Министерство сельского хозяйства РФ

ФГОУ ВО Иркутский государственный
аграрный университет им. А.А. Ежевского
Кафедра Математики

М.А. Быкова
Е.В. Елтошкина
Н.И. Овчинникова

МАТЕМАТИКА

Учебное пособие

ЧАСТЬ I

Иркутск – 2018

УДК 517(07)

Б 88.

Печатается по решению Методического Совета Иркутского государственного аграрного университета им. А.А. Ежевского от 26 ноября 2018 г., протокол № 3.

Рецензенты:

Шумай Т.А., доцент кафедры Математики Иркутского ГАУ им. А.А. Ежевского;

Краковский Ю.М., д.т.н., профессор кафедры «Информационные системы и защита информации» Иркутского государственного университета путей сообщения

Кузьмина Н.Д., к.ф.-м.н., доцент, зав. отделением физико-математического, естественнонаучного и технологического образования Педагогического института ФГБОУ ВО «ИГУ»

Быкова М.А., Елтошкина Е.В., Овчинникова Н.И. Математика: Учебное пособие. Ч. 1. – Иркутск: Изд-во ИрГАУ им А.А. Ежевского, 2018. – 228 с.

Учебное пособие включает разделы «Линейная алгебра», «Векторная алгебра», «Аналитическая геометрия на плоскости», «Аналитическая геометрия пространстве», «Комплексные числа». В учебном пособии приведен обзор основных теоретических понятий и положений указанных разделов с иллюстрацией их на конкретных примерах; даны вопросы для самопроверки знаний студентов; выделены тестовые задания по теории и практике для самоподготовки; представлены контрольные работы, составленные по двадцативариантной системе с решением типового варианта. Учебное пособие предназначено для студентов инженерного бакалавриата очной формы обучения аграрного вуза.

СОДЕРЖАНИЕ

Раздел I. ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

1.1. Матрицы и действия над ними

Числовой матрицей размерности $m \times n$ называют прямоугольную таблицу чисел, содержащую m строк и n столбцов [1], [13], [17]. Матрицы обозначаются большими латинскими буквами, а их элементы - маленькими буквами с двумя индексами, например:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \left(a_{ij}\right), \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}, \tag{1.1}$$

где $a_{ij}, i = \overline{1, m}, \ j = \overline{1, n}$ элементы матрицы *A*, i - номер строки, j - номер столбца, на пересечении которых находится элемент a_{ij}. Матрицу можно записывать в виде:

$$A = \left(a_{ij}\right)_{m \times n} \text{ или } A = \left\| a_{ij} \right\|_{m \times n}$$

Матрицу $A = (a_{11} \ a_{12} \ \dots \ a_{1n})$ размерности 1xn называют *матрицей-строкой*, матрица $A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$ размерности mx1 называют *матрицей-столбцом.*

Матрица называется *квадратной***,** если $m = n$, число n называют ее *порядком*, например квадратная матрица третьего порядка запишется

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Элементы $a_{ij}\left(i = \overline{1, m}\right)$ составляют *главную диагональ* матрицы, а элементы a_{1n} , a_{2n-1} ,... , a_{n1} - *побочную диагональ* матрицы. Если все $a_{ij} = 0$ ($i \neq j$), за исключением элементов, стоящих на главной диагонали a_{ii}, то матрицу называют *диагональной,* например:

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

Диагональная матрица называется *единичной*, если все $a_{ii} = 1$, ее обозначают:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Если все $a_{ij} = 0$, то матрица называется *нулевой,* обозначают 0.

Нулевая и единичная матрицы выполняют в матричном исчислении такую же роль, как 0 и 1 в теории действительных чисел.

Если все элементы квадратной матрицы удовлетворяют условию $a_{ij} = a_{ji}$, то матрица называется *симметрической*, [3]. Две матрицы $A_{m\times n} = \left(a_{ij}\right)$ и $B_{m\times n} = \left(b_{ij}\right)$ называются *равными*, если они имеют одинаковую размерность и их соответствующие элементы равны: $a_{ij} = b_{ij}$, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,m}$.

Над матрицами можно выполнять линейные действия: *умножение на число, сумму* (*разность*) *и произведение.*

1. Чтобы *умножить матрицу* $A = \left(a_{ij}\right)$ *на число* λ, надо каждый элемент матрицы умножить на это число, [19]

$$\lambda A = A\lambda = \left(\lambda a_{ij}\right). \qquad (1.2)$$

Операция умножения матрицы на число обладает следующими свойствами:

$$\alpha\,\beta A = \alpha(\beta A)$$

$$\alpha\,(A+B) = \alpha\,A + \alpha\,B$$

$$(\alpha + \beta)A = \alpha\,A + \beta\,B$$

где α, β - действительные числа; A**,** B - матрицы.

2. *Суммой* (*разностью*) двух матриц $A_{m\times n}$ и $B_{m\times n}$ называется матрица, элементы которой получаются сложением (вычитанием) соответствующих

элементов матриц, т.е.

$$A \pm B = \left(a_{ij} \pm b_{ij}\right), \quad i = \overline{1,m}, \quad j = \overline{1,n}. \tag{1.3}$$

Складывать можно матрицы одинаковой размерности. Операция сложения матриц обладают такими же свойствами, что и операция сложения действительных чисел:

$$A+B=B+A$$

$$(A+B)+C=A+(B+C)$$

$$A+0=A.$$

3. *Произведением* матрицы $A=(a_{ij})_{m\times n}$ на матрицу $B=\left(b_{ij}\right)_{n\times k}$ называется матрица $C=\left(c_{ij}\right)_{m\times k}$ элементы которой, стоящие на пересечении i-ой строки и j-го столбца, равны сумме произведений элементов i-ой строки матрицы A на соответствующие элементы j-ого столбца матрицы B, т.е.

$$c_{ij} = \sum_{s=1}^{n} a_{is} b_{sj} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \ldots + a_{in} b_{nk}, \ i = \overline{1,m}, \ j = \overline{1,k}. \tag{1.4}$$

Выполнять произведение матриц можно в том случае, когда число столбцов матрицы $A_{m\times n}$ равно числу строк матрицы $B_{n\times k}$:

$$A_{m\times n} \cdot B_{n\times k} = C_{m\times k} \tag{1.5}$$

В общем случае $AB \neq BA$. Матрицы называются *коммутативными*, если $AB = BA$. Имеют место следующие свойства произведения матриц:

$$(AB)C=A(BC),$$

$$(A+B)C=AC+BC,$$

$$\alpha AB = (\alpha A)B = A(\alpha B)$$

$AE = EA = A$, где Е - единичная матрица,

$A\,0 = 0$, где 0 - нулевая матрица.

Пример 1.1. Найти: С = 2A - 3(B - A), где $A = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}$

Решение. $C = 2A - 3(B - A) = 2A - 3B + 3A = 5A - 3B$.

$$C=5\begin{pmatrix}-3 & 0\\ 4 & 7\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}6 & 1\\ -2 & -5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-15 & 0\\ 20 & 35\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-18 & -3\\ 6 & 15\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-33 & -3\\ 26 & 50\end{pmatrix}$$

Пример 1.2. Найти произведение матриц *AB*, если

$$A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ -2 & 4\\ 0 & -2\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}4 & 0 & 3 & -2\\ -5 & 1 & -2 & 4\end{pmatrix}.$$

Решение. $AB=\begin{pmatrix}2 & 3\\ \hline -2 & 4\\ 0 & -2\end{pmatrix}\cdot\left(\begin{array}{c|ccc}4 & 0 & 3 & -2\\ -5 & 1 & -2 & 4\end{array}\right)=$

$$=\begin{pmatrix}2\cdot 4+3\cdot(-5) & 2\cdot 0+3\cdot 1 & 2\cdot 3+3\cdot(-2) & 2\cdot(-2)+3\cdot 4\\ 2\cdot 4+4\cdot(-5) & -2\cdot 0+4\cdot 1 & -2\cdot 3+4\cdot(-2) & -2\cdot(-2)+4\cdot 4\\ 0\cdot 4+(-2)\cdot(-5) & 0\cdot 0+(-2)\cdot 1 & 0\cdot 3+(-2)\cdot(-2) & 0\cdot(-2)+(-2)\cdot 4\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-7 & 3 & 0 & 8\\ -28 & 4 & -14 & 20\\ 10 & -2 & 4 & -8\end{pmatrix}.$$

Целой положительной степенью A^m квадратной матрицы A называется произведение m матриц A, т.е.

$$A^m=\underbrace{A\cdot A\cdot\ldots\cdot A}_{m\ \text{раз}}. \tag{1.6}$$

Пример 1.3. Найти A^2, если $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ 0 & -2 & 1\\ 3 & 1 & 0\end{pmatrix}.$

Решение. $A^2=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ 0 & -2 & 1\\ 3 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ 0 & -2 & 1\\ 3 & 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-8 & -6 & -1\\ 3 & 5 & -2\\ 3 & 4 & -8\end{pmatrix}.$

Матрица, у которой строки матрицы *A* являются столбцами, называется *транспонированной* матрицей *A* и обозначается A^T, а операция замены строк матрицы на ее столбцы называется *транспонированием* матрицы, [27]. Если матрица A имеет размерность $(m\times n)$, то транспонированная матрица имеет размерность $(n \times m)$. Имеют место следующие свойства для A^T (проверьте самостоятельно):

1) $(A^T)^T = A$;   2) $(A + B)^T = A^T + B^T$;   3) $(\alpha A)^T = \alpha A^T$;   4) $(AB)^T = B^T A^T$.

Элементарными преобразованиями матриц называют, [18]:

- перестановку между собой параллельных рядов (строк или столбцов) матрицы;

- умножение всех элементов любой строки или столбца на число, отличное от нуля;

- прибавление к элементам любого ряда соответствующих элементов параллельного ряда, умноженных на число, отличное от нуля.

Матрицы, полученные одна из другой при помощи элементарных преобразований (как над строками, так и над столбцами), называются *эквивалентными.* Если матрицы A и B эквивалентны, то записывают $A \sim B$.

1.2. Определители, правила их вычисления

Определителем (*детерминантом*) *n-го порядка* называют величину, соответствующую квадратной матрице n-го порядка и вычисленную по определенным правилам, [15]. Обозначают определитель матрицы A: Δ_n, $\Delta(A)$, $|A|$, $det\ A$. Впервые определители были введены в математику немецким ученым Г.В. Лейбницем.

Определителем первого порядка называется число a_{11}, соответствующее матрице 1-го порядка и равное

$$\Delta_1 = |a_{11}| \tag{1.7}$$

Определителем второго порядка называют число, соответствующее числовой квадратной матрице второго порядка и равное

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}, \tag{1.8}$$

где $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ - элементы определителя. Элементы a_{11} и a_{22} образуют главную диагональ; элементы a_{21} и a_{12} - побочную. *Определитель II-го порядка равен разности произведения элементов, стоящих на главной диагонали и произведения элементов, стоящих на побочной диагонали.*

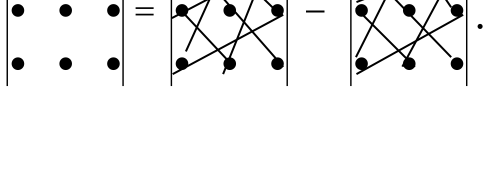
Пример 1.4. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} \sin a & \cos a \\ -\cos a & \sin a \end{vmatrix}$.

Решение. $\begin{vmatrix} \sin a & \cos a \\ -\cos a & \sin a \end{vmatrix} = \sin^2 a + \cos^2 a = 1$.

Определителем третьего порядка называется число, соответствующее квадратной числовой матрице третьего порядка и равное:

$$\Delta_3 = = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - \\ - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{32}a_{23}a_{11}. \quad (1.9)$$

Формула (1.9) называется *правилом Саррюса* (*правилом «треугольников», правилом «звездочки»*), согласно которому определитель третьего порядка равен алгебраической сумме 6 тройных произведений элементов, стоящих в разных строках и разных столбцах; со знаком плюс берутся произведения, сомножители которых находятся на главной диагонали и в вершинах треугольников, с основаниями параллельными главной диагонали, со знаком минус - произведения, сомножители которых стоят на побочной диагонали и в вершинах треугольников, с основаниями, параллельными этой диагонали. Знаки каждого слагаемого легко запомнить, если пользоваться схемой:



Пример 1.5. Применить правило Саррюса для вычисления определителя

$$\begin{vmatrix} 2 & -2 & -3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}.$$

Решение. $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -2 & -3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2\cdot 3\cdot(-1) + 1\cdot 1\cdot(-3) + 2\cdot(-2)\cdot(-1) - 2\cdot 3\cdot(-3) - 1\cdot(-2)\cdot(-1) -$

$-1\cdot 1\cdot 2 = -6 - 3 + 4 + 18 - 2 - 2 = 9.$

Определитель третьего порядка можно вычислять по *правилу добавления столбцов или строк*, [13], суть которого сводится к следующему: пусть дан определитель III-го порядка

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Добавим к нему справа первые два столбца

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} & & - & - & - \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \\ & & + & + & + \end{array}\right.$$

Проводим диагонали параллельно главной диагонали и диагонали параллельно побочной диагонали. Затем перемножаем элементы, стоящие на проведенных диагоналях, причем произведения элементов, стоящие на главной диагонали и диагоналях, параллельных ей, будем брать со знаком (+), а произведение элементов на побочной диагонали и диагоналях, параллельных ей, будем брать со знаком (-). Тогда:

$$\Delta_3 = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}. \qquad (1.10)$$

При добавлении строк поступаем так: добавляем первые две строки снизу. Затем находим сумму произведений элементов главной диагонали и элементов, параллельных ей, затем вычитаем сумму произведений элементов побочной диагонали и элементов параллельных ей, т.е.

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \begin{matrix} - \\ - \\ - \\ + \\ + \end{matrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - \tag{1.11}$$

$$- a_{31}a_{22}a_{13} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{33}.$$

Пример 1.6. По правилу добавления строк или столбцов вычислить определитель $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix}$.

Решение. Применим правило добавления столбцов:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 1 \\ & & + & + & + \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 \cdot (-3) + (-1) \cdot 1 \cdot 0 + 0 \cdot 3 \cdot 1 - 0 \cdot 2 \cdot 0 - 1 \cdot 1 \cdot 2 -$$

$$- (-3) \cdot 3 \cdot (-1) = -12 - 2 - 9 = -23.$$

Применим правило добавления строк:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} - \\ - \\ - \\ + \\ + \\ + \end{matrix} = 2 \cdot 2 \cdot (-3) + 3 \cdot 1 \cdot 0 + 0 \cdot (-1) \cdot 1 - 0 \cdot 2 \cdot 0 - 2 \cdot 1 \cdot 1 - 3(-1)(-3) =$$

$$= -12 - 2 - 9 = -23.$$

Определители n-го порядка обладают *свойствами*:

1. Величина определителя не изменится, если строки и столбцы поменять местами, то есть транспонировать матрицу. Доказать это можно, расписав определители:

$$\begin{vmatrix} a_{11} a_{12} \\ a_{21} a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} a_{21} \\ a_{12} a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

2. Определитель матрицы A равен определителю транспонированной матрицы $det\ \mathrm{A} = det\ \mathrm{A}^{\mathrm{T}}$.

3. При перестановке двух параллельных рядов определитель меняет знак. Для доказательства достаточно расписать определитель:

$$\begin{vmatrix} a_{21} a_{22} \\ a_{11} a_{12} \end{vmatrix} = a_{21}a_{12} - a_{22}a_{11} = -(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = -\begin{vmatrix} a_{11} a_{12} \\ a_{21} a_{22} \end{vmatrix}.$$

4. Если определитель имеет две равные строки, то он равен нулю:

$$\begin{vmatrix} a_{11} a_{12} \\ a_{11} a_{12} \end{vmatrix} = a_{11}a_{12} - a_{12}a_{11} = 0.$$

5. Произведение всех элементов некоторой строки на число λ равносильно умножению определителя на это число λ:

$$\begin{vmatrix} \lambda a_{11} \lambda a_{12} \\ a_{21} a_{22} \end{vmatrix} = \lambda a_{11}a_{22} - \lambda a_{12}a_{21} = \lambda(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = \lambda\begin{vmatrix} a_{11} a_{12} \\ a_{21} a_{22} \end{vmatrix}.$$

Это означает, что общий множитель любой строки можно выносить за знак определителя.

6. Если все элементы некоторого ряда определителя равны нулю, то и сам определитель равен нулю:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = a_{11} \cdot 0 - a_{12} \cdot 0 = 0.$$

7. Из третьего и четвертого свойств следует, что, если элементы двух строк пропорциональны, то определитель равен нулю.

8. Если элементы некоторой строки (столбца) являются суммой двух слагаемых, то определитель равен сумме двух определителей, соответствующие строки которых состоят из этих слагаемых:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} + c & a_{22} + d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ c & d \end{vmatrix}.$$

9. Если к элементам одной строки прибавить элементы другой строки, умноженной на некоторый коэффициент λ, то величина определителя не изменится:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21}+\lambda a_{11} & a_{22}+\lambda a_{12} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}+\lambda a_{11}a_{12}-a_{12}a_{21}-\lambda a_{12}a_{11}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}.$$

1.3. Формула Лапласа

Минором M_{ij} элемента a_{ij} квадратной матрицы A называется определитель, соответствующий матрице, полученной после вычеркивания i-ой строки и j-го столбца в матрице A. Например, для матрицы третьего порядка имеем

$$M_{11}=\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}; \qquad M_{22}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента a_{ij}, матрицы A называется минор этого элемента, вычисленный по формуле:

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}\,. \tag{1.12}$$

Пример 1.7. Найти алгебраические дополнения элементов первой строки матрицы $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \\ 1 & 1 & 8 \end{pmatrix}$.

Решение.

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\cdot M_{11}=+\begin{vmatrix} 6 & 7 \\ 1 & 8 \end{vmatrix}=48-7=41,$$

$$A_{12}=-\begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 1 & 8 \end{vmatrix}=-(40-7)=-33, \quad A_{13}=+\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=-1.$$

Определители третьего и более высоких порядков можно вычислять по *общему правилу*, которое определяется *формулой Лапласа*:

$$\Delta_n=\sum_{j=1}^{n}a_{1j}A_{1j}=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+...+a_{1n}A_{1n}. \tag{1.13}$$

Определитель равен сумме произведений элементов любого его ряда на их алгебраические дополнения (*метод разложения определителя по строке или по столбцу*),[15]. Так, определитель 4-го порядка по методу разложения по первой строке равен: $\Delta_4 = \begin{vmatrix} a_{11}a_{12}a_{13}a_{14} \\ a_{21}a_{22}a_{23}a_{24} \\ a_{31}a_{32}a_{33}a_{34} \\ a_{41}a_{42}a_{43}a_{44} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22}a_{23}a_{24} \\ a_{32}a_{33}a_{34} \\ a_{42}a_{43}a_{44} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21}a_{23}a_{24} \\ a_{31}a_{33}a_{34} \\ a_{41}a_{43}a_{44} \end{vmatrix} +$

$$+a_{13}\begin{vmatrix} a_{21}a_{22}a_{24} \\ a_{31}a_{32}a_{34} \\ a_{41}a_{42}a_{44} \end{vmatrix} - a_{14}\begin{vmatrix} a_{21}a_{22}a_{23} \\ a_{31}a_{32}a_{33} \\ a_{41}a_{42}a_{43} \end{vmatrix}. \qquad (1.14)$$

Пример 1.8. Вычислить определитель $\Delta_4 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 7 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 2 \\ 6 & 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

Решение. Объем вычислений можно уменьшить, если выбрать такой ряд, в котором максимальное число нулей. Наиболее подходящей является 2-ая строка. Разложение определителя по этой строке имеет вид:

$$\Delta = 0\cdot A_{21} + 3\cdot A_{22} + 0\cdot A_{23} + 2\cdot A_{24} = 3\cdot(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 3 & 2 \\ 6 & 1 & 1 \end{vmatrix} + 2\cdot(-1)^{2+4}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 3 \\ 6 & 3 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 3(3+14+48-126-8-2) + 2(4+24+36-96-9-4) = -213-90 = -303.$$

Вычисление определителя можно упростить, если в каком-либо ряду сделать все элементы, кроме одного, равными нулю. Для этого воспользуемся свойством 7 определителя: 4-й столбец умножим на (-1) и прибавим ко 2-му, получим определитель $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -5 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ 6 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

Элементы 2-го столбца умножим на (-2) и прибавим к 4-му:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -5 & 4 & 17 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & -2 \\ 6 & 2 & 1 & -3 \end{vmatrix}.$$

Разложим определитель по элементам 2-ой строки:

$$\Delta = 0 \cdot A_{21} + 1 \cdot A_{22} + 0 \cdot A_{23} + 0 \cdot A_{24} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 17 \\ 2 & 3 & -2 \\ 6 & 1 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$= -9 + 34 - 48 - 306 + 24 + 2 = -303.$$

1.4. Обратная матрица

Матрица A^{-1} называется *обратной* по отношению к матрице A, если при умножении этой матрицы на данную как справа, так и слева получается единичная матрица, [6]:

$$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E. \qquad (1.15)$$

Из определения следует, что только квадратная матрица имеет обратную.

Квадратная матрица A называется ***невырожденной,*** если ее определитель отличен от нуля, т.е. $det\ A \neq 0$, в противном случае ($det\ A = 0$) матрица называется *вырожденной*.

Теорема существования обратной матрицы (без доказательства): Для каждой невырожденной матрицы A существует обратная A^{-1}.

Теорема единственности обратной матрицы (без доказательства): Если у некоторой матрицы существует обратная, то она единственная.

Обратная матрица A^{-1} определяется по формуле:

$$A^{-1} = \frac{1}{detA} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|} \tilde{A}, \qquad (1.16)$$

где $\tilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$ - *присоединенная* матрица к матрице A, элементами которой являются алгебраические дополнения транспонированной матрицы A^T.

Обратная матрица обладает следующими свойствами:

1) $det\, A^{-1} = \dfrac{1}{det\, A}$; 2) $(A^{-1})^{-1} = A$;

3) $(A^k)^{-1} = (A^{-1})^k$; 4) $(A\cdot B)^{-1} = B^{-1}\cdot A^{-1}$;

5) $(A\cdot B\cdot C)^{-1} = C^{-1}\cdot B^{-1}\cdot A^{-1}$.

Согласно формуле (1.16) обратная матрица может быть определена по следующему алгоритму:

1. Найти определитель исходной квадратной матрицы. Если $|A| = 0$, то матрица A - вырожденная и обратной матрицы не существует. Если $|A| \neq 0$, то матрица A - невырожденная и обратная матрица существует.

2. Найти матрицу A^T, транспонированную к A, определить алгебраические дополнения элементов транспонированной матрицы. Составить присоединенную матрицу $\tilde{A}$.

3. Найти обратную матрицу по формуле (1.16) .

4. Проверить правильность вычисления обратной матрицы A^{-1}, исходя из ее определения (1.15).

Пример 1.9. Найти матрицу, обратную матрице $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Решение. Поступаем согласно предложенному алгоритму.

1. $|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 9 + 4 - 1 - 3 - 2 + 6 = 13 \neq 0$, т.е. матрица A - невырожденная и обратная матрица A^{-1} существует.

2. Находим матрицу A^T, транспонированную к A: $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Находим алгебраические дополнения элементов матрицы A^T:

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix}3 & 2\\ 1 & 3\end{vmatrix} = 9-2=7,\quad A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 1 & 3\end{vmatrix} = -(-3-2)=5,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix}-1 & 3\\ 1 & 1\end{vmatrix} = -1-3=-4,\quad A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 3\end{vmatrix} = -(6-1)=-5,$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix}1 & \\ 13 & 1\end{vmatrix} = 3-1=2,\qquad A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{vmatrix} = -(1-2)=1,$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix}2 & 1\\ 3 & 2\end{vmatrix} = 4-3=1,\qquad A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix}1 & 1\\ -1 & 2\end{vmatrix} = -(2+1)=-3,$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix}1 & 2\\ -1 & 3\end{vmatrix} = 3+2=5.$$

Составляем присоединенную матрицу: $\tilde{A} = \begin{pmatrix}7 & 5 & -4\\ -5 & 2 & 1\\ 1 & -3 & 5\end{pmatrix}$.

3. Находим обратную матрицу:

$$A^{-1} = \frac{1}{13}\begin{pmatrix}7 & 5 & -4\\ -5 & 2 & 1\\ 1 & -3 & 5\end{pmatrix}.$$

4. Проверяем правильность нахождения обратной матрицы

$$A^{-1}\cdot A = \frac{1}{13}\begin{pmatrix}7 & 5 & -4\\ -5 & 2 & 1\\ 1 & -3 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 3 & 1\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix} = \frac{1}{13}\begin{pmatrix}7+10-4 & -7+15-8 & 7+5-12\\ -5+4+1 & 5+6+2 & -5+2+3\\ 1-6+5 & -1-9+10 & 1-3+15\end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{13}\begin{pmatrix}13 & 0 & 0\\ 0 & 13 & 0\\ 0 & 0 & 13\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Существует наиболее простой *способ* нахождения обратной матрицы *с помощью элементарных преобразований над строками* невырожденной матрицы, суть которого состоит в следующем, [2]:

1. К матрице A приписывают справа единичную матрицу $(A\,|\,E)$ (эту матрицу называют также *расширенной*).

2. Путем элементарных преобразований над строками расширенной матрицы добиваются того, что матрица слева от черты станет единичной.

3. После окончания вычислительного процесса, когда на месте исходной матрицы *A* будет сформирована единичная матрица, на месте приписанной единичной матрицы *E* будет находиться обратная матрица A^{-1}. Расширенная матрица $(A\,|\,E)$ в итоге примет вид $(E\,|\,A^{-1})$.

4. Выполнить проверку по формуле (1.15).

Пример 1.10. Найти матрицу, обратную матрице $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 7 & 1 & 9 \\ -4 & 5 & -2 \end{pmatrix}$.

Решение. Припишем к матрице *A* единичную:

$$(A|E)=\left(\begin{array}{rrr|rrr} 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 9 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 5 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Выполним элементарные преобразования: 1) первую строку умножим на $^1/_2$; прибавим к третьей строке первую, умноженную на 4; 4) вторую строку умножим на $(-^2/_{19})$; 5) к первой строке прибавим вторую, умноженную на $(-^3/_2)$; 6) к третьей строке прибавим вторую, умноженную на (-11); 7) третью строку умножим на $^{19}/_4$; 8) к первой строке прибавим третью, умноженную на $(-^{23}/_{19})$; 9) ко второй строе прибавим третью, умноженную на $(-^{10}/_{19})$. В итоге получим:

$$(A|E)=\left(\begin{array}{rrr|rrr} 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 9 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 5 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & ^3/_2 & 2 & ^1/_2 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 9 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 5 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & ^3/_2 & 2 & ^1/_2 & 0 & 0 \\ 0 & -^{19}/_2 & -5 & -^7/_2 & 1 & 0 \\ 0 & 11 & 6 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & ^3/_2 & 2 & ^1/_2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & ^{10}/_{19} & ^7/_{19} & -^2/_{19} & 0 \\ 0 & 11 & 6 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & {}^{23}/_{19} & -{}^{1}/_{19} & {}^{3}/_{19} & 0 \\ 0 & 1 & {}^{10}/_{19} & {}^{7}/_{19} & -{}^{2}/_{19} & 0 \\ 0 & 0 & {}^{4}/_{19} & -{}^{39}/_{19} & {}^{22}/_{19} & 1 \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & {}^{23}/_{19} & -{}^{1}/_{19} & {}^{3}/_{19} & 0 \\ 0 & 1 & {}^{10}/_{19} & {}^{7}/_{19} & -{}^{2}/_{19} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -{}^{39}/_{4} & {}^{11}/_{2} & {}^{19}/_{4} \end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & {}^{47}/_{4} & -{}^{13}/_{2} & -{}^{23}/_{4} \\ 0 & 1 & 0 & {}^{11}/_{2} & -3 & -{}^{5}/_{2} \\ 0 & 0 & 1 & -{}^{39}/_{4} & {}^{11}/_{2} & {}^{19}/_{4} \end{array}\right).$$

Тогда $A^{-1}=\begin{pmatrix} {}^{47}/_{4} & -{}^{13}/_{2} & -{}^{23}/_{4} \\ {}^{11}/_{2} & -3 & -{}^{5}/_{2} \\ -{}^{39}/_{4} & {}^{11}/_{2} & {}^{19}/_{4} \end{pmatrix}.$

Проверка:

$$A\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 7 & 1 & 9 \\ -4 & 5 & -2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} {}^{47}/_{4} & -{}^{13}/_{2} & -{}^{23}/_{4} \\ {}^{11}/_{2} & -3 & -{}^{5}/_{2} \\ -{}^{39}/_{4} & {}^{11}/_{2} & {}^{19}/_{4} \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} \frac{47}{2}+\frac{33}{2}-39 & -13-9+22 & -\frac{23}{2}-\frac{15}{2}+19 \\ \frac{329}{4}+\frac{11}{2}-\frac{351}{4} & -\frac{91}{2}-3+\frac{99}{2} & -\frac{161}{4}-\frac{5}{2}+\frac{171}{4} \\ -47+\frac{55}{2}+\frac{39}{2} & 26-15-11 & 23-\frac{25}{2}-\frac{19}{2} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

.

1.5. Ранг матрицы

Пусть $A=(a_{ij})_{m\times n}$ - матрица любого порядка. Если выписать произвольно k-строк ($k<m$) и k-столбцов ($k<n$) этой матрицы, то получим *минор k-го* порядка, *порожденный матрицей A*, [13].

Пример 1.11. Выписать миноры, порожденные матрицей $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 5 & 7 & 2 \end{pmatrix}$.

Решение. Это будут следующие миноры второго порядка:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 5 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 7 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 2 \end{vmatrix}.$$

Рангом матрицы A называют число, равное наивысшему порядку ее минора, не равного нулю. Обозначают ранг матрицы: $rang\ A$; $r(A)$; r.

Из определения ранга матрицы следуют утверждения (доказать самостоятельно):

1. $0 \le r \le \min(m, n)$;
2. $r = 0$, тогда и только тогда, когда все $a_{ij} = 0$;
3. $r = n$ для квадратной матрицы n-го порядка тогда и только тогда, когда матрица невырожденная;
4. $r < n$ для квадратной матрицы A, если ее определитель $\Delta = 0$.

Любой не равный нулю, минор матрицы A, порядок которого совпадает с рангом матрицы, называется *базисным*, [18].

Ранг матрицы можно определять по *методу окаймляющих миноров*, суть которого сводится к вычислению миноров порядка k и $(k+1)$. При этом минор M_{k+1}, содержащий в себе минор M_k, называется *окаймляющим минором* M_k. *Если у матрицы A существует минор* $M_k \ne 0$, *а все окаймляющие миноры* $M_{k+1} = 0$, *то ранг матрицы A равен k.*

Более рациональным методом нахождения ранга матрицы является *метод «единиц и нулей»*: с *помощью элементарных преобразований* над строками или столбцами любая матрица может быть приведена к виду, когда каждый ее ряд будет состоять только из нулей, или из нулей и одной единицы. *Число оставшихся единиц и определит ранг исходной матрицы.*

Пример 1.12. Найти ранг матрицы $C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 4 \\ 1 & -2 & 3 & -2 \\ 3 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

Решение. Приведем данную матрицу к треугольному виду с помощью элементарных преобразований. Поменяем первую и вторую строки. Первую строку, умноженную на (-2), сложим со второй, а затем первую строку умножим на (-3) и сложим с третьей. Вторую стоку, умноженную на (-1), сложим с третьей. Первый столбец умножаем последовательно на 2, (-3), 2 и складываем соответственно со вторым, третьим и четвертым столбцом. Второй столбец умножим на 1/7, третий на (-1/7), четвёртый - на 1/8. Прибавим второй столбец к третьему и вычтем из четвертого, получим:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -2 \\ 2 & 3 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -2 \\ 0 & 7 & -7 & 8 \\ 0 & 7 & -7 & 8 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & -7 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Число единиц в последней матрице равно двум, значит $rangC = 2$.

Можно было остановиться на предыдущей эквивалентной матрице, так как третья строка – нулевая, а определитель второго порядка

$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} = 7 \neq 0$, что свидетельствует о том, что $r(C) = 2$.

1.6. Системы линейных алгебраических уравнений, методы их решения

Система вида:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ . \quad . \quad . \quad . \quad ... \quad . \quad . \quad . \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{1.17}$$

называется *неоднородной системой m линейных уравнений с n неизвестными.* Здесь $x_1, x_2, ..., x_n$ - неизвестные величины, a_{ij} - коэффициенты системы, $\left(i = \overline{1,n};\ j = \overline{1,m}\right)$, b_j, - свободные члены.

Совокупность n чисел $x_1^0; x_2^0; ...; x_n^0$, которые обращают каждое уравнение системы в тождество, называется *решением системы.* Если существует хотя бы одно решение, то система называется *совместной***,** если система не имеет решений, то она называется - *несовместной.* Совместная система называется *определенной***,** если решение единственно, в противном случае, когда она имеет более одного решения - *неопределенной.* В последнем случае каждое ее решение называется *частным решением* системы. Совокупность всех частных решений называется *общим решением*. Две системы называются *эквивалентными*, если они имеют одно и то же общее решение.

Если все свободные члены $b_i = 0 \quad (j = \overline{1, m})$, то система называется *однородной.* Однородная система всегда совместна, так как она имеет решение $x_i = 0 \ (i = \overline{1, n})$, которое называют *нулевым* или *тривиальным.*

В *матричной форме* система (1.17) записывается в виде:

$$AX = B, \tag{1.18}$$

где матрица $A = (a_{ij})_{m \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}$, составленная из коэффициентов системы, называется *основной матрицей системы*, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}$ **-** *матрица неизвестных,* $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_m \end{pmatrix}$ **-** *матрица свободных членов*. Если к матрице системы A присоединить столбец свободных членов, то получим так называемую *расширенную матрицу системы***,** обозначим ее

$$
(A|B)=\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right).
$$

Эквивалентные системы получаются, в частности, при *элементарных преобразованиях* лишь *над строками расширенной матрицы системы*.

Ответ на вопрос о совместности неоднородной системы дает *теорема Кронекера-Капелли*, [13]: *Для того, чтобы система линейных уравнений была совместна, необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы системы был равен рангу расширенной матрицы*:

$$
rangA = rang(A|B) = r. \qquad (1.19)
$$

Пример 1.13. Исследовать систему $\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 2 \\ 7x_1 - 4x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 5 \\ 5x_1 + 7x_2 - 4x_3 - 6x_4 = 3 \end{cases}$ на совместность.

Решение. Найдем ранг основной матрицы системы $A=\begin{pmatrix} 3 & -5 & 2 & 4 \\ 7 & -4 & 4 & -3 \\ 5 & 7 & -4 & -6 \end{pmatrix}$.

Воспользуемся методом окаймляющих миноров. Минор 2-го порядка

$$
\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 7 & -4 \end{vmatrix} = 3\cdot(-4)-(-5)\cdot 7 = 23 \neq 0.
$$

Вычислим все окаймляющие его миноры 3-го порядка:

$$
\begin{vmatrix} 3 & -5 & 2 \\ 7 & -4 & 1 \\ 5 & 7 & -4 \end{vmatrix} = 48-25+98+40-140-21=0,
$$

$$
\begin{vmatrix} 3 & -5 & 4 \\ 7 & -4 & 3 \\ 5 & 7 & -6 \end{vmatrix} = 72-75+196+80-210-63=0.
$$

Так как все окаймляющие миноры третьего порядка равны нулю, то ранг основной матрицы равен двум. В свою очередь ранг расширенной матрицы

$$(A|B)=\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -5 & 2 & 4 & 2 \\ 7 & -4 & 1 & 3 & 5 \\ 5 & 7 & -4 & -6 & 3 \end{array}\right)$$ равен трем, так как минор третьего порядка

$$\begin{vmatrix} 3 & -5 & 2 \\ 7 & -4 & 5 \\ 5 & 7 & 3 \end{vmatrix} = -36-125+98+40+105-105=-23\neq 0 .$$

Таким, образом, *rang A* = 2 меньше *rang* $(A \mid B)$ = 3, то по теореме Кронекера-Капелли данная система несовместна.

Рассмотрим систему, у которой число уравнений равно числу неизвестных, $m = n$. Основная матрица A такой системы квадратная. Определитель этой матрицы $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} \\ ... & ... & ... \\ a_{n1} & ... & a_{nn} \end{vmatrix}$ называется *основным определителем системы.*

Если определитель системы отличен от нуля, то ранги основной и расширенной матриц совпадают, и равны числу неизвестных. В этом случае существует обратная матрица A^{-1}. Уравнение (1.18) умножим слева на A^{-1}, получим:

$$A^{-1}AX = A^{-1}B,$$

так как $A^{-1}A = E$, то решение системы определится:

$$X = A^{-1}\cdot B. \tag{1.20}$$

Итак, *система имеет единственное решение***,** когда

$$rangA = rang(A|B) = r = n. \tag{1.21}$$

Единственное решение можно найти с помощью обратной матрицы по формуле (1.20), называемой *матричным способом* решения системы.

Пример 1.14. Решить систему линейных уравнений $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ x_1 \qquad + 4x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 \qquad = 1 \end{cases}$ матричным методом.

Решение. Исследуем систему на совместность. Установим, будет ли основная матрица системы невырожденной, для этого вычислим ее определитель:

$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 16 + 1 + 4 = 21, \quad \Delta \neq 0$, следовательно, матрица A не вырождена.

Это говорит о том, что ранг основной матрицы системы равен 3. Расширенная матрица системы будет иметь то же значение ранга, т.к. основной определитель системы является минором 3-го порядка в нее входящий. Выполняется равенство (1.21), следовательно система имеет единственное решение. Найдем обратную матрицу $A^{-1} = \dfrac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$, для чего вычислим все алгебраические дополнения:

$A_{11} = \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 4$; $\qquad A_{21}=1$; $\qquad A_{31}=8$;

$A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 8$; $\qquad A_{22}=2$; $\qquad A_{32}=-5$;

$A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1$; $\qquad A_{23}=5$; $\qquad A_{33}=-2$.

Тогда, $A^{-1} = \dfrac{1}{21}\begin{pmatrix} 4 & 1 & 8 \\ 8 & 2 & -5 \\ -1 & 5 & -2 \end{pmatrix}$. Выполним проверку $A^{-1}A = E$:

$$A^{-1}\cdot A=\frac{1}{21}\begin{pmatrix}4&1&8\\8&2&-5\\-1&5&-2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2&-1\\1&0&4\\2&-1&0\end{pmatrix}=\frac{1}{21}\begin{pmatrix}4+1+16&8+0-8&-4+4+0\\8+2-10&16+0+5&-8+8+0\\-1+5-4&-2+0+2&1+20+0\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{21}\begin{pmatrix}21&0&0\\0&21&0\\0&0&21\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

Найдем матрицу-столбец неизвестных системы по формуле (1.20):

$$X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\frac{1}{21}\begin{pmatrix}4&1&8\\8&2&-5\\-1&5&-2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}=\frac{1}{21}\begin{pmatrix}8+0+8\\16+0-5\\-2+0-2\end{pmatrix}=\frac{1}{21}\begin{pmatrix}16\\11\\-4\end{pmatrix}.$$

Итак, $x_1=\dfrac{16}{21};\quad x_2=\dfrac{11}{21};\quad x_3=-\dfrac{4}{21}.$

Подставим найденное решение в каждое уравнение системы:

$$\begin{cases}\dfrac{16}{21}+2\cdot\dfrac{11}{21}+\dfrac{4}{21}=\dfrac{16+22+4}{21}=\dfrac{42}{21}=2,\\[2mm] \dfrac{16}{21}+4\cdot\left(-\dfrac{4}{21}\right)=\dfrac{16}{21}-\dfrac{16}{21}=0,\\[2mm] 2\cdot\dfrac{16}{21}-\dfrac{11}{21}=\dfrac{32-11}{21}=\dfrac{21}{21}=1.\end{cases}$$

Все уравнения системы обратились в тождество, значит, решение запишется:

$$X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}16/21\\11/21\\-4/21\end{pmatrix}.$$

Матричное равенство (1.20) можно представить в виде:

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\dots\\x_n\end{pmatrix}=\frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}&\dots&A_{n1}\\A_{12}&A_{22}&\dots&A_{n2}\\..&..&\dots&..\\A_{1n}&A_{2n}&\dots&A_{nn}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\dots\\b_n\end{pmatrix}.$$

Отсюда легко получаются известные *формулы Крамера*,[24]:

$$\begin{cases} x_j = \frac{1}{\Delta}(A_{1i}b_1 + A_{2i}b_2 + ... + A_{ni}b_n) = \frac{1}{\Delta}\sum_{k=1}^{n} A_{kj}b_k \\ (j = \overline{1,n}) \end{cases}, \tag{1.22}$$

или
$$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}, \tag{1.22'}$$

где $\Delta_j = \sum_{k=1}^{n} A_{kj}b_k$ - определитель матрицы A, у которой j-ый столбец заменен столбцом свободных членов.

Пример 1.15. Решить систему линейных алгебраических уравнений

$\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 = 1, \\ 5x_1 + 6x_2 = 11. \end{cases}$ методом Крамера.

Решение. Вычислим основной определитель системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 4 \cdot 6 - (-3) \cdot 5 = 24 + 15 = 39.$$

Этот определитель отличен от нуля, значит выполняется условие (1.21) $rangA = rang(A|B) = 2 = n$ и система имеет единственное решение. Найдем вспомогательные определители и решение исходной системы по формулам (1.22'):

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 11 & 6 \end{vmatrix} = 1 \cdot 6 - (-3) \cdot 11 = 6 + 33 = 39, \; x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{39}{39} = 1.$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 11 \end{vmatrix} = 4 \cdot 11 - 1 \cdot 5 = 44 - 5 = 39, \; x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{39}{39} = 1.$$

Проверка: $\begin{cases} 4 \cdot 1 - 3 \cdot 1 = 1, \\ 5 \cdot 1 + 6 \cdot 1 = 11. \end{cases}$ Таким образом, $x_1 = 1,\; x_2 = 1.$

Универсальным методом решения систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) является *метод Гаусса* (метод последовательного исключения неизвестных), [30]. Процесс решения СЛАУ по методу Гаусса состоит из двух этапов.

На первом этапе (*прямой ход*) система (1.17) с помощью элементарных преобразований над строками приводится к *ступенчатому виду* (ниже главной диагонали должны находиться нули). Если в процессе приведения системы (1.17) к ступенчатому виду появляются нулевые уравнения, т.е. равенства вида 0 = 0, их отбрасывают. Если же появляются уравнения вида 0 = b_i, а $b_i \neq 0$, то это свидетельствует о несовместности системы. Причем, если ранг матрицы системы уравнений равен числу неизвестных, $r(A) = n$, то система уравнений сводится к *треугольному виду*:

$$\begin{cases} x_1 + a'_{12}x_2 + a'_{13}x_3 + \dots + a'_{1n}x_n = b'_1 \\ \qquad x_2 + a'_{23}x_3 + \dots + a'_{2n}x_n = b'_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots x_3 + \dots + a'_{3n}x_n = b'_3 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad x_n = b'_n. \end{cases} \qquad (1.17')$$

Если ранг матрицы системы уравнений меньше числа неизвестных r(A) < n, то система уравнений сводится к *трапецеидальному виду*:

$$\begin{cases} x_1 + a'_{12}x_2 + a'_{13}x_3 + \dots + a'_{1n}x_n = b'_1 \\ \qquad x_2 + a'_{23}x_3 + \dots + a'_{2n}x_n = b'_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots x_3 + \dots + a'_{3n}x_n = b'_3 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \qquad\qquad x_r + \dots + a'_{rn}x_n = b'_r. \end{cases} \qquad (1.17'')$$

На втором этапе (*обратный ход*) идет последовательное определение неизвестных из этой ступенчатой системы. В случае полученного треугольного вида системы (1.17') исходная система имеет единственное решение. Из последнего уравнения определяется $x_n = b'_n$. Подставляя в предпоследнее уравнение x_n, находят x_{n-1}. Продолжая указанный процесс, определяют остальные неизвестные. В случае полученного трапецеидального вида системы (1.17'') исходная система *имеет множество решений*:

$$rangA = rang(A|B) = r < n. \qquad (1.23)$$

Из последнего уравнения выражают $x_r = b'_r - a'_{r.r+1}x_{r+1} - ... - a'_{rn}x_n$. Подставляя в предпоследнее уравнение выражение x_r, находят выражение для x_{r-1}. Продолжая процесс, определяют остальные неизвестные. Переменные $x_{r+1},...,x_n$ могут принимать любые значения и называются *свободными*. Переменные $x_1, x_2, x_3,..., x_r$ называются *базисным*. Выражения r базисных переменных через (n – r) свободных определяют *общее решение системы.* Если свободным переменным придать конкретные числовые значения, то получают *частное решение* системы линейных алгебраических уравнений (1.17). Для решения системы m линейных уравнений с n переменными $(m<n)$ вовсе не требуется находить специально ранги $r(A)$ и $r(A|B)$, а достаточно применить метод Гаусса.

Пример 1.16. Решить систему уравнений методом Гаусса

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 4 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 8 \\ 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 10x_4 = 20 \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 - 6x_4 = 4 \end{cases}.$$

Решение. Выполним элементарные преобразования над строками расширенной матрицы системы

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 8 \\ 2 & 4 & 5 & 10 & 20 \\ 2 & -4 & 1 & -6 & 4 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ +I\cdot(-1) \\ +I\cdot(-2) \\ +I\cdot(-2) \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & 6 & 3 & 12 & 12 \\ 0 & -2 & -1 & -4 & -4 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ :2 \\ \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 1/2 & 2 & 2 \\ 0 & 6 & 3 & 12 & 12 \\ 0 & -2 & -1 & -4 & -4 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ +II\cdot 6 \\ +II\cdot 2 \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 1/2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Система уравнений совместна и имеет множество решений, так как выполняется условие (1.23), т.е. $r(A) = r(A|B) = 2 < n = 4$. Переменные x_1, x_2

являются базисными, а переменные x_3, x_4 являются свободными (независимыми), могут принимать любые значения. Из второго уравнения находим $x_2 = 2 - \frac{1}{2}x_3 - 2x_4$. В первое уравнение $x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 4$ подставим полученное выражение для x_2. Получаем $x_1 - 2 + \frac{1}{2}x_3 + 2x_4 + x_3 - x_4 = 4$. Выражаем $x_1 = 6 - \frac{3}{2}x_3 - x_4$.

Общее решение системы запишется: $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 - \frac{3}{2}x_3 - x_4 \\ 2 - \frac{1}{2}x_3 - 2x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$.

Найдем четыре частных решения при 1) $x_3 = 0$, $x_4 = 1$; 2) $x_3 = 1$, $x_4 = 0$; 3) $x_3 = 0$, $x_4 = 0$; 4) $x_3 = 1$, $x_4 = 1$:

$$X_1 = \begin{pmatrix} 6 - \frac{3}{2}x_3 - x_4 \\ 2 - \frac{1}{2}x_3 - 2x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad X_2 = \begin{pmatrix} 6 - \frac{3}{2}x_3 - x_4 \\ 2 - \frac{1}{2}x_3 - 2x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{9}{2} \\ \frac{3}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$X_3 = \begin{pmatrix} 6 - \frac{3}{2}x_3 - x_4 \\ 2 - \frac{1}{2}x_3 - 2x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad X_4 = \begin{pmatrix} 6 - \frac{3}{2}x_3 - x_4 \\ 2 - \frac{1}{2}x_3 - 2x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Вопросы для самопроверки

1. Понятие числовой матрицы.
2. Виды матриц: диагональная, единичная, треугольная, симметрическая.
3. Основные операции над матрицами и их свойства (сложение, вычитание, умножение на число, умножение матриц).
4. Степень матрицы. Транспонирование матриц, его свойства.
5. Понятие определителя n-ого порядка. Основные свойства определителей.
6. Вычисление определителя второго порядка. Правило Саррюса вычисления определителя третьего порядка.
7. Вычисление определителей третьего порядка методом добавления строк (столбцов).
8. Миноры и алгебраические дополнения элементов определителя.
9. Теорема Лапласа (формулировка), вычисление определителя методом разложения по элементам i-ой строки или j-ого столбца.
10. Понятие обратной матрицы. Условие существования обратной матрицы.
11. Алгоритм нахождения обратной матрицы.
12. Элементарные преобразования над матрицами. Эквивалентные матрицы.
13. Нахождение обратной матрицы методом элементарных преобразований.
14. Понятие ранга матрицы, его свойства. Способы нахождения ранга матрицы.
15. Понятие системы линейных уравнений и ее решения. Совместные, несовместные, определенные и неопределенные системы.
16. Теорема Кронекера-Капелли.
17. Матричная запись СЛАУ.
18. Матричный способ решения линейных уравнений.
19. Формулы Крамера для решения системы линейных неоднородных уравнений.
20. Решение системы линейных неоднородных уравнений методом Гаусса.
21. Условия существования единственного решения и множества решений системы линейных алгебраических уравнений.

ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ № 1 «Матрицы и определители» (теория)

1.1. Квадратная таблица элементов (чисел, функций, алгебраических выражений), вычисляемая по определенному правилу называется …

1) матрицей;	2) определителем;
3) минором;	4) алгебраическим дополнением;
5) рангом;	6) характеристическим числом.

1.2. Элементы определителя a_{11}, a_{22}, …, a_{nn} образуют:

1) главную диагональ;	2) побочную диагональ;
3) n-й столбец;	4) n-ю строку;
5) первый столбец;	6) вторую строку.

1.3. Порядок определителя указывается по числу:

1) его элементов;	2) строк или столбцов;
3) миноров элементов;	4) вырожденных миноров элементов;
5) единиц в определителе;	6) нулей в определителе.

1.4. Определитель (n - 1) порядка, получаемый из определителя n-го порядка вычеркиванием элементов по строке и столбцу, называется…

1) рангом;	2) якобианом;
3) минором;	4) алгебраическим дополнением;
5) собственным значением;	6) характеристическим числом.

1.5. Выражение $(-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$ определяет:

1) ранг матрицы размерности $i \times j$;
2) разложение определителя квадратной матрицы по элементам j-ой строки и i –го столбца;
3) разложение определителя квадратной матрицы по элементам i-ой строки и j-го столбца;
4) алгебраическое дополнение элемента a_{ij} квадратной матрицы;
5) базисный минор Δ_i матрицы размерности i x j;
6) главный определитель Δ_j матрицы размерности $j \times i$.

1.6. Сумма произведений элементов любой строки (столбца) определителя на их алгебраические дополнения позволяет вычислять:

1) матрицу; 2) алгебраические дополнения;
3) определитель; 4) минор;
5) собственные значения; 6) якобиан.

1.7. Ранг матрицы A равен k. *Правильными* утверждениями являются:

1) любой минор матрицы A порядка $k+1$ равен нулю;
2) число строк матрицы A может быть больше k;
3) все миноры порядка $k-1$ матрицы A равны нулю;
4) матрица A имеет отличный от нуля минор порядка $k-1$;
5) матрица имеет k единиц, а остальные нули;
6) в матрице k линейно-независимых параллельных рядов.

1.8. Величина определителя *не изменится*, если:

1) переставить два столбца (строки);
2) умножить некоторый столбец (строку) на постоянный множитель;
3) заменить строки соответствующими столбцами;
4) к элементам одной из его строк (столбцов) прибавить постоянное число;
5) к элементам одного из ряда прибавить параллельный ряд, элементы которого умножены на постоянное число;
6) сложить два параллельных ряда.

1.9. Определитель *равен нулю*, если содержит:

1) две пропорциональные строки (столбцы);
2) нули, стоящие на главной диагонали;
3) нули, стоящие на побочной диагонали;
4) множитель, общий для элементов некоторого столбца (строки);
5) строку (столбец), к элементам которой (которого) прибавлены соответствующие элементы другой строки (столбца);
6) нулевой столбец.

1.10. Прямоугольная таблица чисел, содержащая m строк и n столбцов, называется…

1) определителем порядка $n \cdot m$; 2) якобианом;
3) определителем матрицы порядка m x n; 4) рангом;
5) дефектом матрицы; 6) матрицей размерности $m \times n$.

1.11. Квадратная матрица, у которой все элементы, не находящиеся на главной диагонали, равны нулю, называется…

1) симметрической; 2) диагональной;
3) единичной; 4) верхнетреугольной;
5) нижнетреугольной; 6) нулевой.

1.12. Указать, с каким знаком («плюс» или «минус») произведение $a_{12}a_{23}a_{31}$ входит в определитель третьего порядка $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$.

Ответ введите _____.

1.13. Матрицы A и B равны, если они имеют:

1) равные элементы, расположенные на одинаковых строках (столбцах);
2) равное число строк и столбцов и равные элементы, расположенные на соответствующих местах этих матриц;
3) равные элементы главной диагонали;
4) равные элементы побочной диагонали;
5) одно и то же число строк;
6) одно и то же число столбцов.

1.14. Чтобы умножить матрицу на число надо умножить на это число:

1) элементы какой-либо строки; 2) элементы какого-либо столбца;
3) каждый элемент матрицы; 4) элементы главной диагонали;
5) элементы побочной диагонали; 6) элементы выбранного столбца.

1.15. Квадратная матрица имеет обратную матрицу тогда и только тогда, когда ее определитель …

1) равен единице; 2) равен нулю;
3) не равен единице; 4) не равен нулю;
5) имеет пропорциональные строки; 6) имеет нулевой столбец.

1.16. Сумма произведений элементов i-ой строки матрицы A на соответствующие элементы j-го столбца матрицы B определяет:

1) $A \cdot B$; 2) $B \cdot A$; 3) $A + B$; 4) $A - B$;
5) $A \cdot B^{\mathrm{T}}$; 6) $B \cdot A^{\mathrm{T}}$; 7) $A^{\mathrm{T}} \cdot B^{\mathrm{T}}$; 8) $B^{\mathrm{T}} \cdot A^{\mathrm{T}}$.

1.17. С помощью элементарных преобразований строк и столбцов можно превратить в трапецеидальную матрицу …

1) диагональную; 2) треугольную;
3) каждую; 4) не каждую;
5) симметрическую; 6) единичную.

1.18. Матрицу A можно умножить на матрицу B только в том случае, когда:

1) число строк матрицы A равно числу столбцов матрицы B;
2) число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B;
3) число строк матрицы A равно числу строк матрицы B;
4) число столбцов матрицы A равно числу столбцов матрицы B;
5) матрицы A и B квадратные;
6) матрицы A и B одинаковой размерности.

