; б) $\int \frac{x+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[6]{x}}{x(1+\sqrt[3]{x})}dx$; в) $\int \frac{1}{x^4\cdot\sqrt{\left(4+x^2\right)^3}}dx$.

5.10. а) $\int \frac{1-\sqrt{3x+2}}{\sqrt[3]{3x+2}+9}dx$; б) $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3}+2}dx$; в) $\int \frac{1}{x^3\cdot\sqrt{x^2-1}}dx$.

5.11. а) $\int \frac{1+3x}{x\sqrt{5x+2}}dx$; б) $\int \frac{1+\sqrt[3]{x^2}}{x+\sqrt{x}}dx$; в) $\int \frac{\sqrt{\left(4-x^2\right)^3}}{x^6}dx$.

5.12. а) $\int \frac{x-1}{3+\sqrt[3]{2x+1}}dx$; б) $\int \frac{2x+5\sqrt[3]{x}-\sqrt[6]{x}}{x(1+\sqrt{x})}dx$; в) $\int \frac{1}{\sqrt{16+x^2}\cdot x^2}dx$.

5.13. а) $\int \frac{\sqrt{2x+1}+\sqrt[3]{2x+1}}{\sqrt{2x+1}+8}dx$; б) $\int \frac{(\sqrt[3]{x}+1)(\sqrt{x}+1)}{\sqrt[6]{x^5}-1}dx$; в) $\int x^3\sqrt{1-x^2}dx$.

5.14. а) $\int \frac{\sqrt{7x+1}-1}{3+\sqrt[3]{7x+1}}dx$; б) $\int \frac{\sqrt{x}}{x-\sqrt[3]{x^2}}dx$; в) $\int x^5\sqrt{16-x^2}dx$.

5.15. а) $\int \frac{\sqrt{4x-1}}{\sqrt[3]{4x-1}+\sqrt[6]{4x-1}}dx$; б) $\int \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt[3]{x}+4\sqrt{x}}dx$; в) $\int \frac{1}{\sqrt{4+x^2}\cdot x^2}dx$.

5.16. а) $\int \frac{\sqrt{5x+1}}{\sqrt[3]{5x+1}-2\sqrt{5x+1}}dx$; б) $\int \frac{6-\sqrt[5]{x}}{\sqrt[3]{x^5}+4\sqrt[5]{x^3}}dx$; в) $\int \frac{1}{x^4\cdot\sqrt{\left(9+x^2\right)^3}}dx$.

5.17. а) $\int \frac{\sqrt{7x-3}-5}{\sqrt[4]{7x-3}+3\sqrt{7x-3}}dx$; б) $\int \frac{4-\sqrt{x}}{(1+2\sqrt[3]{x})\sqrt{x}}dx$; в) $\int \frac{dx}{\left(x^2-1\right)\sqrt{x^2-1}}$.

5.18. а) $\int \frac{1}{(x-1)^2}\cdot\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}dx$; б) $\int \frac{\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}-\sqrt[3]{x^2}}dx$; в) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+49}}$.

5.19. а) $\int \frac{2x+\sqrt{3x+7}-1}{\sqrt{3x+7}+5}dx$; б) $\int \frac{\sqrt[3]{x}+2}{(1+\sqrt[3]{x})\sqrt{x}}dx$; в) $\int \frac{\sqrt{\left(25-x^2\right)^3}}{x^6}dx$.

5.20. а) $\int \frac{1-\sqrt{8x+3}}{(4+\sqrt[3]{8x+3})\sqrt{8x+3}}dx$; б) $\int \frac{\sqrt[3]{x}-1}{x(\sqrt[3]{x}+2\sqrt{x})}dx$; в) $\int \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}}dx$.

Решение типового варианта контрольной работы № 4

Найти неопределенные интегралы

1. в) $\int (tg2x+1)^3 \cdot \frac{dx}{cos^2 2x}$.

Решение. Решим интеграл методом замены переменной $u = tg2x+1; du = \frac{2dx}{\cos^2 2x}$. Придем к табличному степенному интегралу.

$$\int (tg2x+1)^3 \cdot \frac{dx}{cos^2 2x} = \frac{1}{2}\int u^3 du = \frac{1}{2}\cdot\frac{(tg2x+1)^4}{4} + C = \frac{(tg2x+1)^4}{8} + C.$$

2. в) $\int (x^2+5x-3)\sin x dx$

Решение. Под интегралом стоит произведение квадратного трехчлена на тригонометрическую функцию. Применим дважды метод интегрирования по частям.

$$\int udv = uv - \int vdu.$$

$$\int (x^2+5x-3)\sin x dx = \begin{vmatrix} u = x^2+5x-3, & dv = \sin x dx \\ du = (2x+5)dx, & v = -\cos x \end{vmatrix} =$$

$$= -(x^2+5x-3)\cos x + \int (2x+5)\cos x dx =$$

$$= \begin{vmatrix} u = 2x+5, & dv = \cos x dx \\ du = 2dx, & v = \sin x \end{vmatrix} = -(x^2+5x-3)\cos x +$$

$$+ (2x+5)\sin x - 2\int \sin x dx = -(x^2+5x-3)\cos x +$$

$$+ (2x+5)\sin x + 2\cos x + C.$$

3. в) $\int \frac{x^5+2x^2+3}{x^4-x^3-x+1}dx$.

Решение. Дробь, стоящая под интегралом – неправильная, выделим целую часть подынтегрального выражения путем деления многочлена числителя на многочлен знаменателя

$$
\begin{array}{rl}
x^5 \qquad +2x^3 \qquad\qquad +3 & \left| \underline{x^4-x^3-x+1} \right. \\
\underline{x^5-x^4 \qquad -x^2+x} \qquad\qquad & \;\left| x+1 \right. \\
x^4+2x^3+x^2-x+3 & \\
\underline{x^4-x^3 \qquad -x+1} & \\
3x^3+x^2 \qquad +2 &
\end{array}
$$

Таким образом, подынтегральную дробь можно представить в виде

$$\frac{x^5+2x^2+3}{x^4-x^3-x+1}=x+1+\frac{3x^3+x^2+2}{x^4-x^3-x+1}.$$

В полученном выражении разложим правильную дробь на простые и определим неизвестные коэффициенты

$$\frac{x^5+2x^2+3}{x^4-x^3-x+1}=x+1+\frac{x^3+3x^2+2}{(x-1)^2(x^2+x+1)}=x+1+\frac{A}{(x-1)^2}+\frac{B}{x-1}+\frac{Cx+D}{x^2+x+1}.$$

Коэффициенты A, B, C, D найдем методом неопределённых коэффициентов. Выполним сложение дробей и приравняем числители правильной дроби в левой части и результата сложения дробей (числителя) в правой части

$$x^3+3x^2+2=A(x^2+x+1)+B(x^3-1)+(Cx+D)(x-1)^2.$$

Приравняв коэффициенты при одинаковых степенях x, получаем систему линейных уравнений

$$
\begin{array}{ll}
x^0: & A-B+D=2; \\
x^1: & A-2D+C=0; \\
x^2: & A+D-2C=3; \\
x^3: & B+C=1\;,
\end{array}
$$

из которой следует $A=2;\ B=1;\ D=1;\ C=0$. Окончательно получим

$$\frac{x^5+2x^2+3}{x^4-x^3-x+1}=x+1+\frac{2}{(x-1)^2}+\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x^2+x+1}.$$

Тогда искомый интеграл запишется

$$\int \frac{x^5+2x^2+3}{x^4-x^3-x+1}dx = \int\left(x+1+\frac{2}{(x-1)^2}+\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x^2+x+1}\right)dx =$$

$$= \int xdx + \int dx + 2\int \frac{dx}{(x-1)^2} + \int \frac{dx}{x-1} + \int \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} =$$

$$= \frac{x^2}{2} + x - \frac{2}{x-1} + \ln|x-1| + \frac{2}{\sqrt{3}} arctg\, \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.$$

4. в) $\int \frac{dx}{(2-\sin^2 x)\cos^2 x}$.

Решение. Выражение $\frac{1}{(2-\sin^2 x)\cos^2 x}$ - четное относительно синуса и косинуса, т.е. применяем подстановку $t = tgx,\ x = arctgt,\ dx = \frac{dt}{1+t^2}$.

$$\int \frac{dx}{(2-\sin^2 x)\cos^2 x} = \begin{pmatrix} t = \operatorname{tg} x \\ dx = \dfrac{dt}{1+t^2} \end{pmatrix} = \int \frac{dt}{(1+t^2)\left(2-\frac{t^2}{1+t^2}\right)\cdot\frac{1}{1+t^2}} =$$

$$= \int \frac{(1+t^2)dt}{2+t^2} = \int dt - \int \frac{dt}{2+t^2} = \operatorname{tg} x - \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}} + C\ .$$

5. в) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-4}}$.

Решение. Интеграл содержит иррациональность вида $\sqrt{x^2-a^2}$, вводим соответствующую тригонометрическую подстановку

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-4}} = \left| \begin{matrix} x = \dfrac{2}{\cos t} \\ dx = 2\cdot\dfrac{1}{\cos^2 t}\cdot\sin t dt \end{matrix} \right| = \int \frac{2\cdot\frac{\sin t}{\cos^2 t}dt}{\frac{2}{\cos t}\cdot\sqrt{\frac{4}{\cos^2 t}-4}} =$$

$$\int \frac{\sin t\cdot\cos t dt}{\cos^2 t\cdot 2\sqrt{\frac{1-\cos^2 t}{\cos^2 t}}} = \frac{1}{2}\int\frac{\sin t\cdot\cos t}{\cos t\cdot\sin t}dt = \frac{1}{2}\int dt = \frac{1}{2}t + C =$$

$$= \frac{1}{2}\arccos\frac{2}{x} + C$$

ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ № 6 «Неопределенный интеграл» (практика)

6.1. Первообразными для функции $f(x)=\dfrac{1}{1-7x}$ являются …

1) $ln|1\text{-}7x| + C$; 2) $-{}^{1}/_{7}\, ln|1\text{-}7x| + C$; 3) $7\, ln|1\text{-}7x| + C$;

4) $(1 - 7x)^{2} + C$; 5) ${}^{1}/_{7}(1 - 7x)^{-2} + C$; 6) $\dfrac{1}{\sqrt{1-7x}}+C$.

6.2. Указать интеграл, который вычислен верно

1) $\int \dfrac{dx}{\cos^2 3x}=tg3x+C$; 2) $\int e^{-5x}dx=-5e^{-5x}+C$;

3) $\int \sin 2xdx=-\dfrac{1}{2}\cos 2x+C$; 4) $\int \dfrac{dx}{x^2-3x+2}=\ln\left|x^2-3x+2\right|+C$.

6.3. Разложение дроби $\dfrac{2x+5}{\left(1-x^3\right)(3x-1)}$ на простейшие имеет вид …

1) $\dfrac{Ax+B}{1-x^3}+\dfrac{C}{3x-1}$; 2) $\dfrac{A}{1-x}+\dfrac{Bx+C}{1+x+x^2}+\dfrac{D}{3x-1}$;

3) $\dfrac{A}{1-x^3}+\dfrac{B}{3x-1}$; 4) $\dfrac{A}{1-x}+\dfrac{B}{1+x+x^2}+\dfrac{C}{3x-1}$.

6.4. Первообразная для функции $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$, график которой проходит через точку с координатами $(1;2\pi)$, равна …

1) $arctg\, x + {}^{3\pi}/_{4}$; 2) $arctg\, x$; 3) $arctg\, x + {}^{7\pi}/_{4}$;
4) $arctg\, x + {}^{5\pi}/_{4}$; 5) $arctg\, x + {}^{9\pi}/_{4}$; 6) $arctg\, x + {}^{\pi}/_{4}$.

6.5. В интеграле $\int \dfrac{dx}{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}$ для приведения подынтегральной функции к рациональной дроби необходима подстановка …

1) $x = t^3$; 2) $x^3 = t$; 3) $x = t^2$; 4) $x^2 = t$;
5) $x = t^6$; 6) $x^6 = t$; 7) $x^3 = t^2$; 8) $x^2 = t^3$.

6.6. Интеграл $\int x\sin 2xdx$ равен…

1) $-{}^{1}/_{2}\, x\cos2x - {}^{1}/_{4}\sin2x + C$; 2) $-{}^{1}/_{2}\, x\cos2x + {}^{1}/_{4}\sin2x + C$;

3) $-{}^{1}/_{2}\, x\cos2x + {}^{1}/_{2}\sin2x + C$; 4) $-{}^{1}/_{4}\, x^2\cos2x - {}^{1}/_{2}\sin2x + C$.

6.7. Установить соответствие между интегралами и методами их нахождения

Интеграл		Метод интегрирования
1.	$\int\left(x^5-7^{5x-2}+\dfrac{3}{7-9x}\right)dx$	А. интегрирование по частям
2.	$\int\dfrac{arcsin^3 2x dx}{\sqrt{1-4x^2}}$	Б. замены переменной
3.	$\int e^{-3x}\sin 4x\,dx$	В. непосредственное интегрирование
		Г. универсальная тригонометрическая подстановка.

Ответ: 1__, 2__, 3__.

6.8. Если $F'(x)=\sin 2x$ и $F(0)=1$, то $F\left({}^{\pi}/_{4}\right)$ равно …

1) -1; 2) 1; 3) 1,5; 4) 2; 5) 2,5; 6) 3.

6.9. Укажите неопределенные интегралы, при нахождении которых придется использовать один и тот же табличный интеграл

а) $\int\dfrac{\cos 6xdx}{\sin^5 6x}$; б) $\int\dfrac{e^{\ln x}}{x}dx$; в) $\int\dfrac{xdx}{\sqrt[7]{3x^2-1}}$; г) $\int\arccos 6xdx$.

1) все; 2) а) и б); 3) б) и г);
4) а) и в); 5) б) и в); 6) другой ответ.

6.10. Если $f(x)=\dfrac{2}{x}-\dfrac{3}{1+x^2}$, то $\int f(x)dx=\ln x^2+3arcctgx+C$. Укажите, какая ошибка или ошибки, если их несколько, сделаны в предложенной записи

а) все правильно; б) использовано свойство интеграла, которого нет; в) неверно применен табличный интеграл; г) ошибка в знаке

1) в) и г); 2) б) и г); 3) а); 4) б) и в); 5) г); 6) б).

6.11. Подстановка $t=\cos x$ применяется для исчисления интегралов …

1) $\int\dfrac{dx}{2\sin x-3\cos x+1}$; 2) $\int\sin 5x\cdot\cos x\,dx$; 3) $\int\dfrac{\sin^3 x}{4+\cos x}dx$;

4) $\int\sin^2 x\cos^3 xdx$; 5) $\int\sqrt{1-x^2}dx$; 6) $\int\cos^4 x\,dx$.

6.12. Интеграл $\int \frac{(\sqrt{x}+2)dx}{\sqrt{x}-1}$ равен …

1) $x + 6\sqrt{x} - 6\ln|\sqrt{x} - 1| + C$; 2) $x + \sqrt{x} + 2\ln|\sqrt{x} - 1| + C$;

3) $x + 6\sqrt{x} + 6\ln|\sqrt{x} - 1| + C$; 4) $x - 6\sqrt{x} - 2\ln|\sqrt{x} - 1| + C$;

5) $x + 2\sqrt{x} - 6\ln|\sqrt{x} - 1| + C$; 6) $x - 2\sqrt{x} - \ln|\sqrt{x} - 1| + C$.

6.13. После деления числителя на знаменатель неправильной дроби $\frac{x^5}{(x-2)^2}$ получена целая часть …

1) $x^3 + 4x^2 - 12x - 32$; 2) $x^3 + 4x^2 + 12x + 32$;
3) $x^3 - 4x^2 + 12x - 32$; 4) $x^3 - 4x^2 - 12x + 32$;
5) $-x^3 + 4x^2 + 12x + 32$; 6) $-x^3 - 4x^2 + 12x - 32$.

6.14. Установить соответствие между неопределенными интегралами и множеством первообразных

Интеграл	Множество первообразных
1. $\int cos7x \cdot cos2x dx$	А. $\frac{ctg^3 x}{3} + ctgx + x + C$
2. $\int \frac{dx}{\sqrt{5-4x-x^2}}$	Б. $\frac{1}{3}\ln\frac{x+2}{x-3} + C$
3. $\int ctg^4 x dx$	В. $\frac{1}{2}(\sin 9x + \sin 5x) + C$
	Г. $\frac{1}{18}\sin 9x + \frac{1}{10}\sin 5x + C$
	Д. $\arcsin\frac{x+2}{3} + C$
Ответ: 1__, 2__, 3__.	Е. $ctg^3 x - ctgx + x + C$.

6.15. Первообразные для функций $\frac{3}{(2x-1)^2}$ и $\frac{2}{\sqrt{4x^2+1}}$ соответственно равны …

1) $3\ln|x - 1| + C$ и $2\ln|4x^2 + 1| + C$;

2) $\frac{3}{2(1-2x)} + C$ и $\ln\left|2x + \sqrt{4x^2+1}\right| + C$;

3) $\frac{3}{(2x-1)^3} + C$ и $2\arcsin 2x + C$;

4) $-\frac{3}{2(2x-1)^3} + C$ и $arctg 2x + C$.

6.16. Применяя формулу интегрирования по частям $\int udv = uv - \int vdu$ для вычисления интеграла $\int x^2 arcctgx\, dx$, за u обозначим …

1) x^2; 2) $arcctgx$; 3) x^2 или $arcctgx$; 4) другой ответ.

6.17. Если $F'(x) = x^{-4}$ и $F(1) = 0$, то $F(-1)$ равно …

1) -1; 2) 0; 3) 1; 4) $^2/_3$; 5) $^2/_5$; 6) 2.

6.18. Универсальная тригонометрическая подстановка $x = tg\,\frac{x}{2}$ применяется для исчисления интегралов …

1) $\int \frac{dx}{7\sin x - 5\cos x + 31}$; 2) $\int tg^5 xdx$; 3) $\int \frac{dx}{\sin^2 x + 1}$;
4) $\int \sin^4 x\cos^2 xdx$; 5) $\int \frac{dx}{\sin^4 x\cos^2 x}$; 6) $\int \sin 3x \cdot \cos 2x dx$.

6.19. Верные равенства запишутся …

1) $\int \frac{3^x dx}{3^x + 4} = \log_3\left(3^x + 4\right) + C$; 2) $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^4 - 9}} = \arcsin 2x + C$;

3) $\int \sin^2 3xdx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{12}\sin 6x + C$; 4) $\int \frac{xdx}{4x^2 + x + 3} = \frac{1}{4}\ln\left|4x^2 + x + 3\right| + C$.

6.20. В результате подстановки $\frac{x+1}{x-1} = t^3$ интеграл $\int \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-2}} \cdot \frac{dx}{x+1}$ приводится к виду …

1) $\frac{2}{3}\int \frac{dt}{t^3}$; 2) $-\frac{3}{2}\int \frac{dt}{t^3}$; 3) $\frac{1}{3}\int \frac{dt}{t^3}$; 4) $-\frac{1}{3}\int \frac{dt}{t^3}$; 5) $\frac{3}{2}\int \frac{dt}{t^3}$.

6.21. Интеграл $\int \sqrt{x^2 + 25}dx$ вычисляется с помощью замены переменной …

1) $x^2 = 5t$; 2) $x = 5\sin t$; 3) $x = 5\cos t$; 4) $x = 5\mathrm{tg}t$; 5) $x^2 + 25 = t^2$.

6.22. Множество первообразных для функции $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$ имеет вид …

1) $x - \ln(e^x + 1) + C$; 2) $2\ln(e^x + 1) - x + C$; 3) $\ln(e^x + 1) + x + C$;
4) $\ln(e^x + 1) - 2x + C$; 5) $^1/_2\ln(e^x + 1) + x + C$; 6) $\ln(e^x + 1) - {}^1/_2\, x + C$

6.23. Подстановка для вычисления интеграла $\int \frac{\sqrt[4]{3x+5} + 2}{1 + \sqrt{3x+5}} dx$ равна ...

1) $3x + 5 = t^6$; 2) $3x + 5 = t^4$; 3) $3x + 5 = t^2$; 4) $3x + 5 = t^8$.

