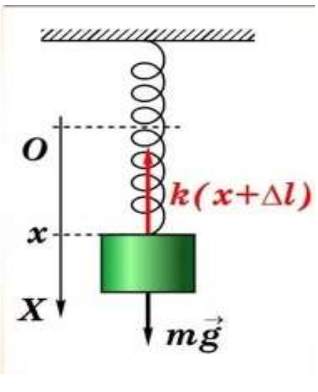
Министерство сельского хозяйства РФ
ФГБОУ ВО «Иркутский государственный аграрный университет имени А.А. Ежевского»

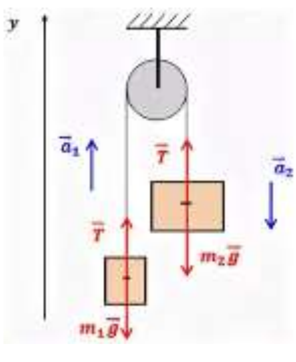
Кафедра математики

Голышева С.П.

МАТЕМАТИКА. ПРИЛОЖЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рекомендовано УМО РАЕ по классическому университетскому и техническому образованию в качестве учебного пособия для студентов первых, вторых курсов инженерно-технических, экономических и биологических направлений бакалавриата аграрных вузов очной формы обучения



$$y'' + \lambda^2 y = 0 \qquad h' = -k\sqrt{h} \qquad l'' - \frac{g}{9} l = -g.$$

Молодежный 2019

УДК 519.854(075.8)
Г 629

Рекомендовано к изданию Научно-методическим советом Иркутского государственного аграрного университета им. А.А. Ежевского (протокол № 2 от 25ноября 2019 г.).

Автор: к.п.н., доцент кафедры математики Иркутского ГАУ им. А.А. Ежевского Голышева С.П.

Голышева С.П. Математика. Приложения дифференциальных уравнений. Учебное пособие для студентов первых, вторых курсов инженерно-технических, экономических и биологических направлений бакалавриата аграрных вузов очной формы обучения. Молодежный: Издательство ИрГАУ, 2019. – 115 с.

Учебное пособие предназначено для студентов первых и вторых курсов инженерно-технических, экономических и биологических направлений аграрных вузов. Составлено на основе действующего стандарта и рабочей программы по математике. В пособии приведено достаточное количество примеров и задач на приложения обыкновенных дифференциальных уравнений в различных областях наук: механике, физике, технике, экономике, биологии; и дифференциальных уравнений в частных производных применительно к уравнениям теплопроводности.

Даны краткие теоретические сведения изтеории дифференциальных уравнений и методах их решения. Кроме того, включены задания для самостоятельной работы студентов, контрольные вопросы по теме «Дифференциальные уравнения», а также приведены кроссворды, ребусы, головоломки на приложение дифференциальных уравнений, решение которых развивает логическое мышление, творческие способности студентов и прививает навыки к более детальному изучению данной темы.

Рецензенты:

зав. кафедрой математики ИрГАУ им. А.А. Ежевского, д.т.н., профессор Н.И. Овчинникова;

старший научный сотрудник ИСЗФ СО РАН, к.ф.-м.н., доцент В.П. Грозов.

Содержание

Введение

Дифференциальное уравнение (ДУ) – это язык, на котором говорит природа. Владение математическим языком составляет часть от общей культуры человека современного времени, которая в последние века практически не оспаривается. После открытия Ньютоном дифференциального исчисления, позволяющего использовать один и тот же математический аппарат для описания фундаментальных закономерностей различных явлений окружающего мира, стало возможно с помощью ДУ описывать не только простые явления, но и отдельные фундаментальные закономерности сложных объектов. Также большое значение имеют эти уравнения в экономической сфере, потому что при помощи ДУ можно описать множество процессов макроэкономической динамики. Например: для описания роста населения (в рассматриваемый промежуток времени), динамику роста цен, процесс распространения рекламы, для нахождения функции спроса и предложения, объема производства некоторого производителя и т.д. Для того, чтобы доказать это я предлагаю рассмотреть несколько примеров, которые решаются при помощи дифференциального исчисления.

Теория дифференциальных уравнений широко применяется в различных областях науки.

Простейший класс таких уравнений первого порядка составляют эволюционные уравнения, описывающие такие явления, как:

1) радиоактивный распад описывается ДУ: $y' = -ky$, где $y = y(t)$ – количество радиоактивного вещества в момент t.

2) вытекание жидкости из сосуда через отверстие в его дне: $y' = -k\sqrt{y}$, где $k > 0, y = y(t)$ – высота уровня жидкости в момент времени t [13].

3) рост народонаселения, процесс изменения атмосферного давления в зависимости от высоты над уровнем моря, динамика роста цен при постоянной инфляции, объем производства некоторой продукции к моменту времени t: $y' = ky$.

4)скорость остывания (или нагревания) тела: $T' = k(T - T_0)$, где T – температура тела в момент времени t.

5) ДУ, описывающее состояние размножение и вымирание популяции в схеме «хищник-жертва», имеет вид: $dx = (A - B)dt$, где $x(t)$ – число особей популяции в момент времени t, A – число особей, рождающих в момент времени t, B – число особей, вымирающих в момент времени t.

Часто придерживаются более общей точки зрения, считая ДУ «решённым», если искомая зависимость между переменными произвольными постоянными, входящими в общее решение, может быть выражена при помощи элементарных функций и одной или нескольких операций взятия неопределённого интеграла («решение выражено в квадратурах»).

Реальные математические модели описываются с помощью ДУ в частных производных, которые получили название *уравнения математической физики*.

Математическая физика начала упорно развиваться с конца 18 в. в связи с изучением колебаний струн и стержней, а также при решении задач из области гидродинамики и акустики. В дальнейшем, в связи с решениями задач теплопроводности, электродинамики, диффузии, оптики, математическая физика получила новый виток своего развития.

Теория ДУ выделилась в самостоятельную детально разработанную научную дисциплину в 18 в. В основу развития теории ДУ легли труды Д. Бернулли, Ж.Д'Аламбера, Л. Эйлера и др.

Данное учебное пособие предназначено для студентов первых, вторых курсов аграрных вузов очной формы обучения. Содержание и структура пособия выстроены так, что онипозволяют развивать познавательную активность студента, его творческие способности, а также навыки самостоятельного накопления знаний по изучаемой теме.

Целью издания настоящего пособия является: показать широкий спектр приложения дифференциальных уравнений в различных областях наук деятельности человека: механике, физике, технике, медицине, биологии, химии, экономике.

РАЗДЕЛ 1. КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

1.1 Основные понятия и определения теории обыкновенных дифференциальных уравнений

Определение 1. Дифференциальным уравнением (ДУ) называется уравнение, связывающее независимые переменные, неизвестную функцию и ее производные или дифференциалы.

Если неизвестная функция зависит от одной переменной, то дифференциальное уравнение называется ***обыкновенным***, в противном случае, называется уравнением ***в частных производных***.

В дальнейшем, мы будем рассматривать только обыкновенные дифференциальные уравнения (ОДУ).

Определение 2. Наивысший порядок производной, входящей в данное ДУ, называется порядком ДУ.

Решить дифференциальное уравнение – значит найти неизвестную функцию *y*. Дифференциальное уравнение обладает множеством решений. Наша задача заключается в том, чтобы найти аналитическое выражение решения данного дифференциального уравнения, которое бы охватывало все множество его решений.

Дифференциальным уравнением n-го порядка называется уравнение вида

$$F(x, y, y', y'',..., y^{(n)}) = 0. \qquad (1)$$

Если из уравнения (1) удастся выразить старшую производную $y^{(n)}$, то полученное уравнение

$$y^{(n)} = f(x, y, y',..., y^{(n-1)}) \qquad (2)$$

будет называться ***дифференциальным уравнением, разрешенным относительно производной*** $y^{(n)}$.

Теорема существования и единственности решения задачи Коши. Если ДУ $y^{(n)} = f(x, y, y',..., y^{(n-1)})$ таково, что функция $f\left(x, y', y'',..., y^{(n-1)}\right)$ в некоторой области D своих аргументов непрерывна и имеет непрерывные частные производные $\frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial y'},... \frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}}$, то для любой точки $M_0\left(x_0, y_0', y_0'',..., y_0^{(n-1)}\right)$, принадлежащей D существует такой интервал $x_0 - h \le x \le x_0 + h$, на котором существует решение притом единственное этого уравнения, удовлетворяющее начальному условию $\begin{cases} y_0 = y(x_0) \\ y'_0 = y'(x_0) \\ .... \\ y_0^{(n-1)} = y_0^{(n-1)}(x_0) \end{cases}$.

Определение 3. Решением дифференциального уравнения называется такая функция, которая при подстановке в данное дифференциальное уравнение, обращает его в тождество.

Определение 4. Общим решением дифференциального уравнения (1) называется такое решение $y = \varphi(x, C_1, C_2, ..., C_n)$, содержащее *n*произвольных постоянных *C*.

Если общее решение представить в неявном виде, то функция $\Phi(x, y, C_1, C_2, ..., C_n) = 0$ будет называться ***общим интегралом*** уравнения (2) [2, с. 198].

1.2 Дифференциальные уравнения I порядка

Если вуравнении(1) положить $n = 1$, то полученное уравнение

$$F(x, y, y') = 0 \qquad (3)$$

будет называться дифференциальным уравнением I порядка.

Уравнение

$$y' = f(x, y) \qquad (4)$$

называется ***дифференциальным уравнением I порядка***, ***разрешенным относительно производной*** y'.

Иногда требуется из всех решений дифференциального уравнения I порядка найти такое решение, которое бы удовлетворяло условию:

$$y(x_0) = y_0. \qquad (5)$$

Условие (5) называется ***начальным условием*** или ***условием Коши*** для уравнения (4).

Определение 5. Общим решением уравнения (4) называется функция $y = \varphi(x, C)$, содержащая одну произвольную постоянную*C* и удовлетворяющая условиям: 1) $y = \varphi(x, C)$ является решением уравнения (4) при каждом фиксированном *C*; 2) каково бы ни было начальное условие (5), можно найти такое значение $C = c_0$, что функция $y = \varphi(x, c_0)$ будет удовлетворять условию (4).

Если общее решение представить в неявном виде, то функция $\Phi(x, y, C) = 0$ будет называться ***общим интегралом*** уравнения (4).

При наличии условия (5) получаем *задачу Коши* – задачу нахождения частного решения дифференциального уравнения (5), удовлетворяющего условию: при $x = x_0$, $y = y_0$.

Задача Коши для дифференциального уравнения (4) имеет вид:

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0. \end{cases}$$

Определение 6.Частным решением дифференциального уравнения (4) называется такое решение, которое получается из общего $y = \varphi(x, C)$ при некотором вполне определенном значении постоянной *C*.

Чтобы найти частное решение уравнения (4), нужно сначала найти общее решение, а затем, воспользовавшись условием Коши, найти произвольную постоянную *C*. Найденное значение *C* подставить в общее решение.

График частного решения дифференциального уравнения называется ***интегральной кривой.*** Графики общего решения дифференциального уравнения образуют ***семейство интегральных кривых***.

Найти частное решение, удовлетворяющее начальным условиям, геометрически означает, что из семейства интегральных кривых, которое соответствует общему решению $y = \varphi(x, C)$, надо найти ту единственную кривую, которая проходит через точку $M_0(x_0; y_0)$ плоскости xOy.

Одним из способов решения дифференциального уравнения является интегрирование. Если решение дифференциального уравнения удалось найти с помощью интегрирования, то говорят, что оно найдено *в квадратурах*.

Рассмотрим некоторые типы дифференциальных уравнений I порядка, разрешаемых в квадратурах.

1.2.1 Дифференциальные уравнения I порядка с разделенными переменными

Рассмотрим дифференциальное уравнение (4). Пусть в нем

$$f(x, y) = -\frac{M(x, y)}{N(x, y)}. \tag{6}$$

Подставив в (4) вместо y' выражение $\dfrac{dy}{dx}$, получим ДУ

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0. \tag{7}$$

Уравнение (7) называется ***дифференциальным уравнением I порядка всимметрической форме***, соответствующее уравнению (4).

Определение 7. Если в уравнении (7) функция $M(x, y)$ зависит только от переменной x, а $N(x, y)$ – от переменной y, т.е. $M(x, y) = f_1(x)$ и $N(x, y) = f_2(y)$, то уравнение вида

$$f_1(x)dx + f_2(y)dy = 0. \qquad (8)$$

называется ***дифференциальным уравнением I порядка с разделеннымипеременными.***

Интегрируя обе части уравнения (8), получим общий интеграл

$$\int f_1(x)dx + \int f_2(y)dy + C = 0.$$

1.2.2 Дифференциальные уравнения I порядка с разделяющимися переменными

Определение 8. Если в дифференциальном уравнении I порядка в симметрической форме $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ функции $M(x,y)$ и $N(x,y)$ являются произведениями функций, зависящих от одной переменной, т.е. $M(x;y) = f_1(x)\cdot\varphi_1(x)$, $N(x;y) = f_2(x)\cdot\varphi_2(x)$, то уравнение вида

$$f_1(x)\cdot\varphi_1(y)dx + f_2(x)\cdot\varphi_2(y)dy = 0, \qquad (9)$$

называется ***дифференциальным уравнением I порядка с разделяющимися переменными***.

Уравнение (9) приводится к уравнению с разделенными переменными с помощью *разделяющего множителя* $\dfrac{1}{\varphi_1(y)\cdot f_2(x)}$, причем $\varphi_1(y) \neq 0$ и $f_2(x) \neq 0$ и, как следствие, становится разрешимым в квадратурах.

Итак, в результате умножения на разделяющий множитель обеих частей уравнения (9), будет получено:

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx + \frac{\varphi_2(y)}{\varphi_1(y)}dy = 0. \qquad (10)$$

Тогда общий интеграл уравнения (10) будет равен:

$$\int \frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx + \int \frac{\varphi_2(y)}{\varphi_1(y)}dy + C = 0. \qquad (11)$$

Уравнение

$$y' = \varphi(x)\cdot\varphi(y) \qquad (12)$$

также является уравнением с разделяющимися переменными с общим интегралом

$$\int \frac{dy}{\varphi(y)} dy = \int \varphi(x)dx + C .$$

Замечание 2. Деление уравнения (10) на произведение $\varphi_1(y) \cdot f_2(x)$ может привести к потере его частных решений, обращающих это произведение в нуль. Поэтому после нахождения общего интеграла (12), следует отдельно рассмотреть уравнения $\varphi_1(y) = 0$ и $f_2(x) = 0$; установить те решение, которые не могут быть получены из общего. Такие решения называются ***особыми***.

Определение 9. Решение дифференциального уравнения, которое не может быть получено из общего решения ни при одном численном значении произвольной постоянной *C*, включая $\pm\infty$, называется ***особым***.

Приведем таблицу методов интегрирования ДУ (таблица 1).

Таблица 1. Методы интегрирования дифференциальных уравнений

Тип ДУ 1-го порядка	***Метод решения***
I тип. ДУ с разделенными переменными $f_1(x)dx + f_2(y)dy = 0$.	Проинтегрировать уравнение по переменной x и y соответственно. Общий интеграл будет равен $\int f_1(x)dx + \int f_2(y)dy + C = 0$.
II тип. ДУ с разделяющимися переменными $f_1(x) \cdot \varphi_1(y)dx + f_2(x) \cdot \varphi_2(y)dy = 0$.	Умножить обе части уравнения на разделяющий множитель $\dfrac{1}{\varphi_1(y) \cdot f_2(x)}$. Получим уравнение ***I типа***. Общий интеграл равен: $\int \dfrac{f_1(x)dx}{f_2(x)} + \int \dfrac{\varphi_2(y)dy}{\varphi_1(y)} + C = 0$.
III тип.Однородное ДУ $y' = f(x, y)$, где $f(x, y)$ – однородная функция нулевого измерения.	Подстановка: $y = x \cdot t$, $dy = x \cdot dt + tdx$ (или $y' = t + xt'$). Приводится к уравнению ***II типа***.
IV тип. Линейное ДУ $y' + P(x) \cdot y = Q(x)$.	Подстановка: $y = u \cdot v$, $y' = u'v + uv'$, где $u = u(x)$, $v = v(x)$. Приводится к уравнению ***II типа***. Общее решение $y = e^{-\int P(x)dx}\left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C\right)$.
V тип. **Уравнение Бернулли** $y' + P(x) \cdot y = Q(x) \cdot y^n$, $n = R \setminus \{0;1\}$.	<u>*1 способ.*</u>Подстановка: $y = u \cdot v$, $y' = u'v + uv'$. <u>*2 способ.*</u>Подстановка: $t = y^{n-1}$.
VI тип. Уравнение в полных дифференциалах $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$.	1. Проверка достаточного условия $\dfrac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \dfrac{\partial N(x, y)}{\partial x}$. 2. $\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = M(x, y) \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = N(x, y) \end{cases} \Rightarrow F(x, y) = \int M(x, y)dx + c(y)$.

	$\frac{\partial F}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\int M(x,y)dx\right)+c'(y)=N(x,y)\ \Rightarrow$ $c(y)=\int\left(N(x,y)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\int M(x,y)dx\right)\right)dy+\tilde{C}.$ $\int M(x,y)dx+\int\left(N(x,y)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\int M(x,y)dx\right)\right)dy=C\ .$

1.3 Дифференциальные уравнения второго порядка

Если вуравнении (1) положить $n=2$, то полученное уравнение

$$F(x,y,y',y'')=0 \tag{13}$$

будет называться дифференциальным уравнением 2-гоII порядка.

Уравнение

$$y''=f(x,y,y') \tag{14}$$

называется *дифференциальным уравнением 2-го порядка, разрешенным относительно производной старшей производной* y''.

Определение 14. Общим решением уравнения (14) называется функция $y=\varphi(x,C_1,C_2)$, содержащая две произвольные постоянные C_1 и C_2.

Функция $\Phi(x,y,C_1,C_2)=0$ называется *общим интегралом* уравнения (14).

Задача Коши для дифференциального уравнения (14) имеет вид:

$$\begin{cases} y''=f(x,y,y') \\ y'(x_0)=y'_0 \\ y(x_0)=y_0. \end{cases} \tag{15}$$

Определение 15.Частным решением дифференциального уравнения (14) называется такое решение, которое получается из общего $y=\varphi(x,C_1,C_2)$ при конкретных значениях произвольных постоянных C_1 и C_2.

1.3.1 Линейные дифференциальные уравнения второго порядка

Определение 16. Дифференциальное уравнение II порядка называется ***линейным***, если оно содержит искомую функцию y и ее производные y', y'' в первой степени и не содержит их произведений.

Общий вид такого уравнения:

$$y''+p(x)y'+q(x)y=f(x). \tag{16}$$

Функция $f(x)$ называется ***правой частью*** уравнения (16).

Если в уравнении (21) функция $f(x)=0$, то полученное уравнение

$$y''+p(x)y'+q(x)y=0 \qquad (17)$$

называется ***линейным однородным дифференциальным уравнением II порядка.***

Если в уравнении (17) $f(x)\neq 0$, то оно называется ***линейным неоднородным дифференциальным уравнением II порядка или уравнением с правой частью.***

Теорема 2. Если $y_1(x)$ и $y_2(x)$ – решения уравнения (18), то функция

$$y(x)=C_1y_1(x)+C_2y_2(x) \qquad (18)$$

при любых значениях постоянных C_1 и C_2 также является *решением* уравнения (23).

Определение 17. Два решения $y_1(x)$ и $y_2(x)$ называются *линейно **независимыми***, если их отношение не является постоянным числом, т.е. $\dfrac{y_1(x)}{y_2(x)}\neq const$, в противном случае, они называются ***линейно зависимыми***.

Теорема 3 (О структуре общего решения линейного однородного уравнения). Если $y_1(x)$ и $y_2(x)$ – два линейно независимых решения уравнения (17), то структура его общего решения определяется формулой (18).

Теорема 4 (О структуре общего решения линейного неоднородного уравнения). Общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения (16) равно сумме общего решения, соответствующего ему линейного однородного дифференциального уравнения (17) и какого-нибудь частного решения уравнения (16).

Итак, если $y_{лоду}=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$ есть общее решение уравнения (17), а y^* – какое-нибудь частное решение уравнения (16), то

$$y_{лнду}=y_{лоду}+y^* \qquad (19)$$

есть общее решение уравнения (16).

1.3.2 Линейные однородные дифференциальные уравнения II порядка с постоянными коэффициентами

Пусть требуется решить линейное однородное дифференциальное уравнение II порядка с постоянными коэффициентами (ЛОДУ):

$$y''+py'+qy=0. \qquad (20)$$

По ***теореме 3*** общее решение уравнения (20) находится по формуле (18). Доказывается, что частные решения $y_1(x)$ и $y_2(x)$ уравнения (20) имеют вид $y=e^{kx}$, где k – корень уравнения:

$$k^2+pk+q=0. \quad (21)$$

Уравнение (21) называется ***характеристическим уравнением*** соответствующего ему дифференциального уравнения (20).

В таблице 2 указан вид общего решения уравнения (20) в зависимости от корней характеристического уравнения (21).

Таблица 2. Общее решение ДУ (20)

№ п/п	Корни характеристического уравнения $k^2+pk+q=0$	Вид общего решения ЛОДУ $y''+py'+qy=0$
1	$D>0$, $k_1\neq k_2\in R$ – *действительные и неравные*	$y_{одн}=C_1e^{k_1x}+C_2e^{k_2x}$
2	$D=0$, $k_1=k_2\in R$ – *действительные и равные*	$y_{одн}=e^{k_1x}(C_1+C_2x)$
3	$D<0$, $k_{1;2}=\alpha\pm\beta i$ – *комплексно-сопряженные*	$y_{одн}=e^{\alpha x}\left(C_1 cos\beta x+C_2 sin\beta x\right)$

1.3.3 Линейные неоднородные дифференциальные уравнения II порядка с постоянными коэффициентами

Пусть требуется решить линейное неоднородное дифференциальное уравнение II порядка с постоянными коэффициентами (ЛНДУ):

$$y''+py'+qy=f(x). \quad (22)$$

По ***теореме 4*** общее решения уравнения (22)находится по формуле (19).

1.4 Дифференциальные уравнения в частных производных

Определение 18. Уравнение, связывающее неизвестную функцию $u\left(x_1,...,x_n\right)$, независимые переменные $x_1,...,x_n$ и частные производные от неизвестной функции u, называется дифференциальным уравнением в частных производных:

$$F\left(x_1,...,x_n,\frac{\partial u}{\partial x_1},...,\frac{\partial u}{\partial x_n},...,\frac{\partial^k u}{\partial x_1^{k_1}...\partial x_n^{k_n}},...\right)=0.$$

Определение 19. ДУ второго порядка в частных производных с двумя независимыми переменными x, y называется соотношение между искомой функцией $u(x,y)$ и ее частными производными до второго порядка включительно:

$$F\left(x, y, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}\right) = 0. \tag{23}$$

ДУ в частных производных применяются в математической физике, т.е. ими описываются многие физические процессы. Все уравнения делятся на три типа: гиперболические, параболические и эллиптические.

В рамках данного пособия мы ограничимся первым типом ДУ, которых часто называют волновыми, т.к. они описывают волновые колебания.

Струной называется тонкая нить, которая может свободно изгибаться. Известно, что отклонение точек струны от положения равновесия в момент времени определяется дифференциальным уравнением

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f, \tag{24}$$

где $a^2 = \dfrac{A_0}{\rho}$, $f = \dfrac{F}{\rho}$, ρ – масса единицы длины (линейная плотность струны), F – сила, действующая на струну перпендикулярно оси абсцисс и рассчитанная на единицу. Если внешняя сила отсутствует, то получим однородное уравнение свободных колебаний

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{25}$$

При начальных условиях задачи, то есть если задать уравнение колебания струны в начальный момент времени и начальную скорость движения струны

$$u\big|_{t=0} = \varphi(x), \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x) \tag{26}$$

частное решение уравнения (25) будет иметь вид

$$u(x,t) = \frac{\varphi(x-at) + \varphi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} \psi(z)dz. \tag{27}$$

Формула (27) называется *формулой Даламбера*.

Раздел 2. ПРИЛОЖЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В РАЗЛИЧНЫХ ОБЛАСТЯХ НАУК

2.1 Задачи, приводящие к понятию дифференциального уравнения

К дифференциальному уравнению приходят в том случае, когда при построении математической модели удается установить зависимость между параметрами, характеризующими то или иное явление или процесс, и их производными или дифференциалами. При этом не всегда удается непосредственно найти закон изменения искомой функции от независимой переменной. При этом очень важно правильно выбрать параметры процесса и записать дифференциальную (математическую) модель, учитывая условия задачи между выбранными параметрами.

Рассмотрим несколько задач.

Задача 1. Студент готовится к сдаче экзамена по математике. Сколько дней необходимо ему на подготовку, чтобы он выучил максимальную часть курса, если $\dfrac{t}{t+k}$ – часть курса, которую студент, готовясь к экзамену, прорабатывает за t дней, а αt – часть курса, которую он при этом забывает, где α, k – некоторые положительные постоянные[1, с. 11].

Решение. Обозначим через $y(t)$ ту часть курса, которую студент выучил за t дней. Тогда $y(t)=\dfrac{t}{t+k}-\alpha t$, исследуем ее на экстремум. Продифференцировав функцию $y(t)$, приходим к ДУ $y'(t)=\dfrac{k}{(t+k)^2}-\alpha$. Откуда $t=\sqrt{\dfrac{k}{\alpha}}-k$. Выбирая произвольным образом k, α, будем определять значение t. Например, при $k=1$ и $\alpha=\dfrac{1}{25}$ $t=4$, следовательно, $y(4)=\dfrac{16}{25}$, т.е. за 4 дня студент максимально выучит $\dfrac{16}{25}$ часть всего экзаменационного материала.

Задача 2. Футбольный мяч весом 0,4 *кГ* брошен вверх со скоростью 20 *м/с*. Сопротивление воздуха пропорционально квадрату скорости и равно 0,48 *Г* при скорости 1 *м/с*. Найти закон изменения скорости движения мяча. Как изменится закон движения мяча, если пренебречь сопротивлением воздуха?

(*Указание.* Через Г (грамм-сила) обозначается техническая единица силы, $1Г = 1г \cdot g \approx 0{,}0098Н$, где $1г = 0{,}001кг$, $g = 9{,}8 м/с^2$. [3, с. 33]

Решение. Выполним чертеж к задаче (рис. 1).