1.19. Квадратная матрица называется вырожденной, если ее определитель …

1) равен единице; 2) равен нулю;
3) не равен единице; 4) не равен нулю;
5) имеет нулевую строку; 6) базисный минор не равен нулю.

1.20. Ненулевой определитель сохранит значение по абсолютной величине, но обязательно поменяет знак, если:

1) транспонировать определитель;
2) прибавить к элементам строки соответствующие элементы другой строки;
3) поменять местами две строки определителя;
4) умножить все элементы некоторой строки определителя на (-1);
5) суммировать элементы двух параллельных рядов определителя;
6) добавить единичный столбец и единичную строку.

1.21. Формула вычисления определителя третьего порядка $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{vmatrix}$

содержит следующие произведения:

1) cdk; 2) adf; 3) bfg; 4) aek; 5) hdc; 6) hef.

1.22. Ранг матрицы не изменится, если:

1) добавить один столбец (строку);
2) умножить некоторый столбец (строку) на постоянный множитель;
3) заменить строки соответствующими столбцами;
4) добавить единичную строку;
5) к элементам одной из его строк (столбцов) прибавить постоянное число;
6) прибавить к ряду параллельный ему ряд, умноженный на постоянное число.

1.23. Матрица называется транспонированной относительно матрицы A, если:

1) строки переставлены в обратном порядке;
2) столбцы переставлены в обратном порядке;
3) строками являются столбцы матрицы A (с теми же номерами);
4) элементы, стоящие в первой строке заменены единицами;
5) элементы произвольного столбца заменены нулями;
6) элементами являются алгебраические дополнения матрицы A.

1.24. Указать те преобразования строк (столбцов) матрицы, которые являются элементарными:

1) умножение строки (столбца) на ненулевое число;
2) замена элементов строки (столбца) произвольными числами;
3) замена строки (столбца) суммой этой строки (столбца) и другой строки (столбца), предварительно умноженной на некоторое число;
4) замена местами двух строк (двух столбцов);
5) добавление нулевого столбца или строки;
6) добавление строки (столбца), состоящего из единиц.

1.25. Верными свойствами транспонирования матрицы являются:

1) $(A + B)^{\mathrm{T}} = A^{\mathrm{T}} + B^{\mathrm{T}}$; 2) $(AB)^{\mathrm{T}} = A^{\mathrm{T}} \cdot B^{\mathrm{T}}$;
3) $(\alpha A)^{\mathrm{T}} = \alpha A^{\mathrm{T}}$; 4) $(AB)^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}} \cdot A^{\mathrm{T}}$;
5) $(\alpha AB)^{\mathrm{T}} = (\alpha A^{\mathrm{T}}) \cdot B^{\mathrm{T}}$; 6) $(ABC)^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}} \cdot A^{\mathrm{T}} \cdot C^{\mathrm{T}}$.

1.26. Наибольший порядок порожденного матрицей A минора, отличного от нуля, называется …

1) порядком квадратной матрицы; 2) рангом матрицы;
3) собственным значением матрицы; 4) ортом;
5) якобианом; 6) характеристическим числом.

1.27. Квадратная матрица называется *верхнетреугольной*, если

1) элементы, лежащие на побочной диагонали, равны нулю;
2) элементы, лежащие на главной диагонали, равны нулю;
3) элементы, не лежащие на главной диагонали, равны нулю;
4) элементы, лежащие ниже главной диагонали, равны нулю;
5) элементы, лежащие на главной диагонали, обязательно равны;
6) элементы, лежащие на побочной диагонали, обязательно равны.

1.28. Матрица называется *присоединенной* к матрице A, если ее элементами являются …

1) алгебраические дополнения матрицы A;
2) алгебраические дополнения матрицы A^{T};
3) значения миноров элементов a_{ij} матрицы А;
4) элементы матрицы A^{T}; 5) элементы матрицы A^{-1};

1.29. Если $a_{ij} = a_{ji}$, то квадратная матрица называется:

1) симметрической; 2) единичной;
3) диагональной; 4) верхнетреугольной;
5) нижнетреугольной; 6) эквивалентной.

1.30. Элемент $(a_{ij})^{-1}$ обратной матрицы A^{-1} (в случае существования) вычисляется по формуле:

1) $\frac{1}{\det A} \cdot (-1)^{j+i} \cdot M_{ji}$, где M_{ji} – минор элемента a_{ji} матрицы A;

2) $\frac{1}{\det A} \cdot M_{ji}$, где M_{ji} – минор элемента a_{ji} матрицы A;

3) $\frac{1}{\det A} \cdot (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$, где M_{ij} – минор элемента a_{ij} матрицы A;

4) $\frac{1}{\det A} \cdot M_{ij}$, где M_{ij} – минор элемента a_{ij} матрицы A;

5) $\frac{1}{a_{ij}}$, где a_{ij} – элемент матрицы A;

6) $\frac{1}{a_{ji}}$, где a_{ji} – элемент матрицы A.

ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ № 2

«Системы линейных алгебраических уравнений» (теория)

2.1. Если ранг основной матрицы системы линейных алгебраических уравнений совпадает с рангом расширенной матрицы, то система:

1) совместна; 2) не совместна; 3) однородная;
4) неоднородная; 5) определенная; 6) неопределенная.

2.2. При решении системы по правилу Крамера используют формулы:

1) $x_i = \dfrac{\Delta}{\Delta_i}$; 2) $x_i = \Delta_i \cdot \Delta$; 3) $x_i = \dfrac{\Delta_i}{\Delta}$; 4) $x_i = \Delta - \Delta_i$.

2.3. Дана система m линейных уравнений с n неизвестными. Пусть ранг матрицы этой системы равен k, а ранг расширенной матрицы системы равен p. Правильными утверждениями являются:

1) если $n > m$, то система имеет хотя бы одно решение;
2) если $m > n$, то система не имеет решений;
3) если $p = k$ и $n > k$, то система имеет бесконечное множество решений;
4) если система имеет хотя бы одно решение, то $p = k$;
5) если $m = n$ и ранг основной матрицы системы равен n, то система имеет единственное решение.

2.4. Система линейных уравнений называется неопределенной, если она:

1) имеет единственное решение; 2) имеет нулевое решение;
3) имеет множество решений; 4) не имеет решения;
5) имеет число неизвестных больше, чем число уравнений;
6) имеет число неизвестных меньше, чем число уравнений.

2.5. Метод Гаусса решения системы линейных уравнений состоит:

1) в вычислении определителей;
2) в исключении неизвестных с помощью элементарных преобразований матрицы;
3) в нахождении обратной матрицы к основной;
4) в нахождении транспонированной матрицы к основной;
5) в нахождении рангов основной и расширенной матрицы системы;
6) в последовательном уменьшении числа уравнений.

2.6. Вопрос о совместности системы линейных уравнений решается теоремой…

1) Крамера; 2) Гаусса; 3) Штурма;
4) Кронекера-Капелли; 5) Жордана; 6) Абеля.

2.7. Матричная форма записи системы линейных уравнений имеет вид:

1) AB = X; 2) BX = A; 3) AX = B; 4) $A^{-1}X = B$; 5) $B^{-1}X = A$.

2.8. Две системы линейных уравнений называются эквивалентными, если:

1) определитель основной матрицы системы одной из них равен определителю основной матрицы другой;
2) ранги матриц совпадают;
3) всякое решение одной из них является решением другой, и наоборот;
4) они имеют одинаковое число неизвестных;
5) для них выполняется теорема Кронеккера-Капелли;
6) одна приводится с помощью элементарных преобразований к виду другой.

2.9. Система линейных уравнений имеет единственное решение тогда и только тогда, когда:

1) число уравнений равно числу неизвестных;
2) основная матрица системы уравнений вырожденная;
3) основная матрица системы уравнений невырожденная;
4) число уравнений равно числу неизвестных и матрица системы невырожденная;
5) ранг матрицы совместной системы равен числу неизвестных;
6) правильного ответа нет.

2.10. Методы решения линейных систем:

1) метод окаймляющих миноров; 2) матричный метод;
3) метод преобразования расширенной матрицы системы;
4) метод «нулей и единиц»; 5) метод Крамера;
6) метод Эйлера.

2.11. Если система линейных уравнений имеет хотя бы одно решение, она называется …

1) совместной; 2) несовместной;
3) приведенной; 4) определенной;
5) неопределенной; 6) неоднородной.

2.12. Однородная система уравнений имеет ненулевое решение, когда:

1) определитель матрицы системы равен нулю;
2) определитель матрицы системы не равен нулю;
3) число уравнений системы меньше числа неизвестных;
4) число уравнений системы равно числу неизвестных;
5) число уравнений системы равно числу неизвестных и матрица системы вырожденная;
6) число уравнений системы больше числа неизвестных.

2.13. Если $AX = B$, то:

1) $X = AB$; 2) $X = BA$; 3) $X = A^{-1}B$; 4) $X = BA^{-1}$; 5) $X = B^{-1}A$.

2.14. Если матрица системы n уравнений квадратная и ее определитель не равен нулю, то система:

1) имеет единственное решение; 2) имеет нулевое решение;
3) имеет множество решений; 4) не имеет решения;
5) имеет нулевой столбец свободных членов;
6) имеет нулевую главную диагональ в ее матрице.

2.15. Если в результате элементарных преобразований над строками расширенной матрицы система линейных алгебраических уравнений приняла треугольный вид, то это означает:

1) ранг основной матрицы системы r равен числу неизвестных n;
2) ранг основной матрицы системы r меньше числа неизвестных n;
3) ранг основной матрицы системы r больше числа неизвестных n;
4) ранг основной матрицы системы r не связан с числом неизвестных n.

2.16. Какими свойствами *не обладают* решения однородной системы уравнений:

1) алгебраическая сумма решений есть решение этой системы;
2) произведение решения системы на число также является решением этой системы;
3) произведение решений есть решение этой системы;
4) всякая линейная комбинация решений есть решение этой системы;
5) частное двух решений есть решение этой системы.

2.17. Система линейных уравнений называется *однородной*, если:

1) ранг основной матрицы равен рангу расширенной матрицы;
2) она имеет множество решений;
3) если свободные ее члены равны нулю;
4) существует обратная матрица;
5) обратная матрица совпадает с транспонированной матрицей системы;
6) элементы главной диагонали основной матрицы равны нулю.

2.18. Количество частных решений системы линейных алгебраических уравнений может быть…

1) больше числа неизвестных; 2) равно числу неизвестных;
3) меньше числа неизвестных; 4) не зависит от числа неизвестных;
5) бесконечное множество; 6) правильного ответа нет.

2.19. Свободными неизвестными линейной системы называются неизвестные…

1) миноры, составленные из коэффициентов при них, равны нулю;
2) миноры, составленные из коэффициентов при них, отличны от нуля;
3) ранг матрицы, составленной из коэффициентов при этих неизвестных, меньше ранга основной матрицы системы;
4) ранг матрицы, составленной из коэффициентов при этих неизвестных, больше ранга основной матрицы системы;
5) правильного ответа нет.

2.20. Условие неопределенности системы m линейных алгебраических уравнений с n переменными:

1) $rang\ A = rang\ (A \mid B) = r = n$; 2) $rang\ A = rang\ (A \mid B) = r < n$;
3) $rang\ A = rang\ (A \mid B) = r > n$; 4) $rang\ A \neq rang\ (A \mid B)$.

2.21. При решении системы линейных уравнений с квадратной матрицей коэффициентов можно применять формулы Крамера, если:

1) один из столбцов матрицы является линейной комбинацией остальных;
2) столбцы матрицы линейно независимы;
3) строки матрицы линейно зависимы;
4) определитель матрицы равен нулю;
5) определитель матрицы не равен нулю;
6) число неизвестных совпадает с числом уравнений.

2.22. Базисным минором системы линейных алгебраических уравнений является:

1) минор, отличный от нуля, составленный из коэффициентов при неизвестных;
2) минор, равный нулю, составленный из коэффициентов при неизвестных;
3) определитель основной матрицы системы;
4) окаймляющий минор, включающий столбец свободных членов;
5) минор, 2 столбца которого линейно зависимы;
6) минор, 2 строки которого линейно зависимы.

2.23. Матричный метод решения можно применять для систем m линейных уравнений с n неизвестными, если:

1) $n > m$; 2) $m > n$; 3) $m = n$;
4) $m = n$, ранг основной матрицы равен рангу расширенной матрицы и совпадает с числом неизвестных;
5) $m = n$ и основная матрица системы невырожденная;
6) $m = n$ и основная матрица системы вырожденная.

2.24. Обратный ход метода Гаусса – это:

1) последовательное исключение неизвестных в системе;
2) последовательное нахождение неизвестных в системе;
3) определение рангов основной и расширенной матриц системы;
4) подстановка найденных неизвестных в систему;
5) выполнение элементарных преобразований над расширенной матрицей системы;
6) правильного ответа нет.

2.25. Если из системы линейных уравнений вычеркнуть одно уравнение, то …

1) у системы могут появиться новые решения;
2) у системы могут потеряться некоторые решения;
3) система обязательно станет несовместной;
4) система обязательно станет неопределенной;
5) всегда получится система, эквивалентная исходной;
6) решение системы не изменится.

2.26. Совокупность чисел, при подстановке которых в систему линейных уравнений обращает все ее уравнения в тождества, называется…

1) вектором-столбцом системы; 2) вектором-строкой системы;
3) решением системы; 4) порядком системы;
5) главным определителем системы;
6) вспомогательным определителем системы.

2.27. Однородная система линейных уравнений $AX = 0$:

1) может не иметь решений;
2) всегда имеет решение, называемое ненулевым;
3) всегда имеет только одно решение, называемое нулевым;
4) может иметь бесчисленное множество решений;
5) имеет ненулевые решения, если $det(A) \neq 0$;
6) имеет ненулевые решения, если $det(A) = 0$.

2.28. Нахождение всех решений системы линейных алгебраических уравнений можно осуществить с помощью теоремы:

1) Кронекера-Капелли; 2) Жордана;
3) Штурма; 4) Крамера;
5) Лейбница; 6) Эйлера.

2.29. При решении систем линейных алгебраических уравнений методом Гаусса используются в расширенной матрице элементарные преобразования:

1)над столбцами; 2) над строками;
3) над строками и столбцами; 4) нет ответа.

2.30. Если матрица однородной системы n уравнений квадратная и ее определитель равен нулю, то система:

1) не имеет решения; 2) имеет единственное решение;
3) имеет не более n решений; 4) имеет ровно n решений;
5) имеет бесконечное множество решений.

Контрольная работа №1 "Линейная алгебра"

Задание 1. Выполнить действия над матрицами.

Найти $3A \pm 4B,\ A \cdot B,\ C \cdot A^T, \Delta A,\ A^{-1}$.

1.1.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -5 \\ 6 & -3 & -6 \\ -3 & 7 & 2 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 8 & -1 & 2 \\ -3 & 5 & -3 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

1.2.

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 5 & -6 \\ 2 & 5 & 3 \\ -3 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 0 & -1 & 2 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

1.3.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -4 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 4 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

1.4.

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & -1 \\ -4 & 5 & 3 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -5 & 1 & 2 \\ 5 & -7 & 0 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -5 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

1.5.

$$A = \begin{pmatrix} -6 & 7 & 3 \\ 3 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 9 & 5 \\ 2 & 1 & -4 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 5 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

1.6.

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 5 & 4 \\ 3 & -1 & 4 \\ -1 & 7 & 1 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 2 & -6 & 2 \end{pmatrix}.$$

1.7.

$$A = \begin{pmatrix} -6 & 1 & 10 \\ 0 & -2 & 5 \\ 9 & 3 & 7 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 7 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix},$$

1.8.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix},$$

1.9.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

$C=\begin{pmatrix} 2 & 6 & -4 \\ -4 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$ $C=\begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$ $C=\begin{pmatrix} -5 & 2 & -1 \\ 4 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

1.10.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 6 & 3 \\ -4 & -9 & 4 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 1 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$C=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 9 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

1.11.

$$A=\begin{pmatrix} 5 & 9 & 4 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 7 \end{pmatrix},$$

$$B=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 9 & 1 \end{pmatrix},$$

$$C=\begin{pmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 4 & -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

1.12.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 9 & 3 \\ -3 & 1 & 7 \\ 2 & 1 & -8 \end{pmatrix},$$

$$B=\begin{pmatrix} 8 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 0 \\ 1 & -4 & 6 \end{pmatrix},$$

$$C=\begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 6 & -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

1.13.

$$A=\begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 8 & 4 & -1 \end{pmatrix},$$

$$B=\begin{pmatrix} 4 & 4 & -1 \\ -2 & 3 & 0 \\ 1 & -4 & 3 \end{pmatrix},$$

$$C=\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1.14.

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 5 \\ 3 & 3 & 6 \\ 4 & 3 & 4 \end{pmatrix},$$

$$B=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix},$$

$$C=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

1.15.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 3 & 0 & 6 \\ 4 & 3 & 4 \end{pmatrix},$$

$$B=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix},$$

$$C=\begin{pmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 3 & -7 & 2 \end{pmatrix}.$$

1.16.

$$A=\begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & 5 \end{pmatrix},$$

$$B=\begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$C=\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

1.17.

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & -7 \end{pmatrix},$$

$$B=\begin{pmatrix} 2 & -7 & 0 \\ 5 & 3 & 1 \\ 1 & -6 & 1 \end{pmatrix},$$

$$C=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

1.18.

$$A=\begin{pmatrix} 8 & -1 & -1 \\ 5 & -5 & -1 \\ 10 & 3 & 2 \end{pmatrix},$$

$$B=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -5 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix},$$

$$C=\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

1.19.

$$A=\begin{pmatrix}3 & -7 & 4\\ 1 & -6 & 3\\ -4 & -2 & 3\end{pmatrix},$$

$$B=\begin{pmatrix}0 & 1 & 3\\ 3 & 2 & 1\\ -4 & 5 & 2\end{pmatrix},$$

$$C=\begin{pmatrix}7 & 0 & 1\\ 2 & -3 & 0\end{pmatrix}.$$

1.20.

$$A=\begin{pmatrix}-3 & -1 & 0\\ 3 & 5 & -1\\ 4 & -7 & 5\end{pmatrix},$$

$$B=\begin{pmatrix}-3 & 2 & 0\\ 4 & -5 & 1\\ 3 & 3 & 7\end{pmatrix}$$

$$C=\begin{pmatrix}3 & 4 & 10\\ 0 & -2 & 1\end{pmatrix}.$$

Задание 2. Решить матричные уравнения $AB\cdot X = C$, если матрицы A, B, C известны

2.1. $A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 1\\ 2 & 0 & 4\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 2\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}$; $C=\begin{pmatrix}29\\ 28\\ 34\end{pmatrix}$;

2.2. $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 2\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}1 & 3 & 1\\ 2 & 0 & 4\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}$; $C=\begin{pmatrix}46 & 38\\ 37 & 19\\ 111 & 74\end{pmatrix}$;

2.3. $A=\begin{pmatrix}2 & 3 & -1\\ 5 & 8 & 0\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}5 & 4\\ -1 & -1\\ 6 & 5\end{pmatrix}$; $C=\begin{pmatrix}2\\ 10\end{pmatrix}$;

2.4. $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 7\\ 8 & 1 & 2\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}2 & 8\\ 1 & -10\\ 0 & -1\end{pmatrix}$; $C=\begin{pmatrix}6 & 4 & 2\\ 36 & 53 & 17\end{pmatrix}$;

2.5. $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 5 & 7\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}5 & 4\\ -3 & 0\end{pmatrix}$; $C=\begin{pmatrix}5\\ -1\end{pmatrix}$;

2.6. $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 7 & 8\\ 3 & 1\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}5 & 1 & 2\\ -4 & 0 & -1\end{pmatrix}$; $C=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 9 & 1\\ 1 & -2\end{pmatrix}$;

2.7. $A=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 2\\ 2 & 0 & -1\\ -1 & 3 & 2\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ -1 & 0 & -2\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}$; $C=\begin{pmatrix}28\\ -7\\ 0\end{pmatrix}$;

2.8. $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -4 & 3\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & -1\end{pmatrix}$; $C=\begin{pmatrix}3 & -2 & 5\\ 4 & 24 & -35\end{pmatrix}$;

2.9. $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 4 & 1 & 3\\ -1 & 3 & 2\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\ 4 & -2 & 0\\ -1 & 3 & 5\end{pmatrix}$; $C=\begin{pmatrix}-2\\ 0\\ -12\end{pmatrix}$;

2.10. $A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ -1 & 0\\ 3 & 2\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}1 & -2 & -1\\ -2 & 0 & 1\end{pmatrix}$; $C=\begin{pmatrix}4 & 1\\ -1 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$;

2.11. $A=\begin{pmatrix}3 & -1\\ -2 & 2\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & -2\end{pmatrix}$; $C=\begin{pmatrix}5 & 0\\ -10 & 8\end{pmatrix}$;

2.12. $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 2\\ -2 & 3 & 0\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}3 & 4 & 1\\ 1 & -3 & 0\\ -2 & 1 & 2\end{pmatrix}$; $C=\begin{pmatrix}9\\ -7\\ -19\end{pmatrix}$;

2.13. $A=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ -3 & 7\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ -2 & 1\end{pmatrix}$; $C=\begin{pmatrix}-3 & 0 & -15\\ 8 & 9 & 11\end{pmatrix}$;

2.14. $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\ 4 & -2 & 0\\ -1 & 3 & 5\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 4 & 1 & 3\\ -1 & 3 & 2\end{pmatrix}$; $C=\begin{pmatrix}1\\ 12\\ -3\end{pmatrix}$;

2.15. $A=\begin{pmatrix}5 & 7\\ 4 & 0\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$; $C=\begin{pmatrix}-26\\ -4\end{pmatrix}$;

2.16. $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 2\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 2\\ -2 & 3 & 0\end{pmatrix}$; $C=\begin{pmatrix}-2 & -10\\ -10 & -1\\ -10 & -13\end{pmatrix}$;

2.17. $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ 3 & 4 & 6\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}3 & -5\\ -1 & 2\\ -2 & 3\end{pmatrix}$; $C=\begin{pmatrix}20 & -1 & 5\\ 42 & -45 & -9\end{pmatrix}$;

2.18. $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&0&-1\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}2&-3\\1&2\\0&-2\end{pmatrix}$; $C=\begin{pmatrix}3&6\\5&8\end{pmatrix}$;

2.19. $A=\begin{pmatrix}2&4\\3&7\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}7&-5\\-1&3\end{pmatrix}$; $C=\begin{pmatrix}8&20&-14\\8&28&6\end{pmatrix}$;

2.20. $A=\begin{pmatrix}1&-1&2\\-3&0&4\\2&-3&1\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}3&-1&3\\2&4&0\\1&-2&-3\end{pmatrix}$; $C=\begin{pmatrix}10\\12\\-4\end{pmatrix}$.

Задание 3. Вычислить определитель четвертого порядка

3.1. $\begin{vmatrix}1&-2&3&1\\0&2&5&-5\\6&3&4&-2\\-1&2&5&4\end{vmatrix}$

3.2. $\begin{vmatrix}2&6&5&-5\\4&-1&9&8\\7&2&-4&-3\\-5&8&-2&11\end{vmatrix}$

3.3. $\begin{vmatrix}8&-1&4&2\\3&-4&6&-3\\5&2&3&0\\0&5&-3&3\end{vmatrix}$

3.4. $\begin{vmatrix}3&-1&4&2\\4&-3&4&-3\\4&2&5&-3\\2&4&6&2\end{vmatrix}$

3.5. $\begin{vmatrix}-1&-2&3&4\\3&0&1&7\\-2&1&0&6\\8&2&-2&6\end{vmatrix}$

3.6. $\begin{vmatrix}3&-3&1&7\\3&5&8&-2\\5&1&0&3\\4&9&-1&10\end{vmatrix}$

3.7. $\begin{vmatrix}1&-2&3&4\\-1&-2&5&-7\\4&1&-5&9\\8&-7&-4&1\end{vmatrix}$

3.8. $\begin{vmatrix}-4&3&1&-1\\3&-6&3&2\\5&9&-3&2\\1&3&6&1\end{vmatrix}$

3.9. $\begin{vmatrix}-3&2&6&1\\1&-2&-6&-5\\6&-1&1&2\\2&4&5&7\end{vmatrix}$

3.10. $\begin{vmatrix}2&6&-8&-5\\3&-1&-2&8\\7&2&4&1\\5&8&-2&-2\end{vmatrix}$

3.11. $\begin{vmatrix}6&-3&3&6\\4&-8&4&-3\\2&-3&6&5\\1&-5&3&5\end{vmatrix}$

3.12. $\begin{vmatrix}1&-4&3&4\\3&-5&5&-7\\3&1&4&-2\\0&6&-5&1\end{vmatrix}$

3.13.
$$\begin{vmatrix} 0 & -6 & 7 & 5 \\ 1 & 4 & -5 & 3 \\ 3 & 2 & 4 & -2 \\ -3 & 1 & -4 & 3 \end{vmatrix}$$

3.14.
$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 4 & -4 \\ 3 & -2 & 8 & 8 \\ 6 & 1 & -5 & -3 \\ -3 & 6 & 0 & 10 \end{vmatrix}$$

3.15.
$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & 8 & -1 \\ 7 & 4 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

3.16.
$$\begin{vmatrix} 5 & 1 & -6 & 1 \\ 5 & -5 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 4 & 5 \end{vmatrix}$$

3.17.
$$\begin{vmatrix} -11 & 2 & -3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & -4 \\ 4 & -2 & 3 & -1 \\ -3 & 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

3.18.
$$\begin{vmatrix} -1 & 4 & 3 & -8 \\ 3 & -4 & 7 & 5 \\ 4 & -2 & 5 & 3 \\ -2 & 6 & -3 & 12 \end{vmatrix}$$

3.19.
$$\begin{vmatrix} 7 & -2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & 5 & -6 \\ 0 & 4 & -2 & -6 \end{vmatrix}$$

3.20.
$$\begin{vmatrix} 2 & -2 & -4 & 1 \\ 1 & -4 & 4 & -3 \\ 4 & 3 & 6 & -6 \\ 3 & 5 & -5 & 2 \end{vmatrix}$$

Задание 4. Установить совместность системы линейных уравнений и решить ее тремя методами: Крамера, матричным, Гаусса. Сделать проверку полученного решения

4.1.
$$\begin{cases} 2x-3y-5z=1 \\ 3x+y-2z=-4 \\ x-2y+z=5. \end{cases}$$

4.2.
$$\begin{cases} 2x+3y-z=2 \\ x+2y+3z=0 \\ x-y-2z=6. \end{cases}$$

4.3.
$$\begin{cases} 3x+y+2z=-4 \\ x-2y-z=-1 \\ 2x+3y+2z=0. \end{cases}$$

4.4.
$$\begin{cases} x-3y+z=2 \\ 2x+y+3z=3 \\ 2x-y-2z=8. \end{cases}$$

4.5.
$$\begin{cases} 3x+2y-z=3 \\ x-y+2z=-4 \\ 2x+2y+z=4. \end{cases}$$

4.6.
$$\begin{cases} 3x-2y+2z=3 \\ 2x+y-z=-5 \\ 5x-y+3z=4. \end{cases}$$

4.7.
$$\begin{cases} 2x+3y-z=2 \\ x-y+3z=-4 \\ 3x+5y+z=4. \end{cases}$$

4.8.
$$\begin{cases} 2x-3y+z=3 \\ x+y-2z=4 \\ 3x-2y+6z=0. \end{cases}$$

4.9.
$$\begin{cases} 2x-3y+3z=0 \\ x+y-2z=-7 \\ x-2y+3z=3. \end{cases}$$

4.10.
$$\begin{cases} 5x-2y+z=-1 \\ 2x+y+2z=6 \\ x-3y-z=-5. \end{cases}$$

4.11.
$$\begin{cases} 4x+3y-2z=-1 \\ 3x+y+z=3 \\ x-2y-3z=8. \end{cases}$$

4.12.
$$\begin{cases} x+y-2z=1 \\ 2x+3y+z=0 \\ x-2y-z=7. \end{cases}$$

4.13.
$$\begin{cases} 2x-y+3z=1 \\ x+2y+z=8 \\ 4x-3y-2z=-1. \end{cases}$$

4.14.
$$\begin{cases} 3x+3y+2z=-1 \\ 2x+y-z=3 \\ x-2y-3z=4. \end{cases}$$

4.15.
$$\begin{cases} x+2y-4z=0 \\ 3x+y-3z=-1 \\ 2x-y+5z=3. \end{cases}$$

4.16.
$$\begin{cases} 2x-y+3z=3 \\ x+2y+z=2 \\ x-3y+4z=-1. \end{cases}$$

4.17.
$$\begin{cases} x-2y+z=4 \\ 2x+y+3z=5 \\ 3x+4y+z=-2. \end{cases}$$

4.18.
$$\begin{cases} x+5y-z=-1 \\ 2x+y-2z=7 \\ x-4y+z=0. \end{cases}$$

4.19.
$$\begin{cases} 3x+y-2z=1 \\ x-2y+3z=5 \\ 2x+3y-z=-4. \end{cases}$$

4.20.
$$\begin{cases} x-3y-z=1 \\ 2x+y+z=-7 \\ 2x-y-3z=5. \end{cases}$$

Задание 5. Исследовать систему на совместность. В случае совместности найти общее и два частных решения системы

5.1. $$\begin{cases} x-2y+3z-4u=4 \\ y-z+u=-3 \\ x+3y-3u=1 \\ -7y+3z+u=-3 \end{cases}$$

5.2. $$\begin{cases} x+2y+3z-4u=1 \\ 2x+3y+z-u=1 \\ 3x+4y-3z-u=1 \\ 3x+5y+4z-2u=2 \end{cases}$$

5.3. $$\begin{cases} 2x+y-z+u=1 \\ 3x-2y+2z-3u=2 \\ 5x+y-z+2u=-1 \\ 2x-y+z-3u=4 \end{cases}$$

5.4. $$\begin{cases} x-2y+3z-4u+2v=-2 \\ x+2y-z-v=-3 \\ x-y+2z-3u=10 \\ -3x+5z-11u+5v=-5 \end{cases}$$

5.5. $$\begin{cases} x+y+z=6 \\ 2x-y+z=3 \\ x-y+2z=5 \\ 3x-6y+5z=6 \end{cases}$$

5.6. $$\begin{cases} 2x-y+z+2u+3v=2 \\ 6x-3y+2z+4u+5v=3 \\ 4x-2y+z+2v=1 \\ 6x-3y+4z+8u+13v=9 \end{cases}$$

5.7. $$\begin{cases} x+2y-z+u+v=0 \\ y+2z-u+v=1 \\ 2x+3y-4z+3u+v=-1 \end{cases}$$

5.8. $$\begin{cases} 5x-3y+2z+u=3 \\ 4x-2y+3z+u=1 \\ 8x-6y-z-5u=9 \\ 7x-3y+7z+17u=0 \end{cases}$$

5.9. $\begin{cases} 3x+5y+2z+2u=4 \\ 9x+4y+z+7u=2 \\ 2x+7y+3z+u=6 \end{cases}$

5.10. $\begin{cases} 2x+7y+3z+u=6 \\ 3x+5y+2z+2u=4 \\ 9x+4y+z+7u=2 \end{cases}$

5.11. $\begin{cases} 2x-y+z-u=0 \\ x+y+2u=4 \\ 2x+3y-z-u=1 \\ x-4y+2z+2u=3 \end{cases}$

5.12. $\begin{cases} 2x-3y+3z-2u=0 \\ 4x+11y-13z+16u=2 \\ 7x-2y+z+3u=-1 \\ 3x+4y-5z+7u=1 \end{cases}$

5.13. $\begin{cases} 6x+4y+5z+2u+3v=1 \\ 3x+2y+4z+u+2v=3 \\ 9x+6y+3z+3u+3v=1 \\ 3x+2y-2z+u=-7 \end{cases}$

5.14. $\begin{cases} 4x+y-2z+u=3 \\ x-2y-z+2u=2 \\ 2x+5y-u=-1 \\ 3x+3y-z-3u=1 \end{cases}$

5.15. $\begin{cases} 2x-3y+3z=7 \\ 2x+5y+z+3u=2 \\ 4x+6y+3z+5u=4 \\ 4x+14y+z+7u=4 \end{cases}$

5.16. $\begin{cases} 2x+z-u=2 \\ x-2y+2u=1 \\ 4y+z-5u=0 \end{cases}$

5.17. $\begin{cases} 5x-3y+2z+4u=3 \\ 4x-2y+3z+7u=1 \\ 8x-6y-z-5u=9 \\ 7x-3y+7z+17u=1 \end{cases}$

5.18. $\begin{cases} x+3y-z+5u-7v=3 \\ 3x-2y+7z-5u+8v=3 \\ 2x-y+7z+3u+5v=2 \\ 3x+y-2z+u-v=1 \end{cases}$

5.19. $\begin{cases} x+2z-u=0 \\ 2x-y+3u=1 \\ 2x+y-z=2 \\ 3x+y+z-u=2 \end{cases}$

5.20. $\begin{cases} x-2y+u=10 \\ 2x-y+3z=1 \\ x+y+3z-u=-9 \end{cases}$

Решение типового варианта контрольной работы № 1

Задание 1. Выполнить действия над матрицами.

Найти $3A \pm 4B,\ A \cdot B,\ C \cdot A^T, \Delta A,\ A^{-1}$.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ -1 & 4 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 6 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & -2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Решение. Умножение матриц на число, сложение и вычитание матриц выполняем по формулам (1.2) и (1.3):

$$3A = 3 \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ -1 & 4 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -9 & 15 \\ -3 & 12 & 6 \\ 0 & -6 & 3 \end{pmatrix}, \qquad 4B = 4 \cdot \begin{pmatrix} 6 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 & -4 & 12 \\ 8 & 0 & 4 \\ 16 & 20 & -8 \end{pmatrix},$$

$$3A + 4B = \begin{pmatrix} 6 & -9 & 15 \\ -3 & 12 & 6 \\ 0 & -6 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 24 & -4 & 12 \\ 8 & 0 & 4 \\ 16 & 20 & -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 & -13 & 27 \\ 5 & 12 & 10 \\ 16 & 14 & -5 \end{pmatrix},$$

$$3A - 4B = \begin{pmatrix} 6 & -9 & 15 \\ -3 & 12 & 6 \\ 0 & -6 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 24 & -4 & 12 \\ 8 & 0 & 4 \\ 16 & 20 & -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18 & -5 & 3 \\ -11 & 12 & 2 \\ -16 & -26 & 11 \end{pmatrix}.$$

Произведение матриц $A \cdot B$ найдем по формуле (1.4):

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ -1 & 4 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & -2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2\cdot 6 + (-3)\cdot 2 + 5\cdot 4 & 2\cdot(-1) + (-3)\cdot 0 + 5\cdot 5 & 2\cdot 3 + (-3)\cdot 1 + 5\cdot(-2) \\ (-1)\cdot 6 + 4\cdot 2 + 2\cdot 4 & (-1)\cdot(-1) + 4\cdot 0 + 2\cdot 5 & (-1)\cdot 3 + 4\cdot 1 + 2\cdot(-2) \\ 0\cdot 6 + (-2)\cdot 2 + 1\cdot 4 & 0\cdot(-1) + (-2)\cdot 0 + 1\cdot 5 & 0\cdot 3 + (-2)\cdot 1 + 1\cdot(-2) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 12 - 6 + 20 & -2 + 0 + 25 & 6 - 3 - 10 \\ -6 + 8 + 8 & 1 + 0 + 10 & -3 + 4 - 4 \\ 0 - 4 + 4 & 0 + 0 + 5 & 0 - 2 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 & 23 & -7 \\ 10 & 11 & -3 \\ 0 & 5 & -4 \end{pmatrix}.$$

Найдем матрицу A^T, которая является *транспонированной* к матрице *A:*

$$A^T = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -3 & 4 & -2 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Выполним произведение:

$$C \cdot A^T = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -3 & 4 & -2 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6+9+5 & -3-12+2 & 0+6+1 \\ 4+0+5 & -2+0+2 & 0+0+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & -13 & 7 \\ 9 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Определитель третьего порядка вычислим по правилу Саррюса, (1.9)

$$\Delta A = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ -1 & 4 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 \cdot 1 + (-3) \cdot 2 \cdot 0 + (-1) \cdot (-2) \cdot 5 - 0 \cdot 4 \cdot 5 - 2 \cdot (-2) \cdot 2 - (-1) \cdot (-3) \cdot 1 =$$

$$= 8 + 0 + 10 - 0 + 8 - 3 = 23.$$

Для нахождения обратной матрицы воспользуемся алгоритмом, представленном на стр. 16. Найдем алгебраические дополнения матрицы *A*:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 4 - (-4) = 8, \qquad A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -(-4 - 0) = 4,$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -(-1 - 0) = 1, \qquad A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -6 - 20 = -26,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 2 - 0 = 2, \qquad A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -(4 - (-5)) = -9,$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -3 & 5 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -(-3 - (-10)) = -7, \quad A_{33} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 8 - 3 = 5.$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 0 = 2,$$

Составим присоединенную матрицу и рассчитаем обратную матрицу к матрице *A*, зная, что определитель равен 23.

$$A^* = \begin{pmatrix} 8 & -7 & -26 \\ 1 & 2 & -9 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{23}\begin{pmatrix} 8 & -7 & -26 \\ 1 & 2 & -9 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Проверка: $A \cdot A^{-1} = E$

$$A \cdot A^{-1} = \frac{1}{23} \cdot \begin{pmatrix} 8 & -7 & -26 \\ 1 & 2 & -9 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ -1 & 4 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{23} \cdot \begin{pmatrix} 16+7+0 & -24-28+52 & 40-14-26 \\ 2-2+0 & -3+8+18 & 5+4-9 \\ 4-4+0 & -6+16-10 & 10+8+5 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{23} \cdot \begin{pmatrix} 23 & 0 & 0 \\ 0 & 23 & 0 \\ 0 & 0 & 23 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Задание 2. Решить матричные уравнения $AB{\cdot}X = C$, если матрицы A, B, C

известны

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \\ 5 & -3 & 6 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & 7 \\ -1 & 5 & 2 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \\ 5 & -3 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & 7 \\ -1 & 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+6-3 & -2+0+15 & 1+14+6 \\ 0-3-4 & 0+0+20 & 0-7+8 \\ 20-9-6 & -10+0+30 & 5-21+12 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 7 & 13 & 21 \\ -7 & 20 & 1 \\ 5 & 20 & -4 \end{pmatrix} = D, \qquad D \cdot X = C \Rightarrow X = D^{-1} \cdot C.$$

$$\Delta D = \begin{vmatrix} 7 & 13 & 21 \\ -7 & 20 & 1 \\ 5 & 20 & -4 \end{vmatrix} = 7 \cdot (-4) \cdot 20 + 5 \cdot 13 \cdot 1 + (-7) \cdot 20 \cdot 21 - 21 \cdot 20 \cdot 5 - 7 \cdot 20 \cdot 1 - (-7) \cdot (-4) \cdot 13 =$$

$$= -560 + 65 - 2940 - 2100 - 140 - 364 = -6039$$

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}20 & 1\\ 20 & -4\end{vmatrix}=-80-20=-100,\quad A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}-7 & 1\\ 5 & -4\end{vmatrix}=-(28-5)=-23,$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}-7 & 20\\ 5 & 20\end{vmatrix}=-140-100=-240,\quad A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}13 & 21\\ 20 & -4\end{vmatrix}=-(-52-420)=472,$$

$$A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}7 & 21\\ 5 & -4\end{vmatrix}=-28-105=-133,\quad A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}7 & 13\\ 5 & 20\end{vmatrix}=-(140-65)=-75,$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}13 & 21\\ 20 & 1\end{vmatrix}=13-420=-407,\quad A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}7 & 21\\ -7 & 1\end{vmatrix}=-(7+147)=-154,$$

$$A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}7 & 13\\ -7 & 20\end{vmatrix}=140+91=231.$$

$$D^{*}=\begin{pmatrix}-100 & 472 & -407\\ -23 & -133 & -154\\ -240 & -75 & 231\end{pmatrix}\Rightarrow D^{-1}=-\frac{1}{6039}\cdot\begin{pmatrix}-100 & 472 & -407\\ -23 & -133 & -154\\ -240 & -75 & 231\end{pmatrix}$$

Проверка: $D\cdot D^{-1}=E$.

$$D\cdot D^{-1}=-\frac{1}{6039}\cdot\begin{pmatrix}-100 & 472 & -407\\ -23 & -133 & -154\\ -240 & -75 & 231\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}7 & 13 & 21\\ -7 & 20 & 1\\ 5 & 20 & -4\end{pmatrix}=$$

$$=-\frac{1}{6039}\begin{pmatrix}-6039 & 0 & 0\\ 0 & -6039 & 0\\ 0 & 0 & -6039\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

$$X=D^{-1}\cdot C=-\frac{1}{6039}\cdot\begin{pmatrix}-100 & 472 & -407\\ -23 & -133 & -154\\ -240 & -75 & 231\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 3\\ 2 & 1\end{pmatrix}=-\frac{1}{6039}\cdot\begin{pmatrix}-914 & 1109\\ -331 & -530\\ 222 & 246\end{pmatrix}.$$

Проверка: $D\cdot X=C$

$$-\frac{1}{6039}\cdot\begin{pmatrix}-914 & 1109\\ -331 & -530\\ 222 & 246\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}7 & 13 & 21\\ -7 & 20 & 1\\ 5 & 20 & -4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 3\\ 2 & 1\end{pmatrix},$$

$$-\frac{1}{6039}\cdot\begin{pmatrix}-6039 & 6039\\ 0 & -18117\\ -12078 & -6039\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 3\\ 2 & 1\end{pmatrix}.\qquad \begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 3\\ 2 & 1\end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 3\\ 2 & 1\end{pmatrix}.$$

Задание 3. Вычислить определитель четвертого порядка

Для вычисления определителя четвертого порядка воспользуемся правилом разложения по строке (столбцу), формула (1.13):

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & -4 & 3 & 1 \\ 5 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & 6 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} -4 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 6 & 0 & 4 \end{vmatrix} + 5\cdot\left(-1\right)^{3+3}\cdot\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -4 & 3 & 1 \\ 6 & 0 & 4 \end{vmatrix} +$$

$$+3\cdot(-1)^{4+1}\cdot\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -4 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 16+0+0+6-0-24)+5\cdot(36-12+0-18-0-32)+$$

$$+3\cdot\left(-1\right)\cdot(0-4+4-6+3-0) = -2-130+9 = -123.$$

Задание 4. Доказать совместность системы линейных алгебраических уравнений и решить методом Крамера, матричным методом, методом Гаусса, сделать проверку полученного решения.

$$\begin{cases} x+2y-3z=-10, \\ x-y+z=3, \\ x+y=1. \end{cases}$$

Решение. Установим совместность данной системы. Матрица коэффициентов системы невырожденная:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0+2-3-3-0-1=-5\neq 0,$$

т.е. определить $\Delta\neq 0$. Число уравнений равно числу неизвестных, ранг матрицы системы равен числу неизвестных, поэтому система имеет единственное решение.

А) Решим систему по формулам Крамера (1.22):

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} -10 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0, \Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & -10 & -3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -5, \Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -10 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -20.$$

$$\Rightarrow x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{0}{-5} = 0, y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-5}{-5} = 1, z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{-20}{-5} = 4.$$

Б) Применим метод исключения неизвестных Гаусса. Для этого составляем расширенную матрицу и, пользуясь элементарными строчными преобразованиями, получаем:

$$\overline{\mathrm{A}} = (\mathrm{A}|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & -10 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -I \\ -I \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & -10 \\ 0 & -3 & 4 & 13 \\ 0 & -1 & 3 & 11 \end{array}\right)_{-II \cdot \frac{1}{3}} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & -10 \\ 0 & -3 & 4 & 13 \\ 0 & 0 & \frac{5}{3} & \frac{20}{3} \end{array}\right).$$

Преобразованной матрице $\overline{\mathrm{A}}$ соответствует простейшая система:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -10 \\ -3x_2 + 4x_3 = 13 \\ \frac{5}{3}x_3 = \frac{20}{3} \end{cases}$$

Из нее очевидным образом получаем вектор решений x = (0, 1, 4).

В) Решим систему с помощью обратной матрицы, используя формулу (1.20). Имеем

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -10 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Вычислим матрицу A^{-1}. A_{ij} – алгебраические дополнения каждого элемента матрицы, таковы:

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1, \quad \mathrm{A}_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1, \quad \mathrm{A}_{13} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2,$$

$$\mathrm{A}_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -3, \quad \mathrm{A}_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 3, \quad \mathrm{A}_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

$$\mathrm{A}_{31} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -1, \quad \mathrm{A}_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -4, \quad \mathrm{A}_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3.$$

Следовательно, $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = -\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -1 & -3 & -1 \\ 1 & 3 & -4 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$

Теперь находим искомое решение:

$$x = -\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -1 & -3 & -1 \\ 1 & 3 & -4 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -10 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 10-9-1 \\ -10+9-4 \\ -20+3-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix},$$

т.е. $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 4$, что совпадает с решениями, полученными выше.

Сделаем проверку:

$$\begin{cases} 0+2\cdot 1-3\cdot 4 \equiv -10, \\ 0-1+4 \equiv 3, \\ 0+1 \equiv 1. \end{cases}$$

Задание 5. Исследовать систему на совместность. В случае совместности найти общее и два частных решения системы

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 6 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 - 3x_4 + 3x_5 = 8. \\ x_1 + x_2 - 3x_4 + x_5 = 4 \end{cases}$$

Решение. Расширенная матрица данной системы имеет вид:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 6 \\ 1 & 3 & 1 & -3 & 3 & 8 \\ 1 & 1 & 0 & -3 & 1 & 4 \end{array}\right) \Rightarrow$$

Выполним прямой ход метода Гаусса.

Умножим первую строку на (-1) и прибавим ко второй и третьей строке. Получим

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 4 & 0 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & -2 & 0 & -2 \end{array}\right) \Rightarrow$$

Меняем местами вторую и третью строки матрицы. Получаем

$$\Rightarrow\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 2 & -1 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 0 & -2 & 2 & 2 \end{array}\right)\Rightarrow$$

Вторую строку умножаем на (-2) и прибавляем к третьей. Получаем

$$\Rightarrow\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 2 & -1 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 6 \end{array}\right)\Rightarrow$$

Разделим третью строку на 2. Получим

$$\Rightarrow\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 2 & -1 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right).$$

Итак, прямой ход осуществлен, в результате преобразования матрицы получим систему уравнений, эквивалентную заданной

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 6 \\ 2x_2 - x_3 - 2x_4 = -2 \\ x_3 + x_4 + x_5 = 3 \end{cases}$$

Обратный ход позволяет последовательно определить все неизвестные системы. Так как система содержит 5 неизвестных и всего 3 уравнения, то выберем x_4, x_5 - свободными переменными, а x_1, x_2 x_3 – базисными переменными. Из последнего уравнения находим x_3=3 - x_4 - x_5 и подставляем во второе уравнение для определения x_2. Получаем

$$x_2 = \frac{x_3 + 2x_4 - 2}{2} \Rightarrow \quad x_2 = \frac{3 - x_4 - x_5 + 2x_4 - 2}{2} \Rightarrow$$

$$x_2 = \frac{1 + x_4 - x_5}{2} \Rightarrow \quad x_2 = 0{,}5 + 0{,}5\mathrm{x}_4 - 0{,}5\mathrm{x}_5.$$

Подставляем найденные x_2 и x_3 в первое уравнение и находим:

$$x_1 = 6 + x_2 - x_3 + x_4 - x_5 = 6 + 0{,}5 + 0{,}5x_4 – 0{,}5x_5 – 3 + x_4 + x_5 + x_4 - x_5;$$

$$x_1 = 3{,}5 + 2{,}5x_4 - 0{,}5x_5.$$

В результате получаем общее решение системы:

$$X = \begin{pmatrix} 3{,}5 + 2{,}5x_4 - 0{,}5x_5 \\ 0{,}5 + 0{,}5x_4 - 0{,}5x_5 \\ 3 - x_4 - x_5 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}.$$

Одно базисное решение получаем при $x_4 = x_5 = 0$,

т.е. $x_1 = 3{,}5$; $x_2 = 0{,}5$; $x_3 = 3$ или $X_1 = (3{,}5;\ 0{,}5;\ 3;\ 0;\ 0)$.

Чтобы получить другое базисное решение, достаточно задать $x_4 = 1$, $x_5 = 0$, тогда $x_1 = 6$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$ или $X_2 = (6, 1, 2, 1, 0)$.

ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ № 3

«Матрицы и определители» (практика)

3.1. Разложение по первой строке определителя $\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

имеет вид:

1) $-3a_{11} + 2a_{12} + 2a_{13}$; 2) $-3a_{12} + 2a_{13}$

3) $a_{11} + 2a_{12} + 3a_{13}$; 4) $3a_{12} - 2a_{13}$;

5) $2a_{11} - 3a_{12} + a_{13}$; 6) $-2a_{12} - 3a_{13}$.

3.2. Значение определителя $\begin{vmatrix} 4 & -2 & 4 \\ 10 & 2 & 12 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$ равно…

1) 0; 2) -3; 3) 8; 4) 1;

5) -2; 6) 6; 7) -1; 8) 5.

3.3. Если $A=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, то матрица $C = 2A + 3B$ равна…

1) $\begin{pmatrix} 13 & 6 \\ 7 & -4 \\ 11 & 10 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 8 & -4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 21 & 7 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$;

4) $\begin{pmatrix} 11 & 6 \\ 18 & 12 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$; 5) $\begin{pmatrix} 10 & 7 \\ 5 & -5 \\ 21 & 20 \end{pmatrix}$; 6) $\begin{pmatrix} 8 & 9 \\ 15 & -6 \\ 9 & 11 \end{pmatrix}$.

3.4. Дана матрица $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, элемент $(a_{23})^{-1}$ матрицы, обратной к A, равен …

1) -4; 2) 2; 3) 4; 4) ¼; 5) -¼; 6) 0.

3.5. Произведение $A{\cdot}B$, если $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, равно…

1) $\begin{pmatrix} 0 & -4 & -2 \\ 10 & 6 & 8 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} -3 & -2 & -1 \\ 13 & 5 & 9 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} -7 & 0 & -5 \\ 11 & 12 & 7 \end{pmatrix}$;

4) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -6 \\ 8 & 7 & 0 \end{pmatrix}$; 5) $\begin{pmatrix} 10 & -12 & 3 \\ 12 & 11 & 8 \end{pmatrix}$; 6) $\begin{pmatrix} -4 & 12 & 3 \\ 11 & 9 & 7 \end{pmatrix}$.

3.6. Если матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$, то определитель матрицы $A{\cdot}B$ равен …

1) -16; 2) 2; 3) 0; 4) 16; 5) 32; 6) 1.

3.7. Если $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, то произведение $A{\cdot}A^{\mathrm{T}}$ равно…

1) $\begin{pmatrix} -2 & -3 & 0 \\ -6 & 30 & 12 \\ -1 & 10 & 6 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} -5 & -6 & 1 \\ -2 & 12 & 10 \\ -3 & 0 & 5 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 1 & -7 & -9 \\ -4 & 28 & 11 \\ -5 & 12 & 5 \end{pmatrix}$;

4) $\begin{pmatrix} 2 & -6 & -3 \\ -7 & 32 & 15 \\ -5 & 11 & 7 \end{pmatrix}$; 5) $\begin{pmatrix} -4 & -4 & 11 \\ -1 & 10 & 0 \\ -5 & 10 & 7 \end{pmatrix}$; 6) $\begin{pmatrix} 13 & 13 & 3 \\ 13 & 26 & 5 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$.

3.8. Дана матрица $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$. Обратная к ней матрица A^{-1} определится…

1) $\begin{pmatrix} -2 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} -5 & 0 & 1 \\ 2 & -7 & 8 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -5 & 3 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}$;

4) $\begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & -6 & 1 \\ -1 & 7 & -3 \end{pmatrix}$ 5) $\begin{pmatrix} -1 & 12 & 4 \\ 0 & 9 & 2 \\ 4 & 5 & -2 \end{pmatrix}$; 6) $\begin{pmatrix} 0 & 5 & -3 \\ 1 & -7 & 2 \\ -3 & 5 & -4 \end{pmatrix}$.

3.9. Для матрицы $A=\begin{pmatrix} 2 & -4 & -2 \\ 3 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ указать сумму элементов, расположенных на побочной диагонали.

Ответ введите ______.

3.10. Ранг матрицы $\begin{pmatrix} 3 & 4 & -5 & 1 & 7 \\ 8 & 7 & -2 & -1 & 15 \\ 2 & -1 & 8 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ равен…

1) 3; 2) 0; 3) 2; 4) 1.

3.11 Матрица X из матричного уравнения $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

равна…

1) $\begin{pmatrix} 7 & -7 & -1 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 11 & -3 & -4 \\ 0 & 12 & 10 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 6 & -8 & 0 \\ -5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$;

4) $\begin{pmatrix} 8 & -9 & -3 \\ -3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$; 5) $\begin{pmatrix} 5 & -10 & -2 \\ -5 & 2 & 11 \end{pmatrix}$; 6) $\begin{pmatrix} 10 & -7 & -5 \\ -4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

3.12. Для матриц $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ указать те операции,

которые можно выполнить:

1) $B \cdot A$; 2) $A \cdot B$; 3) $B \cdot A^T$; 4) $A^T \cdot B$; 5) $B^T \cdot A$;
6) $A \cdot B^T$; 7) $B^T \cdot A^T$; 8) $A^T \cdot B^T$; 9) все указанные операции можно выполнить.

3.13. Корень уравнения $\begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = x$ равен …

1) -3; 2) 3; 3) 0; 4) -9; 5) 9; 6) 5.

3.14. Ранг квадратной матрицы пятого порядка равен $R(A) = 4$, тогда определитель этой матрицы равен …

1) 5; 2) 4; 3) 3; 4) 2; 5) 1; 6) 0.

3.15. Расставить матрицы в порядке возрастания их рангов:

1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -2 & -3 & -3 & -1 \end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; 4) $(1 \ \ -3 \ \ 0 \ \ 5)$;

5) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -3 & 0 & -3 \end{pmatrix}$; 6) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & -3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Ответ: __, __, __, __, __,__.