6.24. Неопределенные интегралы, при нахождении которых используется один и тот же табличный интеграл, имеют вид …

а) $\int \frac{\sin 2x dx}{6-3\cos 2x}$; б) $\int \frac{x}{4-x^2}dx$; в) $\int \frac{x^3 dx}{x-1}$; г) $\int x\cos 2x dx$.

1) б) и г); 2) а) и б); 3) а) и г);
4) а) и в); 5) б) и в); 6) все.

6.25. Правильная дробь $\frac{x^2-3}{(1-x)(2x+1)^2}$ разлагается на сумму простых дробей вида …

1) $\frac{Ax+B}{1-x}+\frac{C}{(2x+1)^2}$; 2) $\frac{A}{1-x}+\frac{Bx+C}{2x+1}$;

3) $\frac{A}{1-x}+\frac{B}{2x+1}+\frac{C}{(2x+1)^2}$; 4) $\frac{A}{1-x}+\frac{Bx+C}{(2x+1)^2}$.

6.26. Установить соответствие между интегралом и его значением

Интеграл	Значение интеграла
1. $\int \cos^2 \frac{x-4}{2}dx$	А. $5\ln(x^2-8x+17)-10arctg(x-4)+C$
2. $\int x\sqrt{x-4}dx$	Б. $0{,}2x - \sin(x - 4) + C$
3. $\int \frac{(10x-30)dx}{x^2-8x+17}$	В. $\frac{2\sqrt{(x-4)^5}}{5}+\frac{8\sqrt{(x-4)^3}}{3}+C$
	Г. $0{,}5x + 0{,}5\sin(x - 4) + C$
	Д. $\ln\frac{x-4}{x-1}+C$.
Ответ: 1__, 2__, 3__.	Е. $\arcsin(x - 4) + C$.

6.27. Если точки $A(4;0)$ и $B(-4;0)$ принадлежат графику первообразной функции $F(x)$ для функции $f(x) = \begin{cases} 1, x<1, \\ \frac{1}{\sqrt{x}}, x\ge 1 \end{cases}$, то значение функции $F(0)$ равно …

1) -4; 2) -3; 3) 1; 4) 2; 5) 3; 6) 4.

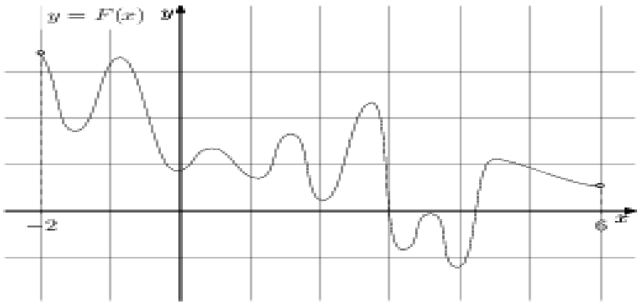
6.28. Если $f'(x) = \cos x$ и $f(e) = \pi$, то функция $f(x)$ имеет вид …

1) $f(x) = \sin x + \sin e - \pi$; 2) $f(x) = \sin x - \sin e + \pi$;

3) $f(x) = -\sin x - \pi$; 4) $f(x) = \sin x - \sin e - \pi$;

5) $f(x) = \sin x - \pi$; 6) $f(x) = -\sin x + \pi$.

6.29. На рисунке изображён график функции $F(x)$ - одной из первообразных некоторой функции $f(x)$, определённой на интервале (-2;6).



Количество решений уравнения $f(x) = 0$ на отрезке [-1;5] равно …

1) 11; 2) 10; 3) 9; 4) 7; 5) 3; 6) 2.

6.30. Правильно вычисленные неопределенные интегралы имеют вид …

1) $\int \frac{\cos^2 3x}{\sin^2 3x} dx = ctg 3x - x + C$;

2) $\int \ln(x+1) dx = (x+1)\ln(x+1) - x + C$;

3) $\int \frac{3x+5}{x^2+2x+5} dx = \ln\left|x^2+2x+5\right| - 3\operatorname{arctg}\frac{x+1}{2} + C$

4) $\int \frac{dx}{3\sin x - 4\cos x} = \frac{1}{5}\ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2} - \frac{1}{2}}{\operatorname{tg}\frac{x}{2} + 2}\right| + C$;

5) $\int \sqrt{4-x^2} dx = arcsin\frac{x}{2} + \frac{x\sqrt{4-x^2}}{2} + C$;

6) $\int \sqrt{\sin x} \cos x dx = \frac{2}{3}\sin^{\frac{3}{2}} x + C.$

3.4. Определенный интеграл, его геометрический смысл. Формула Ньютона-Лейбница

Пусть на плоскости задана прямоугольная декартовая система координат и определена ограниченная функция $f:[a,b]\to R$, причем $f(x)\geq 0,\quad \forall x\in[a,b]$. Плоская фигура D, ограниченная осью абсцисс, прямыми $x=a,\quad x=b$ и кривой $y=f(x)$ называется *криволинейной трапецией*. Определим площадь S криволинейной трапеции (рис. 3.2).

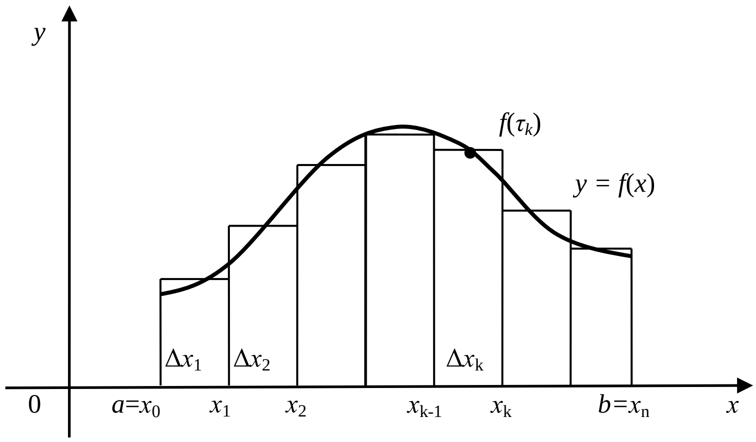


Рисунок 3.2. – Площадь криволинейной трапеции

Для вычисления площади разобьём весь интервал $a\leq x\leq b$ на малые промежутки Δx_k. Считая на каждом промежутке Δx_k высоту постоянной и равной 3, причём $f(x_{k-1})\leq f\left(\tau_k\right)\leq f\left(x_k\right)$, площадь криволинейной трапеции приближённо вычисляется как сумма площадей прямоугольников $S_k=f\left(\tau_k\right)\Delta x_k$, т. е. выполняется приближенное равенство:

$$S\approx\sum_{k=1}^{n}f\left(\tau_k\right)\cdot\Delta x_k\,. \qquad (3.33)$$

Составленная сумма называется *интегральной суммой* для данного разбиения при данном выборе точек τ. Точное значение площади получим с помощью предельного перехода:

$$S=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\tau_k)\cdot \Delta x_k=\int_a^b f(x)dx, \text{ где } \lambda=\max_k\{\Delta x_k\}. \qquad (3.34)$$

Если при любых разбиениях отрезка [a; b] таких, что $\max\limits_k\{\Delta x_k\}\to 0$, и при любом выборе точек τ_k на отрезках $[x_{k-1};x_k]$ сумма $S_k=f(\tau_k)\Delta x_k$ стремится к одному и тому же пределу S, то этот предел называется *определённым интегралом* от функции f (x) на отрезке [a; b] и обозначается $\int\limits_a^b f(x)dx$, т.е. формула (3.34) приводит к понятию определенного интеграла. Число a называют *нижним пределом* интегрирования**,** b – *верхним пределом* интегрирования, отрезок [a; b] называют *промежутком интегрирования*, x – *переменной интегрирования*, $f(x)$ – подынтегральная функция; $f(x)dx$ – подынтегральное выражение.

Далее, возвращаясь к задаче о *площади криволинейной трапеции* и применяя определение определенного интеграла, заключаем, что

$$S=\int_a^b f(x)dx. \qquad (3.35)$$

Геометрический смысл определенного интеграла состоит в том, что определенный интеграл от неотрицательной функции численно равен площади соответствующей криволинейной трапеции.

Функция, для которой на отрезке существует определенный интеграл, называется *интегрируемой* на этом отрезке. Для интегрируемости функции достаточно, чтобы она была непрерывна на отрезке [a; b].

Если функция $y=f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a;b]$ и $F(x)$ - ее первообразная, также непрерывная на данном отрезке, то определённый интеграл вычисляется по *формуле Ньютона-Лейбница*:

$$\int_a^b f(x)dx=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a). \qquad (3.36)$$

3.5. Свойства определенного интеграла

Определенный интеграл обладает следующими свойствами:

1. Постоянный множитель можно выносить за знак определённого интеграла (*однородность*), т.е.

$$\int_a^b A\cdot f(x)dx = A\cdot\int_a^b f(x)dx,\ \text{где } A - \text{const.}$$

2. Определённый интеграл от алгебраической суммы нескольких функций равен алгебраической сумме интегралов от каждого слагаемого (*аддитивность*), т.е.

$$\int_a^b [f(x)\pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx.$$

3. Если промежуток интегрирования [*a*; *b*] разбит точкой *c* на два отрезка [*a*; *c*] и [*c*; *b*], интеграл по всему отрезку равен сумме интегралов по его частям (*аддитивность по отрезку*), т.е.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx, \qquad (3.37)$$

где *c* – некоторая точка, находящаяся внутри интервала, $c\in[a;b]$.

4. Определённый интеграл меняет знак на противоположный при изменении верхней границы интегрирования на нижнюю, а нижней – на верхнюю (*ориентированность*), т.е.

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx. \qquad (3.38)$$

5. Если пределы интегрирования равны между собой, то определенный интеграл равен нулю, т.е.

$$\int_a^a f(x)dx = 0. \qquad (3.39)$$

6. Определенный интеграл в симметричных пределах определяется по формуле:

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \begin{cases} 2\int_{0}^{a} f(x)dx, \text{если } f(x) - \text{четная функция;} \\ 0, \quad \text{если } f(x) - \text{нечетная функция.} \end{cases} \tag{3.40}$$

7. Если на отрезке $[a;b]$, где $a < b$ функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ удовлетворяют условию $f(x) \le \varphi(x)$, то выполняется неравенство (*монотонность*)

$$\int_{a}^{b} f(x)dx \le \int_{a}^{b} \varphi(x)dx. \tag{3.41}$$

8. Если функция $f(x)$ интегрируема на $[a;b]$, где $m = \inf f(x)$, $M = \sup f(x)$, и имеет место неравенство $m \le f(x) \le M$, то справедливо неравенство

$$m(b-a) \le \int_{a}^{b} f(x)dx \le M(b-a). \tag{3.42}$$

9. (*Теорема о среднем*) Если функция $f(x)$ непрерывна на $[a;b]$, то на этом отрезке существует такая точка $c \in [a;b]$, что выполняется равенство

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = f(c)(b-a). \tag{3.43}$$

Геометрический смысл этой теоремы: значение определенного интеграла при некотором $c \in [a;b]$ *равно площади прямоугольника с высотой* $f(c)$ *и основанием* $(b-a)$. Число

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_{a}^{b} f(x)dx \tag{3.44}$$

называется *средним значением* функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$.

Пример 3.20. Вычислить $\int_{1}^{3}\left(\frac{1}{x} - 7\sqrt{x} + 2\cos 3x - 5e^{x} + 8\right)dx$.

Решение. Применяя свойства определенного интеграла, табличные интегралы и формулу Ньютона – Лейбница, получим

$$\int_1^4\left(\frac{1}{x}-7\sqrt{x}+2\cos 3x-5e^x+8\right)dx=(\ln|x|-\frac{14\sqrt{x^3}}{3}+\frac{2}{3}\sin 3x-$$
$$-5e^x+8x)\Big|_1^4=\ln 4-\frac{112}{3}+\frac{2}{3}\sin 4-5e^4+32-\ln 1+\frac{14}{3}-$$
$$-\frac{2}{3}\sin 1+5e-8=\ln 4+\frac{2}{3}\sin 4-\frac{2}{3}\sin 1-5e^4+5e-\frac{26}{3}.$$

В этом состоит *метод непосредственного вычисления* определенного интеграла.

3.6. Методы интегрирования в определенном интеграле

3.6.1. Замена переменной в определенном интеграле

Пусть дан неопределённый интеграл $\int f(x)dx$. Известно, что для нахождения первообразной с помощью замены переменной $x=\varphi(t)$ справедлива формула (3.9):

$$\int f(x)dx=\int f(\varphi(t))\varphi_t'dt\cdot$$

Для определённого интеграла эта формула запишется в виде

$$\int_a^b f(x)dx=\int_c^d f(\varphi(t))\varphi_t'dt, \qquad (3.44)$$

где *c* и *d*, отличные от *a*, *b*, – пределы интегрирования, которые вычисляются при подстановке старых пределов интегрирования *a*, *b* в формулу:

$$x=\varphi(t) \text{ или } a=\varphi(c),\ \ b=\varphi(d), \text{ где } c\le t\le d\,. \qquad (3.45)$$

Пример 3.21. Вычислить $\int_1^7\frac{dx}{4x+5}$.

Решение. Заменяя $4x+5=y$, находим $4dx=dy$, $dx=\frac{dy}{4}$.

Вычисляемый интеграл $\int\frac{dx}{4x+5}=\frac{1}{4}\int\frac{dy}{y}$ свёлся к табличному. Найдём новые пределы интегрирования по формуле: $y=4x+5$. Нижний предел y при

$x = 1$ равен $y = 4 \cdot 1 + 5 = 9$, а верхний предел y при $x = 7$ равен $y = 4 \cdot 7 + 5 = 33$. Тогда вычисление интеграла запишется

$$\int_1^7 \frac{dx}{4x+5} = \frac{1}{4}\int_9^{33} \frac{dy}{y} = \frac{1}{4}\ln|y|\Big|_9^{33} = \frac{1}{4}\left(\ln|33| - \ln|9|\right) = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{33}{9}\right| = \frac{1}{4}\ln\frac{33}{9}.$$

Замечание. При вычислении определенных интегралов методом подстановки не надо возвращаться к первоначальной переменной x, как это требовалось при вычислении неопределенных интегралов, нужно только пересчитать новые границы интегрирования c и d из равенств (3.45).

Все методы нахождения неопределенных интегралов распространяются на вычисление определенных интегралов. В результате вычисления определенного интеграла всегда получается числовое значение.

Пример 3.22. Вычислить интеграл $\int_3^8 \frac{xdx}{\sqrt{1+x}}$.

Решение. Применим подстановку $\sqrt{1+x} = t$, или $1+x = t^2$, $x = t^2 - 1$; $dx = 2tdt$; определим границы интегрирования: при $x = 3$ $c = \sqrt{1+3} = 2$ (*нижний предел*), при $x = 8$ $d = \sqrt{1+8} = 3$ (*верхний предел*). Следовательно, применяя формулу (3.44), получим:

$$\int_3^8 \frac{xdx}{\sqrt{1+x}} = \int_2^3 \frac{(t^2-1)\cdot 2tdt}{t} = 2\int_2^3 (t^2-1)dt = 2\left(\frac{t^3}{3} - t\right)\Bigg|_2^3 = 10\frac{2}{3}.$$

3.6.2. Интегрирование по частям в определенном интеграле

Если $u = u(x)$ и $v = v(x)$ непрерывные функции на отрезке $[a;b]$, имеющие непрерывные производные на этом отрезке, то имеет место *формула интегрирования по частям в определенном интеграле:*

$$\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu, \qquad (3.46).$$

Здесь, также как и в методе интегрирования по частям в неопределенном интеграле, в заданном интеграле $\int_a^b u\cdot dv$ множитель, включающий dv, должен быть легко интегрируемым. Типы интегралов, к которым применяется формула (3.46), такие же, как и в неопределенном интеграле.

Пример 3.23. Вычислить $\int_0^{\pi/4} \operatorname{arctg} x dx$.

Решение. Полагая $u = \operatorname{arctg} x$, получим $du = \dfrac{dx}{1+x^2}$

$$dv = dx \qquad\qquad v = x.$$

Согласно формуле интегрирования по частям (3.44), находим:

$$\int_0^{\pi/4} \operatorname{arctg} xdx = x\operatorname{arctg} x\Big|_0^{\pi/4} - \int_0^{\pi/4} \frac{xdx}{1+x^2} = x\operatorname{arctg} x\Big|_0^{\pi/4} - \frac{1}{2}\ln\left|1+x^2\right|\Big|_0^{\pi/4} =$$

$$= \frac{\pi}{4}\operatorname{arctg}\frac{\pi}{4} - 0\cdot\operatorname{arctg}0 - \frac{1}{2}\left(\ln\left|1+\frac{\pi^2}{16}\right| - \ln|1+0|\right) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln\left|1+\frac{\pi^2}{16}\right|.$$

3.7. Геометрические приложения определенного интеграла

3.7.1. Площадь плоской фигуры

А. *Вычисление площади плоской фигуры в декартовых координатах*

Если функция $y = f(x) \geq 0$ на отрезке $[a;b]$ (рис. 3.2), то на основании геометрического смысла определенного интеграла, площадь фигуры находится по формуле (3.35)

$$S = \int_a^b f(x)dx.$$

Если функция $y = f(x) \le 0$ на отрезке [a; b] (рис. 3.3), то площадь фигуры находится по формуле

$$S = -\int_a^b f(x)dx. \qquad (3.45)$$

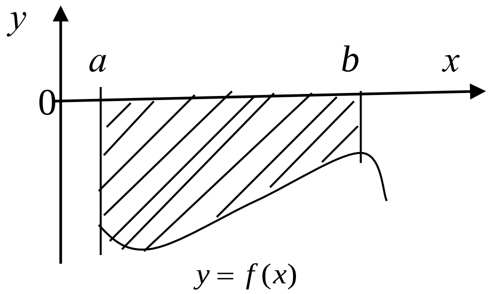


Рисунок 3.3. – Криволинейная трапеция, расположенная ниже оси Оx

В некоторых случаях, чтобы вычислить площадь искомой фигуры, необходимо разбить ее на сумму двух или более криволинейных трапеций и применить формулы (3.35) или (3.45) (рис. 3.4)

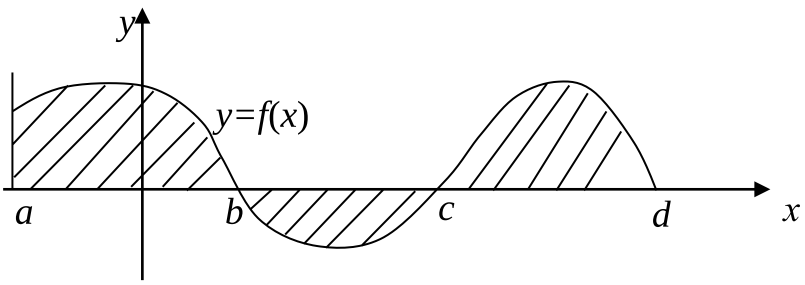


Рисунок 3.4. – Криволинейная трапеция, состоящая из суммы трех криволинейных трапеций

Если фигура ограничена двумя кривыми $y = f(x)$, $y = \varphi(x)$ и прямыми $x = a$, $x = b$, причем $f(x) \ge \varphi(x)$ на отрезке $[a; b]$ (рис. 3.5), то ее площадь вычисляется по формуле:

$$S = \int_a^b [f(x) - \varphi(x)]dx. \qquad (3.46)$$

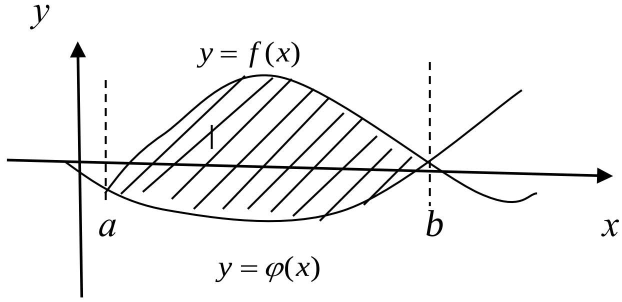


Рисунок 3.5. – Плоская фигура образована двумя пересекающимися кривыми

Чтобы найти точку пересечения кривых $y = f(x)$ и $y = \varphi(x)$, нужно решить уравнение $f(x) = \varphi(x)$. Корни данного уравнения определят *абсциссы точек пересечения этих кривых*, т.е. *пределы интегрирования*.