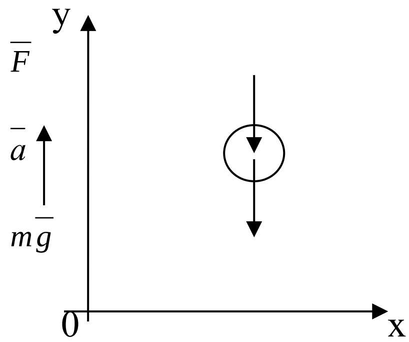


Рис. 1 Силы, действующие на мяч

По второму закону Ньютона на мяч действуют две силы: сила тяжести и сопротивления воздуха

$$m\overline{a} = m\overline{g} + \overline{F}_{сопр}.$$

Спроектировав их на оси координат, получим:

Оу: $ma = -mg - \gamma \cdot v^2$;

Ох: $m \cdot 0 = m \cdot 0 + 0$.

Применяя физический смысл производной $a = v'(t)$, получим ДУ

$$mv' = -mg - \gamma \cdot v^2;$$

Интегрируя уравнение:

$$\frac{dv}{g + \frac{\gamma}{m}v^2} = -dt \quad \Rightarrow \quad \sqrt{\frac{m}{g\gamma}} arctg \frac{v}{\sqrt{\frac{mg}{\gamma}}} = -t + C_1 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{8{,}33} arctg \frac{v}{\sqrt{833}} = -t + C_1.$$

Из условия задачи определили $\gamma \cdot v^2 = 0{,}48Г \Rightarrow \gamma = 0{,}00048 \frac{кГ \cdot с^2}{м^2}$, а также $m = 0{,}04\,кг$, тогда $\sqrt{\frac{mg}{\gamma}} = \sqrt{833}$. При начальных значениях $v(0) = 20$, получаем $C_1 = \sqrt{8{,}33} arctg\left(20\sqrt{0{,}0012}\right) \approx 1{,}75.$

Закон изменения скорости движения мяча

$$v = 28{,}86 tg\left(\sqrt{0{,}12}\left(C_1 - t\right)\right).$$

Далее найдем закон движения мяча. Так как $S(t) = \int v(t)dt$, то интегрируя $v(t)$, найдем

$$S(t) = 83{,}3 ln\left|cos\sqrt{0{,}12}(1{,}75 - t)\right| + C.$$

Предлагаем читателю самостоятельно найти $S(t)$, когда $\gamma = 0$.

Ответ: $v = 28{,}86 tg\left(\sqrt{0{,}12}\left(C_1 - t\right)\right)$.

2.2 Приложениядифференциальных уравнений в механике, физике, технике

Дифференциальные уравнения могут применяться в самых различных областях науки и техники. Это физика и астрономия, математика и экономика, химия и медицина, биология и экология, военное дело и энергетика и т.д.

Задача 3. (Дифференциальное уравнение колебания пружины) На рис. 2 изображена подвешенная вертикально пружина, к концу которой прикреплен шарик массой m. Будем считать, что вертикаль пружины изображает ось Оу ПДСК, направленная вниз и начало координат совпадает с центром шарика в состоянии покоя.

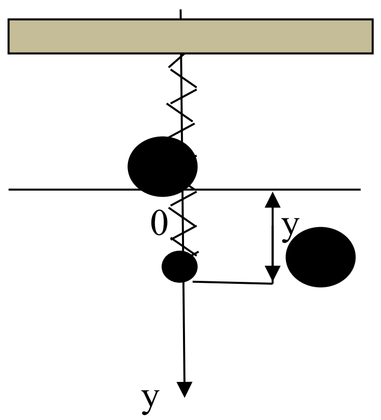


Рис. 2 Пружина, к концу которой прикреплен шарик

Если шарик вывести из состояния покоя путем растяжения, нажатия или при помощи импульса, то в момент времени $t = t_0$, шарик начнет совершать колебательные движения. Становится понятным, что центр шарика совершает некое движение, которое описывается функцией $y = y(t)$. Наша задача – найти эту функцию.

1 случай. Пренебрежение весом шарика.

Как известно, ускорение движения центра шарика есть функция $y = y''(t)$. На шарик действует сила, согласно закону Ньютона, $F_1 = my''$. Если пренебречь весом шарика сопротивлением воздуха, то на шарик будет действовать сила натяжения. Тогда согласно закону Гука, эта вторая сила будет равна $F_2 = -ky$, где k – положительный коэффициент, характеризующий упругие свойства пружины. Если $y > 0$, то пружина растянута и сила напряжения направлена вверх, т.е. отрицательна; если $y < 0$, то пружина сжата и указанная сила направлена вниз, т.е. положительна. Исходя из сказанного, движение центра шарика описывается линейным однородным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами

$$my'' = -ky \tag{28}$$

или

$$y'' + \lambda^2 y = 0, \tag{29}$$

где $\lambda^2 = \dfrac{k}{m}$.

Найдем его общее решение. Характеристическое уравнение имеет вид

$$k^2 + \lambda^2 = 0 \;\;\Rightarrow\;\; k_{1,2} = \pm\lambda i.$$

Тогда общее решение данного ЛОДУ будет определяться функцией

$$y = A\cos\lambda t + B\sin\lambda t, \tag{30}$$

где $A, B - const$. Функция(30) описывает гармоническое колебание с частотой λ.

Начальные условия в момент времени $t = 0$ таковы: $y(0) = y_0$, $y'(0) = y'_0$. Это означает, что легко можно найти коэффициенты $A = y_0$, $B = \dfrac{y'_0}{\lambda}$ и, следовательно, движение центра шарика будет описываться функцией

$$y = y_0\cos\lambda t + \frac{y'_0}{\lambda}\sin\lambda t.$$

2 случай. Учет веса шарика.

Если учесть вес шарика, то к правой части уравнения (29) нужно добавить силу притяжения, выражающуюся уравнением $F_3 = mg$, где g – ускорение земного притяжения. И тогда уравнение (29) примет вид

$$y'' + \lambda^2 y = g. \tag{31}$$

Общее решение линейного неоднородного ДУ второго порядка с постоянными коэффициентами (31) имеет вид

$$y = A\cos\lambda t + B\sin\lambda t + \frac{g}{\lambda^2}, \tag{32}$$

А частное решение, при тех же начальных условиях, будет иметь вид

$$y=\left(y_0-\frac{g}{\lambda^2}\right)cos\lambda t+\frac{y_0'}{\lambda}sin\lambda t+\frac{g}{\lambda^2}.$$

Полученный результат говорит о том, что центр шарика совершает гармонические колебания возле точки с ординатой $y=\frac{g}{\lambda^2}$.

3 случай. Учет силы сопротивления окружающей среды (воздуха) и трения, возникающего в пружине.

Исследование уравнения (31) будет правдивее описывать движение центра шарика, если еще взять во внимание силу сопротивления воздуха и трения, возникающего в пружине. Из опыта выяснилось, что эта сила равна $F_4=-\alpha y'$, где α – положительный коэффициент, описывающий среду и пружину.

В этом случае движение центра шарика будет описываться уравнением

$$my''=-ky-\alpha y'+mg$$

или

$$y''+\beta y'+\lambda^2 y=g\ \left(\beta=\frac{\alpha}{m}\right). \tag{33}$$

Уравнение (33) представляет собой ЛНДУ второго порядка с постоянными коэффициентами. Соответствующее ему характеристическое уравнение имеет вид

$$z^2+\beta z+\lambda^2=0,$$

корни которого равны

$$z_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\beta^2-4\lambda^2}}{2}.$$

Если $\beta^2<4\lambda^2$, то получим два комплексно-сопряженных корня

$$z_{1,2}=-\mu\pm i\eta\ (\mu=\frac{\beta}{2}>0, \eta=\frac{1}{2}\sqrt{4\lambda^2-\beta^2}\ ).$$

Найдем частное решение уравнения (33) в виде постоянной с. Понятно, что $\lambda^2 c=g$. Тогда общее решение уравнения (33) примет вид

$$y=e^{-\beta/2}(Acos\,\eta t+Bsin\,\eta t)+\frac{g}{\lambda^2}.(34)$$

Из полученного уравнения можно сделать вывод о том, что центр шарика совершает затухающие колебания вокруг точки с ординатой $y=\frac{g}{\lambda^2}$.

4 случай. Пренебрежение сопротивлением окружающей среды (воздуха).

Пусть $\beta=0$, т.е. пренебрегаем сопротивлением воздуха, а также пусть

$\lambda^2 = 1$, к центру шарика приложена внешняя сила $F_5 = msint$. Тогда уравнение (33) примет вид

$$y'' + y = sint. \qquad (35)$$

Общее решение уравнения (35) имеет вид

$$y = Acost + Bsint - \frac{t}{2}cost.$$

График функции общего решения при $A = 2$, $B = 3$ (так сделано, чтобы посмотреть, как примерно выглядит график функции y) изображен на рис. 3.

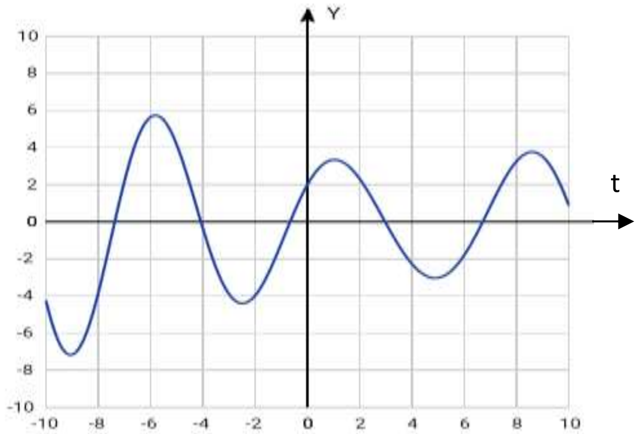


Рис. 3 График функции $y = 2cost + 3sint - 0{,}5tcost$.

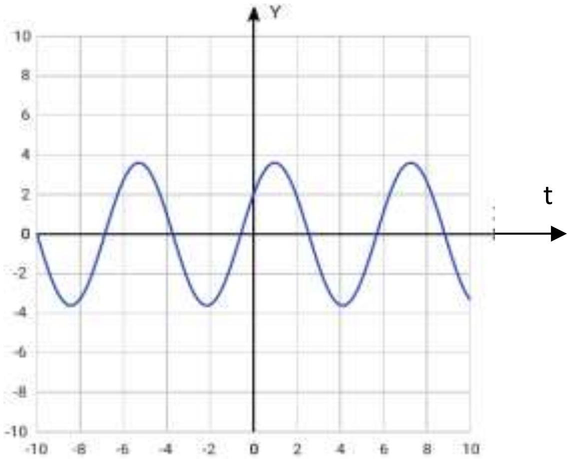


Рис. 4 График функции $y = 2cost + 3sint$

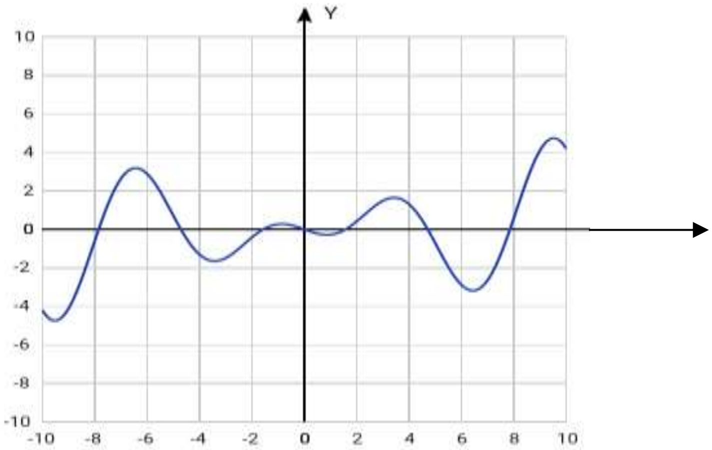


Рис. 5 График функции $y = -0{,}5tcost$.

Функция $y_1 = Acost + Bsint$, или в нашем случае, $y_1 = 2cost + 3sint$ на языке механики, описывает собственные колебания системы (пружина и шарик) (рис. 4).

А функция $y_2 = -0{,}5tcost$ описывает вынужденное колебание системы, т.е. колебание которое совершается под действием внешних сил (рис. 5).

Исходя из сказанного, можно утверждать, что колебание системы есть сумма собственного и вынужденного колебаний.

С точки зрения математики, тот факт, что частное решение уравнения (35) имеет вид $y_2 = -0{,}5 t cost = C_1 t cost$ означает, что $z_0 = i$ есть корень характеристического уравнения кратности 1.

А с точки зрения механики, это означает, что частота собственного колебания равна частоте вынужденного колебания, что приводит к резонансу и в итоге, колебание будет совершаться с той же частотой, но при $t \to \infty$ амплитуда колебания будет возрастать. При различных частотах резонанса не будет; система будет совершать колебания с ограниченной амплитудой, как например, если система описывалась бы уравнением $y'' + y = cos 2t$ с начальными условиями $y(0) = 1,\ y'(0) = 2$.

Задача 4. Определить наличие резонанса и поведение амплитуды колебания, задающегося задачей Коши:

$$\begin{cases} y'' + y = cos 2t \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 2. \end{cases}$$

Решение.

Найдем общее решение данного ЛНДУ по формуле (19).

Характеристическим уравнением, соответствующего ему ЛОДУ $y'' + y = 0$, является уравнение

$$k^2 + 1 = 0 \ \Rightarrow \ k_{1,2} = \pm i.$$

Тогда функция

$$y_{лоду} = C_1 cost + C_2 sint,$$

где $C_1, C_2 - const$ является общим решением ЛОДУ.

Какое-либо частное решение данного ЛНДУ найдем по формуле $y_{частн} = A cos 2t + B sin 2t$, где $A, B - const$.

$$y'_{частн} = -2A sin 2t + 2B cos 2t;$$
$$y''_{частн} = -4A cos 2t - 4B sin 2t.$$

Подставив функцию $y_{частн}$ и ее производную второго порядка $y''_{частн}$ в ЛНДУ, определим A, B.

$$-4A cos 2t - 4B sin 2t + A cos 2t + B sin 2t = cos 2t.$$

Приравняем коэффициенты при $cos 2t$ и $sin 2t$.

$$\begin{matrix} cos 2t: & -3A = 1 \\ sin 2t: & -3B = 0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} A = -\dfrac{1}{3} \\ B = 0. \end{cases}$$

Следовательно, $y_{частн} = -\dfrac{1}{3} cos 2t$, а общее решение примет вид

$$y_{лнду} = C_1 cost + C_2 sint - \frac{1}{3} cos2t.$$

Воспользовавшись начальными условиями, найдем C_1, C_2.

Для этого найдем производную

$$y'_{лнду} = -C_1 sint + C_2 cost + \frac{2}{3} sin2t.$$

и составим систему

$$\begin{cases} 1 = C_1 - \frac{1}{3} \\ 2 = C_2. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = \frac{4}{3} \\ C_2 = 2. \end{cases}$$

Таким образом, частным решением данного ЛНДУ при указанных начальных условиях, является функция

$$y_ч = \frac{4}{3} cost + 2sint - \frac{1}{3} cos2t.$$

График полученной функции изображен на рис. 6.

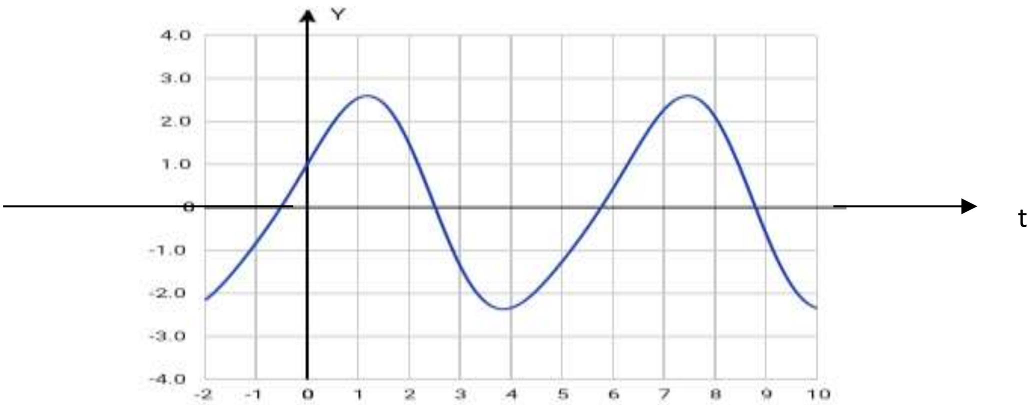


Рис. 6 График функции $y_ч = \frac{4}{3} cost + 2sint - \frac{1}{3} cos2t.$

Как видим, сказанное выше утверждение подтвердилось: при различных частотах резонанса не наблюдается, колебания совершаются с амплитудой, ограниченной значением 2,5.

Выше нами были рассмотрены задачи, в которых совершались колебательные движения. Теперь же приведем примеры, в которых совершается поступательное движение материальной точки, описывающиеся дифференциальными уравнениями.

Задача 5. (О математическом маятнике) Пусть материальная точка массы m под действием силы тяжести движется по окружности L, лежащей в вертикальной плоскости. Найдите уравнение движения точки, пренебрегая силой сопротивления. Какова будет длина дуги окружности через 2 *с* при

$l = 25\,см$, $s_0 = 5\,см$, $g = 9{,}8\,м/с^2$.

Решение. Напомним, что *математическим маятником* называетсяосциллятор, представляющий собой механическую систему, состоящую из материальной точки на конце невесомой нерастяжимой нити или легкого стержня и находящуюся в однородно поле сил тяготения.

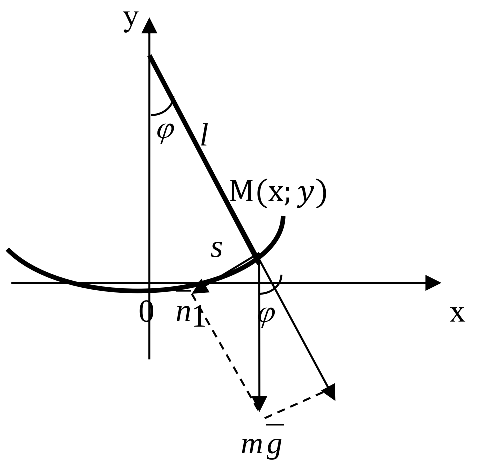


Рис. 7 Математический маятник

Поместим начало координат в низшей точке окружности, ось Ох направим по касательной к окружности (рис. 7). Обозначим через l радиус окружности, через s – длину дуги от начала координат до переменной точки $M(x;y)$, где находится масса m, причем эту длину берем с соответствующим знаком ($s > 0$, если М – правее точки О; $s < 0$ если $M(x;y)$ левее О). Из прямоугольного треугольника $\bar{n}_1 = |mg| sin\varphi$. По второму закону Ньютона получаем

$$ma = -mg sin\varphi.$$

Учитывая, что для окружности $\varphi = \frac{s}{l}$, получим дифференциальное уравнение второго порядка, в котором явно отсутствует независимая переменная t: $s'' = -g sin\frac{s}{l}$. Применяя соответствующую подстановку: $\left\{\begin{matrix} s' = p \\ s'' = p\dfrac{dp}{dt} \end{matrix}\right\}$, приведем ДУ к виду:

$$p\frac{dp}{dt} = -g sin\frac{s}{l} \quad \Rightarrow \quad pdp = -g sin\frac{s}{l}dt \quad \Rightarrow \quad p^2 = -2gl cos\frac{s}{l} + C_1.$$

Пусть $s'(0) = p(0) = 0$ при $s = s_0$, тогда $C_1 = -2gl cos\frac{s_0}{l}$. Следовательно,

$$(s')^2 = 2gl cos\frac{s}{l} - 2gl cos\frac{s_0}{l} = 2gl\left(cos\frac{s}{l} - \cos\frac{s_0}{l}\right) = 4gl sin\frac{s+s_0}{2l} sin\frac{s_0 - s}{2l} \Rightarrow$$

$$s'(t) = 2\sqrt{gl sin\frac{s+s_0}{2l} sin\frac{s_0-s}{2l}} \quad \Rightarrow \quad \frac{ds}{\sqrt{sin\frac{s+s_0}{2l} sin\frac{s_0-s}{2l}}} = 2\sqrt{gl} \quad \Rightarrow$$

$$s(t)=s_0 sin\sqrt{\frac{g}{l}}t \; s(t)=s_0 sin\sqrt{\frac{g}{l}}t.$$

Здесь мы везде предположили, что $s \neq s_0$, хотя в общем случае s может быть любым; и $s(0)=0$. Тогда через 2 *с*длина дуги окружности будет равна $s(2)=0{,}05 sin\sqrt{\frac{9{,}8}{0{,}25}}\cdot 2 \approx 0{,}01.$

Отметим, что длина секундного маятника – маятника, совершающего одно колебание в 1 *с*, определяется формулой $l=\frac{g}{4\pi^2}\approx 0{,}25$ *м*, т.е. ≈ 25 *см*. [12, с. 25].

Ответ: 0,01.

Задача 6. Камень массой 30 *г* брошен с высоты 10 *м*. Найдите закон движения камня, если на него действует тормозящая сила сопротивления воздуха, пропорциональная скорости движения; коэффициент пропорциональности γ.

Решение. Выполним рис. 8 к задаче.

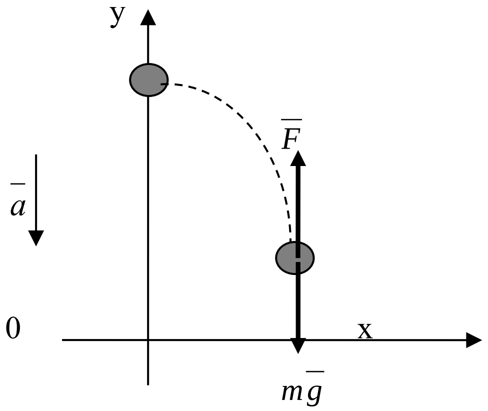


Рис. 8 Движение вертикально брошенного вниз тела

По второму закону Ньютона:

$$m\bar{a}=m\bar{g}+\bar{F}.$$

Спроектируем силы на оси координат:

$$\begin{cases} Oy: & ma=mg-F \\ Ox: & 0=0. \end{cases}$$

Так как $F=\gamma v$, то получим ДУ

$$mS''=mg-\gamma S' \text{ или}$$

$$S''+\frac{\gamma}{m}S'=g.$$

Характеристическое уравнение $k^2+\frac{\gamma}{m}k=0$ имеет корни $k_{1,2}=0;\ -\frac{\gamma}{m}$. Тогда общим решением соответствующего ЛОДУ будет функция $S(t)=C_1+C_2e^{-\gamma t/m}$. Какое-либо частное решение ЛНДУ найдем по формуле $S_ч=At$, откуда заключаем, что $S_ч=\frac{mg}{\gamma}$, тогда общее решение ЛНДУ будет иметь вид: $S(t)=C_1+C_2e^{-\gamma t/m}+\frac{mg}{\gamma}$. Легко определить скорость падения камня по формуле $v(t)=S'(t)=-\frac{\gamma}{m}C_2e^{-\gamma t/m}$. Поскольку $S(0)=10$, то $C_2=10-C_1-\frac{0{,}294}{\gamma}$.

Таким образом, $S(t)=C_1+\frac{0{,}294}{\gamma}+\left(10-C_1-\frac{0{,}294}{\gamma}\right)e^{-\gamma t/0{,}03}$.

Ответ: $S(t)=C_1+\frac{0{,}294}{\gamma}+\left(10-C_1-\frac{0{,}294}{\gamma}\right)e^{-\gamma t/0{,}03}$.

Задача 7. Среда, в которой происходит движение материальной точки массы m, оказывает точке сопротивление, пропорциональное скорости ее движения. Найти закон движения данной точки, если известно, что она движется вдоль оси Ox под действием восстанавливающей силы, направленной к началу координат и пропорциональной расстоянию движущейся точки от начала.

Решение.

а) Введем обозначения: $S(t)$ – закон движения материальной точки; $S'(t)=v(t)$ – скорость; $S''(t)=a(t)$ – ускорение.

На точку, согласно условию задачи, действуют две силы: восстанавливающая $F_1=-\lambda\cdot S$ и сила сопротивления среды $F_2=-\mu\cdot S'$. Тогда по второму закону Ньютона:

$$m\vec{a}=\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_2} \quad \text{или} \quad mS''=-\lambda S-\mu S' \quad \Rightarrow \quad mS''+\mu S'+\lambda S=0, \qquad (36)$$

характеристическим уравнением которого является уравнение

$$mk^2+\mu k+\lambda=0.$$

Как известно, в зависимости от знака дискриминанта, общее решение уравнения (36) имеет вид, представленный в таблице 3.

Таблица 3. Общее решение уравнения (36)

№ п/п	Дискриминант $D=\mu^2-4m\lambda$	Вид общего решения уравнения (20)	Тип движения
1	2	3	4
1	$D>0$, $k_1\neq k_2\in R$	$S(t)=C_1e^{-r_1t}+C_2e^{-r_2t}$	апериодическое
2	$D=0$, $k_1=k_2\in R$	$S(t)=(C_1+C_2t)e^{-rt}$, $-r=-\mu/(2m)$.	

1	2	3	4
3	$D<0$, $k_{1,2}=-\alpha\pm\beta i\in C$ Если $\alpha=0$, то $k_{1,2}=\pm\beta i\in C$	$S(t)=e^{-\alpha t}\left(C_1 cos\beta t+C_2 sin\beta t\right)$ или $S(t)=Ae^{-\alpha t}\cdot sin\left(\beta t+\varphi_0\right)$, $A=\sqrt{C_1^2+C_2^2}$, $sin\varphi_0=C_1/A$, $cos\varphi_0=C_2/A$. $S(t)=C_1 cos\beta t+C_2 sin\beta t$ или $S(t)=Asin\left(\beta t+\varphi_0\right)$, $\beta=\sqrt{\lambda/m}$.	затухающее колебание

б) Решим ***задачу 7*** при условии, что сила сопротивления среды равна нулю.

Исходя из условия задачи, $F_1=-\lambda\cdot S$, а вторая сила $F_2=-\mu\cdot S'=0.$ Тогда уравнении (36) примет вид

$$mS''+\lambda S=0 \text{ или } S''+\eta S=0,$$

где $\eta=\dfrac{\lambda}{m}$ и которому будет соответствовать случай 3 из табл. 2 при $\alpha=0$.

Становится интересным, как будет выглядеть решение ДУ при конкретных значениях коэффициентов в ДУ (36).