3.16. Разложение определителя $\det A = \begin{vmatrix} -1 & a & 0 \\ 2 & b & 2 \\ 3 & c & 1 \end{vmatrix}$ по второму столбцу имеет вид:

1) $-4a + b - 2c$; 2) $-a + 2b + 3c$; 3) $4a + b + 2c$;
4) $4a - b + 2c$; 5) верный ответ отсутствует.

3.17. Определитель матрицы $B = A \cdot A^T$, если $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ равен ___.

3.18. Операция произведения матриц правильно определена для матричного умножения вида:

1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$;

4) $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$; 5) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 6 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$; 6) $\begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$.

3.19. Алгебраическое дополнение элемента a_{32} определителя $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 11 \\ -1 & 3 & 1-\alpha \\ 3 & -4 & 2 \end{vmatrix}$ равно 1 при α равном …

1) -4; 2) 7; 3) 3; 4) 6; 5) 0; 6) -2.

3.20. Определитель $\begin{vmatrix} 7 & 6 & 0 & 2 \\ -1 & 5 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ равен …

1) –21; 2) 36; 3) –12; 4) –36; 5) 12; 6) 0.

3.21. Алгебраическое дополнение для отмеченного элемента определителя $\begin{vmatrix} 6 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & -1 \\ 3 & -3 & 2 \end{vmatrix}$ равно

1) 1; 2) -1; 3) 7; 4) -7; 5) 0.

3.22. Матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$ вырождена при λ, равном …

1) –2; 2) 2; 3) –1; 4) 1; 5) 0; 6) 6.

3.23. Сумма первого столбца матрицы $C = 2A - 3B$ определится, если матрицы известны

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 1 & -2 & 3 \\ -3 & 16 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -16 \\ -7 & -19 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Ответ введите ______.

3.24. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Сумма элементов матрицы $B \cdot A$, расположенных на ее главной диагонали равна …

1) –7; 2) -2; 3) –1; 4) 1; 5) 3; 6) 5.

3.25. Пусть A и B – обратимые квадратные матрицы одного порядка, тогда решением матричного уравнения $AX = B$ является матрица …

1) $A^{-1} \cdot B$; 2) $B^{-1} \cdot A$; 3) $A^{-1}\, B^{-1}$;
4) $B^{-1} \cdot A^{-1}$ 5) $B^{-1} \cdot A^{T}$ 6) $A^{T} \cdot B^{-1}$.

3.26. Ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \\ 4 & 2 & 6 \end{pmatrix}$ равен …

1) 0; 2) 1; 3) 2; 4) 3; 5) -1; 6) 4.

3.27. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 5 \\ 1 & -3 & 6 & 1 \\ -2 & 0 & -5 & 3 \\ 4 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Алгебраическим дополнением элемента a_{23} является число…

1) 32; 2) 12; 3) 0; 4) -21; 5) -30; 6) -15.

3.28. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, тогда определитель произведения матриц $\det(B^{\mathrm{T}} \cdot A)$ равен …

1) 0; 2) -; 3) 2; 4) 3; 5) -5; 6) 5.

3.29. Обратная матрица к матрице $A = \begin{pmatrix} 2 & -\alpha & 2 \\ -1 & 5 & -2 \\ 4 & 6 & 4 \end{pmatrix}$ не существует при α равном …

Ответ введите _____.

3.30. Матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ имеет обратную матрицу A^{-1}.

Элемент $(a_{23})^{-1}$ равен …

1) 0; 2) 1; 3) 2; 4) -1; 5) -2; 6) 3.

ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ № 4

«Системы линейных алгебраических уравнений» (практика)

4.1. Дана система линейных уравнений $\begin{cases} 2x-5y=1 \\ ax+5y=-2 \end{cases}$. Система не имеет решений при a равном:

1) 1; 2) -0,5; 3) -2; 4) 0; 5) 2; 6) 0,5.

4.2. Система линейных уравнений $\begin{cases} 2x+y-z=5 \\ 3x+3y-2z=8 \\ x+y+z=6 \end{cases}$ имеет единственное решение:

1) (1,2,3); 2) (0,4,-1); 3) (3,1,2); 4) (5,3,1);
5) (-2,0,1); 6) (-3,1,0); 7) (2,-2,5); 8) (1,1,-1).

4.3. Определитель основной матрицы системы $\begin{cases} 2x_1+3x_3=0 \\ x_1-2x_2=3 \\ 3x_2-x_3=-1 \end{cases}$ равен …

1) 13; 2) -17; 3) 0; 4) -14; 5) 1; 6) 11.

4.4. Укажите систему линейных уравнений, подготовленную для обратного хода метода Гаусса

1) $\begin{cases} 2x_1+x_2-x_3=7 \\ x_1+x_3=3 \\ x_1+x_2+x_3=1 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} x_1+8x_2+3x_3=0 \\ -x_2+x_3=1 \\ x_1+x_3=0 \end{cases}$;

3) $\begin{cases} x_1+x_2=3 \\ x_1+x_2=1 \end{cases}$; 4) $\begin{cases} x_1+8x_2+3x_3=4 \\ -x_2+x_3=2 \\ 5x_3=10 \end{cases}$.

4.5. Если (x_0, y_0) - решение системы линейных уравнений $\begin{cases} x+2y=-3 \\ 3x+2y=5 \end{cases}$, тогда x_0+y_0 равно …

1) -0,5; 2) 3,5; 3) 0,5; 4) -3,5; 5) 0.

4.6. В системе уравнений $\begin{cases} x_1 - 3x_2 - x_3 + 2x_4 + 5x_5 = 0 \\ x_1 + x_3 - 2x_4 + 5x_5 = 0 \\ 2x_3 + x_4 - 4x_5 = 0 \end{cases}$ базисными переменными можно считать …

1) x_5; 2) x_1, x_2, x_3; 3) x_4, x_5; 4) x_1, x_2, x_3, x_4, x_5; 5) x_2, x_4.

4.7. Система $\begin{cases} x + 3y + 5z + 5u = 5 \\ 2x + 5y + 8z + 9u = 9 \\ x + 5y + 3z + 4u = 4 \end{cases}$

1) не имеет решения;
2) имеет единственное нулевое решение;
3) имеет множество решений;
4) имеет единственное ненулевое решение.

4.8. Дана система уравнений $\begin{cases} x - 2y = 3 \\ 4x + 5y = 6 \end{cases}$. Для того, чтобы найти значение переменной x при решении этой системы по формулам Крамера, достаточно вычислить только определители …

1) $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 6 & 5 \end{vmatrix}$ и $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}$;
2) $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$ и $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 6 & 5 \end{vmatrix}$;
3) $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$ и $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}$;
4) $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 6 & 5 \end{vmatrix}$ и $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}$.

4.9. Расширенная матрица системы уравнений $\begin{cases} x - 5y - z = 3 \\ 4x + 5y + z = 6 \end{cases}$ имеет размерность …

1) 3×2; 2) 2×4; 3) 4×2; 4) 2×3; 5) 3×3.

4.10. Значение b, при котором система $\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 2x + 4y + 6z = 2 \\ 3x + 6y + 9z = b \end{cases}$ совместна, равно

___.

4.11. Система $\begin{cases} x+2y+3z=0 \\ 2x+3y+4z=0 \\ 2x+y+z=1 \\ 2x+2y+3z=1 \end{cases}$

1) не имеет решения; 2) имеет единственное нулевое решение;
3) имеет множество решений; 4) имеет единственное ненулевое решение.

4.12. Дана система линейных уравнений $\begin{cases} 5x_1-3x_2+x_3=-1 \\ x_1+x_2-x_3=0 \\ 2x_1+3x_2+x_3=5 \end{cases}$.

Тогда матричная форма записи этой системы имеет вид …

1) $\begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ -3 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 5 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ -3 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$.

4.13. Разность между числом свободных и базисных переменных системы

уравнений $\begin{cases} 2x_1+3x_2+7x_3+11x_4-x_5=0 \\ \qquad x_2-4x_3+x_4+11x_5=0 \\ \qquad\qquad x_3+x_4+2x_5=0 \end{cases}$ равна ____.

4.14. Основная матрица системы линейных алгебраических уравнений
$\begin{cases} x_2-x_3=0 \\ x_2+x_3=1 \\ x_1+2x_2=-1 \end{cases}$ имеет вид …

1) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

4.15. Значение n, при котором система $\begin{cases} x+y+z=6 \\ 3x+y+z=8 \\ nx+2y+2z=14 \end{cases}$ имеет бесконечное множество решений, равно ___.

4.16. Система $\begin{cases} x_1+3x_3-2x_4=1, \\ x_1+4x_2+4x_3-x_4=10 \end{cases}$ может быть решена …

1) методом Гаусса; 2) методом Крамера;
3) матричным способом; 4) является несовместной.

4.17. Пусть дана система $\begin{cases} x+2y+3z=6 \\ -x+y+2z=2 \\ x+3y+5z=9 \end{cases}$, тогда ее решение через обратную матрицу находится как …

1) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 7 & 3 & -4 \\ -4 & -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 7 & 3 & -5 \\ -4 & -2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 7 & 3 & -4 \\ -4 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 7 & 3 & -5 \\ -4 & -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix}$;

5) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 7 & 2 & -4 \\ -4 & -2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix}$; 6) нет правильного ответа.

4.18. Система линейных уравнений $\begin{cases} x-y+z=6 \\ x-2y+z=9 \\ x-4y-2z=3 \end{cases}$ имеет единственное решение

1) (-3,-2,0); 2) (1,-5,3); 3) (-1,-3,4); 4) (0,-7,5).

4.19. Дана система линейных уравнений $\begin{cases} ax+by=k \\ cx+dy=l \\ ex+fy=m \\ gx+hy=n \end{cases}$. Не зная значений коэффициентов, о существовании и числе ее решений можно сказать…

1) ничего нельзя сказать;
2) система обязательно определена;
3) система не определена;
4) система не может быть неопределенной;
5) система не может быть определенной;
6) система несовместна.

4.20. Система линейных уравнений $\begin{cases} 2x-5y=1 \\ 5x+3y=2 \end{cases}$ является:

1) совместной, определенной и разность ее корней равна $^{15}/_{31}$;
2) совместной, определенной и сумма ее корней равна $^{12}/_{31}$;
3) совместной, определенной и частное ее корней равно 13;
4) совместной, определенной и произведение ее корней равно $^{17}/_{31}$;
5) несовместной;
6) совместной, неопределенной;

4.2.1 Если *x*, *y*, *z* – решение системы $\begin{cases} 3x-y+z=4 \\ 2x-5y-3z=-17 \\ x+y-z=0 \end{cases}$, то сумма $x + y - 2z$ равна …

1) 2; 2) -3; 3) -1; 4) 3; 5) -4; 6) 0.

4.22. Однородная система имеет множество решений

1) $\begin{cases} 2x_1-6x_2=0, \\ x_1-3x_2=0. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x_1+x_2=0, \\ x_1-x_2+x_3=0. \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 7x_1+8x_2-x_3=0, \\ x_1-5x_2+x_3=0, \\ 4x_1-20x_2+4x_3=0. \end{cases}$

4) $\begin{cases} 5x_1-10x_2-15x_3=0, \\ x_1-2x_2-3x_3=0. \end{cases}$ 5) $\begin{cases} x_1-x_2+x_3=0, \\ x_1-x_2-x_3=0, \\ 3x_1+x_2+4x_3=0. \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 3x_1+2x_2=0, \\ 2x_1-3x_2=0. \end{cases}$

4.23. Основная матрица системы линейных уравнений имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & -2 & 0 \end{pmatrix},$$ тогда система …

1) совместная; 2) несовместная;
3) определённая; 4) неопределенная;
5) приведена к диагональному виду;
6) приведена к ступенчатому виду;

4.24. Расширенная матрица системы линейных уравнений имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$ тогда ….

1) система имеет единственное ненулевое решение;
2) в общем решении системы три главных и одно свободное неизвестное;
3) система неопределённая, её общее решение зависит от двух свободных неизвестных;
4) система имеет бесконечное множество решений;
5) система имеет тривиальное решение.

4.25. Разность между числом свободных и базисных переменных системы уравнений $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 - x_5 + x_6 = 2 \\ x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 - 3x_6 = -1 \\ 3x_3 + x_4 - 2x_5 + x_6 = 0 \end{cases}$ равна …

1) 2; 2) 3; 3) 1; 4) 0; 5) 4.

4.26. Значение суммы переменных x и y в решении системы линейных алгебраических уравнений $\begin{cases} x + 2y = -1 \\ -3x + z = -2 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$ равно…

1) 7; 2) 9; 3) 5; 4) -2; 5) 10.

4.27. Установите соответствие между системой линейных уравнений и ее расширенной матрицей:

1) $\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -1, \\ 5x_2 - 2x_3 = -3, \\ -2x_1 + x_2 - 4 = 0. \end{cases}$

2) $\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0, \\ 5x_1 - 2x_3 + 3 = 0, \\ -2x_2 + x_3 = -4. \end{cases}$

3) $\begin{cases} -5x_1 + 3x_3 + 3 = 0, \\ 5x_1 - 2x_2 = 4, \\ -2x_1 + x_3 - 5 = 0. \end{cases}$

4) $\begin{cases} -5x_2 + 3x_3 - 3 = 0, \\ 5x_1 + x_2 - 2x_3 = -4, \\ -2x_1 + x_2 + 5 = 0. \end{cases}$

А) $\begin{pmatrix} 5 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Б) $\begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 & 0 \\ 5 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & -2 & 1 & -4 \end{pmatrix}$

В) $\begin{pmatrix} 5 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 5 & -2 & -3 \\ -2 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

Г) $\begin{pmatrix} -5 & 0 & 3 & -3 \\ 5 & -2 & 0 & 4 \\ -2 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

Ответ 1__, 2 __, 3 __, 4 ___.

4.28. Система линейных уравнений. $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$

имеет множество решений:

1) $X = \begin{pmatrix} t/8 + 3/8 \\ 3t/8 + 1/8 \\ t \end{pmatrix}, t \in R$;

2) $X = \begin{pmatrix} t+1 \\ t-1 \\ t \end{pmatrix}, t \in R$;

3) $X = \begin{pmatrix} 2t+1 \\ t-1 \\ t \end{pmatrix}, t \in R$;

4) $X = \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ t+1 \end{pmatrix}, t \in R$.

4.29. Однородная система линейных уравнений $\begin{cases} ax + y + z = 0 \\ x + ay - z = 0 \\ 2x - y + z = 0 \end{cases}$ имеет

нетривиальные решения, при значениях a ...

1) $a_1 = -1$, $a_2 = 4$;
2) $a_1 = 1$, $a_2 = -4$;
3) $a_1 = -2$, $a_2 = 1$;
4) $a_1 = -3$, $a_2 = 2$;
5) $a_1 = 3$, $a_2 = -2$;
6) $a_1 = 4$, $a_2 = -1$.

4.30. Решая систему 4-х линейных уравнений с 4-мя неизвестными методом Гаусса получили матрицу:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & 9 & 1 & 3 \\ 0 & 8 & 32 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 7 & 8 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 11 \end{array}\right)$$, значит, данная система …

1) имеет единственное решение; 2) имеет бесконечное множество решений;
3) не имеет решений; 4) имеет два ненулевых решения.

Раздел II. ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

Векторной величиной или *вектором* называется величина, для задания которой кроме численного значения необходимо указать и ее направление в пространстве, [8]. Векторная величина графически обычно изображается как *направленный отрезок*, у которого указано, какая из точек, его ограничивающих, является начальной, а какая конечной. Вектор обозначается одной маленькой буквой со стрелкой сверху, например, $\vec{a}$, $\vec{b}$, или двумя буквами со стрелкой $\vec{AB}$, где точка A есть начало вектора (его точка приложения), а B - его конец.

Длина вектора называется его *модулем*, обозначается $|\vec{a}|$ или $|\overrightarrow{AB}|$ и равна расстоянию между начальной и конечной точками вектора $\vec{AB}$. Вектор, длина которого равна нулю, называется *нуль-вектором* и обозначается $\vec{0}$.

Два вектора называются *равными*, если равны их длины, они параллельны и направлены в одну сторону, [11]. Иными словами, равные векторы получаются один из другого параллельным переносом в пространстве. Вектор $\overrightarrow{BA}$, равный по длине вектору $\vec{AB}$ и противоположно направленный, называется *противоположным* и обозначается $-\overrightarrow{AB}$.

Векторы называются *коллинеарными, если они расположены на одной или на параллельных прямых*, и *компланарными, если они лежат на одной или на параллельных плоскостях*, [8].

Вектор, длина которого равна единице, называется *единичным вектором* или *ортом*. Орт обозначатся $\overrightarrow{e}$.

2.1. Линейные операции над векторами

К *линейным операциям* над векторами относятся сложение, вычитание векторов и умножение вектора на число.

Суммой векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{a}+\vec{b}$, начало которого совпадает с началом вектора $\vec{a}$, а конец - с концом вектора $\vec{b}$, если вектор $\vec{b}$ приложен к концу вектора $\vec{a}$ (*правило треугольника*) (рис. 2.1).

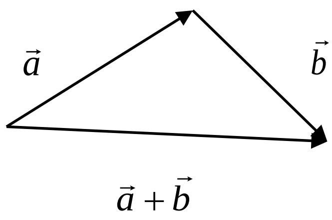


Рисунок 2.1 – Правило треугольника

Это правило распространяется на любое число слагаемых: если векторы $\overrightarrow{a}=\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{b}=\overrightarrow{AB}$, $\ldots$ $\overrightarrow{l}=\overrightarrow{KL}$ образуют ломаную $OAB\ldots KL$, то суммой этих векторов является вектор $\overrightarrow{OL}$, замыкающий эту ломаную, т.е. соединяющий начало первого вектора и конец последнего (*правило многоугольника*), рис.2.2.

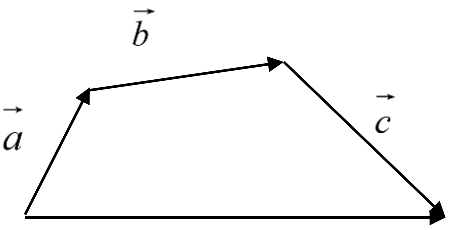


Рисунок 2.2 – Правило многоугольника

Суммой двух векторов, приведенных к общему началу, является вектор, идущий из общего начала по диагонали параллелограмма, построенного на этих векторах (*правило параллелограмма*) (рис. 2.2), [18].

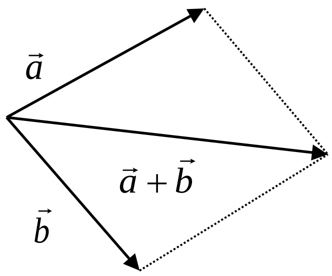


Рисунок 2.3. - Правило параллелограмма

Разностью векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}$, который в сумме с вектором $\vec{b}$ дает вектор $\vec{a}$. Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ привести к общему началу, то разностью векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ является вектор $\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}$, *идущий из конца вычитаемого вектора* $\vec{b}$ *в конец уменьшаемого вектора* $\vec{a}$ (рис. 2.3).

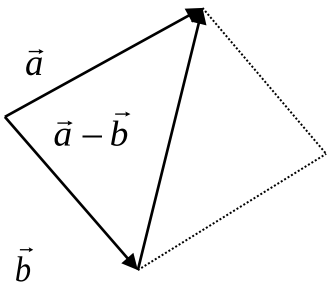


Рисунок 2.4 – Разность двух векторов

Произведением вектора $\vec{a}$ на число k называется вектор $\vec{b}=k\vec{a}$, длина которого равна $|\vec{b}|=|k||\vec{a}|$, а направление совпадает с направлением вектора $\vec{a}$, если $k>0$ и противоположно направлен вектору $\vec{a}$, если $k<0$.

Для линейных операций над векторами справедливы следующие свойства:

1) $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$; 2) $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$;

3) $(k+l)\vec{a}=k\vec{a}+l\vec{a}$; 4) $(kl)\vec{a}=k(l\vec{a})=l(k\vec{a})$;

5) $k(\vec{a}+\vec{b})=k\vec{a}+k\vec{b}$; 6) $0\cdot\vec{a}=0$.

Пример 2.1. Дан треугольник АВС

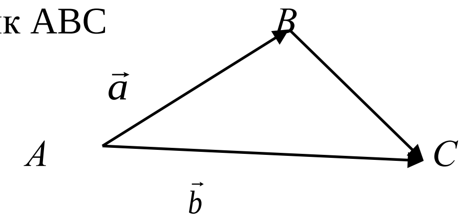


Рисунок к примеру 2.1.

Выразить через векторы $\vec{a}=\vec{AB}$ и $\vec{b}=\vec{AC}$ векторы $\vec{BA}$, $\vec{CB}$, $\vec{CB}+\vec{BA}$.

Решение. Векторы $\vec{BA}$ и $\vec{AB}$ - противоположные, поэтому $\vec{BA}=-\vec{AB}$, или $\overrightarrow{BA}=-\vec{a}$. По правилу треугольника $\vec{CB}=\vec{CA}+\vec{AB}$. Но $\vec{CA}=-\vec{AC}$, поэтому $\vec{CB}=\vec{AB}+(-\vec{AC})=\vec{AB}-\vec{AC}=\vec{a}-\vec{b}$. Тогда

$$\vec{CB}+\vec{BA}=\vec{CA}=-\vec{AC}=-\vec{b}.$$

2.2. Проекция вектора на ось

Пусть даны ось l и вектор $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$. Проектируя начало и конец вектора на ось l, получим на ней вектор $\overrightarrow{A_1B_1}$. *Проекцией вектора* $\overrightarrow{AB}$ *на ось* l называется число, равное длине вектора $\overrightarrow{A_1B_1}$, взятой со знаком плюс или минус в зависимости от того, направлен ли вектор $\overrightarrow{A_1B_1}$ в ту же сторону, что и ось l или в противоположную (рис. 2.5), [23]. Проекция вектора $\overrightarrow{AB}$ на ось l обозначается $np_l\overrightarrow{AB}$.

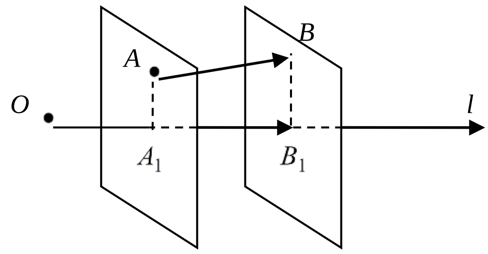


Рисунок 2.5. – Проекция вектора $\overrightarrow{AB}$ на ось l

Проекция вектора на ось, обладает следующими свойствами:

1. Проекция вектора $\vec{a}$ на ось равна произведению модуля вектора $\vec{a}$ на косинус угла φ между вектором и осью, (рис. 2.6):

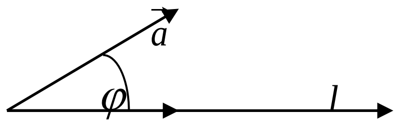


Рисунок 2.6. – Проекция вектора $\vec{a}$ на ось l

$$np_l\vec{a} = |\vec{a}| \cdot \cos\varphi. \tag{2.1}$$

Следствие 1. Проекция вектора на ось положительна, если вектор образует с осью острый угол, отрицательна, если этот угол – тупой, и равна нулю, если этот угол – прямой.

Следствие 2. Проекции равных векторов на одну и ту же ось равны между собой.

2. Проекция суммы нескольких векторов на одну и ту же ось равна сумме их проекций на эту ось:

$$np_l(\vec{a} + \vec{b}) = np_l\vec{a} + np_l\vec{b}.$$

3. При умножении вектора $\vec{a}$ на число λ его проекция на ось также умножается на это число, т.е. $np_l(\lambda\vec{a}) = \lambda np_l\vec{a}.$

Пример 2.2. Вектор $\overline{d} = \overline{a} + \overline{b}, \left|\overline{a}\right| = 3, \left|\overline{b}\right| = 4, \left(\overline{a}, \hat{l}\right) = \dfrac{\pi}{4}, \left(\overline{b}, \hat{l}\right) = \dfrac{3\pi}{4}$.

Найти $np_l \overline{d}$.

Решение. Воспользуемся свойством 2 проекции:

$$np_l \overline{d} = np_l \overline{a} + np_l \overline{b}.$$

$$np_l \overline{a} = \left|\overline{a}\right| \cdot \cos\left(\overline{a}, \hat{l}\right), \ np_l \overline{a} = 3 \cdot \cos\frac{\pi}{4} = 3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

$$np_l \overline{b} = \left|\overline{b}\right| \cdot \cos\left(\overline{b}, \hat{l}\right), \ np_l \overline{b} = 4 \cdot \cos\frac{3\pi}{4} = 4 \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -2\sqrt{2}.$$

$$np_l \overline{d} = \frac{3\sqrt{2}}{2} - 2\sqrt{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Пример 2.3. Вектор $\overline{b} = 2\overline{a}$. Длина вектора $\overline{a}$ равна 5. Угол между вектором $\overline{a}$ и осью *l* равен 30°. Найти $np_l \overline{b}$.

Решение. Воспользуемся свойством 3 проекции:

$$np_l \overline{b} = np_l \left(2\overline{a}\right) = 2 \cdot np_l \overline{a}.$$

$$np_l \overline{a} = \left|\overline{a}\right| \cos 30^\circ = 5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{5\sqrt{3}}{2}.$$

$$np_l \overline{b} = 2 \cdot \frac{5\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}.$$

2.3. Линейно-зависимые и независимые векторы. Базис. Координаты вектора в базисе

Линейной комбинацией векторов $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_n$ называется вектор вида:

$$\overline{a} = \lambda_1 \overline{a_1} + \lambda_2 \overline{a_2} + \ldots + \lambda_n \overline{a_n} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overline{a_i}, \qquad (2.2)$$

где λ_i - действительные числа. Из свойств проекции следует, что:

$$np_l \overline{a} = \lambda_1 np_l \overline{a_1} + \lambda_2 np_l \overline{a_2} + \ldots + \lambda_n np_l \overline{a_n}.$$

Векторы $\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n$ называются *линейно независимыми,* если их линейная комбинация будет нулевым вектором в том и только в том случае, когда все λ_i равны нулю:

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overline{a_i} = \vec{0} \Leftrightarrow \lambda_i = 0 \qquad (i = \overline{1,n}) \qquad (2.3)$$

Если же линейная комбинация будет нулевым вектором и *хотя бы один из λ_i отличен от нуля*, то эти векторы называются *линейно-зависимыми*, [18]. Последнее означает, что хотя бы один из векторов может быть представлен как линейная комбинация других векторов. Действительно, пусть $\lambda_1 \bar{a}_1 + \lambda_2 \bar{a}_2 + \ldots + \lambda_n \bar{a}_n = 0$ и, например, $\lambda_1 \neq 0$. тогда, $\bar{a}_1 = \mu_2 \bar{a}_2 + \ldots + \mu_n \bar{a}_n$, где $\mu_k = -\dfrac{\lambda_k}{\lambda_2}$ $(k = \overline{2,n})$.

Базисом в трехмерном пространстве называются любые три некомпланарных вектора $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$, взятые в определенном порядке. Такой базис обозначается $\left\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\right\}$. Пусть $\vec{c}$ - произвольный вектор трехмерного пространства, в котором выбран базис $\left\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\right\}$. Тогда существуют числа $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ такие, что:

$$\vec{c} = \lambda_1 \vec{e}_1 + \lambda_2 \vec{e}_2 + \lambda_3 \vec{e}_3 \qquad (2.4)$$

Коэффициенты $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ называются координатами вектора $\vec{c}$ в базисе

$\left\{\vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \vec{e}_3\right\}$, а формула (2.4) есть *разложение вектора* $\vec{c}$ *по данному базису*. Координаты вектора в заданном базисе определяются однозначно. *Координаты линейной комбинации векторов равны таким же линейным комбинациям соответствующих координат этих векторов.*

Пример 2.4**.** Написать разложение вектора $\vec{d}$=(6,20,6) по векторам $\vec{a}$=(1,2,3), $\vec{b}$ =(-2,3,-2), $\vec{c}$ =(3,-4,-5).

Решение: Представим вектор $\vec{d}$ в виде линейной комбинации $\vec{d}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}$. Распишем по координатам:

$$\begin{cases}\alpha-2\beta+3\gamma=6,\\ 2\alpha+3\beta-4\gamma=20,\\ 3\alpha-2\beta-5\gamma=6.\end{cases}$$

Для нахождения неопределенных коэффициентов *α*, *β*, *γ* применим метод Гаусса, для чего составим расширенную матрицу. Воспользуемся элементарными преобразованиями над строками этой матрицы: умножим первую строку на (-2) и прибавим ко второй, затем первую строку умножим на (-3) и прибавим к третьей, потом вторую строку умножим на $\left(-\frac{4}{7}\right)$ и прибавим к третьей. После преобразований получим треугольный вид расширенной матрицы:

$$\left(A|B\right)=\left(\begin{array}{ccc|c}1&-2&3&6\\2&3&-4&20\\3&-2&-5&6\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&-2&3&6\\0&7&-10&8\\0&4&-14&-12\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&-2&3&6\\0&7&-10&8\\0&0&-{}^{58}\!/_{7}&-{}^{116}\!/_{7}\end{array}\right).$$

Система уравнений запишется $\begin{cases}\alpha-2\beta+3\gamma=9\\ \quad 7\beta\text{-}10\gamma=8\\ \quad\text{-}\frac{58}{7}\gamma=-\frac{116}{7}\end{cases}$. Выполняя обратный ход метода Гаусса, получим $\gamma=2$, $\beta=4,\alpha=8$. В итоге разложение вектора $\vec{d}$ запишется $\vec{d}=8\vec{a}+4\vec{b}+2\vec{c}$.

2.4. Декартова прямоугольная система координат в пространстве. Разложение вектора по ортам

Декартова прямоугольная система координат (ДПСК) в пространстве определяется заданием единицы масштаба для измерения длин и трех пересекающихся в точке взаимно перпендикулярных осей, первая из которых называется осью абсцисс (Ox), вторая – осью ординат (Oy), третья – осью аппликат (Oz); точка O - начало координат (рис. 2.7).

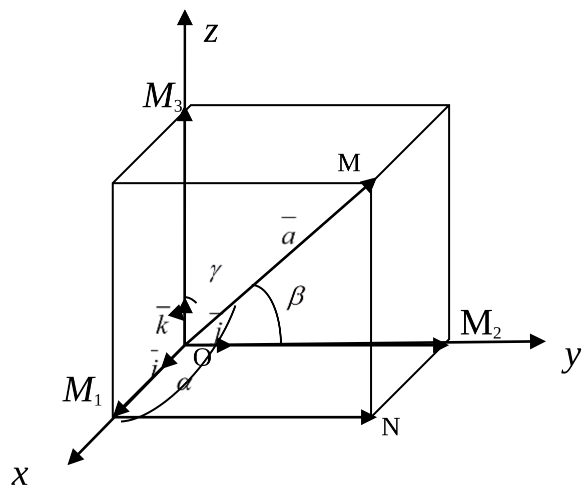


Рисунок 2.7 – Декартова прямоугольная система координат в пространстве

Положение координатных осей можно задать с помощью единичных векторов $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$, направленных соответственно по осям Ox, Oy, Oz. Векторы $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ называются основными или *базисными ортами* и определяют *ортонормированный базис* $\left\{\vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}\right\}$ в трехмерном пространстве.

Система координат называется *правой*, если вращение от оси Ox к оси Oy в ближайшую сторону видно с положительного направления оси Oz совершающимися против часовой стрелки, и *левой*, если вращение от оси Ox к оси Oy в ближайшую сторону видно совершающимися по часовой стрелке, [23].

Пусть в пространстве дана точка M. Проектируя ее на ось Ox, получим точку M_1. Первой координатой x или *абсциссой точки* M называется длина вектора $\overrightarrow{OM_1}$, взятая со знаком плюс, если $\overrightarrow{OM_1}$ направлен в ту же сторону, что и вектор $\vec{i}$, и со знаком минус - если в противоположную. Аналогично проектируя точку M на оси Oy и Oz, определим ее *ординату* y и *аппликату* z. Тройка чисел (x, y, z) взаимно однозначно соответствует точке M.

Вектор $\vec{a} = \overrightarrow{OM}$, направленный из начала координат в точку $M(x, y, z)$ называется *радиус-вектором точки* M.

В декартовой прямоугольной системе координат любой вектор представляется в виде линейной комбинации базисных векторов:

$$\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}, \tag{2.5}$$

и обозначается следующим образом $\vec{a} = (x, y, z)$, где $x,\ y,\ z$ - координаты вектора, его проекции на оси координат.

При сложении векторов складываются их соответствующие координаты, т.е., если даны векторы $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ и $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$, то $\vec{a} + \vec{b} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$. При умножении вектора на число его координаты умножаются на это число: $k\vec{a} = (kx_1, ky_1, kz_1)$.

Если $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, то они отличаются друг от друга скалярным множителем. Следовательно, *у коллинеарных векторов координаты пропорциональны*:

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}. \tag{2.6}$$

Пример 2.5. Коллинеарны ли векторы $\vec{c} = 2\vec{a} - \vec{b}$ и $\vec{d} = 3\vec{a} + \vec{b}$, если $\vec{a} = (1, -2, 4), \vec{b} = (-2, 4, -8)$?

Решение: $2\vec{a}=(2,-4,8), 3\vec{a}=(3,-6,12)$, поэтому $\vec{c}=(4,-8,16), \vec{d}=(1,-2,4)$. Проверяем условие коллинеарности (2.6): $\frac{4}{1}=\frac{-8}{-2}=\frac{16}{4}$, условие выполняется, следовательно, векторы коллинеарны.

Если даны координаты точек $A(x_1,\ y_1,\ z_1)$ и $B(x_2,\ y_2,\ z_2)$, то *координаты вектора* $\vec{AB}$ *получаются вычитанием из координат его конца B координат начала A*: $\vec{AB}=(x_1-x_2,\ \ y_1-y_2,\ \ z_1-z_2)$.

Длина вектора $\vec{a}=(x,y,z)$ равна квадратному корню из суммы квадратов его координат.

$$|\vec{a}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}. \qquad (2.7)$$

Длина вектора $\overrightarrow{AB}$, заданного координатами своих концов, т.е. расстояние между точками A и B вычисляется по формуле:

$$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}. \qquad (2.8)$$

Пример 2.6. . Даны векторы $\vec{a}=(2,3,5)$ и $\vec{b}=(-1,3,4)$. Найти координаты вектора $\bar{c}=4\bar{a}-3\bar{b}$ и его модуль.

Решение. Найдем координаты векторов $4\bar{a}$ и $3\vec{b}$: $4\vec{a}=(8,12,20), 3\vec{b}=(-3,9,12)$. Координаты вектора $\vec{c}$ определятся: $\vec{c}=(-8-(-3),12-9,20-12)=(11,3,8)$. Длину полученного вектора найдем по формуле (2.7): $|\vec{c}|=\sqrt{11^2+3^2+8^2}=\sqrt{194}$.

Пример 2.7. Дан треугольник *ABC*. где *A*(1, 2); B(0, 3); *C*(-2, -1). Найти его периметр.

Решение. Чтобы найти периметр ΔABC, надо найти длины всех его сторон:

$$|\overline{BC}|=\sqrt{(-2-0)^2+(-1-3)^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5},$$
$$|\overline{AC}|=\sqrt{9+9}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}; \quad |\overline{AB}|=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}.$$

Итак, периметр ΔABC равен: $P=|\overline{AC}|+|\overline{AB}|+|\overline{BC}|=3\sqrt{2}+\sqrt{2}+2\sqrt{5}=4\sqrt{2}+2\sqrt{5}$.

2.5. Направляющие косинусы вектора

Пусть дан вектор $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. Единичный вектор того же направления, что и $\bar{a}$ (орт вектора $\bar{a}$) находится по формуле:

$$\vec{a}^0 = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}. \tag{2.9}$$

Пусть вектор $\vec{a}$ образует с осями координат *Ox*, *Oy*, *Oz* соответственно углы $\alpha,\ \ \beta,\ \ \gamma$. Тогда по формуле (2.1) будем иметь:

$$x = a_x = np_{0x}\vec{a} = |\bar{a}|\cos\alpha, \quad y = a_y = np_{0y}\vec{a} = |\bar{a}|\cos\beta, \quad z = a_z = np_{0z}\vec{a} = |\bar{a}|\cos\gamma. \tag{2.10}$$

Косинусы углов, образованных вектором $\vec{a}$ с осями координат, называются *направляющими косинусами вектора*, и определяются по формулам:

$$\cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad \cos\beta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \cos\gamma = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}. \tag{2.11}$$

Возводя в квадрат обе части равенств и складывая их, получаем:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1, \tag{2.12}$$

то есть, *сумма квадратов направляющих косинусов равна единице*.

Пример 2.8. Известно, что $\cos\alpha = \frac{1}{2},\ \cos\beta = \frac{\sqrt{2}}{2},\ \cos\gamma < 0,\ |\bar{a}| = 3.$

Найти координаты вектора $\vec{a}$.

Решение. Найдем $\cos\gamma$, для этого воспользуемся равенством (2.12):

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \cos^2\gamma = 1, \quad \cos\gamma = -\sqrt{1 - \frac{1}{4} - \frac{2}{4}} = -\sqrt{\frac{1}{4}} = -\frac{1}{2}.$$

Используя равенства (2.10), получим:

$$x = 3\cdot\frac{1}{2} = \frac{3}{2}, \quad y = 3\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}, \quad z = 3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{2}..$$

Таким образом, вектор $\vec{a}$ имеет координаты $\vec{a} = \left(3/2, 3\sqrt{2}/2, -3/2\right)$.

2.6. Скалярное произведение векторов

Скалярным произведением двух векторов называется число, равное произведению их длин на косинус угла между ними, [11]:

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = \left|\overline{a}\right| \cdot \left|\overline{b}\right| \cdot \cos\varphi \,, \tag{2.13}$$

где $\varphi = \left(\widehat{\overline{a},\overline{b}}\right)$. Формулу (2.13) можно записать иначе. Так как $\left|\overline{a}\right| \cdot \cos\varphi = np_{\overline{b}}\,\overline{a}$, $\left|\overline{b}\right| \cdot \cos\varphi = np_{\overline{a}}\,\overline{b}$, то получим:

$$\overline{a}\overline{b} = \left|\overline{a}\right| \cdot np_{\overline{a}}\,\overline{b} = \left|\overline{b}\right| \cdot np_{\overline{b}}\,\overline{a}, \tag{2.14}$$

то есть *скалярное произведение двух векторов равно модулю одного из них, умноженному на проекцию другого на ось, сонаправленную с первым вектором.*

Из определения скалярного произведения следует формула для определения угла между векторами:

$$\cos\left(\widehat{\overline{a},\overline{b}}\right) = \frac{(\vec{a},\vec{b})}{|\vec{a}||\vec{b}|}\,. \tag{2.15}$$

Из равенства (2.15) следует, если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ перпендикулярны, то их скалярное произведение равно нулю. *Условием перпендикулярности векторов* является:

$$(\vec{a},\vec{b}) = 0\,. \tag{2.16}$$

Для скалярного произведения справедливы следующие свойства:

1) $(\vec{a},\vec{b}) = (\vec{b},\vec{a}),$

2) $(k\vec{a},\vec{b}) = k(\vec{a},b) = (\vec{a},k\vec{b}),$

3) $(\vec{a}+\vec{b},\vec{c}) = (\vec{a},\vec{c}) + (\vec{b},\vec{c}),$

4) $(\vec{a},\vec{a}) = |\vec{a}|^2$ или $|\vec{a}| = \sqrt{(\vec{a},\vec{a})}$,

5) векторы ортонормированного базиса удовлетворяют соотношениям $(\vec{i},\vec{i})=(\vec{j},\vec{j})=(\vec{k},\vec{k})=1,$

$$(\vec{i},\vec{j})=(\vec{j},\vec{k})=(\vec{k},\vec{i})=0.$$

Пример 2.9**.** Найти длину вектора $\vec{a}=2\vec{m}-\vec{n}$, если $|\vec{m}|=3, |\vec{n}|=2$, а угол между векторами равен 60^0.

Решение. $|\vec{a}|=\sqrt{(\vec{a},\vec{a})}=\sqrt{(2\vec{m}-\vec{n},2\vec{m}-\vec{n})}=\sqrt{4(\vec{m},\vec{m})-4(\vec{m},\vec{n})+(\vec{n},\vec{n})}=$

$$=\sqrt{4|\vec{m}|^2-4|\vec{m}||\vec{n}|\cos\left(\vec{m}\,\hat{,}\,\vec{n}\right)+|\vec{n}|^2}=\sqrt{4\cdot 3^2-4\cdot 3\cdot 2\cdot 0{,}5+2^2}=\sqrt{28}=2\sqrt{7}.$$

Из свойств скалярного произведения следует, что в ортонормированном базисе скалярное произведение векторов $\vec{a}=(x_1,y_1,z_1)$ и $\vec{b}=(x_2,y_2,z_2)$ находится по формуле:

$$(\vec{a},\vec{b})=x_1x_2+y_2y_2+z_1z_2. \qquad (2.17)$$

В частности, $\left(\vec{a},\vec{a}\right)=|\vec{a}|^2=x_1^2+y_1^2+z_1^2,$

$$|\vec{a}|=\sqrt{(\vec{a},\vec{a})}=\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}. \qquad (2.18)$$

Угол между векторами может быть найден по формуле, [23]:

$$\cos\left(\bar{a}\,\hat{,}\,\bar{b}\right)=\frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}. \qquad (2.19)$$

Пример 2.10. Найти угол при вершине *A* в треугольнике с вершинами *A*(-2, 6,7), *B*(2,-4,8), *C*(9,-2,0).

Решение. Угол при вершине А - это угол между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$. Найдем координаты этих векторов: $\overrightarrow{AB}$ =(4,-10,1) и $\overrightarrow{AC}$ =(11,-8,-7). Найдем скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$, а также длины этих векторов: $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$ =44+80-7=117, $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{16+100+1}=\sqrt{117}$, $|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{121+64+49}=\sqrt{234}$.

Значит, $\cos A=\frac{117}{\sqrt{117}\cdot\sqrt{234}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$, угол *A* равен 45^0.

Пример 2.11. Определить, при каком значении λ векторы $\vec{a} = \lambda\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$ и $\vec{b} = 4\vec{i} + \lambda\vec{j} - 7\vec{k}$ перпендикулярны.

Решение. Найдем скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, а затем приравняем его нулю.

$$(\vec{a}, \vec{b}) = 4\lambda + 3\lambda - 28 = 7\lambda - 28 = 0, \quad \lambda = 4.$$

Согласно формуле (2.14) проекция вектора $\bar{a} = (x_1, y_1, z_1)$ на вектор $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$ находится по формуле:

$$np_{\vec{b}}\vec{a} = \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{\left|\vec{b}\right|} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}. \qquad (2.20)$$

Пусть материальная точка перемещается под действием постоянной силы $\vec{F}$ вдоль вектора перемещения $\vec{s}$.

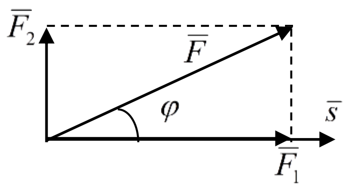


Рисунок 2.8 – Физический смысл скалярного произведения векторов

На рисунке 2.8 сила $\vec{F} = \vec{F_1} + \vec{F_2}$ разложена на две ортогональные составляющие $\vec{F_1}$ и $\vec{F_2}$, причем, из физики нам известно, что работа при перемещении материальной точки вдоль вектора $\vec{s}$ создается составляющей $\vec{F_1}$ и равна $A = \left|\vec{F_1}\right| \cdot \left|\vec{s}\right|$. С другой стороны, $\left|\vec{F_1}\right| = \left|\vec{F}\right| \cdot \cos\varphi$, откуда получаем:

$$A = \left|\vec{F_1}\right| \cdot \left|\vec{s}\right| = \left|\vec{F}\right| \cdot \left|\vec{s}\right| \cdot \cos\left(\widehat{\overline{F}, \overline{s}}\right). \qquad (2.21)$$

Скалярное произведение вектора постоянной силы $\vec{F}$ на вектор перемещения $\vec{s}$ равно работе, совершаемой силой на материальную точку.

2.7. Векторное произведение векторов

Векторным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, обозначаемый символом $[\vec{a},\vec{b}] = \vec{a} \times \vec{b}$, удовлетворяющий условиям, [26]:

1) вектор $\vec{c}$ перпендикулярен векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$;

2) векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ образуют *правую тройку векторов*, т.е. вектор $\vec{c}$ направлен так, что кратчайший поворот от $\vec{a}$ к $\vec{b}$ виден из его конца совершающимся против часовой стрелки.

3) *длина вектора* $\vec{c}$ *равна площади параллелограмма, построенного на векторах* $\vec{a}$ и $\vec{b}$, то есть

$$S = |\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi, \tag{2.22}$$

где $\varphi = \left(\widehat{\bar{a},\bar{b}}\right)$ — угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

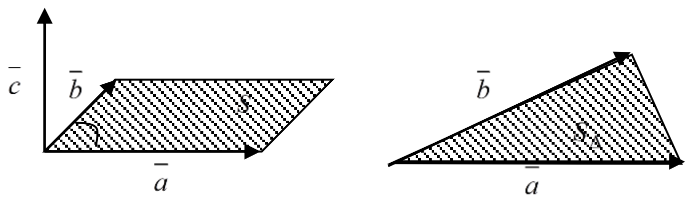


Рисунок 2.9. – Векторное произведение векторов

Векторное произведение обладает следующими свойствами:

1) $\left[\vec{a},\vec{b}\right] = -\left[\vec{b},\vec{a}\right]$;

2) $\left[\vec{a}+\vec{b},\vec{c}\right] = \left[\vec{a},\vec{c}\right] + \left[\vec{b},\vec{c}\right]$;

3) $\left[\lambda\vec{a},\vec{b}\right] = \lambda\left[\vec{a},\vec{b}\right]$;

4) *Векторное произведение равно нулю* (нуль вектору) тогда и только тогда, *когда* $\vec{a}$ и $\vec{b}$ *коллинеарны*.

5) $\left[\vec{a},\vec{a}\right]=\vec{0}$ для любого вектора $\vec{a}$.

Из первых трех свойств следует, что векторное произведение суммы векторов на вектор подчиняется обычным правилам перемножения многочленов. Надо только следить за тем, чтобы порядок следования множителей не менялся.

Пример 2.12. Упростить выражение $\left(3\bar{a}+4\bar{b}\right)\times\left(\bar{a}-3\bar{b}\right)$.

Решение. Используя свойства векторного произведения, получим:

$$\left(3\bar{a}+4\bar{b}\right)\times\left(\bar{a}-3\bar{b}\right)=3\bar{a}\times\bar{a}+4\bar{b}\times\bar{a}-9\bar{a}\times\bar{b}-12\bar{b}\times\bar{b}=3\cdot\bar{0}+4\bar{b}\times\bar{a}+9\bar{b}\times\bar{a}-12\cdot\bar{0}=13\bar{b}\times\bar{a}.$$

Пример 2.13. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}=3\vec{m}-\vec{n}$ и $\vec{b}=\vec{m}+2\vec{n}$, если $|\vec{m}|=2, |\vec{n}|=1$, а угол между векторами $\vec{m}$ и $\vec{n}$ равен 30^0.

Решение: Используя свойства векторного произведения векторов, находим:

$$[\vec{a},\vec{b}]=[3\vec{m}-\vec{n},\vec{m}+2\vec{n}]=3[\vec{m},\vec{m}]+6[\vec{m},\vec{n}]-[\vec{n},\vec{m}]-2[\vec{n},\vec{n}]=7[\vec{m},\vec{n}].$$

$$S=\left|[\vec{a},\vec{b}]\right|=7\left|[\vec{m},\vec{n}]\right|=7|\vec{m}|\cdot|\vec{n}|\sin 30^0=7\cdot 2\cdot 1\cdot 0{,}5=7.$$

Из определения и свойств векторного произведения следует:

$$\bar{i}\times\bar{i}=\bar{j}\times\bar{j}=\bar{k}\times\bar{k}=\bar{0},\ \bar{j}\times\bar{i}=-\bar{k},\ \bar{k}\times\bar{j}=-\bar{i},\ \bar{i}\times\bar{k}=-\bar{j}. \quad (2.23)$$

Можно использовать таблицу векторного произведения векторов-орт $\bar{i}$, $\bar{j}$ и $\bar{k}$.

	$\bar{i}$	$\bar{j}$	$\bar{k}$
$\bar{i}$	$\bar{0}$	$\bar{k}$	$-\bar{j}$
$\bar{j}$	$-\bar{k}$	$\bar{0}$	$\bar{i}$
$\bar{k}$	$\bar{j}$	$-\bar{i}$	$\bar{0}$

Векторное произведение векторов $\vec{a}=(x_1,y_1,z_1)$ и $\vec{b}=(x_2,y_2,z_2)$ в прямоугольной системе координат находится по формуле:

$$\left[\vec{a},\vec{b}\right]=\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}. \qquad (2.24)$$

Пример 2.14. Вычислить площадь треугольника, построенного на векторах $\bar{a}=6\bar{i}+3\bar{j}-2\bar{k}$ и $\bar{b}=3\bar{i}-2\bar{j}+6\bar{k}$, как на сторонах.

*Решение***.** Найдем векторное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ с помощью формулы (2.24):

$$\bar{a}\times\bar{b}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 6 & 3 & -2\\ 3 & -2 & 6\end{vmatrix}=\bar{i}\begin{vmatrix}3 & -2\\ -2 & 6\end{vmatrix}-\bar{j}\begin{vmatrix}6 & -2\\ 3 & 6\end{vmatrix}+\bar{k}\begin{vmatrix}6 & 3\\ 3 & -2\end{vmatrix}=$$

$$=(18-4)\bar{i}-(36+6)\bar{j}+(-12-9)\bar{k}=14\bar{i}-42\bar{j}-21\bar{k}.$$

Так как модуль векторного произведения двух векторов равен площади построенного на них параллелограмма, то площадь треугольника будет равна половине его модуля:

$$S=\frac{1}{2}\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)=\frac{1}{2}\sqrt{14^2+(-42)^2+(-21)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{196+1764+441}=\frac{1}{2}\sqrt{2401}=\frac{49}{2}.$$

Физический смысл векторного произведения векторов заключается в следующем: Если сила $\vec{F}$ приложена к материальной точке *P*, характеризуемой радиусом-вектором $\bar{r}$, то *момент силы относительно точки начала координат равен векторному произведению векторов* $\vec{r}$ и $\vec{F}$, то есть $\overline{M}=\bar{r}\times\overline{F}$.

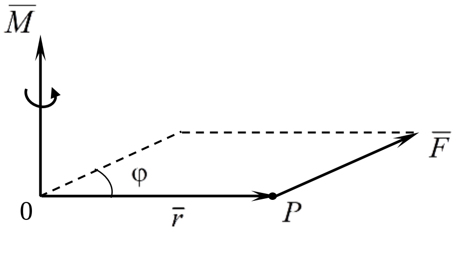


Рисунок 2.9. – Физический смысл векторного произведения векторов

2.8. Смешанное произведение векторов

Смешанным или *векторно-скалярным* произведением трех векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ называется число, равное скалярному произведению вектора $\vec{a}$ на векторное произведение $\left[\vec{b}, \vec{c}\right]$, [8]:

$$\left(\bar{a} \times \bar{b}\right) \cdot \bar{c} = \left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right) \tag{2.25}$$

Смешанное произведение векторов обладает следующими свойствами:

1) при циклической перестановке сомножителей смешанное произведение не меняется:

$$\left(\bar{a} \times \bar{b}\right) \cdot \bar{c} = \left(\bar{b} \times \bar{c}\right) \cdot \bar{a} = \left(\bar{c} \times \bar{a}\right) \cdot \bar{b};$$

2) при перемене мест любых двух векторов – сомножителей смешанное произведение меняет свой знак:

$$\overline{abc} = -\overline{acb}, \ \overline{abc} = -\overline{bac}, \ \overline{abc} = -\overline{cba};.$$

3) *смешанное произведение ненулевых векторов равно нулю тогда и только тогда, когда векторы компланарны*, т.е. условие компланарности векторов запишется:

$$\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right) = 0; \tag{2.26}$$

4) смешанное произведение по модулю равно объему параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

$$V_{пар} = \left|\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right)\right|. \tag{2.27}$$

Объем пирамиды, построенной на трех векторах, находится по формуле:

$$V_{пир} = \frac{1}{6}\left|\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right)\right|. \tag{2.28}$$

В прямоугольной системе координат смешанное произведение векторов $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$, $\vec{c} = (x_3, y_3, z_3)$ находится как значение определителя, составленного из координат векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$:

$$(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}. \qquad (2.29)$$

Пример 2.16. При каком значении m векторы $\bar{a} = m\bar{i} + 2\bar{j} - 4\bar{k}$, $\bar{b} = 2\bar{i} - 3\bar{j} + m\bar{k}$ и $\bar{c} = 3\bar{i} - 2\bar{j} + 4\bar{k}$ компланарны?

Решение. Воспользуемся условием компланарности трех векторов (2.26) и формулой (2.29):

$$\begin{vmatrix} m & 2 & -4 \\ 2 & -3 & m \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} m & 2 & -4 \\ 2 & -3 & m \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 4\cdot(-3)m + 2\cdot(-2)(-4) + 2\cdot 3\cdot m - \left(3(-3)(-4) - 2m^2 + 2\cdot 2\cdot 4\right) =$$

$$= -12m + 16 + 6m - 36 + 2m^2 - 16 = 2m^2 - 6m - 36 = 0 \quad \Rightarrow \quad m^2 - 3m - 18 = 0.$$

$$m_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4\cdot(-18)}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{81}}{2} = \frac{3 \pm 9}{2},\ m_1 = -3,\ m_2 = 6.$$

Итак, при $m = -3$ и $m = 6$ векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ компланарны.

Пример 2**.**17. Вершинами пирамиды служат точки $A(2, 2, 2)$, $B(4, 3, 3)$, $C(4, 5, 4)$ и $D(5, 5, 6)$. Найти объем пирамиды.