Пример 3.24. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой $y = -\frac{x^2}{2} + 2x + 6$ и прямой $y = x + 2$ (см. рис.).

Решение. Построим фигуру, площадь которой надо определить. Найдем точки пересечения прямой и параболы, решив квадратное уравнение $-\frac{x^2}{2} + 2x + 6 = x + 2$, корни которого $x = -2$ и $x = 4$. Следовательно, по формуле (3.46) искомая площадь фигуры будет равна:

$$S = \int_{-2}^{4} \left(2x - \frac{x^2}{2} + 6 - 2 - x \right) dx = = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + 4x \right) \Bigg|_{-2}^{4} = 8 - \frac{64}{6} + 16 - 2 -$$
$$- \frac{8}{6} + 8 = 30 - 12 = 18(ед.^2)$$

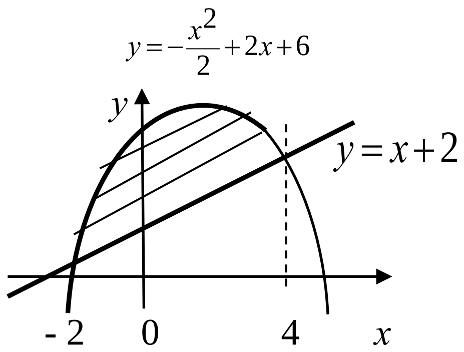


Рисунок к *примеру* 3.24.

Б. *Вычисление площади фигуры, ограниченной линией, заданной параметрически*

Пусть кривая задана параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, то площадь криволинейной трапеции, ограниченной этой кривой, прямыми $x = a$ и $y = b$ и отрезком $[a; b]$ оси Ox, выражается формулой

$$S = \int_{t_1}^{t_2} y(t) \cdot x'(t) dt, \tag{3.47}$$

где $t_1 \le t \le t_2$, $y(t) \ge 0$, t_1 и t_2 определяются из условий $a = x(t_1),\ b = x(t_2)$.

Пример 3.25. Найти площадь фигуры, ограниченной эллипсом, полуоси которого равны a и b.

Решение. Введем декартовую систему координат, поместив ее начало координат, в центр эллипса (см. рис.).

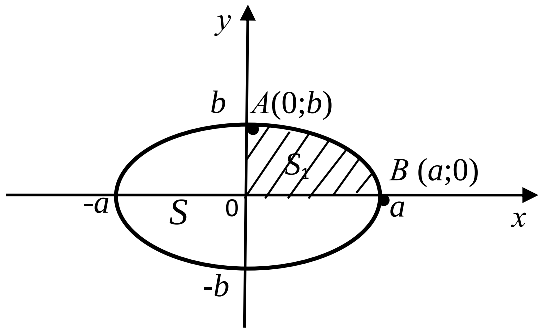


Рисунок к *примеру* 3.25

Тогда эллипс задается параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t, \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$$

где параметр t это угол, образованный радиус-вектором точки эллипса с осью абсцисс. Используя симметричность эллипса, вычислим площадь S_1, равную одной четверти S. Тогда площадь эллипса равна $S = 4 \cdot S_1$.

Площадь S_1 вычислим по формуле (3.47):

$$S_1 = \int_{\alpha}^{\beta} ab\sin t \cdot (-\sin t)dt = -ab\int_{\alpha}^{\beta} \sin^2 t dt. \qquad (**)$$

Пределы интегрирования $[\alpha;\beta]$ по параметру t найдём из решения систем уравнений вида:

$$\begin{cases} a = a\cos t \\ 0 = b\sin t \end{cases} \text{ для точки } B \text{ и } \begin{cases} 0 = a\cos t \\ a = b\sin t \end{cases} \text{ для точки } A.$$

Решая системы

$$\begin{cases} \cos t = 1 \\ \sin t = 0 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} \cos t = 0 \\ \sin t = 1 \end{cases}$$

получим, что точке B соответствует значение $t = 0$, а точке A– значение $t = \frac{\pi}{2}$. Подставляя найденные пределы интегрирования в формулу (**) найдём

$$S_1 = -ab\int_{\pi/2}^{0} \sin^2 t dt = ab\int_{0}^{\pi/2} \frac{1-\cos 2t}{2} dt = \frac{ab}{2}\left(t - \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{\pi/2} = \frac{ab}{2}\left(\frac{\pi}{2} - 0 - 0\right) = \frac{\pi ab}{4}.$$

Площадь эллипса равна $S = 4 \cdot S_1 = 4 \cdot \frac{\pi ab}{4} = \pi ab$.

Отметим, что формула нахождения площади круга получается как частный случай из формулы нахождения площади эллипса. Действительно, полагая $a = b = R$ в $S = \pi ab$, приходим к известной формуле площади круга $S = \pi R^2$.

В. *Вычисление площади плоской фигуры в полярных координатах*

В полярных координатах положение точки на плоскости $M(\varphi;\rho)$ определяется двумя координатами: полярным радиусом $\rho(\rho \geq 0)$ и полярным углом φ. Связь между декартовыми координатами $(x;y)$ и полярными $(\varphi;\rho)$ осуществляется по формулам

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi, \end{cases} \qquad \rho = \sqrt{x^2 + y^2}. \qquad (*)$$

Фигуру, ограниченную линиями $\varphi_1=\alpha$, $\varphi_2=\beta$, $\rho = \rho(\varphi)$ будем называть *криволинейным сектором*.

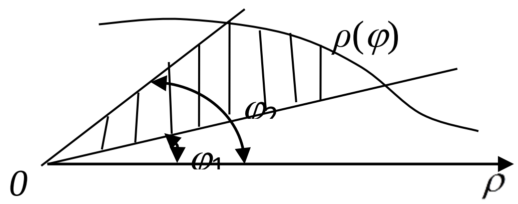


Рисунок 3.6. – Криволинейный сектор

Площадь криволинейного сектора выражается определенным интегралом

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi)d\varphi. \qquad (3.48)$$

Пример 3.26. Найти площадь фигуры, ограниченной линией $r = a\cos 3\varphi$.

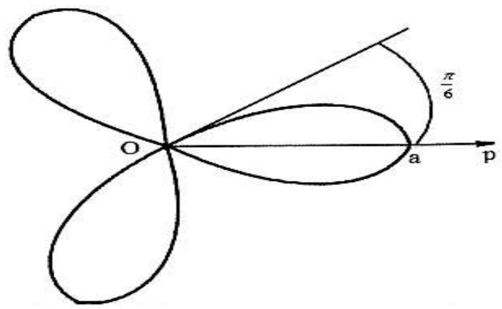


Рисунок 3.7. к *примеру* 3.26

Решение. Сначала по формуле (3.48) найдем $^1/_6$ всей площади искомой фигуры, представляющую собой площадь половины лепестка «розы»

$$\frac{1}{6}S = \frac{a^2}{4}\left(\varphi\Big|_0^{\pi/6} + \frac{1}{6}\sin 6\varphi\Big|_0^{\pi/6}\right) = = \frac{a^2}{4}\left(\frac{\pi}{6} + 0\right) = \frac{\pi a^2}{24}.$$

$$= \frac{a^2}{4}\left(\varphi\Big|_0^{\pi/6} + \frac{1}{6}\sin 6\varphi\Big|_0^{\pi/6}\right) = = \frac{a^2}{4}\left(\frac{\pi}{6} + 0\right) = \frac{\pi a^2}{24}.$$

Таким образом, вся искомая площадь $S = 6 \cdot \frac{\pi a^2}{24} = \frac{\pi a^2}{6}$ (единиц площади).

3.7.2. Длина дуги плоской кривой

Пусть функция $f(x)$ непрерывно дифференцируема на $[a;b]$, тогда длина дуги кривой $y = f(x)$ на указанном промежутке вычисляется по формуле

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx. \tag{3.49}$$

Если кривая задана параметрически, то длина дуги этой кривой при $t_1 \le t \le t_2$ вычисляется по формуле

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\,dt. \tag{3.50}$$

Если кривая задана в полярных координатах $\rho = \rho(\varphi)$ и $\alpha \le \varphi \le \beta$, то длина ее дуги равна

$$L=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{\rho^2(\varphi)+\left[\rho'(\varphi)\right]^2}\,d\varphi\,. \tag{3.51}$$

Во всех формулах для вычисления длины дуги плоской кривой (этот дифференциал обозначим через dl, то при различных способах задания кривой он находится по формулам

$$dl=\sqrt{1+\left[f'(x)\right]^2}\,dx,\quad dl=\sqrt{\left[\varphi'(t)\right]^2+\left[\psi'(t)\right]^2}\,dt, \tag{3.52}$$
$$dl=\sqrt{\rho^2(\varphi)+\left[\rho'(\varphi)\right]^2}\,d\varphi.$$

Таким образом, в любом случае длина дуги находится по формуле

$$L=\int_{\alpha}^{\beta}dl\,,$$

где числами α и β определяются концы этой дуги.

Пример 3.27. Найти длину окружности радиуса a.

Решение. Если начало координат поместить в центр, то окружность имеет уравнение $x^2+y^2=a^2$. В силу симметричности данной окружности, для вычисления ее длины нужно учетверить длину дуги в первой четверти, которая имеет уравнение $y=\sqrt{a^2-x^2}$. Следовательно,

$$L=4\int_0^a\sqrt{1+\left(-\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}\right)^2}\,dx=4a\int_0^a\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=$$
$$=4\arcsin\frac{x}{a}\bigg|_0^a=2\pi a.$$

3.7.3. Объем тел вращения

Предположим, что площадь сечения тела плоскостью, перпендикулярной оси Ox, может быть выражена функцией $S=S(x)$ при $x\in[a;b]$, тогда объем тела, заключенный между перпендикулярными оси Ox плоскостями $x=a$ и $x=b$, находится по формуле

$$V = \int_a^b S(x)dx. \qquad (3.53)$$

Если криволинейную трапецию (рис. 3.7) вращать вокруг оси *Ox*,

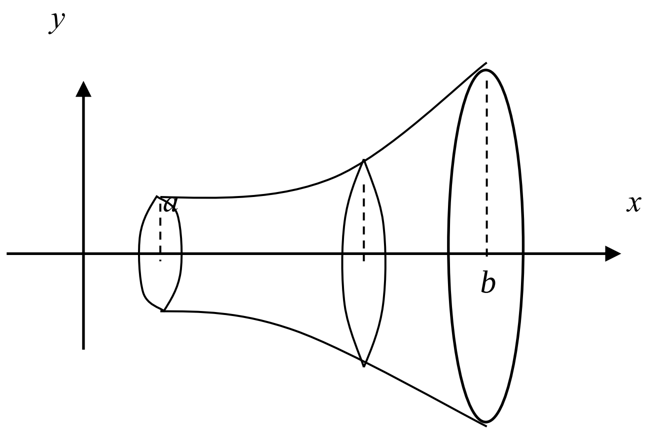


Рисунок 3.7. – Тело, образованное вращением криволинейной трапеции вокруг оси *Ox*

то объем тела вращения будет равен

$$V_x = \pi \int_a^b f^2(x)dx. \qquad (3.54)$$

Если плоская область, ограниченная кривыми $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$ и прямыми $x = a$ и $x = b$, вращается вокруг оси *Ox*, то справедлива формула для вычисления полученного тела

$$V_x = \pi \cdot \int_a^b \left[f_2^2(x) - f_1^2(x) \right] dx, \quad (0 \le f_1(x) \le f_2(x)) \qquad (3.55)$$

Аналогично можно записать формулу для вычисления объема тела вращения вокруг оси *Oy*

$$V_y = \pi \int_c^d x^2(y)dy, \qquad (3.56)$$

Если кривые, ограничивающие плоскую область заданы в параметрическом виде, то к формулам (3.54 - 3.56) следует применить соответствующие замены переменной.

Если криволинейный сектор вращать вокруг полярной оси, то объем полученного тела вращения определится по формуле

$$V = \frac{2}{3}\pi \int_\alpha^\beta \rho^3(\varphi)\sin\varphi d\varphi. \qquad (3.57)$$

Пример 3.28. Вычислить объем тела, полученного при вращении дуги кривой $y = chx$, $0 \le x \le 1$ вокруг оси Ox,.

Решение. Данная кривая $y = chx = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ называется *цепной линией*. График ее изображен на рисунке 3.8. Объем тела вращения (рисунок к *примеру* 3.28) вычислим по формуле (3.54).

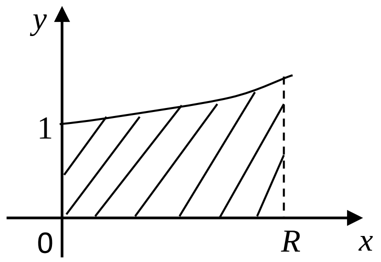


Рисунок 3.8.- График цепной линии

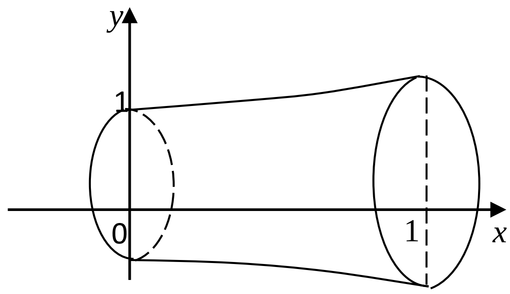


Рисунок к *примеру* 3.28

$$V_x = \pi\int_0^1 ch^2 x dx = \pi\int_0^1 \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 dx = \frac{\pi}{4}\int_0^1 (e^{2x} + 2\cdot e^x \cdot e^{-x} + e^{-2x})dx =$$

$$= \frac{\pi}{4}\int_0^1 (e^{2x} + 2 + e^{-2x})dx = \frac{\pi}{4}\cdot\left(\frac{e^{2x}}{2} + 2x - \frac{e^{-2x}}{2}\right)\Bigg|_0^1 =$$

$$= \frac{\pi}{4}\left(\frac{e^2}{2} + 2 - \frac{e^{-2}}{2}\right) - \frac{\pi}{4}\left(\frac{e^0}{2} + 0 - \frac{e^0}{2}\right) = \frac{\pi}{4}\left(2 + \frac{e^2 - e^{-2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4}(2 - sh2).$$

Пример 3.29. Найти объем параболоида вращения, радиус основания которого равен *R*, а высота $-H$.

Решение. Искомый параболоид вращения с указанными параметрами получится, если будем вращать вокруг оси *Oy* параболу $y = kx^2$, $0 \le y \le H$ (см рис.), где параметр *k* легко вычислить исходя из данного условия.

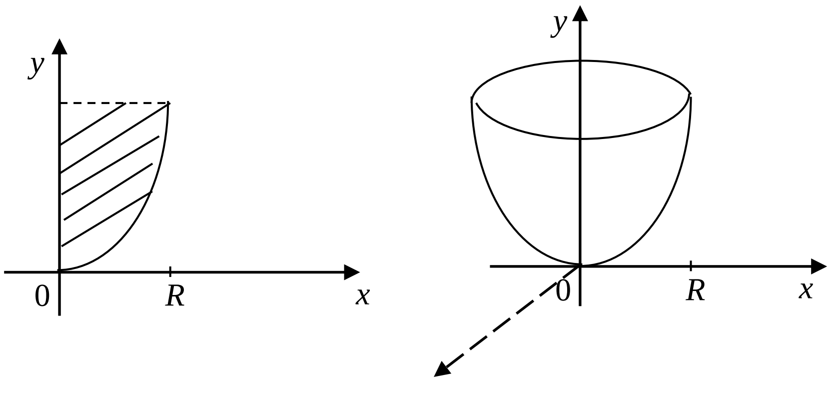


Рисунок к *примеру* 3.29

Если $x = R$, то $y = H$, поэтому

$$H = kR^2 \Rightarrow k = \frac{H}{R^2} \Rightarrow y = \frac{H}{R^2} \cdot x^2 .$$

Далее воспользуемся формулой (3.56). Если

$$y = \frac{H}{R^2} \cdot x^2, \quad \text{то} \quad x^2 = \frac{R^2}{H} \cdot y$$

$$V_y = \pi \cdot \int_0^H \frac{R^2}{H} \cdot y dy = \pi \cdot \frac{R^2}{H} \cdot \frac{y^2}{2} \Bigg|_0^H = \frac{\pi \cdot R^2}{H} \cdot \frac{H^2}{2} = \frac{1}{2} \pi R^2 H \ \text{(ед}^3\text{)}.$$

3.7.4. Площадь поверхности вращения

Площадь поверхности, образованной вращением гладкой кривой AB вокруг оси Ox, равна

$$Q_X = 2\pi \int_A^B |y| \, dl,$$

где dl – дифференциал дуги кривой.

В зависимости от задания кривой – явное, в параметрическом виде или в полярных координатах – указанную формулу можно расписать так

$$Q_x = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} \, dx . \tag{3.58}$$

$$Q_x = 2\pi \int_a^b y(t) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} \, dt . \tag{3.59}$$

$$Q_x = 2\pi \int_\alpha^\beta \rho \sin\varphi \sqrt{\rho^2(\varphi) + [\rho'(\varphi)]^2} \, d\varphi . \tag{3.60}$$

Площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси Oy дуги кривой $x = \varphi(y)$, заключенной между точками с ординатами $y = c$ и $y = d$, вычисляется по формуле:

$$Q_y = 2\pi\int_c^d x(y)\sqrt{1+x'(y)}dy. \qquad (3.61)$$

Пример 3.30. Найти площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси *Ox* дуги кривой $3y - x^3 = 0$, $0 \le x \le 1$.

Решение. $3y - x^3 = 0$ или $y = \frac{1}{3}x^3$, $y' = \left(\frac{1}{3}x^3\right)' = x^2$

Воспользуемся формулой (3.58)

$$Q_x = 2\pi\int_0^1 \frac{1}{3}x^3 \cdot \sqrt{1+(x^2)^2}dx = \frac{2\pi}{3\cdot 4}\int_0^1 (1+x^4)^{\frac{1}{2}} d(1+x^4) =$$

$$= \frac{\pi}{6}\cdot\frac{2}{3}(1+x^4)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 = \frac{2}{9}\pi(2^{\frac{3}{2}} - 1) = \frac{2}{9}\pi(2\sqrt{2} - 1).$$

3.8. Физические приложения определенного интеграла

Напомним некоторые понятия из физики.

Статическим моментом M_x (M_y) *системы материальных точек* относительно оси *Ox* (*Oy*) называется *сумма произведений масс этих точек на их ординаты*.

Центром тяжести $C(x_C;\ y_C)$ материальной *плоской кривой* $y = f(x)$, $x \in [a;b]$ называется точка плоскости, обладающая следующим свойством: если в этой точке сосредоточить всю массу m заданной кривой, то статический момент этой точки относительно любой координатной оси будет равен статическому моменту всей кривой $y = f(x)$ относительно той же оси.

Моментами инерции I_x и I_y *системы материальных точек* относительно осей *Ox* и *Oy* называются *суммы произведений масс точек на квадраты их расстояний от соответствующей оси*.

Материальная плоская кривая или плоская фигура называются *однородными*, если их линейная плотность принимает постоянное значение.

Приведем в виде таблицы физические приложения определенного интеграла.

Таблица 3.2.