Вернемся к ***задаче 7***. Пусть $m=10$ г, $\lambda=1$, $\mu=2$, в начальный момент времени $S(t)=1$, скорость равнялась 2 м/с.

Подставляя их в формулу дискриминанта, получили $D=\mu^2-4m\lambda=-36<0,$ корни характеристического уравнения $k_{1,2}=-0{,}1\pm0{,}3i$, что соответствует случаю 3 из табл. 2. Тогда общее решение ДУ будет иметь вид

$$S(t)=e^{-0,1t}\left(C_1 cos0{,}3t+C_2 sin0{,}3t\right).$$

$$S'(t)=e^{-0,1t}\left(C_1\left(-0{,}3sin0{,}3t-0{,}1cos0{,}3t\right)+C_2\left(0{,}3cos0{,}3t-0{,}1sin0{,}3t\right)\right).$$

Решив систему, применяя начальные условия,

$$\begin{cases}C_1=1\\ -0{,}1C_1+0{,}3C_2=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}C_1=1\\ C_2=7,\end{cases}$$

получим частное решение

$$S(t)=e^{-0,1t}\left(cos0{,}3t+7sin0{,}3t\right).$$

Амплитуда затухающего колебания равна $A = \sqrt{1^2 + 7^2} = 5\sqrt{2}$, $tg\varphi_0 = \frac{C_1}{C_2} = \frac{1}{7} \quad \Rightarrow \quad \varphi_0 = arctg\frac{1}{7} \approx 0{,}14$. Тогда решение можно записать

$$S(t) = 5\sqrt{2}e^{-0{,}1t} \cdot sin(0{,}3t + 0{,}14),$$

график которого изображен на рис. 9.

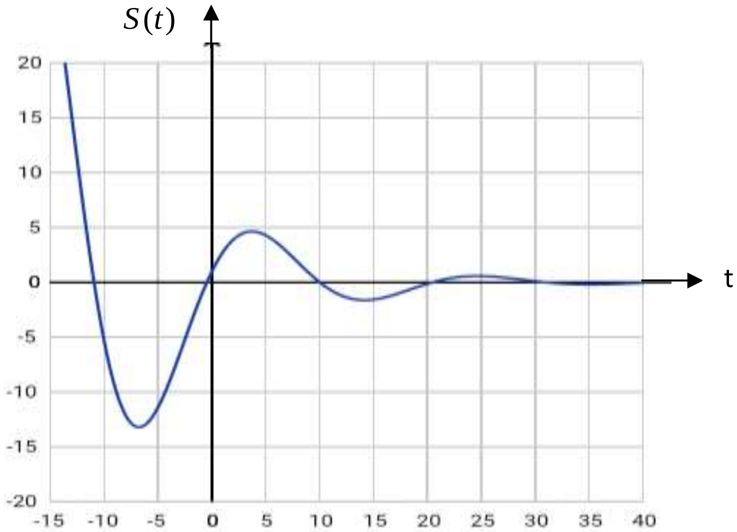


Рис. 9 График функции $S(t) = 5\sqrt{2}e^{-0{,}1t} \cdot sin(0{,}3t + 0{,}14)$

Действительно, как видим на рис. 9, функция $S(t) = 5\sqrt{2}e^{-0{,}1t} \cdot sin(0{,}3t + 0{,}14)$ описывает затухающее колебание.

Задача 8. Масса ракеты с полным запасом топлива равна M , без топлива – m, скорость истечения продуктов горения из ракеты равна c , начальная скорость ракеты равна нулю. Найдите скорость ракеты после сгорания топлива, пренебрегая силой тяжести и сопротивлением воздуха (рис. 10) [3, с. 59].

Решение. Пусть за время t выгорело $x(t)$ массы топлива, тогда общая масса ракеты будет равна $(M - x(t))$, а за время Δt масса уменьшитсяна Δm . Поскольку на ракету не действуют внешние силы, то по второму закону Ньютона: $(M - x)\bar{a} = \bar{u}\frac{dm}{dt}$. Учитывая, что $\bar{v} \uparrow\downarrow \bar{u}$,

$$(M - x)\frac{dv}{dt} = -u\frac{dm}{dt} \quad \Rightarrow \quad dv = -u\frac{dm}{M - x} \quad \Rightarrow v = -uln|M - x| + C,$$

где u – удельный импульс ракетного двигателя (отношение тяги двигателя к секундному расходу массы топлива). При начальном условии $v(0) = 0$

$C = u ln|M|$.Тогда скорость ракеты после сгорания топлива (при $M - x = m$) будет равна

$$v = u ln\left|\frac{M}{M-x}\right| = c \cdot ln\left|\frac{M}{m}\right|. \quad (37)$$

Искомая скорость v называется *характеристической*, которая показывает: 1) чем больше конечная масса ракеты, тем больше должна быть стартовая масса M;

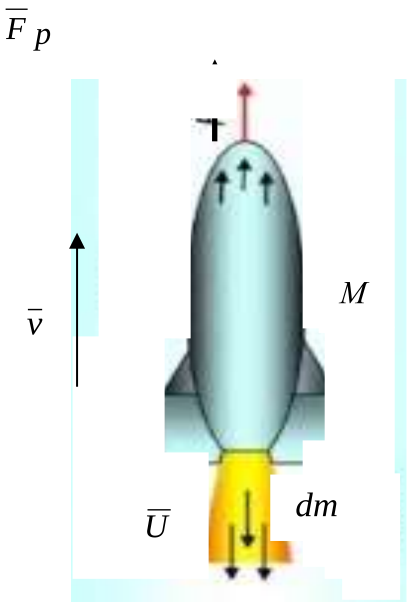


Рис. 10 Ракета

2) чем больше импульс u, тем больше может быть конечная масса ракеты при стартовой M.

Масса M состоит из полезной нагрузки, конструкции аппарата и топлива; масса m состоит из полезной нагрузки и конструкции аппарата.

Формула (2) называется *формулой Циолковского*. Она была выведена К.Э. Циолковским в рукописи «Ракета» в мае 1897 года.

Ответ: $v = c \cdot ln\left|\frac{M}{m}\right|$.

Задача 9. Парашютист из надзорного органа в области охраны лесов прыгнул с высоты 2 *км*, а раскрыл парашют на высоте 0,7 *км*. Сколько времени он падал до раскрытия парашюта? Известно, что предельная скорость падения человека в воздухе нормальной плотности равна 50 *м/с*. Сопротивление воздуха пропорциональноквадрату скорости. Изменением плотности пренебречь (рис. 11).

Решение.

Пусть $S(t)$ – закон движения парашютиста; $S'(t) = v(t)$ – скорость.

На тело действуют две силы: сила веса $P = mg$, направленная вертикально вниз, и сила сопротивления воздуха $F_2 = -kv^2(t)$.

Тогда по второму закону Ньютона:

$$m\vec{a} = \vec{F_1} + \vec{F_2}$$

или

$$mv' = mg - kv^2 \quad \Rightarrow v' = -\frac{k}{m}\left(v^2 - \frac{mg}{k}\right) \;\Rightarrow \frac{dv}{v^2 - \lambda^2} = -\frac{k}{m}dt$$

$$\Rightarrow \quad ln\left|\frac{v-\lambda}{v+\lambda}\right| = 2\lambda\left(C_1 - \frac{kt}{m}\right), \text{ где } \lambda = \sqrt{\frac{mg}{k}}\;.$$

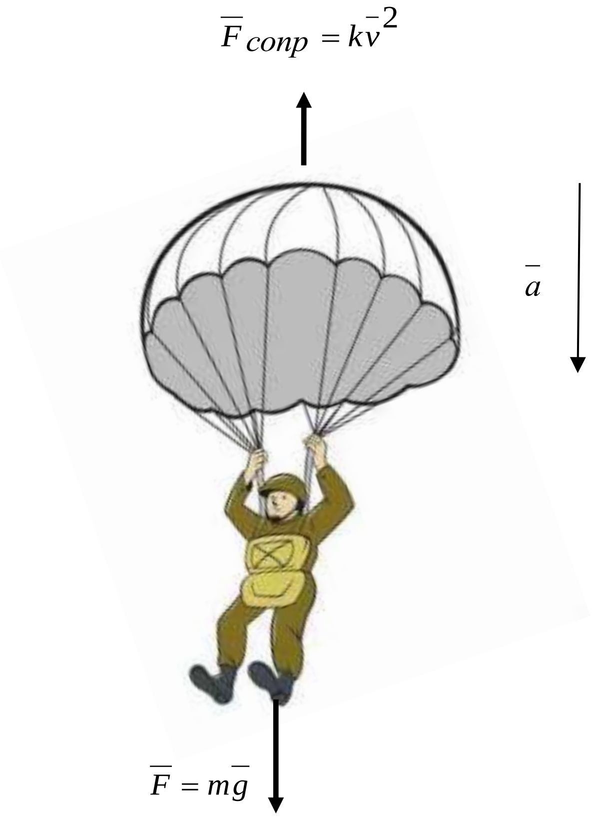


Рис. 11 Полет парашютиста
(с учетом сопротивления воздуха)

Принимая во внимание $0 \le v < \lambda$ и начальное условие $v(0) = 0$, определяем $C_1 = 1$, а также скорость $v(t)$.

$$\frac{v-\lambda}{v+\lambda} = -e^{-2\sqrt{kg}t/\sqrt{m}} \quad \Rightarrow$$

$$-v + \lambda = (v+\lambda)e^{-2\sqrt{kg}t/\sqrt{m}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad v(t) = \lambda\left(\frac{e^{2\sqrt{kg}t/\sqrt{m}} - 1}{e^{2\sqrt{kg}t/\sqrt{m}} + 1}\right) =$$

$$= \lambda th\left(\sqrt{\frac{kg}{m}}t\right).$$

Поскольку предельная скорость при $t \to \infty$ равна 50 *м/с*, то

$$\lim_{t\to\infty} v(t) = \lambda\left(\frac{e^{2\sqrt{kg}t/\sqrt{m}} - 1}{e^{2\sqrt{kg}t/\sqrt{m}} + 1}\right) = \lambda = 50.$$

Следовательно,

$$\lambda = \sqrt{\frac{mg}{k}} = 50, \quad \text{тогда}\, k = \frac{mg}{2500}, \quad 2\sqrt{\frac{kg}{m}} = 2\sqrt{\frac{mg^2}{m}} = \frac{2g}{50} = 0{,}4.$$

Таким образом, скорость падения парашютиста $v(t) = 50th(0{,}2t)$ или

$$S'(t) = 50th(0{,}2t) \Rightarrow S(t) = 250ln|ch(0{,}2t)| + C\,.$$

При начальном условии $S(0)=0$ $C=0$. Поскольку до раскрытия парашюта было пройдено 1000 *м*, то время потраченное на это расстояние, равно

$$250 ln\left|ch(0{,}2t)\right| = 1300 \;\Rightarrow ln\left|ch(0{,}2t)\right| = 5{,}2 \;\Rightarrow\; ch(0{,}2t) = e^{5{,}2} \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; 0{,}2\,t = arch181 \;\Rightarrow\; t \approx 29{,}5\,c.$$

Ответ: $\approx 29{,}5$.

Задача 10. Гибкая однородная нить подвешена за оба конца. Найдите, по какой кривой расположится нить под действием силы тяжести?

Решение. Выберем на нити такую точку $M_0(0;в)$, которая расположена ниже всех остальных ее точек (рис. 12). Рассмотрим часть дуги $\overset{\smile}{M_0M}$, в каждой точке этой дуги действуют три силы:

1) натяжение $\overline{T}$, действующее по касательной в точке М и составляющее с осью Ох угол φ;

2) натяжение $\overline{N}$ в точке, действующее горизонтально;

3) вес нити $\gamma\overline{s}$, направленный вертикально вниз, где s – длина дуги $\overset{\smile}{M_0M}$, линейный удельный вес нити.

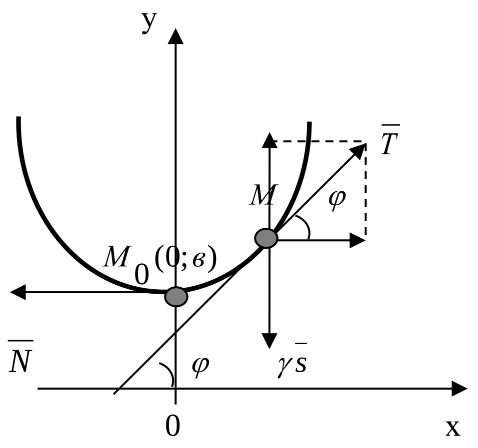


Рис. 12 Гибкая однородная нить

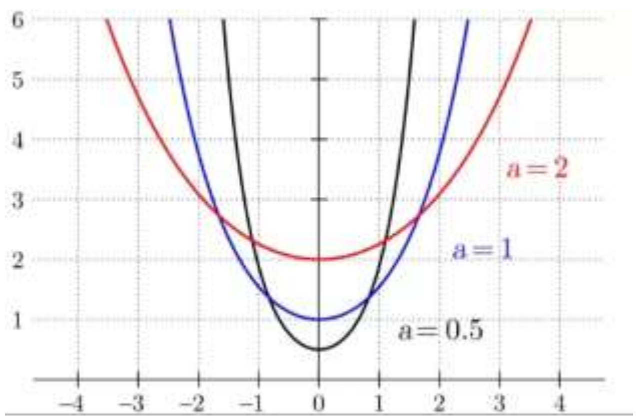


Рис. 13 График цепной линии $y = ach\dfrac{x}{a}$

Согласно второму закону Ньютона можем записать:

$$m\overline{a} = \gamma\overline{s} + \overline{N} + \overline{T}$$

Спроектируем силы на оси координат.

$$\begin{cases} Ox: \quad 0 = Пр_{Ox}\overline{T} - N \\ Oy: \; -\gamma a = -\gamma s + Пр_{Oy}\overline{T} \end{cases}.$$

Из прямоугольного треугольника найдем проекции.

$$cos\varphi = \frac{Пр_{Ox}\overline{T}}{|\overline{T}|} \quad \Rightarrow \quad Пр_{Ox}\overline{T} = Tcos\varphi = N\,;$$

$$sin\varphi = \frac{Пр_{Oy}\overline{T}}{|\overline{T}|} \quad \Rightarrow \quad Пр_{Oy}\overline{T} = Tsin\varphi = \gamma s\,.$$

Отсюда заключаем, что $tg\varphi = \frac{\gamma s}{N}$. Применяя геометрический смысл производной $y'(x) = tg\varphi$, получимдифференциальное уравнение

$$y' = \frac{\gamma s}{N} \;\Rightarrow\; y'' = \frac{\gamma s'}{N} \Rightarrow \begin{cases} s' = \sqrt{1+(y')^2} \\ y'' = \frac{\gamma}{N}\sqrt{1+(y')^2} \end{cases}.$$

Решая последнее уравнение системы (это ДУ, в котором явно отсутствует переменная x, допускающее понижение порядка с помощью подстановки $y' = p,\; y'' = p\frac{dp}{dy}$), находим общее решение.

$$y(x) = \frac{N}{\gamma}ch\left(\frac{\gamma x}{N} + C_1\right) + C_2 \quad \Rightarrow \quad y'(x) = sh\left(\frac{\gamma x}{N} + C_1\right).$$

Воспользуемся начальными условиями: $y(0) = в = const$, $y'(0) = tg\varphi = 0$ и определим произвольные постоянные.

$$\begin{cases} \frac{N}{\gamma}chC_1 + C_2 = в \\ shC_1 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} C_2 = в - \frac{N}{\gamma} \\ C_1 = 0 \end{cases}.$$

Таким образом, $y(x) = \frac{N}{\gamma}ch\left(\frac{\gamma x}{N}\right) + в - \frac{N}{\gamma}$ или $y(x) = ach(ax) + в - a$, где $a = \frac{N}{\gamma}$. График функции $y(x)$ называется *цепной линией*. К примеру, график цепной линии $y = ach\frac{x}{a}$ изображен на рис. 13 при различных значениях a. Как правило, канаты, провода, цепи описываются уравнением цепной линии.

Ответ: $y(x) = \frac{N}{\gamma}ch\left(\frac{\gamma x}{N}\right) + в - \frac{N}{\gamma}$.

При решении задач физического смысла овытекании или переливаниижидкости из одного сосуда в другой, в сообщающихся сосудах, из отверстия и т.п., можно руководствоваться следующим правилом (алгоритмом):

1. Обозначить зависимые и независимые переменные.

2. Определить приращение зависимой переменной $\Delta y = y(x+\Delta x) - y(x)$.

3. Переходя к переделу $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y'(x)$, и принимая условия задачи, составить уравнение, связывающее дифференциальное уравнение.

4. Решив полученное дифференциальное уравнение, найти общее решение $y = \varphi(x, C)$.

5. При наличии начальных значений (условия Коши) следует найти значение $C = c_0$ и, таким образом, найти частное решение ДУ.

Рассмотрим пример.

Задача 11. В сосуд, в котором содержится 10 л воды, непрерывно поступает соляной раствор с концентрацией 0,3 кг соли на литр со скоростью 2 л в мин. Поступающий раствор перемешивается с водой, и смесь вытекает из сосуда с той же скоростью. Определите количество соли в сосуде через 5 мин.[11, с. 15].

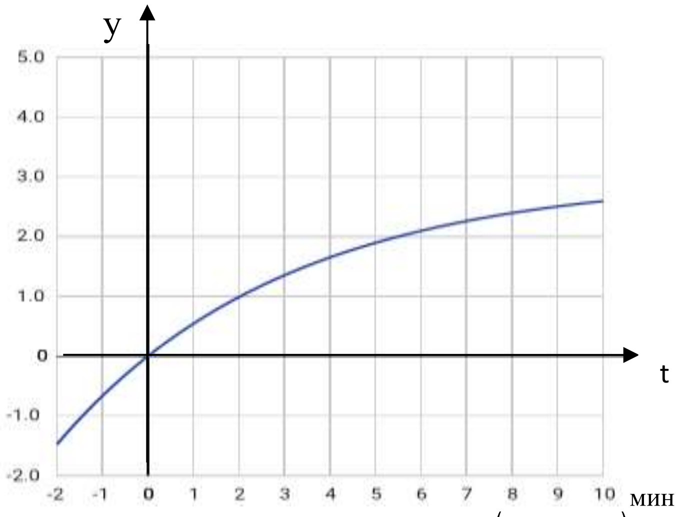


Рис. 14 График функции $y(t) = 3\left(1 - e^{-0,2t}\right)$

Решение. 1) За независимую переменную примем время t, а за искомую функцию – $y(t)$ – количество соли в растворе в момент времени t после начала эксперимента.

2) Поскольку за 1 мин вливается 2 л раствора, то за период времени Δt мин в сосуд поступит раствор объемом в $2 \cdot \Delta t$ л. В каждом литре содержится концентрация соли 0,3 кг, тогда в $2 \cdot \Delta t$ л раствора содержится $2 \cdot 0{,}3\Delta t = 0{,}6\Delta t$ кг соли. С другой стороны, из данного сосуда вытекает раствор со скоростью 2 л/мин, т.е. за время Δt вытекает $2 \cdot \Delta t$ л раствора. В момент времени t количество соли во всем сосуде (10 л) составляет $y(t)$ кг, то на 1 л приходится $\frac{y(t)}{10}$ кг соли, а в $2 \cdot \Delta t$ л содержится $\frac{2 \cdot \Delta t \cdot y}{10} = 0{,}2\Delta t \cdot y$ кг соли, если бы содержание соли не изменялось с течением времени. Так как оно за это время изменяется на величину, бесконечно малую при $\Delta t \to 0$, то в вытекающих

$2\cdot\Delta t$ л раствора содержится $0{,}2\Delta t\cdot(y(t)+\alpha(\Delta t))$ кг соли, где $\alpha\to 0$ при $\Delta t\to 0$.

Таким образом, получили два решающих выражения: в растворе, втекающем в сосуд, содержится $0{,}6\Delta t$ кг соли, а в вытекающем – $0{,}2\Delta t\cdot(y(t)+\alpha(\Delta t))$ кг. Разность между этими величинами определит приращение количества соли в момент времени $(t; t+\Delta t)$:

$$\Delta y = 0{,}6\Delta t - 0{,}2\Delta t\cdot(y(t)+\alpha(\Delta t)).$$

3. Переходим к пределу

$$y' = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{0{,}6\Delta t - 0{,}2\Delta t(y+\alpha)}{\Delta t} = 0{,}6-0{,}2y.$$

Получили ДУ $\qquad y' = 0{,}6-0{,}2y$.

4. Приведя его к виду $\dfrac{dy}{0{,}2(3-y)} = dt$, найдем общее решение $y = 3 - Ce^{-0{,}2t}$.

5. Начальным условием является равенство $y(0)=0$, так как до эксперимента в 10 л соли не содержалось; тогда $C=3$. Следовательно, частным решением будет функция $y = 3\left(1-e^{-0{,}2t}\right)$ (рис. 14).

По условию задачи требуется найти количество соли в растворе через 5 *мин*.

$$y(5) = 3\left(1-e^{-0{,}2\cdot 5}\right) = 3\left(1-e^{-1}\right)\approx 1{,}9 \text{ кг соли.}$$

Ответ: 1,9.

Задача 12. Цилиндрический резервуар с высотой a *м* и диаметром основания $2в$ *м* поставлен вертикально и наполнен водой. За какое время вода, заполняющая резервуар, вытечет из него через круглое отверстие радиуса $2c$ *м* ($в > c$), сделанное в дне резервуара (рис. 15)?[3, с. 24]

Решение. Пусть уровень воды, выливающейся из отверстия, изменяется в зависимости от времени. Предположим, что через t *с* после начала истечения воды уровень оставшейся воды был равен h *м*, и за время Δt *с* уровень воды снизился еще на Δh *м*. Тогда количество воды в цилиндре высотой Δh будет равно

$$V_{цил} = \pi R^2\Delta h = \pi в^2\Delta h.$$

С другой стороны, то же самое количество воды, вытекающей из отверстия на дне резервуара, можно найти по формуле Бернулли, согласно которой скорость v *м/с* истечения жидкости из отверстия в резервуаре, находящегося на высоте h *м* ниже свободного уровня жидкости, определяется соотношением:

$v = \sigma\sqrt{2gh}$, (38)

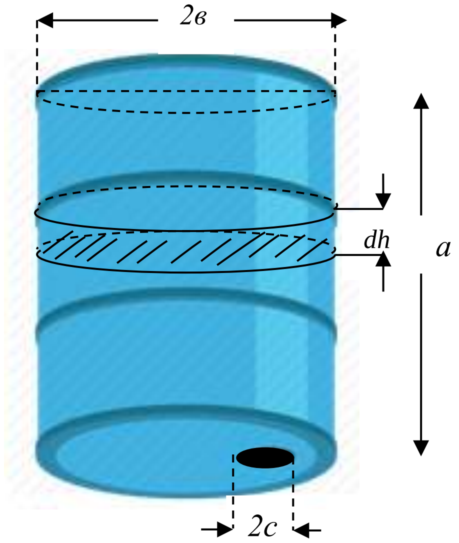


Рис. 15 Резервуар с отверстием на дне

где $g = 9{,}8\ м/с^2$ – ускорение свободного падения, σ – коэффициент скорости истечения жидкости из отверстия; для воды, к примеру, $\sigma \approx 0{,}6$.

Следовательно, $V_{цил} = \pi c^2 v\Delta t = \pi c^2\sigma\sqrt{2gh}\Delta t$.

Приравняв правые части одной и тоже величины, выраженной двумя способами, получим

$$\pi в^2|\Delta h| = \pi c^2\sigma\sqrt{2gh}\Delta t.$$

Поделив обе части выражения на Δt и перейдя к пределу при $\Delta t \to 0$ и при $\Delta h < 0$, получим дифференциальной уравнение

$$-\lim_{\Delta t\to 0}\pi в^2\frac{\Delta h}{\Delta t} = \pi c^2\sigma\sqrt{2gh} \Rightarrow -в^2 h' = c^2\sigma\sqrt{2gh} \Rightarrow -\frac{dh}{\sqrt{h}} = \frac{c^2\sigma\sqrt{2gh}}{в^2}dt.$$

Отсюда, интегрируя, находим

$$-2\sqrt{h} = \frac{c^2\sigma\sqrt{2g}t}{в^2} + C \Rightarrow t = \frac{\left(C - 2\sqrt{h}\right)в^2}{c^2\sigma\sqrt{2g}}.$$

Применяя начальное условие: в начальный момент времени $h(0) = a$, найдем $C = 2\sqrt{a}в^2$, то $t = \dfrac{2\left(\sqrt{a} - \sqrt{h}\right)в^2}{c^2\sigma\sqrt{2g}}$.

Поскольку требуется найти время, через которое вода полностью вытечет из резервуара, то это означает, найти $h(t) = 0$. Подставив в последнее выражение t значение $h = 0$, найдем искомое время

$$t = T = \frac{2\sqrt{a}в^2}{c^2\sigma\sqrt{2g}}.$$

Ответ: $T = \dfrac{2\sqrt{a}в^2}{c^2\sigma\sqrt{2g}}$.

Задача 13. Студенты-агрономы для полива растений используют бочку цилиндрической формы длиной 3 м и диаметром 1,6 м, расположенный горизонтально (рис. 16). Через какое время им необходимо каждый раз заполнять резервуар, если в нем имеется отверстие радиуса 10 см, находящееся на уровне самой нижней из образующих цилиндра?

Решение.

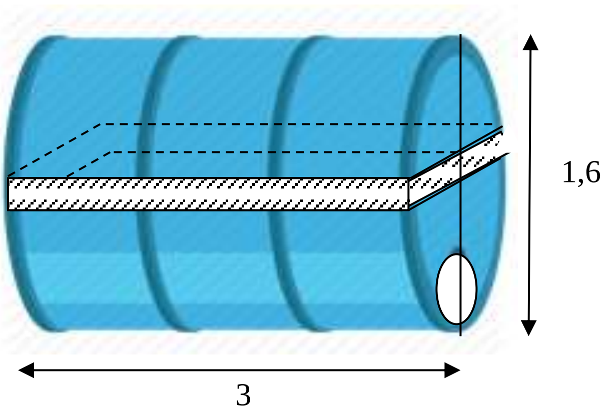


Рис. 16Бочка, расположенная горизонтально

Данная задача решается по аналогии с ***задачей 12***, только в данном случае уровень воды в резервуаре изменяется относительно диаметра оснований. Пусть функция $h = h(t)$ устанавливает закон изменения уровня воды в бочке в зависимости от времени t .Предположим, что за бесконечно малый промежуток времени Δt $(\Delta t \to 0)$ уровень воды в резервуаре снизился на$|\Delta h|$ $(\Delta h < 0)$.