*Решение***.** Найдем координаты векторов $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ и $\overline{AD}$, совпадающих с ребрами пирамиды, исходящими из вершины A.

$$\overline{AB} = (4-2, 3-2, 3-2) = \overrightarrow{AB} = (2,1,1),$$
$$\overline{AC} = (4-2, 5-2, 4-2) = \overrightarrow{AC} = (2,3,2),$$
$$\overline{AD} = \left(5-2, 5-2, 6-2\right) = \overrightarrow{AD} = (3,3,4).$$

Находим смешанное произведение векторов $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ и $\overline{AD}$ по формуле (2.29):

$$\overline{AB}\,\overline{AC}\,\overline{AD} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 2\cdot 3\cdot 4 + 2\cdot 3\cdot 1 + 1\cdot 2\cdot 3 - (3\cdot 3\cdot 1 + 2\cdot 1\cdot 4 +$$
$$3\cdot 2\cdot 2 = 24 + 6 + 6 - 9 - 8 - 12 = 36 - 29 = 7.$$

Тогда объем пирамиды по формуле (2.28) равен $V_{пир} = \frac{1}{6}\cdot 7 = \frac{7}{6}$.

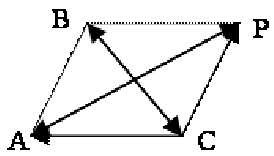
Вопросы для самопроверки

1. Понятие вектора. Равные, коллинеарные и компланарные векторы.
2. Линейные операции над векторами, их свойства.
3. Линейно-зависимые и независимые векторы. Базис.
4. Декартова прямоугольная система координат.
5. Разложение вектора по ортам. Координаты вектора.
6. Координаты вектора через координаты точек, являющихся началом и концом этого вектора.
7. Проекция вектора на ось и на оси координат. Свойства проекции.
8. Линейные операции векторов, заданных своими координатами.
9. Условие коллинеарности векторов.
10. Направляющие косинусы вектора.
11. Скалярное произведение векторов, его свойства.
12. Выражение скалярного произведения через координаты векторов
13. Условие перпендикулярности векторов.
14. Физический смысл скалярного произведения векторов.
15. Нахождение угла между векторами.
16. Векторное произведение векторов, его свойства.
17. Выражение векторного произведения через координаты векторов.
18. Геометрический смысл векторного произведения двух векторов.
19. Физический смысл векторного произведения двух векторов.
20. Смешанное произведение векторов, его свойства.
21. Условие компланарности векторов.
22. Геометрический смысл смешанного произведения трех векторов.

ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ № 5

«Векторная алгебра» (теория)

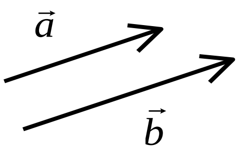
5.1. Вектор суммы векторов $\overrightarrow{AB}$ и ` $\overrightarrow{AC}$ равен:



1) $\overline{BC}$ 2) $\overline{CB}$ 3) $\overline{AP}$ 4) $\overline{BP}$ 5) $\overline{CP}$

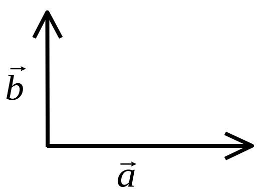
5.2. Установите соответствие между изображенными векторами и их названиями.

1.



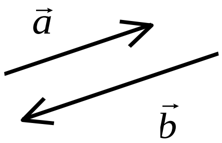
$\vec{a}$ и $\vec{b}$?

2.



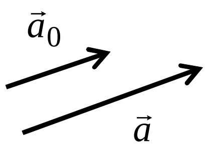
$\vec{a}$ и $\vec{b}$?

3.



$\vec{a}$ и $\vec{b}$?

4.



$$|\vec{a}_0| = \frac{1}{|\vec{a}|}$$

$\vec{a}_0 - ?$

А. противоположные векторы;

Б. ортогональные векторы;

В. коллинеарные векторы;

Г. сонаправленные векторы;

Д. единичный вектор;

Е.равные векторы.

Ответ: 1___; 2___; 3___; 4___.

5. 3. К линейным операциям над векторами относится:

1) скалярное произведение;   2) векторное произведение;

3) сумма и разность;   4) смешанное произведение;

5) умножение вектора на число.

5.4. Нулевой вектор по отношению к любому другому:

1) линейно зависим; 2) линейно независим;
3) параллелен; 4) сонаправлен;
5) противоположен; 6) ортогонален.

5.5. Даны два вектора (рис. 1):

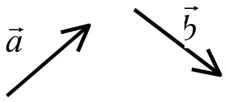


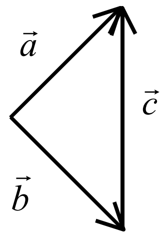
Рисунок 1

Установите соответствие между изображенными векторами и их геометрическими представлениями

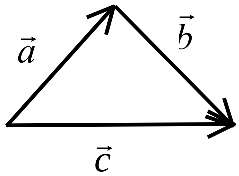
1. $\vec{a}+\vec{b}$;

2. $\vec{a}-\vec{b}$.

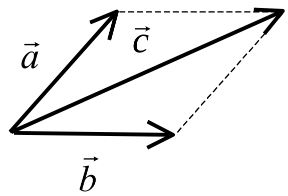
А.



Б.



В.



Ответ: 1___; 2___.

5.6. Сумму двух неколлинеарных векторов можно находить по правилу:

1) Пифагора; 2) треугольника; 3) «буравчика»;
4) Лапласа; 5) параллельных прямых.

5.7. Какие из следующих величин являются векторными?

1) давление, температура; 2) скорость, сила; 3) длина, работа;

4) площадь, объем; 5) ускорение; 6) момент силы.

5.8. Компланарные векторы изображены на рисунках:

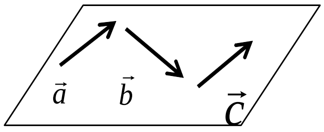


Рисунок 1

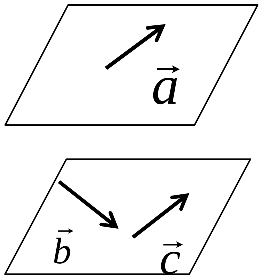


Рисунок 2

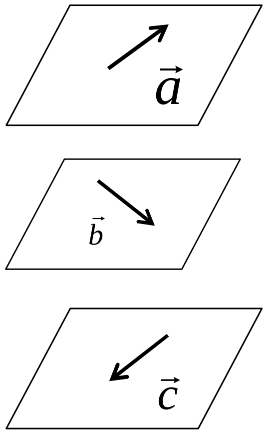


Рисунок 3

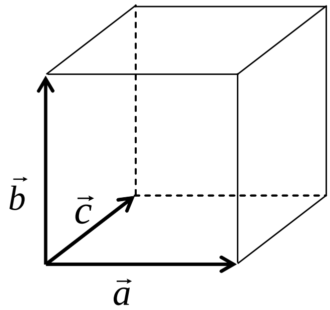
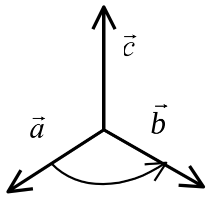
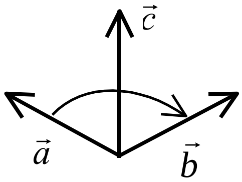
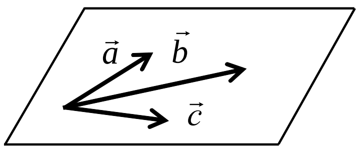


Рисунок 4

5.9. Установите взаимное соответствие

1. 

1. 

3. 

А. компланарные векторы;

Б. левая тройка векторов;

В. правая тройка векторов.

Ответ: 1___; 2___; 3___.

5.10. Установите соответствие:

Понятие	Определение
1. вектор	А. векторы, лежащие на перпендикулярных прямых;
	Б. векторы, лежащие в одной плоскости или в параллельных плоскостях;
	В. векторы, лежащие на одной прямой или на параллельных прямых;
2. орт	Г. векторы, лежащие в пересекающихся плоскостях
3. нулевой вектор	Д. векторы, лежащие на скрещивающихся прямых;
4. коллинеарные векторы	Е. вектор, длина которого равна единице;
5. компланарные векторы	Ж. единичный вектор, направление которого совпадает с данной осью координат;
	З. направленный отрезок.

Ответ: 1___; 2___; 3___; 4___; 5___.

5.11. Длину вектора $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ находят по формуле:

1) $|\vec{a}| = a_x + a_y + a_z$; 2) $|\vec{a}| = \sqrt{a_x \cdot a_y \cdot a_z}$; 3) $|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$;

4) $|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 - a_y^2 - a_z^2}$; 5) $|\vec{a}| = \sqrt{a_z^2 - a_y^2 - a_x^2}$.

5.12. Проекция вектора $\bar{a}$ на ось $\bar{l}$ равна нулю, если вектор и ось:

1) сонаправлены; 2) противоположно направлены;
3) перпендикулярны; 4) параллельны;
5) лежат в одной плоскости; 6) лежат на одной прямой.

5.13. Скалярным произведением двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число, равное:

1) $|\bar{a}|+|\bar{b}|$ 2) $|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cdot\cos\alpha$ 3) $|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|$ 4) $|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cdot\sin\alpha$
5) $|\bar{a}|\cdot np_{\bar{b}}\,\bar{a}$ 6) $|\bar{b}|\cdot np_{\bar{a}}\,\bar{b}$ 7) $|\bar{b}|\cdot np_{\bar{b}}\,\bar{a}$ 8) 0.

5.14. Скалярное произведение двух векторов отрицательно. Следовательно, эти векторы:

1) коллинеарны; 2) ортогональны; 3) образуют острый угол;
4) образуют тупой угол; 5) противоположно направлены;
6) такая ситуация невозможна.

5.15. Если для двух ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ выполняется условие $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|$, то это равносильно условию…

1) $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$ 2) $\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{b}$ 3) $|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$ 4) $\vec{a}\perp\vec{b}$.

5.16. Угол α между векторами $\vec{a}=(x_1,y_1,z_1)$ и $\vec{b}=(x_2,y_2,z_2)$ можно определить из формулы:

1) $\cos\alpha=\dfrac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}$ 2) $\sin\alpha=\dfrac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}+\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}$

3) $\cos\alpha=\dfrac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1+y_1+z_1}\cdot\sqrt{x_2+y_2+z_2}}$ 4) $\sin\alpha=\dfrac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}$

5) $\cos\alpha=\dfrac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}+\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}$ 6) $tg\alpha=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$.

5.17. Даны точки $M\,(x_1, y_1, z_1)$, $K\,(x_2, y_2, z_2)$. Тогда координаты вектора $\overrightarrow{KM}$ равны:

1) $(x_1-x_2,\ y_1-y_2,\ z_1-z_2)$; 2) $(x_2-x_1,\ y_2-y_1,\ z_2-z_1)$;

3) $\left(\dfrac{x_1+x_2}{2},\dfrac{y_1+y_2}{2},\dfrac{z_1+z_2}{2}\right)$; 4) $\left(\dfrac{x_2-x_1}{2},\dfrac{y_2-y_1}{2},\dfrac{z_2-z_1}{2}\right)$..

5.18. Направляющие косинусы вектора удовлетворяют условию:

1) $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma \angle 1$; 2) $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$;
3) $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma > 1$; 4) $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 0$.

5.19. Для векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ справедливо равенство ($\vec{a}$, $\vec{b}$) = $\vec{a}$, следовательно:

1) $\vec{a}$ - нулевой вектор;
2) $\vec{a}$ - единичный вектор;
3) векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ перпендикулярны;
4) векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ параллельны;
5) векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ противоположно направлены;
6) такая ситуация невозможна.

5.20. Векторное произведение двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ есть:

1) вектор, обозначаемый $[\vec{a}\,\vec{b}]$, ортогональный к векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, длина которого равна $|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\sin\widehat{\vec{a}\,\vec{b}}$;
2) вектор, обозначаемый $[\vec{a}\,\vec{b}]$, компланарный с векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ единичной длины;
3) вектор, обозначаемый $[\vec{a}\,\vec{b}]$, параллельный векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$;
4) скаляр, определяемый равенством $|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\widehat{\vec{a}\,\vec{b}}$ и обозначаемый $\vec{a}\cdot\vec{b}$, либо $(\vec{a}, \vec{b})$;
5) скаляр, численно равный площади треугольника построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, исходящих из общего начала.

5.21. Если $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$, $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$, то векторное произведение $\left[\vec{a}, \vec{b}\right]$ равно:

1) $a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$;
2) $a_x b_x \vec{i} + a_y b_y \vec{j} + a_z b_z \vec{k}$;
3) $\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$;
4) $\begin{vmatrix} \vec{i} & a_x & b_x \\ \vec{j} & a_y & b_y \\ k & a_z & b_z \end{vmatrix}$.

5.22. Для векторного произведения $\left[\vec{a},\vec{b}\right]$ справедливы свойства:

1) $\left[\vec{a},\vec{b}\right] = \left[\vec{b},\vec{a}\right]$, $\left[\vec{a},\vec{a}\right] = 0$; 2) $\left[\vec{a},\vec{b}\right] = -\left[\vec{b},\vec{a}\right]$, $\left[\vec{a},\vec{a}\right] = 0$;

3) $\left[\vec{a},\vec{b}\right] = -\left[\vec{b},\vec{a}\right]$, $\left[\vec{a},\vec{a}\right] = \left|\vec{a}\right|^2$; 4) $\left[\vec{a},\vec{b}\right] = \left[\vec{b},\vec{a}\right]$, $\left[\vec{a},\vec{a}\right]$ не существует.

5.23. Площадь треугольника, построенного на двух векторах, приведенных к общему началу, равна:

1) скалярному произведению этих векторов;
2) разности длин этих векторов;
3) произведению длин этих векторов;
4) половине длины вектора векторного произведения этих векторов;
5) модулю вектора векторного произведения этих векторов.

5.24. Смешанное произведение векторов $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ есть:

1) вектор, длина которого равна $|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cdot|\bar{c}|$; 2) число $|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cdot|\bar{c}|$;
3) число, равное $\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\cdot\bar{c}$; 4) число $\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}$;
5) вектор, перпендикулярной всем трем векторам;
6) нет правильного ответа.

5.25. Если $\vec{a}\vec{b}\vec{c} < 0$, то векторы $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ …

1) образуют левую тройку; 2) образуют правую тройку;
3) лежат в одной плоскости; 4) попарно коллинеарные;
5) лежат в скрещивающихся плоскостях.

5.26. Модуль смешанного произведения векторов равен;

1) объему тетраэдра; 2) объему пирамиды;
3) объему параллелепипеда; 4) площади треугольника;
5) площади параллелограмма; 6) площади многоугольника.

5.27. По векторному произведению векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ находят физическую величину:

1) силу, действующую на точку общего начала векторов;
2) работу силы, действующей на точку общего начала векторов;
3) момент силы, относительно точки общего начала векторов;
4) давление, оказываемое вектором $\vec{a}$ на $\vec{b}$;
5) скорость движения вектора $\vec{a}$ вдоль вектора $\vec{b}$;
6) ускорение движения вектора $\vec{a}$ параллельно вектору $\vec{b}$.

5.28. Смешанное произведение векторов $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1), \vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$, $\vec{c} = (x_3, y_3, z_3)$ в координатной форме вычисляется по формуле:

1) $\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$ 2) $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$

3) $x_1x_2x_3 + y_1y_2y_3 + z_1z_2z_3$; 4) $x_1y_1z_1\vec{i} + x_2y_2z_2\vec{j} + x_3y_3z_3\vec{k}$;

5) $x_1y_1z_1 + x_2y_2z_2 + x_3y_3z_3$; 6) $x_1x_2x_3\vec{i} + y_1y_2y_3\vec{j} + z_1z_2z_3\vec{k}$.

5.29. Установить соответствие: Даны векторы $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1), \vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$,

Выражение	Определяет
1. $\frac{x_2}{x_1} = \frac{y_2}{y_1} = \frac{z_2}{z_1}$	А. Условие ортогональности векторов
2. $\frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}}$	Б. Условие коллинеарности векторов
3. $x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0$	В. Скалярное произведение векторов
4. $\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}}$	Г. Векторное произведение векторов
	Д. Проекцию вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$
	Е. Проекцию вектора $\vec{b}$ на вектор $\vec{a}$
	Ж. Направляющий косинус угла вектора $\vec{a}$ с осью Ox
	З. Направляющий косинус угла вектора $\vec{b}$ с осью Ox.

Ответ: 1___; 2___; 3___; 4___.

5.30. Высота пирамиды, построенной на трех векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ определится по формуле:

1) $h = \frac{\left|\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{c}\right|}{3\left|\vec{a} \times \vec{b}\right|}$; 2) $h = \frac{\left|\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{c}\right|}{\left|\vec{a} \times \vec{b}\right|}$; 3) $h = \frac{\left|\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{c}\right|}{\left|\vec{a} \cdot \vec{b}\right|}$;

4) $h = \frac{\left|\left(\vec{a} \times \vec{c}\right) \cdot \vec{b}\right|}{2\left|\vec{a} \times \vec{c}\right|}$; 5) $h = \frac{\left|\left(\vec{c} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{a}\right|}{\left|\vec{c} \times \vec{b}\right|}$; 6) $h = \frac{\left|\left(\vec{b} \times \vec{a}\right) \cdot \vec{c}\right|}{2\left|\vec{b} \times \vec{a}\right|}$.

Контрольная работа № 2 «Векторная алгебра»

Задание 1. Доказать, что векторы $\bar{a},\bar{b}$ и $\bar{c}$ образуют базис и найти координаты вектора $\bar{d}$ в этом базисе

1.1. $\bar{a}=(-1,4,3)$, $\bar{b}=(3,2,-4)$, $\bar{c}=(-2,-7,1)$, $\bar{d}=(6,20,-3)$.

1.2. $\bar{a}=(2,-1,4)$, $\bar{b}=(-3,0,-2)$, $\bar{c}=(4,5,-3)$, $\bar{d}=(0,11,-14)$.

1.3. $\bar{a}=(7,2,1)$, $\bar{b}=(5,1,-2)$, $\bar{c}=(-3,4,5)$, $\bar{d}=(26,11,1)$.

1.4. $\bar{a}=(3,1,2)$, $\bar{b}=(-7,-2,-4)$, $\bar{c}=(-4,0,3)$, $\bar{d}=(16,6,15)$.

1.5. $\bar{a}=(5,3,1)$, $\bar{b}=(-1,2,-3)$, $\bar{c}=(3,-4,2)$, $\bar{d}=(-9,34,-20)$.

1.6. $\bar{a}=(5,4,1)$, $\bar{b}=(-3,5,2)$, $\bar{c}=(2,-1,3)$, $\bar{d}=(7,23,4)$.

1.7. $\bar{a}=(1,3,4)$, $\bar{b}=(-2,0,5)$, $\bar{c}=(3,-2,-4)$, $\bar{d}=(13,-5,-4)$.

1.8. $\bar{a}=(0,2,-3)$, $\bar{b}=(4,-3,-2)$, $\bar{c}=(-5,-4,0)$, $\bar{d}=(-19,-5,-4)$.

1.9. $\bar{a}=(3,-1,2)$, $\bar{b}=(-2,3,1)$, $\bar{c}=(4,-5,-3)$, $\bar{d}=(-3,2,-3)$.

1.10. $\bar{a}=(3,1,-3)$, $\bar{b}=(-2,4,1)$, $\bar{c}=(1,-2,5)$, $\bar{d}=(1,12,-20)$.

1.11. $\bar{a}=(3,1,-3)$, $\bar{b}=(-3,2,1)$, $\bar{c}=(-1,-3,4)$, $\bar{d}=(15,6,-17)$.

1.12. $\bar{a}=(4,2,3)$, $\bar{b}=(-3,1,-8)$, $\bar{c}=(2,-4,5)$, $\bar{d}=(-12,14,-31)$.

1.13. $\bar{a}=(-2,1,3)$, $\bar{b}=(3,-6,21)$, $\bar{c}=(-5,-3,-1)$, $\bar{d}=(31,-6,22)$.

1.14. $\bar{a}=(3,5,4)$, $\bar{b}=(-2,7,-5)$, $\bar{c}=(6,-2,1)$, $\bar{d}=(6,-9,22)$.

1.15. $\bar{a}=(5,3,2)$, $\bar{b}=(2,-5,1)$, $\bar{c}=(-7,4,-3)$, $\bar{d}=(36,1,15)$.

1.16. $\bar{a}=(7,2,1)$, $\bar{b}=(3,-5,6)$, $\bar{c}=(-4,3,-4)$, $\bar{d}=(-1,18,-16)$.

1.17. $\bar{a}=(1,2,3)$, $\bar{b}=(-5,3,-1)$, $\bar{c}=(-6,4,5)$, $\bar{d}=(-4,11,20)$.

1.18. $\bar{a}=(3,-1,2)$, $\bar{b}=(-2,4,1)$, $\bar{c}=(4,-5,-1)$, $\bar{d}=(-5,11,1)$.

1.19. $\bar{a}=(4,5,1)$, $\bar{b}=(1,3,1)$, $\bar{c}=(-3,-6,7)$, $\bar{d}=(19,33,0)$.

1.20. $\bar{a}=(1,-3,1)$, $\bar{b}=(-2,-4,3)$, $\bar{c}=(0,-2,3)$, $\bar{d}=(-8,-10,13)$.

Задание 2. Коллинеарны ли векторы $\overline{c_1}$ и $\overline{c_2}$, построенные по векторам $\bar{a}$ и $\bar{b}$?

2.1. $\bar{c}_1 = 2\bar{a} + 4\bar{b}$, $\bar{c}_2 = 3\bar{b} - \bar{a}$, $\bar{a} = (1,-2,3)$, $\bar{b} = (3,0,-1)$.

2.2. $\bar{c}_1 = \bar{a} + 2\bar{b}$, $\bar{c}_2 = 3\bar{a} - \bar{b}$, $\bar{a} = (1,0,1)$, $\bar{b} = (-2,3,5)$.

2.3. $\bar{c}_1 = 5\bar{a} + 3\bar{b}$, $\bar{a} = (-2,4,1)$, $\bar{a} = (-2,4,1)$, $\bar{b} = (1,-2,7)$.

2.4. $\bar{c}_1 = 4\bar{a} + 3\bar{b}$, $\bar{c}_2 = 8\bar{a} - \bar{b}$, $\bar{a} = (1,2,-3)$, $\bar{b} = (2,-1,-1)$.

2.5. $\bar{c}_1 = -2\bar{a} + \bar{b}$, $\bar{c}_2 = 3\bar{a} - 2\bar{b}$, $\bar{a} = (3,5,4)$, $\bar{b} = (5,9,7)$.

2.6. $\bar{c}_1 = \bar{a} + \bar{b}$, $\bar{c}_2 = 4\bar{a} + 2\bar{b}$, $\bar{a} = (1,4,-2)$, $\bar{b} = (1,1,-1)$.

2.7. $\bar{c}_1 = 4\bar{a} - 2\bar{b}$, $\bar{c}_2 = -2\bar{a} + \bar{b}$, $\bar{a} = (1,-2,5)$, $\bar{b} = (3,-1,0)$.

2.8. $\bar{c}_1 = 6\bar{a} - 3\bar{b}$, $\bar{c}_2 = -2\bar{a} + \bar{b}$, $\bar{a} = (3,4,-1)$, $\bar{b} = (2,-1,0)$.

2.9. $\bar{c}_1 = 3\bar{a} + 9\bar{b}$, $\bar{c}_2 = -\bar{a} - 3\bar{b}$, $\bar{a} = (-2,-3,-2)$, $\bar{b} = (1,0,5)$.

2.10. $\bar{c}_1 = 2\bar{a} - \bar{b}$, $\bar{c}_2 = -6\bar{a} + 3\bar{b}$, $\bar{a} = (-1,4,2)$, $\bar{b} = (3,-2,6)$.

2.11. $\bar{c}_1 = 2\bar{a} - \bar{b}$, $\bar{c}_2 = 3\bar{a} - 3\bar{b}$, $\bar{a} = (5,0,-1)$, $\bar{b} = (7,2,3)$.

2.12. $\bar{c}_1 = 5\bar{a} - 2\bar{b}$, $\bar{c}_2 = 3\bar{a} + 5\bar{b}$, $\bar{a} = (0,3,-1)$, $\bar{b} = (1,-2,1)$.

2.13. $\bar{c}_1 = 2\bar{a} + 3\bar{b}$, $\bar{c}_2 = 3\bar{a} + 2\bar{b}$, $\bar{a} = (-2,7,-1)$, $\bar{b} = (-3,5,2)$.

2.14. $\bar{c}_1 = 4\bar{a} - 2\bar{b}$, $\bar{c}_2 = -2\bar{a} + \bar{b}$, $\bar{a} = (3,7,0)$, $\bar{b} = (1,-3,4)$.

2.15. $\bar{c}_1 = 6\bar{a} - 2\bar{b}$, $\bar{c}_2 = -3\bar{a} + \bar{b}$, $\bar{a} = (-1,2,-1)$, $\bar{b} = (2,-7,1)$.

2.16. $\bar{c}_1 = 4\bar{a} - \bar{b}$, $\bar{c}_2 = -\bar{a} + 4\bar{b}$, $\bar{a} = (7,9,-2)$, $\bar{b} = (5,4,3)$.

2.17. $\bar{c}_1 = 5\bar{a} - 3\bar{b}$, $\bar{c}_2 = -10\bar{a} + 6\bar{b}$, $\bar{a} = (5,0,-2)$, $\bar{b} = (6,4,3)$.

2.18. $\bar{c}_1 = 2\bar{a} - \bar{b}$, $\bar{c}_2 = 2\bar{a} - 4\bar{b}$, $\bar{a} = (8,3,-1)$, $\bar{b} = (4,1,3)$.

2.19. $\bar{c}_1 = 4\bar{a} - 2\bar{b}$, $\bar{c}_2 = -2\bar{a} + \bar{b}$, $\bar{a} = (3,-1,6)$, $\bar{b} = (5,7,10)$.

2.20. $c_1 = 6\bar{a} - 3\bar{b}$, $\bar{c}_2 = -2\bar{a} + \bar{b}$, $\bar{a} = (1,-2,4)$, $\bar{b} = (7,3,5)$.

Задание 3. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a}$, $\bar{b}$, найти длину вектора $\bar{b}$.

3.1. $\vec{a} = 10\vec{p} + \vec{q}$ и $\vec{b} = 3\vec{p} - 2\vec{q}$, $|\vec{p}|=4$, $|\vec{q}|=1$, $(\vec{p}\wedge\vec{q}) = \pi/6$;

3.2. $\vec{a} = 6\vec{p} - \vec{q}$ и $\vec{b} = \vec{p} + \vec{q}$, $|\vec{p}|=3$, $|\vec{q}|=4$, $(\vec{p}\wedge\vec{q}) = \pi/4$;

3.3. $\vec{a} = 7\vec{p} - 2\vec{q}$ и $\vec{b} = \vec{p} + 3\vec{q}$, $|\vec{p}|=1/2$, $|\vec{q}|=2$, $(\vec{p}\wedge\vec{q}) = \pi/2$;

3.4. $\vec{a} = 5\vec{p} + \vec{q}$ и $\vec{b} = \vec{p} - 3\vec{q}$, $|\vec{p}|=1$, $|\vec{q}|=2$, $(\vec{p}\wedge\vec{q}) = \pi/3$;

3.5. $\vec{a} = 2\vec{p} - 3\vec{q}$ и $\vec{b} = 3\vec{p} + \vec{q}$, $|\vec{p}|=4$, $|\vec{q}|=1$, $(\vec{p}\wedge\vec{q}) = \pi/6$;

3.6. $\vec{a} = 2\vec{p} + 3\vec{q}$ и $\vec{b} = \vec{p} - 2\vec{q}$, $|\vec{p}|=2$, $|\vec{q}|=3$, $(\vec{p}\wedge\vec{q}) = \pi/4$;

3.7. $\vec{a} = 3\vec{p} - \vec{q}$ и $\vec{b} = \vec{p} + 2\vec{q}$, $|\vec{p}|=3$, $|\vec{q}|=4$, $(\vec{p}\wedge\vec{q}) = \pi/3$;

3.8. $\vec{a} = 2\vec{p} + 3\vec{q}$ и $\vec{b} = \vec{p} - 2\vec{q}$, $|\vec{p}|=6$, $|\vec{q}|=7$, $(\vec{p}\wedge\vec{q}) = \pi/3$;

3.9. $\vec{a} = 4\vec{p} - \vec{q}$ и $\vec{b} = \vec{p} + 2\bar{q}$, $|\vec{p}|=5$, $|\vec{q}|=4$, $(\vec{p}\wedge\vec{q}) = \pi/4$;

3.10. $\vec{a} = 3\vec{p} + 2\vec{q}$ и $\vec{b} = \vec{p} - \vec{q}$, $|\vec{p}| = 10$, $|\vec{q}| = 1$, $(\vec{p}\wedge\vec{q}) = \pi/2$;

3.11. $\bar{a}= \bar{p} + 4\bar{q}$, $\bar{b}=2\bar{p} - \bar{q}$, $|\bar{p}|=7$, $|\bar{q}|=2$, $(\bar{p}\,\hat{}\,\bar{q})=\pi/4$;

3.12. $\bar{a}= \bar{p} - 4\bar{q}$, $\bar{b}=3\bar{p} + \bar{q}$, $|\bar{p}|=1$, $|\bar{q}|=2$, $(\bar{p}\,\hat{}\,\bar{q})=\pi/6$;

3.13. $\bar{a}=4\bar{p} + \bar{q}$, $\bar{b}= \bar{p} - \bar{q}$, $|\bar{p}|=7$, $|\bar{q}|=2$, $(\bar{p}\,\hat{}\,\bar{q})=\pi/4$;

3.14. $\bar{a} =2\bar{p} - \bar{q}$, $\bar{b}= \bar{p} +3\bar{q}$, $|\bar{p}|=3$, $|\bar{q}|=2$, $(\bar{p}\,\hat{}\,\bar{q})=\pi/2$;

3.15. $\bar{a}= \bar{p} + 3\bar{q}$, $\bar{b}= \bar{p} - 2\bar{q}$, $|\bar{p}|=2$, $|\bar{q}|=3$, $(\bar{p}\,\hat{}\,\bar{q})=\pi/3$;

3.16. $\bar{a}= \bar{p} - 2\bar{q}$, $\bar{b}=2\bar{p} + \bar{q}$, $|\bar{p}|=2$, $|\bar{q}|=3$, $(\bar{p}\,\hat{}\,\bar{q})=3\pi/4$;

3.17. $\bar{a}=3\bar{p} -2\bar{q}$, $\bar{b}= \bar{p} +5\bar{q}$, $|\bar{p}|=4$, $|\bar{q}|=1/2$, $(\bar{p}\,\hat{}\,\bar{q})=5\pi/6$;

3.18. $\bar{a}= \bar{p} - 3\bar{q}$, $\bar{b}= \bar{p} +2\bar{q}$, $|\bar{p}|=1/5$, $|\bar{q}|=1$, $(\bar{p}\,\hat{}\,\bar{q})=\pi/2$;

3.19. $\bar{a}=3\bar{p} + \bar{q}$, $\bar{b}= \bar{p} - 2\bar{q}$, $|\bar{p}|=4$, $|\bar{q}|=1$, $(\bar{p}\,\hat{}\,\bar{q})=\pi/4$;

3.20. $\bar{a}= \bar{p} + 2\bar{q}$, $\bar{b}=3\bar{p} - \bar{q}$, $|\bar{p}|=1$, $|\bar{q}|=2$, $(\bar{p}\,\hat{}\,\bar{q})=\pi/6$.

Задание 4. Вершины пирамиды находятся в точках *A, B, C* и *D*. Вычислить: а) площадь указанной грани; б) объем пирамиды

4.1. $A(-4,-2,-3)$, $B(2,5,7)$, $C(6,3,-1)$, $D(6,-4,1)$, ACD.

4.2. $A(4,2,3)$, $B(-5,-4,2)$, $C(5,7,-4)$, $D(6,4,-7)$, ABD.

4.3. $A(3,5,3)$, $B(-3,2,8)$, $C(-3,-2,6)$, $D(7,8,-2)$, ACD.

4.4. $A(-9,-7,4)$, $B(-4,3,-1)$, $C(5,-4,2)$, $D(3,4,4)$, BCD.

4.5. $A(4,3,1)$, $B(2,7,5)$, $C(-4,-2,4)$, $D(2,-3,-5)$, ACD.

4.6. $A(-8,2,7)$, $B(3,-5,9)$, $C(2,4,-6)$, $D(4,6,-5)$, ACD.

4.7. $A(7,4,2)$, $B(-5,3,-9)$, $C(1,-5,3)$, $D(7,-9,1)$, ABD.

4.8. $A(-6,-3,-5)$, $B(5,1,7)$, $C(3,5,-1)$, $D(4,-2,9)$, ACD.

4.9. $A(-2,-5,-1)$, $B(-6,-7,9)$, $C(4,-5,1)$, $D(2,1,4)$, BCD.

4.10. $A(5,2,7)$, $B(7,-6,-9)$, $C(-7,-6,3)$, $D(1,-5,2)$, ABD.

4.11. $A(-7,-6,-5)$, $B(5,1,-3)$, $C(8,-4,0)$, $D(4,3,-7)$, BCD.

4.12. $A(5,-4,4)$, $B(-4,-6,5)$, $C(3,2,-7)$, $D(6,2,-9)$, ABD.

4.13. $A(5,3,6)$, $B(-3,-4,4)$, $C(5,-6,8)$, $D(4,0,-3)$, BCD.

4.14. $A(5,2,4)$, $B(-3,5,-7)$, $C(1,-5,8)$, $D(9,-3,5)$, ABD.

4.15. $A(-4,-5,-3)$, $B(3,1,2)$, $C(5,7,-6)$, $D(6,-1,5)$, ACD.

4.16. $A(-4,-7,-3)$, $B(-4,-5,7)$, $C(2,-3,3)$, $D(3,2,1)$, BCD.

4.17. $A(7,4,9)$, $B(1,-2,-3)$, $C(-5,-3,0)$, $D(1,-3,4)$, ABD.

4.18. $A(3,-5,-2)$, $B(-4,2,3)$, $C(1,5,7)$, $D(-2,-4,5)$, ACD.

4.19. $A(-5,-4,-3)$, $B(7,3,-1)$, $C(6,-2,0)$, $D(3,2,-7)$, BCD.

4.20. $A(3,-2,6)$, $B(-6,-2,3)$, $C(1,1,-4)$, $D(4,6,-7)$, ABD.

Задание 5. Сила $\overline{F}$ приложена к точке В. Найти:

а) момент $\overline{M}$ силы $\overline{F}$ относительно точки О;

б) модуль момента $\overline{M}$ силы $\overline{F}$ относительно точки О;

в) найти работу A силы $\overline{F}$ в случае, когда ее точка приложения, двигаясь прямолинейно перемещается из положения B в положение О.

5.1. $\overline{F} = 5\overline{i} - 3\overline{j} + 9\overline{k},\ B(3,4,-6), O(2,6,5).$

5.2. $\overline{F} = -3\overline{i} + \overline{j} - 9\overline{k},\ B(4,-2,3), O(7,0,-3).$

5.3. $\overline{F} = 2\overline{i} + 19\overline{j} - 4\overline{k},\ B(5,3,4), O(6,-4,-1).$

5.4. $\overline{F} = 4\overline{i} + 11\overline{j} - 6\overline{k},\ .B(3,5,1), O(4,-2,-3);$

5.5. $\overline{F} = 3\overline{i} - 5\overline{j} + 7\overline{k},\ B(2,3,-5), O(0,4,3).$

5.6. $\overline{F} = 5\overline{i} + 4\overline{j} + 11\overline{k},\ B(6,1,-5), O(4,2,-6).$

5.7. $\overline{F} = -9\overline{i} + 5\overline{j} + 7\overline{k},\ B(1,6,-3), O(4,-3,5).$

5.8. $\overline{F} = 6\overline{i} + 5\overline{j} - 7\overline{k},\ B(7,-6,4), O(4,9,-6).$

5.9. $\overline{F} = -5\overline{i} + 4\overline{j} + 4\overline{k},\ B(3,7,-5), O(2,-4,1).$

5.10. $\overline{F} = 4\overline{i} + 7\overline{j} - 3\overline{k},\ B(5,-4,2), O(8,5,-4).$

5.11. $\overline{F} = 2\overline{i} + 2\overline{j} + 9\overline{k},\ B(4,2,-3), O(2,4,0).$

5.12. $\overline{F} = 9\overline{i} - 3\overline{j} + 4\overline{k},\ B(-5,4,-2), O(4,6,-5).$

5.13. $\overline{F} = 5\overline{i} - 2\overline{j} + 3\overline{k},\ B(7,1,-5), O(2,-3,-6).$

5.14. $\overline{F} = 3\overline{i} - 5\overline{j} + 4\overline{k},\ B(-3,5,9), O(5,6,-3).$

5.15. $\overline{F} = -10\overline{i} + 6\overline{j} + 5\overline{k},\ B(4,-5,9), O(4,7,-5).$

5.16. $\overline{F} = 5\overline{i} - 3\overline{j} + \overline{k},\ B(-5,3,7), O(3,8,-5).$

5.17. $\overline{F} = -5\overline{i} + 8\overline{j} + 4\overline{k},\ B(2,-4,7), O(0,7,4).$

5.18. $\overline{F} = 7\overline{i} - 5\overline{j} + 2\overline{k},\ B(-3,2,0), O(6,4,-3).$

5.19. $\overline{F} = 3\overline{i} - 4\overline{j} + 2\overline{k},\ B(5,3,-7), O(4,-1,-4).$

5.20. $\overline{F} = 5\overline{i} + 5\overline{j} - 6\overline{k},\ B(-9,4,7), O(8,-1,7).$

Решение типового варианта контрольной работы № 2

З*адание* 1. Доказать, что векторы $\bar{a}=(3,-1,0)$, $\bar{b}=(2,3,1)$ и $\bar{c}=(-1,4,3)$ образуют базис и найти координаты вектора $\bar{d}=(2,3,7)$ в этом базисе

Решение. Векторы $\bar{a},\bar{b}$ и $\bar{c}$ образуют базис, если их смешанное произведение отлично от нуля, т.е. $(\bar{a},\bar{b},\bar{c})\neq 0.$

$(\bar{a},\bar{b},\bar{c})=\begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & 3 \end{vmatrix}=22\neq 0$, следовательно, $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ образуют базис.

Вектор $\vec{d}$ можно выразить через базис в виде линейной комбинации:

$$\bar{d}=\lambda_1\bar{a}+\lambda_2\bar{b}+\lambda_3\bar{c}$$

или в координатной форме $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}=\lambda_1\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}+\lambda_3\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}.$

$$\begin{cases} 3\lambda_1+2\lambda_2-\lambda_3=2 \\ -\lambda_1+3\lambda_2+4\lambda_3=3 \\ \lambda_2+3\lambda_3=7 \end{cases}$$

Решая систему линейных уравнений по формулам Крамера, находим $\lambda_1=3;$ $\lambda_2=-2;$ $\lambda_3=3.$ Таким образом, $\bar{d}=(3,-2,3)=3\bar{a}-2\bar{b}+3\bar{c}.$

Задание 2. Коллинеарны ли векторы $\vec{c}_1=2\vec{a}+3\vec{b}$ *и* $\vec{c}_2=-\vec{a}+\vec{b}$, построенные по векторам $\vec{a}=(1,-2,4)$ и $\vec{b}=(7,3,5)$.

Решение. Необходимое и достаточное условие коллинеарности двух векторов заключается в равенстве нулю их векторного произведения (свойство 4 векторного произведения). Запишем координаты векторов $\vec{c}_1$ *и* $\vec{c}_2$ как линейные комбинации соответствующих координат векторов

$\vec{a}$ и $\vec{b}$: $\overrightarrow{c_1} = (2\cdot 1+3\cdot 3,\ 2\cdot 0+3\cdot 1,\ \ 2\cdot 2+3\cdot 4) = (11,\ 3,\ 16)$
$\vec{c}_2 = (-1+3,\ \ 0+1,\ -2+4) = (2,\ 1,\ \ 2).$

Подставим координаты векторов $\vec{c}_1$ *и* $\vec{c}_2$ в формулу для вычисления векторного произведения $[\vec{c}_1, \vec{c}_2]$:

$$[\vec{c}_1, \vec{c}_2] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 11 & 3 & 16 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -10\bar{i} + 10\bar{j} + 5\bar{k},$$

$$|\vec{c}_1 \times \vec{c}_2| = \sqrt{100+100+25} = \sqrt{225} = 15.$$

Векторное произведение $[\vec{c}_1, \vec{c}_2] \neq 0$, следовательно, векторы $\vec{c}_1$ *и* $\vec{c}_2$ не коллинеарны.

Задание 3. а) Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a} = 7\vec{p} + \vec{q}$, $\bar{b} = \vec{p} - 3\vec{q}$, $|\vec{p}| = 3$, $|\vec{q}| = 1$, $\left(\vec{p}\wedge\vec{q}\right) = \pi/4$;

б) Найти длину вектора $\bar{b}$.

Решение: а) Согласно геометрическому смыслу векторного произведения, площадь параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a}$, $\bar{b}$ равна модулю их векторного произведения. Применяя свойства векторного произведения и формулу (2.22), получим:

$$S = |\vec{a} \times \vec{b}| = |(7\vec{p} + \vec{q}) \times (\vec{p} - 3\vec{q})| = 7|\vec{p} \times \vec{p}| + |\vec{q} \times \vec{p}| - 21|\vec{p} \times \vec{q}| - 3|\vec{q} \times \vec{q}| =$$

$$= -22|\vec{p} \times \vec{q}| = -22|\vec{p}| \cdot |\vec{q}| \sin\left(\vec{p}\wedge\vec{q}\right) = -22 \cdot 3 \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -33\sqrt{2}.$$

$$S = \left|-33\sqrt{2}\right| = 33\sqrt{2}\ (\text{ед}^2).$$

б) Длину вектора $\bar{b}$ будем находить из скалярного квадрата $|\vec{b}| = \sqrt{(\vec{b}, \vec{b})}$.

$$\left(\vec{b}, \vec{b}\right) = \left(\vec{p} - 3\vec{q}, \vec{p} - 3\vec{q}\right) = \left(\vec{p}, \vec{p}\right) - 6\left(\vec{p}, \vec{q}\right) + 9\left(\vec{q}, \vec{q}\right) = |\vec{p}|^2 -$$

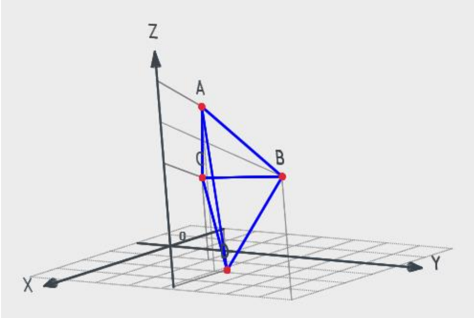
$$- 6|\vec{p}| \cdot |\vec{q}| \cos\left(\vec{p}\wedge\vec{q}\right) + 9|\vec{q}|^2 = 3^2 - 6 \cdot 3 \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 9 \cdot 1 = 9\left(2 - \sqrt{2}\right).$$

$$\left|\vec{b}\right| = \sqrt{9(2-\sqrt{2})} = 3\sqrt{2-\sqrt{2}}$$

Задание 4. Вершины пирамиды находятся в точках $A(2,3,4)$, $B(4,7,3)$, $C(1,2,2)$, $D(-2,0,-1)$. Найти S_{ABC}, $V_{пирамиды}$.

Решение. $S_{ABC} = \frac{1}{2}\left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right|$;

$$\overline{AB}\times\overline{AC} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -9\bar{i} + 5\bar{j} + 2\bar{k};$$



$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\sqrt{81+25+4} = \frac{1}{2}\sqrt{110};$$

$$V = \frac{1}{6}\left|\left(\overline{AB},\overline{AC},\overline{AD}\right)\right| = \frac{1}{6}\left|\begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \\ -4 & -3 & -5 \end{pmatrix}\right| = \frac{11}{6}.$$

Рисунок к заданию 4

Задание 5. Сила $\overline{F} = 4\bar{i} - 2\bar{j} + 3\bar{k}$ приложена к точке *B* (-3,-2,5). Найти: а) момент $\overline{M}$ силы $\overline{F}$ относительно точки О (9,-5,4); б) модуль момента $\overline{M}$ силы $\overline{F}$ относительно точки О; в) найти работу *A* силы $\overline{F}$ в случае, когда ее точка приложения, двигаясь прямолинейно перемещается из положения *B* в положение О.

Решение. а) Находим вектор $\overline{OB} = (-3-9,-2-(-5),5-4) = (-12,3,1)$.

Искомый момент $\overline{M}$ равен векторному произведению $\left[\overline{BO},\overline{F}\right]$:

$$\overline{M} = \left[\overline{BO},\overline{F}\right] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -12 & 3 & 1 \\ 4 & -2 & 3 \end{vmatrix} = \bar{i}\ (9+2) - \bar{j}\ (-36-4) + \bar{k}\ (24-12) = 11\bar{i} + 40\bar{j} + 12\bar{k};$$

б) $\left|\overline{M}\right| = \sqrt{11^2 + 40^2 + 12^2} = \sqrt{121+1600+144} = \sqrt{1865}$;

в) Так как работа $A = \left(\overline{F},\overline{BO}\right)$, а $\overline{BO} = (12,-3,-1)$, то

$$A = \left(\overline{F},\overline{BO}\right) = 12\cdot 4 + (-3)\cdot(-2) + (-1)\cdot 3 = 48 + 6 - 3 = 51.$$

ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ № 6

«Векторная алгебра» (практика)

6.1. В треугольнике ABC сторона AB разделена точкой M в отношении 2:1, считая от точки A. Тогда разложение вектора $\overrightarrow{CM}$ по векторам $\vec{a}=\overrightarrow{CB}$ и $\vec{b}=\overrightarrow{CA}$ имеет вид…

1) $\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}$ 2) $\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}$ 3) $2\vec{a}+\vec{b}$

4) $\vec{a}+2\vec{b}$ 5) $\frac{1}{2}\vec{a}-3\vec{b}$ 6) $\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}$.

6.2. Для вектора $\vec{a}(m,0,p)$, $m\neq 0$, $p\neq 0$, верно утверждение…

1) $\vec{a}\perp$ оси Oy 2) $\vec{a}\perp$ оси Ox 3) $\vec{a}\perp$ плоскости Oxy

4) $\vec{a}\perp$ плоскости Oxz 5) $\vec{a}\perp$ плоскости Oyz.

6.3. Векторы $\overrightarrow{AB}=2\vec{a}-6\vec{b}$, $\overrightarrow{BC}=\vec{a}+7\vec{b}$ образуют треугольник ABC (рис.); векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ – взаимно перпендикулярные орты. Косинусы углов α, β, γ треугольника равны:

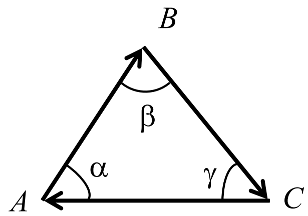


Рисунок к тестовому заданию 6.3.

1) $\cos\alpha=\frac{2}{3}, \cos\beta=-\frac{2}{3}, \cos\gamma=\frac{1}{3}$;

2) $\cos\alpha=\frac{1}{5}, \cos\beta=-\frac{3\sqrt{5}}{5}, \cos\gamma=\frac{\sqrt{3}}{5}$;

3) $\cos\alpha=0, \cos\beta=\frac{2\sqrt{5}}{5}, \cos\gamma=\frac{\sqrt{5}}{5}$;

4) $\cos\alpha=\frac{1}{4}, \cos\beta=-\frac{3}{4}, \cos\gamma=\frac{1}{4}$.

6.4. Результат упрощения выражения $(2\vec{a}-5\vec{b})\cdot(\vec{a}+2\vec{b})$ при условии, что $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=1$, $(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=\frac{\pi}{3}$, равен:

1) $\frac{13}{2}$ 2) $-\frac{3}{2}$ 3) 12;

4) -7; 5) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ 6) $\frac{27}{2}$.

6.5. Сила $\vec{F} = 2\vec{a} + \vec{b}$ производит перемещение материальной точки по пути $\vec{S} = \vec{a} + 3\vec{b}$, причем $|\vec{a}| = \sqrt{3}$, $|\vec{b}| = 1$, $(\widehat{\vec{a},\vec{b}}) = \frac{\pi}{6}$. Тогда работа силы по перемещению точки равна…

1) $\frac{39}{2}$; 2) 27; 3) $8\sqrt{3}$;
4) 32; 5) $\frac{25}{2}$ 6) 23.

6.6. Дано: $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 3$, $(\widehat{\vec{a},\vec{b}}) = \frac{\pi}{3}$. Вектор $(2\vec{a} - \alpha\vec{b})$ перпендикулярен вектору $\vec{a}$ при значении "α", равном:

1) $\frac{4}{3}$ 2) 3; 3) 6;
4) 5; 5) $3\sqrt{3}$; 6) $2\sqrt{5}$.

6.7. Дано: $\vec{a} = \vec{m} + 2\vec{n}$, $\vec{b} = 2\vec{m} - \vec{n}$, причем $|\vec{m}| = \frac{1}{\sqrt{8}}$, $|\vec{n}| = \frac{1}{4}$ и $(\widehat{\vec{m},\vec{n}}) = \frac{\pi}{4}$.

Тогда значение $|\vec{a} + \vec{b}|$ равно:

1) $^5/_4$ 2) $^{21}/_4$ 3) $\frac{\sqrt{17}}{24}$
4) 8; 5) $^3/_8$ 6) 7.

6.8. В параллелограмме $ABCD$: $\overrightarrow{AB} = 3\vec{a} - \vec{b}$, $\overrightarrow{AD} = 5\vec{a} - 2\vec{b}$, где $|\vec{a}| = \sqrt{32}$, $|\vec{b}| = 2$, $(\widehat{\vec{a},\vec{b}}) = \frac{\pi}{4}$. Длина диагонали $|\overrightarrow{BD}|$ равна:

1) 12; 2) 10; 3) $\frac{15}{2}$;
4) 8; 5) $\frac{21}{2}$; 6) $\frac{37}{2}$.

6.9. Дан вектор $\vec{b} = 2\vec{m} - \vec{n}$, причем $|\vec{m}| = \frac{1}{\sqrt{8}}$; $|\vec{n}| = \frac{1}{4}$ и $(\widehat{\vec{m},\vec{n}}) = \frac{\pi}{4}$. Значение $\sqrt{10}\cos(\widehat{\vec{b},\vec{m}})$ равно :

1) 2; 2) 7; 3) $\frac{11}{2}$;
4) 3; 5) $\frac{27}{2}$; 6) $\frac{7}{2}$.

6.10. Дан вектор $\vec{b} = 2\vec{m} - \vec{n}$, причем $|\vec{m}| = \frac{1}{\sqrt{8}}$; $|\vec{n}| = \frac{1}{4}$ и $(\vec{m}, \hat{\ } \vec{n}) = \frac{\pi}{4}$. Тогда значение $np_{\vec{n}}\, \vec{b}$ равна:

1) $\frac{1}{4}$ 2) 4; 3) $\frac{1}{4\sqrt{5}}$

4) -5; 5) $-\frac{1}{4}$ 6) $\frac{5}{2}$.

6.11. Дано: $|\vec{a}| = \sqrt{2}$, $|\vec{b}| = 2$, $(\vec{a}, \hat{\ } \vec{b}) = \frac{3\pi}{4}$ и $\vec{c} = (2\vec{a} - \vec{b}) \times (\vec{a} - 2\vec{b})$. Модуль вектора $\vec{c}$ определится…

1) $\frac{19}{2}$; 2) 6; 3) $7\sqrt{2}$;

4) 12; 5) $\frac{25}{2}$ 6) $\frac{15}{2}$.

6.12. Площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overrightarrow{AB} = \vec{m} + \vec{n}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{m} - \vec{n}$, где $|\vec{m}| = 1$; $|\vec{n}| = 2$; $(\vec{m}, \hat{\ } \vec{n}) = \frac{2\pi}{3}$, равна:

1) $2\sqrt{3}$ 2) $\sqrt{3}$ 3) 2;

4) 5; 5) $\sqrt{5}$; 6) $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

6.13. Результат упрощения $\left((2\vec{a} - \vec{c}) \times (\vec{a} - 2\vec{b})\right) \cdot (2\vec{b} + \vec{c})$ равен:

1) $-6\vec{a}\vec{b}\vec{c}$; 2) $4\vec{a}\vec{b}\vec{c}$; 3) $-4\vec{a}\vec{b}\vec{c}$

4) $2\vec{a}\vec{b}\vec{c}$; 5) $\frac{1}{2}\vec{a}\vec{b}\vec{c}$; 6) $\frac{5}{2}\vec{a}\vec{b}\vec{c}$.

6.14. Сила $\vec{F} = \vec{a} + 2\vec{b}$ приложена в точке В. $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $(\vec{a}, \hat{\ } \vec{b}) = \frac{\pi}{4}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$.

Величина момента силы $\vec{F}$ относительно точки А равна:

1) $\frac{3}{2}$; 2) 2; 3) $\sqrt{2}$;

4) 1; 5) $\frac{5}{2}$; 6) $\frac{1}{2}$.

6.15. Даны некомпланарные векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, причем $|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$, $|\vec{c}|=4$, $\vec{a}\perp\vec{b}$, $(\widehat{c,a})=(\widehat{c,b})=\dfrac{\pi}{3}$. Значения $(\vec{a}-2\vec{b},\vec{c}-\vec{a})$, б) $(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})^2$ определятся:

1) $(\vec{a}-2\vec{b},\vec{c}-\vec{a})=26$; $(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})^2=4$.

2) $(\vec{a}-2\vec{b},\vec{c}-\vec{a})=-3$; $(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})^2=26$.

3) $(\vec{a}-2\vec{b},\vec{c}-\vec{a})=-20$; $(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})^2=3$.

4) $(\vec{a}-2\vec{b},\vec{c}-\vec{a})=15$; $(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})^2=18$.

6.16. Дано: $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=2$, $|\vec{c}|=5$, $(\vec{a},\wedge\vec{b})=(\vec{b},\wedge\vec{c})=\dfrac{\pi}{3}$, векторы $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ – компланарны. Модуль вектора $\vec{d}=\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$ равен:

1) 5; 2) 6; 3) 7; 4) 8; 5) 1; 6) 3.

6.17. Если точки $A(3,1,-2)$, $B(1,3,5)$, $C(-5,1,-4)$ являются вершинами треугольника ABC, то длина его медианы, проведенной из вершины B, равна:

1) $6\sqrt{2}$; 2) $\sqrt{17}$; 3) $\dfrac{\sqrt{129}}{2}$

4) $\sqrt{68}$; 5) 3; 6) $2\sqrt{5}$.