Физические приложения определенного интеграла

Физическая величина	Известные данные	Формула для вычисления
1	2	3
Путь, пройденный телом, S	$v = v(t)$ – скорость материальной точки, $t_1 \le t \le t_2$ - время	$S = \int_{t_1}^{t_2} v(t)dt$. (3.62)
Работа переменной силы, A	F – переменная сила, S – вектор перемещения точки, $a \le S \le b$	$A = \int_a^b F(x)dx$. (3.63)
Работа электродвигателя переменной мощности, A	$N(t)$ – мощность в момент времени t, $t \in [a;b]$ - промежуток времени	$A = \int_a^b N(t)dt$. (3.64)
Сила давления жидкости, P	$\rho(x)$- плотность, g= 9,8$^{м}/_{с}{}^{2}$ – ускорение свободного падения а) $y = f(x), x \in [a;b]$	$P = g\int_a^b \rho x f(x)dx$. (3.65)
	б) $y = y_1(x)$, $y = y_2(x)$, $x \in [a;b]$	$P = g\int_a^b \rho x[y_2 - y_1]dx$. (3.66)
Для плоской линии		
Масса, m	$\rho(x)$- плотность, $y = f(x), x \in [a;b]$	$m = \int_a^b \rho\sqrt{1+[f'(x)]^2}dx$. (3.67)
Статические моменты, M_x и M_y		$M_x = \int_a^b \rho y\sqrt{1+[f'(x)]^2}dx$. (3.68) $M_y = \int_a^b \rho x\sqrt{1+[f'(x)]^2}dx$. (3.69)

Координаты центра тяжести, x_C и y_C		$x_C = \dfrac{M_y}{m}, y_C = \dfrac{M_x}{m}$. (3.70)
Моменты инерции, I_x, I_y и I_o	$\rho(x)$- плотность, $y = f(x), x \in [a;b]$	$I_x = \int\limits_a^b \rho y^2 \sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx$. (3.71) $I_y = \int\limits_a^b \rho x^2 \sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx$. (3.72) $I_o = I_x + I_y$. (3.73)
Для плоской фигуры (пластины)		
Масса, m	$\rho(x)$- плотность, $y = f(x), x \in [a;b]$	$m = \int\limits_a^b \rho \cdot y dx$. (3.74)
Статические моменты, M_x и M_y		$M_x = \dfrac{1}{2}\int\limits_a^b \rho \cdot y^2 dx,$ $M_y = \int\limits_a^b \rho xy dx$. (3.75)
Моменты инерции, I_x, I_y и I_o		$I_x = \dfrac{1}{2}\int\limits_a^b \rho \cdot y^3 dx$, $I_y = \int\limits_a^b \rho \cdot x^2 y dx$. (3.76) $I_o = I_x + I_y$. (3.77)
Координаты центра тяжести, x_C и y_C		$x_C = \dfrac{M_y}{m}, y_C = \dfrac{M_x}{m}$. (3.78)

Рассмотрим примеры на физические приложения определенного интеграла.

Пример 3.31. Материальная точка движется прямолинейно со скоростью $v(t) = 3t^2 + 2t + 1$ (м/с). Найти путь, пройденный точкой за промежуток времени [0;3].

Решение. Согласно выше приведенной формуле (3.62), имеем

$$S = \int\limits_0^3 \left(3t^2 + 2t + 1\right)dt = \left(t^3 + t^2 + t\right) = 39.$$

Пример 3.32. Какую работу нужно затратить, чтобы растянуть пружину на 0,08 м, если сила 100 Н растягивает эту пружину на 0,01 м?

Решение. Пусть x м – растяжение пружины. Тогда по закону Гука упругая сила, растягивающая пружину, пропорциональна этому растяжению с некоторым коэффициентом k, то есть $F = kx$. По условию задачи для растяжения $x = 0{,}01$ необходима сила $F=100$ Н. Отсюда коэффициент пропорциональности $k = \dfrac{F}{x} = \dfrac{100}{0{,}01} = 10000$ и сила $F=10000x$. Искомая работа на основании формулы (3.63) равна:

$$A = \int\limits_0^{0,08} 10000x\,dx = 10000\frac{x^2}{2}\Bigg|_0^{0,08} = 5000\cdot(0{,}08)^2 = 32(\textit{Дж}).$$

Пример 3.33. Цилиндр наполнен газом под атмосферным давлением (103,3 кПа). Считая газ идеальным, определить работу (в джоулях) при изотермическом сжатии газа поршнем, переместившимся внутрь цилиндра на h = 0,2 м при H = 0,4, R = 0,1 м (см. рисунок к примеру).

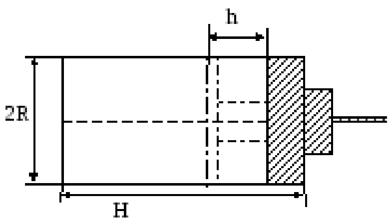


Рисунок к *примеру* 3.33.

Решение. Уравнение состояния газа имеет вид PV = const, где P – давление, V – объем. Такая работа будет вычисляться по формуле $A = \int\limits_{V_1}^{V_2} PdV$, где объем цилиндра определяется как $V = \pi R^2 H$.

Тогда $V_1 = \pi 0{,}1^2 \cdot 0{,}4 = 0{,}004\,\pi$, $V_2 = \pi 0{,}1^2 \cdot 0{,}2 = 0{,}002\,\pi$. Искомая работа определится

$$A = \int\limits_{0,004\pi}^{0,002\pi} 103{,}3\cdot 10^3\,dV = 103{,}3\cdot 10^3 V\Big|_{0,004\pi}^{0,002\pi} = -206{,}6\,\textit{Дж}.$$

Пример 3.34. Аквариум имеет форму прямоугольного параллелепипеда. Найдем силу давления воды (плотность воды 1000 кг/м^3), наполняющей аквариум, на одну из его вертикальных стенок, размеры которой 0,4 м x 0,7 м.

Решение. Выберем систему координат так, чтобы оси Oy и Ox соответственно содержали верхнее основание и боковую сторону вертикальной стенки аквариума. Для нахождения силы давления воды на стенку воспользуемся формулой (3.65). Стенка имеет форму прямоугольника, поэтому $f(x) = 0{,}7x$, $x \in [0;0{,}4]$ Так как пределы интегрирования $a = 0$ и $b = 0{,}4$, то получим

$$P = g\int_a^b \rho x f(x)dx = 9{,}8\int_0^{0,4} 1000 \cdot 0{,}7x^2 dx = 6860\frac{x^3}{3}\Bigg|_0^{0,4} \approx 2286{,}7(0{,}064 - 0) = 146{,}3H.$$

Пример 3.35. Вычислить силу, с которой вода давит на плотину, имеющую форму равнобочной трапеции, верхнее основание которой равно $a = 70$ м, нижнее – $b = 50$ м, а высота $H = 20$ м. Плотность воды 1000 кг/м^3.

Решение. Выберем систему координат и построим чертеж.

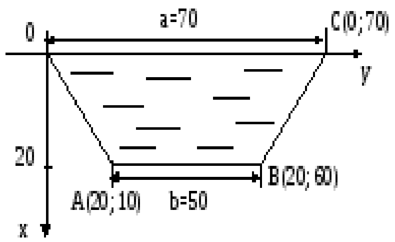


Рисунок к *примеру* 3.35.

Координаты точек A, B и C легко определяются из чертежа: $A(20;\ 10)$, $B(20;\ 60)$, $C(0;\ 70)$. Уравнения линий OA и BC определим по формуле уравнения прямой, проходящей через две заданные точки $\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$.

Тогда уравнение линии OA имеет вид $y = 0{,}5x$, а уравнение линии BC: $y = -0{,}5x + 70$. По формуле (3.66) расчета силы давления на пластинку при $a = 0$, $b = 20$, $y_1 = 0{,}5x$, $y_2 = -0{,}5x + 70$ вычислим

$$P = g\rho\int_0^{20} x(-0{,}5x + 70 - 0{,}5x)dx = g\rho\int_0^{20}(-x^2 + 70x)dx =$$

$$= g\rho\left(-\frac{x^3}{3} + 70\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^{20} = 114{,}97 \cdot 10^6 H.$$

Пример 3.36. Найти статические моменты и моменты инерции относительно осей Ox и Oy дуги цепной линии $y = chx$ при $0 \le x \le 1$.

Решение. Определим производную цепной линии, найдем элемент дифференциала дуги $y' = shx$, $\sqrt{1+[f'(x)]^2} = \sqrt{1+sh^2x} = chx$ и воспользуемся формулами (3.68), (3.69), (3.71) и (3.72):

$$M_x = \int_0^1 ch^2 x dx 3 = \frac{1}{2}\int_0^1 (1+ch2x)dx = \frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{2}sh2x\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{4}(2+ch2),$$

$$M_y = \int_0^1 xchxdx = \int_0^1 xd(shx) = xshx\Big|_0^1 - \int_0^1 shxdx = sh1 - chx\Big|_0^1 = sh1 - ch1 + 1,$$

$$I_x = \int_0^1 ch^3 xdx = \int_0^1 (1+sh^2x)chxdx = \left(shx + \frac{sh^3x}{3}\right)\Bigg|_0^1 = sh1 + \frac{1}{3}sh^3 1,$$

$$I_y = \int_0^1 x^2 chxdx = \int_0^1 x^2 d(shx)dx = x^2 shx\Big|_0^1 - 2\int_0^1 xshxdx = sh1 - 2\int_0^1 xd(chx) =$$

$$= sh1 - 2xchx\Big|_0^1 - \int_0^1 chxdx = sh1 - 2ch1 + 2sh1 + 3sh1 - 2ch1 = 6sh1 - 4ch1.$$

Пример 3.37. Найти центр тяжести однородной дуги окружности $x^2 + y^2 = R^2$, расположенной в первой координатной четверти.

Решение. Известно, что, длина указанной дуги l окружности равна. $l = \dfrac{\pi R}{2}$ Найдем статический момент ее относительно оси Ox. Так как уравнение дуги имеет вид $y = \sqrt{R^2 - x^2}$, то $y' = -\dfrac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}}$,(плотность ρ = $const$). Применяя формулы (3.68) – (3.70), получим

$$M_x = \rho\int_0^R \sqrt{R^2-x^2}\cdot\sqrt{1+\left(-\frac{x}{\sqrt{R^2-x^2}}\right)^2}dx = \rho\int_0^R \sqrt{R^2-x^2}\cdot\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2}}dx =$$

$$= \rho R\int_0^R dx = \rho Rx\Big|_0^R = \rho R^2; y_C = \frac{\rho R^2}{\rho\cdot\frac{\pi R}{2}} = \frac{2R}{\pi}.$$

Так как данная дуга симметрична относительно биссектрисы первого координатного угла, то $x_C = y_C = \dfrac{2R}{\pi}$. Итак, центр тяжести имеет координаты $\left(\dfrac{2R}{\pi}; \dfrac{2R}{\pi}\right)$.

Пример 3.38. Определить координаты центра тяжести однородного сегмента параболы $y^2 = 4x$, отсекаемого прямой $x = 4$.

Решение. В данном случае $y = \pm 2\sqrt{x}$, поэтому согласно формулам (3.74), (3.75) и (3.78) получим:

$$x_c = \frac{2\int\limits_0^4 x \cdot 2\sqrt{x}dx}{2\int\limits_0^4 2\sqrt{x}dx} = \frac{\int\limits_0^4 x^{\frac{3}{2}}dx}{\int\limits_0^4 x^{\frac{1}{2}}dx} = \frac{\left.\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}\right|_0^4}{\left.\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right|_0^4} = \left.\frac{3}{5}x\right|_0^4 = \frac{3}{5}\cdot 4 = \frac{12}{5} = 2{,}4$$

Ввиду симметрии фигуры относительно оси Ox $y_c = 0$.

Итак, центр тяжести сегмента параболы имеет координаты $C(2{,}4;0)$.

3.9. Применение определенного интеграла к решению экономических задач

Пусть известна *функция предельных издержек* (*издержки на производство дополнительной выпускаемой единицы продукции товара*), то *функция издержек* $C(q)$ в случае производства n единиц товара определяется через определенный интеграл по формуле

$$C(q) = \int\limits_0^n C'(q)dq\,. \tag{3.79}$$

Пример 3.39. Задана функция предельных издержек $C'(q) = 2q^2 - 14q + 250$. Вычислить издержки в случае производства 15 единиц товара.

Решение. Согласно формуле (3.79) находим интегрированием величину издержек на изготовление 15 ед. товара

$$C(q) = \int\limits_0^{15}\left(2q^2 - 14q + 250\right)dq = \left.\left(\frac{2}{3}q^3 - 7q^2 + 250q\right)\right|_0^{15} = 4425(у.е.)$$

Если непрерывная функция $f(t)$ характеризует *производительность труда* рабочего в зависимости от времени t, то *объем продукции*, Q произведенной рабочим за промежуток времени от t_1 до t_2, выражается формулой

$$Q = \int\limits_{t_1}^{t_2} f(t)dt\,. \tag{3.80}$$

Пример 3.40. Найти объём сливочного масла (кг), изготовленного молокоцехом за год (306 семичасовых рабочих дней), если ежедневная производительность этого цеха задана функцией

$f(t) = -0{,}0033t^2 - 0{,}089t + 20{,}96$, где t – время в часах.

Решение. Учитывая (3.80), найдем сначала объём Q сливочного масла, произведенного молокоцехом за один семичасовой рабочий день ($0 \le t \le 7$)^

$$Q = \int_0^7 \left(-0{,}0033t^2 - 0{,}089t + 20{,}96\right)dt = \left(-0{,}0033\frac{t^3}{3} - 0{,}089\frac{t^2}{2} + 20{,}96t\right)\Bigg|_0^7 =$$

$$= -0{,}0011 \cdot 7^3 - 0{,}0445 \cdot 49 + 20{,}96 \cdot 7 = -0{,}3773 - 2{,}1805 + 146{,}72 = 144{,}1622$$

Так как количество рабочих дней в году равно 306, то объём масла, произведенного за год, составит Q = 306·144,1622 ≈ 44113,6 (кг) или Q = 44 тонны 114 кг.

Наиболее известной производственной функцией является *функция Кобба-Дугласа*

$$q = AK^{\alpha}L^{\beta}, \tag{3.81}$$

где A, α, β - неотрицательные константы и $\alpha + \beta \le 1$, K – объем фондов либо в стоимостном, либо в натуральном выражении (например, число станков), L – объём трудовых ресурсов (число рабочих, число человеко-дней), q– выпуск продукции в стоимостном, либо в натуральном выражении. Если в *функции Кобба-Дугласа* считать, что *затраты труда есть линейная зависимость от времени, а затраты капитала неизменны*, то она примет вид

$$f(t) = (\alpha t + \beta)e^{\gamma t}. \tag{3.81$'$}$$

Тогда объем выпускаемой продукции за время T определится по формуле

$$Q = \int_0^T (\alpha t + \beta)e^{\gamma t}\,dt. \tag{3.80$'$}$$

Пример 3.41. Найти объем продукции, произведенный за 5 лет, если функция Коба-Дугласа имеет вид $f(t) = (1+t)e^{2t}$.

Решение. По формуле (3.80′) объем произведенной продукции равен

$$Q=\int_0^5(1+t)e^{2t}dt=\begin{cases}u=1+t, du=dt,\\ dv=e^{2t}dt, v=\frac{1}{2}e^{2t}.\end{cases}=\frac{1}{2}(1+t)e^{2t}\Big|_0^5-\int_0^5 e^{2t}dt=$$

$$=\left(\frac{1}{2}(1+t)e^{2t}-\frac{1}{4}e^{2t}\right)\Bigg|_0^5=7\,549\,899\,.$$

При вычислении интеграла использовали метод интегрирования по частям, результат получен в условных единицах.

Пусть известна функция t = $t(x)$, описывающая *изменение затрат времени t на изготовление изделия*, в зависимости от степени освоения производства, где x - *порядковый номер изделия в партии*. Тогда *среднее время,* $t_{\text{ср.}}$, затраченное на изготовление одного изделия в период освоения от x_1 до x_2 изделий вычисляется по теореме о среднем

$$t_{ср.}=\frac{1}{x_2-x_1}\int_{x_1}^{x_2}t(x)dx. \tag{3.82}$$

Функция изменения затрат времени на изготовление изделий часто имеет вид

$$t(x) = ax^{-b}. \tag{3.83}$$

Пример 3.42. Найти среднее время, затраченное на освоение одного изделия в период освоения от x_1 = 50 до x_2 = 75 изделий, если функция изменения затрат времени $t(x) = 100x^{-0,5}$ (ч).

Решение. Используя формулу (3.82), получим

$$t_{ср.}=\frac{1}{75-50}\int_{50}^{75}100x^{-0,5}dx.=\frac{100}{25}\int_{50}^{75}\frac{dx}{\sqrt{x}}=8\sqrt{x}\Big|_{50}^{75}\approx 11{,}2(ч).$$

Определение начальной суммы по ее конечной величине, полученной через время t лет при годовом удельном проценте p, называется *дисконтированием.* Задачи такого рода встречаются при определении экономической эффективности капиталовложений. Пусть поступающий ежегодно доход изменяется во времени и описывается функцией f (t) и при удельной норме процента, равной *p*, процент начисляется непрерывно. Тогда *дисконтированный доход*, *K* за время *T* вычисляется по формуле:

$$K = \int_0^3 f(t)e^{-pt}dt. \qquad (3.84)$$

Пример 3.43. Определить дисконтированный доход за три года при процентной ставке 8%, если первоначальные (базовые) капиталовложения составили 10 млн. руб., и намечается ежегодно увеличивать капиталовложения на 1 млн. руб.

Решение. Капиталовложения задаются функцией $f(t) = 10 + 1 \cdot t = 10 + t$. Тогда дисконтированная сумма капиталовложений определится по формуле (3.84)

$$K = \int_0^3 (10+t)e^{-0,08t}dt.$$

Используем метод интегрирования по частям. Пусть $u = t + 10$, $dv = e^{-0,08t}$. Тогда $du = dt$, $v = -\frac{1}{0,08}e^{-0,08t}$. Следовательно,

$$K = -(t+10)\frac{1}{0,08}e^{-0,08t}\Big|_0^3 + \frac{1}{0,08}\int_0^3 e^{-0,08t}dt =$$

$$= -\frac{13e^{-0,24}}{0,08} + \frac{10}{0,08} - \frac{1}{0,08^2}e^{-0,08t}\Big|_0^3 \approx 30,5(\text{млн.руб.}).$$

Это означает, что для получения одинаковой наращенной суммы через три года ежегодные капиталовложения от 10 до 13 млн. руб. равносильны одновременным первоначальным вложениям 30,5 млн.руб. при той же, начисляемой непрерывно, процентной ставке.

3.10. Несобственные интегралы

3.10.1. Несобственные интегралы первого рода

Несобственные интегралы являются обобщениями понятия определенного интеграла на бесконечные промежутки и на неограниченные функции.

Пусть функция $f(x)$ определена в промежутке $[a;+\infty]$ и при любом $b > a$, $f(x) \in[a;\, b]$. Тогда $\lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_a^b f(x)dx$ называется несобственным интегралом от этой функции по промежутку $[a;+\infty]$ или *несобственным интегралом первого рода* и обозначается, как. $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ Если существует конечный предел $\lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_a^b f(x)dx$, то говорят, что несобственный интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ *сходится*, в противном случае говорят, что несобственный интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ *расходится.* Таким образом, по определению

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int\limits_a^b f(x)dx.$$

Если функция $f(x)$ имеет на промежутке $[a;+\infty]$ первообразную, обычную или обобщенную, то для вычисления несобственного интеграла первого рода будем пользоваться аналогом формулы Ньютона - Лейбница

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{b\to+\infty} F(x)\Big|_a^b = \lim_{b\to+\infty}(F(b)-F(a)), \qquad (3.85)$$

которую, по договоренности, будем записывать в виде

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = F(x)\Big|_a^{+\infty} = F(+\infty)-F(a),$$

где $F(+\infty)=\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$. Рассмотрим функцию $y=f(x)$, непрерывную на бесконечном промежутке $[a;+\infty)$.

Если $f(x)>0$ на $[a;+\infty)$ и $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx<\infty$, то *данный интеграл представляет собой площадь бесконечной криволинейной трапеции,* ограниченной кривой $y=f(x)$, прямой $x=a$ и бесконечным интервалом $[a;+\infty)$.

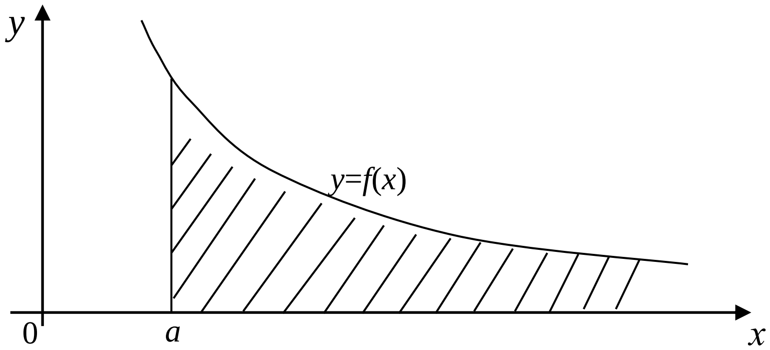


Рисунок 3.9. – Геометричекий смысл несобственного интеграла с бесконечным верхним пределом

Аналогично определяется несобственный интеграл на промежутке $(-\infty; b]$:

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{b} f(x)dx, \qquad (3.86)$$

а на интервале $(-\infty; +\infty)$ определяется формулой

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)dx, \qquad (3.87)$$

где c – любое действительное число, причем этот интеграл расходится, если расходится хотя бы одно из слагаемых.