Тогда за это время объем воды уменьшится на величину $\Delta V = aS$, где S – площадь полоски длиной Δh и шириной $BC = 2m$, a – длина резервуара; тогда $\Delta V = 2am\Delta h.$ Ширину $2m$ найдем по теореме Пифагора из прямоугольного треугольника ΔOAB (рис. 17).

$$m = AB = \sqrt{OB^2 - AO^2} = \sqrt{2Rh - h^2},$$

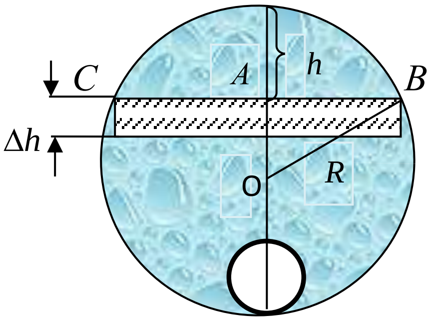


Рис. 17 Вид сечения бочки, расположенной горизонтально

где $OB = R$ – радиус основания цилиндра, $AO = R - h$. Следовательно,

$$\Delta V = -2a\sqrt{2Rh - h^2}\,\Delta h.$$

С другой стороны, это же количество воды вытекает из отверстия радиуса r и по формуле Бернулли оно будет равно

$$\Delta V = \pi r^2 \sigma \sqrt{2gh}\,\Delta t.$$

Приравняв правые части обоих выражений ΔV и перейдя к пределу при $\Delta t \to 0$

$$-\lim_{\Delta t \to 0} \frac{2a\sqrt{2Rh - h^2}\,\Delta h}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \pi \frac{r^2 \sigma \sqrt{2gh}\,\Delta t}{\Delta t},$$

получим дифференциальное уравнение

$$-\frac{2a\sqrt{2Rh - h^2}\,dh}{dt} = \pi r^2 \sigma \sqrt{2gh} \quad \Rightarrow \quad -2a\sqrt{2R - h}\,dh = \pi r^2 \sigma \sqrt{2g}.$$

Проинтегрировав последнее выражение, найдем

$$\frac{4}{3}a\sqrt{(2R - h)^3} = \pi r^2 \sigma \sqrt{2g}\,t + C \quad \Rightarrow \quad t = \frac{\frac{4}{3}a\sqrt{(2R - h)^3} - C}{\pi r^2 \sigma \sqrt{2g}}.$$

Так как при $t = 0$ $h = h_0 = 1{,}6$, то $C = 0$.

Таким образом, вода полностью вытечет из резервуара ($h = 0$) через

$$t = \frac{4a\sqrt{(2R)^3}}{3\pi r^2 \sigma \sqrt{2g}}\ c.$$

В нашем случае при $R = 0{,}8$, $a = 3$, $r = 2см = 0{,}02м$, $\sigma \approx 0{,}6$, $g = 9{,}8 м/c^2$, $\pi \approx 3{,}14$. Таким образом, через каждые

$$t = \frac{4\sqrt{1{,}6^3}}{3{,}14 \cdot 0{,}0004 \cdot 0{,}6\sqrt{2 \cdot 9{,}8}} \approx 2426{,}45 c \approx 40{,}44\ мин.$$

студенты будут заполнять резервуар.

Ответ: $\approx 40{,}44$.

Задача 14. Определите время, необходимое для установления одинакового уровня жидкости в двух сообщающихся сосудах. Малое отверстие между сосудами имеет площадь S_3 $м^2$. Площади горизонтальных сечений первого и второго сосудов составляют S_1 $м^2$ и S_2 $м^2$, в начальный момент уровень жидкости в первом сосуде находился на высоте H_1 $м$ от отверстия, а во втором – на высоте H_2 $м$ ($H_1 > H_2$) (рис. 18).

Решение.

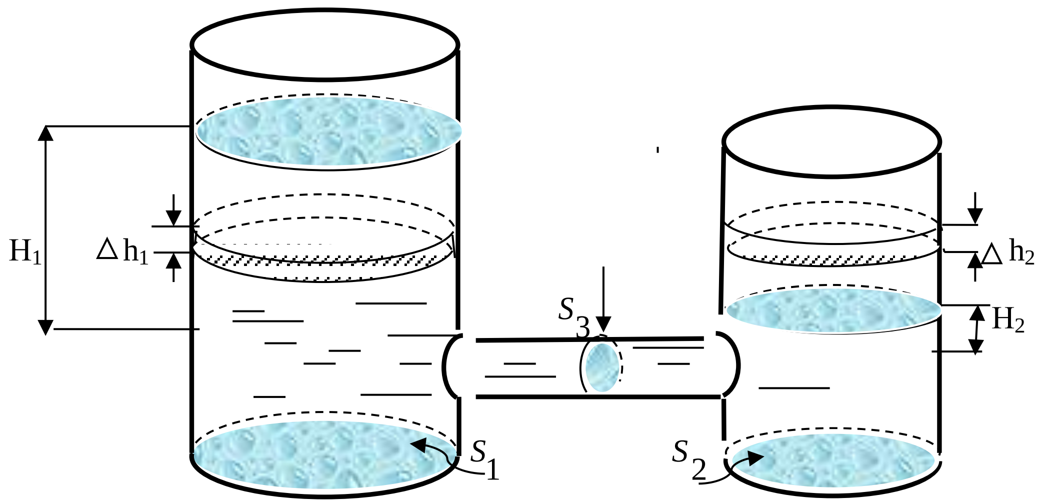


Рис. 18 Сообщающиеся сосуды

Обозначим через t $с$ время, по истечении которого уровень воды H $м$ в сосудах изменяется, т.е. $H = H(t)$. Предположим, что через t $с$ уровень воды в первом сосуде понизился до отметки h_1 $м$, а во втором – повысился до отметки h_2 $м$, а еще через бесконечно малое время Δt $с$ $(\Delta t \to 0)$ уровень воды в первом сосуде уменьшился на $\Delta h_1 < 0\,(м)$, во втором повысился на $\Delta h_2 > 0\,(м)$.

Поскольку количество воды, вытекающей из первого сосуда равно количеству воды, втекающей во второй сосуд, найдя их численные выражения, составим уравнение $(\Delta V_1 = \Delta V_2)$:

$$S_1 \cdot |\Delta h_1| = S_2 \cdot |\Delta h_2| \;\Rightarrow\; -S_1 \cdot \Delta h_1 = S_2 \cdot \Delta h_2 \;\Rightarrow\; \Delta h_2 = -\frac{S_1 \cdot \Delta h_1}{S_2}. \quad (39)$$

С другой стороны, через малое отверстие площади S_3 $м^2$ за период времени Δt $с$ также вытекает вода объемом $\Delta V_3 = \Delta V_1 = \Delta V_2$, причем ΔV_3 будем находить по формуле Бернулли (38), в которой $h = h_1 - h_2$.

Таким образом, количество воды из малого отверстия равно

$$\Delta V_3 = S_3 v \Delta t = S_3 \sigma \sqrt{2gh} \Delta t \quad \Rightarrow - S_1 \Delta h_1 = S_3 \sigma \sqrt{2gh} \Delta t. \qquad (40)$$

Учитывая $h = h_1 - h_2$, получим

$$\Delta h = \Delta h_1 - \Delta h_2 \ \Rightarrow \ \Delta h = \Delta h_1 + \frac{S_1}{S_2} \Delta h_1 \ \Rightarrow \ \Delta h_1 = \frac{S_2 \Delta h}{S_1 + S_2}.$$

Подставив последнее равенство в выражение (40), а также переходя к пределу при $\Delta t \to 0$, получим дифференциальное уравнение

$$-\frac{S_1 S_2}{S_1 + S_2} h' = S_3 \sigma \sqrt{2gh} \quad \Rightarrow -\frac{2 S_1 S_2}{S_1 + S_2} \sqrt{h} = S_3 \sigma \sqrt{2g} t + C \ \Rightarrow$$

$$t = C - \frac{S_1 S_2 \sqrt{2h}}{\left(S_1 + S_2\right) S_3 \sigma \sqrt{g}} = C - \frac{S_1 S_2 \sqrt{2(h_1 - h_2)}}{\left(S_1 + S_2\right) S_3 \sigma \sqrt{g}}.$$

В начальный момент времени, т.е. при $t = 0$ $с$, $C = \dfrac{S_1 S_2 \sqrt{2(h_1 - h_2)}}{\left(S_1 + S_2\right) S_3 \sigma \sqrt{g}}$.

Чтобы найти время, при котором уровень воды в обоих сосудах будет одинаковый, нужно $h_1 = h_2$, таким образом, искомое время T будет равно

$$T = C = \frac{S_1 S_2 \sqrt{2(h_1 - h_2)}}{\left(S_1 + S_2\right) S_3 \sigma \sqrt{g}}.$$

Ответ: $T = \dfrac{S_1 S_2 \sqrt{2(h_1 - h_2)}}{\left(S_1 + S_2\right) S_3 \sigma \sqrt{g}}$.

Задача 15. Для процеживания молока на молочной ферме применяют коническую воронку с круговым отверстием площади ω *м*^{2}, находящимся на уровне H , и углом 2α при вершине. Найдите время, через которое молоко полностью выльется из воронки (рис. 19).

Решение. Пусть $V = V(t)$ – закон изменения количества молока в воронке в зависимости от времени t . Предположим, что через t *с* уровень молока стал на отметке h *м*, спустя бесконечно малое время Δt *с* $(\Delta t \to 0)$ отметка снизилась еще на Δh*м* (рис. 20).

Рис. 19 Коническая воронка

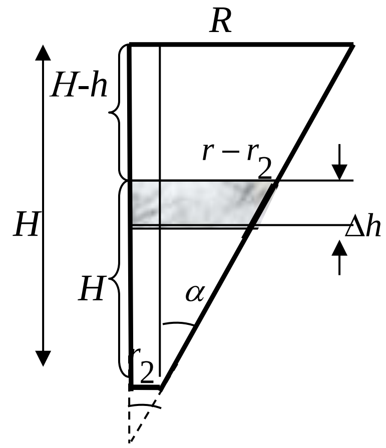


Рис. 20 Сечение конической воронки

Тогда бесконечно малый объем ΔV $(\Delta V \to 0$ *при* $\Delta h \to 0)$ будет равен приблизительно объему цилиндра радиусом r и высотой $|\Delta h|$, причем $\Delta h < 0$ т.е.

$$\Delta V \approx -\pi r^2 \Delta h.$$

С другой стороны, такой же объем молока вытекает из круглого отверстия площади $\pi R_2^2 = \omega$ *м*^{2}. Следовательно, по формуле Бернулли получим

$$\Delta V = \omega\sigma\sqrt{2gh}\Delta t,$$

где σ – постоянная величина для молока.

Приравняв правые части выражений ΔV , получим

$$-\pi r^2 \Delta h = \omega\sigma\sqrt{2gh}\Delta t.$$

Из рис. 20 ясно, что $tg\alpha = \dfrac{r - r_2}{h} \Rightarrow r = htg\alpha + r_2$. Так как

$\pi r_2^2 = \omega \;\Rightarrow\; r_2 = \sqrt{\dfrac{\omega}{\pi}}$, то подставив вместо r_2 в выражение r: $r = htg\alpha + \sqrt{\dfrac{\omega}{\pi}}$, а также в последнее выражение, и перейдя к пределу при $\Delta t \to 0$, получим ДУ:

$$-\pi\left(htg\alpha + \sqrt{\frac{\omega}{\pi}}\right)^2 dh = \omega\sigma\sqrt{2gh}dt.$$

Разделив ДУ на $\sqrt{h}$ и проинтегрировав его, найдем общий интеграл

$$\pi\left(\frac{2h^{5/2}}{5}tg^2\alpha + \frac{4h^{3/2}}{3}\sqrt{\frac{\omega}{\pi}}tg\alpha + 2\omega\frac{\sqrt{h}}{\pi}\right) + \omega\sigma\sqrt{2g}t + = C.$$

При $t = 0$ $h = H$, тогда

$$C = \pi\left(\frac{2H^{5/2}}{5}tg^2\alpha + \frac{4H^{3/2}}{3}\sqrt{\frac{\omega}{\pi}}tg\alpha + 2\omega\frac{\sqrt{H}}{\pi}\right).$$

$$t = \frac{\pi\left[\dfrac{2\left(H^{5/2} - h^{5/2}\right)}{5}tg^2\alpha + \dfrac{4\left(H^{3/2} - h^{3/2}\right)}{3}\sqrt{\dfrac{\omega}{\pi}}tg\alpha + \dfrac{2\omega\left(\sqrt{H} - \sqrt{h}\right)}{\pi}\right]}{\omega\sigma\sqrt{2g}} \, c.$$

Следовательно, молоко вытечет из воронки при $h = 0$ за время

$$t = \frac{\pi\left[\dfrac{2H^{5/2}}{5}tg^2\alpha + \dfrac{4H^{3/2}}{3}\sqrt{\dfrac{\omega}{\pi}}tg\alpha + \dfrac{2\omega\sqrt{H}}{\pi}\right]}{\omega\sigma\sqrt{2g}} \; c.$$

Задача 16. На животноводческой ферме предусмотрено автоматическое водоснабжение, представляющее собой резервуар полусферической формы радиусом 15 см с датчиком воды (рис. 21, 22, 23). Резервуар соединен с трубой, по которой течет вода, и вода подается непосредственно через круглое отверстие диаметром 2 см. Подача воды осуществляется в случае распознавания датчиком ее отсутствия. Определите, через сколько времени наполнится резервуар?

Решение. Пусть $V = V(t)$ – закон изменения количества воды в резервуаре в зависимости от времени t. Предположим, что через t *с* уровень воды стал на отметке h*м*, спустя бесконечно малое время Δt $(\Delta t \to 0)$ отметка поднялась на Δh*м* (рис. 24).

Рассмотрим прямоугольный ΔOAB. В нем по теореме Пифагора $AB = r_1 = \sqrt{R^2 - h^2}$.

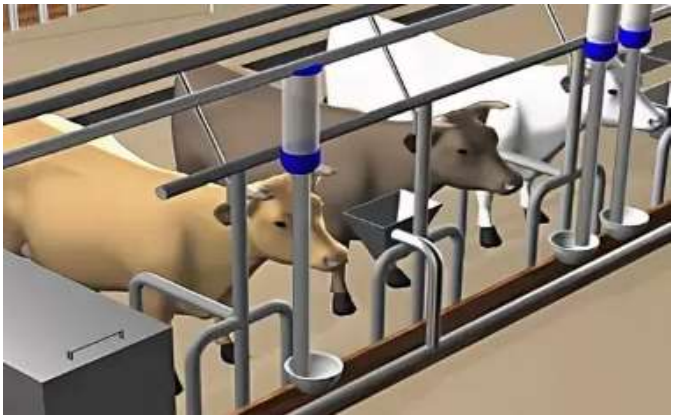


Рис. 21 Автоматическое водоснабжение коров

Рис. 22 Резервуар для воды

Рис. 23 Автоматическое водоснабжение на животноводческой ферме

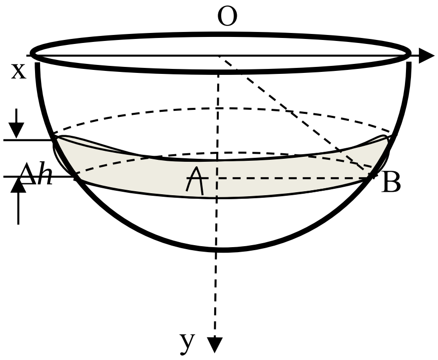


Рис. 24 Сечение резервуара для воды

С одной стороны, за время Δt объем воды будет равен объему цилиндра радиусом r_1 и высотой Δh, т.е.

$$\Delta V = \Delta V_{цил} = \pi r_1^2 \Delta h = \pi \left(R^2 - h^2 \right) \Delta h.$$

С другой стороны, по формуле Бернулли $\Delta V = \pi r^2 \sigma \sqrt{2gh} \Delta t$.

Приравняв одинаковые величины и перейдя к пределу при $\Delta t \to 0$, получим дифференциальное уравнение

$$\pi\left(R^2 - h^2\right)h' = \pi r^2 \sigma\sqrt{2gh} \;\Rightarrow\; \frac{\left(R^2 - h^2\right)}{\sqrt{h}}h' = r^2\sigma\sqrt{2g}\,.$$

Интегрируя ДУ, найдем общий интеграл $2\left(R^2\sqrt{h} - \frac{\sqrt{h^5}}{5}\right) - r^2\sigma\sqrt{2g}t = C$.

При начальных условиях $h(0) = 0$ $C = 0$, т.е. $2\left(R^2\sqrt{h} - \frac{\sqrt{h^5}}{5}\right) - r^2\sigma\sqrt{2g}t = 0$.

Отсюда $t = \dfrac{2\left(R^2\sqrt{h} - \frac{\sqrt{h^5}}{5}\right)}{r^2\sigma\sqrt{2g}}$. Резервуар полностью наполнится водой, если $h(t) = R$. Подставляя данные задачи ($r = 1см = 0{,}01\,м$, $R = 0{,}15\,м$, $g = 9{,}8\,м/с^2$, $\sigma = 0{,}6$), найдем время $t = \dfrac{1.6\cdot\sqrt{0{,}15^5}}{0.01^2\cdot 0{,}6\sqrt{2\cdot 9{,}8}} = 52{,}5с$, в течение которого наполняется резервуар.

Ответ: 52,5.

Задача 17. На молочной ферме применяется система охлаждения молока. Известно, что скорость охлаждения молока пропорциональна разности температур молока и температурой, подающейся для охлаждения, равной 5° С. Через какое время молоко охладится до 6°, если за 10 мин оно охладилось от 35° до 20°?

Решение. Согласно указанному закону, запишем соотношение $\dfrac{dT}{dt} = k\left(T - T_0\right)$, где $T -$ температура молока, $T_0 = 5^\circ$ температура охлаждающего воздуха, $k -$ коэффициент пропорциональности. Интегрируя ДУ, получим $T = 5 + Ce^{kt}$. Применяя начальные условия $\begin{cases} T(0) = 35 \\ T(10) = 20 \end{cases}$, найдем $C = 35 - 5 = 30$, тогда $T = 5 + 30e^{kt}$. А из соотношения $20 = 5 + 30e^{10k}$ найдем $k = -0{,}07$.

Таким образом, закон изменения температуры молока $T = 5 + 30e^{-0{,}07t}$. Полагая в нем $T = 6$ найдем время, за которое молоко охладится до 6°

$t \approx 48{,}6\,мин.$

Ответ: $\approx 48{,}6$.

Задача 18. На молочно-товарной ферме используется доильный аппарат (рис. 25), состоящий из четырех стаканов с присосками и емкости для конечного сбора молока, куда стекается молоко по млечным трубкам при помощи поршневого насоса. Определить, через какое время наполнится 1/4 часть объема бидона, если радиус нижнего основания равен 22*см,* верхнего – 10*см*, высота цилиндрической части – 40*см*, а общая высота составляет 65 см, при этом молоко стекается в бидон через отверстие радиусом 1*см*?

Решение.

Рис. 25 Доильный аппарат

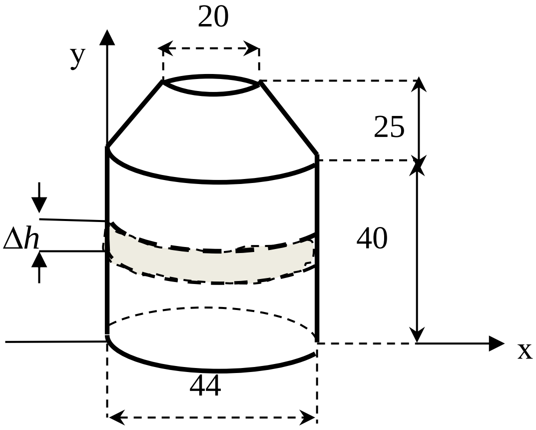


Рис. 26 Сечение доильного аппарата

Для начала найдем объем бидона. Так как он состоит из двух частей: цилиндра и усеченного конуса (рис. 26), то нужно найти сумму их объемов.

$$V_{ц} = \pi R^2 h_1 = 3{,}14 \cdot 22^2 \cdot 40 \approx 60790\,см^3.$$

$$V_{ус/к} = \frac{\pi h_2}{3}\left(R^2 + Rr + r^2\right) = \frac{3{,}14 \cdot 25}{3}(484 + 220 + 100) = 21038\,см^3.$$

Следовательно, объем бидона равен $81828\,см^3$.

Пусть $V = V(t)$ – объем молока в бидоне в момент времени t. Предположим, что через t мин уровень молокав бидоне стал на отметке h *м*, спустя бесконечно малое время Δt *с* $(\Delta t \to 0)$ отметка поднялась на Δh*м* (рис. 26).

С одной стороны, за время Δt объем молока будет равен объему цилиндра радиусом R и высотой Δh, т.е.

$$\Delta V = \Delta V_{цил} = \pi R^2 \Delta h.$$

С другой стороны, по формуле Бернулли $\Delta V = -\pi r_0^2 \sigma \sqrt{2gh}\Delta t$, где – радиус отверстия, через которое поступает молоко в бидон.

Приравняв одинаковые величины и перейдя к пределу при $\Delta t \to 0$, получим дифференциальное уравнение

$$\pi R^2 \Delta h = \pi r_0^2 \sigma \sqrt{2gh}\Delta t \quad \Rightarrow \quad \frac{dh}{\sqrt{h}} = \frac{r_0^2 \sigma \sqrt{2g}dt}{R^2} \quad \Rightarrow \quad 2\sqrt{h} - \frac{r_0^2 \sigma \sqrt{2g}t}{R^2} = C.$$

При начальном условии $h(0) = 0 \quad C = 0$. Тогда $\sqrt{h} = \dfrac{r_0^2 \sigma \sqrt{2g}t}{2R^2} \Rightarrow$

$$t = \frac{2\sqrt{h}R^2}{r_0^2 \sigma \sqrt{2g}}.$$

Бидон наполняется на 1/4 часть ($V = \dfrac{81828}{4} = 20457\ см^3$.) при уровне молока в нем, находящемся на высоте $h \approx 13 см$.

Используя данные: $R = 22 см = 0{,}22\ м$, $r_0 = 1 см = 0{,}01 м$, σ – для молока получают экспериментально, т.к. зависит от свойств молока, $g \approx 9{,}8\ м/с^2$,найдем $t = \dfrac{2\sqrt{0{,}13} \cdot 0{,}22^2}{0{,}01^2 \cdot \sigma \sqrt{19{,}6}} \approx \dfrac{79с}{\sigma} \approx \dfrac{1{,}19}{\sigma} мин$.

Ответ: $\approx \dfrac{1{,}19}{\sigma} мин$.

Решая задачи физического смысла на применение законов Ньютона, в которых материальная точка совершает поступательное или колебательное движение, на которую действуют несколько сил, например, сила тяжести, сила трения, сила упругости, сила натяжения нити (пружины), центростремительная сила и т.д., то нужно:

1) сделать физический чертеж, согласно условию задачи, указав силы действия на материальную точку;

2) записать закон Ньютона к данной системе;

3) проектировать на оси координат рассматриваемые силы;

4) составить математическую модель по условиям данной задачи и найти неизвестные.

Задача 19. Семена рожкового дерева (рис. 27) погрузили в стакан с водой, и через некоторое время под действием собственного веса они пошли на дно без начальной скорости. Известно, что сопротивление жидкости прямо пропорционально скорости тела. Найдите закон движения семени, если его масса равна 200 мг.

Решение.

На семя действуют силы:

$$\sum \overline{F} = \overline{P} + \overline{F}_{тяж} + \overline{F}_{сопр}.$$

По второму закону Ньютона:

$$\overline{F}_{тяж} = \overline{P} + \overline{F}_{сопр} \quad \Rightarrow m\overline{a} = m\overline{g} + k\overline{v},$$

где $S(t)-$ закон движения тела; $S'(t) = v(t)-$ скорость движения тела, $a(t) = v'(t) -$ ускорение движения;

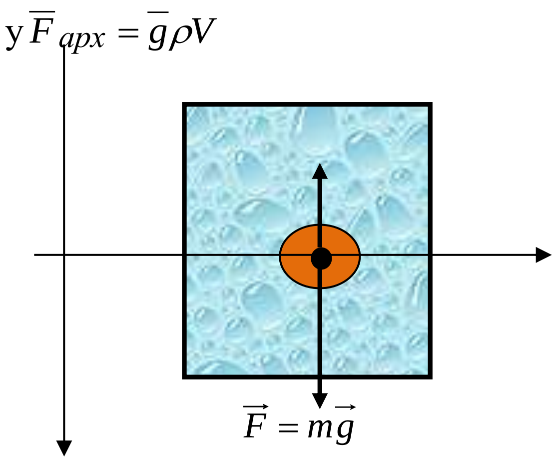


Рис. 27 Семя рожкового дерева, находящегося в воде

$g = 9{,}8\ м/с^2$; $k-$ коэффициент пропорциональности, $m-$ масса тела. Проекция сил на ось ОУ:

$$ma = mg - kv.$$

Заменив a на $v'(t)$, получимДУ

$$mv' = mg - kv \quad \Rightarrow$$

$$v' = g - \frac{k}{m}v \quad \Rightarrow$$

$$\frac{dv}{g - \frac{k}{m}v} = dt \quad \Rightarrow \quad -\frac{m}{k}ln\left|g - \frac{k}{m}v\right| = t + C.$$

Применив начальное условие: $v(0) = 0$, определим $C = -\frac{m}{k}lng$.

Тогда

$$-\frac{m}{k}ln\left|g - \frac{k}{m}v\right| = t - \frac{m}{k}lng \quad \Rightarrow \quad ln\left|g - \frac{k}{m}v\right| = -\frac{k}{m}t + lng \quad \Rightarrow \quad g - \frac{k}{m}v = g \cdot e^{-kt/m}.$$

Отсюда находим скорость $v = \frac{mg}{k} \cdot \left(1 - e^{-kt/m}\right)$, заменив в нем v на $S'(t)$, получим

$$S'(t)=\frac{mg}{k}\cdot\left(1-e^{-kt/m}\right) \quad\Rightarrow\quad \int dS(t)=\int\frac{mg}{k}\cdot\left(1-e^{-kt/m}\right)dt \quad\Rightarrow$$

$$S(t)=\frac{mg}{k}\left(t+\frac{m}{k}e^{-kt/m}\right)+C.$$

Поскольку $S(0)=0$, то $C=-\frac{m^2}{k^2}$.