6.18. Четырехугольник с вершинами $A(-5,3,4)$, $B(-1,-7,5)$, $C(6,-5,-3)$ и $D(2,5,-4)$ образует геометрическую фигуру:

1) прямоугольник; 2) квадрат; 3) параллелограмм;
4) ромб; 5) трапецию; 6) нет ответа.

6.19. Проекция вектора $(\vec{a}+\vec{b})$ на вектор $\vec{c}$, если $\vec{a}=(2,3,4),\vec{b}=(-1,0,1),\vec{c}=(3,4,1)$ равна:

1) 4; 2) $\dfrac{25}{\sqrt{20}}$; 3) 5 4) $\dfrac{20}{\sqrt{26}}$; 5) $\dfrac{5}{\sqrt{26}}$. .

6.20. Разложение вектора $\vec{c}=(9,4)$ по векторам $\vec{a}=(1,2)$ и $\vec{b}=(2,-3)$ имеет вид:

1) $\vec{c}=5\vec{a}+2\vec{b}$; 2) $\vec{c}=-4\vec{a}+\vec{b}$; 3) $\vec{c}=\dfrac{1}{2}\vec{a}-\dfrac{3}{2}\vec{b}$; 4) $\vec{c}=\dfrac{5}{4}\vec{a}-\vec{b}$.

6.21. Даны точки $A(1,-2,2)$, $B(-3,2,4)$. Проекция равнодействующей двух сил $\overrightarrow{F_1}=(3,-1,3)$, $\overrightarrow{F_2}=(-2,2,1)$ на направление вектора $\overrightarrow{AB}$ равна:

1) $\frac{4}{3}$; 2) - 4; 3) $-\frac{\sqrt{2}}{6}$

4) $\frac{14}{3}$; 5) $-\frac{\sqrt{3}}{5}$; 6) 11.

6.22. Векторное произведение векторов $\vec{a}=2\vec{i}+3\vec{j}+5\vec{k}$; $\vec{b}=\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}$; равно:

1) $-7\vec{i}-3\vec{j}-\vec{k}$; 2) $\vec{i}-13\vec{j}+2\vec{k}$; 3) $-7\vec{i}-3\vec{j}+\vec{k}$;

4) $2\vec{i}+6\vec{j}+5\vec{k}$; 5) $7\vec{i}-3\vec{j}-\vec{k}$; 6) $2\vec{i}-6\vec{j}-5\vec{k}$.

6.23. Разложение вектора $\vec{a}$, если известно, что он направлен в противоположную сторону к вектору $\vec{b}=5\vec{i}-4\vec{j}+2\sqrt{2}\vec{k}$ и его модуль равен 5, запишется:

1) $\vec{a}=-25\vec{i}+20\vec{j}+\sqrt{2}\vec{k}$; 2) $\vec{a}=-\frac{25}{7}\vec{i}+\frac{20}{7}\vec{j}-\frac{10\sqrt{2}}{7}\vec{k}$;

3) $\vec{a}=-5\vec{i}+4\vec{j}+\sqrt{2}\vec{k}$; 4) $\vec{a}=-\vec{i}+\frac{4}{5}\vec{j}+\frac{2\sqrt{2}}{5}\vec{k}$;

5) $\vec{a}=-\frac{1}{5}\vec{i}+\frac{2}{5}\vec{j}-\frac{\sqrt{2}}{5}\vec{k}$; 6) $\vec{a}=-\frac{22}{9}\vec{i}+\frac{40}{9}\vec{j}-\frac{4\sqrt{3}}{9}\vec{k}$.

6.24. Даны точки $A(3,4,-2)$ и $B(2,5,-2)$. Проекция вектора $\overrightarrow{AB}$ на ось, составляющую с осями Ox и Oy углы $\alpha=60^\circ$ и $\beta=120^\circ$, а с осью Oz - тупой угол γ, равна:

1) –2; 2) –1; 3) –3; 4) –4; 5) 2; 6) 4.

6.25. Вектор $\vec{x}$, зная, что он перпендикулярен к оси OZ и удовлетворяет условиям $\vec{x}\cdot\vec{a}=9$, $\vec{x}\cdot\vec{b}=-4$, если $\vec{a}=(3,-1,5)$ и $\vec{b}=(1,2,-3)$, определится:

1) $2\vec{i}-3\vec{j}$; 2) $\vec{i}-2\vec{j}+3\vec{k}$; 3) $-2\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$;

4) $\vec{i}-2\vec{j}$; 5) $3\vec{i}-\vec{j}+5\vec{k}$; 6) $4\vec{i}+2\vec{j}-5\vec{k}$.

6.26. Вектор $\vec{a} = (0,1,-1)$ образует с осями O*x*, O*y*, *Oz* углы:

1) 135, 45, 45 градусов; 2) 90, 45, 135 градусов;

3) 60,90, 45 градусов; 4) 25, 45, 45 градусов;

5) 90, 45,45 градусов; 6) 90, 90, 120 градусов.

6.27. Величина момента силы $\vec{F} = 2\vec{i} - 4\vec{j} + 5\vec{k}$, приложенной к точке $A(4,-2,3)$, относительно точки $B(3,2,-1)$ равна:

1) $\sqrt{41}$; 2) 38; 3) 12,5; 4) $\sqrt{381}$;

5) 17; 6) $\sqrt{211}$; 7) 27; 8) 41.

6.28. Объем треугольной пирамиды, построенной на векторах $\vec{a} = (1,2,3)$, $\vec{b} = (2,4,1)$, $\vec{c} = (2,-1,0)$ равен:

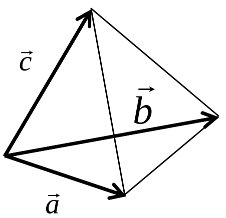


Рисунок к тестовому заданию 6.28.

1) $V = \frac{1}{4}$; 2) $V = \frac{25}{6}$; 3) $V = \frac{14}{5}$;

4) $V = \frac{1}{3}$; 5) $V = \frac{15}{9}$; 6) $V = \frac{12}{7}$.

6.29. Векторы $\vec{a} = (1,2,1)$, $\vec{b} = (3,2,-1)$, $\vec{c} = (1,1,2)$ являются ребрами параллелепипеда. Высота параллелепипеда, опущенная на основание, в котором лежат векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, равна:

1) $\frac{2}{\sqrt{3}}$ 2) $\frac{9}{\sqrt{33}}$; 3) $\frac{3}{2}$;

4) $\frac{4}{\sqrt{17}}$; 5) $\frac{3}{\sqrt{11}}$; 6) 2.

6.30. Точки $A(1,1,-1)$, $B(2,1,3)$, $C(-1,2,4)$ и $D(x,y,z)$ являются вершинами тетраэдра, объем которого равен 3,5 куб. ед. Сумма координат точки D, зная, что она лежит на оси Oz, равна:

1) $7\sqrt{5}$; 2) 9; 3) 3;

4) 12; 5) $3\sqrt{7}$; 6) 8.

Раздел III. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ НА ПЛОСКОСТИ

3.1. Метод координат

Основной метод аналитической геометрии - *метод координат.* Его сущность состоит в том, что каждой точке M поставлены в соответствие пара или тройка чисел, называемых ее *координатами*, [17]. Каждой фигуре соответствует уравнение $F(x, y) = 0$ или $F(x, y, z) = 0$. Отсюда возникают две основные задачи аналитической геометрии:

1) по геометрическому свойству фигуры составить ее уравнение;

2) по уравнению исследовать свойства и форму геометрической фигуры.

Простейшими задачами метода координат являются: определение расстояния между точками; нахождение координат точки, делящей отрезок в данном отношении, вычисление координат центра тяжести треугольника и его площади.

Расстояние между двумя точками $M_1(x_1,y_1)$, $M_2(x_2,y_2)$ на плоскости и $M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$ в пространстве определяется соответственно по формулам:

$$d=\sqrt{\left(x_2-x_1\right)^2+\left(y_2-y_1\right)^2}\,. \tag{3.1}$$

$$d=\sqrt{\left(x_2-x_1\right)^2+\left(y_2-y_1\right)^2+\left(z_2-z_1\right)^2}. \tag{3.1'}$$

Пример 3.1. Дан треугольник ABC, где $A(1, 2)$, $B(0, 3)$, $C(-2, -1)$. Найти его периметр.

Решение. Периметр ΔABC равен сумме длин всех его сторон. Найдем длины всех сторон треугольника, используя формулу (3.1):

$$|AC|=\sqrt{(-2-1)^2+(-1-2)^2}=\sqrt{18}=3\sqrt{2};\quad |AB|=\sqrt{(0-1)^2+(3-2)^2}=\sqrt{2};$$

$$|BC|=\sqrt{(-2-0)^2+(-1-3)^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}.$$

Итак, периметр ΔABC равен: $P=|AC|+|AB|+|BC|=3\sqrt{2}+\sqrt{2}+2\sqrt{5}=4\sqrt{2}+2\sqrt{5}.$

Построим треугольник ABC

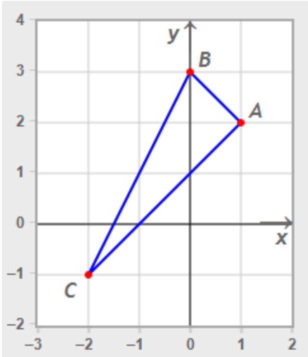


Рисунок к примеру 3.1.

Если в прямоугольной декартовой системе координат даны точки $M_1(x_1,\ y_1)$ и $M_2(x_2,\ y_2)$, а точка $M(x,y)$ делит отрезок M_1M_2 в отношении $\lambda = \dfrac{|M_1C|}{|CM_2|}$, то координаты точки M будут определяться по формулам:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}; \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}. \tag{3.2}$$

В пространстве координаты точки $M(x,y,z)$ деления отрезка M_1M_2 в отношении λ будут равны:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}. \tag{3.2'}$$

Формулы (3.2) и (3.2') называются *формулами деления отрезка в данном отношении*. Если точка M лежит на середине отрезка M_1M_2, т.е. $\lambda = 1$, то ее координты найдутся по *формулам деления отрезка пополам*:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}. \tag{3.3}$$

или
$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad z = \frac{z_1 + z_2}{2}. \tag{3.3'}$$

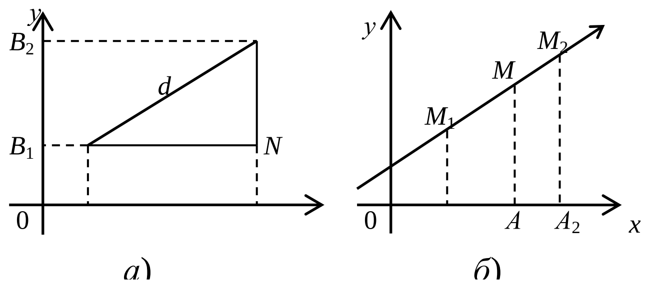


Рисунок 3.1. – *а*) Расстояние между точками на плоскости;

б) Деление отрезка в данном отношении.

Площадь треугольника с вершинами $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$, $C(x_3,y_3)$ вычисляется по формуле:

$$S = \pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}. \tag{3.4}$$

Координаты центра тяжести треугольника с вершинами $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$, $C(x_3,y_3)$ определяются по формулам:

$$x_{ц.т.} = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \quad y_{ц.т.} = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\ . \tag{3.5}$$

Пример 3.2. Даны вершины треугольника *ABC*: *A*(-2,3), *B*(1,12), C(11,6).

Найти длину медианы, опущенной из вершины *A,* центр тяжести и площадь треугольника.

Решение. Медиана *AM* делит сторону *BC* пополам, тогда координаты точки *M* определятся по формуле (3.3): $M\left(\frac{1+11}{2}, \frac{12+6}{2}\right) = M(6{,}9)$. Длину медианы найдем как расстояние между точками *A* и *M* по формуле (3.1):

$$|AM| = \sqrt{(6+2)^2 + (9-3)^2} = \sqrt{64+36} = \sqrt{100} = 10.$$

Центр тяжести треугольника найдем, используя формулу (3.5):

$$x_{ц.т.} = \frac{-2+1+11}{3} = \frac{10}{3}, \quad y_{ц.т.} = \frac{3+12+6}{3} = 7\ .$$

Для нахождения площади данного треугольника, воспользуемся формулой (3.4): $S = \pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1+2 & 12-3 \\ 11+2 & 6\ -\ 3 \end{vmatrix} = \pm\frac{1}{2}\left|(3\cdot 3 - 9\cdot 13)\right| = 54.$

3.2. Прямая линия на плоскости

В декартовой системе координат на плоскости каждая прямая определяется алгебраическим уравнением первой степени и, обратно, каждое алгебраическое уравнение первой степени определяет прямую, [4]. Уравнение вида

$$Ax + By + C = 0 \quad (A^2 + B^2 \neq 0). \tag{3.6}$$

называется *общим уравнением прямой*. Переменные x и y в уравнении (3.6) являются *текущими координатами* точек прямой. Если точка лежит на прямой, то ее координаты удовлетворяют уравнению этой прямой.

Пример 3.3. Лежат ли точки $A(1, 2)$ и $B(0,3)$ на прямой $x + 2y - 6 = 0$?

Решение. Подставив в уравнение прямой вместо x и y координаты точки A, получим $1+2\cdot 2-6\neq 0$. Значит точка A не лежит на данной линии. Подставим в уравнение прямой координаты точки B вместо x и y $0+2\cdot 3-6=0$. Следовательно, точка B лежит на данной прямой.

Рассмотрим частные случаи общего уравнения прямой (3.6):

1) если $A=0,\ B\neq 0,\ C\neq 0$, то уравнение приводится к виду $y=-\frac{C}{B}$ и представляет уравнение прямой, параллельной оси Ox;

2) если $A\neq 0,\ B=0,\ C\neq 0$, то уравнение приводится к виду $x=-\frac{C}{A}$, прямая параллельна оси Oy;

3) если $C = 0$, $A\neq 0,\ B\neq 0$, то получим $Ax+By=0$, прямая проходит через начало координат;

4) если $A=0,\ B\neq 0,\ C=0$, уравнение прямой принимает вид $By=0$ или $y=0$, прямая проходит через ось Ox;

5) если $A\neq 0,\ B=0,\ C=0$, уравнение прямой $Ax=0$, или $x = 0$, прямая проходит через ось Oy.

Угловым коэффициентом k прямой называется число

$$k = tg\alpha\ , \tag{3.7}$$

где α — угол наклона прямой к оси Ox ($0 \le \alpha < \pi$), рис. 3.2.

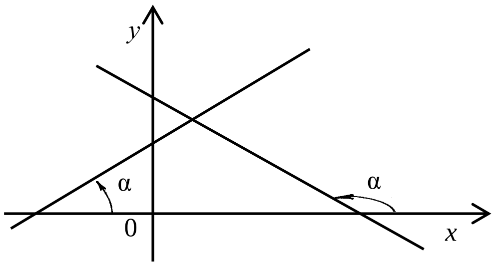


Рисунок 3.2. – Угол наклона прямой к оси Ox

Уравнение

$$y = kx + b \tag{3.8}$$

называется *уравнением прямой с угловым коэффициентом* (b — ордината точки пересечения прямой с осью Oy) , [1].

Уравнение прямой с угловым коэффициентом k, *проходящей через точку заданную точку* $M_0(x_0,\ y_0)$ (рис. 3.3) или *уравнение пучка прямых* запишется:

$$y - y_o = k(x - x_o). \tag{3.9}$$

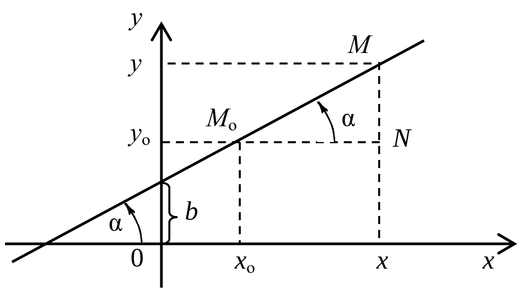


Рисунок 3.3. – Прямая, проходящая через точку M_0

Пример 3.4. Найти прямую, проходящую через точку пересечения прямых $x + 2y + 1 = 0$, $2x + y + 2 = 0$ и образующей угол 135° с осью Ox.

Решение. Найдем координаты точки пересечения данных прямых из совместного решения их уравнений по методу Гаусса:

$$\begin{cases} x+2y+1=0, \\ 2x+y+2=0; \end{cases} \qquad \begin{cases} x=-1-2y, \\ -3y=0; \end{cases} \qquad \begin{cases} x=-1 \\ y=0. \end{cases}$$

Значит точка пересечения данных прямых $A(-1,\ 0)$. Для составления уравнения искомой прямой воспользуемся уравнением (3.9). Здесь $(x_0\,;\,y_0)$ - координаты точки A, $k=tg135^{\circ}$ $k=-1$, поэтому уравнение прямой примет вид: $y-0=-1(x+1)$ или $y=-x-1$.

Уравнение прямой

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1 \qquad (3.10)$$

называется *уравнением прямой в отрезках* (a — абсцисса точки пересечения прямой с осью Ox, b — ордината точки пересечения прямой с осью Oy), [3].

Пример 3.5. Составить уравнение прямой, проходящей через точку A (2, 3) и отсекающей на оси ординат отрезок b = 6. Определить угол наклона этой прямой к оси Ox.

Решение. Воспользуемся уравнением прямой в отрезках (3.10). По условию b = 6. Так как искомая прямая проходит через точку A (2, 3), то координаты этой точки удовлетворяют уравнению (3.10). Подставляя координаты точки в это уравнение, получим:

$$\frac{2}{a}+\frac{3}{6}=1,\ \frac{2}{a}=\frac{1}{2},\ a=4,$$

Значит искомое уравнение прямой примет вид $\frac{x}{4}+\frac{y}{6}=1$. Для нахождения угла между полученной прямой и осью Ox, преобразуем это уравнение к общему виду (3.6): $6x+4y=24,\ \ 4y=-6x+24$ или $y=-\frac{3}{2}x+6$. Угловой коэффициент $k=-\frac{3}{2}$. Согласно формуле (3.6) получим $tg\alpha=-\frac{3}{2}$. Поэтому $\alpha=arctg\left(-\frac{3}{2}\right)$.

Уравнение прямой, проходящей через две точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$, имеет вид, [6]:

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}\ . \tag{3.11}$$

Угловой коэффициент прямой, проходящей через две точки, можно найти, не составляя уравнение прямой, по следующей формуле:

$$k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}. \tag{3.12}$$

Между всеми уравнениями прямой существует связь, т. е., если задана прямая одним из уравнений, то можно перейти к любому из перечисленных видов.

Пример 3.6. Написать различные виды уравнений прямой (в отрезках, с угловым коэффициентом, общее), проходящей через две точки $M_1(2, 0)$, $M_2(0, 3)$.

Решение. Используя уравнение прямой, проходящей через две точки, находим

$$\frac{x-2}{0-2}=\frac{y-0}{3-0} \quad \text{или} \quad \frac{x-2}{-2}=\frac{y}{3}; \qquad \frac{x}{-2}+1=\frac{y}{3}.$$

Из последнего уравнения с помощью преобразований можно перейти к другим видам уравнений этой же прямой.

Уравнение прямой в отрезках: $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1.$

Уравнение прямой с угловым коэффициентом: $y=-\frac{3}{2}x+3;\qquad k=-\frac{3}{2}.$

Общее уравнение прямой запишется $3x + 2y - 6 = 0$.

Под углом $\varphi\ (0\le\varphi<\pi)$ *между прямыми* понимается тот *наименьший угол, на который надо повернуть (против часовой стрелки) первую прямую* l_1, *чтобы она совпала со второй прямой* l_2.

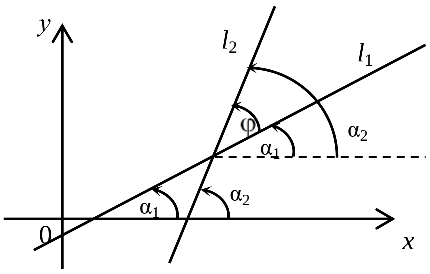


Рисунок 3.4. – Угол между прямыми на плоскости

Угол между прямыми с угловыми коэффициентами k_1 и k_2 определяется по формуле:

$$tg\varphi = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \right|. \tag{3.13}$$

Если прямые параллельны, то $\varphi = 0$ и $tg\varphi = 0$. Из формулы (3.13) следует, что $k_2 - k_1 = 0$, или

$$k_2 = k_1. \tag{3.14}$$

Равенство (3.14) определяет *условие параллельности двух прямых на плоскости*. Если прямые перпендикулярны, то $\varphi = \frac{\pi}{2}$, $tg\varphi$ не существует. Из формулы (3.13) следует, что $1 + k_1 \cdot k_2 = 0$, или

$$k_1 \cdot k_2 = -1 \text{ или } k_2 = -\frac{1}{k_1}. \tag{3.15}$$

Равенство (3.15) определяет *условие перпендикулярности двух прямых на плоскости*.

Пример 3.7. Найти уравнения прямых, проходящих через точку $M(1,-2)$ параллельно и перпендикулярно прямой $2x - 3y + 6 = 0$.

Решение. Преобразуем уравнение заданной прямой к виду: $y = \frac{2}{3}x - 2$.

Параллельная ей прямая имеет коэффициент $k_1 = \frac{2}{3}$. Применим равенство (3.9), тогда уравнение параллельной прямой запишется:

$$y+2=\frac{2}{3}(x-1), \quad y=\frac{2}{3}x-\frac{8}{3}.$$

Прямая, проходящая перпендикулярно к данной, по условию перпендикулярности прямых (3.15) имеет коэффициент $k_2=-\frac{3}{2}$, а ее уравнение запишется $y+2=-\frac{3}{2}(x-1)$, $y=-\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}$.

Уравнение прямой в *нормальной форме* определяется, [19]:

$$x\cos\alpha+y\sin\alpha=p, \tag{3.16}$$

где p - расстояние от начала координат до прямой. Общее уравнение прямой приводится к нормальной форме умножением на нормирующий множитель $\mu=\pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}$. Знак выбирается противоположным знаку свободному члену C, то есть из условия $\mu C<0$. Получается уравнение:

$$\pm\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}x\pm\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}y=\mp\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}. \tag{3.17}$$

Расстояние от точки $M_0(x_0,y_0)$ до прямой $x\cos\alpha+y\sin\alpha=p$ находится по формуле:

$$d=\left|x_0\cos\alpha+y_0\sin\alpha-p\right|. \tag{3.18}$$

Если прямая задана общим уравнением $Ax+By+C=0$, то *расстояние от точки до прямой* находится по формуле:

$$d=\frac{\left|Ax_0+By_0+C\right|}{\sqrt{A^2+B^2}}. \tag{3.19}$$

Пример 3.8. Две стороны квадрата лежат на прямых $3x+4y+22=0$ и $3x+4y-13=0$. Вычислить его площадь.

Решение. Из заданных уравнений прямых следует, что они параллельны (коэффициенты A и B – одинаковы). Для нахождения длины стороны квадрата нужно найти расстояние от одной прямой до другой. Это можно сделать, взяв точку на одной прямой и определить расстояние от нее до другой прямой. Возьмем первую прямую: $3x+4y+22=0$, пусть $x=0$, подставив это значение в уравнение, получим уравнение относительно y, откуда найдем $y=-11/2$. Таким образом, получим точку, принадлежащую первой прямой: $M\left(0,-11/2\right)$. Расстояние от точки с известными координатами до прямой определяем с помощью формулы (3.19):

$$d=\frac{\left|3\cdot 0+4\cdot\left(\frac{-11}{2}\right)-13\right|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{\left|-22-13\right|}{\sqrt{25}}=\frac{35}{5}=7.$$

Теперь определяем площадь: $S=d^2=7^2=49$. *Ответ:* $S=49$.

Пример 3.9**.** Даны сторона параллелограмма $3x-4y+5=0$, две вершины $A(1,\ -3)$ и $C(1,\ 2)$, а также $\left(\widehat{DC,BC}\right)=45^\circ$. Составить уравнения остальных сторон.

Решение. Проверим, проходит ли данная прямая через указанные точки. Для этого подставим координаты точек A и C в уравнение прямой:

$$A(1,\ -3): 3\cdot 1-4\cdot(-3)+5=3+12+5=20,\ 20\neq 0,$$

значит прямая $3x-4y+5=0$ не проходит через точку A.

$$C(1,\ 2):\ 3\cdot 1-4\cdot 2+5=3-8+5=0,\ 0=0,$$

поэтому данная прямая проходит через вершину C. Пусть это сторона DC (см. рис.). Так как в параллелограмме противоположные стороны попарно параллельны, найдем уравнение стороны, проходящей через точку A параллельно данной прямой. Найдем угловой коэффициент этой прямой:

$$3x-4y+5=0,\ \ 4y=3x+5,\ y=\frac{3}{4}x+\frac{5}{4},\ \text{здесь}\ k_{DC}=\frac{3}{4}.$$

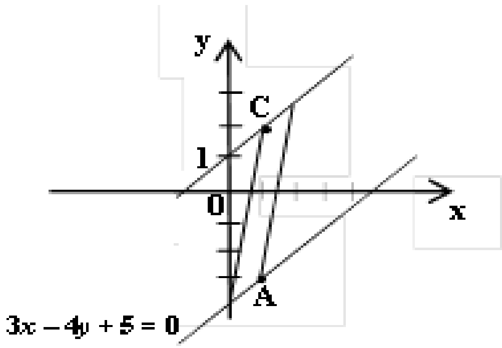


Рисунок к примеру 3.9.

В силу условия (3.14) $k_{DC} = k_{AB} = \dfrac{3}{4}$, тогда уравнение стороны *AB* примет вид:

$$y + 3 = \frac{3}{4}(x - 1), \ 4y + 12 = 3(x - 1) \text{ или } 3x - 4y - 15 = 0.$$

Найдем уравнение стороны *BC*, проходящей через точку *C* под углом 45° к стороне *DC*. Угловой коэффициент прямой *DC* $k_{DC} = \dfrac{3}{4}$. Найдем k_{BC}, используя формулу (3.13):

$$tg45^\circ = \frac{k_{BC} - \frac{3}{4}}{1 + \frac{3}{4} \cdot k_{BC}}, \qquad 1 = \frac{k_{BC} - \frac{3}{4}}{1 + \frac{3}{4} \cdot k_{BC}}, k_{BC} - \frac{3}{4} = 1 + \frac{3}{4}k_{BC},$$

$$k_{BC} - \frac{3}{4}k_{BC} = 1 + \frac{3}{4}, k_{BC} = 7.$$

Составим уравнение стороны *BC*, пользуясь уравнением (3.9):

$$y - 2 = 7(x - 1), \quad y - 2 = 7x - 7 \text{ или } 7x - y - 5 = 0.$$

3.3. Кривые второго порядка

Множество точек плоскости, координаты которых удовлетворяют уравнению

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \qquad (3.18)$$

называется *кривой второго порядка*, причем хотя бы один из коэффициентов A, B, C отличен от нуля,[25]. Если $A = B = C = 0$, то получим уравнение первого порядка, которое определяет прямую на плоскости. Если данному уравнению не удовлетворяют координаты ни одной точки плоскости, то имеем так называемую *мнимую кривую*, например, $x^2 + y^2 = -1$ есть уравнение *мнимой окружности*. В общем случае может оказаться, что уравнение определяет *вырожденную кривую* - либо пустое множество, либо точку, либо прямую, либо пару прямых (приведите примеры). В дальнейшем рассмотрим только *невырожденные кривые*.

Окружностью называется геометрическое место точек плоскости, равноудаленных от одной заданной точки, называемой *центром окружности*. Уравнение

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2 \qquad (3.19)$$

определяет *окружность* радиуса R с центром в точке с координатами $C(a, b)$, рис. 3.5.

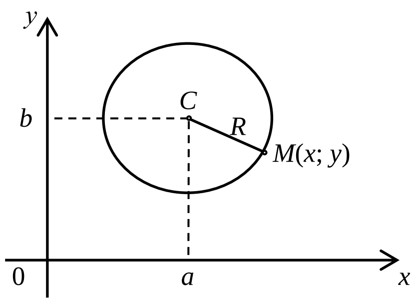


Рисунок 3.5. – Окружность

Если центр совпадает с началом координат, то уравнение окружности запишется:

$$x^2 + y^2 = R^2. \qquad (3.20)$$

Пример 3.10. Найти координаты центра и радиус окружности, определяемой уравнением второго порядка $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$.

Решение. Выделим полные квадраты в данном уравнении:

$$x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = (x^2 - 4x + 4) - 4 + (y^2 + 6y + 9) - 9 - 3 = 0$$

$$\Rightarrow (x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 16.$$

Учитывая уравнение окружности (3.19), имеем, что ее центр находится в точке с координатами (2, –3), а радиус равен 4 (построить окружность самостоятельно).

Эллипсом называется геометрическое место точек, сумма расстояний которых от двух фиксированных точек, называемых *фокусами* эллипса, есть величина постоянная, равная $2a$, [25]. Расстояние между фокусами равно $|F_1F_2| = 2c$. Простейшее уравнение эллипса мы получим, выбрав прямую, соединяющую фокусы за ось абсцисс и, поместив начало координат в середину между фокусами, рис. 3.6. Тогда *каноническое уравнение эллипса с центром в начале координат* имеет вид:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad (3.21)$$

где числа a и b называются соответственно *большой и малой полуосями эллипса*. Заметим, что $a > b$, если $a < b$, то фокусы эллипса будут на оси Oy, если $a = b$, то эллипс превращается в окружность. Точки $(\pm a, 0)$, $(0, \pm b)$ называются *вершинами эллипса*.

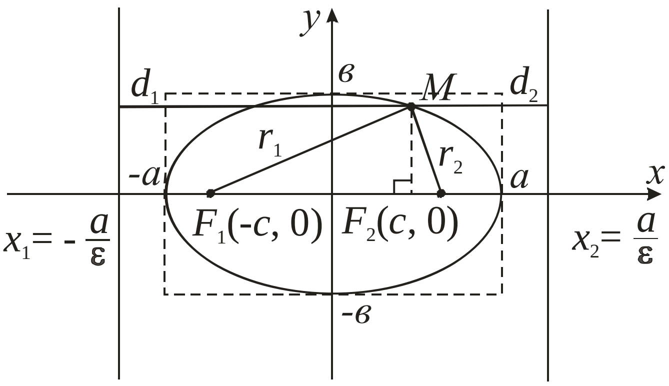


Рисунок 3.6. - Эллипс

Величины $r_1 = |MF_1|$, $r_2 = |MF_2|$ называются *фокальными радиусами* точки M эллипса. Прямые $x = \pm \frac{a}{\varepsilon}$ называются *директрисами эллипса*. Для эллипса справедливо следующее соотношение:

$$b^2 = a^2 - c^2. \tag{3.22}$$

Эксцентриситетом эллипса называется отношение

$$\varepsilon = \frac{c}{a}. \tag{3.23}$$

Очевидно, что эксцентриситет эллипса меньше единицы, т.е. $\varepsilon<1$.

Пример 3.11. Написать каноническое уравнение эллипса, зная, что большая полуось $a = 6$, а эксцентриситет $\varepsilon = 0,5$.

Решение. Из условия (3.23), находим $c = \varepsilon\, a = 0,5 \cdot 6 = 3$. Тогда малая полуось эллипса определится из равенства (3.22):

$$b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{36 - 9} = 3\sqrt{3}.\ \text{Получим: } \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{27} = 1.$$

Если центр эллипса находится в точке $M_o(x_o, y_o)$, то уравнение эллипса имеет вид:

$$\frac{(x - x_o)^2}{a^2} + \frac{(y - y_o)^2}{b^2} = 1. \tag{3.21'}$$

Гиперболой называется геометрическое место точек, для которых разность расстояний от двух фиксированных точек плоскости, называемых фокусами, есть постоянная величина, равная $2a$, *меньшая*, чем расстояние между фокусами $2c$, $c > 0$, [36]. Если оси декартовой прямоугольной системы координат выбраны так, что фокусы гиперболы располагаются на оси абсцисс симметрично относительно начала координат (рис.3.7), то *каноническое уравнение гиперболы с центром в начале координат* имеет вид:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{3.24}$$

где числа a и b называются соответственно *действительной* и *мнимой* *полуосями* гиперболы.

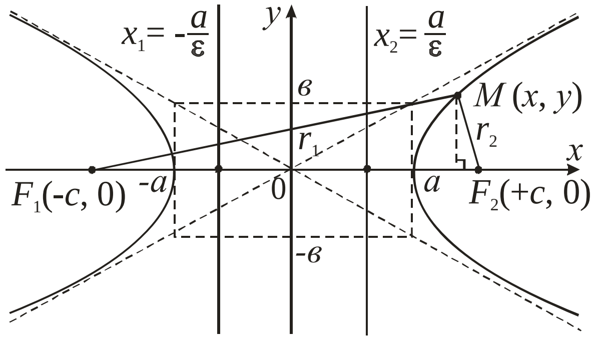


Рисунок 3.7. - Гипербола

Прямые $x = \pm \frac{a}{\varepsilon}$ называются *директрисами* гиперболы. Для гиперболы справедливо следующее соотношение:

$$b^2 = c^2 - a^2. \tag{3.25}$$

Как и в случае с эллипсом, *эксцентриситетом* гиперболы ε называется отношение межфокусного расстояния $2c$ к длине действительной оси $2a$:

$$\varepsilon = \frac{c}{a} . \tag{3.26}$$

Следовательно, $\varepsilon > 1.$ Для гиперболы важную роль играют также прямые

$$y = \pm \frac{b}{a} x, \tag{3.27}$$

которые называются ее *асимптотами*, т. е. прямыми к которым график гиперболы неограниченно близко приближается, но не пересекает их. Заметим, что асимптоты гиперболы совпадают с диагоналями прямоугольника (если их продолжить) $x = \pm a,\ y = \pm b.$

Пример 3.12. Привести уравнение кривой $4x^2 - 16y^2 = 64$ к каноническому виду. Найти фокусы, эксцентриситет.

Решение. Разделим обе части уравнения на 16, получим каноническое уравнение гиперболы $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} = 1.$ Из уравнения видно, что

$a^2 = 16, a = 4, b^2 = 4, b = 2$, $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{2\sqrt{5}}{4} = \frac{\sqrt{5}}{2}$. Фокусы находятся в точках $F_1(-2\sqrt{5},0)$ и $F_2(2\sqrt{5},0)$. Эксцентриситет равен $\varepsilon = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

Если центр гиперболы находится в точке $M_о(x_о,y_о)$, то уравнение гиперболы имеет вид:

$$\frac{(x - x_о)^2}{a^2} - \frac{(y - y_о)^2}{b^2} = 1. \tag{3.24'}$$

Параболой называется множество точек плоскости, равноудаленных от данной точки F этой плоскости, называемой *фокусом* параболы, и данной прямой, называемой ее *директрисой*, [25]. Обозначим через p – расстояние между фокусом и директрисой. Тогда $F\left(\frac{p}{2}; 0\right)$, а уравнение директрисы $x = -\frac{p}{2}$. Число p – называется *фокальным параметром* параболы. Если ось абсцисс проходит через фокус параболы, а ось ординат параллельна директрисе (рис. 3.8.), то *каноническое уравнение параболы*, симметричной относительно оси Ox и проходящей через начало координат примет вид:

$$y^2 = 2px. \tag{3.28}$$

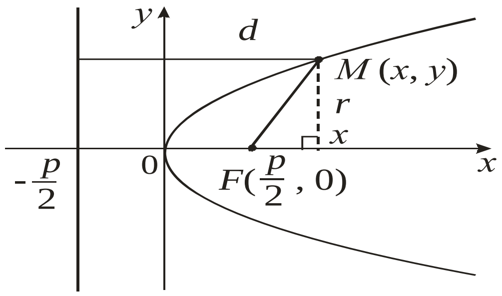


Рисунок 3.8. – Парабола, симметричная относительно оси абсцисс

Уравнение
$$x^2 = 2py \tag{3.29}$$

определяет параболу, симметричную относительно оси ординат, рис. 3.9 *б*). Фокус этой параболы находится в точке $F\left(0,\ \frac{p}{2}\right)$. Уравнение ее директрисы

$y = -\frac{p}{2}$. Фокальный радиус ее точки $M(x,\ y)$ выражается формулой $r = y + \frac{p}{2}$.

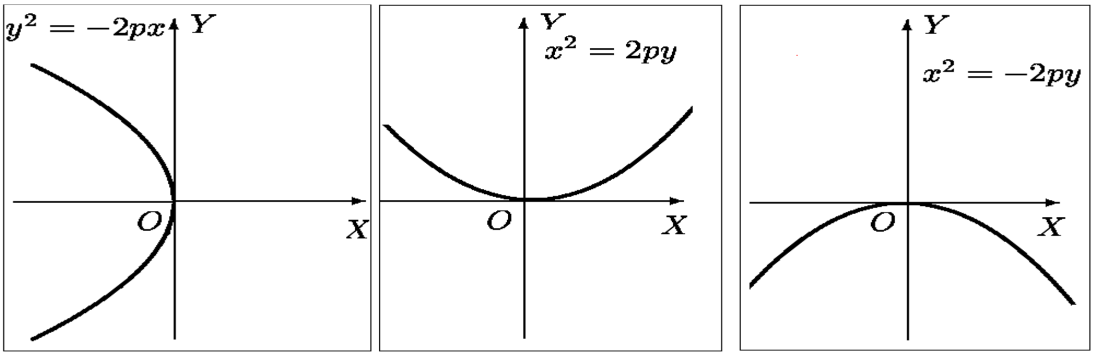
Уравнение параболы с вершиной в начале координат, осью симметрии которой служит ось Ox и ветви направлены влево (рис. 3.9 *а*), имеет вид:

$$y^2 = -2px\ (p > 0) \quad . \tag{3.30}$$

Уравнение ее директрисы $x = \frac{p}{2}$. Уравнение параболы с вершиной в начале координат, осью симметрии которой служит ось Oy и ветви направлены вниз (рис.3.9 *в*), имеет вид:

$$x^2 = -2py\ (p > 0). \tag{3.31}$$

Уравнение ее директрисы $y = p/2$.



а) *б*) *в*)

Рисунок 3.9. – Параболы с вершиной в начале координат:

а) парабола симметричная относительно оси абсцисс, ветви направлены влево;
б) парабола симметричная относительно оси ординат, ветви направлены вверх;
в) парабола симметричная относительно оси ординат, ветви направлены вниз.

Если вершина парабол находится в точке $M_o(x_o, y_o)$, то уравнения парабол имеют вид:

$$(y - y_o)^2 = 2p(x - x_o), \tag{3.28'}$$

$$(x - x_o)^2 = 2p(y - y_o). \tag{3.29'}$$

3.5. Полярная система координат

Полярная система координат задается на плоскости точкой O, называемой *полюсом*, и исходящим из нее лучом l, который называется *полярной осью*, [3]. Положение точки М на плоскости определяется двумя числами полярным углом φ между полярной осью и вектором $\overrightarrow{OM}$ и длиной этого вектора $\rho = r = |\overrightarrow{OM}|$. *Полярный угол* φ измеряется в радианах и отсчитывается от полярной оси против часовой стрелки. Точку M с полярными координатами r и φ обозначают $M(r,\varphi) = M(\rho,\varphi)$. Для полюса $r = 0$ полярный угол не определен.

Если на плоскости задана декартовая система координат, то обычно за полюс принимается начало координат, а за полярную ось – ось Ox. В этом случае каждой точке плоскости с декартовыми координатами (x, y) можно сопоставить полярные координаты (r, φ) (рис. 3.10).

При этом декартовы координаты выражаются через полярные по формулам:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi. \end{cases} \quad (3.32)$$

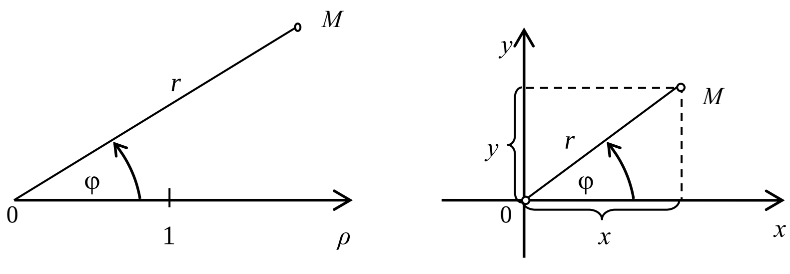


Рисунок 3.10. – Связь между полярной и декартовой системой координат

Наоборот, полярные координаты выражаются через декартовы по формулам:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2},\ tg\varphi = \frac{y}{x}. \quad (3.33)$$

Пример 3.14. Дано уравнение кривой $(x^2+y^2)^3 = a^4y^2$, $a>0$. Перейти к полярным координатам и построить кривую.

Решение. Воспользуемся формулами (3.32) и запишем уравнение в полярных координатах:

$$(r^2\cos^2\phi + r^2\sin^2\phi)^3 = a^4r^2\sin^2\phi \text{ , или } r^6 = a^4r^2\sin^2\phi \text{, } r^4 = a^4\sin^2\phi \text{,}$$

окончательно имеем $r = a\sqrt{|\sin\phi|}$.

Составим таблицу соответствующих значений r и φ.

φ	0	$\pm\frac{\pi}{12}$	$\pm\frac{\pi}{6}$	$\pm\frac{\pi}{4}$	$\pm\frac{\pi}{3}$	$\pm\frac{5\pi}{12}$	$\pm\frac{\pi}{2}$	$\pm\frac{7\pi}{12}$	$\pm\frac{3\pi}{4}$	$\pm\frac{5\pi}{6}$	$\pm\frac{11\pi}{12}$	π
r	0	0,51	0,71a	0,84a	0,93a	0,98a	1a	0,98a	0,84a	0,71a	0,51a	0

Нанесем на плоскость точки, соответствующие найденным парам чисел. Соединив последовательно точки, получим линию, определяемую уравнением $r = a\sqrt{|\sin\phi|}$.

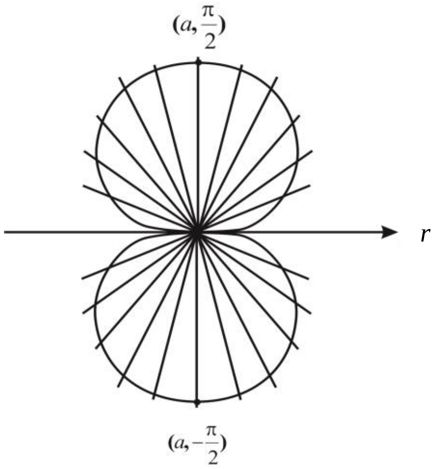


Рисунок к примеру 3.14.

Вопросы для самопроверки

1. Декартова прямоугольная система координат на плоскости. Метод координат.
2. Расстояние между двумя заданными точками.
3. Деление отрезка в данном отношении и пополам.
4. Центр тяжести треугольника, его координаты.
5. Площадь треугольника, заданного своими вершинами.
6. Понятие прямой линии на плоскости.
7. Общее уравнение прямой. Частные случаи.
8. Различные виды прямой на плоскости (с угловым коэффициентом в отрезках, уравнение прямой проходящей через две заданные точки).
9. Уравнение прямой, проходящей через заданную точку, с заданным угловым коэффициентом.
10. Взаимное расположение прямых на плоскости. Угол между двумя прямыми.
11. Условие параллельности и перпендикулярности двух прямых на плоскости.
12. Нормальное уравнение прямой.
13. Расстояние от точки до прямой.
14. Понятие кривой второго порядка.
15. Окружность, ее уравнение.
16. Эллипс, его каноническое уравнение. Характеристики эллипса.
17. Гипербола, ее каноническое уравнение. Характеристики гиперболы.
18. Парабола, ее каноническое уравнение. Характеристики параболы.
19. Полярная система координат. Полярные координаты точки.
20. Связь декартовых и полярных координат точки.

ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ № 7
«Аналитическая геометрия на плоскости» (теория)

7.1. Формула $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ определяет:

1) расстояние от точки до прямой; 2) длину радиуса окружности;
3) расстояние между двумя заданными точками;
4) длину половины отрезка; 5) расстояние между двумя прямыми;

7.2. Уравнение пучка прямых запишется в виде:

1) $x/a + y/в = 1$ 2) $y - y_0 = k(x - x_0)$
3) $Ax + By + C = 0$ 4) $\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$ 5) $y = kx + b$.

7.3. Геометрическое место точек, разность расстояний которых от двух заданных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная равная $2a$, называется…

1) гиперболой; 2) окружностью; 3) эллипсом;
4) параболой; 5) кардиоидой; 6) лемнискатой.

7.4. Формула $R^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2$ определяет уравнение:

1) фокального радиуса гиперболы; 2) окружности;
3) радиуса окружности; 4) параболы с вершиной (x_o,y_o);
5) эллипса с вершиной (x_o,y_o).

7.5. Уравнение прямой в отрезках запишется в виде:

1) $x/a + y/в = 1$; 2) $Ax + By + C = 0$; 3) $y = kx + в$;

4) $y - y_0 = k(x - x_0)$; 5) $\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$.

7.6. Геометрическое место точек, сумма расстояний которых от двух заданных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная равная 2а, называется…

1) гиперболой; 2) окружностью; 3) параболой;
4) эллипсом; 5) кардиоидой; 6) лемнискатой.

7.7. Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки, запишется в виде:

1) $x/a + y/b = 1$; 2) $Ax + By + C = 0$; 3) $y = kx + b$;

4) $y - y_0 = k(x - x_0)$; 5) $\dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1}$.

7.8. Формула $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ определяет уравнение:

1) гиперболы; 2) прямой в отрезках; 3) окружности;
4) фокального радиуса эллипса; 5) эллипса.

7.9. Общее уравнение прямой запишется в виде:

1) $x/a + y/b = 1$; 2) $Ax + By + C = 0$; 3) $y = kx + b$;

4) $y - y_0 = k(x - x_0)$; 5) $\dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1}$.

7.10. Геометрическое место точек, равноудаленных от одной заданной точки, называется…

1) гиперболой; 2) окружностью; 3) параболой;
4) эллипсом; 5) кардиоидой; 6) лемнискатой.

7.11. Полярная система координат - это:

1) две перпендикулярные прямые, исходящие из полюса;
2) две пересекающиеся прямые в полюсе;
3) точка и прямая из нее выходящая;
4) вектор, выходящий из полюса и перпендикулярный заданной прямой.

7.12. Условие перпендикулярности двух прямых на плоскости состоит в следующем:

1) $k_1 = k_2$; 2) $k_1 k_2 = -1$; 3) $k_1 + k_2 = 1$; 4) $k_1 + k_2 = 0$.

7.13. Центр тяжести треугольника определяется как:

1) среднее геометрическое координат вершин треугольника;

2) среднее арифметическое координат вершин треугольника;

3)среднее гармоническое координат вершин треугольника;

4) полусумма координат вершин треугольника.

7.14. Угол между прямыми на плоскости определяется через тригонометрическую функцию:

1) синуса; 2) косинуса; 3) тангенса; 4) котангенса.

7.15. Полярные координаты точки - это два действительных числа, определяющих:

1) длину полярного радиуса и синус полярного угла;
2) длину полярного радиуса и косинус полярного угла;
3) длину полярного радиуса и значение полярного угла;
4) значение полярного угла и длину полярного радиуса.

7.16. Формула $x^2 = 2py$ определяет уравнение:

1) гиперболы; 2) окружности; 3) эллипса;
4) параболы, симметричной относительно оси Ox;
5) параболы, симметричной относительно оси Oy.

7.17. Эксцентриситет у гиперболы:

1) меньше единицы; 2) больше единицы; 3) равен единице;
4) меньше нуля; 5) больше нуля; 6) равен нулю.

7.18. Формула $k = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ определяет:

1) угловой коэффициент асимптоты гиперболы;
2) угловой коэффициент прямой, проходящей через две заданные точки;
3) отношение, в котором отрезок делится точкой;
4) длину половины отрезка;
5) угловой коэффициент биссектрисы первого и третьего координатных углов.

7.19. Алгебраическая линия первого порядка называется:

1) гиперболой; 2) окружностью; 3) эллипсом;
4) параболой; 5) прямой; 6) лемнискатой.

7.20. Формула $y = \dfrac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}$ определяет:

1) уравнение директрисы параболы, симметричной относительно оси Oy;
2) ординату точки, делящей отрезок в данном отношении;
3) ординату точки, делящей отрезок пополам;
4) ординату фокуса параболы, симметричной относительно оси Oy;
5) ординату центра окружности.

7.21. Угловой коэффициент прямой на плоскости определяет:

1) угол наклона прямой к оси Ox;
2) угол наклона прямой к оси Oy;
3) тангенс угла наклона прямой к оси Ox;
4) тангенс угла наклона прямой к оси Oy;
5) синус угла наклона прямой коси Ox;
6) косинус угла наклона прямой к оси Ox.

7.22. Прямоугольные координаты точки через полярные, выражаются следующим образом:

1) $x = r\sin\varphi, y = r\cos\varphi$; 2) $x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi$;
3) $x = \varphi\sin r, y = \varphi\cos r$; 4) $x = \varphi\cos r, y = \varphi\sin r$.

7.23. Условие перпендикулярности двух прямых на плоскости:

1) $k_2 = \frac{1}{k_1}$; 2) $k_2 = -\frac{1}{k_1}$; 3) $k_2 = k_1$; 4) $k_2 = - k_1$.

7.24. Соотношение $c^2 = a^2 - в^2$ между параметрами a, $в$, с относится к кривой второго порядка:

1) эллипсу; 2) гиперболе; 3) параболе; 4) окружности.

7.25. Из представленных ниже уравнений каноническое уравнение прямой на плоскости представляет:

1) $y = kx + b$; 2) $Ax + By + C = 0$;

3) $\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n}$; 4) $\begin{cases} x = mt + x_0 \\ y = nt + y_0 \end{cases}$; 5) $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$.

7.26. Последовательность действий при выводе уравнения прямой на плоскости, проходящей через две различные точки запишется:

1) составим векторы $\overline{M_1M} = (x - x_1, y - y_1)$, где M(x, y) – текущая точка прямой, и $\overline{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$;

2) даны две точки $M_1(x_1, y_1)$; $M_2(x_2, y_2)$, принадлежащие прямой l;

3) $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$;

4) $\left.\begin{array}{l} \overline{M_1M_2} \subset \ell, \\ \overline{M_1M} \subset \ell \end{array}\right\} \Rightarrow \overline{M_1M_2} \parallel \overline{M_1M}$.

7.27. Для параболы $x^2 = 2p(y - y_0)$ укажите два верных утверждения:

1) вершина $O(0, y_0)$; 2) директриса $x = y_0 - \frac{p}{2}$;

3) фокус $F\left(0, -\frac{p}{2}\right)$; 4) эксцентриситет $\varepsilon = x_0 + 1$;

7.28. Для гиперболы $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \; (a < b)$ укажите два верных утверждения:

1) $0 < e = \frac{c}{b} < 1$; 2) $c^2 = a^2 + b^2$;

3) директриса $x = -\frac{b}{e}$; 4) асимптота $y = \frac{b}{a}x$.

7.29. Установите соответствие между уравнением и типом кривой второго порядка:

1. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a \neq b)$	А. гипербола
2. $x^2 = 2py$	Б. парабола, ось симметрии Ox
3. $y^2 = 2px$	В. парабола, ось симметрии Оу
	Г. эллипс
	Д. окружность с центром в $O(0,0)$

Ответы: 1____, 2____, 3____.

7.30. Уравнение пучка прямых на плоскости запишется в виде:

1) $x/a + y/b = 1$; 2) $Ax + By + C = 0$; 3) $y = kx + b$;

4) $y - y_o = k(x - x_o)$; 5) $\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$.

Контрольная работа № 3

«Аналитическая геометрия на плоскости»

Задание 1. Даны координаты вершин треугольника *ABC*.

Найти: 1) длину стороны *AB* треугольника;

2) площадь ΔABC;

3) координаты центра тяжести данного треугольника;

4) уравнения сторон данного треугольника;

5) уравнение и длину высоты *CD*;

6) уравнение медианы, проведенной из вершины *A*;

7) уравнение прямой, проходящей через вершину *C* параллельно стороне *AB*;

8) внутренний угол *A*. Сделать чертеж.

1.1. $A(-2,3)$, $B(0,7)$, $C(8,3)$.

1.2. $A(-4,-1)$, $B(-2,9)$, $C(6,5)$.

1.3. $A(-3,-2)$, $B(-1,8)$, $C(7,4)$.

1.4. $A(-5,6)$, $B(2,2)$, $C(1,8)$.

1.5. $A(-4,-2)$, $B(-2,8)$, $C(-2,5)$.

1.6. $A(2,-5)$, $B(4,5)$, $C(12,1)$.

1.7. $A(3,0)$, $B(5,10)$, $C(13,6)$.

1.8. $A(0,3)$, $B(2,13)$, $C(10,9)$.

1.9. $A(-1,5)$, $B(1,15)$, $C(9,11)$.

1.10. $A(5,4)$, $B(7,14)$, $C(15,10)$.

1.11. $A(1,2)$, $B(3,12)$, $C(11,8)$.

1.12. $A(4,1)$, $B(6,11)$, $C(14,7)$. .

1.13. $A(0,3)$, $B(1,0)$, $C(-2,-3)$.

1.14. $A(7,0)$, $B(-3,10)$, $C(4,7)$.

1.15. $A(4,6)$, $B(-1,-5)$, $C(0,0)$.

1.16. $A(-5,-1)$, $B(9,-6)$, $C(-12,0)$.

1.17. $A(3,-7)$, $B(-4,0)$, $C(10,-7)$.

1.18. $A(1,-2)$, $B(4,2)$, $C(4,8)$.

1.19. $A(0,-1)$, $B(3,3)$, $C(4,1)$.

1.20. $A(1,-1)$, $B(4,3)$, $C(5,1)$.

Задание 2. Привести уравнение кривой второго порядка к каноническому виду, установить тип и построить график этой кривой

2.1. $4x^2 - 9y^2 - 32x - 18y + 19 = 0$. 2.2. $x^2 - 4y^2 - 2x - 16y - 19 = 0$.

2.3. $x^2 + 2y^2 + 2x - 8y + 7 = 0$. 2.4. $4y^2 - x + 8y + 6 = 0$.

2.5. $3x^2 - y^2 + 12x + 2y + 8 = 0$. 2.6. $2y^2 + x - 4y + 5 = 0$.

2.7. $x^2 + 2y^2 - 6x - 4y - 3 = 0$. 2.8. $4x^2 - 9y^2 - 32x - 18y + 19 = 0$.

2.9. $y^2 - 4x + 4y + 20 = 0$. 2.10. $2x^2 + 3y^2 + 8x + 18y + 29 = 0$.