Если сравнить две криволинейные трапеции на рис.3.9, то конечность или бесконечность их соответствующих несобственных интегралов зависит от скорости убывания функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ при $x \to +\infty$.

Так, например, $\int_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x^{\alpha}}$ сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \le 1$. В этом легко убедиться, вычислив $\int_{1}^{A}\frac{1}{x^{\alpha}}dx$, если $A \to +\infty$.

Если $f(x) = \frac{1}{x}$, то $\int_{1}^{A}\frac{1}{x}dx = \ln|x|\Big|_{1}^{A} = \ln A - \ln 1 = \ln A \to +\infty$ при $A \to \infty$, поэтому $\int_{1}^{+\infty}\frac{1}{x}dx$ – расходится, следовательно, и площадь соответствующей криволинейной трапеции бесконечна.

$$\int_1^A \frac{1}{x^2}dx = -\frac{1}{x}\Bigg|_1^A = -\frac{1}{A}+1, \quad \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx = \lim_{A\to+\infty}\left(1-\frac{1}{A}\right) = 1 \text{ –}$$

несобственный интеграл сходящийся, следовательно, площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями $y=\frac{1}{x^2}$, $x=1$ и бесконечным промежутком $[1;+\infty)$, является конечной и равна 1.

Пример 3.44. Исследовать на сходимость несобственный интеграл $\int\limits_{-\infty}^{0} x\cdot e^x dx$.

Решение. Воспользуемся определением несобственного интеграла с бесконечным нижним пределом интегрирования и формулой интегрирования по частям

$$\int_{-\infty}^{0} x\cdot e^x dx = \lim_{\beta\to-\infty}\int_{\beta}^{0} x\cdot e^x dx = \left\{\begin{matrix} u=x, & du=dx \\ dv=e^x dx, & v=e^x \end{matrix}\right\} =$$

$$= \lim_{\beta\to-\infty}\left(x\cdot e^x\Bigg|_{\beta}^{0} - \int_{\beta}^{0} e^x dx\right) = \lim_{\beta\to-\infty}(x\cdot e^x - e^x)\Bigg|_{\beta}^{0} =$$

$$= \lim_{\beta\to-\infty}(0-\beta\cdot e^{\beta} - e^0 + e^{\beta}) = \lim_{\beta\to-\infty}\left(-\frac{\beta}{e^{-\beta}} - 1 + \frac{1}{e^{-\beta}}\right) = -1.$$

Несобственный интеграл сходится.

Пример 3.45. Вычислить несобственный интеграл или установить его расходимость $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+4x+9}$.

Решение. Воспользуемся определением несобственного интеграла с бесконечными пределами интегрирования. Полагаем $c=-2$.

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+4x+9} = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d(x+2)}{(x+2)^2+5} = \lim_{B\to-\infty}\int_{B}^{-2}\frac{d(x+2)}{(x+2)^2+5} + \lim_{A\to+\infty}\int_{-2}^{A}\frac{d(x+2)}{(x+2)^2+5} =$$

$$= \lim_{B\to-\infty}\frac{1}{\sqrt{5}}arctg\,\frac{(x+2)}{\sqrt{5}}\Bigg|_{B}^{-2} + \lim_{A\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{5}}arctg\,\frac{(x+2)}{\sqrt{5}}\Bigg|_{-2}^{A} =$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\lim_{B\to-\infty}\left(arctg\,0-arctg\,\frac{B+2}{\sqrt{5}}\right)+\frac{1}{\sqrt{5}}\lim_{A\to+\infty}\left(arctg\,\frac{A+2}{\sqrt{5}}-arctg\,0\right)=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(0+\frac{\pi}{2}\right)+\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{\pi}{2}-0\right)=\frac{\pi}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}\pi.$$

3.10.2. Несобственные интегралы второго рода

Пусть функция $y=f(x)$ имеет разрыв II рода на $[a;b]$ либо в точках a и b, либо в точке $c\in(a;b)$, тогда несобственные интегралы от разрывной функции называются *несобственными интегралами второго рода* и определяются следующим образом:

1) $x=a$ – точка разрыва, то

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx\,; \tag{3.88}$$

2) $x=b$ – точка разрыва, то

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx\,, \tag{3.89}$$

3) $x=c,\ c\in(a;b)$, c – точка разрыва, то

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx. \tag{3.90}$$

Если указанные пределы существуют и конечны, то несобственные интегралы называются *сходящимися*, в противном случае *расходящимися*.

Пример 3.46. Исследовать на сходимость несобственный интеграл $\int_0^3 \frac{dx}{(x-1)^2}$.

Решение. Функция $y=\frac{1}{(x-1)^2}$ в точке $x=1$ имеет разрыв II рода, поэтому $\int_0^3 \frac{dx}{(x-1)^2}=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{1-\varepsilon}\frac{d(x-1)}{(x-1)^2}+\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{1+\varepsilon}^3\frac{d(x-1)}{(x-1)^2}=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(-\frac{1}{x-1}\right)\Bigg|_0^{1-\varepsilon}+$

$$+\lim_{\varepsilon\to 0}\left(-\frac{1}{x-1}\right)\Bigg|_{1+\varepsilon}^{3}=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(-\frac{1}{1-\varepsilon-1}+\frac{1}{-1}\right)+\lim_{\varepsilon\to 0}\left(-\frac{1}{3-1}+\frac{1}{1+\varepsilon-1}\right)=$$
$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{1}{\varepsilon}-1\right)+\lim_{\varepsilon\to 0}\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{\varepsilon}\right)=\infty+\infty=\infty.$$

Интеграл расходящийся.

Пример 3.47. Исследовать на сходимость несобственный интеграл от неограниченной функции $\int\limits_0^1 \frac{2x+chx}{\sqrt[4]{x^2+shx}}dx.$

Решение. При $x=0$ знаменатель функции обращается в 0, а числитель равен 1, следовательно, $x=0$ – точка разрыва II рода. Во всех остальных точках промежутка (0;1] подынтегральная функция непрерывна. Заметим также, что $(2x+chx)dx=d(x^2+shx)$,

$$\int\frac{2x+chx}{\sqrt[4]{x^2+shx}}dx=\int(x^2+shx)^{-\frac{1}{4}}\,d(x^2+shx)=\{x^2+shx=t\}=$$
$$=\int t^{-\frac{1}{4}}dt=\frac{4t^{3/4}}{3}+C=\frac{4}{3}\sqrt[4]{x^2+shx}+C.$$

Используя определение несобственного интеграла от неограниченной функции, а также формулу Ньютона-Лейбница получим

$$\int\limits_0^1\frac{2x+chx}{\sqrt[4]{x^2+shx}}dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{0+\varepsilon}^1\frac{2x+chx}{\sqrt[4]{x^2+shx}}dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{4}{3}\sqrt[4]{x^2+shx}\Bigg|_{\varepsilon}^{1}=$$
$$=\frac{4}{3}\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\sqrt[4]{1+sh1}-\sqrt[4]{\varepsilon^2+sh\varepsilon}\right)=\frac{4}{3}\cdot\sqrt[4]{1+sh1}.$$

Интеграл сходящийся.

Вопросы для самопроверки

1. Понятие об определённом интеграле.
2. Геометрический смысл определенного интеграла
3. Формула Ньютона-Лейбница
4. Свойства определённого интеграла.

5. Теорема о среднем, ее геометрический смысл.
6. Замена переменной в определённом интеграле.
7. Интегрирование по частям в определённом интеграле.
8. Площадь плоской фигуры, заданной в декартовых координатах.
9. Площадь криволинейного сектора.
10. Площадь плоской фигуры, заданной параметрически.
11. Длина дуги плоской кривой.
12. Объём тела вращения.
13. Площадь поверхности вращения.
14. Физическихе приложения определённого интеграла (путь; работа переменной силы; сила давления жидкости; масса плоской линии и пластинки; статические моменты, моменты инерции и координаты центра тяжести плоской кривой и плоской фигуры).
15. Экономические приложения определённого интеграла (функция предельных издержек; производительность труда; производственная функция Кобба-Дугласа; функция затрат).
16. Несобственный интеграл первого рода, его сходимость.
17. Геометрический смысл несобственного интеграла с бесконечным верхним пределом.
18. Несобственный интеграл второго рода. Понятие о его сходимости.

ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ № 7 «Определенный и несобственный интегралы» (теория)

1. Определенный интеграл – это (*выберите верные утверждения*) …
   1) отрицательное число;
   2) предел произвольной функции при стремлении аргумента к нулю;

3) для положительной функции площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком этой функции, прямыми $x = a,\ x = b$ и осью абсцисс;
4) предел интегральной суммы при стремлении наибольшей из длин отрезков к бесконечности.

2. С помощью формулы интегрирования по частям вычисляют определенный интеграл, содержащий…
1) иррациональные функции; 2) рациональные дроби;
3) произведение разнохарактерных функций;
4) произведение тригонометрических функций.

3. К формуле Ньютона-Лейбница не имеют отношения высказывания…
1) значение определенного интеграл не зависит от того, какая первообразная подынтегральной функции взята при его вычислении;
2) при нахождении определенного интеграла следует вводить только одну произвольную постоянную;
3) на отрезке $[a;b]$ приращения всех первообразных функции $f(x)$ совпадают;
4) в первообразную функции подставляется значение верхнего предела b, далее – значение нижнего предела a.

4. К методам интегрирования определенного интеграла относятся:
1) метод логарифмического дифференцирования;
2) метод Гаусса; 3) метод Лопиталя;
4) метод замены переменной; 5) метод Бернулли;
6) метод геометрических преобразований.

5. При перемене местами верхнего и нижнего пределов интегрирования определенный интеграл ...

   1) остается прежним; 2) меняет знак;

   3) увеличивается в два раза; 4) равен нулю.

6. Интегральная сумма – это

   1) сумма произведений количества отрезков на значения функций, вычисленных в произвольных точках этих отрезков;
   2) предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда последний стремится к нулю;
   3) сумма произведений длин отрезков, на которые разбит отрезок интегрирования, на значения функции в точках этих отрезков;
   4) предел отношения производных функций, когда аргумент стремится к постоянному числу.

7. Несобственный интеграл первого рода сходится, если …

   1) подынтегральная функция нечетная;
   2) подынтегральная функция четная;
   3) в результате его вычисления получается $\pm\infty$;
   4) в результате его вычисления получается постоянное число.

8. Если фигура образует криволинейную трапецию, то для вычисления объема тела ее вращения вокруг оси Ox используется интеграл…

   1) $\pi\int\limits_a^b f^2(x)dx$; 2) $\pi\int\limits_c^d \varphi^2(y)dy$; 3) $\int\limits_a^b f(x)dx$;

   4) $\int\limits_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx$; 5) $\int\limits_a^b xf(x)dx$; 6) $\int\limits_c^d y\varphi(y)dy$.

9. Определенный интеграл $\int\limits_a^b \rho\cdot x^2 ydx$ определяет …

   1) площадь неоднородной пластинки;
   2) периметр криволинейной трапеции;

3) объем тела, образованного вращением однородной плоской фигуры вокруг оси Ox;

4) момент инерции относительно оси Ox неоднородной пластинки;

5) сила давления жидкости на однородную пластинку.

10. Определенный интеграл с одинаковыми пределами …

1) не существует; 2) всегда отрицательный;

3) равен нулю; 4) всегда положительный.

11. Числа a и b в определенном интеграле $\int\limits_a^b f(x)dx$ соответственно называют:

1) большим и меньшим пределами; 2) меньшим и большим пределами;

3) нижним и верхним пределами; 4) верхним и нижним пределами.

12. Формула интегрирования по частям для определенного интеграла имеет вид…

1) $\int\limits_a^b udv = uv\Big|_a^b + \int\limits_a^b vdu;$ 2) $\int\limits_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int\limits_a^b vdu;$

3) $\int\limits_a^b vdu = uv\Big|_a^b + \int\limits_a^b udv;$ 4) $\int\limits_a^b vdu = uv\Big|_a^b - \int\limits_a^b udv.$

13. Несобственным интегралом называется …

1) определенный интеграл, у которого хотя бы один из его пределов бесконечен;

2) неопределенный интеграл, у которого подынтегральная функция разрывна;

3) определенный интеграл от неограниченной функции;

4) неопределенный интеграл от ограниченной функции.

14. Геометрически определенный интеграл представляет собой …

1) площадь криволинейной трапеции;

2) тангенс угла наклона касательной к кривой в точке $(a;b)$;

3) семейство интегральных кривых;

4) длину дуги кривой от точки $A(a;0)$ до точки B $(0;b)$.

15. К свойствам определенного интеграла не относятся …

1) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$; 2) $\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$;

3) $\int_a^b Af(x)dx = A\int_a^b f(x)dx$; 4) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$

16. Если отрезок $[a;b]$ разбит точкой c на $[a;c]$ и $[c;b]$, то $\int_a^b f(x)dx$ будет равен:

1) $\int_a^c f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$; 2) $\int_a^c f(x)dx - \int_c^b f(x)dx$;

3) $\int_a^c f(x)dx + \int_{-c}^b f(x)dx$; 4) $\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$.

17. Установите соответствие

Несобственный интеграл	Вычисляется
1) $\int_a^{\infty} f(x)dx$	А) $\lim\limits_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx$
2) $\int_{-\infty}^{b} f(x)dx$	Б) $\lim\limits_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx$
3) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$	В) $\lim\limits_{b\to-\infty}\int_a^b f(x)dx$
	Г) $\lim\limits_{a\to-\infty}\int_a^c f(x)dx + \lim\limits_{b\to\infty}\int_c^b f(x)dx$
	Д) $\lim\limits_{a\to-\infty}\int_a^c f(x)dx - \lim\limits_{b\to\infty}\int_c^b f(x)dx$.

Ответ: 1 __, 2 __, 3 __.

18. Если $x = g(t)$ и если $g(\alpha) = a,\ g(\beta) = b$, то формула замены переменной имеет вид …

1) $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^b f(g(t))\,g'(t)dt$; 2) $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_\alpha^\beta f(g(t))\,g'(t)dt$;

3) $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_\alpha^\beta f(g(t))\,dt$; 4) $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^b f(g(t))\,dt$;

5) $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_\alpha^\beta f(t)\,g'(t)dt$; 6) $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^b f(t)\,g'(t)dt.$

19. Формула Ньютона-Лейбница, если $F(x)$ - первообразная для $f(x)$, имеет вид …

1) $\int\limits_a^b f(x)dx = F(a) - F(b)$; 2) $\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$;

3) $\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) + F(a)$; 4) $\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) \cdot F(a)$.

20. Выберите верные утверждения:

1) все свойства несобственного интеграла аналогичны свойствам определенного интеграла;
2) постоянный множитель можно выносить за знак определенного интеграла, предварительно возведя его в квадрат;
3) определенный интеграл в симметричных пределах от нечетной функции равен нулю;
4) несобственный интеграл расходится, если он равен отрицательному числу;
5) массу плоской неоднородной кривой можно находить с помощью определенного интеграла.

21. Координаты центра тяжести однородной пластинки определяются по формулам …

1) $x_C = \dfrac{M_y}{m}, y_C = \dfrac{M_x}{m}$; 2) $x_C = \dfrac{m}{M_y}, y_C = \dfrac{m}{M_x}$;

3) $x_C = \dfrac{I_y}{m}, y_C = \dfrac{I_x}{m}$; 4) $x_C = \dfrac{m}{I_y}, y_C = \dfrac{m}{I_x}$.

22. Несобственный интеграл второго рода вычисляется с помощью предела …

1) $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$; 2) $\lim\limits_{x \to \infty} \int\limits_a^{b} f(x)dx$; 3) $\lim\limits_{a \to -\infty} \int\limits_a^{b} f(x)dx$;

4) $\lim\limits_{t \to \infty} \int\limits_a^{x} f(t)dt$; 5) $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx$; 6) $\lim\limits_{R \to \infty} \int\limits_a^{\frac{1}{R}} f(x)dx$.

23. Установите соответствие

Определенный интеграл	Определяет
1) $\int\limits_0^T (\alpha t + \beta) e^{\gamma t} dt$	А) объем тела, полученного при вращении криволинейного сектора вокруг полярной оси
2) $\int\limits_a^b F(x)dx$	Б) массу однородной кривой
3) $\dfrac{2}{3}\pi \int\limits_\alpha^\beta r^3(\varphi)\sin\varphi d\varphi$	В) объем выпускаемой продукции
	Г) путь, пройденный телом
	Д) работу переменной силы.

Ответ: 1 __, 2 __, 3 __.

24. С помощью определенного интеграла $\int\limits_a^b \rho x \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$ можно вычислить …

1) длину дуги неоднородной плоской кривой;
2) статический момент относительно оси Oy неоднородной плоской кривой;

3) объем тела, образованного вращением неоднородной плоской линии вокруг оси Ox;
4) момент инерции относительно оси Ox неоднородной плоской кривой.

25. Путь, пройденный телом со скоростью $v(t)$ за отрезок времени $[t_1;t_2]$, выражается интегралом

1) $\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1+[v'(t)]^2}\,dt$;
2) $\int_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt$;
3) $\pi\int_{t_1}^{t_2} v^2(t)\,dt$;
4) $\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1+v^2(t)}\,dt$.

26. Теорема о среднем записывается в виде …

1) $\int_a^b f(x)dx = \frac{f(c)}{b-a}$;
2) $\int_a^b f(x)dx = \frac{f(c)}{b+a}$;
3) $\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$;
4) $\int_a^b f(x)dx = f(c)(b+a)$.

27. Площадь плоской фигуры, ограниченной графиками функций $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$ вычисляется с помощью определенного интеграла …

1) $\int_{x_1}^{x_2}[f_1(x)+f_2(x)]dx$;
2) $\int_{x_1}^{x_2}[f_2(x)-f_1(x)]dx$;
3) $\int_{x_1}^{x_2} f_1(x)\cdot f_2(x)dx$;
4) $\int_{x_1}^{x_2} \sqrt{f^2{}_1(x)+f^2{}_2(x)}dx$.

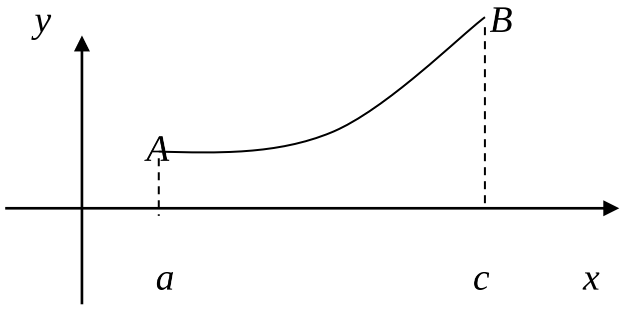
28. Неравенство $\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$ выполняется, если справедливо

соотношение …

1) $f(x) \le g(x)$; 2) $f(x) \ge g(x)$; 3) $f(x)\,.\,g(x) < 0$;

4) $f(x)\,.\,g(x) > 0$; 5) $f(x) < g(x)$; 6) $f(x) > g(x)$.

29. На рисунке дуга AB – график параметрически заданной функции $y = f(t)$, $x = g(t)$, $t \in [t_a; t_c]$,



то длина этой дуги вычисляется по формуле …

1) $\int\limits_a^c f(x)dx$; 2) $\int\limits_a^c f^2(x)dx$; 3) $\int\limits_a^c \sqrt{1+\left[f'(x)\right]^2}\,dx$;

4) $\int\limits_{t_a}^{t_c} f(t)\cdot g'(t)dt$; 5) $\pi\int\limits_{t_a}^{t_c} f^2(t)\cdot g'(t)dt$; 6) $\int\limits_{t_a}^{t_c} \sqrt{\left[\left[f'(t)\right]^2+\left[g'(t)\right]^2\right]}dt$.

30. Установите соответствие

Определенный интеграл	Вычисляет
1) $\int\limits_a^b \rho y\sqrt{1+\left[f'(x)\right]^2}dx$	А) объем тела, полученного в результате вращения криволинейной трапеции вокруг оси ординат
2) $\pi\int\limits_c^d x^2(y)dy$	Б) момент инерции плоской фигуры относительно оси Oy
	В) статический момент плоской линии относительно оси Ox

3) $\int\limits_a^b \rho\cdot x^2 y dx$

Г) издержки, затраченные на производство продукции

Д) дисконтированная сумма капиталовложений.