Рис. 28 Семена и плоды рожкового дерева

Таким образом, семена рожкового дерева падают на дно стакана по закону

$$S(t)=\frac{m^2g}{k^2}\left(e^{-kt/m}-1\right)+\frac{mg}{k}t.$$

Подставляя данные задачи ($m=0{,}0002\,кг$) в $S(t)$, получим

$$S(t)=\frac{39{,}2\cdot10^{-8}}{k^2}\left(e^{\,-500kt}-1\right)+\frac{0{,}0196}{k}t.$$

Во многих физических задачах сила трения играет большую роль. В природе и технике она встречается довольно часто. К примеру, без нее мы не смогли бы перемещаться по земле, так как, идя по земле, создается сила трения между нашей обувью и землей; мы отталкиваемся от земли и благодаря этому перемещаемся. Этот закон применим к любой материальной точке, совершающей движение и имеющей массу.

Задача 20. Улитка массой 30 *г* ползает вверх по дереву под действием силы, направленной под углом α к дереву (рис. 29). Найти закон движения улитки, если модуль силы равен $F\,H$, угол наклона $\alpha=30^\circ$, коэффициент трения между улиткой и деревом равен k, если в начальный момент времени ее скорость была равна нулю?

Решение.

Пусть улитка за время t *с* прошла расстояние $S(t)$ *м*, скорость движения улитки равна $v(t)$ *м/с*, ускорение – $a(t)$ *м/с²* . Согласно второму закону Ньютона, для данной системы запишем результирующую всех сил, действующих на улитку:

$$m\overline{a} = m\overline{g} + \overline{F}_{тр} + \overline{F} + \overline{N}.$$

Спроектируем силы на оси координат.

Oy: Ox: $\begin{cases} ma = -mg - F_{тр} + Пр_{oy}\overline{F}, \\ 0 = Пр_{ox}\overline{F} - N, \end{cases}$ где $\begin{cases} Пр_{oy}\overline{F} = \left|\overline{F}\right| \cdot cos\alpha; \\ Пр_{ox}\overline{F} = \left|\overline{F}\right| \cdot sin\alpha. \end{cases}$

Рис. 29 Улитка, совершающая движение под действием силы

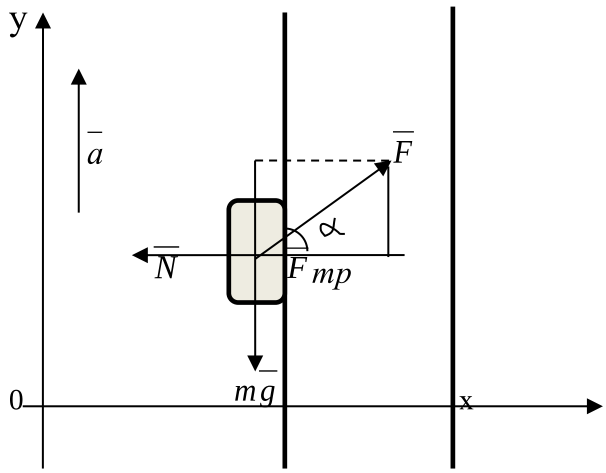


Рис. 30 Проекция сил, действующих на улитку

Тогда система примет вид:

$$\begin{cases} ma = -mg - F_{тр} + \left|\overline{F}\right| \cdot cos\alpha \\ N = \left|\overline{F}\right| \cdot sin\alpha \\ F_{тр} = kN \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ma = -mg + \left|\overline{F}\right| \cdot (cos\alpha - k \cdot sin\alpha) \\ N = \left|\overline{F}\right| \cdot sin\alpha \\ F_{тр} = kN. \end{cases}$$

В первом уравнении системы заменив $a = v'(t)$ и разделив его обе части на m, получим дифференциальное уравнение

$$v' = -g + \frac{\left|\overline{F}\right|}{m} \cdot (cos\alpha - k \cdot sin\alpha).$$

Интегрируя ДУ, находим скорость движения улитки:

$$v(t)=S'=\left(-g+\frac{\left|\overline{F}\right|}{m}\cdot(cos\alpha-k\cdot sin\alpha)\right)\cdot t+C_1.$$

Применяя начальное условие $v(0)=0$, определим $C_1=0$. Далее, интегрируя функцию $v(t)$, найдем закон движения улитки $S(t)$:

$$S(t)=\left(\frac{\left|\overline{F}\right|}{m}\cdot(cos\alpha-k\cdot sin\alpha)-g\right)\cdot\frac{t^2}{2}+C_2.$$

Из условия $S(0)=0$ находим $C_2=0$, тогда

$$S(t)=\left(\frac{\left|\overline{F}\right|}{m}\cdot(cos\alpha-k\cdot sin\alpha)-g\right)\cdot\frac{t^2}{2}.$$

Таким образом, используя данные задачи ($m=0{,}04$ *кг*, $\left|\overline{F}\right|=F$ *Н*, $\alpha=30^\circ$, $g=9{,}8$ *м/с*^{2}), определим, что улитка ползает согласно закону $S(t)=\left(\frac{F}{0{,}08}\cdot\left(\sqrt{3}-k\right)-9{,}8\right)\cdot\frac{t^2}{2}$, график которого изображен на рис. 31.

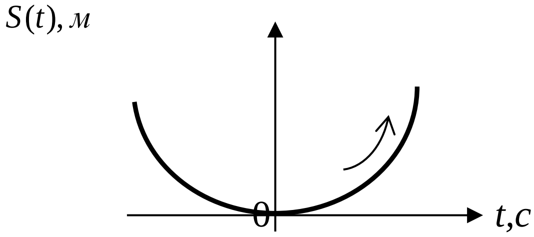


Рис. 31 Схематичный график движения улитки

На самом деле, скорость движения улитки составляет 0,3 *см* в минуту. Но благодаря тому, что в данном случае улитка движется под действием силы, направленной под углом 30°, расстояние, пройденное ею в минуту, будет больше 0,3 *см*.


Рис. 32 Улитка движется вертикально вверх


Рис. 33 Улитка движется горизонтально

Предлагаем читателю самостоятельно найти закон движения улитки $S(t)$, при условии, что она ползет вертикально вверх, т.е. $\alpha = 0°$ (рис. 32), а также, когда она ползет горизонтально (рис. 33). Данные задачи оставить прежними.

Ответ: $S(t) = \left(\frac{F}{0{,}08} \cdot \left(\sqrt{3} - k\right) - 9{,}8 \right) \cdot \frac{t^2}{2}$.

Задача 21. Определите время, за которое преодолевает расстояние в100 *м*падающая капля дождя до земли (рис. 34), если ее масса равна 500 *мг*, в начальный момент времени ее скорость была равна 0,1 *м/с*, а пройденное расстояние составляло 20 *см*. Сила сопротивления воздуха пропорциональна скорости падения капли, коэффициент пропорциональности $\gamma = 0{,}02$ *кг/с*.

Решение.

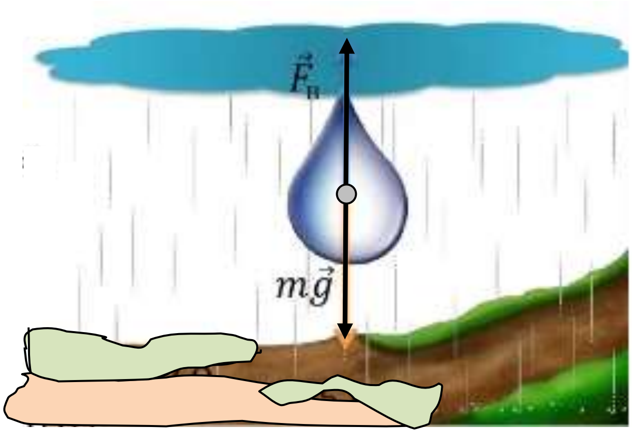


Рис. 34 Капля дождя под действием внешних сил

На каплю действуют две силы: сила сопротивления воздуха $\overline{F}_в$ и сила тяжести $\overline{F}_т$. Тогда второй закон Ньютона примет вид:

$$m\overline{a} = m\overline{g} + \overline{F}_в.$$

$$Oy: \quad ma = mg - \gamma V.$$

Заменив a на $S''(t)$, V на $S'(t)$, получим линейное неоднородное дифференциальное уравнение (ЛНДУ) второго порядка с постоянными коэффициентами

$$S'' = g - \frac{k}{m}S' \;\Rightarrow\; S'' + \frac{k}{m}S' = g,$$

характеристическим уравнением соответствующего емуЛОДУ второго порядка с постоянными коэффициентами которого является $k^2 + \frac{\gamma}{m}k = 0$ с корнями $k_{1,2} = -\frac{\gamma}{m};\ 0$.Тогда $S_{лоду} = C_1 e^{-\gamma t/m} + C_2$, какое-либо частное решение данного ЛНДУ будем искать в виде $S^*_ч = At$. Далее определяем, что

$$A = \frac{mg}{\gamma} = \frac{500 \cdot 10^{-3} \cdot 9{,}8}{0{,}02 \cdot 10^3} = 0{,}245\ .$$

Следовательно, общим решением ЛНДУ будет

$$S_{лнду} = C_1 e^{-\gamma t/m} + C_2 + 0{,}245t \text{ или } S_{лнду} = C_1 e^{-40t} + C_2 + 0{,}245t.$$

Применяя начальные условия: $\begin{cases} S(0) = 0{,}2 \\ S'(0) = 0{,}1 \end{cases}$, найдем $\begin{cases} C_1 = 0{,}004 \\ C_2 = 0{,}196 \end{cases}$.

Таким образом, частным решением ЛНДУ является функция

$$S_{лнду} = 0{,}004e^{-40t} + 0{,}245t + 0{,}196.$$

Найдем время t, при котором $S(t) = 100$, т.е.

$$0{,}004e^{-40t} + 0{,}245t + 0{,}196 = 100 \quad \Rightarrow \quad e^{-40t} + 61{,}25t = 24951.$$

Так как $e^{-40t} \to 0$ при $t \to \infty$, то отсюда $t = 407{,}4\ с \approx 6{,}8\ мин.$

*Ответ:*6,8.

Очень часто в физических задачах рассматривается движение двух тел. Решая такие задачи, принято считать одно тело неподвижным относительно другого, тогда второе тело будет приближаться к первому. При этом, если тела по условию задачи движутся навстречу друг к другу, то скорость движущегося тела будет равна сумме скоростей этих тел, и разности скоростей, если одно из них следует за другим.

Задача 22. Тонкая однородная стальная цепь длиной l и массой m, лежит на горизонтальной поверхности. Когда длина части цепи, лежащей на поверхности, составляет η всей длины, цепь начинает соскальзывать со стола. Найдите коэффициент трения между цепью и поверхностью. С какой скоростью цепь соскальзывает в конце своего движения.

Решение. Данная система делится на две подсистемы: 1) цепь лежит на горизонтальной поверхности (стол); 2) цепь соскальзывает со стола. Рассмотрим каждую систему поотдельности.

1) Для случая, когда цепь лежит на горизонтальной поверхности (стол) (рис. 35), второй закон Ньютона примет вид:

$$m\bar{a} = m\bar{g} + \bar{F}_{тр} + \bar{N} + \bar{F}.$$

Спроектируем силы на оси координат.

$$\begin{cases} Oy: & 0 = -mg + N \\ Ox: & ma = -F_{тр} + F \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} N = mg \\ ma = -F_{тр} + F \\ F_{тр} = \mu N \end{cases} \Rightarrow \quad ma = -\mu m_1 g + F.$$

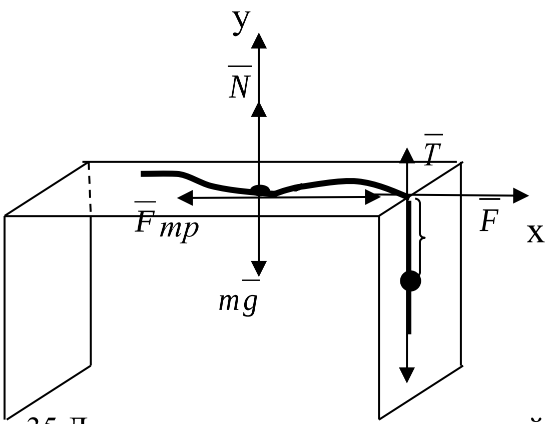


Рис. 35 Движение цепи по горизонтальной поверхности

2) В случае цепи, соскальзывающей со стола: $m\overline{a} = m\overline{g} + \overline{T}$, где $\overline{T}$ – сила натяжения нити; тогда $ma = m_2 g - T$.

Из рассмотренных случаев следует, что

$$ma = -\mu m_1 g + F + m_2 g - T.$$

Так как потенциальная энергия E_p равна кинетической $E_к$, то $F = T$. Следовательно,

$$ma = -\mu m_1 g + m_2 g \quad \Rightarrow \quad ma = g\left(m_2 - \mu m_1\right).()$$

Обозначим через x *м* – длина цепи, которая лежит на столе, тогда длина свисающей цепи будет равна $(l - x)$ *м*, при этом $\frac{x}{l} = \eta$, $\frac{l-x}{l} = 1 - \eta$, тогда коэффициент силы трения $\mu = \frac{1-\eta}{\eta}$.

Пусть вес одного метра цепи равен P *Н*, тогда для цепи длиной l *м* вес будет равен $lP = mg \quad \Rightarrow \quad m = \frac{lP}{g}$. Аналогично и для составляющих цепи: $m_1 = \frac{xP}{g}$, $m_2 = \frac{(l-x)P}{g}$.

Итак, имеем

$$ma = g\left(m_2 - \mu m_1\right) \quad \Rightarrow \quad a\frac{lP}{g} = g\left(\frac{(l-x)P}{g} - \frac{\mu l P}{g}\right) \Rightarrow a \quad \Rightarrow$$

$$a = g\left(1 - \frac{x}{l}(\mu + 1)\right) \quad \Rightarrow a = g\left(1 - \frac{x}{\eta l}\right).$$

Поскольку $a=\frac{dv}{dt}=\frac{dv}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}=v\cdot\frac{dv}{dx}$, то заменив $a=v\frac{dv}{dx}$, получим ДУ, решив которое найдем общее решение

$$v\frac{dv}{dx}=g\left(1-\frac{x}{\eta l}\right)\quad\Rightarrow\quad v=\sqrt{2g\left(x-\frac{x^2}{2}\right)+C_1}.$$

При начальном условии $v(0)=0$ $C_1=0$, а при $x=\eta l$ скорость будет равна $v=\sqrt{g\eta l}$.

Ответ: $v=\sqrt{g\eta l}$.

Задача 23. Свободно висячая на крюке однородная цепь соскальзывает с него под действием собственного веса. Определите время, за которое вся цепь соскользнет с крюка, если в начальный момент времени скорость цепи была нулевой, и с одной стороны крюка висело 10 *м*, а с другой – 8 *м*. Силой трения между цепью и крюком можно пренебречь.

Решение. Сделаем чертеж к данной задаче (рис. 36).

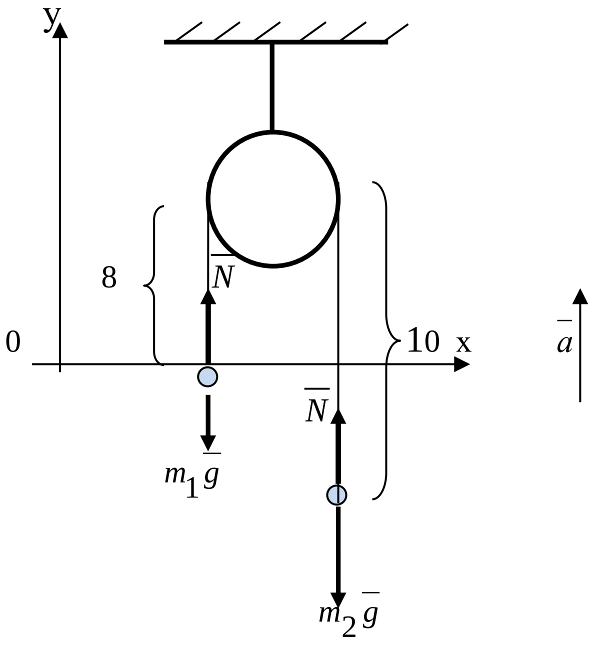


Рис. 36 Цепь, висячая на крюке

Обозначим за l *м* изменяющуюся длину цепи со стороны большей свисающей части цепи в зависимости от времени t *с* после начала движения. Известно, что $l_1(0)=8$ и $l_2(0)=10$. Применяя второй закон Ньютона, для данной системы запишем равенство

$$m\overline{a}=m_1\overline{g}+\overline{N}+\overline{F}_{тр}+m_2\overline{g}+\overline{N}.$$

Спроектируем силы на оси координат.

Оy: $m\overline{a}=-m_1\overline{g}+\overline{N}-m_2\overline{g}+\overline{N}$,

$Пр_{ox}m\overline{a}=0,\ \overline{F}_{тр}=\overline{0},\ \overline{N}=\overline{0}.$

Следовательно, $ma=-g\left(m_1+m_2\right).$

Поскольку вес тела $P=mg$, то $m=\frac{P}{g}$, т.е. вес одного метра цепи равен P *Н*, тогда в 18 м масса будет $m=\frac{18P}{g}$, в l м – $m_2=\frac{lP}{g}$, $m_1=\frac{(18-l)P}{g}$. Подставив эти выражения в выражение для ma и заменив в нем $a=l''(t)$, получим линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами

$$\frac{18l''}{g} = -(18-2l) \;\Rightarrow\; l'' - \frac{g}{9}l = -g.$$

Корни характеристического уравнения $k_{1,2} = \pm\frac{\sqrt{g}}{3}$, тогда общее решение соответствующего однородного ДУ $l_{лоду} = C_1 e^{-\sqrt{g}t/3} + C_2 e^{\sqrt{g}t/3}$, а какое-нибудь частное решение $l_ч = 9$.

Следовательно, общее решение данного ДУ примет вид

$$l_{лнду} = C_1 e^{-\sqrt{g}t/3} + C_2 e^{\sqrt{g}t/3} + 9.$$

Применив к нему начальные условия $l(0)=18,\ l'(0)=0$, составим систему

$$\begin{cases} C_1 + C_2 + 9 = 10 \\ \frac{\sqrt{g}}{3}\left(-C_1 + C_2\right) = 0 \end{cases} \Rightarrow\; C_1 = C_2 = 0{,}5.$$

Таким образом, частным решением ДУ будет функция

$$l_{частн} = 0{,}5\left(e^{-\sqrt{g}t/3} + e^{\sqrt{g}t/3}\right) + 9.$$

Цепь полностью соскользнет с крюка, если $l=18$, т.е. когда $e^{-\sqrt{g}t/3} + e^{\sqrt{g}t/3} = 18.$ Выполнив в последнем замену: $e^{\sqrt{g}t/3} = q > 0$, получим рациональное уравнение

$$\frac{1}{q} + q = 18 \;\Rightarrow\; \frac{q^2 - 18q + 1}{q} = 0 \Rightarrow \begin{cases} q = 9 + 4\sqrt{5} \\ q \neq 0 \end{cases}.$$

Возвращаясь к замене, найдем t:

$$e^{\sqrt{g}t/3} = 9 + 4\sqrt{5} \;\Rightarrow\; \frac{\sqrt{g}}{3}t = ln\left(9+4\sqrt{5}\right) \Rightarrow t = \frac{3ln\left(9+4\sqrt{5}\right)}{\sqrt{9{,}8}} \approx 2{,}77,$$

т.е. цепь соскользнет с крюка примерно через 2,77 *с*.

Ответ: 2,77.

Задача 24. Мальчик на санях скатывается с горы, коэффициент силы трения между поверхностью саней и поверхностью снежной горы равна 0,02. Уклон горы составляет 0,5 (рис. 37). Какое расстояние он проедет за 10 с после начала движения, если начальная скорость составляла 2 м/с, расстояние, пройденное до скатывания, было равно 1,5 м?

Решение. Сделаем физический чертеж к данной задаче (рис. 38).

Рис. 37 Скатывание с горы под углом

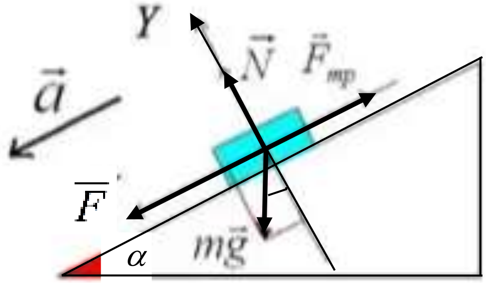


Рис. 38 Силы, действующие на материальную точку, совершающую движение под углом

Для данной системы второй закон Ньютона запишется в виде:

$$m\overline{a} = m\overline{g} + \overline{N} + \overline{F}_{тр} + \overline{F}.$$

$$\begin{cases} Oy: \quad 0 = -Пр_{oy}\overline{F} + N \\ Ox: \quad ma = Пр_{ox}\overline{F} - F_{тр} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N = mgcos\alpha \\ F_{тр} = \mu N \\ ma = mg(sin\alpha - \mu cos\alpha). \end{cases}$$

Последнее уравнение системы равносильно дифференциальному уравнению

$$S''(t) = 9{,}8(sin30^\circ - 0{,}02cos30^\circ) = 4{,}73,$$

т.е. ускорение скольжения составляет 4,73 $м/с^2$. Интегрированием ДУ находим скорость $v(t) = S'(t) = 4{,}73t + C_1$ $м/с$ и закон движения саней $S(t) = \dfrac{4{,}73}{2}t^2 + C_1 t + C_2$ $м$. Тогда через 10 $с$ будет пройдено $S(10) = 258$ $м$.

Ответ: 258.

Задача 25. Комбайн «Енисей 1200 РМ» массой 15$т$ движется равнозамедленно, имея начальную скорость 8$км/ч$. Известно, что сила торможения пропорциональна скорости, коэффициент пропорциональности $\gamma = 400$. Найдите закон движения комбайна, если до замедления было пройдено 100 м. Какое расстояние пройдет комбайн за 1 $мин$?

Решение. Сделаем чертеж к задаче (рис. 39). По второму закону Ньютона: $m\overline{a} = m\overline{g} + \overline{N} + \overline{F}_{торм} + \overline{F}_{тяги}$.

Найдем проекции указанных сил на оси координат:

$$\begin{cases} Oy: & 0 = -mg + N \\ Ox: & ma = -F_{торм} + F_{тяги} \end{cases}.$$

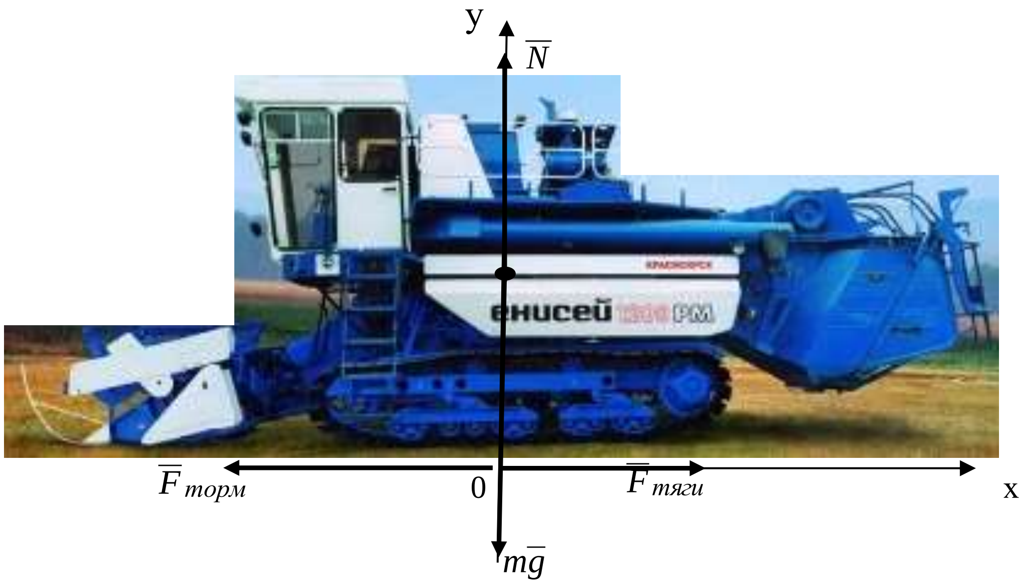


Рис. 39 Комбайн «Енисей 1200 РМ»

Так как комбайн движется равнозамедленно, то $\overline{F}_{тяги} \to 0$ при $t \to \infty$; скорость равнозамедленного движения задается формулой $v(t) = v_0 - at$. Следовательно,

$$ma = -F_{торм} = -\gamma v \quad \text{или} \quad ma = -\gamma\left(v_0 - at\right) \;\Rightarrow\; a(m - \gamma t) = -\gamma v_0$$

или $S'' = -\dfrac{\gamma \cdot v_0}{m - \gamma t} \;\Rightarrow\; S' = v_0 \cdot ln|m - \gamma t| + C_1 \;\Rightarrow\; S = v_0 \int ln|m - \gamma t| dt + C_1 t =$

$$= \begin{Bmatrix} ln|m - \gamma t| = u; & du = \dfrac{-\gamma dt}{m - \gamma t} \\ dt = dv; & v = t \end{Bmatrix} = v_0\left(t ln|m - \gamma t| - \int \frac{-\gamma t dt}{m - \gamma t}\right) + C_1 t \Rightarrow$$

$$S(t) = v_0\left(\left(t - \frac{m}{\gamma}\right) \cdot ln|m - \gamma t| - t\right) + C_1 t + C_2$$

Используя данные: $v_0 = 2{,}22$ м/с, $m = 15000$ кг, $\gamma = 400$, получаем

$$S(t) = 2{,}22\left((t - 37{,}5) \cdot ln|15000 - 400t| - t\right) + C_1 t + C_2.$$

При начальных условиях $S(0) = 100$, $S'(0) = 2{,}22$, определяем $C_1 = -19{,}13$, $C_2 = 900{,}53$. Таким образом,

$$S(t)=2{,}22\left(\left(t-37{,}5\right)\cdot ln\left|15000-400t\right|-t\right)-19{,}13t+900{,}53.$$

Через 60 с комбайн проедет $S(60)=170{,}6$ *м*.

Ответ: 170,6.