2.11. $2x^2 + 9y^2 - 4x + 6y + 2 = 0$. 2.12. $x^2 - y^2 - 8x + 6y + 3 = 0$.

2.13. $9x^2 + 4y^2 - 72x - 8y + 112 = 0$. 2.14. $x^2 - 6x + 4y + 9 = 0$.

2.15. $y^2 - 6x - 6y + 9 = 0$. 2.16. $y^2 + x + 6y + 9 = 0$.

2.17. $25x^2 - 9y^2 - 100x + 18y - 134 = 0$. 2.18. $4x^2 - 25y^2 - 32x - 50y - 61 = 0$.

2.19. $16x^2 + 4y^2 - 32x - 24y - 12 = 0$. 2.20. $x^2 + y^2 - 2x + 2y = 0$.

Задание 3. Составить канонические уравнения: а) эллипса; б) гиперболы; в) параболы (A, B – точки, лежащие на кривой; F – фокус; a – большая (действительная) полуось; b – малая (мнимая) полуось; ε - эксцентриситет; $y = \pm kx$ – уравнения асимптот гиперболы, D – директриса кривой, $2c$ – фокусное расстояние).

3.1.	а) $b = 15$,	F (-10,0);	б) $a = 13$,	$\varepsilon = 14/13$;	в) $D: x = -4$.
3.2.	а) $b = 2$,	F ($4\sqrt{2}$,0);	б) $a = 7$,	$\varepsilon = \sqrt{85}/7$;	в) $D: x = 5$.
3.3.	а) A (3;0),	$B(2, \sqrt{5}/3)$;	б) $k = 3/4$,	$\varepsilon = 5/4$;	в) $D: y = -2$.
3.4.	а) $a = 4$,	F (3,0);	б) $b = 2\sqrt{10}$,	F (-11,0);	в) $D: x = -2$.
3.5.	а) $a = 6$,	F (-4,0);	б) $b = 3$,	F (7,0);	в) $D: x = -7$.
3.6.	а) $b = 7$,	F (5,0);	б) $a = 11$,	$\varepsilon = 12/7$;	в) $D: x = 10$.
3.7.	а) $\varepsilon = 3/5$,	A (0,8);	б) $A(\sqrt{6},0)$,	$B(-2\sqrt{2},1)$;	в) $D: y = 9$.

3.8.	а) $b = 5$,	$\varepsilon = 12/13$;	б) $k = 1/3$,	$a = 6$;	в) ось симметрии Oy и A (-9,6).
3.9.	а) $b = 5$,	F (-10,0);	б) $a = 9$,	$\varepsilon = 4/3$;	в) $D: x = 12$.
3.10.	а) $a = 22$,	$\varepsilon = 10/11$;	б) $k = \sqrt{11}/5$,	$c = 2$;	в) ось симметрии Ox и A (-7,5).
3.11.	а) $b = 12$,	F (5,0);	б) $a = 3$,	$A(9,-4)$;	в) F (0,2).
3.12.	а) F (6,0),	$\varepsilon = 3/5$;	б) A(-5,2),	$B(2\sqrt{5},2)$;	в) F (3,0).
3.13.	а) $b = 9$,	F (-2,0);	б) $b = 10$,	$\varepsilon = 7/5$;	в) ось симметрии Ox и A (1,-4).
3.14.	а) F (-4,0),	$\varepsilon = 4/5$;	б) $k = 2\sqrt{2}/3$,	$A(9,8)$;	в) ось симметрии Oy и A (7,6).
3.15.	а) $A\left(5/2, \sqrt{6}/4\right)$,	$B\left(-2, \sqrt{15}/5\right)$,	б) $a = 7$,	F (-12,0);	в) $D: y = 6$.
3.16.	а) $a = 5$,	$\varepsilon = 1/2$;	б) $b = 4$,	$\varepsilon = 2$;	в) $D: x = 8$.
3.17.	а) $b = 3$,	$A(7,1)$;	б) $k = \sqrt{13}/5$,	$c = 3$;	в) $D: y = -7$.
3.18.	а) $a = 8$,	F (-6,0);	б) $b = 3$,	$k = 22/7$;	в) ось симметрии Oy и A(-2,4).
3.19.	а) F(-3,0),	$b = 2$;	б) $a = 9$,	$\varepsilon = 11/3$;	в) $D: x = -8$.
3.20.	а) $\varepsilon = 1/2$,	$a = 6$;	б) $k = \sqrt{23}/2$,	$c = 10$;	в) D: y = - 7.

Задание 4. Линия, задана уравнением $r = r(\varphi)$ в полярной системе координат. Требуется:

1) построить линию по точкам, начиная от $\varphi = 0$ до $\varphi = 2\pi$ и придавая φ значения через промежуток $\frac{\pi}{8}$;

2) найти уравнение данной линии в декартовой системе координат, у которой начало совпадает с полюсом, а положительная полуось абсцисс с полярной осью;

3) по уравнению в декартовой прямоугольной системе координат определить, тип кривой 2-го порядка

4.1. $r = 2\cdot(1+\cos\varphi).$

4.2. $r = 6\cdot\cos 2\varphi.$

4.3. $r = 4\cdot(1+\sin\varphi).$

4.4. $r = 3\cdot(1-\cos\varphi).$

4.5. $r = \dfrac{5}{3-4\cos\varphi}$

4.6. $r = \dfrac{10}{2-\cos\varphi}$

4.7. $r = 5\cdot(1-\sin\varphi).$

4.8. $r = 4\cdot(1-\cos\varphi).$

4.9. $r = \dfrac{3}{1-\cos\varphi}$

4.10. $r = \dfrac{4}{2+3\cos\varphi}$

4.11. $r = \dfrac{2}{1-\sin\varphi}$

4.12. $r = \dfrac{5}{4-3\cos\varphi}$

4.13. $r = \dfrac{1}{1+\sin\varphi}$

4.14. $r = \dfrac{3}{2+\cos\varphi}$

4.15. $r = \dfrac{4}{1+\cos\varphi}$

4.16. $r = \dfrac{6}{1-2\cos\varphi}$

4.17. $r = \dfrac{6}{3+2\cos\varphi}$

4.18. $r = 2\cdot(1-\cos\varphi).$

4.19. $r = 3\cdot\sin 2\varphi.$

4.20. $r = 3\cdot(1-\sin\varphi).$

Решение типового варианта контрольной работы № 3

«Аналитическая геометрия на плоскости»

Задание 1. Даны координаты вершин треугольника ABC: A(1,-3), B(2,5) и C(8,1).

Найти: 1) длину и уравнение стороны AB треугольника;

2) площадь ΔABC;

3) координаты центра тяжести данного треугольника;

4) уравнение и длину высоты, проведенной из вершины B;

5) уравнение медианы, проведенной из вершины A;

6) уравнение прямой, проходящей через вершину C параллельно стороне AB;

7) внутренний угол A. Сделать чертеж.

Решение. Построим чертеж.

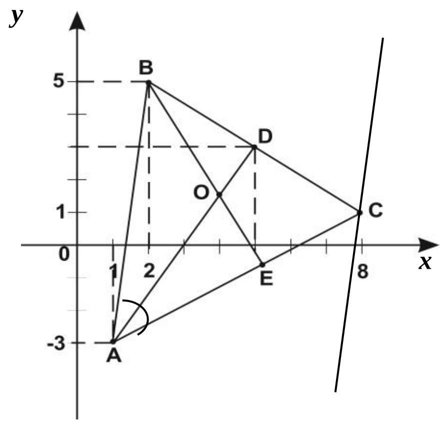


Рисунок к заданию 1

1) Длину стороны AB определим по формуле (3.1):

$$|AB| = \sqrt{(2-1)^2 + (5+3)^2} = \sqrt{65}.$$

Для составления уравнения стороны AB воспользуемся уравнением прямой, проходящей через две заданные точки (3.11):

$$\frac{x-1}{2-1} = \frac{y+3}{5+3} \Rightarrow 8(x-1) = y+3,\ 8x - y - 11 = 0 .(AB)$$

2) Для нахождения площади треугольника ABC применим формулу (3.4):

$$S=\pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix}2-1 & 5+3\\ 8-1 & 1+3\end{vmatrix}=\pm\frac{1}{2}\left|(1\cdot 4-8\cdot 7)\right|=26.$$

3) Координаты центра тяжести определим по формуле (3.5):

$$x_{ц.т.}=\frac{1+2+8}{3}=\frac{11}{3},\quad y_{ц.т.}=\frac{-3+5+1}{3}=1,$$

$$O_1({}^{11}/_{3},1).$$

4) Так как $BE\perp AC$, следовательно, по условию перпендикулярности прямых $k_{BE}=-\frac{1}{k_{AC}}$. Угловой коэффициент прямой AC определяем по формуле $k_{AC}=\frac{y_C-y_A}{x_C-x_A}=\frac{1+3}{8-1}=\frac{4}{7}$. Тогда $k_{BE}=-\frac{7}{4}$. Используем уравнение прямой, проходящей через данную точку M_0 (x_0,y_0) в данном направлении (3.9). Уравнение высоты из вершины B запишется:

$$y-5=-\frac{7}{4}(x-2),\ 7x+4y-34=0\ (BE).$$

Для определения длины высоты BE необходимо найти уравнение стороны AC и воспользоваться формулой (3.19) расстояния от точки B до прямой AC. Зная угловой коэффициент прямой AC и координаты точки A, согласно уравнению (3.9), получим:

$$y+3=\frac{4}{7}(x-1),\ 4x-7y-25=0\ (AC).$$

Тогда длина высоты BE равна:

$$|BE|=\frac{|4\cdot 2-7\cdot 5-25|}{\sqrt{4^2+(-7)^2}}=\frac{|-52|}{\sqrt{65}}=\frac{52}{\sqrt{65}}.$$

5) Для составления уравнения медианы AD найдем координаты точки D по формулам деления отрезка BC пополам (3.3):

$$x_D=\frac{2+8}{2}=5,\ y_D=\frac{5+1}{2}=3.\ D\,(5,3).$$

Используя уравнение прямой, проходящей через две точки (3.11), получим: $\frac{x-1}{5-1}=\frac{y+3}{3+3}$, $3x-2y-9=0$ (AD).

6) Чтобы составить уравнение прямой, проходящей через вершину $C(8,1)$ параллельно стороне AB приведем уравнение AB к уравнению с угловым коэффициентом:

$$8x - y - 11 = 0,\ y = 8x - 11.$$

По условию параллельности двух прямых на плоскости угловые коэффициенты CK и AB совпадают. Следовательно, $k_{CK} = 8$, тогда по формуле (3.9) будем иметь:

$$y - 1 = 8(x - 8),\ 8x - y - 7 = 0\ (CK).$$

7) Найдем угол между прямыми AB и AC, воспользовавшись формулой (3.13):

$tg(AB,\hat{}AC)=\left|\frac{k_{AC}-k_{AB}}{1+k_{AC}k_{AB}}\right|$. Зная $k_{AB} = 8$, $k_{AC} = {}^4/_7$, подставим в формулу:

$$tg(AB,\hat{}AC)=\left|\frac{\frac{4}{7}-8}{1+\frac{4}{7}\cdot 8}\right|=\left|\frac{-52}{39}\right|=\frac{14}{13}.$$

$$(AB,\hat{}AC)=arctg\frac{14}{13}.$$

Задание 2. Привести уравнение кривой второго порядка $4x^2 + 16x - 2y + 1 = 0$ к каноническому виду, установить тип и построить график этой кривой

Решение. Сгруппируем слагаемые, содержащие текущие координаты: $4(x^2+4x)-2y+1=0$. В скобках выделим полный квадрат: $4(x^2+4x+4)-16-2y+1=0$; $4(x+2)^2=2y+15$. Отсюда $(x+2)^2=\frac{1}{2}\left(y+\frac{15}{2}\right)$.

Получили уравнение параболы, симметричной относительно оси Oy с вершиной в точке $C(-2,-{}^{15}/_2)$.

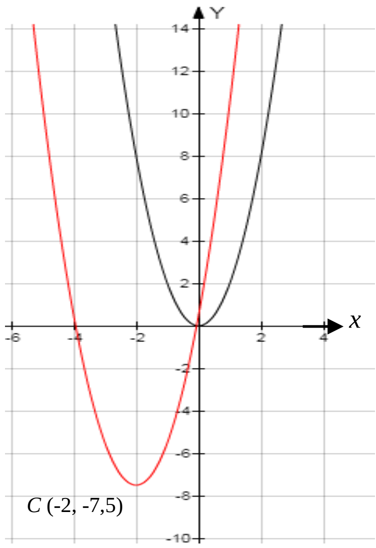


Рисунок к заданию 2

Задание 3. Составить канонические уравнения: а) эллипса, большая ось которого равна 5, а фокус находится в точке $F(3,0)$; б) гиперболы с мнимой осью $b = 3$ и $\varepsilon = \frac{\sqrt{13}}{2}$; в) параболы, имеющей директрису $x = -3$.

Решение. а) Каноническое уравнение эллипса имеет вид $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. По условию задачи большая полуось $a = 5$, $c = 3$. Для эллипса выполняется равенство $b^2 = a^2 - c^2$. Подставив значения a и c, найдем $b^2 = 16$. Искомое уравнение эллипса запишется:

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1.$$

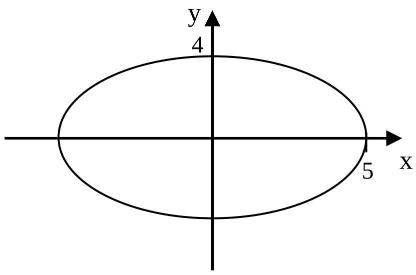


Рисунок к заданию 3 а)

б) Каноническое уравнение гиперболы имеет вид $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. По условию задачи мнимая полуось b = 3, эксцентриситет $\varepsilon = \dfrac{\sqrt{13}}{2}$. Для гиперболы справедливо равенство $b^2 = c^2 - a^2$ и учитывая, что $\varepsilon = \dfrac{c}{a}$, находим a^2 = 16. Искомое уравнение гиперболы будет иметь вид:

$$\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{9} = 1.$$

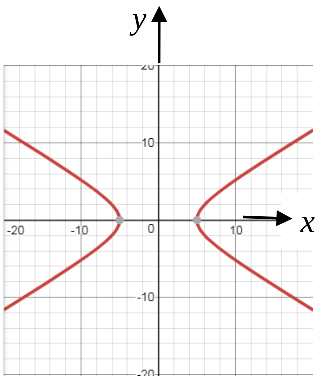


Рисунок к заданию 3 б)

в) Каноническое уравнение параболы в данном случае имеет вид $y^2 = 2px$, а уравнение ее директрисы $x = -\dfrac{p}{2}$. По условию x = -3, следовательно, $-3 = -\dfrac{p}{2}$, $p = 6$, уравнение параболы выглядит $y^2 = 12\,x$.

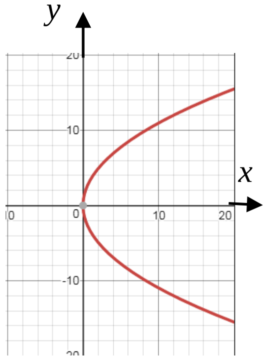


Рисунок к заданию 3 в)

Задание 4. Линия, заданная уравнением $r = \dfrac{1}{2 + 2\cos\varphi}$ в полярной системе координат. Требуется:

1) построить линию по точкам, начиная от $\varphi = 0$ до $\varphi = 2\pi$ и

придавая φ значения через промежуток $\frac{\pi}{8}$;

2) найти уравнение данной линии в декартовой системе координат, у которой начало совпадает с полюсом, а положительная полуось абсцисс с полярной осью;

3) по уравнению в декартовой прямоугольной системе координат определить, какая это линия.

Решение. 1) Придавая углу значения через промежуток $\frac{\pi}{8}$, вычисляем соответствующие значения, радиуса r и записываем в виде таблицы найденные полярные координаты точек.

φ	0	$\pi/8$	$\pi/4$	$3\pi/8$	$\pi/2$	$5\pi/8$	$3\pi/4$	$7\pi/8$	π
r	0,25	0,26	0,29	0,36	0,5	0,81	1,71	6,57	∞

φ	$9\pi/8$	$5\pi/4$	$11\pi/8$	$3\pi/2$	$13\pi/8$	$7\pi/4$	$15\pi/8$	2π
r	6,57	1,71	0,81	0,5	0,36	0,29	0,26	0,25

По найденным точкам строим кривую в полярной системе координат (см. рис.).

2) Подставляя выражение для r и $cos\varphi$ в заданное уравнение, получим:

$$\sqrt{x^2+y^2}=\frac{1}{2+\frac{2x}{\sqrt{x^2+y^2}}}$$

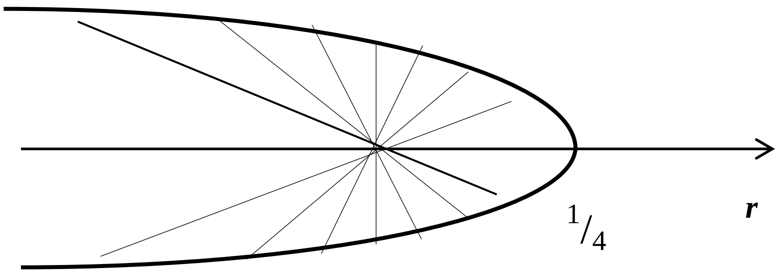


Рисунок к заданию 4

Выполняем преобразования, чтобы освободиться от знаменателя:

$$\sqrt{x^2+y^2}=\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2\sqrt{x^2+y^2}+2x};$$

$$\sqrt{x^2+y^2}\left(2\sqrt{x^2+y^2}+2x\right)=\sqrt{x^2+y^2}\,,\quad \sqrt{x^2+y^2}\neq 0;$$

$$2\sqrt{x^2+y^2}+2x=1.$$

Переноса $2x$ в правую часть и возводя в квадрат обе части равенства, имеем:

$$4x^2+4y^2=1-4x+4x^2.$$

Преобразуя, получаем уравнение кривой в каноническом виде.

$$y^2=\frac{1}{4}-x \text{ - парабола.}$$

3) Полученное уравнение определяет параболу, ось симметрии которой ось абсцисс, а вершина находится в точке $\left(\frac{1}{4},0\right)$, ветви направлены влево.

Данные результаты соответствуют результатам, полученным ранее (см. рис.).

ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ № 8

«Аналитическая геометрия на плоскости» (практика)

8.1. Какие из следующих прямых перпендикулярны прямой $2x - 3y + 8 = 0$?
1. $2x - 3y + 3 = 0$; 2. $-4x + 6y - 3 = 0$; 3. $3x + 2y - 7 = 0$; 4. $x + y + 1 = 0$

1) только 3; 2) только 1, 2 и 3; 3) только 2 и 3;
4) только 1 и 3; 5) только 1 и 4; 6) только 2.

8.2. Уравнение гиперболы с полуосями а = 5, $b = 3$ и центром в начале координат имеет вид …

1) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$; 2) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$; 3) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{25}=1$;
4) $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{9}=1$; 5) $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{3}=1$; 6) $\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{3}=1$.

8.3. Уравнение прямой, проходящей через точку $A(1,2)$ перпендикулярно прямой $-3x + y + 3 = 0$ имеет вид…

1) $2x - 3y + 4 = 0$; 2) $x + 3y - 7 = 0$; 3) $-3x + y + 2 = 0$;
4) $3x - y - 1 = 0$; 5) $x + 2y - 5 = 0$; 6) $5x - 2y - 4 = 0$.

8.4. Какие из следующих прямых пересекают ось Оy в точке $A(0, 2)$?

А) $2x + y - 2 = 0$, *Б*) $x + 2y - 2 = 0$, *В*) $x + 2y = 4$, *Г*) $x + 2y + 4 = 0$

1) только *А* и *В*; 2) только *А* и *Г*; 3) только *Б* и *В*;
4) только *А*; 5) только *В*; 6) только *Г*.

8.5. Уравнение эллипса с полуосями $a = 3$, $b = 4$ и центром в начале координат имеет вид…

1) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$; 2) $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{4}=1$; 3) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$;
4) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$; 5) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{3}=1$; 6) $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}=1$.

8.6. Уравнение прямой, проходящей через точку $A(1, 2)$ параллельно вектору $\vec{S}=(-3,1)$, имеет вид …

1) $x + 2y - 4 = 0$; 2) $x + 3y - 7 = 0$; 3) $2x - 3y + 4 = 0$;
4) $x + 2y - 5 = 0$; 5) $3x - y - 1 = 0$; 6) $x + y = 0$.

8.7. Какие из следующих прямых параллельны?

А) $2x - y + 5 = 0$, *Б*) $x + 2y - 3 = 0$,
В) $2x + 4y - 3 = 0$, *Г*) $x - 4y + 7 = 0$

1) только *А* и *Б*; 2) только *А*, *Б* и *В*; 3) только *А* и *В*;
4) только *Б* и *В*; 5) только *Б* и *Г*; 6) все.

8.8. Уравнение эллипса с полуосями $a = 3$, $b = 2$ и центром в начале координат имеет вид…

1) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$; 2) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$; 3) $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1$;
4) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$; 5) $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{2} = 1$; 6) $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} = 1$.

8.9. Уравнение прямой, проходящей через точку *A*(1,2) параллельно прямой $x + 3y + 1 = 0$ имеет вид…

1) $x + 2y - 4 = 0$; 2) $2x - 3y + 4 = 0$; 3) $3x - y - 1 = 0$;
4) $x + 3y - 7 = 0$; 5) $x + 2y - 5 = 0$; 6) $2x + y = 0$.

8.10. Уравнение прямой, проходящей через точки *A*(1, 2) и *B*(-2, 3), имеет вид…

1) $3x - y - 1 = 0$; 2) $x + 2y - 5 = 0$; 3) $x + 2y - 4 = 0$;
4) $2x - 3y + 4 = 0$; 5) $x + 3y - 7 = 0$; 6) $3x - 2y = 0$.

8.11. Установите соответствие между уравнением и типом кривой второго порядка

1. $x^2 + 9y = 144$
2. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1$
3. $y^2 - 2x = 0$

А. Эллипс с полуосями $a = 5$, $b = 2$

Б. Окружность с центром $C(1,2)$ и $R = 12$

В. Параболу, симметричную относительно оси ординат

Г. Параболу, симметричную относительно оси абсцисс

Д. Гиперболу с полуосями $a = 12$, $b = 4$.

Ответы: 1____, 2____, 3____.

8.12. Прямая проходит через точку $A(1,-1)$ перпендикулярно прямой $2x + y - 1 = 0$. Абсцисса точки пересечения прямой с осью Ох равна…

1) -1;   2) -2;   3) 3;   4) 2;   5) 5;   6) 4.

8.13. Расстояние от прямой $2x - y + 4 = 0$ до начала координат равно …

1) $4\sqrt{2}$;   2) $4\sqrt{5}/5$;   3) $2\sqrt{3}/3$;   4) $2\sqrt{3}/5$;   5) 2.

8.14. Установить соответствие между уравнением и типом кривой второго порядка

1. $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 4$	А. Окружность с центром в начале координат и $R = 1$
2. $x^2 - 4y^2 = 16$	Б. Окружность с центром $C(2,-1)$ и $R = 2$
3. $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} = 1$	В. Эллипс с полуосями $a = 4$, $b = 2$
	Г. Параболу, симметричную относительно оси ординат
	Д. Гиперболу с полуосями $a = 5$, $b = 2$.

Ответы: 1____, 2____, 3____.

8.15. Установить соответствие между уравнением и типом кривой второго порядка

1. $x^2 = 4 + y^2$	А. Эллипс с полуосями $a = 5$, $b = 6$
2. $9x^2 - y = 0$	Б. Параболу с фокусом $F(0,{}^{1}/_{36})$
3. $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{36} = 1$	В. Окружность с центром $O(0,0)$ и $R = 2$
	Г. Гиперболу с полуосями $a = 2$, $b = 2$
	Д. Гиперболу с полуосями $a = 2$, $b = 4$.

Ответы: 1____, 2____, 3____.

8.16. Установить соответствие между уравнением и типом кривой второго порядка

1. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$ — А. Окружность с центром в точке (0,2) и $R = 4$

2. $9x^2-25y^2=225$ — Б. Параболу, с фокусом F(-1,0)

3. $y^2+4x=0$ — В. Эллипс с полуосями $a = 5$, $b = 3$

Г. Гиперболу с полуосями $a = 5$, $b = 3$

Д. Эллипс с полуосями $a = 4$, $b = 2$.

Ответы: 1____, 2____, 3____.

8.17. Уравнение прямой l, проходящей через точку M пересечения прямых $x-2y+3=0$ и $2x+y+5=0$, параллельно оси ординат, имеет вид…

1) $4x+7=0$; 2) $x-4=0$; 3) $3x-7=0$;
4) $5x + 13 = 0$; 5) $2x - 3 = 0$; 6) $7x + 11 = 0$.

8.18. Значения α и β, при которых прямая $(\alpha-\beta)x+(2\alpha+\beta)y-1=0$ отсекает на оси Ox отрезок, равный $\frac{1}{7}$, а оси Oy – отрезок, равный $\frac{1}{2}$, определятся:

1) $\alpha=-4,\quad \beta=3$; 2) $\alpha=1,\quad \beta=-2$;
3) $\alpha=3,\quad \beta=-4$; 4) $\alpha=2,\quad \beta=-1$.

8.19. Установите соответствие, при каких значениях α следующие пары прямых, перпендикулярны

1. $2x-3y+4=0$ и $\alpha x-6y+7=0$ — А. $\alpha=-9$
2. $\alpha x-4y+1=0$ и $-2x+y+2=0$ — Б. $\alpha=-2$
3. $4x+y-6=0$ и $3x+\alpha y-2=0$ — В. $\alpha=-12$
4. $x-\alpha y+5=0$ и $2x+3y+3=0$ — Г. $\alpha=\frac{2}{3}$

Д. $\alpha=\frac{1}{5}$.

Ответы: 1____, 2____, 3____, 4 ___.

8.20. Координаты точки M_2, симметричной точке $M_1(-3;4)$ относительно прямой $l: \quad 4x - y - 1 = 0$ равны…

1) M_2(5,2); 2) M_2(-2,1); 3) M_2(1,-4); 4) M_2(2,5);

5) M_2(3,2); 6) M_2(-3,5); 7) M_2(2,2); 8) M_2(1,-2).

8.21 Луч света, пройдя через точку А(2,3) под углом α к оси Ox, отразился от нее и прошел через точку В(-5,4). Угол α равен…

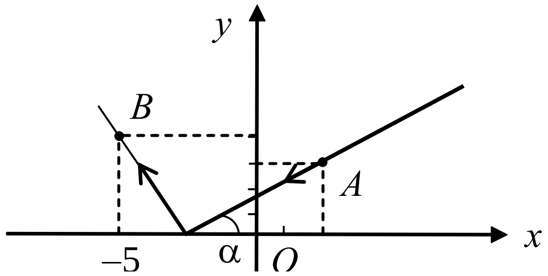


Рисунок к тестовому заданию 8.21.

1) $\frac{\pi}{2}$; 2) $\frac{\pi}{3}$; 3) $\frac{\pi}{4}$; 4) $\frac{\pi}{6}$; 5) $\frac{3\pi}{4}$; 6) $\frac{2\pi}{3}$.

8.22. Даны вершины треугольника A(2,-2), B(-6,2) и точка K(1,2) пересечения его высот. Координаты третьей вершины C равны…

1) C(4,-1); 2) C(-1,2); 3) C(2,4); 4) C(3,-1);

5) C(3,-3); 6) C(2,1); 7) C(-3,5); 8) C(1,-2).

8.23. Координаты проекции точки А(1,-3) на прямую $2x - y + 5 = 0$ равны…

1) (1,3); 2) (-3,-1); 3) (-2,-1); 4) (3,-1);

5) (3,-2); 6) (-1,-3); 7) (1,-2); 8) (-3,0).

8.24. Канонический вид линии $x^2 + y^2 - 2x + 10y + 22 = 0$ определяет кривую:

1) окружность; 2) гиперболу; 3) эллипс;

4) параболу; 5) лемнискату; 6) кардиоиду.

8.25. Уравнения прямых l_3 и l_4, на которых лежат биссектрисы углов между прямыми $l_1: \quad 3x-4y+12=0$ и $l_2: \quad 5x+12y-2=0$ имеют вид…

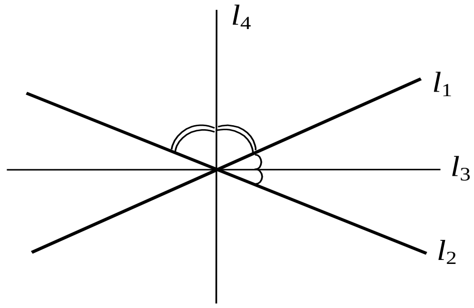


Рисунок к тестовому заданию 8.25.

1) $l_3: \quad 7x-56y+83=0;$
$l_4: \quad 3x+4y+7=0;$

2) $l_3: \quad 6x-5y+13=0;$
$l_4: \quad 15x+4y+27=0;$

3) $l_3: \quad 7x-56y+83=0;$
$l_4: \quad 32x+4y+73=0.$

4) $l_3: \quad 6x-5y+13=0;$
$l_4: \quad 32x+4y+73=0.$

8.26. Даны смежные вершины квадрата: $A(1;4)$ и $B(4;5)$. Координаты двух других вершин C, D и C', D' равны…

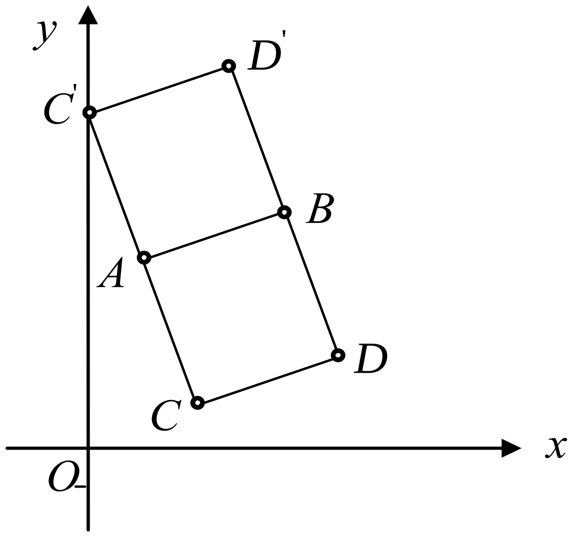


Рисунок к тестовому заданию 8.26.

1) $C(0,5)$, $D(4,9)$; $C'(3,1)$, $D'(6,2)$.

2) $C(0,7)$, $D(3,8)$; $C'(2,1)$, $D'(5,2)$.

3) $C(0,6)$, $D(2,7)$; $C'(3,2)$, $D'(6,3)$.

4) $C(0,5)$, $D(2,9)$; $C'(2,3)$, $D'(3,2)$.

5) $C(1,6)$, $D(2,8)$; $C'(3,2)$, $D'(5,1)$.

6) $C(1,7)$, $D(2,6)$; $C'(4,3)$, $D'(5,4)$.

8.27. Фокусы эллипса лежат на оси Ox, симметрично относительно начала координат, большая ось равна 20, а эксцентриситет $\varepsilon = 0{,}6$. Уравнение эллипса имеет вид…

1) $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{64}=1$; 2) $\frac{x^2}{50}+\frac{y^2}{8}=1$; 3) $\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{8}=1$;

4) $\frac{x^2}{10}+\frac{y^2}{8}=1$; 5) $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{100}=1$; 6) $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{10}=1$.

8.28. Фокусы гиперболы расположены на оси Oy симметрично относительно начала координат, уравнения асимптот $y=\pm\frac{12}{5}x$ и расстояние между вершинами равно 48, Уравнение гиперболы запишется…

1) $-\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{576}=1$; 2) $-\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{36}=1$; 3) $-\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{36}=1$;

4) $\frac{x^2}{100}-\frac{y^2}{64}=1$; 5) $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{100}=1$; 6) $\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{6}=1$.

8.29. Парабола расположена в правой полуплоскости симметрично относительно Ox, ее параметр $p = 3$, а вершина находится в начале координат. Уравнение параболы будет иметь вид…

1) $y^2 = 6x$; 2) $y^2 = 8x$ 3) $y^2 = 4x$; 4) $y^2 = 3x$;
5) $x^2 = 7y$; 6) $x^2 = 10y$; 7) $x^2 = 5y$; 8) $x^2 = 2y$.

8.30. Две стороны квадрата лежат на прямых $5x-12y-65=0$ и $5x-12y+26=0$. Площадь этого квадрата равна:

1) $S=50$; 2) $S=49$; 3) $S=16$; 4) $S=36$;

5) $S = 121$; 6) $S = 25$; 7) $S = 100$; 8) $S = 27$.

Раздел IV. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

4.1. Плоскость, ее уравнения

В пространстве плоскость определяется точкой $M_0(x_0, y_0, z_0)$, и вектором $\vec{N} = (A, B, C)$, перпендикулярным к этой плоскости, называемым *нормальным вектором плоскости*, рис. 4.1.

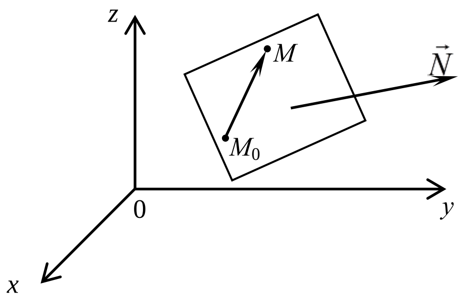


Рисунок 4.1. – Плоскость в пространстве

Пусть $M(x, y, z)$ - произвольная точка плоскости. Обозначим через $\vec{r}$ и $\vec{r}_0$ радиус-векторы точек $M(x, y, z)$ и $M_0(x_0, y_0, z_0)$. Вектор $\vec{r} - \vec{r}_0$ лежит в плоскости, следовательно, векторы $\vec{r} - \vec{r}_0$ и $\vec{N}$ перпендикулярны. Значит их скалярное произведение равно нулю:

$$\left(\vec{r} - \overrightarrow{r_o}, \vec{N}\right) = 0. \tag{4.1}$$

Равенство (4.1) называется *векторным уравнением плоскости*. В координатной форме это уравнение запишется:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \tag{4.2}$$

Полученное уравнение является *уравнением плоскости, проходящей через точку* $M_0(x_0, y_0, z_0)$ перпендикулярно вектору $\overline{N} = (A, B, C)$. Если в последнем уравнении привести подобные члены, то получим *общее уравнение плоскости:*

$$Ax + By + Cz + D = 0. \tag{4.3}$$

Общее уравнение плоскости называется *неполным*, если хотя бы один коэффициент равен нулю. Рассмотрим возможные случаи:

1) уравнение $Ax+By+Cz=0$ (D = 0) определяет *плоскость, проходящую через начало координат*;

2) уравнение $Ax+By+D=0$ (C = 0) определяет *плоскость, параллельную оси Oz*;

3) уравнение $Ax+Cz+D=0$ (B = 0) определяет *плоскость, параллельную оси Oy*;

4) уравнение $By+Cz+D=0$ (A = 0) определяет *плоскость, параллельную оси Ox*;

5) уравнение $Ax+D=0$ (B = C = 0) определяет *плоскость, параллельную координатной плоскости yOz*;

6) уравнение $By+D=0$ (A = C = 0) определяет *плоскость, параллельную координатной плоскости xOz* ;

7) уравнение $Cz+D=0$ ($A = B = 0$) определяет *плоскость, параллельную координатной плоскости xOy*;

8) уравнение $By + Cz = 0$ ($A = D = 0$) определяет *плоскость, проходящую через ось Ox*;

9) уравнение $Ax + Cz = 0$ ($B = D = 0$) определяет *плоскость, проходящую через ось Oy*;

10) уравнение $Ax + By = 0$ ($C = D = 0$) определяет *плоскость, проходящую через ось Oz*;

11) уравнение $x = 0$ ($B = C = D = 0$) определяет плоскость *yOz*;

12) уравнение $y = 0$ ($A = C = D = 0$) определяет плоскость *xOz*;

13) уравнение $z = 0$ ($A = B = D = 0$) определяет плоскость xOy.

Пример 4.1. Найти уравнение плоскости, проходящей через ось *Ox* и точку $A(1,1,1)$.

Решение. Воспользуемся случаем 8) и уравнение искомой плоскости будем искать в виде $By + Cz = 0$. Подставим координаты точки *A* в уравнение: $B\cdot 1 + C\cdot 1 = 0$, получим $B = -C$. Возвращаясь к исходному уравнению, будем иметь $-Cy + Cz = 0$. Поделив уравнение на $(-C)$, окончательно получим $y - z = 0$.

Уравнение плоскости в отрезках:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1. \tag{4.4}$$

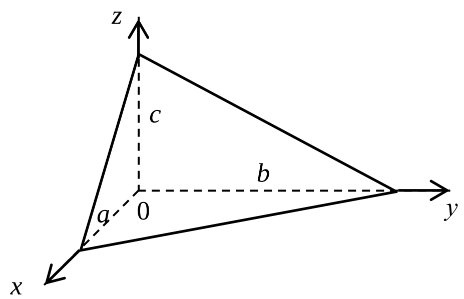


Рисунок 4.2. – Плоскость, отсекающая отрезки на осях координат

Числа a, b и c равны по абсолютной величине длинам отрезков, отсекаемых плоскостью на осях координат.

Используя условие компланарности трех векторов, можно записать *уравнение плоскости, проходящей через точку M_0 и параллельную векторам* $\overline{S}_1(m_1,n_1,p_1)$ и $\overline{S}_2(m_2,n_2,p_2)$:

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix}=0 \tag{4.5}$$

Уравнение плоскости, проходящей через три точки $M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$ и $M_3(x_3,y_3,z_3)$ имеет вид:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0. \tag{4.6}$$

Пример 4.2. Найти уравнение плоскости p_1, проходящей через три точки $M_1(1,0,4)$, $M_2(-2,1,3)$, $M_3(0,7,1)$ и уравнение плоскости p_2, проходящей через точку M_3, причем $\overline{M_1M_2} \perp p_2$.

Решение. Уравнение плоскости p_1, проходящей через три точки, согласно формуле (4.6) имеет вид:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-0 & z-4 \\ -2-1 & 1-0 & 3-4 \\ 0-1 & 7-0 & 1-4 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{или} \quad \begin{vmatrix} x-1 & y & z-4 \\ -3 & 1 & -1 \\ -1 & 7 & -3 \end{vmatrix} = 0.$$

Вычислив определитель, получим $4(x - 1) - 8y - 20(z - 4) = 0$ или уравнение плоскости p_1 запишется $x - 2y - 5z + 19 = 0$.

Так как вектор $\overline{M_1M_2}(-3,1,-1)$ и $\overline{M_1M_2} \perp p_2$, $M_3(0,7,1) \in p_2$, то, используя уравнение плоскости (4.2), проходящей через точку M_3 перпендикулярно вектору $\overline{M_1M_2}$ найдем уравнение плоскости p_2:

$-3(x - 0) + 1(y - 7) - 1(z - 1) = 0$ или $3x - y + z + 6 = 0$.

Уравнение плоскости в нормальной форме имеет вид:

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = p, \tag{4.7}$$

где α, β, γ - углы между перпендикуляром OP, опущенным из начала координат на плоскость, и положительным направлением осей координат, а p - расстояние от плоскости до начала координат, рис. 4.4.

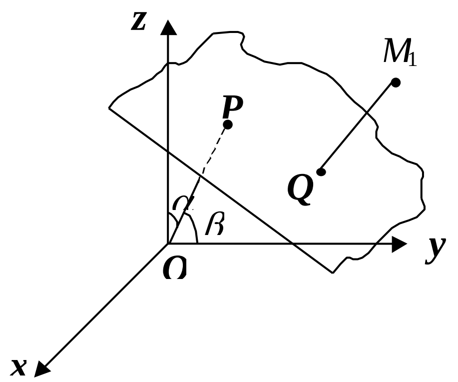


Рисунок 4.3. – Плоскость в пространстве в нормальной форме

Нормальное уравнение отличается от общего уравнения тем, что в нем коэффициенты при x, y, z являются координатами единичного вектора $\vec{n} = (\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma)$, перпендикулярного плоскости, а свободный член – отрицательный. Общее уравнение плоскости приводится к нормальной форме умножением на нормирующий множитель $\mu = \pm \dfrac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$. Знак выбирается противоположным знаку свободного члена *D*, то есть из условия $\mu D < 0$. Получается уравнение

$$\pm \frac{Ax}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \pm \frac{By}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \pm \frac{Cz}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \mp \frac{D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Расстояние от точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до плоскости $x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = p$ находится по формуле:

$$d = \left| x_0 \cos\alpha + y_0 \cos\beta + z_0 \cos\gamma - p \right|. \tag{4.8}$$

Если плоскость задана общим уравнением, то расстояние от точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до плоскости находится по формуле:

$$d = \frac{\left| Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \right|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \tag{4.9}$$

Пример 4.3. На оси *Ox* найти точку, равноудаленную от точки *A*(9,-2,2) и от плоскости $3x - 6y + 2z - 3 = 0$.

Решение. Пусть *M*(*x*,0,0) — искомая точка ($y = 0$, $z = 0$, так как точка лежит на оси *Ox*). Найдем расстояние от этой точки до данной плоскости и точки *A* по формуле (4.9):

$$d_1 = \frac{\left|3\cdot x - 6\cdot 0 + 2\cdot 0 - 3\right|}{\sqrt{3^2 + (-6)^2 + 2^2}} = \frac{|3x - 3|}{7}; \qquad d_2 = MA = \sqrt{(9-x)^2 + (-2)^2 + 2^2}.$$

Так как по условию $d_1 = d_2$, то $\sqrt{(9-x)^2 + 8} = \dfrac{|3x-3|}{7}$ или $7\sqrt{x^2 - 18x + 89} = 3|x-1|$.

Возведя в квадрат обе части последнего уравнения и приводя подобные члены, получим $5x^2 - 108x + 544 = 0$. Решением этого уравнения являются корни $x_1 = 8$, $x_2 = 13{,}6$. Следовательно, условию задачи удовлетворяют две точки $M_1(8,0,0)$ и $M_2(13.6,0,0)$.

Угол между плоскостями $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ находится по формуле:

$$cos\varphi = \pm\frac{\left(\overrightarrow{N_1},\overrightarrow{N_2}\right)}{\left|\overrightarrow{N_1}\right|\cdot\left|\overrightarrow{N_2}\right|}, \tag{4.10}$$

где $\overline{N_1} = (A_1,B_1,C_1)$ и $\overline{N_2} = (A_2,B_2,C_2)$ - нормальные векторы этих плоскостей.

Условие перпендикулярности плоскостей состоит в равенстве нулю скалярного произведения их нормальных векторов:

$$\overline{N_1}\cdot\overline{N_2} = 0 \text{ или } A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0. \tag{4.11}$$

Если плоскости параллельны, то их нормальные векторы коллинеарны, то есть координаты этих векторов пропорциональны:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}. \tag{4.12}$$

Если выполняется условие $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}$, то плоскости совпадают.

Пример 4.4. Найти уравнение плоскости, проходящей через точки $A(2,-1,4)$ и $B(3,2,-1)$ перпендикулярно плоскости $x + y + 2z – 3 = 0$.

Решение. В качестве нормального вектора $\vec{N}$ искомой плоскости можно взять вектор, перпендикулярный вектору $\overrightarrow{AB} = (1,3,-5)$ и нормальному вектору $\vec{N}_1 = (1,1,2)$ данной плоскости. Поэтому за $\vec{N}$ примем векторное произведение $\overrightarrow{AB}$ и $\vec{N}_1$:

$$\overline{N} = \overline{AB}\times\overline{N_1} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 3 & -5 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 11\bar{i} - 7\bar{j} - 2\bar{k}.$$

Остается использовать уравнение плоскости, проходящей через заданную точку (например, A) перпендикулярно заданному вектору (4.2) $\vec{N} = (11,-7,-2)$: $11(x – 2) – 7(y + 1) – 2(z - 4) = 0$, или $11x - 7y - 2z – 21 = 0$.

4.2. Прямая линия в пространстве

В пространстве прямая линия задается точкой $M_0(x_0, y_0, z_0)$, через которую проходит прямая, параллельно вектору $\vec{S} = (m, n, p)$, называемым *направляющим вектором прямой*, [9].

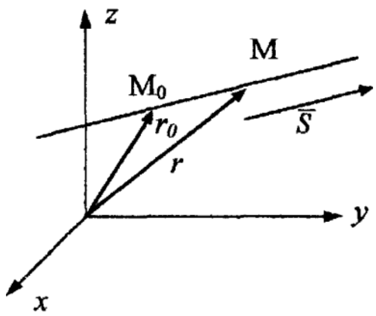


Рисунок 4.4. – Прямая в пространстве

Пусть $M(x, y, z)$ - произвольная точка прямой, рис. 4.4. Обозначим через $\vec{r}$ и $\vec{r}_0$ радиус-векторы точек $M(x, y, z)$ и $M_0(x_0, y_0, z_0)$. Вектор $\vec{r} - \vec{r}_0$ лежит на прямой, а, следовательно, векторы $\vec{r} - \vec{r}_0$ и $\vec{S}$ коллинеарны. Значит, их векторное произведение равно нулю:

$$\left(\vec{r} - \overrightarrow{r_o}\right) \times \vec{S} = 0 \ . \tag{4.13}$$

Полученное равенство называется *векторным уравнением прямой в пространстве*. Поскольку векторы $\vec{r} - \vec{r}_0 = \overrightarrow{M_0 M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ и $\vec{S} = (m, n, p)$ коллинеарны, то их координаты пропорциональны:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p} \ . \tag{4.14}$$

Данные уравнения называются *каноническими* уравнениями прямой в пространстве. Уравнение прямой (4.13) можно записать *в параметрическом виде*:

$$\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \\ z = z_0 + pt. \end{cases} \tag{4.15}$$

Уравнение *прямой, проходящей через две заданные точки* $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$ имеют вид:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}. \tag{4.16}$$

Прямая линия в пространстве может быть задана *общим уравнением*:

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0. \end{cases} \tag{4.17}$$

как линия пересечения двух плоскостей. Направляющий вектор прямой, заданной общим уравнением, можно принять результирующим вектором векторного произведения нормальных векторов данных плоскостей:

$$\vec{S}=\overrightarrow{N_1}\times\overrightarrow{N_2}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}. \tag{4.18}$$

Пример 4.5. Найти каноническое и параметрическое уравнения прямой l, заданной как пересечение двух плоскостей p_1: $2x - y + z + 3 = 0$ и
p_2: $3x + y - z + 2 = 0$.

Решение. Проверим, что заданные плоскости не параллельны, то есть их нормальные векторы не коллинеарны. Действительно, $\overline{N_1}$ = (2, -1, 1) и $\overline{N_2}$ = (3, 1, -1) - неколлинеарные векторы (их координаты не пропорциональны). Поэтому направляющий вектор $\overline{S}$ прямой l согласно формуле (4.18) равен:

$$\overline{S}=\overline{N_1}\times\overline{N_2}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix}=0i+5j+5k.$$

Итак, $\overline{S}$ = (0,5,5). Из общего уравнения прямой $l:\left.\begin{matrix} 2x-y+3=0 \\ 3x+y+2=0 \end{matrix}\right\}$ найдем любую точку, принадлежащую данной прямой. Пусть z = 0, тогда, решая систему $\left.\begin{matrix} 2x-y+3=0 \\ 3x+y+2=0 \end{matrix}\right\}$, находим x = -1, y = 1. Итак, точка M(-1,1,0) принадлежит прямой *l*. Тогда каноническое уравнение прямой запишется:

$$\frac{x+1}{0}=\frac{y-1}{5}=\frac{z-0}{5},$$

а параметрические уравнения заданной прямой примут вид:

$$\begin{cases} x=-1 \\ y=5t+1. \\ z=5t \end{cases}$$

Пример 4.6. Составить уравнение прямой, проходящей через точку *M*(3,2,-1) и пересекающей ось *Ox* под прямым углом.

Решение. Так как прямая перпендикулярна оси *Ox* и пересекает ее, то она проходит через точку *K*(3,0,0). Составим уравнение искомой прямой, проходящей через две точки *M* и *K*, согласно формуле (4.16):

$$\frac{x-3}{3-3}=\frac{y-2}{0-2}=\frac{z+1}{0+1}\Rightarrow\frac{x-3}{0}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z+1}{1}.$$

Углом между двумя прямыми l_1 *и* l_2 называют любой из двух смежных углов, образованных прямыми, проведенными через произвольную точку пространства параллельно данным. Один из двух смежных углов между прямыми l_1 и l_2 равен углу между направляющими векторами $\overline{S_1}$ и $\overline{S}_2$:

$$\cos\varphi=\frac{\overline{S_1},\overline{S_2}}{|\overline{S_1}|\cdot|\overline{S_2}|},$$

или
$$\cos\varphi=\frac{m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}. \qquad (4.19)$$

В частности, если *прямые перпендикулярны*, то $\overline{S_1}\perp\overline{S_2}$, тогда выполняется условие:

$$m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0. \qquad (4.20)$$

Если прямые параллельны, то их направляющие векторы тоже параллельны и выполняется условие:

$$\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_1}{p_2}\ . \qquad (4.21)$$

4.3. Прямая и плоскость в пространстве

Пусть в пространстве дана прямая l: $\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \\ z = z_0 + pt. \end{cases}$ и плоскость α: $Ax + By + Cz + D = 0$. Возможны следующие случаи их взаимного расположения: они могут пересекаться, быть параллельными, либо прямая может лежать в плоскости.

1. *Прямая l пересекает плоскость α* тогда и только тогда, когда направляющий вектор прямой не параллелен плоскости, т. е. когда

$$Am + Bn + Cp \neq 0. \tag{4.22}$$

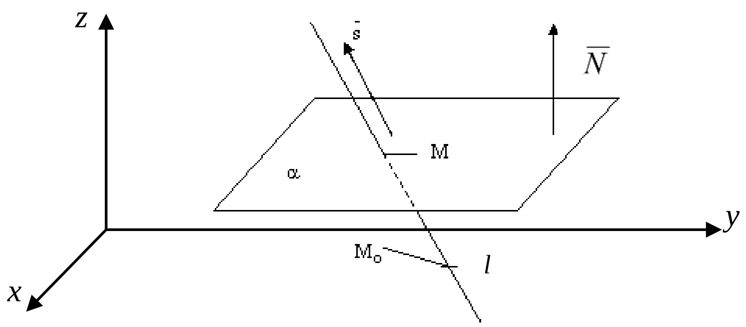


Рисунок 4.5. – Прямая и плоскость пересекаются

Чтобы найти *координаты точки пересечения прямой и плоскости*, надо решить систему, состоящую из уравнений прямой и уравнения плоскости:

$$\begin{cases} A(x_o + mt) + B(y_o + nt) + C(z_o + pt) = 0, \\ x = x_o + mt, \\ y = y_o + nt, \\ z = z_o + pt. \end{cases} \tag{4.23}$$

Пример 4.7. Найти точку пересечения прямой $l: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+5}{1} = \dfrac{z-3}{1}$ с плоскостью α: $x + 2y + z - 4 = 0$.

Решение. Запишем уравнение прямой в параметрическом виде:

$$\begin{cases} x = -1 \\ y = 5t + 1 \\ z = 5t \end{cases}$$

Подставим в уравнение плоскости *α,* получим:

$2t + 1 + 2(t - 5) + t + 3 – 4 = 0$, $5t = 10$ или $t = 2$, тогда $x = 5$, $y = -3$, $z = 5$.

Точка M (5, -3, 5) является точкой пересечения прямой l с плоскостью *α.*

2. *Прямая l параллельна плоскости α* тогда и только тогда, когда точка $M_o(x_o,y_o,z_o)$ не лежит в этой плоскости и направляющий вектор прямой параллелен плоскости, т. е. выполняются соотношения:

$$\begin{cases} Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0, \\ Am + Bn + Cp \qquad = 0. \end{cases} \tag{4.24}$$

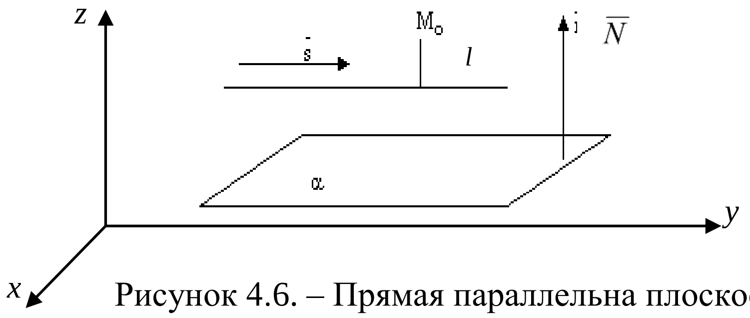


Рисунок 4.6. – Прямая параллельна плоскости

3. Прямая l лежит в плоскости $α$ тогда и только тогда, когда выполняются равенства:

$$\begin{cases} Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0, \\ Am + Bn + Cp \qquad = 0. \end{cases} \tag{4.25}$$

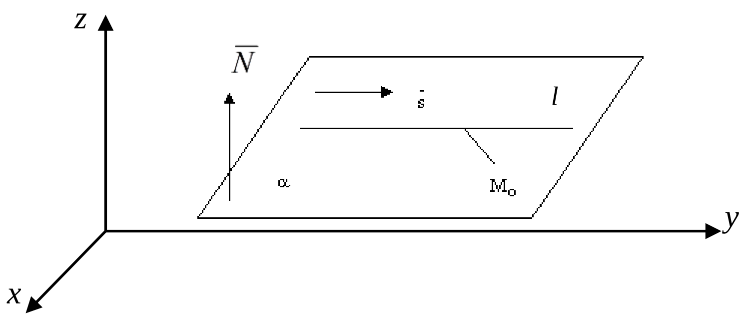


Рисунок 4.7. – Прямая лежит в плоскости

Пример 4.8. Выяснить взаимное расположение прямой и плоскости, заданных соответственно уравнениями: $\frac{x}{10}=\frac{y+1}{-4}=\frac{z-3}{-6}$; $3x+6y+z-8=0$.

Решение. По каноническим уравнениям прямой находим точку $M_o(0,-1,3)$ на данной прямой и направляющий вектор $\vec{S}(10,-4,-6)$ этой прямой. Имеем:

$$Am+Bn+Cp=3\cdot 10+6(-4)+1(-6)=0,$$

$$Ax_0+By_0+Cz_0+D=3\cdot 0+6(-1)+1\cdot 3-8\neq 0.$$

Следовательно, прямая и плоскость параллельны.