Ответ 1__, 2__, 3__.

Контрольная работа № 5 «Определенный и несобственный интегралы»

Задание 1. Вычислить определенные интегралы

1.1. а) $\int\limits_{e+1}^{e^2+1}\frac{1+\ln(x-1)}{x-1}dx$; б) $\int\limits_{-2}^{0}(x^2-4)\cos 3x dx$; в) $\int\limits_{\pi/2}^{2arctg2}\frac{dx}{\sin^2 x(1-\cos x)}$;

г) $\int\limits_{\pi/2}^{\pi}2^8\sin^8 x dx$; д) $\int\limits_{0}^{1}\frac{4-\sqrt{3x+1}}{8\sqrt{3x+1}+(3x+1)^2}dx$; е) $\int\limits_{0}^{16}\sqrt{256-x^2}dx$.

1.2. а) $\int\limits_{0}^{1}\frac{(x^2+1)dx}{(x^3+3x+1)^2}$; б) $\int\limits_{-1}^{0}(x^2+4x+3)\cos x dx$; в) $\int\limits_{2arctg(1/2)}^{\pi/2}\frac{\cos x dx}{(1-\cos x)^3}$;

г) $\int\limits_{0}^{\pi}2^4\sin^6 x\cos^2 x dx$; д) $\int\limits_{1}^{64}\frac{1-\sqrt[6]{x}+2\sqrt[3]{x}}{x+2\sqrt{x^3}+\sqrt[3]{x^4}}dx$; е) $\int\limits_{0}^{1}x^2\sqrt{1-x^2}dx$.

1.3. а) $\int\limits_{0}^{1}\frac{4arctgx-x}{1+x^2}dx$; б) $\int\limits_{-\pi}^{0}(x^2-2x+7)\cos 2x dx$; в) $\int\limits_{\pi/2}^{2arctg2}\frac{dx}{\sin^2 x(1+\cos x)}$;

г) $\int\limits_{0}^{2\pi}\sin^4 x\cos^4 x dx$; д) $\int\limits_{-14/15}^{-7/8}\frac{6\sqrt{x+2}}{(x+2)^2-\sqrt{x+2}}dx$; е) $\int\limits_{0}^{5}\frac{dx}{(25+x^2)\sqrt{25+x^2}}$.

1.4. а) $\int\limits_{0}^{2}\frac{x^3dx}{x^2+4}$; б) $\int\limits_{-2}^{0}(x+2)^2\cos 3x dx$; в) $\int\limits_{2arctg(1/2)}^{\pi/2}\frac{\cos x dx}{(1-\cos x)^3}$;

г) $\int\limits_{0}^{2\pi}\sin^2\frac{x}{4}\cos^6\frac{x}{4}dx$; д) $\int\limits_{6}^{9}\sqrt{\frac{9-2x}{2x-21}}dx$; е) $\int\limits_{0}^{3}\frac{dx}{(9+x^2)^{3/2}}$.

1.5. а) $\int\limits_{\pi}^{2\pi} \frac{x+\cos x}{x^2+2\sin x}dx$; б) $\int\limits_{-4}^{0}(x^2+7x+12)\cos xdx$; в) $\int\limits_{0}^{\pi/2} \frac{\cos x-\sin x}{(1+\sin x)^2}dx$;

г) $\int\limits_{0}^{\pi} 2^4\cos^8\frac{x}{2}dx$; д) $\int\limits_{1}^{16}\frac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt[4]{x}-4}dx$; е) $\int\limits_{0}^{\sqrt{5}/2}\frac{dx}{\sqrt{(5-x^2)^3}}$.

1.6. а) $\int\limits_{0}^{\pi/4}\frac{2\cos x+3\sin x}{(2\sin x-3\cos x)^3}dx$; б) $\int\limits_{0}^{\pi}(2x^2+4x+7)\cos 2xdx$; в) $\int\limits_{2arctg2}^{2arctg3}\frac{dx}{\cos x(1-\cos x)}$;

г) $\int\limits_{-\pi/2}^{0}2^8\sin^8 xdx$; д) $\int\limits_{8}^{12}\sqrt{\frac{6-x}{x-14}}dx$; е) $\int\limits_{1}^{2}\frac{\sqrt{x^2-1}}{x^4}dx$.

1.7. а) $\int\limits_{0}^{1/2}\frac{8x-arctg2x}{1+4x^2}dx$; б) $\int\limits_{0}^{\pi}(9x^2+9x+11)\cos 3xdx$; в) $\int\limits_{2arctg(1/3)}^{2arctg(1/2)}\frac{dx}{\sin x(1-\sin x)}$;

г) $\int\limits_{\pi/2}^{\pi}2^8\sin^6 x\cos^2 xdx$ д) $\int\limits_{1}^{32}\frac{\sqrt[5]{x}}{\sqrt[5]{x}+1}dx$; е) $\int\limits_{0}^{\sqrt{2}/2}\frac{x^4dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$.

1.8. а) $\int\limits_{0}^{1}\frac{x^4dx}{x^2+1}$; б) $\int\limits_{-\pi/4}^{0}(x^2+1)\sin 2xdx$; в) $\int\limits_{0}^{arctg(1/3)}\frac{8+tgx}{18\sin^2 x+2\cos^2 x}dx$;

г) $\int\limits_{0}^{\pi}2^4\sin^4 x\cos^4 xdx$; д) $\int\limits_{5/2}^{10/3}\frac{\sqrt{x+2}+1}{(\sqrt{x+2}-4)(x-2)^2}dx$; е) $\int\limits_{0}^{\sqrt{3}}\frac{dx}{\sqrt{(4-x^2)^3}}$.

1.9. а) $\int\limits_{0}^{1}\frac{xdx}{x^4+1}$; б) $\int\limits_{0}^{2\pi}(3x^2+5)\cos 2xdx$; в) $\int\limits_{0}^{\pi/2}\frac{\cos xdx}{5+4\cos x}$;

г) $\int\limits_{0}^{2\pi}\sin^2 x\cos^6 xdx$; д) $\int\limits_{-5/3}^{1}\frac{\sqrt[3]{3x+5}+2}{1+\sqrt[3]{3x+5}}dx$; е) $\int\limits_{0}^{1}\frac{x^4dx}{(2-x^2)^{3/2}}$.

1.10. а) $\int\limits_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}}\frac{x+1/x}{\sqrt{x^2+1}}dx$; б) $\int\limits_{0}^{2\pi}(2x^2-15)\cos 3xdx$; в) $\int\limits_{0}^{2\pi/3}\frac{1+\sin x}{1+\cos x+\sin x}dx$;

г) $\int\limits_{0}^{2\pi}\cos^8\frac{x}{4}dx$; д) $\int\limits_{1}^{2}\frac{x+\sqrt{3x-2}-10}{\sqrt{3x-2}+7}dx$; е) $\int\limits_{0}^{2}\frac{x^2dx}{\sqrt{16-x^2}}$.

1.11. а) $\int\limits_{0}^{\sqrt{3}}\frac{arctgx+x}{1+x^2}dx$; б) $\int\limits_{0}^{2\pi}(1-8x^2)\cos 4xdx$; в) $\int\limits_{0}^{\pi/2}\frac{(1+\cos x)dx}{1+\cos x+\sin x}$;

г) $\int_{-\pi}^{0} 2^8 \sin^6 x \cos^2 xdx$;   д) $\int_{6}^{10} \sqrt{\frac{4-x}{x-12}}dx$;   е) $\int_{0}^{2} \sqrt{4-x^2}dx$.

1.12. а) $\int_{0}^{\sqrt{3}} \frac{x - arctg^4 x}{1+x^2}dx$;   б) $\int_{0}^{\pi} (8x^2 + 16x + 17)\cos 4xdx$;   в) $\int_{0}^{\pi/4} \frac{6\sin^2 x}{3\cos 2x - 4}dx$;

г) $\int_{0}^{\pi} 2^4 \sin^6 \frac{x}{2}dx$;   д) $\int_{1}^{8} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}\left(\sqrt[3]{x}+1\right)}$;   е) $\int_{0}^{4} \frac{dx}{(16+x^2)^{3/2}}$.

1.13. а) $\int_{0}^{\ln 2} \frac{e^x dx}{\sqrt{9-e^{2x}}}dx$;   б) $\int_{-1}^{0} (x^2 + 2x + 1)\sin 3xdx$;   в) $\int_{0}^{arctg3} \frac{4 + tgx}{2\sin^2 x + 18\cos^2 x}dx$

г) $\int_{\pi/2}^{\pi} 2^8 \sin^4 x \cos^4 xdx$ $\int_{-1/2}^{0} \frac{xdx}{2+\sqrt{2x+1}}$;   е) $\int_{0}^{4} x^2\sqrt{16-x^2}dx$.

1.14. а) $\int_{0}^{1} \frac{x^5}{x^2+4}dx$;   б) $\int_{0}^{3} (x^2 - 3x)\sin 2xdx$;   в) $\int_{2arctg(1/3)}^{2arctg(1/2)} \frac{1+\sin x}{(1-\sin x)^2}dx$;

г) $\int_{0}^{\pi} 2^4 \sin^2 x \cos^6 xdx$;   д) $\int_{0}^{1} \frac{xdx}{\sqrt[3]{x}+1}$;   е) $\int_{0}^{5/2} \frac{x^2 dx}{\sqrt{25-x^2}}$.

1.15. а) $\int_{0}^{\sin 1} \frac{\arcsin^2 x + 1}{\sqrt{1-x^2}}dx$ б) $\int_{0}^{\pi} (x^2 - 3x + 2)\sin xdx$;   в) $\int_{0}^{2} \frac{\cos xdx}{1+\cos x + \sin x}$;

г) $\int_{0}^{2\pi} \cos^8 xdx$;   д) $\int_{1/8}^{1} \frac{15-\sqrt{x+3}}{(x+3)^2+\sqrt{x+3}}dx$;   е) $\int_{0}^{5} x^2\sqrt{25-x^2}dx$.

1.16. а) $\int_{1}^{16} \frac{\ln\left(\frac{2}{3}x\right) - 3\sqrt[3]{x}}{x}dx$;   б) $\int_{0}^{\pi/2} (x^2 - 5x + 6)\sin 3xdx$;   в) $\int_{0}^{arctg(2/3)} \frac{6 + tgx}{9\sin^2 x + 4\cos^2 x}dx$;

г) $\int_{0}^{2\pi} \sin^8 \frac{x}{4}dx$;   д) $\int_{1}^{3} \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}(x+1)}dx$;   е) $\int_{0}^{4} \sqrt{16-x^2}dx$.

1.17. а) $\int_{0}^{\cos 1} \frac{\arccos^3 x - 5}{\sqrt{1-x^2}}dx$;   б) $\int_{-3}^{0} (x^2 + 6x + 9)\sin 2xdx$;   в) $\int_{-2\pi/3}^{0} \frac{\cos xdx}{1+\cos x - \sin x}$;

г) $\int_{0}^{\pi} 2^4 \sin^6 \frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}dx$ д) $\int_{2}^{3} \sqrt{\frac{3-2x}{2x-7}}dx$;   е) $\int_{\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}} \frac{\sqrt{x^2-2}}{x^4}dx$.

1.18. а) $\int_{1}^{e} \frac{1+\ln x}{x}dx$;   б) $\int_{0}^{\pi/4} (x^2 + 17{,}5)\sin 2xdx$;   в) $\int_{0}^{\pi/4} \frac{7+3tgx}{(\sin x + 2\cos x)^2}dx$;

г) $\int\limits_{-\pi/2}^{0} \sin^2 x \cos^6 x dx$ д) $\int\limits_{-1/3}^{1} \frac{\sqrt[5]{3x+1}-12}{1+\sqrt[5]{3x+1}} dx$; е) $\int\limits_{0}^{4\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{(64-x^2)^3}}$.

1.19. а) $\int\limits_{0}^{\ln 4} \frac{e^{2x} dx}{\sqrt{16+e^{4x}}} dx$; б) $\int\limits_{0}^{\pi/2} (1-5x^2)\sin x dx$; в) $\int\limits_{-\arccos\left(1/\sqrt{10}\right)}^{0} \frac{3tg^2 x-50}{2tgx+7} dx$;

г) $\int\limits_{\pi/2}^{\pi} 2^8 \sin^6 x \cos^2 x dx$ д) $\int\limits_{0}^{2} \frac{(4-\sqrt{3x+2})dx}{(\sqrt{3x+2}+9)(3x+2)^2}$; е) $\int\limits_{0}^{2\sqrt{2}} \frac{x^4 dx}{(16-x^2)\sqrt{16-x^2}}$.

1.20. а) $\int\limits_{1}^{e} \frac{x^2+\ln x^2}{x} dx$; б) $\int\limits_{\pi/4}^{3} (3x-x^2)\sin 2x dx$; в) $\int\limits_{0}^{\pi/4} \frac{5tgx+2}{2\sin 2x+5} dx$;

г) $\int\limits_{0}^{\pi} 2^4 \cos^8 x dx$; д) $\int\limits_{0}^{5} \frac{dx}{\sqrt{3x+1}-1}$; е) $\int\limits_{-3}^{3} x^2\sqrt{9-x^2} dx$.

Задание 2. Вычислить несобственные интегралы или доказать их расходимость

2.1. а) $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{dx}{x^2+4x+13}$; б) $\int\limits_{0}^{4} \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-3)^2}}$.

2.2. а) $\int\limits_{-\infty}^{-3} \frac{x\,dx}{(x^2+1)^2}$; б) $\int\limits_{1}^{e} \frac{dx}{x\cdot\sqrt{\ln x}}$.

2.3. а) $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{x\,dx}{\sqrt[3]{x^2+1}}$; б) $\int\limits_{3}^{4} \frac{dx}{x^2-9}$.

2.4. а) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+4x+5}$; б) $\int\limits_{0}^{3} \frac{dx}{(x-2)^2}$.

2.5. а) $\int\limits_{e}^{\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^2}$; б) $\int\limits_{0}^{2} \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$.

2.6. а) $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{x\,dx}{\sqrt[3]{(4x^2+1)^2}}$; б) $\int\limits_{0}^{2} \frac{(x+1)dx}{x^2+x-2}$

2.7. а) $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{dx}{x^3+x}$; б) $\int\limits_{0}^{\pi} \frac{dx}{\cos x}$.

б) $\int\limits_{-5}^{0} \frac{dx}{\sqrt{25-x^2}}$.

2.8. а) $\int\limits_{-\infty}^{0} x\sin x\,dx$; б) $\int\limits_{-2}^{0} \frac{dx}{x^2+4x+3}$.

2.9. а) $\int\limits_{2}^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x-1}}$; б) $\int\limits_{1}^{2} \frac{xdx}{\sqrt{x-1}}$.

2.10. а) $\int\limits_{2}^{\infty} \frac{\ln^2 xdx}{x}$; б) $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{1-x^3}$.

2.11. а) $\int\limits_{=\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+2x+5}$; б) $\int\limits_{-4}^{0} \frac{xdx}{\sqrt{x+4}}$.

2.12. а) $\int\limits_{-\infty}^{0} xe^{2x}\,dx$; б) $\int\limits_{1}^{e^2} \frac{dx}{x\cdot\sqrt[4]{\ln^3 x}}$.

2.13. а) $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{dx}{x^2+6x+10}$; б) $\int\limits_{-1}^{2} \frac{dx}{\sqrt{x^2-3x+2}}$.

2.14. а) $\int\limits_{e}^{\infty} x\ln x\,dx$; б) $\int\limits_{2}^{5} \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2-3}}$.

2.15. а) $\int\limits_{-\infty}^{0} xarctgx\,dx$; б) $\int\limits_{0}^{2} \frac{dx}{x^3-8}$.

2.16. а) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+2x+5}$; б) $\int\limits_{0}^{2} \sqrt{\frac{2+x}{2-x}}dx.$

2.17. а) $\int\limits_{-\infty}^{4} \frac{xdx}{x-3}$; б) $\int\limits_{2}^{6} \frac{\ln^3(x-2)dx}{x-2}$.

2.18. а) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{5-4x+x^2}}$; б) $\int\limits_{0}^{1} \frac{(2x+1)dx}{2x^2-x-1}$.

2.19. а) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{16x^2+9}}$; б) $\int\limits_{-3}^{3} \sqrt{\frac{3+x}{3-x}}dx.$

2.20. а) $\int\limits_{0}^{\infty} xarcctgx\,dx$;

Задание 3. Вычислить: а) площадь плоской фигуры, ограниченной данными кривыми (сделать чертеж); объем тела вращения (вокруг указанной оси); б) площадь поверхности тела вращения вокруг полярной оси; в) длину дуги кривой.

3.1. а) $y^2=9x$, $y=3x$, (Oy); б) $\rho=2(1+cos\varphi)$, $0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$;

в) $x=2-\frac{t^4}{4}$, $y=\frac{t^6}{6}$, $0\le t\le \pi/2$.

3.2. а) $y=x^2-2x+3$, $y=3x-1$, (Ox); б) $\rho=2cos\varphi$, $0\le\varphi\le\frac{\pi}{4}$;

в) $x=4\cos t-3\cos 2t$ $y=4\sin t-3\sin 2t$, $0\le t\le\pi$.

3.3. а) $y=x^2$, $y=2x$, $y=x$, (Oy); б) $\rho=3\cos\varphi, 0\le\varphi\le\frac{\pi}{4}$;

в) $x=e^t\cos t$, $y=e^t\sin t$, $0\le t\le\pi/2$.

3.4. а) $y=x^3$, $y=2x$, $y=x$, (Ox); б) $\rho=\frac{1}{\cos^2\frac{\varphi}{2}}$, $0\le\varphi\le\pi$;

в) $x=a(cost+tsint)$ $y=a(sint-tcost)$, $0\le t\le\pi$.

3.5. а) $y=x^2+1$, $x+y=3$, (Ox); б) $\rho=1+\cos\varphi$, $-\frac{\pi}{4}\le\varphi\le 0$;

в) $x=\frac{1}{3}t^3-t$, , $y=t^2+2$ $0\le t\le 3$.

3.6. а) $y=\frac{6}{x}$, $y=7-x$, (Oy); б) $\rho=3\sqrt{\cos 2\varphi}$, $0\le\varphi\le\frac{\pi}{4}$;

в), $x=3\cos t$ $y=3\sin t$, $0\le t\le 2\pi$.

3.7. а) $y=-x^3$, $y=-9x$, (Ox); б) $\rho=2\sqrt{\sin 2\varphi}$, $0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$;

в) $x=e^t(\cos t-\sin t)$, $y=e^t(\cos t+\sin t)$, $\pi/2\le t\le\pi$.

3.8. а) $y=\frac{1}{2}x^2-x+1$, $y=-\frac{1}{2}x^2+3x+6$, (Oy); б) $\rho=1-\cos\varphi$, $0\le\varphi\le\pi$;

в) $x=\cos^3 t$, $y=\sin^3 t$, $0\le t\le\pi/2$.

3.9. а) $y=-x^2+2x$, $y=-x$, (Ox); б) $\rho=5(1+\cos\varphi)$, $0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$;

в) $x=2(2cost-cos2t)$ $y=2(2sint-sin2t)$, $0\le t\le\pi$.

3.10. а) $y=(x+1)^2$, $y=4-x$, $y=0$, (Oy); б) $\rho=4\sin\varphi$, $\frac{\pi}{2}\le\varphi\le\frac{3\pi}{2}$;

в) $x=2cost$, $y=2sint$, $0\le t\le 2\pi$.

3.11. а) $y=3x^2+1$, $y=3x+7$, (Ox); б) $\rho=\sqrt{2}$, $\frac{\pi}{4}\le\varphi\le\frac{3\pi}{2}$;

в) $x=6\,cost$, $y=6sint$, $0\le t\le 2\pi$.

3.12. а) $y^2=2x+1$, $x-y-1=0$, (Oy); б) $\rho=\dfrac{1}{\sin^2\frac{\varphi}{2}}$, $\frac{\pi}{4}\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$;

в) $x=4(t-sint)$, $y=4(1-cost)$, $0\le t\le 2\pi$.