Задача 26. Трактор с колесной формулой «4х4» «Сельскохозяйственник» JCB 3230 XTRA (рис. 40), предназначенный для выполнения различных видов работ и операций, движется равнозамедленнос начальной скоростью20*км/ч*. Какая сила торможения действует на трактор, если она пропорциональна скорости, коэффициент пропорциональности $\gamma=250$, масса трактора 20 *т*? Какое расстояние пройдет трактор до остановки?

Решение.

Рис. 40 Трактор «Сельскохозяйственник» JCB 3230 XTRA

Воспользовавшись выкладками предыдущей задачи, имеем

$$ma=-F_{торм}=-\gamma v,$$

$$S''=-\frac{\gamma\cdot v_0}{m-\gamma t}\quad\Rightarrow\quad S'=v_0\cdot ln\left|m-\gamma t\right|+C_1\quad\Rightarrow\quad S=v_0\int ln\left|m-\gamma t\right|dt+C_1t=$$

$$S(t)=v_0\left(\left(t-\frac{m}{\gamma}\right)\cdot ln\left|m-\gamma t\right|-t\right)+C_1t+C_2.$$

Так как $S(0)=0$ *м*, $S'(0)=20$ *м/с*, заключаем $\begin{cases}C_1=-180\\ C_2=16000\end{cases}$.

Закон движения трактора при $m=20000$, $v_0=20$, $\gamma=250$,

$$S(t)=20\left(\left(t-80\right)\cdot ln\left|20000-250t\right|-t\right)-180t+16000.$$

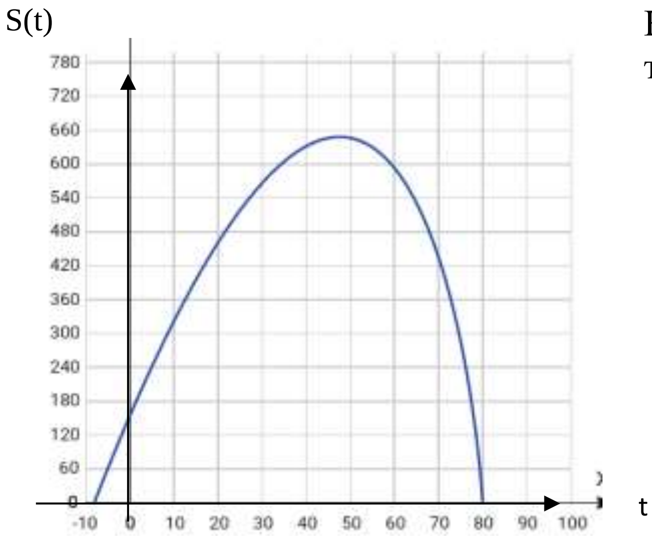


Рис. 41 График функции $S(t)$

На рис. 41 изображен график движения трактора. Трактор остановится, если

$$S' = v_0 \cdot ln|m - \gamma t| - 180 = 0 \Rightarrow$$

$$20 ln|20000 - 250t| = 180 \Rightarrow$$

$$t = \frac{20000 - e^9}{250} \approx 47{,}5.$$

Таким образом, трактор остановится примерно через 47,5 *с* и за это время он пройдет расстояние

$$S(47{,}5) = 20((-32{,}5) \cdot ln8125 - 47{,}5) + 7450 = 650 м.$$

Чтобы найти силу торможения $F_{торм} = -ma$, нужно знать ускорение $a = -\frac{v_0}{t} = -\frac{20}{47{,}5} \approx -0{,}42$ *м/с*^{2}, тогда $F_{торм} = -20000 \cdot (-0{,}42) = 8400\, Н$.

Ответ: 8400Н; 650 *м*.

Задача 27. Сила движения велосипедиста массы 80 кг пропорциональна скорости; коэффициент пропорциональности $\alpha = 2$. Найдите закон движения велосипедиста, если начальная скорость была равна 2 м/с, а расстояние, пройденное за это время 5 *м*. какое расстояние пройдет велосипедист за минуту?

Решение. Движение велосипедиста описывается дифференциальным уравнением

$$ma = F = \alpha v \quad \Rightarrow \quad mS'' = \alpha S' \quad \Rightarrow \quad mS'' - \alpha S' = 0.$$

Характеристическое уравнение $k^2 - \frac{\alpha}{m} k = 0 \quad \Rightarrow \quad k_{1,2} = 0;\ \frac{\alpha}{m}$. Общее решение

$S(t) = C_1 + C_2 e^{\alpha t/m}$. Тогда скорость $S'(t) = v(t) = \frac{\alpha}{m} C_2 e^{\alpha t/m}$. применяя

начальные условия $\begin{cases} S(0) = 5 \\ S'(0) = 2 \end{cases}$, найдем C_1 и C_2.

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 5 \\ \dfrac{\alpha}{m} C_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = -75 \\ C_2 = \dfrac{2m}{\alpha} = 80 \end{cases}.$$

Таким образом, закон движения велосипедиста описывается уравнением

$$S(t) = 80e^{0,025t} - 75.$$

Через 60 свелосипедист проедет $S(60) = 80e^{0,025 \cdot 60} - 75 \approx 284$*м*.

Ответ: 284.

Задача 28. Автомобиль массой 2100 *кг* движется с некоторым ускорением. Известно, что сила тяги двигателя его равна 1500 *Н*. Найдите закон движения автомобиля, если коэффициент силы трения между колесами автомобиля и дорогой равен 0,02. Какое расстояние проедет автомобиль за 2 часа после начала движения, если начальная скорость его была равна 0,2 *км/ч*.

Решение. Выполним чертеж к задаче (рис. 42). На автомобиль действуют 4 силы: сила тяжести, сила трения, сила тяги и сила опоры. Согласно второму закону Ньютона, запишем уравнение для данной системы: $m\bar{a} = m\bar{g} + \bar{N} + \bar{F}_{тр} + \bar{F}_{тяги}$.

Найдем проекции указанных сил на оси координат:

$$\begin{cases} Oy: \quad 0 = -mg + N \\ Ox: \quad ma = -F_{тр} + F_{тяги} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N = mg \\ F_{тр} = kN \\ ma = -kN + F_{тяги} \end{cases} \Rightarrow mS''(t) = -kmg + 1500.$$

Получили ЛНДУ второго порядка, дважды интегрируя которое находим общее решение.

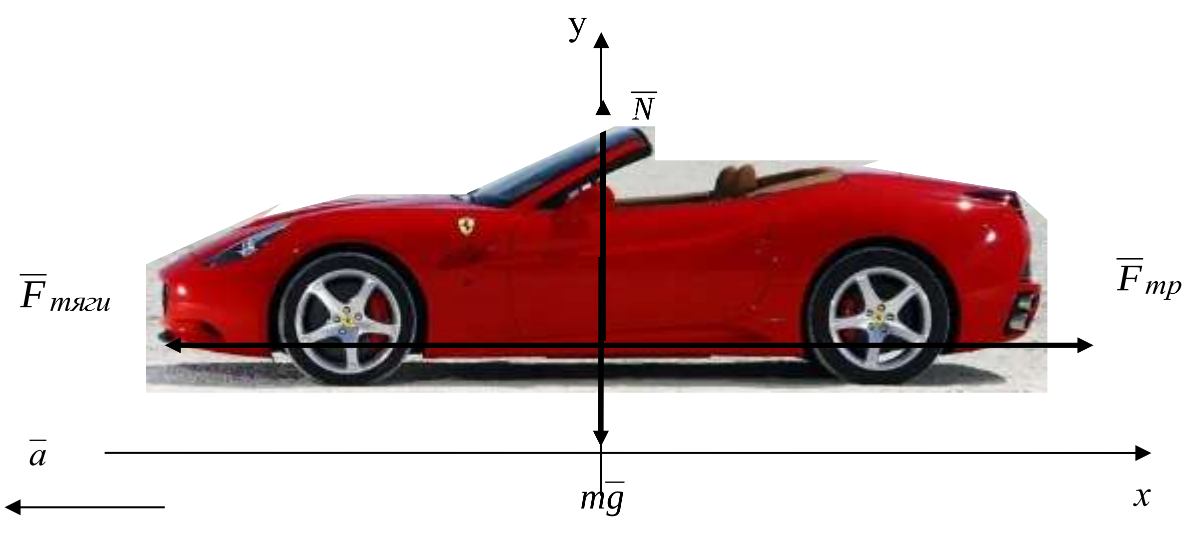


Рис. 42 Автомобиль, совершающий движение с ускорением

$$S''(t) = -0{,}02 \cdot \frac{0{,}0098}{3600} + \frac{1500}{2100} \quad \Rightarrow \quad S''(t) = 0{,}71 \Rightarrow S'(t) = 0{,}71t + C_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad S(t) = 0{,}36t^2 + 200.$$

Таким образом, автомобиль движется по закону $S(t) = 0{,}36t^2 + 200$, и через 2 часа он пройдет 243,2 м.

Ответ: 243,2.

Задача 29. Автомашина массой 3 *т*движется по выпуклому мосту, радиус кривизны которого равен 300 м. С какой силой давит автомашина на мост, проезжая через его середину?

Решение.

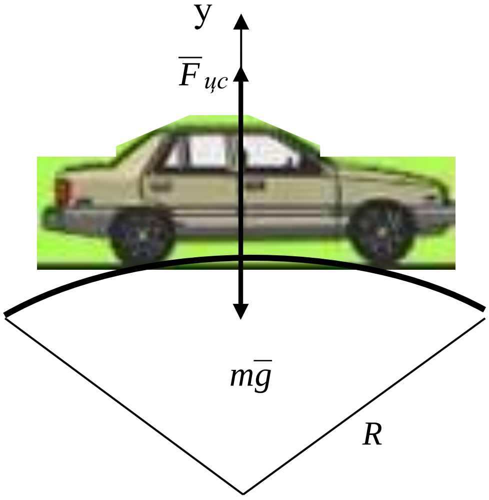


Рис. 43 Движение автомобиля по выпуклому мосту

На автомашину, движущуюся по выпуклому мосту, действуют сила тяжести $m\overline{g}$ и центростремительная $\overline{F}_{цс}$.

Следовательно, $m\overline{a} = m\overline{g} + \overline{F}_{цс} \Rightarrow$

$$ma = mg - \frac{mv^2}{R}, \text{ где } \overline{F}_{цс} = \frac{mv^2}{R}.$$

$$a = g - \frac{v^2}{R} \quad \Rightarrow \quad S'' = g - \frac{(S')^2}{R}.$$

Получили ДУ второго порядка, в котором явно отсутствует независимая переменная.

Применяя соответствующую подстановку: $\begin{cases} S'(t) = p \\ S''(t) = p \cdot \dfrac{dp}{dt} \end{cases}$, при решении таких уравнений, получаем

$$p \cdot p' = g - \frac{p^2}{R} \quad \Rightarrow \quad p' + \frac{p}{R} = \frac{g}{p}.$$

Последнее уравнение является уравнением Бернулли, которое решается с помощью подстановки: $\begin{cases} p = n \cdot m \\ p' = n'm + nm' \end{cases}$. Выполним замену

$$n'm+nm'+\frac{nm}{R}=\frac{g}{nm}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}m'+\dfrac{m}{R}=0\\ n'm=\dfrac{g}{nm}\end{cases}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}m=e^{-t/R}\\ n=\sqrt{gR\,e^{2t/R}+C}\end{cases}.$$

Тогда $p=S'(t)=v(t)=e^{-t/R}\cdot\sqrt{gR\,e^{2t/R}+C}$, начальная скорость

$$v(0)=\sqrt{gR+C}=10\quad\Rightarrow\quad C=-2840;\;\; v(t)=e^{-t/R}\cdot\sqrt{gR\,e^{2t/R}-2840};$$

скорость в момент времени $t=1c$

$$V(1)=e^{-1/R}\cdot\sqrt{gR\,e^{2/R}-2840}=e^{-1/300}\cdot\sqrt{2940-2840}=\sqrt{100}=10\,м/с.$$

Следовательно, автомашина давит на середину моста с силой

$$F=mg-\frac{mv^2}{R}=m\left(g-\frac{v^2}{R}\right)=3000\left(9{,}8-\frac{100}{300}\right)=28400\,Н.$$

Ответ: 28400.

Рассмотрим механическую задачу о тормозном пути автомобиля. Напомним, что тормозной путь транспортного средства – это путь, который проходит транспортное средство от начала торможения до его полной остановки. Известно, что тормозной путь транспортного средства зависит от многих факторов: скорости движения, дорожного покрытия, погодных условий, состояния колес и тормозной системы, пути, за время которого срабатывает тормоз, способа торможения, и что немаловажно, от реакции водителя (рис. 44). При этом не следует путать тормозной путь с остановочным, который складывается из пути реакции водителя и тормозного пути (рис. 45).

Рис. 44 Тормозной путь транспортного средства

Задача 30. При резком нажатии на тормоз, колеса автомобиля заблокировались. Прежде чем автомобиль полностью остановился, сработала работа силы трения. Определите тормозной путь автомобиля, если до срабатывания тормоза он двигался со скоростью 60 км/ч, а после он проехал еще расстояние 14 *м*; коэффициент трения между колесами и дорожным покрытием (асфальтом) был равен 0,7; движение автомобиля происходило в сухую погоду по прямолинейной и горизонтальной дорожной поверхности (рис. 46).

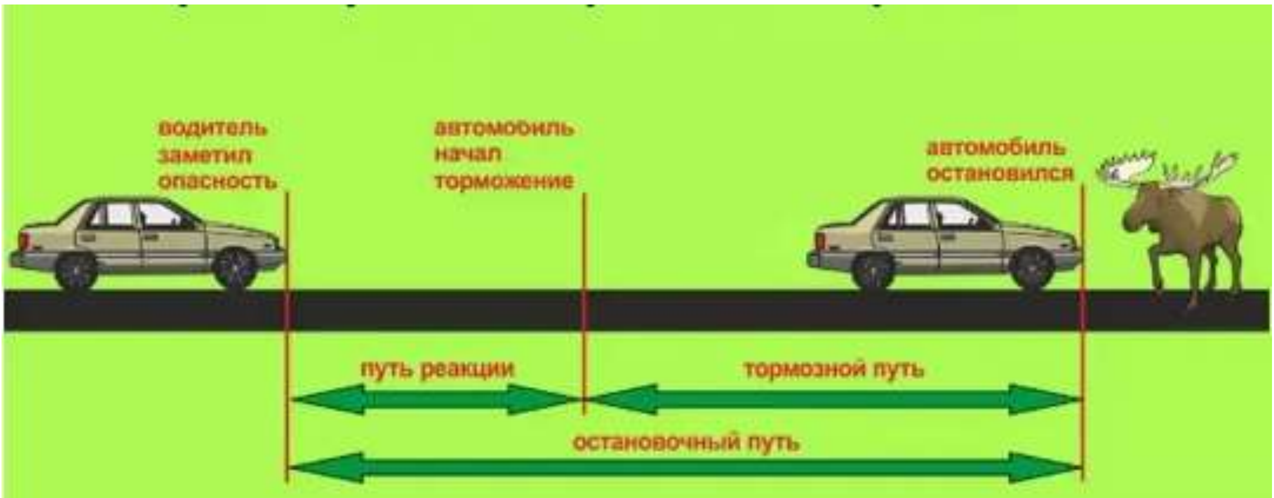


Рис. 45 Остановочный путь транспортного средства

Решение. Пусть $S(t)$ *м* – тормозной путь автомобиля, зависящий от времени t. После того, как сработала тормозная система, т.е. нажата педаль тормоза, автомобиль некоторое время еще продолжал движение по инерции. Поэтому второй закон Ньютона, в данном случае, будет иметь вид

$$m\overline{a} = m\overline{g} + \overline{N} + \overline{F}_{тр} + \overline{S}.$$

Проецируя силы, действующие силы на автомобиль на оси координат, получим:

$$\begin{cases} Oy:\ 0 = -mg + N \\ Ox:\ ma = -F_{тр} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N = mg \\ F_{тр} = -ma \\ F_{тр} = \mu N = \mu mg \end{cases} \Rightarrow a = -\mu g.$$

Последнее равенство равносильно дифференциальному уравнению $S'' = -6{,}86$, т.е. ускорение движения автомобиля составляет $6{,}86$ *м/с*^{2}, тогда скорость будет равна $v(t) = -6{,}86t + C_1$ *м/с*, следовательно, $S(t) = -3{,}43t^2 + C_1 t + C_2$. При начальных условиях $S(0) = 14$ *м*,

$S'(0) = 60\ км/ч = 16{,}7\ м/с$, определяем $C_1 = 16{,}7,\ C_2 = 14$. Тогда $S(t) = -3{,}43t^2 + 16{,}7t + 14$.

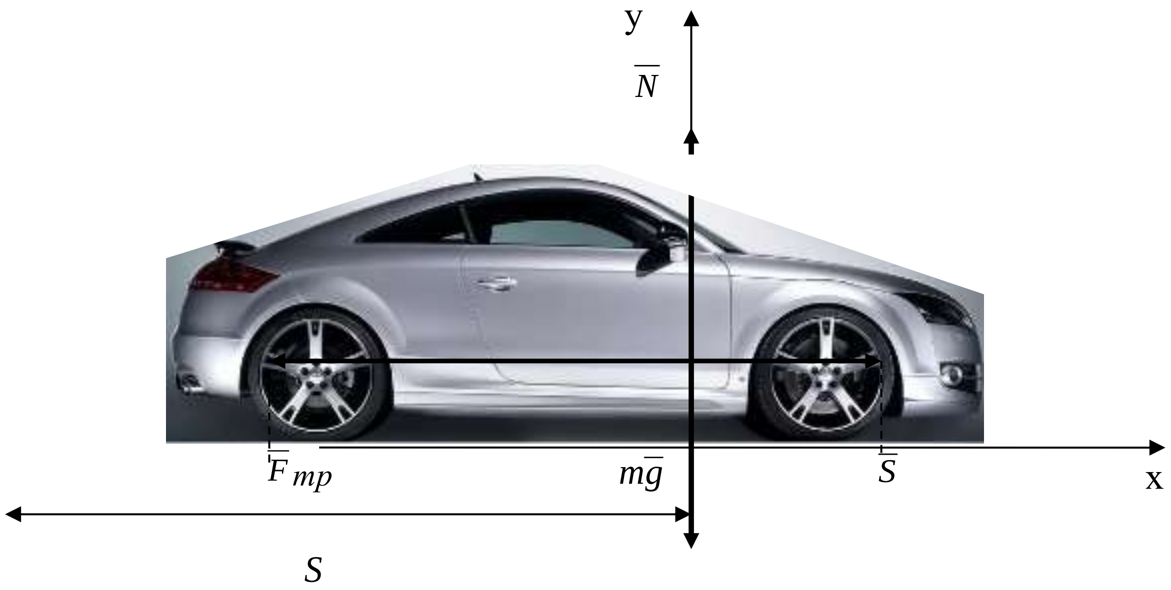


Рис. 46 Автомобиль, совершающий движение по горизонтальной поверхности

Ответ: $S(t) = -3{,}43t^2 + 16{,}7t + 14.$

Задача 31. Студентов энергетического факультета заинтересовал вопрос: по какому закону происходит теплообмен между предметами разной температуры и через какое время холодное тело приобретает температуру окружающей его среды. Для этого они решили провести эксперимент. Взяли бутылку с ледяной водой, которая хранилась в морозильной камере при температуре $-15^\circ C$, и оставили ее в помещении при комнатной температуре $20^\circ C$. Спустя 2 часа температура воды в бутылке стала равной $3^\circ C$. Найти закон изменения температуры, и время, по истечении которого температура воды в бутылке достигнет комнатной.

Решение. Один из студентов, не дожидаясь конца эксперимента, применил знания физики и решил эту задачу с помощью дифференциального уравнения. Из курса физики ему известно, что скорость изменения температуры тела пропорциональна разности между температурой нагреваемого тела и температуры воздуха.

Пусть T – температура воды в бутылке есть функция от времени t, т.е. $T = T(t)$. Тогда изменение температуры тела T подчиняется закону

$$T' = k \cdot \left(T + T_{возд}\right) \ \Rightarrow\ T' = k \cdot (T + 20) \ \Rightarrow\ \frac{dT}{T + 20} = kdt,$$

где k – коэффициент пропорциональности. Общим решением ДУ является функция $T(t,C)=C\cdot e^{kt}-20$. Воспользуемся условиями Коши: $T(0)=-15$, $T(2)=3$ и найдем значения C и k. Составим систему:

$$\begin{cases}-15=C\cdot e^{k\cdot 0}-20\\ 3=C\cdot e^{k\cdot 2}-20\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}C=5\\ e^{2k}=4{,}6\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}C=5\\ 2k=ln4{,}6\Rightarrow k=0{,}763.\end{cases}$$

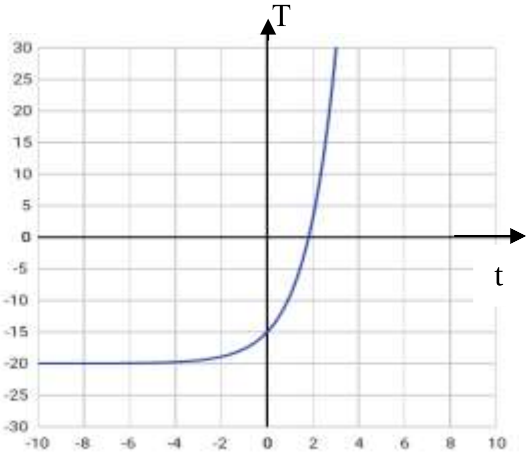


Рис. 47 График функции $T(t)=5e^{0{,}763t}-20$.

Следовательно, частным решением данного ДУ будет функция $T(t)=5\cdot e^{0{,}763t}-20$ (рис. 47). Теперь, подставив в полученную функцию вместо $T=20$, найдем, через какое время температура воды в бутылке станет равной $20^\circ C$.

$$20=5\cdot e^{0{,}763t}-20 \Rightarrow e^{0{,}763t}=8\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 0{,}763t=ln8 \Rightarrow t\approx 2{,}73.$$

Таким образом, примерно через 3 часа 13 мин вода в бутылке станет комнатной температуры.

Ответ: 3ч 13 мин.

Задача 32. Студенты инженерного факультета поспорили: какая вода замерзает быстрее, холодная или горячая? Они провели следующий эксперимент: бутылку с горячей и холодной водой температуры $50^\circ C$ и $2^\circ C$ соответственно, положили в морозилку на 1 час. Когда через час они вынули бутылки, то заметили, что бутылка с горячей водой превратилась в лед – $-10^\circ C$, а с холодной – не полностью $-3^\circ C$. Требуется найти законы изменения температуры в каждой бутылке, а также время, через которое горячая вода достигнет температуры $-3^\circ C$, а холодная – $-10^\circ C$, если температура в морозильной камере составляла $-18^\circ C$.

Решение. Теперь студенты знают, что горячая вода остывает быстрее, чем холодная. Далее приведем их дальнейшие рассуждения.

Изменение температуры и горячей, и холодной воды происходит по одному и тому же закону:

$$T'=k\cdot\left(T+T_{возд}\right) \Rightarrow T'=k\cdot(T+18) \Rightarrow \frac{dT}{T+18}=kdt,$$

общим решением которого является функция

$T(t,C) = C \cdot e^{kt} - 18. (41)$

Теперь для каждой воды рассуждения приведем отдельно (табл. 4).

Таблица 4. Закон изменения температуры горячей и холодной воды при конкретных данных

Горячая вода	***Холодная вода***
Начальные условия: $T(0)=50$, $T(1)=-10$. Подставив в общее решение (41) данные, получим $$50 = C\cdot e^{k\cdot 0} - 18.$$ Отсюда $C = 68$, тогда $T(t) = 68\cdot e^{kt} - 18.$ Далее найдем коэффициент k при условии, что через час температура стала $-10^\circ C$: $-10 = 68\cdot e^{k} - 18.$ Отсюда $$e^{k} = 0{,}118 \;\Rightarrow\; k = ln0{,}118 \approx 2{,}14.$$ Следовательно, температура горячей воды изменялась в соответствии с законом $$T(t) = 68\cdot e^{-2{,}14t} - 18.$$ Теперь осталось найти, через какое время вода в бутылке станет $-3^\circ C$. $$-3 = 68\cdot e^{-2{,}14t} - 18 \;\Rightarrow$$ $$\Rightarrow\; e^{-2{,}14t} = 0{,}221 \;\Rightarrow\; t \approx 0{,}7.$$ Таким образом, примерно через 42 мин горячая вода станет температуры $-3^\circ C$.	Аналогично, для холодной воды имеем начальные условия: $T(0)=2$, $T(1)=-3$. Подставив в функцию (41) значение при $t=0$ $T=2$, получим $$2 = C\cdot e^{0} - 18.$$ Отсюда $C=20$, тогда $T(t) = 20\cdot e^{kt} - 18.$ Коэффициент k для холодной воды будет определяться исходя из условия $T(1)=-3$: $$15 = 20\cdot e^{k} \;\Rightarrow\; k = ln0{,}75 \approx -0{,}29.$$ Следовательно, температура холодной воды изменялась по закону $$T(t) = 20\cdot e^{-0{,}29t} - 18.$$ Тогда температура $-10^\circ C$ стала через: $$-10 = 20\cdot e^{-0{,}29t} - 18 \;\Rightarrow\; t \approx 3{,}16,$$ 3ч 16 мин.

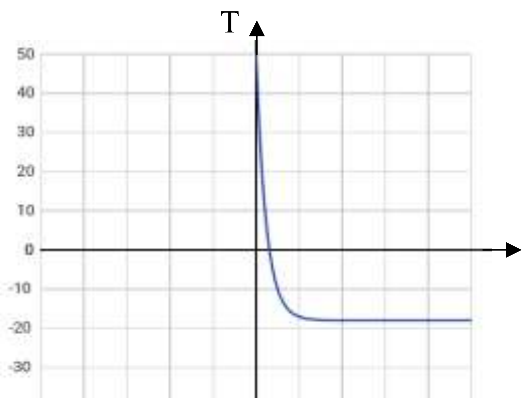


Рис. 48 График функции $T(t) = 68\cdot e^{-2{,}14t} - 18.$

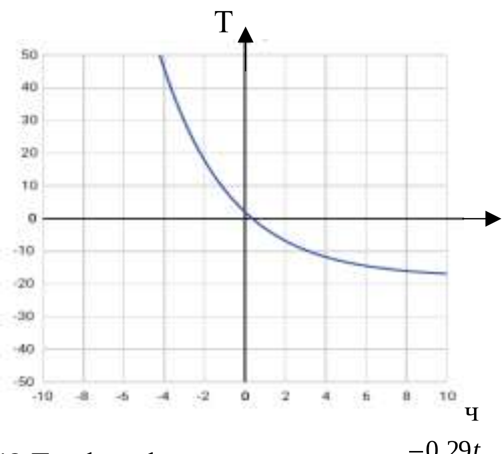


Рис. 49 График функции $T(t) = 20\cdot e^{-0{,}29t} - 18.$

На рис. 48 и 49 изображены графики функции $T(t)$ для горячей и холодной воды соответственно.