Углом φ между прямой и плоскостью будем называть любой из двух смежных углов, образованных прямой и ее проекцией на плоскость, рис. 4.7.

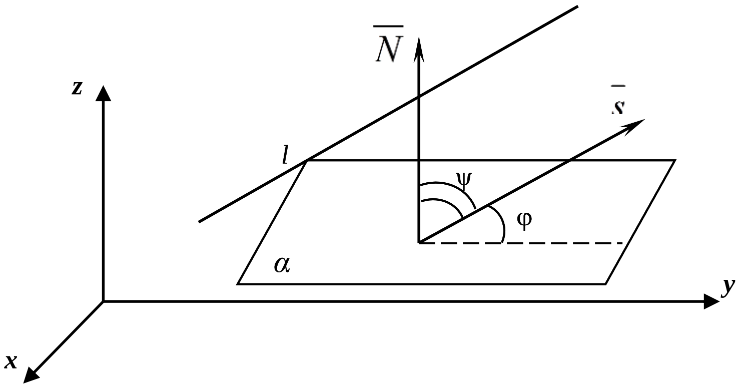


Рисунок 4.8. – Угол между прямой и плоскостью

Пусть ψ - угол между векторами $\overline{N}$ и $\overline{S}$, тогда ψ = 90° - *φ,* следовательно,

$$\cos\psi = \cos(90^{\circ} - \varphi) = \sin\varphi.$$

Из определения скалярного произведения векторов имеем:

$$\cos\psi=\frac{(\overline{N},\overline{S})}{|\overline{N}|\cdot|\overline{S}|}=\sin\varphi.$$

или
$$\sin\varphi=\frac{Am+Bn+Cp}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{m^2+n^2+p^2}}. \qquad (4.26)$$

В частности, если *прямая и плоскость параллельны,* то $\overline{S}\perp\overline{N}$ тогда

$$Am+Bn+Cp=0. \tag{4.27}$$

Если *прямая и плоскость перпендикулярны*, то $\overline{S} \parallel \overline{N}$ и выполняется условие

$$\frac{A}{m}=\frac{B}{n}=\frac{C}{p}. \tag{4.28}$$

Пример 4.9. Найти точку *K*, симметричную точке *M*(-1,0,-2) относительно прямой $\frac{x+2}{1}=\frac{y+5}{2}=\frac{z-3}{-2}$.

Решение. Найдем уравнение плоскости, проходящей через точку *M*, перпендикулярно данной прямой. Направляющий вектор прямой $\vec{S}=(1,2,-2)$ будет перпендикулярен плоскости, поэтому можно взять в качестве нормального вектора плоскости вектор $\vec{N}=(1,2,-2)$. Находим уравнение

$$1(x+1)+2y-2(z+2)=0,$$

$$x+2y-2z-3=0.$$

Найдем точку пересечения прямой и плоскости.

$$\begin{cases} x=t-2, \\ y=2t-5, \\ z=-2t+3, \end{cases}$$

$$t-2+4t-10+4t-6-3=0,\ 9t-21=0,\ t=\frac{7}{3}.$$

Точка пересечения $P\left(\frac{1}{3},-\frac{1}{3},-\frac{5}{3}\right)$. Из формул деления отрезка пополам (3.3') находим:

$$\begin{cases} x_K=2x_P-x_M=\frac{2}{3}+1=\frac{5}{3}, \\ y_K=2y_P-y_M=-\frac{2}{3}, \\ z_K=2z_P-z_M=-\frac{10}{3}+2=-\frac{4}{3}. \end{cases}$$

Ответ: $K\left(\frac{5}{3},-\frac{2}{3},-\frac{4}{3}\right)$.

Вопросы для самопроверки

1. Задание плоскости в пространстве.
2. Общее уравнение плоскости, ее исследование.
3. Виды уравнений плоскости (векторное, общее, через заданную точку, через три точки).
4. Уравнение плоскости в отрезках.
5. Угол между плоскостями. Условие параллельности и перпендикулярности двух плоскостей.
6. Расстояние от заданной точки до плоскости.
7. Векторное и параметрическое уравнение прямой в пространстве.
8. Уравнения прямой в пространстве: общее, каноническое, проходящей через две точки.
9. Переход от общего уравнения прямой к каноническому и параметрическому уравнениям.
10. Взаимное расположение прямых в пространстве.
11. Угол между прямыми. Условие параллельности и перпендикулярности двух прямых в пространстве.
12. Взаимное расположение плоскости и прямой в пространстве.
13. Угол между плоскостью и прямой.
14. Условие параллельности и перпендикулярности прямой и плоскости.
15. Определение точки пересечения прямой с плоскостью.
16. Условие принадлежности прямой плоскости.

ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ № 9

«Аналитическая геометрия в пространстве» (теория)

9.1. Нормальный вектор плоскости – это:

1) вектор, параллельный этой плоскости;
2) вектор, коллинеарный вектору плоскости;
3) вектор, лежащий в этой плоскости;
4) нулевой вектор;
5) вектор, компланарный двум векторам плоскости;
6) вектор, перпендикулярный этой плоскости.

9.2. Направляющий вектор прямой в пространстве определяется из условия:

1) $(\overline{N}, \overline{\mathrm{R}} - \overline{\mathrm{R}}_o)$; 2) $\overline{\mathrm{N}}_1 \times \overline{\mathrm{N}}_2$; 3) $m/m_1 = n/n_1 = p/p_1$; 4) $mm_1 + nn_1 + pp_1 = 0$.

9.3. Угол между двумя прямыми в пространстве определяется как угол между:

1) двумя нормальными векторами пересекающихся плоскостей;
2) нормальным вектором плоскости, в которой лежит одна прямая, и направляющим вектором второй прямой;
3) направляющими векторами прямых;
4) перпендикулярными векторами направляющим векторам прямых.

9.4. Условие $Am + Bn + Cp = 0$ является условием:

1) принадлежности прямой плоскости;
2 перпендикулярности прямой и плоскости;
3) параллельности прямой и плоскости;
4) пересечения прямой и плоскости;
5) скрещивания прямой и плоскости.

9.5. Среди представленных ниже уравнений укажите нормальное уравнение плоскости:

1) $Ax + By + Cz + D = 0$;

2) $\dfrac{x - x_0}{m} = \dfrac{y - y_0}{n} = \dfrac{z - z_0}{p}$;

3) $x \cdot \cos\alpha + y \cdot \cos\beta + z \cdot \cos\gamma - p = 0$;

4) $\begin{cases} x = mt + x_0, \\ y = nt + y_0, \\ z = pt + z_0 \end{cases}$

9.6. Плоскость параллельна плоскости Oxz, если в ее общем уравнении коэффициенты:

1) $A = 0$, $D = 0$; 2) $B = 0$, $C = 0$; 3) $A = 0$, $B = 0$;
4) $C = 0$, $D = 0$; 5) $B = 0$, $D = 0$; 6) $A = 0$, $C = 0$.

9.7. Условие перпендикулярности двух плоскостей состоит в следующем:

1) $(\overline{N}, \overline{\mathrm{R}} - \overline{\mathrm{R}}_o) = 0$; 2) $\overline{\mathrm{N}}_1 \times \overline{\mathrm{N}}_2 = 0$;

3) $A/A_1 = B/B_1 = C/C_1$; 4) $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$.

9.8. Угол между прямой $\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{k}$ и плоскостью $x \cdot \cos\alpha + y \cdot \cos\beta + z \cdot \cos\gamma - p = 0$ находят по формуле:

1) $\sin\varphi = \frac{m \cdot \cos\alpha + n \cdot \cos\beta + k \cdot \cos\gamma}{\sqrt{m^2 + n^2 + k^2}}$;

2) $\cos\varphi = \frac{m \cdot \cos\alpha + n \cdot \cos\beta + k \cdot \cos\gamma}{\sqrt{m^2 + n^2 + k^2}}$;

3) $\sin\varphi = \frac{x_0 \cdot \cos\alpha + y_0 \cdot \cos\beta + z_0 \cdot \cos\gamma}{p \cdot \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}}$;

4) $\cos\varphi = \frac{x_0 \cdot \cos\alpha + y_0 \cdot \cos\beta + z_0 \cdot \cos\gamma}{p \cdot \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}}$.

9.9. Направляющий вектор прямой – это:

1) вектор, параллельный этой прямой;
2) вектор, коллинеарный нормальному вектору плоскости, в которой лежит прямая;
3) вектор, пересекающий данную прямую под каким либо углом;
4) нулевой вектор;
5) вектор, компланарный нормальным векторам пересекающихся плоскостей;
6) вектор, перпендикулярный этой прямой.

9.10. Угол между плоскостями в пространстве определяется как угол между:

1) двумя нормальными векторами пересекающихся плоскостей;
2) нормальным вектором одной плоскости и направляющим вектором прямой, которая лежит на другой плоскости;
3) направляющими векторами прямых, лежащих в данных плоскостях.

9.11. Условие параллельности двух плоскостей состоит в следующем условии:

1) $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$; 2) $A/m = B/n = C/p$;

3) $A/A_1 = B/B_1 = C/C_1$; 4) $Am + Bn + Cp = 0$.

9.12. Условие $A/m = B/n = C/p$ является условием:

1) принадлежности прямой плоскости;
2) перпендикулярности прямой и плоскости;
3) параллельности прямой и плоскости;
4) пересечения прямой и плоскости;
5) скрещивания прямой и плоскости.

9.13. Плоскость проходит через ось Oz, если в ее общем уравнении коэффициенты:

1) $A = 0, D = 0$; 2) $B = 0, C = 0$; 3) $A = 0, B = 0$;
4) $C = 0, D = 0$; 5) $B = 0, D = 0$; 6) $A = 0, C = 0$.

9.13. Плоскость параллельна оси Oz, если в ее общем уравнении коэффициенты:

1) $A = 0$; 2) $B = 0, C = 0$; 3) $A = 0, B = 0$;
4) $C = 0$; 5) $B = 0, D = 0$; 6) $A = 0, C = 0$.

9.14. Среди представленных ниже уравнений укажите параметрические уравнения прямой в пространстве:

1) $Ax + By + Cz + D = 0$

2) $\dfrac{x - x_0}{m} = \dfrac{y - y_0}{n} = \dfrac{z - z_0}{p}$

3) $x \cdot \cos\alpha + y \cdot \cos\beta + z \cdot \cos\gamma - p = 0$

4) $\begin{cases} x = mt + x_0, \\ y = nt + y_0, \\ z = pt + z_0 \end{cases}$

9.15. Условие $m_1/m_2 = n_1/n_2 = p_1/p_2$ является условием:

1) принадлежности прямой плоскости;
2) перпендикулярности прямой и плоскости;
3) параллельности плоскостей;
4) пересечения прямых;
5) параллельности прямых.

9.17. Условие $m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2 = 0$ является условием:

1) принадлежности прямой плоскости;
2) перпендикулярности прямой и плоскости;
3) параллельности плоскостей;
4) пересечения прямых в пространстве;
5) параллельности прямых; е) перпендикулярности двух прямых.

9.18. Плоскость параллельна оси Ox, если в ее общем уравнении коэффициенты:

1) $A = 0, D = 0$; 2) $B = 0, C = 0$; 3) $A = 0$;
4) $C = 0$; 5) $D = 0$; 6) $A = 0, C = 0$.

9.19. Условие параллельности прямой и плоскости состоит в следующем:

1) $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$; 2) $A/m = B/n = C/p$;
3) $A/A_1 = B/B_1 = \mathrm{C}/\mathrm{C}_1$; 4) $Am + Bn + Cp = 0$.

9.20. Уравнение $Ax + Cz + D = 0$ определяет плоскость:

1) параллельную оси Ox; 2) параллельную оси Oy;
3) параллельную оси Oz; 4) проходящую через ось Ox;
5) проходящую через ось Oy; 6) проходящую через ось Oz;
7) проходящую через начало координат.

9.21. Плоскость параллельна плоскости Oxy, если в ее общем уравнении коэффициенты:

1) $A = 0, D = 0$; 2) $B = 0, C = 0$; 3) $A = 0, B = 0$;
4) $C = 0$; 5) $D = 0$; 6) $A = 0, C = 0$.

9.22. Условие $\bar{\mathrm{S}}_1 \cdot \bar{\mathrm{S}}_2 = 0$ является условием:

1) принадлежности прямой плоскости;
2) перпендикулярности прямой и плоскости;
3) параллельности плоскостей;
4) пересечения прямых;
5) параллельности прямых;
6) перпендикулярности двух прямых.

9.23. Уравнение пучка плоскостей запишется в виде:

1) $A(x - x_o) + B(y - y_o) + C(z - z_o) = 0$; 2) $x/a + y/в + z/c = 1$;
3) $\mathrm{A}x + \mathrm{B}y + \mathrm{C}z + D = 0$; 4) $By + D = 0$;
5) $\dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \dfrac{z - z_1}{z_2 - z_1}$; 6) $Ax + By + D = 0$.

9.24. Плоскость параллельна плоскости Oyz, если в ее общем уравнении коэффициенты:

1) $A = 0, D = 0$; 2) $B = 0, C = 0$; 3) $A = 0, B = 0$;
4) $C = 0, D = 0$; 5) $B = 0, D = 0$; 6) $A = 0, C = 0$.

9.25. Две прямые в пространстве лежат в одной плоскости, если:

1) скалярное произведение направляющих векторов прямых равно нулю;
2) векторное произведение направляющих векторов прямых равно нулю;
3) смешанное произведение направляющих векторов и вектора, соединяющего две точки, лежащих на каждой прямой, равно нулю;
4) смешанное произведение направляющих векторов и вектора, соединяющего две точки, лежащих на каждой прямой, отлично от нуля.

9.26. Уравнение $Ax + By + Cz = 0$ определяет плоскость:

1) параллельную оси Ox; 2) параллельную оси Oy;
3) параллельную оси Oz; 4) проходящую через ось Ox;
5) проходящую через ось Oy; 6) проходящую через ось Oz;
7) проходящую через начало координат.

9.27. Условие $\overline{S} \cdot \overline{N} = 0$ является условием:

1) принадлежности прямой плоскости;
2) перпендикулярности прямой и плоскости;
3) параллельности прямой и плоскости;
4) пересечения прямой и плоскости;
5) скрещивания прямой и плоскости.

9.28. Условие $[\overrightarrow{S}, \overrightarrow{N}] = 0$ является условием:

1) принадлежности прямой плоскости;
2) перпендикулярности прямой и плоскости;
3) параллельности прямой и плоскости;
4) пересечения прямой и плоскости;
5) скрещивания прямой и плоскости.

9.29. Уравнение $Cz + D = 0$ определяет плоскость:

1) параллельную плоскости Oxy; 2) параллельную оси Oy;
3) параллельную оси Oz; 4) проходящую через ось Ox;
5) проходящую через ось Oy; 6) проходящую через ось Oz;
7) проходящую через начало координат.

9.30. Две прямые в пространстве являются скрещивающимися, если:

1) скалярное произведение направляющих векторов прямых равно нулю;
2) векторное произведение направляющих векторов прямых равно нулю;
3) смешанное произведение направляющих векторов и вектора, соединяющего две точки, лежащих на каждой прямой, равно нулю;
4) смешанное произведение направляющих векторов и вектора, соединяющего две точки, лежащих на каждой прямой, отлично от нуля.

Контрольная работа № 4

"Аналитическая геометрия в пространстве"

Задание 1. Записать уравнение плоскости, параллельной данной координатной плоскости и проходящей через точку $M_o(x_o,y_o,z_o)$. Построить плоскость.

1.1. Oxz, $M_0(2,1,3)$.	1.2. Oxy, $M_0(7,-3,1)$.
1.3. Oyz, $M_0(1,1,1)$.	1.4. Oxz, $M_0(-1,0,-1)$.
1.5. Oxz, $M_0(-1,3,1)$.	1.6. Oxy, $M_0(4,0,-2)$.
1.7. Oyz, $M_0(1,0,-1)$.	1.8. Oyz, $M_0(-4,3,2)$.
1.9. Oxz, $M_0(-5,3,1)$.	1.10. Oyz, $M_0(-3,5,4)$.
1.11. Oyz, $M_0(-1,0,1)$.	1.12. Oxz, $M_0(1,2,-1)$.
1.13. Oxz, $M_0(1,-2,3)$.	1.14. Oyz, $M_0(-3,3,-2)$.
1.15. Oxy, $M_0(-1,1,-1)$.	1.16. Oxy, $M_0(2,-1,2)$.
1.17. Oxz, $M_0(2,-3,5)$.	1.18. Oxz, $M_0(-3,4,-2)$.
1.19. Oxz, $M_0(-2,0,-3)$.	1.20. Oxy, $M_0(1,2,1)$.

Задание 2. Даны точки A, B, C, D, являющиеся вершинами пирамиды. Найти: а) уравнение грани ABC; б) уравнение и длину высоты пирамиды, проведённой из точки A; в) записать уравнение прямой, проходящей через точку D параллельно прямой AC; г) составить уравнение плоскости, проходящей через точку A перпендикулярно прямой BD.

2.1. $A(1,0,1)$, $B(2,1,0)$, $C(3,2,1)$, $D(1,2,3)$.

2.2. $A(1,1,0)$, $B(1,2,0)$, $C(0,1,2)$, $D(0,0,1)$.

2.3. $A(1,2,0)$, $B(2,1,0)$, $C(2,1,1)$, $D(1,1,1)$.

2.4. $A(2,3,0)$, $B(1,2,0)$, $C(1,1,1)$, $D(0,5,0)$.

2.5. $A(1,0,1)$, $B(0,1,1)$, $\mathrm{C}(1,1,0)$, $D(2,1,2)$.

2.6. $A(2,1,1)$, $B(1,0,2)$, $C(2,2,1)$, $D(3,2,1)$.

2.7. $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$, $C(0,0,1)$, $(1,1,0)$.

2.8. $A(1,1,1)$, $B(2,2,2)$, $C(3,0,3)$, $D(1,1,0)$.

2.9. $A(1,0,1)$, $B(2,1,0)$, $C(1,2,0)$, $D(1,3,1)$.

2.10. $A(1,1,1)$, $B(2,1,1)$, $C(1,3,1)$, $D(1,1,4)$.

2.11. $A(2,1,1)$, $B(3,0,1)$, $C(2,1,3)$, $D(0,2,0)$.

2.12. $A(1,1,-2)$, $B(2,0,-1)$, $C(1,1,0)$, $D(2,3,0)$.

2.13. $A(2,1,2)$, $B(3,0,3)$, $C(1,1,2)$, $D(1,2,3)$.

2.14. $A(0,1,-2)$, $B(1,3,-1)$, $C(3,3,0)$, $D(1,2,-2)$.

2.15. $A(0,0,1)$, $B(2,2,1)$, $C(0,2,3)$, $D(1,1,2)$.

2.16. $A(1,0,-2)$, $B(2,1,-1)$, $C(1,2,-1)$, $D(1,-1,-3)$.

2.17. $A(2,2,2)$, $B(1,3,3)$, $C(1,3,2)$, $D(0,2,3)$.

2.18. $A(1,2,-1)$, $B(0,1,3)$, $C(1,2,1)$, $D(2,-1,-1)$.

2.19. $A(2,1,-3)$, $B(2,1,2)$, $C(3,2,1)$, $D(2,2,-3)$.

2.20. $A(1,2,1)$, $B(2,3,2)$, $C(1,0,1)$, $D(0,3,2)$.

Задание 3. Написать каноническое уравнение прямой, заданной пересечением двух данных плоскостей

3.1.

$2x + y + z - 2 = 0,$

$2x - y - 3z + 6 = 0.$

3.2.

$x - 3y + 2z - 2 = 0,$

$x + 3y + z + 14 = 0.$

3.3.

$x - 2y + z - 4 = 0,$

$2x + 2y - z - 8 = 0.$

3.4.

$2x + 3y + z + 6 = 0,$

$x - 3y - 2z + 3 = 0.$

3.5.

$3x + y - z - 6 = 0,$

$3x - y + 2z = 0.$

3.6

$x + 5y + 2z + 11 = 0,$

$x - y - z - 1 = 0.$

3.7.

$5x + y - 3z + 4 = 0,$

$x - y + 2z + 2 = 0.$

3.8.

$x - y - z - 2 = 0,$

$x - 2y + z + 4 = 0.$

3.9.

$4x + y - 3z + 2 = 0,$

$2x - y + z - 8 = 0.$

3.10.

$6x - 7y - 4z - 2 = 0,$

$x + 7y - z - 5 = 0.$

3.11.

$8x - y - 3z - 1 = 0.$

$x + y + z + 10 = 0.$

3.12.

$6x - 5y - 4z + 8 = 0.$

$6x + 5y + 3z + 4 = 0.$

3.13.

$2x - 3y + z + 6 = 0,$

$x - 3y - 2z + 3 = 0.$

3.14.

$5x + y + 2z + 4 = 0.$

$x - y - 3z + 2 = 0.$

3.15.

$4x + y + z + 2 = 0,$

$2x - y - 3z - 8 = 0.$

3.16.

$x + y + z - 2 = 0,$

$x - y - 2z + 2 = 0.$

3.17.

$3x + 4y - 2z + 1 = 0,$

$2x - 4y + 3z + 4 = 0.$

3.18.

$3x + 3y - 2z - 1 = 0,$

$2x - 3y + z + 6 = 0.$

3.19.

$x + 5y - z - 5 = 0,$

$2x - 5y + 2z + 5 = 0.$

3.20.

$2x + y - 3z - 2 = 0,$

$2x - y + z + 6 = 0.$

Задание 4. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ параллельно плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$. Найти расстояние от точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до заданной плоскости

4.1. $M_0(-2,-1, 3)$, $-5x - y + 2z - 5 = 0$. 4.2. $M_0(6,-1, 3)$, $-x - 3y + z - 10 = 0$.

4.3. $M_0(4,-6, 3)$, $6x - 6y + z = 0$. 4.4. $M_0(4,-1, 0)$, $x - 8y + 2z - 34 = 0$.

4.5. $M_0(5,-1, 3)$, $-5x - 2z - 14 = 0$. 4.6. $M_0(4,-5, -1)$, $x - 9y + 2z - 1 = 0$.

4.7. $M_0(2,-5, 3)$, $-7x - 3y + 2z - 3 = 0$. 4.8. $M_0(2,-1, 6)$, $-9x - y + 2z - 3 = 0$.

4.9. $M_0(0,-1, 3)$, $x - 3y + 2z - 4 = 0$. 4.10. $M_0(-7,-1, 3)$, $8x - 3y + z - 5 = 0$.

4.11. $M_0(1,-2, 2)$, $-5x - y + 2z - 25 = 0$. 4.12. $M_0(-3,-1, 0)$, $x - 3y + 2z - 4 = 0$.

4.13. $M_0(0,-1, 3)$, $-6x - y + 2z - 14 = 0$. 4.14. $M_0(-2,-1, 3)$, $x - 5 = 0$.

4.15. $M_0(4, 0, 5)$, $-3x - 3y + z - 3 = 0$. 4.16. $M_0(-3,-1,-2)$, $-6x - y + 2z - 14 = 0$.

4.17. $M_0(-7,-6, 3)$, $x - 3 = 0$. 4.18. $M_0(-2,-1,-0)$, $x - 3y + 7z - 9 = 0$.

4.19. $M_0(-1,-1, 2)$, $x - 3y + 2z - 4 = 0$. 4.20. $M_0(1,-2, 2)$, $-3y + z - 34 = 0$.

Решение типового варианта контрольной работы № 3 «Аналитическая геометрия в пространстве»

Задание 1. Записать уравнение плоскости, параллельной координатной плоскости xOz и проходящей через точку $M_o(2, -3, -4)$. Построить плоскость.

Решение. Уравнение плоскости, параллельной xOz, имеет вид: $By + D = 0$. Подставляя в него координаты точки M, получаем: $B \cdot (-3) + D = 0$, $D = 3B$. Следовательно, искомое уравнение примет вид $By + 3B = 0$ или $y + 3 = 0$. Построим плоскость.

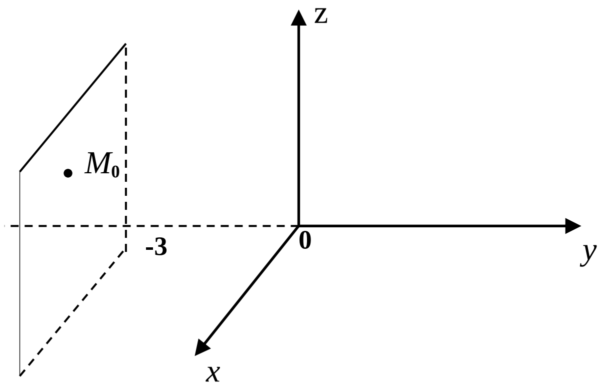


Рисунок к заданию 1

Задание 2. Даны точки $A(3,1,3)$, $B(-3,4,0)$,$C(3,3,4)$, $D(2,2,-2)$, являющиеся вершинами пирамиды. Найти: а) уравнение грани ABC; б) уравнение и длину высоты пирамиды, проведённой из точки A; в) записать уравнение прямой, проходящей через точку D параллельно прямой AC, г) составить уравнение плоскости, проходящей через точку A перпендикулярно прямой BD.

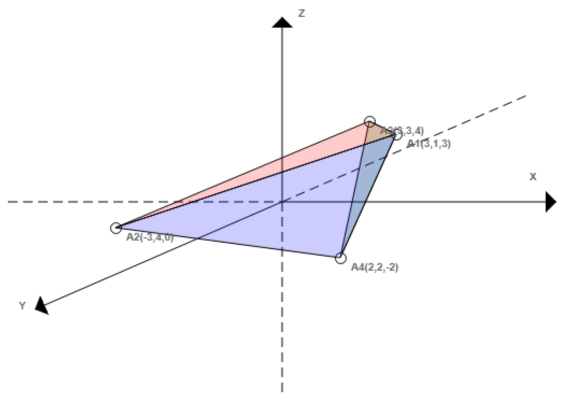


Рисунок к заданию 2

Решение. а) Уравнение грани ABC найдем как уравнение плоскости, проходящей через три точки (4.6):

$$\begin{vmatrix} x-3 & y-1 & z-3 \\ -3-3 & 4-1 & 0-3 \\ 3-3 & 3-1 & 4-3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-3 & y-1 & z-3 \\ -6 & 3 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} x-3 & y-1 & z-3 \\ -6 & 3 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 9(x-3)+6(y-1)-12(z-3) = 9x+6y-12z+3=0.$$

Таким образом, уравнение *ABC*: $9x + 6y – 12z + 3 = 0$

б) Чтобы составить уравнение высоты *AH* и найти ее длину, необходимо определить уравнение плоскости *BCD*. Подставив координаты точек *B,C,D* в уравнение (4.6), получим:

$$\begin{vmatrix} x+3 & y-4 & z-0 \\ 3+3 & 3-4 & 4-0 \\ 2+3 & 2-4 & -2-0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x+3 & y-4 & z \\ 6 & -1 & 4 \\ 5 & -2 & -2 \end{vmatrix} = 8(x+3)+32(y-4)+$$
$$+7z = 8x+32y+7z-104=0$$

$$BCD: \quad 8x + 32y + 7z – 104 = 0.$$

Нормальный вектор плоскости *BCD* имеет координаты $\vec{N} = (8{,}32{,}7)$. Направляющий вектор высоты *AH* параллелен нормальному вектору плоскости *BCD*. Согласно условию перпендикулярности прямой и плоскости (4.20) и каноническому уравнению прямой (4.14), уравнение высоты запишется:

$$\frac{x-3}{8} = \frac{y-1}{32} = \frac{z-3}{7}.$$

Длину высоты *AH* вычислим, как расстояние от точки до плоскости, по формуле (4.9):

$$|AH| = \frac{|8\cdot 3+32\cdot 1+7\cdot 3-104|}{\sqrt{8^2+32^2+7^2}} \approx \frac{|-27|}{33{,}72} \approx 0{,}8.$$

в) Рассмотрим вектор $\overline{AC}$ как направляющий вектор для прямой проходящей через точку *D*(2,2,-2) параллельно прямой *AC*. Вектор $\overline{AC}$ имеет координаты (0,2,-5). Тогда уравнение прямой, проходящей через точку *D* параллельно прямой *AC* запишется:

$$\frac{x-2}{0}=\frac{y-2}{2}=\frac{z+2}{-5}.$$

г) Для составления уравнения плоскости, проходящей через точку $A(3,1,3)$, перпендикулярно прямой BD, используем уравнение (4.2). Найдем вектор $\overline{BD}$: $\overrightarrow{BD}=(5,-2,-2)$, тогда уравнение плоскости будет иметь вид:

$$5(x-3)+(-2)(y-1)+(-2)(z-3)=0,$$

$$5x-2y-2z-7=0.$$

Задание 3. Написать каноническое уравнение прямой, заданной пересечением двух данных плоскостей $\begin{cases} x-2y+3z+15=0, \\ 2x+3y-4z-12=0 \end{cases}.$

Решение. Найдем направляющий вектор $\vec{S}=(m,n,p)$ прямой. Поскольку он должен быть перпендикулярен нормальным векторам заданных плоскостей $\overrightarrow{N_1}=(1,\text{-}2,3),\overrightarrow{N_2}=(2,3,\text{-}4)$ в качестве его можно взять векторное произведение векторов $\overline{N_1}$ и $\overline{N_2}$:

$$\bar{s}=\left[\overline{N}_1,\overline{N}_2\right]=\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -4 \end{vmatrix}=-\bar{i}+10\bar{j}+7\bar{k}.$$

Таким образом, $\vec{S}=(\text{-}1,10,7)$.

За точку $M_0(x_0,y_0,z_0)$, через которую проходит искомая прямая, можно принять любую точку, координаты которой удовлетворяют общим уравнениям плоскостей. Полагая $x_0=0$, из системы уравнений

$$\begin{cases} 0-2y_0+3z_0+15=0, \\ 2\cdot 0+3y_0-4z_0-12=0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} 2y_0-3z_0=15, \\ 3y_0-4z_0=12 \end{cases}$$

получаем $y_0=-24,\ \ z_0=-21$. Итак, искомое каноническое уравнение прямой имеет вид:

$$\frac{x}{-1}=\frac{y+24}{10}=\frac{z+21}{7}.$$

Задание 4. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(2,3,-1)$ параллельно плоскости $2x-3y+5z-4=0.$ Найти расстояние от точки $M(2,3,-1)$ до заданной плоскости

Решение. Если плоскости параллельны, то их уравнения будут отличаться только свободным членом. Тогда уравнение плоскости, параллельной данной плоскости, запишется следующим образом: $2x-3y+5z+D=0$.Подставляя в это уравнение вместо текущих координат x, y, z координаты точки $M(2,3,-1)$, через которую проходит плоскость, получим уравнение: $2\cdot 2-3\cdot 3+5\cdot(-1)+D=0$, $D=10$. Уравнение плоскости примет вид: $2x-3y+5z-10=0$. Расстояние от точки до плоскости определим по формуле (4.9):

$$d=\left|\frac{2\cdot 2+3\cdot(-3)+5\cdot(-1)-4}{\sqrt{2^2+(-3)^2+5^2}}\right|=\left|\frac{4-9-5-4}{\sqrt{4+9+25}}\right|=\left|\frac{-14}{\sqrt{38}}\right|=\frac{14}{\sqrt{38}}.$$

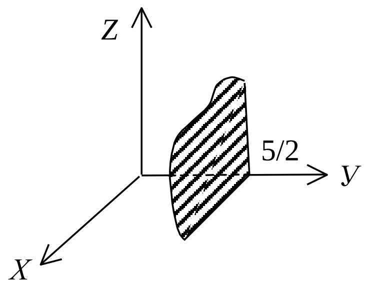
ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ № 10

«Аналитическая геометрия в пространстве» (практика)

10.1. Установить взаимное соответствие между уравнениями плоскости и их построением в декартовой системе координат

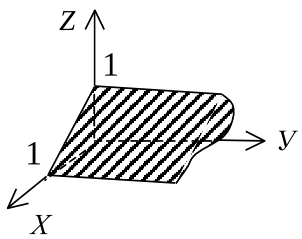
1. $2y-5=0$

А.



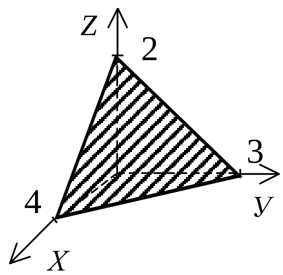
2. $x+z-1=0$

Б.



3. $3x+4y+6z-12=0$

В.



Ответ: 1__; 2__ ; 3__.

10.2. Из уравнений: а) $2x - 3y + z + 1 = 0$; б) $x + 2y - 6 = 0$; в) $x + 3y = 0$ выберите те, которые определяют плоскость, параллельную оси Oz.

1) только в; 2) только б; 3) только а; 4) только б и в; 5) ни одно.

10.3. Уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(2,0,-1)$, $M_2(-3,1,3)$ параллельно вектору $\vec{S}=(1,2,-1)$ имеет вид:

1) $3x+y+5z-4=0$; 2) $9x+y+11z-7=0$;
3) $-3x+y+4z-7=0$; 4) $4x+2y-4z+5=0$;
5) $x-5y+2z-3=0$; 6) $5x-3y+4z+9=0$/

10.4. Какие из следующих плоскостей параллельны?

А) $2x + y + z - 2 = 0$ Б) $2x + y - z - 1 = 0$
В) $4x + 2y - 2z + 3 = 0$ Г) $x + 3y - 4z = 0$

1) только А и Г; 2) только Б и Г; 3) только А и В;
4) только Б и В; 5) только А и Б. 6) нет правильного ответа.

10.5. Угол между плоскостями $3y - z = 0$, $2y + z - 1 = 0$ равен

1) 30^0; 2) 45^0 ; 3) 60^0 ; 4) 90^0; 5) 120^0; 6) 135^0.

10.6. Установить соответствие:

Уравнение плоскости	Расположение плоскости в пространстве
1. $3x - 2y + z = 0$	А. параллельна плоскости xOy;
2. $x + 5y = 0$	Б. параллельна оси Oy;
3. $7x - y + 1 = 0$	В. проходит через ось Oz;
4. $6z - 1 = 0$	Г. лежит в плоскости xOz;
	Д. проходит через начало координат;
	Е. перпендикулярна оси Ox.

Ответ: 1__; 2__; 3__; 4__.

10.7. Уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(2,1,-1)$ и имеющей нормальный вектор $\vec{N} = (1,-2,3)$ имеет вид:

1) $x - 2y + 3z + 3 = 0$; 2) $x + 4y + 7z + 16 = 0$;
3) $x + y + z - 3 = 0$; 4) $x - 2y + 2z - 3 = 0$;
5) $3x + 6y + 2z - 15 = 0$; 6) $3x - y - 5z + 1 = 0$.

10.8. Величины отрезков, отсекаемых на осях координат плоскостью $2x - 4y + 5z - 20 = 0$ равны:

1) 10, -5, 4; 2) 1, -5, 4; 3) 2, -5,- 4; 4) 2, -5, 4;
5) 4, 2, -3; 6) 6, 2, 5; 7) 5, 10, 4; 8) 10, 5, -4.

10.9. При каком значении l плоскости $3x - 5y + lz - 3 = 0$ и
$x - 3y + 2z + 5 = 0$
будут перпендикулярны?

1) -9; 2) -3; 3) 2; 4) 0;
5) 1; 6) 1/3; 7) 2/5; 8) 3/7.

10.10. Уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки $A_1(4, 7, 8)$, $A_2(-1, 13, 0)$, $A_3(2, 4, 9)$ имеет вид:

1) $6x - 7y - 9z + 97 = 0$; 2) $6x + 7y - 9z = 0$;
3) $-6x + 7y + 9z - 11 = 0$; 4) $6x - 7y - 9z + 87 = 0$;
5) $2x + 7y - 9z + 27 = 0$; 6) $2x - 5y + 7z - 21 = 0$.

10.11. Прямая, проходящая через точку $M(2,0,-3)$, параллельно вектору $\vec{S} = (2,-3,5)$, имеет уравнение:

1) $\frac{x-2}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z+3}{5}$; 2) $\frac{x-2}{2} = \frac{y+3}{0} = \frac{z-5}{-3}$;

3) $\begin{cases} x = 2+2t \\ y = -3t \\ z = -3+5t \end{cases}$; 4) $\begin{cases} x = 3+2t \\ y = -5t \\ z = 2+7t \end{cases}$.

10.12. При каком значении p, n прямые $\frac{x+2}{3} = \frac{y-1}{n} = \frac{z}{1}$ и $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z+1}{p}$ параллельны?

1) $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{2}$; 2) $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$; 3) $\frac{5}{3}$, $\frac{2}{3}$;

4) 2, $-\frac{3}{2}$; 5) 6, $-\frac{1}{6}$; 6) 2, 3.

10.13. Даны вершины треугольника $A(3,-1,-1)$, $B(1,2-7)$, и $C(-5,14,-3)$. Каноническое уравнение биссектрисы BE запишется:

1) $\frac{x+1}{2} = \frac{y-5}{-6} = \frac{z+1}{-16}$; 2) $\frac{x-1}{3} = \frac{y+3}{4} = \frac{z+4}{2}$;

3) $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z+7}{-8}$; 4) $\frac{x-2}{-1} = \frac{y+1}{4} = \frac{z}{2}$;

5) $\frac{x-7}{-1} = \frac{y+2}{6} = \frac{z+8}{-3}$; 6) $\frac{x-4}{5} = \frac{y+13}{-4} = \frac{z+3}{-12}$.

10.14. Расстояние от точки $M(-5,4,3)$ до прямой $\frac{x-2}{-1} = \frac{y-3}{3} = \frac{z-1}{2}$ равно:

1) $d = 2\sqrt{10}$; 2) $d = \sqrt{3}$; 3) $d = 2\sqrt{7}$;
4) $d = 2\sqrt{3}$; 5) $d = 3\sqrt{5}$; 6) $d = \sqrt{13}$.

10.15. Уравнение прямой $\begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ 3x + y - 5z = 0 \end{cases}$ в параметрическом виде запишется:

1) $\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = -1 - 5t \\ z = 7 - t \end{cases}$; 2) $\begin{cases} x = 3 + 5t \\ y = -2t \\ z = 1 + 6t \end{cases}$; 3) $\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 5 + 11t \\ z = 4t \end{cases}$;

4) $\begin{cases} x = 2t \\ y = -5 + t \\ z = 2 + 13t \end{cases}$; 5) $\begin{cases} x = -3 + 2t \\ y = -7 - t \\ z = 2 + 17t \end{cases}$; 6) $\begin{cases} x = -12t \\ y = 4 - 5t \\ z = 1 - 15t \end{cases}$.

10.16. Уравнение прямой, лежащей в плоскости Оxy и проходящей через точку $M(2,3,0)$ перпендикулярно к прямой $\frac{x+3}{5} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-6}{-1}$, имеет вид:

1) $\frac{x+2}{5} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z+1}{0}$; 2) $\frac{x-2}{-5} = \frac{y-3}{2} = \frac{z}{0}$;

3) $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z}{0}$; 4) $\frac{x-5}{-1} = \frac{y+1}{4} = \frac{z}{0}$;

5) $\frac{x-4}{-3} = \frac{y+2}{5} = \frac{z+8}{0}$; 6) $\frac{x-4}{0} = \frac{y+3}{-5} = \frac{z+3}{2}$.

10.17. Координаты точки Q - проекции точки $M(-3,0,2)$ на прямую $\begin{cases} x = 5 - t \\ y = 2t \\ z = 3t \end{cases}$ равны:

1) $Q(4,2,3)$; 2) $Q(3,2,1)$; 3) $Q(0,-3,5)$;
4) $Q(-1,4,-3)$; 5) $Q(1,-2,5)$; 6) $Q(-1,2,3)$.

10.18. Расстояние между параллельными прямыми $\frac{x-2}{-1} = \frac{y+1}{4} = \frac{z}{2}$ и $\frac{x-7}{-1} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-3}{2}$ равно:

1) $d = 2$; 2) $d = 3$; 3) $d = 6$; 4) $d = 8$;
5) $d = 7$; 6) $d = 13$; 7) $d = 4$; 8) $d = 5$.

10.19. Параметр p прямой $\frac{x}{2}=\frac{y}{-3}=\frac{z}{p}$, пересекающейся с прямой $\frac{x+1}{3}=\frac{y+5}{2}=\frac{z}{1}$, равен:

1) p = 3; 2) p = 2; 3) p = 1; 4) p = -3;
5) p = -2; 6) p = -1; 7) p = 0; 8) p = 5.

10.20. Уравнение прямой, проходящей через точку M(3,2,-1) и пересекающей ось Ox под прямым углом, в общем виде запишется:

1) $\begin{cases} x-y=0 \\ y-5z=0 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} x-3=0 \\ y+2z=0 \end{cases}$; 3) $\begin{cases} y-2=0 \\ x-z+1=0 \end{cases}$;

4) $\begin{cases} 2z+1=0 \\ 3x+y=0 \end{cases}$; 5) $\begin{cases} y-z=0 \\ x+3y=0 \end{cases}$; 6) $\begin{cases} x+2=0 \\ y+z=0 \end{cases}$.

10.21. Плоскость $Ax + 3y - 5z + 1 = 0$ параллельна прямой $\frac{x-1}{4}=\frac{y+2}{3}=\frac{z}{1}$ при значении A, равном:

1) A = -1; 2) A = -2; 3) A = 1; 4) A = 3;
5) A = 10; 6) A = 7; 7) A = 0; 8) A = 12.

10.22. Проекция точки P(3, 1, -1) на плоскость $x + 2y + 3z – 30 = 0$ равна:

1) (5, 5, 5); 2) (1, 2, -2); 3) (2, 1, 1); 4) (5, 2, -5);
5) (-5, 5, 5); 6) (-2, 3, 0); 7) (0,-4, 2); 8) (3, 0, 5).

10.23. При каких значениях m и C прямая $\frac{x-2}{m}=\frac{y+1}{4}=\frac{z-5}{-3}$ перпендикулярна к плоскости $3x - 2y + Cz + 1 = 0$?

1) m = -6, C = 1,5; 2) m = 1, C = 1; 3) m = 3, C = 1,5;
4) m = 4, C= 0; 5) m = -1, C = 2; 6) m =0, C = -5;

10.24. Точка пересечения прямой $\frac{x-7}{5}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-5}{4}$ и плоскости $3x – y + 2z – 8 = 0$ имеет координаты:

1) (2,0,1); 2) (2,1,0); 3) (2,0,-1);
4) (1,0,-2); 5) (1,0,2); 6) (1,2,0).

10.25. Угол между прямой $\frac{x-3}{1}=\frac{y+5}{2}=\frac{z-6}{1}$ и плоскостью $3x+2y-2z+5=0$ равен:

1) 30^0; 2) 45^0; 3) 60^0; 4) 90^0; 5) 120^0; 6) 135^0.

10.26. Координаты точки, симметричной точке $M_1(3,4,5)$ относительно плоскости $x-2y+z-6=0$ определятся:

1) $M_2(3,0,-1)$; 2) $M_2(5,0,7)$; 3) $M_2(4,0,2)$;

4) $M_2(3,0,6)$; 5) $M_2(0,-1,3)$; 6) $M_2(1,-2,0)$.

10.27. Определить для каких плоскостей точка $Q(2,1,1)$ и начало координат лежат по одну сторону относительно плоскости:

a) $5x-3y+z-18=0$; b) $2x+7y+3z+1=0$;
c) $x+5y+12z-1=0$; d) $2x-y+z+11=0$.

1) c и d; 2) a, b и d; 3) a и b;
4) a и d; 5) a и c; 6) b и d.

10.28. Плоскость $4x+y+z+13=0$ и прямая $\frac{x-1}{2}=-\frac{y-2}{2}=\frac{z-7}{-1}$

1) параллельны; 2) пересекаются; 3) перпендикулярны;
4) скрещиваются; 5) образуют угол 45^0; 6) образуют угол 120^0.

10.29. Уравнение плоскости, проходящей через прямую $\frac{x-2}{5}=-\frac{y-3}{1}=\frac{z+1}{2}$ перпендикулярно плоскости $x+4y-3z+7=0$, имеет вид:

1) $11x-17y-19z+10=0$; 2) $10x+17y-5z=0$;
3) $x+15y+9z-11=0$; 4) $3x-5y-2z+8=0$;
5) $2x+17y-19z+2=0$; 6) $12x-5y+z-24=0$.

10.30. Уравнение плоскости, проходящей через прямую $\begin{cases}2x-y+z-1=0\\ x+y-z=0\end{cases}$

параллельно прямой $\begin{cases}x=2t\\ y=-t-1\\ z=2t+4\end{cases}$ запишется:

1) $6x-y-9z+1=0$; 2) $9x+6y-6z-1=0$;
3) $2x+5y+3z-12=0$; 4) $x-15y-z+18=0$;
5) $x+17y-9z+7=0$; 6) $2x-9y+z-4=0$.

Раздел V. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

5.1. Понятие комплексного числа

Комплексным числом называется выражение вида, [16]:

$$z = x + yi = Re\, z + (Im\, z)i\,, \tag{5.1}$$

где $x = Re\, z$ - действительная часть, а $y = Im\, z$ – мнимая часть комплексного числа (x, y - вещественные числа), i – *мнимая единица,* определяемая по формуле:

$$i = \sqrt{-1}. \tag{5.2}$$

Рассмотрим с*тепени мнимой единицы* i: $i^1 = 1,\ i^2 = -1,\ i^3 = i^2 \cdot i = -i,$ $i^4 = (i^2)^2 = 1,$ тогда справедливы следующие равенства:

$$i^{4n+1} = 1, \quad i^{4n+2} = -1, \quad i^{4n+3} = -i, \quad i^{4n} = 1, \quad n \in N. \tag{5.3}$$

Пример 5.1. Вычислить i^{1234}.

Решение. $i^{1234} = i^{4\cdot 308+2} = \left(i^4\right)^{308} \cdot i^2 = 1^{308} \cdot i^2 = i^2 = -1$.

Пример 5.2. Найти корни квадратного уравнения $x^2 - 2x + 17 = 0$.

Решение. Решая квадратное уравнение по известной формуле, получим:

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4-68}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-64}}{2} = \frac{2 \pm 8\sqrt{-1}}{2} = \frac{2 \pm 8i}{2} = 1 \pm 4i\,,$$

т. е. корнями данного уравнения являются комплексно сопряженные числа $x_1 = 1 + 4i, \quad x_2 = 1 - 4i.$

Запись комплексного числа в виде (5.1) называется *алгебраической формой записи* комплексного числа. Любое действительное число x принадлежит множеству комплексных чисел, его можно записать так: $x = x + i\cdot 0$. Числа 0, 1, i записываются соответственно в виде $0 = 0 + 0\cdot i$,

$1 = 1 + 0 \cdot i$, $i = 0 + 1 \cdot i$. Если $x = 0$, комплексное число обращается в *чисто мнимое число* yi. Число $\bar{z} = x - yi$ называется *сопряженным* числу z и отличается от него знаком мнимой части. Комплексные числа $z = x + yi$ и $w = -z = -x - yi$ называются *противоположными*. Два комплексных числа $z_1 = x_1 + y_1 i$ и $z_2 = x_2 + y_2 i$ считаются *равными, если равны соответственно их действительные* $x_1 = x_2$ *и мнимые части* $y_1 = y_2$.

Над комплексными числами, заданными в алгебраической форме, можно выполнять арифметические операции: сложение, вычитание, умножение и деление, [20]. *Чтобы сложить* (*вычесть*) *два комплексных числа* $z_1 = x_1 + y_1 i$ и $z_2 = x_2 + y_2 i$ *нужно сложить* (*вычесть*) *соответственно их действительные и мнимые части*:

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + (y_1 \pm y_2) i; \tag{5.4}$$

Пример 5.3. Найти сумму и разность комплексных чисел $z_1 = 2 - i$ и $z_2 = -3 + 2i$.

Решение. Применим формулу (5.5):

$$z_1 + z_2 = (2 - i) + (-3 - 2i) = -1 + i.$$

$$z_1 - z_2 = (2 - i) - (-3 + 2i) = 5 - 3i.$$

Произведение комплексных чисел выполняется по правилу умножения многочленов (каждый член одного многочлена умножается на каждый член другого многочлена):

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + x_2 y_1) i. \tag{5.5}$$

Пример 5.4. Найти $z_1 \cdot z_2$, если $z_1 = 2 - i$ и $z_2 = -3 + 2i$.

Решение. $z_1 \cdot z_2 = (2 - i)(-3 + 2i) = -6 + 3i + 4i - 2i^2 = -4 + 7i$.

Деление комплексных чисел в алгебраической форме осуществляется *методом умножения знаменателя и числителя на сопряженное знаменателю выражение*:

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{(x_1+y_1 i)\cdot(x_2-y_2 i)}{(x_2+y_2 i)\cdot(x_2-y_2 i)}=\frac{(x_1x_2+y_1y_2)+(x_2y_1-x_1y_2)i}{x_2^2+y_2^2}=$$

$$=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}i. \tag{5.6}$$

Пример 5.5. Найти $\frac{z_1}{z_2}$, если $z_1=3-i$ и $z_2=2+3i$.

Решение. $\frac{z_1}{z_2}=\frac{3-i}{2+3i}=\frac{(3-i)(2-3i)}{(2+3i)(2-3i)}=\frac{3-11i}{13}=\frac{3}{13}-\frac{11}{13}i$.

Если на плоскости введена прямоугольная декартова система координат *xOy*, то каждому комплексному числу соответствует точка *M*(*x, y*) плоскости или вектор $\overrightarrow{OM}$. И наоборот, каждая точка *M*(*x, y*) плоскости изображает комплексное число *z* = *x* + *yi*. Плоскость, на которой изображаются комплексные числа, называется *комплексной плоскостью* и обозначается Z, ось *Ox* – *действительной осью*, а ось *Oy* – *мнимой осью*. Точка $A(x,y)$, соответствующая комплексному числу $z=x+y\,i$ называется *аффиксом* данного комплексного числа (рис. 5.1.).

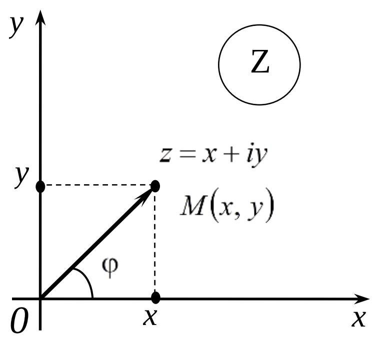


Рисунок 5.1. – Геометрическое изображение комплексного числа

Пример 5.6. Записать аффиксы следующих комплексных чисел и построить соответствующие им радиусы-векторы: 1) $z=2$; 2) $z=-3$; 3) $z=3i$; 4) $z=-2i$; 5) $z=2+3i$.

Решение. Искомые точки запишутся: 1) $M_1(2, 0)$; 2) $M_2(-3, 0)$; 3) $M_3(0,3)$; 4) $M_4(0, -2)$; 5) $M_5(2, 3)$. Изобразим их на рисунке.

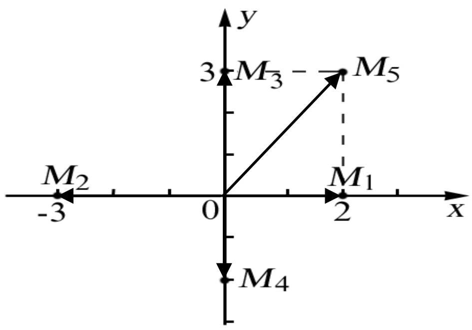


Рисунок к примеру 5.6.

5.2. Модуль и аргумент комплексного числа. Тригонометрическая и показательная формы комплексного числа.

Модулем комплексного числа $z = x + yi$ называют число, равное:

$$|z| = |x + y\,i| = \sqrt{x^2 + y^2}\,. \tag{5.7}$$

Модуль комплексного числа всегда есть действительное неотрицательное число $|z| \geq 0$, причем $|z| = 0$ тогда и только тогда, когда $z = 0$, [21]. Из определения модуля комплексного числа следует, что для любых комплексных чисел z_1 и z_2 справедливы соотношения:

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|; \quad \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \quad \text{если}\, z_2 \neq 0\,. \tag{5.8}$$

Угол φ, образованный вектором $\overrightarrow{OM}$ с положительным направлением оси Ox (рис. 5.1), называется *аргументом комплексного числа* и обозначается

$$\varphi = arg\, z = arg(x + yi). \tag{5.9}$$

Если отсчет ведется против часовой стрелки, то величина угла считается положительной, если по движению часовой стрелки – отрицательной. Аргумент комплексного числа определяется неоднозначно. Любое комплексное число $z \neq 0$ имеет бесконечное множество аргументов, отличающихся друг от друга на число, кратное 2π. Если область изменения аргумента комплексного числа ограничить промежутком величины 2π, например, $[0,2\pi]$, $[-\pi,\pi]$, то получим *главное значение аргумента z*, обозначаемое *Arg z*, [22].. Связь между аргументом и его главным значением запишется:

$$arg\, z = Arg z + 2\pi k, k = 0, \pm 1, \pm 2, ... \tag{5.10}$$

Запишем формулы для вычисления главного значения аргумента, принадлежащие промежутку $[0, 2\pi]$:

$$Arg z = \begin{cases} arctg\dfrac{y}{x}, x > 0, y \geq 0, y \leq 0, \\ \pi + arctg\dfrac{y}{x}, x < 0, y \geq 0, \\ -\pi + arctg\dfrac{y}{x}, x < 0, y < 0, \\ \dfrac{\pi}{2}, x = 0, y > 0, \\ -\dfrac{\pi}{2}, \text{или } \dfrac{3\pi}{2}, x = 0, y < 0. \end{cases} \tag{5.11}$$

Пример 5.7. Найти множество точек плоскости, соответствующих комплексным числам z, для которых

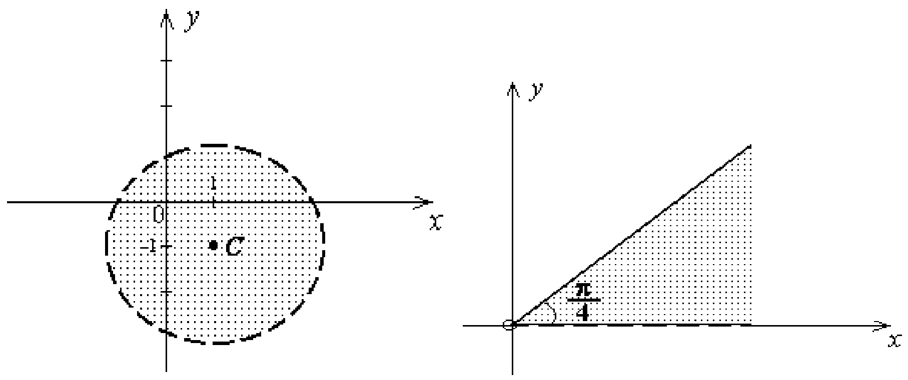
$$а)\left|z + 1 - i\right| < 2. \qquad б)0 < Arg\, z \leq \frac{\pi}{4}.$$

Решение. а) Если $z = x + yi$, то

$$\left|x + yi - 1 + i\right| = \left|(x-1) + (y+1)\cdot i\right| = \sqrt{(x-1)^2 + (y+1)^2}.$$

По условию $\sqrt{(x-1)^2 + (y+1)^2} < 2$ т. е., $(x-1)^2 + (y+1)^2 < 4$ – на плоскости это множество внутренних точек круга с центром в точке C(1,-1) радиуса

$R=2$.