3.13. а) $y=\frac{1}{2}x^2+x+2$, $y=-\frac{1}{2}x^2-5x+7$, (Ox); б), $\rho=8\cos\varphi$ $0\le\varphi\le\pi$;

в) $x=2t-t^2$, $y=4t-t^3$, $0\le t\le 1$.

3.14. а) $y^2=2x+1$, $y=x-1$ (Oy); б) $\rho=5\sin\varphi$, $0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$;

в) $x=6cos^3t$, $y=6sin^3t$, $0\le t\le 2\pi$ (Oy).

3.15. а) $y=sinx$, $0\le x\le 2\pi$, (Ox); б) $\rho=1+\sin\varphi$, $0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$;

в) $x=2(t-sint)$, $y=2(1-cost)$, $\pi/2\le t\le 3\pi/2$.

3.16. а) $y=x^2$, $y=-x+2$, (Oy); б) $\rho=2\sqrt{cos2\varphi}$, $0\le\varphi\le\frac{\pi}{4}$;

в) $x=8cos^3t$, $y=8sin^3t$, $0\le t\le\pi/6$.

3.17. а) $y=3x^2$, $y=-x+4$, (Ox); б) $\rho=3\sqrt{\sin 2\varphi}$, $0\le\varphi\le\pi$;

в) $x=4(cost+tsint)$, $y=4(sint-tcost)$, $0\le t\le\pi$.

3.18. а) $y=\frac{1}{4}x^2$, $y=-x+3$, (Ox); б) $\rho=6\sin\varphi$, $0\le\varphi\le\pi$;

в) $x=2cost+sin2t$, $y=2sint-sin2t$, $0\le t\le\pi$.

3.19. а) $y=\frac{1}{3}x^2-3x+2$, $y=-\frac{2}{3}x^2-2x+4$, (Oy); б) $\rho=10(1+\cos\varphi)$, $0\le\varphi\le\frac{\pi}{4}$;

в) $x=5(t-sint)$, $y=5(1-cost)$, $0\le t\le 2\pi$.

3.20. а) $y=\frac{1}{2}x^2$, $y=-3x+8$, (Oy); б) $\rho=2\sqrt{sin2\varphi}$, $0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$;

в) $x=7(t-sint)$, $y=7(1-cost)$, $0\le t\le \pi$.

Задание 4. Найти объем произведенной продукции за указанный промежуток времени, если производительность труда описывается данной функцией времени

4.1. $f(t)=32+28t-9t^2$ за первую половину 8-часового дня.

4.2. $f(t)=\frac{t^2+3t}{(t+1)(t^2+1)}$ за первый час работы.

4.3. $f(t)=0,5+0,05t-0,00625t^2$ за 8-часовой рабочий день.

4.4. $f(t)=\frac{3}{3t+2}+5$ за пятый час работы.

4.5. $f(t)=28+4t-3t^2$ за третий час работы.

4.6. $f(t)=\frac{3}{4t+5}+4$ за второй час работы.

4.7. $f(t)=2+0,16t-0,0036t^2$ за 6-часовой рабочий день.

4.8. $f(t)=32-2^{-0,5t+5}$ за шестой месяц работы.

4.9. $f(t)=3t^2+18t$ а последний час работы 6-часового дня.

4.10. $f(t)=(3+t)e^{2t}$ за два года.

4.11. $f(t)=\frac{10}{t^2+2t+5}$ за шесть часов работы.

4.12. $f(t)=-t^2+10t$ за весь 6-часовой рабочий день.

4.13. $f(t)=(25+t)e^{10t}$ за пять лет.

4.14. $f(t)=(10+t)e^{5t}$ за один год.

4.15. $f(t)=36-e^{-0,8t+10}$ за пятый месяц работы.

4.16. $f(t)=\frac{5}{6t+5}+7$ за четвертый час работы.

4.17. $f(t)=46-3^{-0,1t+3}$ за пятый месяц работы.

4.18. $f(t)=(14+t)e^{2t}$ за три года.

4.19. $f(t)=\dfrac{3t^2+5}{(t+2)t^2}$ за первый рабочий час.

4.20. $f(t)=\dfrac{7}{8t+9}+8$ за третий час работы.

Задание 5. Определить работу, которую нужно затратить, чтобы растянуть пружину на b единиц длины, если при действии силы F н она растягивается на x единиц

5.1. b = 2 см, F = 78,8 Н, x = 4 см. 5.2. b = 0,06 м, F = 1 Н, x = 0,01 м.

5.3. b = 0,08 м, F = 2 Н, x = 0,05 м. 5.4. b = 8 см, F = 84 Н, x = 6 см.

5.5. b = 1 см, F = 64,2 Н , x = 2 см. 5.6. b = 0,05 м, F = 2,4 Н, x = 0,03 м.

5.7. b = 0,15 м, F = 2,75 Н, x = 0,02 м. 5.8. b = 2,5 см, F = 96,5 Н, x = 5 см.

5.9. b = 0,06 м, F = 2,4 Н, x = 0,02 м. 5.10. b = 3,2 см, F = 86,4 Н, x = 4 см.

5.11. b = 1,2 см, F = 74 Н, x = 2 см. 5.12. b = 0,08 м, F = 2 Н, x = 0,04 м.

5.13. b = 0,23 м, F =1,2 Н, x = 0,15 м. 5.14. b = 6 см, F = 92,5 Н, x = 5 см.

5.15. b = 3,2 см, F = 68 Н, x = 2 см. 5.16. b = 0,04 м, F = 3,2 Н, x = 0,02 м.

5.17. b = 0,25 м, F = 75 Н, x = 0,02 м. 5.18. b = 2,8 см, F = 98,4 Н, x = 4 см.

5.19. b = 0,05 м, F = 2,8 Н, x = 0,14 м. 5.20. b = 2,2 см, F = 89,7 Н, x = 3 см.

Решение типового варианта контрольной работы № 5

Задание 1. Вычислить определенные интегралы

а) $\int\limits_1^e \dfrac{dx}{x(5+\ln x)}$; б) $\int\limits_0^{\pi} x\cos x dx$; в) $\int\limits_0^{\pi/2} \dfrac{dx}{3\sin x+2}$;

г) $\int\limits_0^{\pi/4} \sin^4 x dx$; д) $\int\limits_0^5 \dfrac{xdx}{\sqrt{3x+1}}$; е) $\int\limits_{-a/2}^{a} \sqrt{a^2-x^2}dx$.

Решение. а) Пусть $t=\ln x$, тогда $\dfrac{1}{x}dx=d\ln x=dt.$

Если $x_1=1,$ то $t_1=\ln 1=0,$ если $x_2=e$, то $t_2=\ln e=1.$ Следовательно,

$$\int_1^e \frac{dx}{x(5+\ln x)} = \int_1^e \frac{d(\ln x)}{5+\ln x} = \int_0^1 \frac{dt}{5+t} = \ln|t+5|\Big|_0^1 = \ln 6 - \ln 5 =$$

$$= \ln\frac{6}{5} = \ln 1{,}2.$$

б) Применим формулу интегрирования по частям $\int_a^b u dv = u\cdot v\Big|_a^b - \int_a^b v du.$

Обозначая $\begin{matrix} u = x \\ dv = \cos x dx \end{matrix}$, получим $\begin{matrix} du = dx \\ v = \sin x \end{matrix}$. Тогда, получим

$$\int_0^\pi x\cos x dx = x\sin x\Big|_0^\pi - \int_0^\pi \sin x dx = x\sin x\Big|_0^\pi + \cos x\Big|_0^\pi =$$

$$= \pi\sin\pi - 0\cdot\sin 0 + (\cos\pi - \cos 0) = -1-1 = -2.$$

в) Применим универсальную тригонометрическую подстановку

$$tg\,\frac{x}{2} = t\,,\quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}\,,\ \sin x = \frac{2tg\,\frac{x}{2}}{1+tg^2\,\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}.$$

и пересчитаем пределы интегрирования $t_1 = tg0 = 0$, $t_2 = tg\frac{\pi}{4} = 1$. Будем иметь

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{3\sin x + 2} = \int_0^1 \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{3\cdot\frac{2t}{1+t^2}+2} = \int_0^1 \frac{dt}{t^2+3t+1} = \int_0^1 \frac{dt}{\left(t+\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}} =$$

$$= \frac{1}{2\cdot\frac{\sqrt5}{2}}\,ln\left|\frac{t+\frac{3}{2}-\frac{\sqrt5}{2}}{t+\frac{3}{2}+\frac{\sqrt5}{2}}\right|\Bigg|_0^1 = \frac{\sqrt5}{5}\ln\left|\frac{2t+3-\sqrt5}{2t+3+\sqrt5}\right|\Bigg|_0^1 =$$

$$= \frac{\sqrt5}{5}\left[\ln\left|\frac{5-\sqrt5}{5+\sqrt5}\right| - \ln\left|\frac{3-\sqrt5}{3+\sqrt5}\right|\right] == \ln\left|\frac{\left(5-\sqrt5\right)\left(3+\sqrt5\right)}{\left(5+\sqrt5\right)\left(3-\sqrt5\right)}\right| = \ln\left|\frac{10+2\sqrt5}{10-2\sqrt5}\right|.$$

$$\int_0^{\pi/4} \sin^4 x dx = \frac{1}{4}\int_0^{\pi/4}(1-\cos 2x)^2 dx = \frac{1}{4}\int_0^{\pi/4}\left(1-2\cos 2x + \frac{1+\cos 4x}{2}\right)dx =$$

г) $$=\frac{1}{4}\left[\frac{3}{2}\int_0^{\pi/4}dx-2\int_0^{\pi/4}\cos 2xdx+\frac{1}{2}\int_0^{\pi/4}\cos 4xdx\right]=$$

$$=\frac{1}{4}\left[\frac{3}{2}x-\frac{2\sin 2x}{2}+\frac{\sin 4x}{8}\right]_0^{\pi/4}=\frac{1}{4}\left[\frac{3}{8}\pi-1\right].$$

д) Пусть $t^2=1+3x, x=\dfrac{t^2-1}{3}, dx=\dfrac{2}{3}dt\Rightarrow t_1=\sqrt{1}, t_2=\sqrt{16}=4$. Тогда

$$\int_0^5\frac{xdx}{\sqrt{1+3x}}=\frac{2}{9}\int_1^4\left(t^2-1\right)dt=\frac{2}{9}\left(\frac{t^3}{3}\bigg|_1^4-t\big|_1^4\right)=\frac{2}{9}\left(\frac{64-1}{3}-4+1\right)=4$$

е) $$\int_{-a/2}^{a}\sqrt{a^2-x^2}dx=\left\{\begin{matrix}x=a\sin t, dx=a\cos tdt\Rightarrow -a/2=a\sin\left(-\pi/6\right), a=a\sin\left(\pi/2\right),\\ t_1=-\pi/6, t_2=\pi/2.\end{matrix}\right\}=$$

$$=\int_{-\pi/6}^{\pi/2}\sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}\,a\cos tdt=\int_{-\pi/6}^{\pi/2}a^2\cos^2 tdt=\frac{a^2}{2}\int_{-\pi/6}^{\pi/2}\left(1+\cos 2t\right)dt=\frac{a^2}{2}(t+\frac{1}{2}\sin 2t)\Big|_{-\pi/6}^{\pi/2}=$$

$$=\frac{a^2}{2}(2\pi/3+1/2\sin\pi-1/2\sin\pi/3)=\frac{a^2}{2}(2\pi/3-\sqrt{3}/4)=\frac{a^2}{24}(8\pi-3\sqrt{3}).$$

Задание 2. Вычислить несобственные интегралы или доказать их расходимость

$$\text{а) }\int_0^\infty\frac{xdx}{\sqrt{x^2+4}};\qquad \text{б) }\int_0^1\frac{2x+chx}{\sqrt[4]{x^2+shx}}dx.$$

Решение. а) Имеем несобственный интеграл I рода.

$$\int_0^\infty\frac{xdx}{\sqrt{x^2+4}}=\left|\begin{matrix}t=x^2+4\\ dt=2xdx\\ xdx=\dfrac{1}{2}dt\\ x_1=0\Rightarrow t_1=4\\ x_2=-\infty\Rightarrow t_2=\infty.\end{matrix}\right|=\int_4^\infty\frac{\frac{1}{2}dt}{\sqrt{t}}=\lim_{b\to\infty}\int_4^b\frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}dt=$$

$$=\lim_{b\to\infty}\left(t^{\frac{1}{2}}\bigg|_4^b\right)==\lim_{b\to\infty}\left(\sqrt{t}\bigg|_4^b\right)=\lim_{b\to\infty}\left(\sqrt{b}-2\right)=\infty$$ - интеграл расходится.

б) При $x=0$ знаменатель функции обращается в 0, а числитель равен 1, следовательно, $x=0$ – точка разрыва II рода. Во всех остальных точках промежутка (0;1] подынтегральная функция непрерывна.

Заметим также, что $(2x+chx)dx=d(x^2+shx)$,

$$\int \frac{2x + chx}{\sqrt[4]{x^2 + shx}} dx = \int (x^2 + shx)^{-\frac{1}{4}} \, d(x^2 + shx) = \{x^2 + shx = t\} =$$

$$= \int t^{-\frac{1}{4}} dt = \frac{4t^{3/4}}{3} + C = \frac{4}{3} \sqrt[4]{x^2 + shx} + C.$$

Используя определение несобственного интеграла от неограниченной функции, а также формулу Ньютона-Лейбница получим

$$\int_0^1 \frac{2x+chx}{\sqrt[4]{x^2+shx}} dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{0+\varepsilon}^1 \frac{2x+chx}{\sqrt[4]{x^2+shx}} dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{4}{3} \sqrt[4]{x^2+shx} \Big|_{\varepsilon}^{1} =$$

$$= \frac{4}{3} \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\sqrt[4]{1+sh1} - \sqrt[4]{\varepsilon^2 + sh\varepsilon} \right) = \frac{4}{3} \cdot \sqrt[4]{1+sh1}.$$

Интеграл сходящийся.

Задание 3. Вычислить: а) площадь плоской фигуры, ограниченной данными кривыми (сделать чертеж); объем тела вращения (вокруг указанной оси); б) площадь поверхности тела вращения вокруг полярной оси); в) длину дуги кривой

а) $y = x^2 + x - 6$, $y - x + 2 = 0$, (Ox); б) $\rho = a\sqrt{\cos 2\varphi}$, $0 \le t \le \frac{\pi}{4}$;

в) $x = a(\cos t - t\sin t), y = a(\sin t - t\cos t)$, $0 \le t \le 2\pi$.

Решение. Графиком функции $y = x^2 + x - 6$ является парабола, ветви которой направлены вверх. Найдём точки пересечения параболы с осью Ox: $x^2 + x - 6 = 0$, $D = 1 - 4 \cdot 1 \cdot (-6) = 25$, $x_1 = -3$, $x_2 = 2$. Уравнение прямой $y - x + 2 = 0$ запишем в виде $y = x - 2$. Изобразим эти линии в системе координат и заштрихуем фигуру, ограниченную этими линиями. Найдём абсциссы точек пересечения линий: $x^2 + x - 6 = x - 2$, $x^2 - 4 = 0$, $x_1 = -2$, $x_2 = 2$.

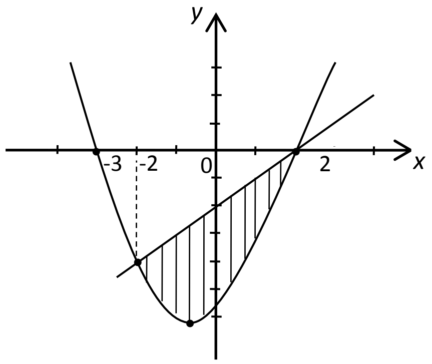


Рисунок к заданию 3а)

Так как фигура лежит ниже оси Ox, то площадь заштрихованной фигуры равна

$$-\int_{-2}^{2}\left[\left(x^2+x-6\right)-\left(x-2\right)\right]dx=-\int_{-2}^{2}\left(x^2-4\right)dx=-2\int_{0}^{2}\left(x^2-4\right)dx=$$

$$=-2\left(\frac{x^3}{3}-4x\right)\Bigg|_0^2=-2\left(\frac{8}{3}-8\right)=\frac{32}{3}=10\frac{2}{3}\,(\text{кв.ед.})$$

Если плоскую фигуру, ограниченную двумя линиями, вращать вокруг оси Ox, то объем тела вращения будет определяться по формуле

$$V_x=\pi\cdot\int_{x_1}^{x_2}\left[f_2^2(x)-f_1^2(x)\right]dx,\qquad (0\le f_1(x)\le f_2(x))\,.$$

В нашем случае получим

$$\pi\int_{-2}^{2}\left[\left(x^2+x-6\right)^2-\left(x-2\right)^2\right]dx=\pi\int_{-2}^{2}\left(x^4+2x^3-12x^2+x^2-12x+36-x^2+4x-4\right)dx=$$

$$=\pi\int_{-2}^{2}\left(x^4-12x^2+32\right)dx+\pi\int_{-2}^{2}\left(2x^3-8x\right)dx=2\pi\int_{0}^{2}\left(x^4-12x^2+32\right)dx+0=$$

$$=2\pi\left(\frac{x^5}{5}-4x^3+32x\right)\Bigg|_0^2=2\pi\left(\frac{32}{5}-32+64\right)=\frac{384\pi}{5}\,(\text{куб.ед.}).$$

б) Найдем площадь поверхности, образованной вращением вокруг полярной оси частью лемнискаты $\rho=a\sqrt{\cos 2\varphi}$, ограниченной углом от $\boldsymbol{\varphi}_1=\mathbf{O}$ до $\varphi_2=\frac{\pi}{4}$, по формуле: $Q=2\pi\int_{\alpha}^{\beta}\rho\sin\varphi\sqrt{\rho^2(\varphi)+\left[\rho'(\varphi)\right]^2}\,d\varphi$,

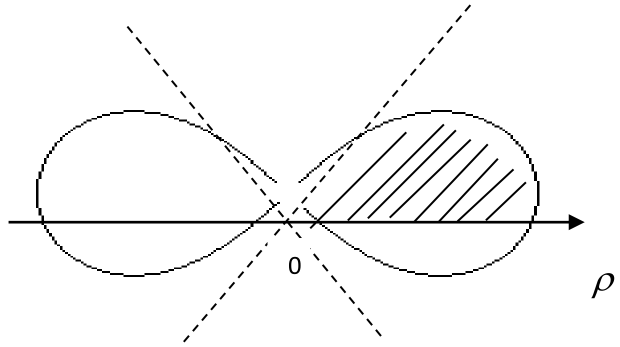


Рисунок к заданию 3 б) - Лемниската Бернулли

Предварительно определим дифференциал дуги: $\rho'(\varphi) = -\dfrac{a sin 2\varphi}{\sqrt{cos 2\varphi}}$,

$$dl = \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2} = \sqrt{a^2 cos 2\varphi + \frac{a^2 sin^2 2\varphi}{cos 2\varphi}} = \sqrt{\frac{a^2\left(sin^2 2\varphi + cos^2 2\varphi\right)}{cos 2\varphi}} = \frac{a}{\sqrt{cos 2\varphi}}.$$

Следовательно, получим:

$$S = 2\pi \int_0^{\pi/4} a\sqrt{\cos 2\varphi}\sin\varphi \cdot \frac{a}{\sqrt{\cos 2\varphi}}\, d\varphi = 2\pi a^2 \int_0^{\pi/4} \sin\varphi d\varphi =$$

$$= -2\pi a^2 \cos\varphi\Big|_0^{\pi/4} = -2\pi a^2\left(\cos\frac{\pi}{4} - \cos 0\right) = -2\pi a^2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right) = \pi a^2\left(2 - \sqrt{2}\right), (\text{ед}^2.)$$

в) Кривая задана параметрически. Воспользуемся формулой (3.50), предварительно находим производные $x'(t)$ и $y'(t)$

$$x'(t) = a(\cos t + t\sin t)' = a(-\sin t + \sin t + t\cos t) = at\cos t,$$

$$y'(t) = a(\sin t - t\cos t)' = a(\cos t - \cos t + t\sin t) = at\sin t.$$

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2t^2\cos^2 t + a^2t^2\sin^2 t}\, dt = \int_0^{2\pi} a \cdot \sqrt{t^2(\cos^2 t + \sin^2 t)}\, dt =$$

$$= a\int_0^{2\pi} tdt = a \cdot \frac{t^2}{2}\Bigg|_0^{2\pi} = a \cdot \frac{4\pi^2}{2} = 2a\pi^2 \text{ (ед.длины).}$$

Задание 4. Найти объем произведенной продукции за второй час работы, если производительность труда описывается функцией времени $f(t) = \dfrac{2}{3t+4} + 3$.