2.3 Приложения дифференциальных уравнений в экономике

Поскольку понятие дифференциальных уравнений неразрывно связано с понятием производной, то уместным будет рассмотреть некоторые экономические понятия, определяющиеся с помощью производной.

В экономике существуют такие понятия как «предельные величины». К ним относятся: предельная выручка, полезность, производительность, предельный доход, продукт и др., которые характеризуют не состояние, а скорость изменения данного экономического объекта или процесса относительно времени или другого экономического объекта (процесса) [7, с. 179].

Издержки производства. Пусть издержки производства выражаются функцией $y = y(x)$, где x – количество выпускаемой продукции. Тогда $y'(x)$ будет выражать предельные издержки производства, а заодно приблизительно характеризовать прирост переменных затрат на производство дополнительной единицы продукции. В свою очередь, средние издержки будут подчиняться закону $\frac{y'(x)}{x}$.

Производительность труда. Предположим, что объем произведенной продукции на предприятии выражается функцией от времени $u = u(t)$. Тогда производная $u'(t)$ будет характеризовать производительность труда в момент времени t.

Функция потребления и сбережения. Обозначим через n – национальный доход, $S(n)$ – функция сбережения, $P(n)$ – функция потребления. Тогда доход страны будет выражаться формулой

$$n = P(n) + S(n). \tag{42}$$

Дифференцируя обе части неявной функции (42) по n, получим

$$P'(n) + S'(n) = 1. \tag{43}$$

в котором $P'(n)$ характеризует предельную склонность к потреблению, $S'(n)$ – предельную склонность к сбережению.

Эластичность. Понятие «эластичность» характеризует степень реакции изменения одной величины на изменение другой.

Определение 1. Эластичностью функции $E_x(y)$ называется предел отношения относительного приращения функции y к относительному приращению переменной x при $\Delta x \to 0$:

$$E_x(y) = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta y}{y} : \frac{\Delta x}{x}\right) = \frac{x}{y}\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x}{y}\cdot y', \tag{44}$$

в котором $T(x) = \frac{y'}{y}$ определяет относительную *скорость изменения (темп) функции*.

Эластичность функции показывает приближенно, на сколько процентов изменится функция $y(x)$ при изменении независимой переменной x на 1%.

Если требуется провести анализ между спросом и предложением на какой-либо товар, то прибегают к понятию ценовой эластичности, которая показывает реакцию изменения спроса или предложения при изменении цены p на 1 %.

В зависимости от значения эластичности спроса

$$E_p(y) = \frac{pdy}{ydp} = p\cdot\frac{y'}{y} \ . \tag{45}$$

можно делать вывод о характере спроса:

а) если эластичность спроса $\left|E_p(y)\right| > 1$, то спрос будет *эластичным*;

б) если эластичность спроса $\left|E_p(y)\right| = 1$, то спрос будет *нейтральным*;

в) если эластичность спроса $\left|E_p(y)\right| < 1$, то спрос будет *неэластичным* относительно цены p.

Рассмотрим на примерах применение дифференциальных уравнений в экономической теории.

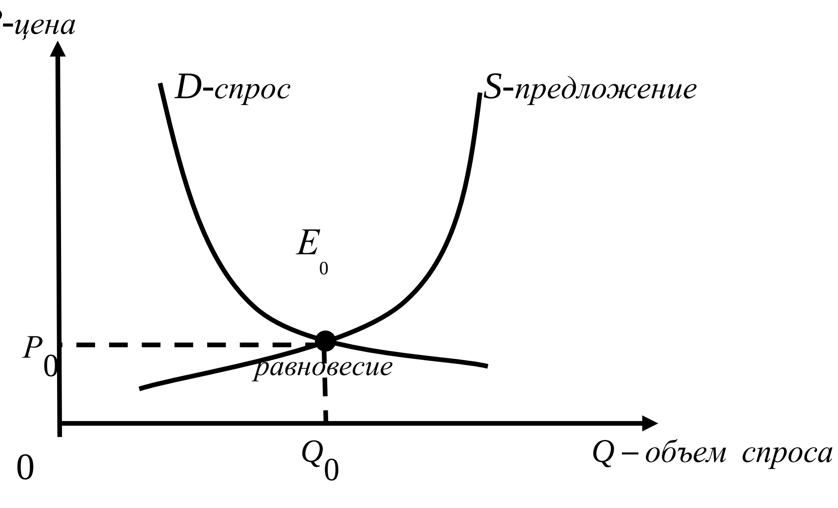


Рис. 50 Кривая спроса и предложения. Равновесная цена.

Задача 33. Найти функцию спроса, если $E_p(y) = -2y$, $y(e) = 0{,}25$.

Решение. По условию задачи требуется найти функцию спроса $y = y(p)$. Для этого воспользуемся уравнением (45):

$$-2y = p \cdot \frac{y'}{y}.$$

Получили ДУ 1 порядка с разделяющимися переменными, преобразовав которое приведем к ДУ с разделенными переменными и найдем общее решение:

$$-\frac{2dp}{p} = \frac{dy}{y^2} \quad \Rightarrow \quad -2ln|p| = -\frac{1}{y} + C \quad \Rightarrow \quad y = \frac{1}{C + 2lnp}.$$

Далее, применив условие Коши: $y = 0{,}25$, $p = e$, найдем $C = 2$.

Таким образом, частным решением будет являться функция $y = \dfrac{1}{2(1 + lnp)}$ – функция спроса, зависящая от цены.

Ответ: $y = \dfrac{1}{2(1 + lnp)}$.

В более сложных ситуациях функции спроса и предложения зависят не только от цены, но и от скорости ее изменения.

Задача 34. Функции спроса и предложения задаются соответствующими уравнениями $y = 10 - 3p + 2\dfrac{dp}{dt}$, $x = 15 - 2p + \dfrac{dp}{dt}$ Найти зависимость равновесной цены от времени t (рис. 50), если в начальный момент $p = 5$.

Решение. Равенство выражений спроса и предложения определит равновесную цену.

$$10 - 3p + 2\frac{dp}{dt} = 15 - 2p + \frac{dp}{dt} \quad \Rightarrow \quad \frac{dp}{dt} = p + 5.$$

Получили линейное неоднородное ДУ первого порядка, общим решением которого является функция $p = Ce^t - 5$. Учитывая начальные условия: при $t = 0$ $p = 5$, найдем $C = 10$.

Следовательно, равновесная цена изменяется по закону $p = 10e^t - 5$.

Если вычислить $\lim\limits_{t \to \infty} p = \infty$, то можно сказать, что цена не обладает устойчивостью.

Ответ: $p = 10e^t - 5$.

Модель рынка с прогнозируемыми ценами. В экономике существует тривиальный вариант связи между спросом и предложением, когда они зависят только от цены. Однако, в реальной жизни, чаще всего приходится сталкиваться с ситуацией, когда спрос и предложение зависят еще и от ценообразования и курса изменения цены. Законы изменения этих характеристик описываются дифференциальными уравнениями второго порядка, в которых неизвестная характеристика зависит от цены, которая, в свою очередь, зависит от времени t и непрерывно дифференцируема по времени.

Рассмотрим задачу, которая демонстрирует связь между спросом и предложением с помощью ДУ.

Задача 35. Функции спроса и предложения задаются следующими дифференциальными уравнениями и зависят от цены и ее изменений. Требуется установить закон изменения цены от времени t, если в начальный момент времени цена составляла 5,4 , а тенденция ее изменения $p' = 4{,}2$.

$$D(t) = 4p'' - 3p' + 2p - 6 \text{ – функция спроса;}$$

$$S(t) = 3p'' + 5p' - 3p + 1 \text{ – функция предложения.}$$

Решение. Прежде чем перейти к решению задачи, проведем анализ приведенных функций. В функции спроса $D(p)$ коэффициент при второй производной от цены p'' положительный, это означает, что спрос растет благодаря темпу изменения цены, в то время как коэффициент при первой производной p' отрицательный, что свидетельствует, что увеличение цены ведет к снижению покупательской способности. Анализируя функцию предложения, можем утверждать, что спрос усиливается, чем предложение, так как коэффициент при второй производной p'' также положителен, но меньше коэффициента, стоящего в функции спроса, но в то же время рост цены увеличивает предложение, поскольку коэффициент при p' также положителен. В обоих случаях темп изменения цены растет $p'' > 0$.

Итак, найдем равновесную цену, приравняв правые части обеих функций.

$$4p'' - 3p' + 2p - 6 = 3p'' + 5p' - 3p + 1 \quad \Rightarrow$$

$$p'' - 8p' + 5p = 7.$$

Получили ЛНДУ второго порядка с постоянными коэффициентами. Как известно, общее решениенаходится по формуле (19).

Для этого составим характеристическое уравнение, соответствующее ЛОДУ:

$$k^2 - 8k + 5 = 0,$$

корни которого равны $k_{1,2} = \dfrac{8 \pm 2\sqrt{11}}{2} \approx -0{,}68;\ 7{,}32.$

Тогда общее решение ЛОДУ примет вид $p_{лоду} = C_1 e^{-0,68t} + C_2 e^{7,32t}$, где $C_1, C_2 - const$.

Далее найдем частное решение ЛНДУ по формуле $p_ч = A$ – установленная цена, $A - const$. Найдя производные $p'_ч = p''_ч = 0$ и подставив их в данное ДУ, определим $A = 1{,}4$, т.е. частное решение уравнения имеет вид: $p_ч = A$.

Таким образом, общим решением ДУ является функция

$$p_{лнду} = C_1 e^{-0,68t} + C_2 e^{7,32t} + 1{,}4$$

Найдем производную $p'_{лнду}$.

$$p'_{лнду} = -0{,}68 C_1 e^{-0,68t} + 7{,}32 C_2 e^{7,32t}.$$

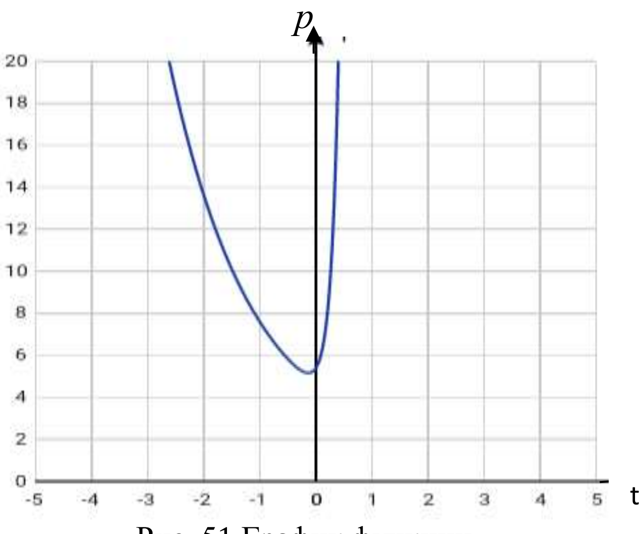


Рис. 51 График функции
$p_ч = 3{,}135 e^{-0,68t} + 0{,}865 e^{7,32t} + 1{,}4$

Далее воспользуемся начальными условиями и найдем произвольные постоянные C_1, C_2, решив систему

$$\begin{cases} C_1 + C_2 + 1{,}4 = 5{,}4 \\ -0{,}68 C_1 + 7{,}32 C_2 = 4{,}2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} C_1 = 4 - C_2 \\ 8C_2 = 6{,}92 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 3{,}135 \\ C_2 = 0{,}865. \end{cases}$$

При полученных данных частное решение ДУ примет вид

$$p_{частн} = 3{,}135e^{-0{,}68t} + 0{,}865e^{7{,}32t} + 1{,}4.$$

На рис. 52 изображен график функции частного решения ДУ

$$p_{частн} = 3{,}135e^{-0{,}68t} + 0{,}865e^{7{,}32t} + 1{,}4.$$

Изменение объема продукции, реализованной к моменту времени t.

Рост выпуска дефицитной продукции. В повседневной жизни случаются ситуации, когда наблюдается дефицит на какой-либо товар в условиях ненасыщаемости рынка. Наша задача: найти аналитически закон роста выпуска дефицитной продукции.

К примеру, народонаселение испытывает нехватку в таком виде товара, как устройство для цифрового телевидения. Как известно, с 1 января 2019 г Россия перешла на цифровое телевещание. Предположим, что естественным образом народ стал испытывать нехватку в цифровых приставках.

Обозначим через $y = y(t)$ – объем продукции, произведенной в момент времени t. Считая, что в момент времени t идет производство и одновременно реализация продукции по фиксированной цене p ден. ед, определим, что за это время объем выручки от продажи составил $p \cdot y(t)$ ден. ед. Поскольку товар относится к ряду дефицитных, то предприятие надумало расширить объемы производства с целью увеличения прибыли. А сделает оно это за счет финансовых вливаний, т.е. за счет привлечения инвестиций, которые будут составлять n -ю часть от выручки в момент времени t. Тогда объем инвестиции в момент времени t будет составлять

$$I(t) = \frac{p}{n} \cdot y(t).$$

За счет увеличения объема производства увеличится выручка, но с учетом инвестиций изменение объема производства будет происходить согласно соотношению

$$y' = m \cdot I(t) \;\Rightarrow\; y' = m \cdot \frac{p}{n} y(t) = mpl \cdot y(t) \qquad (46)$$

или

$$y'(t) = k \cdot y, \qquad (47)$$

где $k = mpl$, m – норма инвестиций, p – продажная цена, l – коэффициент пропорциональности между величиной инвестиций и скоростью выпуска продукции [8, с. 304].

Таким образом, решение задачи свелось к решению ДУ (47).
Общим решением уравнения (47) является функция

$$y(t,C) = Ce^{kt} . \qquad (48)$$

Задача Коши для уравнения (47) имеет вид

$$\begin{cases} y'(t) = ky(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} . \qquad (49)$$

Частным решением уравнения (47) является функция

$$y(t) = y_0 e^{k(t-t_0)} . \qquad (50)$$

Следует отметить, что с помощью уравнения (47) описываются рост населения некоторой местности, динамика роста цен при постоянной инфляции, процесс распространения рекламы, эпидемии гриппа и др.

Задача36. Выяснить, по истечении какого промежутка времени, объем реализованной продукции удвоится по сравнению с первоначальным, если значение коэффициента пропорциональности k в уравнении $y'(t) = k \cdot y(t)$, равно 0,1. На сколько процентов следует увеличить норму инвестиций, чтобы промежуток времени, необходимого для удвоения объема реализованной продукции уменьшился на 20%. [8, с. 304]

Решение. Согласно формуле (50), общим решением данного ДУ является функция $y(t) = y_0 \cdot e^{k(t-t_0)}$. По условию задачи имеем: $t_0 = 0;\; k = 0{,}1;\; y = 2y_0$. Тогда $2y_0 = y_0 \cdot e^{0{,}1t} \quad \Rightarrow \; t \approx 6{,}93.$

Теперь полагая $t_1 = 0{,}8t$, получаем $k_1 = \dfrac{k}{0{,}8} = 1{,}25k$.

Таким образом, примерно через 7 ед. времени норму инвестиций следует увеличить на 25%.

через

Ответ: 7.

Задача 37. В условиях ненасыщаемости рынка найти объем производства по истечении 3 месяцев, если в начальный момент времени объем производства $y(0) = 26$ усл. ед. при норме инвестиций 0,5, продажной цене, равной 0,25 ден. ед и $l = 0{,}2$. [8, с. 306]

Решение. Для решения данной задачи применим ДУ (46). Подставив в него исходные данные: $m = 0{,}5$, $p = 0{,}25$, $l = 0{,}2$, получим ДУ

$$y' = 0{,}5 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}2y \quad \Rightarrow \quad y' = 0{,}025y \quad \Rightarrow \frac{dy}{y} = 0{,}025dt,$$

частным решением которого, согласно формуле (50), является функция $y(t) = 26 \cdot e^{0{,}025t}$. Тогда через 3 месяца объем производства достигнет величины $y(3) = 26 \cdot e^{0{,}025 \cdot 3} \approx 28{,}025$.

Ответ: $\approx 28{,}025$.

Задача 38. Предполагая, что цена на товар задается функцией $p(y) = \dfrac{4 + 5e^{-y}}{y}$, а также зная, что норма инвестиций составляет 0,65, $l = 0{,}3$, а Найти зависимость объема $y = y(t)$ реализованной продукции от времени, если начальный объем продукции составлял $y_0 = 2$.

Решение. Для решения данной задачи опять же применим ДУ (46), подставляя в него исходные данные: $m = 0{,}65$, $l = 0{,}3$, а вместо p функцию $p = \dfrac{4 + 5e^{-y}}{y}$.

$$y' = 0{,}65 \cdot 0{,}3 \cdot \frac{4 + 5e^{-y}}{y} \cdot y \quad \Rightarrow \quad y' = 0{,}195\left(4 + 5e^{-y}\right) \quad \Rightarrow \frac{e^{y} dy}{4e^{y} + 5} = 0{,}195dt.$$

Интегрируем обе части уравнения, причем левую часть интегрируем методом подстановки: $\left\{ \begin{array}{l} 4e^{y} + 5 = s \\ e^{y} dy = \dfrac{ds}{4} \end{array} \right\}$. В результате получим

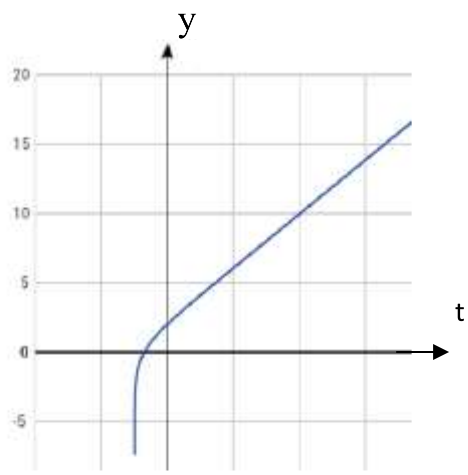
$$\frac{1}{4} ln(4e^{y} + 5) = 0{,}195t + C \quad \Rightarrow ln(4e^{y} + 5) = 0{,}78t + C \Rightarrow e^{y} = \frac{Ce^{0{,}78t} - 5}{4}.$$

Применяя начальные условия $y(0) = 2$, найдем $C \approx 34{,}556$.
Таким образом, частное решение ДУ примет вид

$$y = ln\left(8{,}639e^{0{,}78t} - 1{,}25\right),$$

которое будет характеризовать закон изменения объема продукции от времени (рис. 52).

Ответ: $y = ln\left(8{,}639e^{0{,}78t} - 1{,}25\right)$.



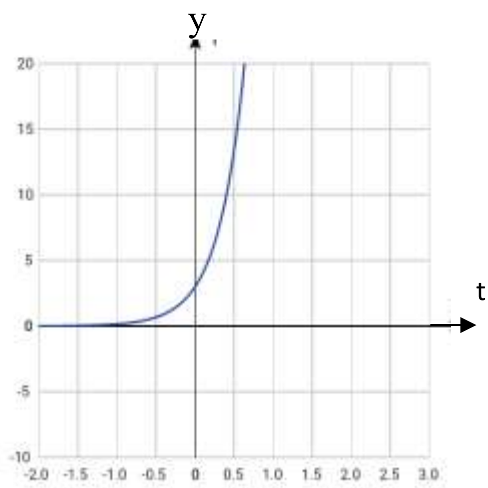


Рис. 52 График функции $y(t) = ln\left(8{,}639e^{0{,}78t} - 1{,}25\right)$ Рис. 53 График функции $y(t) = \dfrac{3000}{1 + 999e^{-3t}}$

Задача 39. Найти функцию спроса на некоторый молочный товар, если эластичность постоянна и равна $E_p = -0{,}5$, а также известно, что в начальный момент времени при цене товара 5 ден. ед., спрос на товар составлял 2 усл ед.

Решение. Для того, чтобы решить данную задачу, прибегнем к ДУ (45).

$$-\frac{1}{2} = p \cdot \frac{y'}{y} \quad \Rightarrow \quad -\frac{dp}{2p} = \frac{dy}{y} \quad \Rightarrow -\frac{1}{2}ln|p| + lnC = ln|y| \quad \Rightarrow ln\left|\frac{C}{\sqrt{p}}\right| = ln|y|.$$

Отсюда определяем функцию спроса $y(p,C) = \dfrac{C}{\sqrt{p}}$. При начальных условиях $y(5) = 2$, найдем $C = 2\sqrt{5}$. Тогда $y(p) = \dfrac{2\sqrt{5}}{\sqrt{p}} \approx \dfrac{4{,}472}{\sqrt{p}}$.

Ответ: $y(p) \approx \dfrac{4{,}472}{\sqrt{p}}$.

Задача 40. Эластичность спроса задается соотношением $E_p = \dfrac{y - 100}{y}$, $0 < y < 100$. Найти функцию спроса, если заданном спросе $y = 10$ цена товара равна 90 ден. ед.[9, с. 12]

Решение. Как и в предыдущих примерах, применим уравнение (45).

$$\frac{y-100}{y} = p\frac{y'}{y} \quad \Rightarrow \quad \frac{dp}{p} = \frac{dy}{y-100} \quad \Rightarrow \quad y = Cp + 100.$$

Так как $y(90)=10$, то $C=-1$.

Следовательно, функция спроса, в условиях данной задачи, подчиняется закону $y=100-p$.

Задача41.(О численности населения) Изменение численности населения горнорудного поселка с течением времени описывается уравнением $y'(t)=0{,}3y\cdot(2-10^{-4}y)$, где t – время (лет). В начальный момент времени население поселка составляло 500 человек. Каким оно станет через три года?[8, с. 305]

Решение. Исходя из условия задачи, получаем задачу Коши для данного ДУ: $\begin{cases} y'(t)=0{,}3y\cdot(2-10^{-4}y) \\ y(0)=500 \end{cases}$.

Ясно, что данное уравнение с разделяющимися переменными необходимо привести к виду $\dfrac{10000dy}{y^2-20000y}=-0{,}3dt$. Решив его, найдем общий интеграл $\dfrac{1}{2}ln\left|\dfrac{y-20000}{y}\right|+0{,}3t=C.$ Учитывая начальное условие, найдем значение постоянной $C=1{,}832.$ Тогда частный интеграл будет иметь вид $\dfrac{1}{2}ln\left|\dfrac{y-20000}{y}\right|+0{,}3t=1{,}832$ или частное решение $y=\dfrac{20000}{1-e^{-0{,}64t+3{,}664}}$ (рис. 54).

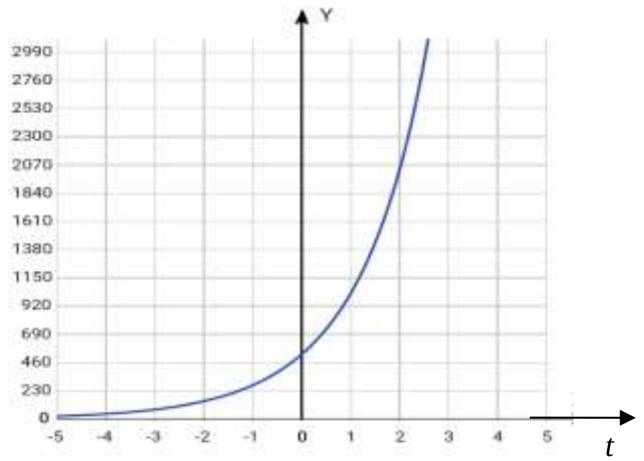


Рис. 54 График функции $y=\dfrac{20000}{1-e^{-0{,}64t+3{,}664}}$.

Чтобы определить количество населения через 3 года подставим в частный интеграл вместо $t=3$ и получим

$$\frac{1}{2}ln\left|\frac{y-20000}{y}\right|+0{,}9=1{,}832 \Rightarrow ln\left|\frac{y-20000}{y}\right|=1{,}864 \Rightarrow ln\left|1-\frac{20000}{y}\right|=1{,}864.$$

Откуда находим $y=2684{,}92\approx 2685$. Таким образом, население поселка через 3 года станет ≈ 2685 человек.

Ответ: 2685.

Задача42. В поселке с населением 3000 человек распространение эпидемии гриппа (без применения экстренных санитарно-профилактических мер) описывается уравнением $y'(t)=0{,}001y\cdot(3000-y)$, где $y=y(t)$ – число заболевших в момент времени t; t – число недель. Сколько больных будет в поселке через две недели, если в начальный момент было трое больных [8, с. 307].

Решение. Данное уравнение является уравнением с разделяющимися переменными. Приведя его к виду $\frac{1000dy}{y^2-3000y}=-dt$, найдем общее решение $y(t,C)=\frac{3000}{1+e^{-3t}C}$. Учитывая условие Коши для заданного уравнения: $y(0)=3$, получим значение $C=999$. Тогда частное решение уравнения будет иметь вид $y(t)=\frac{3000}{1+999e^{-3t}}$. Поскольку требуется найти $y(2)$, то подставляя в частное решение $t=2$, определим, что через две недели количество человек, зараженных гриппом, станет равным: $y(2)=\frac{3000}{1+999e^{-6}}\approx 863$.

Ответ: 863.

Задача 43. Известно, что рост числа $y=y(t)$ жителей некоторого района описывается уравнением $\frac{dy}{dt}=\frac{0{,}2y}{m}(m-y)$ где m – максимально возможное число жителей для данного района. В начальный момент времени число

жителей составляло 1% от максимального. Через какой промежуток времени число жителей составит 80% от максимального? [8, с. 307].

Решение. Решая данное ДУ с разделяющимися переменными, как в предыдущем примере, найдем его общий интеграл $5ln\left|\frac{y-m}{y}\right|+t=C$. При начальном условии $y(0)=0{,}01m$, найдем произвольную постоянную С:

$$5ln\left|\frac{0{,}01m-m}{0{,}01m}\right|+0=C \quad\Rightarrow\quad 5ln\left|\frac{-0{,}99}{0{,}01}\right|=C \quad\Rightarrow\quad C=5ln99\approx 22{,}976.$$

Следовательно, частный интеграл уравнения примет вид $5ln\left|\frac{y-m}{y}\right|+t=22{,}976$. Если выразить отсюда y, то получим частное решение

$$y(t)=\frac{m}{1-e^{(22{,}976-t)/5}}.$$

Пусть $m=2000$, тогда $y(t)=\frac{2000}{1-e^{(22{,}976-t)/5}}$, график которой изображен на рис. 55.