а) б)

Рисунки к примеру 5.7.

б) Если $0 < Arg\, z \le \frac{\pi}{4}$, то нужно отметить на плоскости все точки, радиус-вектор которых имеет угол наклона от 0 до $\frac{\pi}{4}$. Это точки I четверти, расположенные выше оси OX, т. е. $Arg\, z \ne 0$, но не выше луча выходящего из начало координат с углом наклона $\frac{\pi}{4}$. Начало координат в это множество точек не входит, т. к. $Arg\, 0$ не существует.

Пример 5.8. Найти аргумент комплексного числа $z = -3 - i\sqrt{3}$.

Решение. Действительная и мнимая части данного числа отрицательны, тогда по формуле (5.11) главное значение аргумента определится:

$$Argz = -\pi + arctg\frac{-\sqrt{3}}{-3} = -\pi + arctg\frac{1}{\sqrt{3}} = -\pi + \frac{\pi}{6} = -\frac{5\pi}{6}.$$

Следовательно, $arg\, z = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$.

Из рисунка (5.1) видно, что

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \tag{5.12}$$

$$\frac{y}{x} = tg\varphi, \quad \varphi = arg\, z = arctg\frac{y}{x}. \tag{5.13}$$

Подставим в алгебраическую форму комплексного числа (5.1) формулы

(5.12), получим формулу:

$$z = r(cos\varphi + isin\varphi), \tag{5.14}$$

которая называется *тригонометрической формой* комплексного числа,[23]. Для представления комплексного числа $z = x + y\,i$ в тригонометрической форме необходимо найти модуль этого числа $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, изобразить точку $x + y\,i$, выбрать нужное главное значение аргумента этого числа согласно формуле (5.11) и записать комплексное число в тригонометрической форме.

Обозначив символом $e^{i\varphi}$ комплексное число

$$e^{i\varphi} = cos\varphi + isin\varphi, \tag{5.15}$$

получим комплексное число *в показательной форме*:

$$z = r\mathrm{e}^{i\varphi}. \tag{5.16}$$

Заменяя в формуле (5.15) φ на $-\varphi$, получим

$$e^{-i\varphi} = cos\varphi - isin\varphi\ . \tag{5.17}$$

Складывая и вычитая равенства (5.15) и (5.17), находим

$$cos\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}, \quad sin\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}\ . \tag{5.18}$$

Формулы (5.18) называются *формулами Эйлера*, [25]. Эти формулы связывают показательную и тригонометрические функции.

Пример 5.9. Следующие комплексные числа а) $z_1 = 2 - \sqrt{12}i$, б) $z_2 = -4$ представить в тригонометрической и показательной формах, изобразить точками и векторами на комплексной плоскости.

Решение. а) Действительная и мнимая части комплексного числа равны $x = Rez_1 = 2, y = Imz_1 = -\sqrt{12}$. Найдем модуль и аргумент z_1:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{2^2 + (-\sqrt{12})^2} = \sqrt{4 + 12} = \sqrt{16} = 4,$$

$$cos\varphi = \frac{x}{r} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, \quad sin\varphi = \frac{y}{r} = \frac{-\sqrt{12}}{4} = -\frac{2\sqrt{3}}{4} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \varphi = -\frac{\pi}{3}.$$

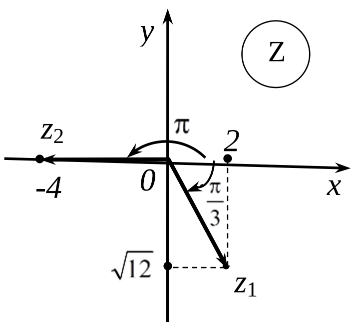


Рисунок к примеру 5.9.

Следовательно, представление комплексного числа z_1 в тригонометрической и показательной формах имеет вид:

$$z_1 = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = 4(\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3})$$

и

$$z_1 = r\mathrm{e}^{i\varphi} = 4e^{-i\frac{\pi}{3}}.$$

б) $z_2 = -4$. $x = \operatorname{Re} z_2 = -4, \quad y = \operatorname{Im} z_2 = 0, \quad r = \sqrt{(-4)^2 + 0^2} = 4,$

$$\cos\varphi = \frac{x}{r} = \frac{-4}{4} = -1, \quad \sin\varphi = \frac{y}{r} = \frac{0}{4} = 0 \quad \Rightarrow \varphi = \pi.$$

Таким образом, $z_2 = 4(\cos\pi - i\sin\pi) = 4\mathrm{e}^{i\pi}$. Числа z_1 и z_2 изображены на рисунке.

Над комплексными числами, заданными в тригонометрической и показательной формах можно выполнять арифметические действия: умножение, деление, возведение в степень и извлечение корня n-ой степени.

При умножении двух или нескольких комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складывают:

$$\begin{aligned} &r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\cdot r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = \\ &= r_1\cdot r_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)). \end{aligned} \tag{5.19}$$

Пример 5.10. Найти произведение чисел $z_1\cdot z_2$, где

$$z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right), \quad z_2 = 3\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right).$$

Решение. $z_1\cdot z_2 = 2\cdot 3\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{12}\right)\right) =$

$$= 6\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = 6\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\,\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 3\sqrt{2} + 3i\sqrt{2}\,.$$

При делении двух комплексных чисел модуль числителя делится на модуль знаменателя, а аргумент знаменателя вычитается из аргумента числителя:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)). \qquad (5.20)$$

Пример 5.11. Найти частное чисел z_1 и z_2, где

$$z_1 = 10\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right), \quad z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right).\#$$

Решение. $z_1 : z_2 = \frac{10}{5}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right)\right) =$

$$= 5\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = 5(0 + i) = 5i\,.$$

При возведении комплексного числа в целую положительную степень модуль его возводится в ту же степень, а аргумент умножается на показатель степени, т. е.

$$z^n = (r(\cos\varphi + i\sin\varphi))^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)\,, \qquad (5.21)$$

где $n \in N$. Эта формула называется *формулой Муавра*.

Пример 5.12. Найти z^6, где $z = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$.

Решение. Возводим в шестую степень z, согласно формуле (5.21):

$$z^6 = 2^6\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)^6 = 2^6\left[\cos\left(6\cdot\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(6\cdot\frac{\pi}{6}\right)\right] =$$

$$= 2^6(\cos\pi + i\sin\pi) = 2^6(-1 + i\cdot 0) = -2^6\,.$$

Корень n-ой степени из комплексного числа $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ имеет n различных значений, которые находятся по формуле:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right), \tag{5.22}$$

где $k = 0, 1, 2, \ldots, n - 1$.

Пример 5.13. Найти $\sqrt[3]{-i}$.

Решение. Поскольку $-i = \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}$, то $\sqrt[3]{-i}$ состоит из чисел:

$$z_k = \sqrt[3]{-i} = \sqrt[3]{1}\left(\cos\frac{\frac{3\pi}{2} + 2\pi k}{3} + i\sin\frac{\frac{3\pi}{2} + 2\pi k}{3}\right).$$

Задаем $k = 0, 1, 2$. Получаем $z_0 = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i$,

$$z_1 = \cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2},$$

$$z_2 = \cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}.$$

Ответ: $z_0 = i$, $z_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$, $z_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$.

5.3. Применение комплексных чисел в электротехнике

Рассмотрим синусоидальный ток, закон изменения которого во времени описывается формулой

$$i = I_m sin(\omega t + \psi),,$$

где I_m – *амплитуда* тока, характеризует максимальное значение тока, ω – *угловая частота*, $\omega t + \psi$ – *фаза*, характеризует состояние колебания в момент времени *t*, ψ – *начальная фаза* (рис. 5.2)

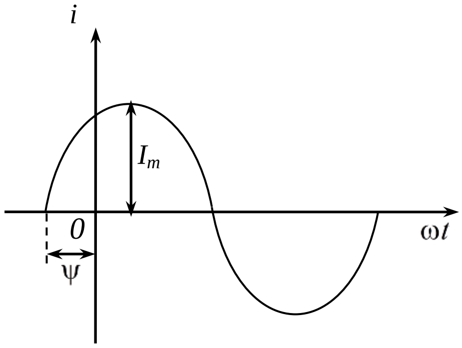


Рисунок 5.2. – График тока

При расчете цепей синусоидального тока используется также понятие *действующего значения тока*

$$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}.$$

Для облегчения расчетов в электротехнике синусоидальный ток принято изображать вектором (или точкой) на комплексной плоскости

$$\dot{I}_m = I_m \cdot e^{\psi j} \quad (j = \sqrt{-1}), \tag{5.23}$$

который называется *комплексной амплитудой* (рис. 5.3).

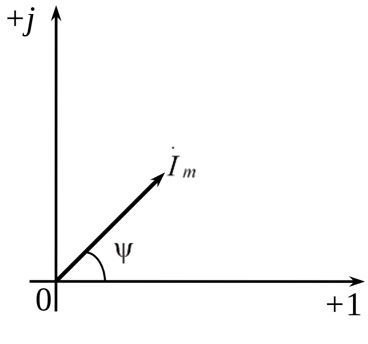


Рисунок 5.3. – Комплексная амплитуда

(обратите внимание на обозначения осей координат!). Модуль этого вектора равен амплитуде I_m, а аргумент – начальной фазе ψ тока.

Если комплексную амплитуду разделить на $\sqrt{2}$, то получим *комплексное действующее значения тока*

$$\dot{I} = \frac{\dot{I}_m}{\sqrt{2}} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \mathrm{e}^{\psi j}.$$

Зная комплексную амплитуду или комплексное действующее значение синусоидальной величины, можно осуществить обратный переход и записать выражение для мгновенного значения этой величины.

Пример 5.14. Ток меняется по закону $i = 10\sin(\omega t + 120^o)$. Найти комплексную амплитуду тока и изобразить ее на комплексной плоскости.

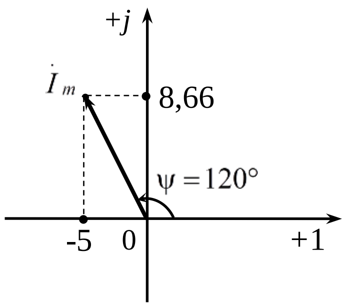


Рисунок к примеру 5.14.

Решение. Из условия находим амплитуду I_m и начальную фазу ψ тока: $I_m = 10$, $\psi = 120$ °.

По формуле (5.20) находим комплексную амплитуду:

$$\dot{I}_m = I_m \cdot e^{\psi j} = 10e^{120^o j} = \\ = 10(cos120^o + jsin120^o) = \\ = 10\left(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -5 + 8{,}66j.$$

Пример 5.15. Задано комплексное действующее значение тока $\dot{I} = 10 - 10j$. Записать выражение для его мгновенного значения.

Решение. Найдем действующее значение I тока как модуль комплексного действующего значения $\dot{I}$ тока:

$$I = |\dot{I}| = \sqrt{10^2 + (-10)^2} = 10\sqrt{2} = 14{,}14.$$

Амплитуда I_m тока вычисляется по формуле

$$I_m = I \cdot \sqrt{2} = 10\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 20 \quad .$$

Определим начальную фазу ψ как аргумент комплексного числа $\dot{I}$ из уравнения $tg\psi = -\frac{10}{10} = -1$.

Поскольку число $\dot{I} = 10 - 10j$ расположено в четвертой четверти, то $\psi = -45^0$. Записываем выражение для мгновенного значения синусоидального тока: $i = I_m \sin(\omega t + \psi) = 20\sin(\omega t - 45^0)$.

Вопросы для самопроверки

1. Понятие комплексного числа, его действительной и мнимой части.
2. Мнимая единица, возведение ее в степень.
3. Геометрическое представление комплексного числа. Аффикс комплексного числа.
4. Привести примеры комплексных чисел, заданных в алгебраической форме.
5. Действия над комплексными числами в алгебраической форме.
6. Модуль и аргумент комплексного числа.
7. Главное значение аргумента комплексного числа, его определение.
8. Тригонометрическая и показательная формы записи комплексного числа.
9. Формулы Эйлера.
10. Действия над комплексными числами, заданными в тригонометрической и показательной формах.
11. Возведение комплексного числа в целую положительную степень.
12. Извлечение корня n-й степени из комплексного числа.
13. Применение комплексных чисел в электротехнике.

ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ № 11 «Комплексные числа» (теория)

11.1. Алгебраическая форма комплексного числа имеет вид:

1) $z = y + ix$; 2) $z = y - ix$; 3) $z = x + iy$;
4) $z = x - iy$; 5) $z = x^2 + iy^2$; 6) $z = x^2 - iy$.

11.2. Два комплексных числа считаются равными, если …

1) равны их действительные части; 2) равны их мнимые части;
3) равны их действительные или мнимые части;
4) равны их действительные и мнимые части;
5) правильного ответа нет.

11.3. . Плоскость, на которой изображаются комплексные числа, называется…

1) тригонометрической плоскостью;
2) действительной плоскостью; 3) мнимой плоскостью;
4) комплексной плоскостью; 5) рациональной плоскостью;
6) иррациональной плоскостью.

11.4. Квадрат чисто мнимого числа равен…

1) действительному положительному числу;
2) действительному отрицательному числу;
3) мнимому положительному числу;
4) мнимому отрицательному числу;
5) комплексному числу;
6) рациональному числу.

11.5. Число $z = x - iy$ называется…

1) противоположным данному комплексному числу;
2) сопряженным с данным комплексным числом;
3) обратным к данному комплексному числу;
4) чисто мнимым комплексным числом;
5) симметричным с данным комплексным числом;
6) компланарным к данному комплексному числу.

11.6. Модуль комплексного числа $z = x + iy$ определяется как:

1) $arctg\frac{y}{x}$; 2) $arctg\frac{y}{x} + \pi$; 3) $arctg\frac{y}{x}$ - π;

4) *Re z*; 5) *Im z*; 6) $\sqrt{x^2 + y^2}$.

11.7. Произведение любого комплексного числа на ноль равно ___ (ответ впишите).

11.8. Условие равенства двух комплексных чисел состоит в том, что:

1) равны их модули; 2) равны их аргументы;
3) равны их модули и аргументы;
4) равны их модули, а аргументы могут отличаться лишь слагаемым, кратным 2π;
5) равны их аргументы, а модули могут отличаться лишь на единицу;
6) модули их равны, а аргументы отличаются на период π.

11.9. Соответствующий чисто мнимому числу вектор …

1) параллелен оси *Oy*; 2) параллелен оси *Ox*;
3) перпендикулярен оси *Oy*; 4) перпендикулярен оси *Ox;*
5) образует с осью *Oy* угол 45^0; 6) образует с осью *Ox* угол 45^0.

11.10. Длина вектора, изображающего комплексное число z, называется…

1) действительной частью комплексного числа;
2) мнимой частью комплексного числа;
3) модулем комплексного числа;
4) аргументом комплексного числа;
5) главным значением аргумента комплексного числа;
6) абсолютной величиной комплексного числа.

11.11. С комплексными числами *нельзя* выполнить действие:

1) сложение; 2) умножение;
3) транспонирование; 4) возведение в степень;
5) извлечение корня *n*-ой степени;
6) деление.

11.12. Сложение комплексных чисел геометрически выполняется по правилу…

1) треугольника; 2) параллелограмма;
3) трапеции; 4) многоугольника;
5) квадрата; 6) параллелепипеда.

11.13. Величина угла между положительным направлением оси *Ox* и вектором, изображающим комплексное число, называется…

1) действительной частью комплексного числа;
2) мнимой частью комплексного числа;
3) модулем комплексного числа;
4) аргументом комплексного числа;
5) главным значением аргумента комплексного числа;
6) правильного ответа нет.

11.14. Равенство $|z| = a$ геометрически есть множество точек, лежащих…

1) на окружности с центром в начале координат и радиусом длиной *a*;
2) в круге с центром в начале координат и радиусом длиной *a*;
3) на луче, выходящим из начала координат, и образующего с положительной полуосью абсцисс угол *a*;
4) на действительной оси;
5) в первой четверти;
6) на эллипсе с большой полуосью *a*.

11.15. Произведение сопряженных комплексных чисел дает…

1) положительное действительное число;
2) отрицательное действительное число;
3) новое комплексное число; 4) чисто мнимое число;
5) нулевое число; 6) рациональное число.

11.16. Сложение и вычитание комплексных чисел удобнее проводить …

1) в показательной форме; 2) в тригонометрической форме;
3) в алгебраической форме; 4) по формулам Эйлера;
5) по формулам Муавра; 6) по произвольным формулам.

11.17. Тригонометрическая форма комплексного числа имеет вид:

1) $z = r(cos\varphi + isin\varphi)$; 2) $z = r(cos\varphi - isin\varphi)$;
3) $z = r(ctg\varphi + itg\varphi)$; 4) $z = r(tg\varphi + ictg\varphi)$;
5) $z = re^{isin\varphi}$; 6) $z = re^{icos\varphi}$.

11.18. Геометрически комплексное число можно изобразить:

1) прямоугольником со сторонами *x* и *y*;
2) эллипсом с полуосями *x* и *y*;
3) вектором, исходящим из начала координат, с координатами *x* и *y*;
4) гиперболой с действительной осью *x* и мнимой осью *y*;
5) отрезком с началом (О; *x*) и концом (О; *y*);
6) нет правильного ответа.

11.19. При умножении комплексных чисел, заданных в тригонометрической форме, их аргументы …

1) умножаются; 2) делятся; 3) вычитаются;
4) складываются; 5) возводятся в квадрат и складываются;
6) возводятся в квадрат и вычитаются.

11.20. Аргумент комплексного числа есть величина…

1) однозначная; 2) многозначная; 3) рациональная;
4) скалярная; 5) векторная; 6) показательная.

11.21. Формула Эйлера имеет вид:

1) $z^n = |z|^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$; 2) $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|} \cdot \left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right)$;

3) $e^{iz} = \cos z + i\sin z$; 4) $ch\, z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$;

5) $sh\, z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$; 6) $tg\varphi = \frac{y}{x}$.

11.22. Показательная форма комплексного числа имеет вид:

1) $z = |z|e^{\cos\varphi + i\sin\varphi}$; 2) $z = |z|e^{\cos\varphi - i\sin\varphi}$;

3) $z = |z|e^{i\sin\varphi}$; 4) $z = |z|e^{i\cos\varphi}$;

5) $z = |z|e^{i\varphi}$; 6) $z = |z|e^{-i\varphi}$.

11.23. При делении комплексных чисел, заданных в показательной форме, их модули:

1) умножаются; 2) делятся; 3) вычитаются;
4) складываются; 5) возводятся в квадрат и делятся.

11.24. Формула Муавра имеет вид:

1) $\ln z = \ln|z| + i\arg z$;

2) $\begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} \\ \sin\varphi = \dfrac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i} \end{cases}$;

3) $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|} \cdot \left(\cos\dfrac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\dfrac{\varphi + 2\pi k}{n} \right)$;

4) $e^{iz} = \cos z + i\sin z$;

5) $z^n = |z|^n (\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$;

6) $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

11.25. При делении комплексных чисел, заданных в тригонометрической форме, их аргументы:

1) умножаются; 2) делятся; 3) вычитаются;
4) складываются; 5) делятся и прибавляется период 2π;
6) складываются и вычитается период 2π.

11.26. При умножении комплексных чисел, заданных в показательной форме, их модули:

1) умножаются; 2) делятся; 3) вычитаются;
4) складываются; 5) возводятся в квадрат и умножаются;
6) возводятся в квадрат и складываются.

11.27. Равенство $arg\ z = a$ геометрически есть множество точек, лежащих…

1) на окружности с центром в начале координат и радиусом длиной a;
2) в круге с центром в начале координат и радиусом длиной a;
3) на луче, выходящим из начала координат и образующего с положительной полуосью абсцисс угол a;
4) на мнимой оси; 5) на действительной оси;
6) на эллипсе с большой полуосью, равной a.

11.28. Для двух комплексных чисел z_1 и z_2 справедливо неравенство $|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$, называемое неравенством:

1) Паскаля; 2) треугольника; 3) Эйлера;
4) Коши-Буняковского; 5) Ферма; 6) Бернулли.

11.29. Установить соответствие между формулой и ее определением:

А. $\varphi = \begin{cases} arctg\dfrac{y}{x}, & \text{I, IV четверти,} \\ arctg\dfrac{y}{x} + \pi, & \text{II четверть,} \\ arctg\dfrac{y}{x} - \pi, & \text{III четверть.} \end{cases}$

Б. $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

В. $z^n = |z|^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$

Г. $z = |z|e^{i\cos\varphi}$

1. Множество точек плоскости, лежащих на луче длиной $|z|$, образующего с осью Ox угол φ.
2. Тригонометрическая форма комплексного числа
3. Показательная форма комплексного числа
4. Формула Муавра
5. Формула Эйлера
6. Аргумент комплексного числа
7. Главное значение аргумента комплексного числа.

Ответ: А __, Б __,В __, Г __.

11.30. Установить соответствие между правой и левой частью формулы:

А. $\cos\varphi$

Б. $z_1 \cdot z_2$

В. $tg\,\varphi$

Г. $\sqrt[n]{z}$

1. $\dfrac{y}{x}$
2. $\dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$
3. $\dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$
4. $|z_1| \cdot |z_2| e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$
5. $\dfrac{|z_1|}{|z_2|} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$
6. $\sqrt[n]{|z|} \cdot \left(\cos\dfrac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\dfrac{\varphi + 2\pi k}{n}\right)$
7. $|z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.

Ответ: А __, Б __, В __, Г __.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 5 «Комплексные числа»

Задание 1. Найти комплексные корни квадратного уравнения и изобразить их на комплексной плоскости

1.1. $x^2 + 4x + 13 = 0.$

1.2. $x^2 - 2x + 5 = 0.$

1.3. $x^2 + 9 = 0.$

1.4. $x^2 + 4 = 0.$

1.5. $4x^2 + 16 = 0.$

1.6. $x^2 + 4x + 13 = 0.$

1.7. $x^2 + 1 = 0.$

1.8. $x^2 - 2x + 5 = 0.$

1.9. $x^2 + 9 = 0.$

1.10. $x^2 + 4 = 0.$

1.11. $x^2 + 10x + 26 = 0.$

1.12. $x^2 - 14x + 53 = 0.$

1.13. $x^2 + 25 = 0.$

1.14. $x^2 - 4x + 8 = 0.$

1.15. $x^2 + 8x + 25 = 0.$

1.16. $x^2 + 6x + 25 = 0.$

1.17. $x^2 + 4x + 8 = 0.$

1.18. $x^2 + 4x + 20 = 0.$

1.19. $x^2 + 4x + 13 = 0.$

1.20. $x^2 - 2x + 5 = 0.$

Задание 2. Вычислить: $z_1 + z_2,\ z_1 - z_2,\ z_1 \cdot z_2,\ z_1 / z_2,\ z_2^3$

2.1. $z_1 = 3 - 2i,\ z_2 = 4 + 3i.$

2.2. $z_1 = 6 - 2i,\ z_2 = 3 + 4i.$

2.3. $z_1 = 6 + 3i,\ z_2 = -2 - 5i.$

2.4. $z_1 = 4 - 2i,\ z_2 = 5 + 3i.$

2.5. $z_1 = 2 - 3i,\ z_2 = 5 + 4i.$

2.6. $z_1 = 5 - 6i,\ z_2 = -2 + 3i.$

2.7. $z_1 = 3 - 2i,\ z_2 = 4 + 3i.$

2.8. $z_1 = 6 - 2i,\ z_2 = 3 + 4i.$

2.9. $z_1 = 6 + 3i,\ z_2 = -2 - 5i.$

2.10. $z_1 = 4 - 2i,\ z_2 = 5 + 3i.$

2.11. $z_1 = 2 - 3i,\ z_2 = 5 + 4i.$

2.12. $z_1 = 5 - 6i,\ z_2 = -2 + 3i.$

2.13. $z_1 = 3 - 2i,\ z_2 = 2 + 5i.$

2.14. $z_1 = 8 - 4i,\ z_2 = 2 - 5i.$

2.15. $z_1 = 2 + 3i,\ z_2 = -2 - 6i.$

2.16. $z_1 = 8 - 2i,\ z_2 = 2 + 3i.$

2.17. $z_1 = 5 - 3i,\ z_2 = 5 + i.$

2.18. $z_1 = 3 - 6i,\ z_2 = -4 + 3i.$

2.19. $z_1 = 3 - 7i,\ z_2 = 6 + 3i.$

2.20. $z_1 = 6 - 2i,\ z_2 = 8 + 4i.$

Задание 3. Вычислить

3.1. $i^{58} - 3i^{32} + 5$.

3.2. $2i^{81} + 7i^{12} - 1$.

3.3. $i^{62} - 2i^{11} - 4i$.

3.4. $i^{77} + 5i^{14} + 13$.

3.5. $3i^{45} - 4i^{9} - 7i$.

3.6. $i^{67} + 3i^{14} - 6i$.

3.7. $5i^{47} - 11i^{22} + 3i^{3}$.

3.8. $3i^{89} - 7i^{13} - 1$.

3.9. $i^{62} + 6i^{15} + i^{2}$.

3.10. $2i^{71} - 9i^{25} - 3i$.

3.11. $i^{51} + 2i^{24} - 5$.

3.12. $9i^{33} - 11i^{20} - 7$.

3.13. $i^{59} - 3i^{26} + 9i$.

3.14. $6i^{81} + 21i^{30} - 13$.

3.15. $7i^{61} - 11i^{34} + i^{5}$.

3.16. $i^{77} + 8i^{28} - 3i$.

3.17. $8i^{49} - 15i^{36} + 17$.

3.18. $i^{57.} + 7i^{20} - 4i^{3}$.

3.19. $3i^{47} - 13i^{36} + 15i$.

3.20. $i^{53} - 17i^{18} - 11$.

Задание 4. Найти множество точек плоскости, удовлетворяющих условию

4.1. $|z - i| + |z + i| < 4$.

4.2. $|z| > 1 - Re\, z$.

4.3. $|z + 1 - 4i| = 7$.

4.4. $|z - 3 + 2i| \geq 1$.

4.5. $\frac{\pi}{4} < arg\,(z + i) < \frac{\pi}{2}$.

4.6. $\left|\frac{z-1}{z-4}\right| > 3$.

4.7. $Re\,(z\,(1 - i)) < 2$.

4.8. $|z - 2| + |z + 2| < 5$.

4.9. $0 < arg\,\frac{i-z}{z+i} < \frac{\pi}{2}$.

4.10. $Im\frac{z-1}{z+1} > 0$.

4.11. $|z + 1| < |1 - z|$.

4.12. $|z + 2 - 3i| \leq 5$.

4.13. $Re\,\frac{1}{z} < \frac{1}{2}$.

4.14. $|z - 2| - |z + 2| < 2$.

4.15. $|z - 1 - i| = |z + i + 1|$.

4.16. $|z + 2i| < |z|$.

4.17. $|z + 3| = |z - 3i|$.

4.18. $|z\bar{z} + 3\bar{z} + 3z| = 0$.

4.19. $|z - 1 + i| \geq 3$.

4.20. $Re\frac{z-1}{z+1} < 0$.

Задание 5. Записать данные числа в тригонометрической и алгебраической формах

5.1. $(-3+4i)^2$.

5.2. $(-1-\sqrt{3}i)^2$.

5.3. $(\sqrt{6}-i)^2$.

5.4. $(-5-\sqrt{5}i)^2$.

5.5. $(3-4i)^2$.

5.6. $(1-\sqrt{2}i)^2$.

5.7. $(-4+\sqrt{4}i)^2$.

5.8. $(\sqrt{3}+2i)^2$.

5.9. $(-3+\sqrt{3}i)^2$.

5.10. $(2\sqrt{3}-i)^2$ /

5.11. $(-\sqrt{3}-3i)^2$.

5.12. $(\sqrt{3}-2i)^2$.

5.13. $(-2-2\sqrt{3}i)^2$.

5.14. $(\sqrt{2}-2i)^2$.

5.15. $(-\sqrt{3}+i)^2$.

5.16. $(\sqrt{3}-3i)^2$.

5.17. $(8-\sqrt{8}i)^2$.

5.18. $(-2-\sqrt{2}i)^2$.

5.19. $(1-\sqrt{3}i)^2$.

5.20. $(-3-\sqrt{3}i)^2$.

Решение типового варианта контрольной работы № 5 «Комплексные числа»

Задание 1. Найти комплексные корни квадратного уравнения $x^2-4x+20=0$ и изобразить их на комплексной плоскости

Решение. Найдем $D=(-4)^2-4\cdot1\cdot20=16-80=-64,$

$$x_1=\frac{4-\sqrt{-64}}{2}=\frac{4-\sqrt{i^2 8^2}}{2}=\frac{4-8i}{2}=2-4i,$$

$$x_2=\frac{4+\sqrt{-64}}{2}=\frac{4+\sqrt{i^2 8^2}}{2}=\frac{4+8i}{2}=2+4i.$$

Теперь изобразим полученные комплексные числа на комплексной плоскости

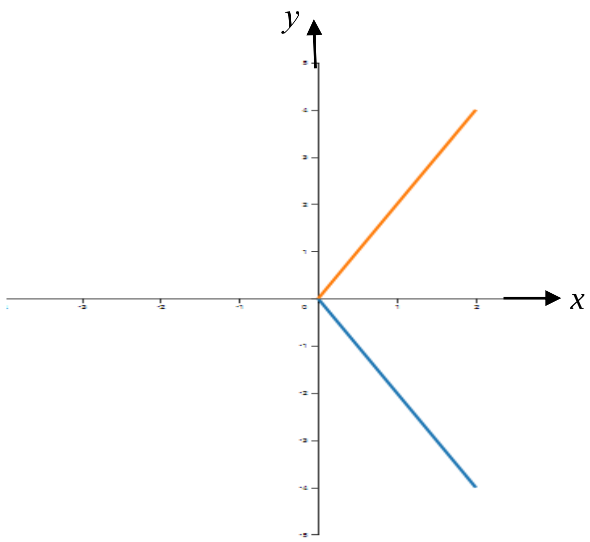


Рисунок к заданию 1

Задание 2. Вычислить: $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$, $z_1 \cdot z_2$, z_1 / z_2, z_2^3, если $z_1 = 3 + 2i$,

$$z_2 = 5 - 4i.$$

Решение. $z_1 + z_2 = (3+2i) + (5-4i) = (3+5) + (2-4)i = 8 - 2i,$

$$z_1 - z_2 = (3+2i) - (5-4i) = (3-5) + (2+4)i = -2 + 6i,$$

$$z_1 \cdot z_2 = (3+2i)(5-4i) = 15 - 12i + 10i - 8i^2 = 15 - 2i - 8(-1) = 15 - 2i + 8 = 23 - 2i,$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{3+2i}{5-4i} = \frac{(3+2i)(5+4i)}{(5-4i)(5+4i)} = \frac{15+12i+10i+8i^2}{5^2-(4i)^2} = \frac{15+22i+8\cdot(-1)}{25-16\cdot(-1)} = \frac{7+22i}{41} =$$

$$= \frac{7}{41} + \frac{22}{41}i,$$

Задание 3. Вычислить: $2i^{73} - i^{90} + 5i^{59} - 3i^{48}$.

Решение. $2i^{73} - i^{90} + 5i^{59} - 3i^{48} = 2i^{72+1} - (i^2)^{45} + 5(i^2)^{29} \cdot i - 3(i^2)^{24} =$

$$= 2(i^2)^{36} \cdot i - (-1)^{45} + 5(-1)^{29} \cdot i - 3(-1)^{24} = 2i + 1 - 5i - 3 =$$

$$= -2 - 3i.$$

Задание 4. Найти множество точек плоскости, удовлетворяющих условию $1 < |z + 2 - 3i| \le 2$.

Решение. Представим выражение $z + 2 - 3i$ в виде разности двух комплексных чисел: $z+2-3i=z-\left(-2+3i\right)$. Тогда становится ясно, что равенство $\left|z+2-3i\right|\leq 2$ является уравнением окружности с центром в точке (-2,3) и радиусом 2.

Неравенству $\left|z+2-3i\right|\leq 2$ удовлетворяют внутренние точки указанного круга вместе с точками, лежащими на окружности $\left|z-\left(-2+3i\right)\right|=2$, тогда неравенству $1<\left|z+2-3i\right|$ соответствует внешность круга радиуса 1 концентрическому первому.

Так как нас интересуют точки, удовлетворяющие одновременно двум условиям: $1<\left|z+2-3i\right|\leq 2$, поэтому искомая область является пересечением двух найденных областей и представляет собой кольцо, содержащее точки внешней ограничивающей окружности. Так как левое неравенство является строгим, точки внутренней ограничивающей окружности не входит в полученную область (см. рис.).

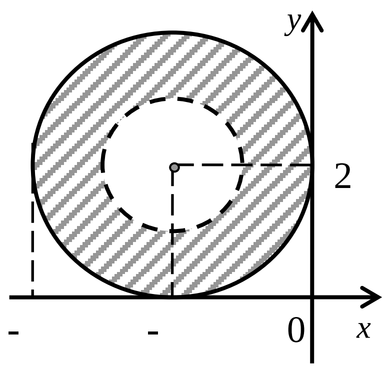


Рисунок к заданию 4

Задание 5. Записать данное число в тригонометрической и алгебраической формах $\left(-\sqrt{3}+2i\right)^2$.

Решение. Для того, чтобы представить данное число в тригонометрической форме, нужно найти модуль и аргумент числа $z=-\sqrt{3}+2i$. $r=\left|z\right|=\sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2+2^2}=\sqrt{7}$, $tg\varphi=-\dfrac{2}{\sqrt{3}}$, $\varphi=arctg\left(-\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)$,

$$z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)=\sqrt{7}\left(\cos arctg\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)+\sin arctg\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)\right),$$

Применив формулу Муавра (5.21), получим тригонометрическую форму записи данного числа:

$$\left(-\sqrt{3}+2i\right)^2=7\left(\cos 2arctg\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)+i\sin 2arctg\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)\right).$$

Теперь можем найти $\cos arctg\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\right), \sin arctg\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$ с помощью формул:

$$\cos arctg\ x=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}},\qquad \sin arctg\ x=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}},$$

$$\cos arctg\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)=\frac{1}{\sqrt{1+\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{4}{3}}}=\sqrt{\frac{3}{7}},$$

$$\sin arctg\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)=\frac{-\frac{2}{\sqrt{3}}}{\sqrt{1+\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2}}=\frac{-\frac{2}{\sqrt{3}}}{\sqrt{\frac{7}{3}}}=-\frac{2}{\sqrt{7}}.$$

Применяя формулы двойного угла для синуса и косинуса, получим алгебраическую форму данного числа:

$$z^2=\left(\sqrt{7}\right)^2\left(\cos 2arctg\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)+i\sin 2arctg\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)\right)=$$

$$=7\left(\cos^2 arctg\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)-\sin^2 arctg\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)+i\ 2\sin arctg\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)\cos arctg\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)\right)=$$

$$=7\left(\left(\sqrt{\frac{3}{7}}\right)^2-\left(-\frac{2}{\sqrt{7}}\right)^2+i\ 2\left(-\frac{2}{\sqrt{7}}\right)\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}\right)=7\left(-\frac{1}{7}-\frac{4\sqrt{3}}{7}i\right)=-1-4\sqrt{3}i.$$

ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ № 12 «Комплексные числа» (практика)

12.1. Сумма $3z_1 + \bar{z}_2$, если $z_1 = 1 - 2i$, $z_2 = 5 + 3i$, равна …

1) $8 + 2i$; 2) $9 - 3i$; 3) $8 - 9i$;
4) $4 + 3i$; 5) -6 + 5i; 6) -12 – 7i.

12.2. Разность $5\overline{z_1} - 2\overline{z_2}$, если $z_1 = 4 + 3i,\ z_2 = 4 + 2i$, равна…

1) $-12 + 12i$; 2) $20 - 19i$; 3) $13 + 11i$;
4) $13 + 12i$; 5) -13 + 7i; 6) -15 – 17i.

12.3. Дано комплексное число $z = 1 + i$. Значение выражения $z + z \cdot \bar{z} + \bar{z}$ равно

1) $2 + i$; 2) $2i$; 3) 6;
4) -3 + 5i; 5) 4; 6) -7i.

12.4. . Если $z_1 = 7 - 2i$, $z_2 = 1 - i$, то $z_1 \cdot z_2^{\,2}$ равно …

1) -4 – 14i ; 2) $9 - 4i$; 3) $3 - 8i$;
4) $3 + 8i$; 5) 5i; 6) -5 – 7i.

12.5. Дано комплексное число $z = 1 - i$. Установить соответствие между операциями над числом и результатом их вычисления

А. $z \cdot \bar{z}$

Б. $\dfrac{|z|}{\bar{z}}$

В. $2z + \bar{z}$

Г. $\dfrac{z - \bar{z}}{3z}$

1. $\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} i$
2. $-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} i$
3. $\frac{1}{3} - \frac{1}{3} i$
4. 3 - i
5. -2 i
6. 2
7. 0.

Ответ: А __, Б __, В __, Г __.

12.6. Если z - комплексное число, $Re\ z = 10$, $arg\ z = arccos\ (2/3)$, то модуль комплексного числа равен ____ (ответ введите).

12.7. Значение выражения $\dfrac{(1+i)^5}{(1-i)^3}$ равно …

1) 2; 2) 1 - 2i; 3) $2\sqrt{3}+i$;
4) 3 - $\sqrt{2}i$; 5) 14 i; 6) -1.

12.8. Частное от деления комплексных чисел z_1 на z_2, если $z_1 = 2+3i$ и $z_2 = 1+4i$, равно…

1) $\dfrac{14}{17}+\dfrac{5}{17}i$; 2) $\dfrac{14}{17}-\dfrac{5}{17}i$; 3) $\dfrac{14}{17}$;
4) $\dfrac{5}{17}i$; 5) $2+\dfrac{3}{4}i$; 6) $-7-\dfrac{3}{14}i$.

12.9. Показательная форма комплексного числа $z = 1+i$ имеет вид:

1) $2e^{\frac{3}{4}\pi i}$; 2) $\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}$; 3) $e^{\frac{\pi}{2}i}$;
4) $2e^{-\pi i}$; 5) $\sqrt{5}\ e^{\frac{\pi}{2}i}$; 6) $2e^{\frac{3}{7}\pi i}$.

12.10. Тригонометрическая форма записи комплексного числа $z = \dfrac{3}{\sqrt{2}}+\dfrac{3}{\sqrt{2}}i$ имеет вид:

1) $2\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$; 2) $\sqrt{3}\left(\cos\dfrac{3\pi}{4}+i\sin\dfrac{3\pi}{4}\right)$;
3) $\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{3\pi}{2}+i\sin\dfrac{3\pi}{2}\right)$; 4) $3\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$;
5) $6\left(\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$; 6) $\sqrt{6}\left(\cos\dfrac{5\pi}{6}+i\sin\dfrac{5\pi}{6}\right)$.

12.11. Комплексное число $z = 2e^{\frac{2\pi}{3}i}$ в алгебраической форме имеет вид:

1) 2 - i; 2) -1 + i; 3) -1 + $\sqrt{3}i$;
4) $\sqrt{3}+i$; 5) 5 - $\sqrt{2}i$; 6) 4i.

12.12. Модуль комплексного числа $z = 3+4i$ равен …

1) 3; 2) 4; 3) 5; 4) 7; 5) 1; 6) 12.

12.13. Конец радиуса-вектора, задающего комплексное число $z=-5+2i$, лежит …

1) в первой четверти; 2) во второй четверти;
3) в третьей четверти; 4) в четвертой четверти;
5) на оси *Ox*; 6) на оси *Oy*.

12.14. На рисунке представлена геометрическая иллюстрация комплексного числа $z=x+iy$

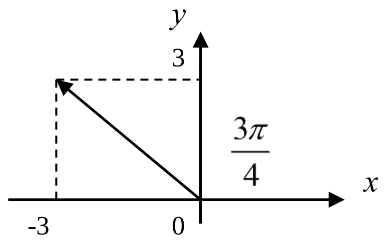


Рисунок к тестовому заданию 12.14.

Тогда тригонометрическая форма записи этого числа имеет вид:

1) $2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$; 2) $3\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$;

3) $\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$; 4) $\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}$;

5) $\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$; 6) $\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$.

12.15. Мнимая часть $Im\,z$ комплексного числа $z = e^{-\frac{5\pi}{6}i}$ равна…

1) 2; 2) -1/2; 3) $-\sqrt{3}/2$; 4) -3; 5) $\sqrt{2}/3$; 6) 0.

12.16. Главное значение аргумента комплексного числа $z=-1-i$ равно:

1) -π/4; 2) π/6; 3) -3π/4;
4) 0; 5) 3π/4; 6) 2π/3.

12.17. Комплексное число $z=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$ в алгебраической форме имеет вид:

1) 3 - *i*; 2) 1 + *i*; 3) $\sqrt{3}+i$;
4) $1+\sqrt{3}i$; 5) $3\sqrt{2}-5i$; 6) -1 + 4*i*.

12.18. Значение выражения $\left(1-\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)^4$ равно…

1) 8 - i; 2) -4; 3) -2$\sqrt{3}+i$;
4) 3 - $\sqrt{2}i$; 5) $\sqrt{5}-3i$; 6) $7i$.

12.19. Действительная часть Re z комплексного числа
$z=\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right]$ равна…

1) $\frac{\sqrt{3}}{3}$; 2) $\sqrt{3}$; 3) $-\sqrt{2}/2$; 4) -1; 5) 0; 6) $\frac{\sqrt{2}}{5}$.

12.20. Дана функция $f(z)=(z-1)e^{z+1}$. Тогда $f(i\pi)$ равно …

1) $1-i$; 2) $e-ei$; 3) $3+i$;
4) $e(1-\pi i)$; 5) $2e$; 6) $-e+2ei$.

12.21. Результат извлечения корня $\sqrt[4]{-8+8\sqrt{3}i}$ равен:

1) 1 ± i; -1 ± i; 2) $\pm 2(\sqrt{3}+i)$; $\pm 2(-1-\sqrt{3}i)$; 3) $\sqrt{3}\pm i$;
4) 1; $\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$; 5) ± 1(1+ i); 6) $\sqrt{8}\pm\sqrt{3}i$.

12.22. Комплексное число $z=-2$ записывается в тригонометрической форме в виде:

1) $2(\cos 0+i\sin 0)$; 2) $-2(\cos\pi+i\sin\pi)$; 3) $2(\cos\pi-i\sin 0)$;
4) $2(\cos\pi+i\sin\pi)$; 5) $2(\cos 2\pi+i\sin 2\pi)$; 6) $-2(\cos 2\pi+i\sin 2\pi)$.

12.23. Значение функции $f(z)=\bar{z}-\frac{1}{z}$ в точке $z_0=3+2i$ равно …

1) 2; 2) $13-3i$; 3) $\frac{1}{13}+\frac{24}{13}i$;
4) $\frac{36}{13}-\frac{24}{13}i$; 5) $\frac{1}{10}+\frac{3}{10}i$; 6) $-\frac{1}{11}+\frac{2}{11}i$.

12.24. Значение комплексного числа $(-1+i\sqrt{3})^{60}$, вычисленное по формуле Муавра, равно …

1) 2^{60} 2) -2^{61}; 3) -2^{60};
4) 2^{61}; 5) 4^{60}; 6) -4^{60}.

12.25. Значение выражения $\left(1+\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)^6$ равно…

1) $-2\sqrt{3}+\sqrt{3}i$; 2) $1+\sqrt{2}i$; 3) $-i$;
4) $-\sqrt{2}-5i$; 5) $\frac{1}{3}+\frac{5}{3}i$; 6) -27.

12.26. Неравенству $|z+1-i|\le 2$ соответствует множество точек плоскости, лежащих …

1) в первой четверти; 2) в третьей четверти;
3) внутри эллипса с большой осью, равной 2;
4) на луче $x + y = 2$, выходящего из точки $A(0;2)$;
5) внутри круга, с центром в начале координат и радиусом $R = 2$;
6) в круге с центром C(1;-1) радиуса $R = 2$, включая его границу.

12.27. Результат извлечения корня $\sqrt[3]{2+2i}$ равен:

1) $2\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi+\pi k}{3}+i\sin\frac{\pi+\pi k}{3}\right)$; 2) $2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{3}\right)\right)$;

3) $\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\frac{\pi k}{6}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\frac{\pi k}{6}\right)$; 4) $\sqrt{3}\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{2}\right)\right)$;

5) $\sqrt{2}\left(\cos\frac{2\pi+\pi k}{3}+i\sin\frac{2\pi+\pi k}{3}\right)$; 6) $3\sqrt{5}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}\right)\right)$.

12.28. Решением уравнения $|z|+z-i=1+2i$ является комплексное число …

1) -4 + 3i; 2) 3 - 2i; 3) $4\sqrt{3}-5i$;
4) 3 - 4i; 5) $\sqrt{3}-4i$; 6) -7i.

12.29. Точки первой четверти, расположенные выше оси Ox, но не выше луча, выходящего из начала координат с углом наклона π/4, удовлетворяют неравенству …

1) $0 \le Arg\, z \le \pi/4$; 2) $0 < Arg\, z \le \pi/4$; 3) $0 \le Arg\, z < \pi/4$;
4) $-\pi/4 \le Arg\, z \le 0$; 5) $-\pi/4 < Arg\, z \le 0$; 6) $-\pi/4 \le Arg\, z < 0$.

12.30. Значение выражения $\frac{\left(1-\sqrt{3}i\right)^9}{\left(\sqrt{3}-i\right)^6}$ равно…

1) 8; 2) 2 + 2i; 3) $2\sqrt{3}+i$;
4) $3-\sqrt{2}i$; 5) $\sqrt{3}+7i$; 6) -11 i.

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Антонов В.И., Лагунова М.В., Лобкова Н.И., Максимов Ю.Д., Семёнов В.М., Хватов Ю.А. Линейная алгебра и аналитическая геометрия. Опорный конспект: [учеб. пособие] / — М. : Проспект, 2015 .— 139 с.
2. Ахметгалиева В.Р., Галяутдинова Л. Р., Галяутдинов М. И. Математика. Линейная алгебра: учебное пособие / Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования "Российский государственный университет правосудия"— М.: Российский государственный университет правосудия, 2017 .— 60 с.
3. Ащеулова А.С., Карнадуд О.С., Саблинский А.И. Высшая математика: линейная алгебра и аналитическая геометрия: конспект лекций / Кемерово: КемГУКИ, 2011.— 71 с.
4. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры: учебник – 12-е изд., испр. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009. – 312 с.
5. Бортаковский А.С. Линейная алгебра в примерах и задачах: учебное пособие: рекомендовано УМО вузов РФ / А. С. Бортаковский, А. В. Пантелеев. - 3-е изд., стер. - Москва : ИНФРА-М, 2017. - 592 с.
6. Бортаковский, Александр Сергеевич. Линейная алгебра и аналитическая геометрия. Практикум: учебное пособие : рекомендовано УМО вузов РФ / А. С. Бортаковский, А. В. Пантелеев. - 2-е изд., стер. - Москва: ИНФРА-М, 2017. - 352 с.
7. Винберг Э.Б. Курс алгебры, М.: МЦНМО, 2011. – 591 с.
8. Волков Ю.В., Ермолаева Н.Н., Козыченко В.А., Курбатова Г.И. Практические занятия по алгебре. Комплексные числа, многочлены [Электронный ресурс]: учебное пособие / — Санкт-Петербург: Лань, 2014. — 192 с.
9. Гордеев Ю.Н., Сандаков Е.Б. Векторная алгебра: учеб. - метод. пособие / — М.: НИЯУ МИФИ, 2012 .— 36 с.
10. Гусак А. А. Справочное пособие к решению задач: аналитическая геометрия и линейная алгебра. – Минск: ТетраСистемс, 2013. – 132 с.
11. Ермолаев Ю.Д. Типовой расчет по линейной и векторной алгебре : сетевое обновляемое электрон. учеб. пособие / [3-е изд.].— Липецк: ЛГТУ, 2013.— 366 с.
12. ИвлеваА.М., Прилуцкая П.И., Черных И.Д. Линейная алгебра. Аналитическая геометрия// Новосиб.: НГТУ, 2014. - 180 с.
13. Камышова Г.Н., Терехова Н.Н. Методические указания и задания для выполнения самостоятельной работы по курсу «Математика». Ч. 2. Векторная алгебра /- Саратов: ФГБОУ ВПО "Саратовский ГАУ им. Н. И. Вавилова", 2013 .— 17 с.
14. Кремер Н.Ш., Фридман М.Н. Линейная алгебра. Учебник и практикум / под ред. Н.Ш. Кремера.– М.: Юрайт, 2014.-306 с.

15. Кузнецов Л.А. Сборник заданий по высшей математике. Типовые расчеты [Текст] : учеб. пособие для вузов / Л. А. Кузнецов. - 12-е изд., испр. - СПб.: Лань, 2013. - 239 с.

16. Лобкова Н. И. Высшая математика: учеб. пособие [для студентов вузов]. Т. 2 [отв. ред. В. И.Антонов, Ю. Д. Максимов]; С.-Петерб. гос. политех. ун-т. - М.: Проспект, 2015

17. Мальцев И.А. Линейная алгебра: учеб. пособие/ И.А. Мальцев.- Спб.: Лань, 2010.-380 с.

18. Овчинникова Н.И. Линейная алгебра: (сборник тестовых заданий)/ - Иркутск: Изд-во Иркутского ГАУ им. А.А. Ежевского, 2015. - 84с.

19. Панов Т.Е. Линейная алгебра и геометрия: курс лекций / Т.Е. Панов. – М.: МГУ, 2016. – 96 с.

20. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: полный курс / – 12-е изд. – М.: АЙРИС-пресс, 2014. – 608 с.

21. Понарин Я.П. Алгебра комплексных чисел в геометрических задачах/ 2 изд., стер. – М.: МЦНМО, 2014. – 160 с.

22. Родина Т.В. Комплексные числа [Электронный ресурс] : учебное пособие /— Электрон. дан. — Санкт-Петербург: НИУ ИТМО, 2009. — 30 с.

23. Рябушко А.П. , Жур Т.А. Высшая математика: теория и задачи. В 5 ч. Ч. 2. Комплексные числа. Неопределенный и определенный интегралы. Функции нескольких переменных [Электронный ресурс]: учебное пособие / — Электрон. дан. — Минск : "Вышэйшая школа", 2016. — 271 с.

24. Умнов А.Е. Линейная алгебра и геометрия / А.Е Умнов. – М. : МФТИ, 2011. - 544 с.

25. Шипачев В. С. Высшая математика: учеб. пособие для вузов / В. С. Шипачев ; под ред. А. Н. Тихонова. - 8-е изд., перераб. и доп. - М. : Юрайт, 2012. - 447 с.

26. Шипачев, В.С. Высшая математика: учебник и практикум для бакалавров / В.С. Шипачев; под ред. А.Н. Тихонова. – 8-е изд., перераб. и доп. – М.: Издательство Юрайт, 2015. – 447 с. – Серия: Бакалавр. Базовый курс.

27. Шумай Т.А., Голышева С.П. Математика : учеб. пособие : прогр., метод. указ. и контрольные задания для студентов 1 и 2 курсов заочн. формы обучения направления бакалавриата 35.03.06 "Агроинженерия" / 4-е изд., перераб. - Иркутск: Изд-во Иркутского ГАУ им. А. А. Ежевского, 2017. -143 с.

28. Шумай Т.А., Голышева С.П. Высшая математика : учеб. пособие : прогр., метод. указ. и контрольные задания для студентов 1 курса заочн. формы обучения направления бакалавриата 13.03.02 "Электроэнергетика и электротехника" / - 4-е изд., перераб. - Иркутск: Изд-во Иркутского ГАУ им. А. А. Ежевского, 2017 - Ч. 1. - 95 с.

29. Allen G.D. Lectures on Linear Algebra and Matrices. Texas A&M University. — URL: http://www.math.tamu.edu/~dallen / m640_03c / readings.htm, 31.05.2012.

30. Wildon M. A short proof of the existence of Jordan normal form. — URL: http://www.ma.rhul.ac.uk/ uvah099/Maths/JNFfinal.pdf, свободный, 20.07.2011.

Информационные ресурсы

31.Math.ru - Портал математического образования
32. Exponenta.ru - Образовательный математический сайт
33. Allmath.ru - Математический портал
34. http://windows.edu/ru - Единое окно доступа к образовательным ресурсам
35. http://window.edu.ru/resource/125/47125 - Векторная алгебра
36. http://window.edu.ru/resource/143/64143 - Линейная алгебра, аналитическая геометрия.
37. http://mathtest.ru/ - Тесты по математике в режиме on-line.
38. http://stellus http://znanium.com/go.php?id=476097- Электронные тестовые базы LAN-TESTING и STELLUS
39. http://www.intuit.ru/department/mathematics/intmath/ - Вводный курс в высшую математику.
40. http://mathelp.spb.ru - Лекции, учебники on-line, web-сервисы по высшей математике в помощь студентам.

Быкова Мария Александровна
Елтошкина Евгения Валерьевна
Овчинникова Наталья Ивановна

Математика

Учебное пособие

Редактор Тесля В.И.
Подготовка оригинал-макета: Овчинникова Н.И.

Лицензия на издательскую деятельность
ЛР № 070444 от 11.03.98 г.
Подписано в печать 19.12.2018.
Тираж 150 экз.

Издательство Иркутского государственного
аграрного университета им. А.А. Ежевского
664038, Иркутская обл., Иркуский р-он,
пос. Молодежный