Решение. Искомый объем определим, используя формулу (3.80)

$$Q = \int_{t_1}^{t_2} f(t)dt = \int_1^2 \left(\frac{2}{3t+4} + 3 \right) dt = 2\int_1^2 \frac{dt}{3t+4} + 3\int_1^2 dt =$$

$$= \left[\frac{2}{3} \ln|3t+4| + 3t \right]\Bigg|_1^2 = \frac{2}{3}\ln 10 + 6 - \frac{2}{3}\ln 7 - 3 = \frac{2}{3}\ln\frac{10}{7} + 3.$$

Задание 5. Определить работу, которую нужно затратить, чтобы растянуть пружину на 10 см, если при действии силы *F* = 1 Н она растягивается на 1 см

Решение. Согласно закону Гука, сила *F*, растягивающая пружину, пропорциональна ее растяжению, т.е. *F* = *kx*, где *x* - растяжение пружины (в метрах), *k* - коэффициент пропорциональности. Так как по условию при *x* =10 см = 0,01 м сила *F* = 1 Н, то из равенства 1 = 0,01 коэффициент пропорциональности определится *k* = 100, тогда *F* = 100 *x*. Следовательно искомая работа равна $A = \int_0^{0,1} 100x dx = 50x^2\Big|_0^{0,1} = 0,5(\textit{Дж.})$.

ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ № 8 «Определенный и несобственный интегралы» (практика)

1. Значение определенного интеграла $\int_2^3 \frac{2x+1}{x} dx$ равно …

1) $4 + \ln 2$; 2) -1; 3) $2 + \ln\left(\frac{3}{2}\right)$; 4) $2 - \ln 2$; 5) 2.

2. Интеграл, который нельзя вычислять с помощью формулы Ньютона-Лейбница равен …

1) $\int_0^2 (3x-1)^2 x dx$; 2) $\int_0^2 \frac{xdx}{(x-1)^2}$; 3) $\int_0^2 \sqrt{x+1} x dx$; 4) $\int_0^2 \frac{xdx}{x^4+9}$; 5) $\int_0^{\pi} \frac{\sin 2x dx}{\cos^3 2x}$.

3. Площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y = 3x^2 - 6x$ и осью абсцисс равна …

1) 2 кв. ед.; 2) 4 кв. ед.; 3) 6 кв. ед.; 4) 8 кв. ед.; 5) другой ответ.

4. Равенство $\int_a^{a+2} (x^3 + 5x)dx = 0$ верно при значении *a*…

1) -2; 2) -1; 3) 0; 4) 1; 5) другой ответ.

5. Несобственным интегралом 2-го рода является …

1) $\int\limits_{-1}^{1} ctgxdx$; 2) $\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{\cos x}$; 3) $\int\limits_{0}^{\pi} sin^2 xdx$; 4) $\int\limits_{0}^{1} (x+\cos x)dx$; 5) $\int\limits_{-\pi/3}^{\pi} \frac{dx}{\cos 3x}$.

6. Объём тела, образованного при вращении вокруг оси Ox кривой $y = \sin^2 x$ в промежутке от $0 < x < {}^{\pi}/_{2}$, равен …

1) $\frac{3\pi}{2}$ куб. ед.; 2) $\frac{5\pi}{6}$ куб. ед.; 3) $\frac{2\pi}{3}$ куб. ед.;

4) $\sqrt{5\pi}$ куб. ед.; 5) другой ответ.

7. Интеграл $\int\limits_{0}^{\pi/4} \frac{xdx}{\cos^2 4x}$ вычисляется методом интегрирования:

1) с помощью универсальной тригонометрической подстановки;
2) понижения степени тригонометрической функции;
3) по частям; 4) Бернулли; 5) Дирихле.

8. Скорость прямолинейного движения тела задается функцией $v(t) = 2t + 5$, а закон этого движения имеет вид $S(t) + C$, тогда постоянная C равна …

1) -3; 2) 11; 3) 2; 4) 3; 5) 4.

9. Для двух определенных интегралов $\int\limits_{0}^{1} \sqrt{x}dx$ и $\int\limits_{0}^{1} x^3 dx$ справедливо неравенство …

1) $\int\limits_{0}^{1} \sqrt{x}dx > \int\limits_{0}^{1} x^3 dx$; 2) $\int\limits_{0}^{1} \sqrt{x}dx < \int\limits_{0}^{1} x^3 dx$;

3) $\int\limits_{0}^{1} \sqrt{x}dx \geq \int\limits_{0}^{1} x^3 dx$; 4) $\int\limits_{0}^{1} \sqrt{x}dx \leq \int\limits_{0}^{1} x^3 dx$.

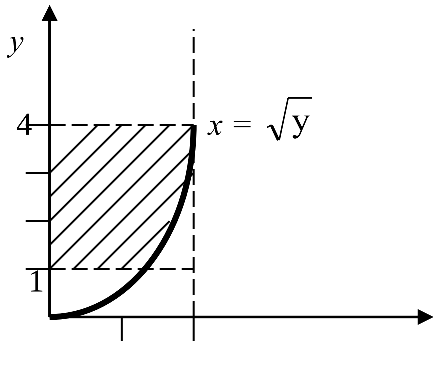
10. Значение определенного интеграла $\int\limits_{0}^{1} \frac{xdx}{x^2+3x+2}$ равно …

1) $-\ln 5$; 2) 1; 3) $\ln\left(\frac{9}{8}\right)$; 4) $-\ln 2$; 5) ${}^{1}/_{4}$.

11. Площадь заштрихованной области задана интегралом …

1) $\int\limits_{2}^{4} \left(\sqrt{y}-2\right)dy$; 2) $\int\limits_{1}^{2} \left(\sqrt{x}+2\right)dx$

3) $\int\limits_{1}^{4} \left(\sqrt{y}+2\right)dy$; 4) $\int\limits_{1}^{4} \left(2-\sqrt{y}\right)dy$



5) $\int_1^4 \sqrt{y}dy$; 6) другой ответ. x

12. Среди интегралов расходящимися являются …

1) $\int_3^{\infty}\frac{dx}{(x-2)^4}$; 2) $\int_0^{\infty} sin5xdx$; 3) $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$; 4) $\int_1^e \frac{dx}{x\ln^2 x}$; 5) $\int_0^{\infty}\frac{dx}{e^x-1}$.

13. Интеграл $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^3+8}$ оценивается двойным неравенством …

1) $\frac{2}{9}\le\int_{-1}^1\frac{dx}{x^3+8}\le\frac{2}{7}$; 2) $\frac{1}{10}\le\int_{-1}^1\frac{dx}{x^3+8}\le\frac{1}{8}$; 3) $\frac{2}{11}\le\int_{-1}^1\frac{dx}{x^3+8}\le\frac{2}{5}$;

4) $\frac{4}{5}\le\int_{-1}^1\frac{dx}{x^3+8}\le 4$; 5) $\frac{6}{5}\le\int_{-1}^1\frac{dx}{x^3+8}\le\frac{6}{11}$; 6) $0\le\int_{-1}^1\frac{dx}{x^3+8}\le 1$.

14. Статический момент M_x относительно оси Ox дуги кардиоиды $\rho=1+\cos\varphi, 0\le\varphi\le\pi$ равен …

1) $\frac{3}{2}$; 2) $\frac{15}{6}$; 3) $\frac{16}{5}$; 4) $\frac{10}{3}$; 5) другой ответ.

15. Равенство $\int_{a-4}^{a}(-2x^3+7x)dx=0$ выполняется при значении a…

1) -2; 2) -1; 3) 0; 4) 1; 5) 2; 6) другой ответ.

16. Момент инерции относительно оси Oy дуги астроиды $x=8cos^3 t$, $y=8sin^3 t$, лежащей в первой четверти, равен …

1) 178; 2) 192; 3) 186; 4) 164; 5) 152; 6) другой ответ.

17. Путь, пройденный телом за третью секунду при прямолинейном движении со скоростью $v(t) = 6t^2 + t$ (м/сек), равен …

1) 40 м; 2) 38,5 м; 3) 40,5 м; 4) 42,5 м; 5) 36 м.

18. Число несобственных интегралов в следующей группе интегралов

$\int_0^2 \ln xdx$, $\int_0^{\pi/2} e^{\cos 2x}\sin 2xdx$, $\int_{-\pi}^0\frac{dx}{1+x^2}$, $\int_0^{\pi/4}(x-tg\,2x)dx$, $\int_0^1\frac{xdx}{1-e^x}$

равно…

1) 0; 2) 1; 3) 2; 4) 3; 5) 4; 6) 5.

19. Объем продукции, произведенной за год при заданной функции Кобба-Дугласа $f(t)=(1+t)e^{4t}$, равен …

1) $\frac{1}{16}\left(7e^4-3\right)$; 2) $\frac{1}{8}\left(5e^4-2\right)$; 3) $\frac{1}{4}\left(8e^4-1\right)$;

4) $\frac{1}{12}\left(9e^4-5\right)$; 5) $\frac{1}{12}\left(6e^4-1\right)$; 6) другой ответ.

20. Площадь фигуры, ограниченной линией $\rho=\frac{1}{2}+\cos\varphi$ равна …

1) $\frac{3\pi}{4}$; 2) $\frac{7\pi}{8}-\frac{1}{2}$; 3) $\frac{7\pi}{8}+\frac{1}{2}$; 4) $\frac{5\pi}{6}$; 5) $3\pi-1$.

2)

21. Определенный интеграл $\int\limits_0^{\pi/2}\frac{dx}{3+2\cos x}$ вычисляется с помощью подстановки …

1) $\cos x=t$; 2) $\mathrm{tg}\,{}^x/_2=t$; 3) $\sin x=t$; 4) $\mathrm{tg}x=t$; 5) другой ответ.

22. Определенный интеграл $\int\limits_0^{\pi/2}\frac{dx}{3+2\cos x}$ вычисляется с помощью подстановки …

2) $\cos x=t$; 2) $\mathrm{tg}\,{}^x/_2=t$; 3) $\sin x=t$; 4) $\mathrm{tg}x=t$; 5) другой ответ.

23. Установить соответствие между интегралом и его значением

ИНТЕГРАЛ	ЗНАЧЕНИЕ
1. $\int\limits_0^{\pi/4}\cos^2 x dx$	А. ${}^{\pi}/_6$
2. $\int\limits_0^{1/4}\frac{dx}{(4x+1)\sqrt{x}}$	Б. ${}^{\pi}/_8$
3. $\int\limits_2^{7/2}\frac{dx}{\sqrt{5+4x-x^2}}$	В. ${}^{\pi}/_4$
	Г. ${}^{\pi}/_8+{}^{1}/_4$
	Д. ${}^{\pi}/_6-{}^{1}/_3$.

Ответ: 1__, 2__, 3__.

24. Если $\int\limits_0^1 3f(x)dx=3$ и $\int\limits_1^4 f(x)dx=5$, то $\int\limits_0^4 f(x)dx$ равен …

1) 8; 2) 12; 3) 14; 4) 16; 5) 18.

25. Сходящимися являются несобственные интегралы а) $\int_1^{\infty} x^{-8/3}dx$;

б) $\int_1^{\infty} x^{-3/5}dx$; в) $2\int_1^{\infty} x^{-5/3}dx$; г) $\int_1^{\infty} x^{-3/8}dx$ ...

1) а) и в); 2) б) и г); 3) а) и г); 4) б) и в); 5) только а).

26. Длина дуги линии $y = 1 - \ln(x^2 - 1)$, если $9 \le x \le 16$ равна …

1) $7 + \ln\frac{12}{17}$; 2) $5 + \ln\frac{68}{75}$; 3) $5 + \ln\frac{75}{68}$; 4) $7 + \ln\frac{75}{68}$; 5) $9 + \ln\frac{17}{12}$.

27. В определенном интеграле $\int_4^9 \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{x}-1}$ введена замена переменной $x = t^2$, тогда интеграл примет вид …

1) $\int_4^9 \frac{tdt}{t-1}$; 2) $2\int_2^3 \frac{t^2dt}{t-1}$; 3) $\int_2^3 \frac{t^3dt}{t-1}$; 4) $\int_3^4 \frac{tdt}{t^2-1}$; 5) $2\int_1^3 \frac{tdt}{t-1}$.

28. Объем тела, полученного вращением вокруг оси Oy плоской фигуры, ограниченной линиями $\frac{y}{3} = \left(\frac{x}{2}\right)^{2/3}$ и $y = 3$ равен…

1) $2\frac{\pi}{2}$; 2) $1 + 5\pi$; 3) 3π; 4) π^3; 5) $\pi + 2$.

29. Несобственный интеграл $\int_0^{\infty} (1+x)^{-4}dx$ равен …

1) 1; 2) -1; 3) $\frac{1}{4}$; 4) $\frac{1}{3}$; 5) $\frac{1}{2}$.

30. Установить соответствие

ИНТЕГРАЛ	РАВЕН
1. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} x^{11}\sin(11x)dx$	А. $\frac{6}{5}$
2. $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{dx}{tg^{10}x}$	Б. $2\int_{-\pi/2}^{0} x^{11}\sin(11x)dx$
3. $\int_{-1}^{1}\left(\sqrt[3]{x^2} + 3x\right)dx$	В. 0

Г. $\int_{0}^{\pi/4} \frac{dx}{tg^{10}x}$

Д. $2\int_{0}^{\pi/4} \frac{dx}{tg^{10}x}$

Е. $2\int_{0}^{\pi/2} x^{11}\sin(11x)dx$.

Ответ: 1__, 2__, 3__.

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Аксенов А.П. Математический анализ в 4 ч., часть 2: Учебник и практикум для академического бакалавриата / А.П. Аксенов. - Люберцы: Юрайт, 2016. - 344 с.
2. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа: Учебное пособие/ Г.Н. Берман. - СПб.: Лань, 2020. - 492 с.
3. Будаев В.Д. Математический анализ. Функции одной переменной: Учебник / В.Д. Будаев, М.Я. Якубсон. - СПб.: Лань, 2012. - 544 с.
4. Виноградов О.Л. Математический анализ / О.Л. Виноградов. - СПб.: BHV, 2017. - 752 с.
5. Виноградова И.А. Математический анализ в задач и упражнениях. В 3-х томах. Т.1: Дифференциальное и интегральное исчис / И.А. Виноградова. - М.: МЦНМО, 2017. - 412 с.
6. Горлач Б.А. Математический анализ: Учебное пособие/ Б.А. Горлач. – СПб.: Лань, 2018. – 608 с.
7. Горлач Б.А., Ефимов Е.А. Дифференцирование. Практикум для студентов технических и экономических специальностей вузов/ Б.А. Горлач, Е.А. Ефимов. – СПб.: Лань, 2021. – 116 с.
8. Демина Т.И. Математический анализ для экономистов: практ.: Учебное пособие / Т.И. Демина, О.П. Шевякова. - М.: Инфра-М, 2013. - 384 с.
9. Дюпре Ж.-Л. Математический анализ. Функции одной переменной: Учебник / Ж.-Л. Дюпре. - СПб.: Лань, 2016. - 544 с.
10. Запорожец Г.И. Руководство к решению задач по математическому анализу: Учебное пособие/ Г.И. Запорожец. – 8-е изд.-е, стер.. – СПб.: Лань, 2014. – 464 с.
11. Зорич В.А Математический анализ. Часть 1 / В.А Зорич. - М.: МЦНМО, 2018. - 564 с.
12. Ильин В.А. Математический анализ. Ч. 1: Учебник для бакалавров / В.А. Ильин, В.А. Садовничий, Б.Х. Сендов. - Люберцы: Юрайт, 2016. - 660 с.
13. Кирнев А.Д. Курс высшей математики. Введение в математический анализ. Дифференциальное исчисление. Лекции и практикум: Учебное пособие / А.Д. Кирнев. - СПб.: Лань П, 2016. - 288 с.
14. Краснова С.А. Математический анализ для экономистов в 2 ч. часть 1: Учебник и практикум для прикладного бакалавриата / С.А. Краснова, В.А. Уткин. - Люберцы: Юрайт, 2016. - 298 с.
15. Кремер Н.Ш. Математика для экономистов: от арифметики до эконометрики: учебно-справочное пособие/ Н.Ш. Крамер, Б.А. Путко, И.М. Тришин. – М.: Юрайт, 2019. – 724 с.

16. Кытманов А.М. Математический анализ.: Учебное пособие для бакалавров / А.М. Кытманов. - Люберцы: Юрайт, 2016. - 607 с.

17. Ляшко И.И. Т.1. Ч.1: Математический анализ: введение в анализ, производная, интеграл. Введение в анализ. Справочное пособие по высшей математике / И.И. Ляшко, А.К. Боярчук, Я.Г. Гай, Г.П. Головач. - М.: Ленанд, 2019. - 238 с.

18. Логинова В. В. Математический анализ. Сборник заданий: Учебное пособие для вузов / В. В. Логинова [и др.]; под общей редакцией Е. Г. Плотниковой. — 2-е изд., испр. и доп. — Москва: Издательство Юрайт, 2019. — 286 с.

19. Максимова О. Д. Математический анализ в примерах и задачах. Предел функции: учебное пособие для вузов / О. Д. Максимова. — 2-е изд., стер. — Москва: Издательство Юрайт, 2019. — 200 с.

20. Никитин А.А. Математический анализ. углубленный курс: Учебник и практикум для академического бакалавриата / А.А. Никитин, В.В. Фомичев. - Люберцы: Юрайт, 2016. – 460 с.

21. Опойцев В.И. Школа Опойцева: Математический анализ / В.И. Опойцев. - М.: Ленанд, 2017. - 272 с.

22. Плотникова Е. Г. Математический анализ для экономического бакалавриата: учебник и практикум для академического бакалавриата / Е. Г. Плотникова. — Москва: Издательство Юрайт, 2019. — 274 с.

23. Рудык Б. М. Математический анализ для экономистов: учебник и практикум для академического бакалавриата / Б. М. Рудык, О. В. Татарников. — Москва: Издательство Юрайт, 2019. — 356 с.

24. Солодовников А.С. Математика в экономике: Учебник Ч.2. Математический анализ / А.С. Солодовников и др. - М.: Финансы и статистика, 2011. - 560 с.

25. Трухан А.А. Математический анализ. Функция одного переменного: Учебное пособие/ А.А. Трухан. - СПб.: Лань, 2020. - 324 с.

26. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления: Учебник для вузов в 3 томах/ Г.М. Фихтенгольц. – 15-е издание стер. - СПб.: Лань, 2021. – Том 2. – 800 с.

27. Хинчин, А. Я. Восемь лекций по математическому анализу. Учебное пособие / А.Я. Хинчин. - М.: Либроком, 2015. - 280 с.

28. Шершнев В.Г. Математический анализ: сб. задач с реш.: Учебное пособие / В.Г. Шершнев. - М.: Инфра-М, 2017. - 736 с.

29. Шершнев В.Г. Математический анализ: Учебное пособие / В.Г. Шершнев. - М.: Инфра-М, 2019. - 64 с.

30. Шипачев В.С. Математический анализ. Теория и практика./ В.С. Шипачев. – М.: Высшая школа, 2018. – 350 с.

Информационные ресурсы

31. http://www.allmath.ru – Математический портал.
32. http://www.pm298.ru - Прикладная математика. Примеры решения задач. Справочник математических формул.
33. http://www.exponenta.ru - Образовательный математический сайт. Методические разработки, задачи по математическому анализу и др.
34. http://www.mathelp.spb.ru/index1.htm -
35. https://e.lanbook.com - Электронно-библиотечная система издательства Лань.
36. http://math24.ru – Краткие теоретические сведения по математическому анализу и разбор примеров.
37. http://mathprofi.com – фонд учебных материалов по математике, физике и другим точным наукам.
38. http://www.mathtest.ru- тесты по математике on-line.
39. http://i-exam.ru - Интернет-сайт тестов ФЭПО. «Интернет-тренажеры».
40. http://window.edu.ru/catalog/?p_rubr=2.2.74 - Единое окно доступа к информационным ресурсам. Математика и математическое образование.