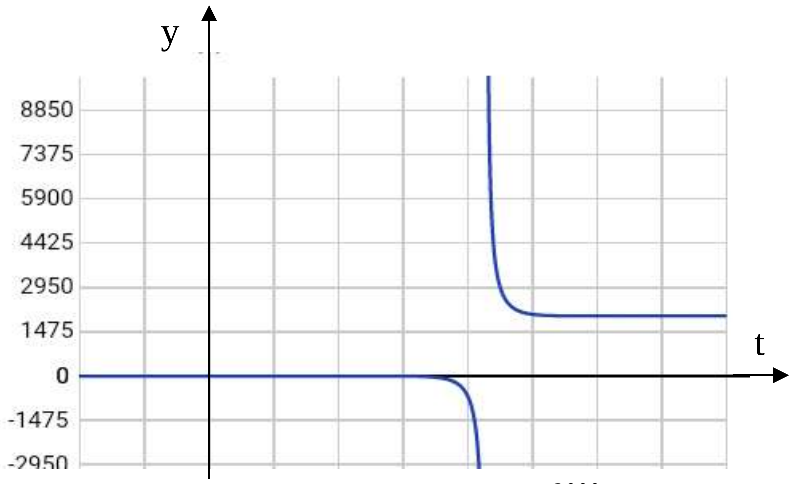


Рис. 55 График функции $y(t)=\frac{2000}{1-e^{(22{,}976-t)/5}}$

Учитывая, что требуется найти время t, при котором выполняется равенство $y(t)=0{,}8m$, то, подставляя в частный интеграл вместо y выражение $0{,}8m: 5ln\left|\frac{0{,}8m-m}{0{,}8m}\right|+t=22{,}976$, определим $t\approx 29{,}905\approx 30$.

Таким образом, примерно через 30 единиц времени число жителей составит 80% от максимального.

*Ответ:*30.

Задача 44. (Эффективность рекламы) Некая фирма подготовила для реализации новый продукт. Для его продвижения в начальный момент была проведена рекламная компания, в результате которой о новинке узнали N/λ покупателей, здесь N – общее число потенциальных покупателей новинки, $\lambda > 1$. Найдем, как будет меняться число покупателей, знающих о новинке, в зависимости от времени, учитывая, что далее информация о нем распространяется путем общения покупателей друг с другом [9, с. 6].

Решение. Обозначим $y(t)$ – число покупателей, знающих о новинке в момент времени t. Изменение этой величины будет пропорционально количеству знающих о новинке, также числу покупателей, не знающих о ней, и промежутку времени dt, за которое это изменение происходит: $dy = ky(N-y)dt$, при этом $y(0) = \dfrac{N}{\lambda}$.

Решением данного ДУ является функция $y(t,C) = \dfrac{CNe^{Nkt}}{Ce^{Nkt}-1}$.

Учитывая начальные условия: $y(0) = \dfrac{CNe^{Nk\cdot 0}}{Ce^{Nk\cdot 0}-1} = \dfrac{N}{\lambda}$, найдем значение $C = \dfrac{1}{1-\lambda}$.

Таким образом, частным решением ДУ будет являться функция

$$y(t) = \frac{N}{1+(\lambda-1)e^{-Nkt}}.$$

Полученная кривая называется *логистической кривой* (рис. 56).

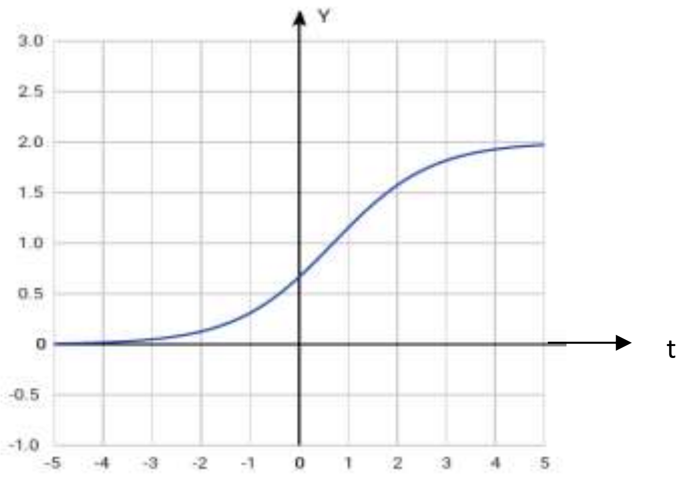


Рис. 56 График логистической кривой

По характеру поведения напоминает S-образную форму: кривая сначала растет медленно, потом быстро, а затем снова замедляет свой рост, стремясь к какому-то пределу.

Данной кривой описываются экономические процессы при анализе спроса на товары, а также биологические, в которых отражается неуклонный рост численности всех видов живых организмов, какой-либо популяции от ее начальной численности до максимального значения, после чего в какой-то период времени численность популяции не изменяется.

Математический анализ логистической кривой впервые был произведен П. Ферхульстом.

Рассмотрим эту задачу при реальных цифрах.

Задача45. (Износ / замена оборудования) Скорость обесценивания оборудования вследствие его износа пропорциональна в каждый момент времени его фактической стоимости. Известна начальная стоимость оборудования, равная $A_0 = 10000$ руб и в момент времени $t = 1$ год $A = 8000$ руб. Найдите стоимость оборудования через 2 года.

Решение. Математическая модель стоимости оборудования представляет собой ДУ

$$y'(t) = -k \cdot y(t),$$

с начальным условием $y(0) = 10000$. Частным решением которого является функция $y(t) = 1000 \cdot e^{-kt}$, тогда

$$y(1) = 10000 \cdot e^{-k} = 8000 \Rightarrow e^{k} = 1{,}25;$$

$$y(2) = 10000 \cdot e^{-2k} = \frac{10000}{1{,}25^2} = 6400\,руб.$$

Ответ: 6400.

2.4 Приложениядифференциальных уравнений в биологии, химии

Задача 46. (Модель сезонного роста). Дифференциальное уравнение первого порядка $y' = r \cdot y(t) cos t$, где $t > 0$, можно рассматривать как простую модель сезонного роста. Скорость роста популяции становится попеременно то положительной, то отрицательной, и популяция то возрастает, то убывает. Это может вызываться такими сезонными факторами, как доступность пищи. Общее решение имеет вид: $y(t) = ce^{r sin t}$.

Полагая $t=0$, получим $c=y(0)$, т.е. размер популяции в момент t есть $y(t)=y(0)e^{rsint}$ (рис. 57). Максимальный размер популяции, равный $e^{r}y(0)$, достигается при $t=\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{2},\frac{9\pi}{2},...,$ когда $sint=1$.

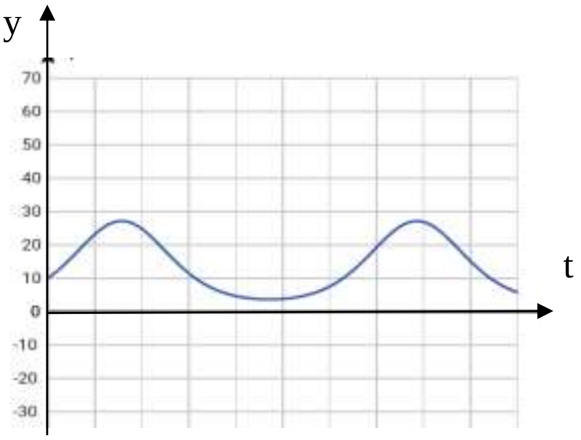


Рис. 57 График функции $y(t)=y(0)e^{rsint}$

Минимальный размер, равный $e^{-r}y(0)$, достигается при $t=\frac{3\pi}{2},\frac{7\pi}{2},\frac{11\pi}{2},...,$ когда $sint=-1$.

В этой модели размер популяции колеблется от $e^{r}y(0)$ до $e^{-r}y(0)$ с периодом в 2π. Моменты времени $t=0,2\pi,4\pi,...$ можно считать серединами сезонов наибольшей доступности пищи (летних сезонов), а моменты соответствуют серединам сезонов наибольшей нехватки пищи (зимних сезонов). Продолжительность одного года 2π соответствует ед. времени (рис. 58, 59).

Задача 47. (Модель межвидовой конкуренции) Однородная линейная система $\begin{cases} x'(t)=2x(t)-y(t) \\ y'(t)=-x(t)+2y(t) \end{cases}$ описывает взаимное влияние популяций двух конкурирующих видов на скорости их роста. Допустим, что начальные популяции насчитывают $x(0)=100$ и $y(0)=200$ особей. Требуется найти численности обоих видов в любой последующий момент времени.

Решение. Дифференцируя первое уравнение, получим $x''(t)=2x'(t)-y'(t)$.

Выразив из первого уравнения системы $y(t)=2x(t)-x'(t)$ и подставив во второе, получим $y'(t)=-x(t)+2y(t)=-x(t)+2[2x(t)-x'(t)]$.

Таким образом, $x(t)$ удовлетворяет уравнению второго порядка $x''(t)-4x'(t)+3x(t)=0$, общим решением которого является функция $x(t)=c_1e^{3t}+c_2e^t$.

Далее найдем вторую функцию $y(t)$. Для этого необходимо знать производную от найденной функции $x(t)$:

$$x'(t)=3c_1e^{3t}+c_2e^t$$

и подставим еев выражение $y(t)$:

$$y(t)=2x(t)-x'(t)=-c_1e^{3t}+c_2e^t.$$

Следовательно, нашли общее решение данной системы ДУ:

$$\begin{cases} x(t)=c_1e^{3t}+c_2e^t \\ y(t)=-c_1e^{3t}+c_2e^t. \end{cases}$$

Далее воспользуемся условиями Коши $\begin{cases} x(0)=100 \\ y(0)=200 \end{cases}$, найдем произвольные постоянные c_1 и c_2 и составим частное решение.

$$\begin{cases} c_1+c_2=100 \\ -c_1+c_2=200 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1=-50 \\ c_2=150. \end{cases}$$

Таким образом, частное решение уравнения будет иметь вид

$$\begin{cases} x(t)=-50e^{3t}+150e^t \\ y(t)=50e^{3t}+150e^t. \end{cases}$$

Вымирание первого вида происходит, когда $x(t)=0,$ т.е. $-50e^{3t}+150e^t=0$. Отсюда находим $t=\frac{ln3}{2}\approx 0{,}549$ ед. времени.

По прошествии 0,549 ед. времени второй вид продолжает расти согласно уравнению $y'(t)=2y(t)$. Его общим решением является функция $y(t)=y(t_0)e^{2(t-t_0)}$. При $t_0=0{,}549$ $y(t_0)=50e^{3t_0}+150e^{t_0}$, которое показывает рост популяции второго вида после вымирания первого (рис. 58).

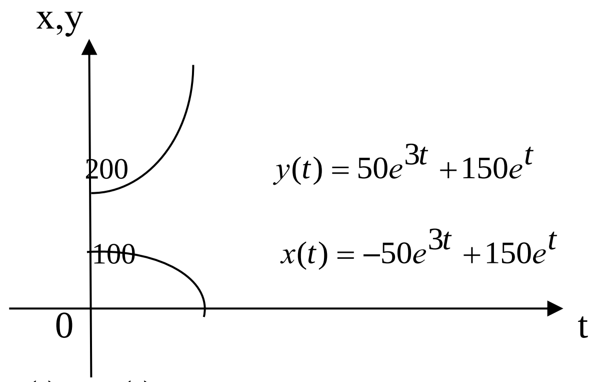


Рис. 58 Графики функций $x(t)$ и $y(t)$

Задача 48. (Внутривенное питание глюкозой). Вливание глюкозы в кровеносную систему является важной лечебной процедурой. Для изучения этого процесса определим $G(t)$ как количество глюкозы в крови пациента в момент времени t. Допустим, что глюкоза вводится в кровь с постоянной скоростью c (г/мин). В то же время она разлагается и удаляется из кровеносной системы со скоростью, пропорциональной имеющемуся количеству глюкозы. Таким образом, функция $G(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению первого порядка $\frac{dG}{dt}=c-aG,$ где $a=const>0.$

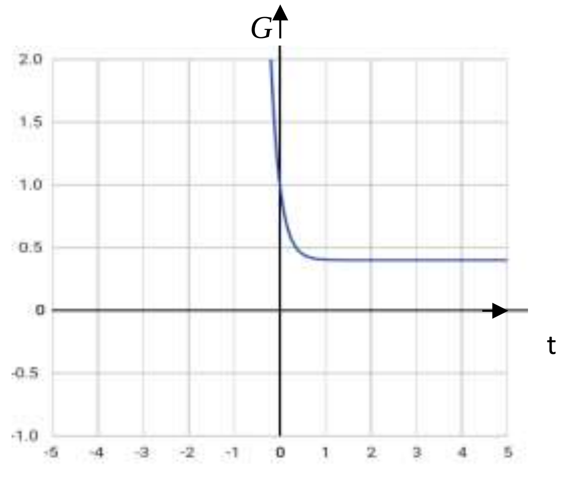


Рис. 59 График функции $G(t)=\left(G(0)-\frac{c}{a}\right)e^{-at}+\frac{c}{a}$

Общим решением ДУ является функция $G(t)=\kappa e^{-at}+\frac{c}{a}$. При $t=0$ $G(0)=\kappa+\frac{c}{a}$, тогда частным решением будет функция

$G(t)=\left(G(0)-\frac{c}{a}\right)e^{-at}+\frac{c}{a}$ (рис. 59). При $t\to\infty$ $G(t)\to\frac{c}{a}$.

Это и есть равновесное количество глюкозы в крови.

Задача 49. (Закон восстановления концентрации гемоглобина в крови)

Известно, что скорость изменения концентрации гемоглобина вкровидонора или раненого, потерявшего много крови, по истечении времени t пропорциональна оставшемуся его числу, т.е. если $y(t)$ – начальное количество гемоглобина, количество a взяли, то ($y-a$) – осталось. Тогда получим ДУ

$$y'(t)=k\cdot(y-a).$$

Это уравнение является уравнением с разделяющимися переменными. Заменив в нем производную $y'(t)$ на отношение дифференциалов переменных: $y'(t)=\frac{dy}{dt}$ и приведя его к виду $\frac{dy}{y-a}=kdt$, найдем общее решение

$$y(t,C)=a+C\cdot e^{kt},$$

что определяет закон изменения концентрации гемоглобина в крови.

Ответ: $y(t,C)=a+C\cdot e^{kt}$.

Задача 50. Скорость роста площади молодого листа виктории-регии (рис. 60), имеющего круглую форму, пропорциональна окружности листа и количеству солнечного света, падающего на лист. Последнее, в свою очередь, пропорционально площади листа и косинусу угла между направлением лучей и вертикалью. Найти зависимость между площадью листа S и временем t, если известно, что в 6 часов утра эта площадь равна 1600 $см^2$, а в 6 часов вечера того же дня – 2500 $см^2$, полагая, что наблюдение проводилось на экваторе в день равноденствия, когда угол между направлением лучей солнца и вертикалью можно считать равным 90° в 6 часов утра и в 6 часов вечера, и равным 0° в полдень [15, с. 71].

Рис. 60 Листья растения виктории-регии

Решение.

Обозначим через $S(t)$ площадь роста листа, изменяющаяся во времени t, $S'(t)$ – ее скорость изменения; $C=2\pi R$ – длина окружности. Тогда скорость роста листа выразим формулой $S'(t)=\gamma C$, где γ – коэффициент пропорциональности, причем $\gamma = \mu S cos\alpha$, где $\mu = const$, $\alpha = \frac{\pi(t-12)}{12}$. Из формулы площади круга выразим радиус $R = \sqrt{\frac{S}{\pi}}$ и подставим в $S'(t)$:

$$S'(t) = 2\mu\pi^2 R^3 cos\alpha = 2\mu\pi^2\left(\sqrt{\frac{S}{\pi}}\right)^3 cos\frac{\pi(t-12)}{12} = 2\mu\sqrt{\pi} cos\frac{\pi(t-12)}{12}\sqrt{S^3}.$$

Интегрируя ДУ, получаем

$$\frac{1}{\sqrt{S}} = -24\mu sin\frac{\pi(t-12)}{12} + C \Rightarrow \sqrt{S} = \frac{1}{C - 24\mu sin\frac{\pi(t-12)}{12}}.$$

Используя начальные условия: $S(6) = 1600$, $S(18) = 2500$, найдем C и μ.

$$\begin{cases} 40 = \frac{1}{C+24\mu} \\ 50 = \frac{1}{C-24\mu} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 24\mu = \frac{1}{40} - C \\ C = \frac{9}{400} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mu = \frac{1}{2400} \\ C = \frac{9}{400}. \end{cases}$$

Тогда общее решение $S = \frac{1}{\left(\frac{9}{400} - \frac{1}{400} sin\frac{\pi(t-12)}{12}\right)^2} = \frac{160000}{\left(9 + sin\frac{\pi t}{12}\right)^2}$.

Ответ: $S = \frac{160000}{\left(9 + sin\frac{\pi t}{12}\right)^2}$.

Задача 51. Лист цветка лотоса, имеющий идеальную форму (рис. 61), совершая вращательное движение, замедляется под действием силы трения воды, пропорциональной угловой скорости вращения. Определите зависимость угловой скорости от времени, если вначале лист лотоса вращался со скоростью 10 оборотов в минуту, а по истечении одной минуты – 5 оборотов в минуту.

Рис. 61 Цветок лотоса

Обозначим через $\omega(t)$ угловую скорость вращения листа лотоса в момент времени t *мин*. Тогда по закону изменения момента количества движения, будем иметь

$$I\frac{d\omega}{dt} = M,$$

где I – момент инерции, M – момент сил, действующих на лист. Так как момент сил $M = k_0\omega, k_0 = const$, то ДУ примет вид

$$\frac{d\omega}{dt}=\frac{k_0\omega}{I} \;\Rightarrow\; \frac{d\omega}{\omega}=\frac{k_0}{I}dt,$$

общим решением которого является функция $\omega = Ce^{k_0 t/I}$. При начальных условиях $\omega(0)=10$ и $\omega(1)=5$, определим $C=10$ и $e^{k_0/I}=0{,}6$. Таким образом, окончательно найдем зависимость угловой скорости от времени

$$\omega = 10\cdot(0{,}5)^t \textit{ об/мин}.$$

Ответ: $\omega = 10\cdot(0{,}5)^t$.

Задача 52. Помещение птицефермы объемом 10820 $м^3$ содержит 10,5% углекислоты. Вентилятор, установленный в этом помещении, доставляет свежий воздух, содержащий 0,02% углекислоты в количестве 500 $м^3/мин$. Предполагая, что концентрация углекислоты во всех частях помещения в каждый момент времени одинаковая, найдите содержание углекислоты через 10 *мин* после начала работы вентилятора. Через какое время содержание углекислоты в помещении уменьшится вдвое? [3, с. 19]

Решение. Обозначим через $Q(t)$ $м^3$ содержание CO_2 в помещении в момент времени t после начала работы вентилятора.Тогда $\frac{Q(t)}{10820}$ – концентрация CO_2 в помещении в момент времени t. Следовательно, 500 $м^3$ воздуха, которые уходят в минуту из помещения, содержат $\frac{500Q(t)}{10820}\approx 0{,}05Q(t)$ $м^3$ CO_2. Поэтому за время Δt изпомещения уйдет примерно $0{,}05Q(t)$ $м^3$ CO_2. С другой стороны, за это же время вентилятор подаст в помещение $\frac{0{,}02\%}{100\%}\cdot 500\Delta t = 0{,}1\Delta t$ $м^3$ CO_2.

Таким образом, приращение ΔQ углекислоты за время Δt, равно $\Delta Q = (0{,}1-0{,}05Q)\Delta t$. Далее, переходя к пределу при $\Delta t\to 0$, получим ДУ:

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{(0{,}1-0{,}05Q)\Delta t}{\Delta t} \;\Rightarrow\; dQ=(0{,}1-0{,}05Q)dt,$$

проинтегрировав которое, найдем общее решение $Q(t)=2-\frac{C}{0{,}05}e^{-0{,}05t}$. При начальном условии $Q(0)=10820\cdot 10{,}5\%=1136{,}1$ $м^3$ $C=-55{,}805$. Тогда частное решение ДУ примет вид $Q(t)=2+1116{,}1e^{-0{,}05t}$. Через 10 *мин* количество CO_2 будет равно $Q(10)=2+1116{,}1e^{-0{,}5}\approx 679\ м^3$. Время T, когда количество уменьшится вдвое, т.е. станет равным 568,05 $м^3$ найдем из равенства $Q(T)=2+1116{,}1e^{-0{,}05T}=568{,}05 \Rightarrow T=-\dfrac{ln0{,}507}{0{,}05}\approx 14\,мин.$

Ответ: ≈ 14.

Задача 53. (Модель развития популяции). Пусть имеется некоторая популяция рыб (совокупность особей одного вида), биомасса которой равна $y(t)$, в начальный момент времени биомасса равна $y(0)=y_0$. Предположим, что биомасса популяции пропорциональная имеющейся биомассе, т.е. $v_+=k\cdot y(t)$, k – коэффициент пропорциональности. Скорость уменьшения биомассы происходит за счет возникающих явлений самоотравления и пропорциональная квадрату наличной биомассе, т.е. $v_-=-\alpha\cdot y^2(t)$, α – коэффициент пропорциональности.

Тогда суммарная скорость изменения количества биомассы будет равна $y'=k\cdot y-\alpha\cdot y^2$. Найдем закон изменения биомассы популяции рыб.

$$y'=k\cdot y-\alpha\cdot y^2\Rightarrow -\alpha\left(y^2-2y\cdot\frac{k}{2\alpha}+\left(\frac{k}{2\alpha}\right)^2-\left(\frac{k}{2\alpha}\right)^2\right)=-\alpha\left(\left(y-\frac{k}{2\alpha}\right)^2-\left(\frac{k}{2\alpha}\right)^2\right)$$

Интегрируя ДУ, получим

$$\int\frac{dy}{\left(y-\frac{k}{2\alpha}\right)^2-\left(\frac{k}{2\alpha}\right)^2}=-\alpha\int dt \Rightarrow \frac{\alpha}{k}ln\left|\frac{y-\frac{k}{\alpha}}{y}\right|=-\alpha t+C$$

По понятным соображениям $0\le y<\dfrac{k}{\alpha}$, следовательно, $y=\dfrac{k}{\alpha}\left(Ce^{-kt}+1\right)$ есть закон изменения биомассы.

Ответ: $y=\dfrac{k}{\alpha}\left(Ce^{-kt}+1\right)$.

Задача 54. Охотники промысловой рыбы отправились на лодке, которая замедляет свое движение под действием сопротивления воды, пропорционально скорости лодки. Начальная скорость лодки 3 *м/с*, а через 5*с* скорость ее стала 2*м/с*. Когда скорость лодки уменьшится до 1 с*м/с*? Какой путь может пройти лодка до остановки? [3, с. 21]

$\overline{F}_{сопр\ воды}$ $\overline{F}_{дв\ л}$

Рис. 62 Движение лодки, под действием внешних сил

Обозначим через $v(t)$ – скорость лодки в момент времени t. На лодку действуют две силы: сопротивления воды и движения лодки. Тогда по второму закону Ньютона

$$\overline{F}_{сопр\ воды} = \overline{F}_{дв\ лодки}.$$

Спроектировав силы на ось Ох, получим

$$F_{дв\ лодки} = F_{сопр\ воды}.$$

По условию задачи $F_{сопр\ воды} = kv$.

Таким образом, получим ДУ $mv' = kv$, общим решением которого является функция $v(t) = Ce^{kt/m}$. Применяя начальные условия: $v(0) = 3$, $v(5) = 2$, составим систему, из которой определим значения C и $\frac{k}{m}$:

$$\begin{cases} C = 3 \\ Ce^{5k/m} = 2 \end{cases} \Rightarrow \quad 3e^{5k/m} = 2 \quad \Rightarrow \quad \frac{5k}{m} = ln\frac{2}{3} \Rightarrow \frac{k}{m} = 0{,}2ln\frac{2}{3} = -0{,}08.$$

Итак, закон изменения скорости лодки имеет вид $v(t) = 3e^{-0{,}08t}$. Далее определим время, по истечении которого скорость лодки станет равной 1 *см/с* или 0,01 *м/с*.

$$0{,}01 = 3e^{-0{,}08t} \quad \Rightarrow \quad -0{,}08t = ln\frac{0{,}01}{3} \Rightarrow t \approx 71 \text{ или } t \approx 1 \ мин \ 11c.$$

Для определения пройденного пути лодкой за время 71 *с*, необходимо найти закон движения. Зная, что $S'(t) = v(t)$, получим ДУ

$$S'(t) = 3e^{-0{,}08t},$$

проинтегрировав которое, найдем путь $S(t) = -37{,}5e^{-0{,}08t} + C$. Так как $S(0) = 0$, то $C = 37{,}5$, тогда

$$S(t) = 37{,}5\left(1 - e^{-0{,}08t}\right)\Big|_{t=71} = 37{,}5\left(1 - e^{-0{,}08\cdot 71}\right) \approx 37{,}37\,м.$$

Таким образом, лодка до остановки пройдет примерно 37,37 *м*.

Ответ: 37,37.

Задача 55. Некоторое вещество преобразуется в другое со скоростью, пропорциональной количеству непреобразованного вещества. Известно, что количество первого вещества равно 31,4 г по истечении 1 ч и 9,7 г по истечении 3ч. Определить:

1) сколько вещества было в начале процесса;

2) через сколько времени после начала останется 1% первоначального количества.

Решение. 1) Пусть $y(t)$ – количество вещества в момент времени t. Тогда изменение количества вещества будет описываться ДУ

$$y'(t)=k\cdot y(t) \quad \Rightarrow \quad y(t)=Ce^{kt}$$

Далее воспользуемся начальными условиями: $\begin{cases} y_1(1)=31{,}4 & \textit{через} \;\; 1\,\textit{ч} \\ y_2(3)=9{,}7 & \textit{через} \;\; 3\,\textit{ч} \end{cases}$.

Тогда

$$\begin{cases} Ce^{k}=31{,}4 \\ Ce^{3k}=9{,}7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e^{k}=\dfrac{31{,}4}{C} \\ C^2=3191{,}66 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e^{k}\approx 0{,}56 \\ C\approx 56{,}5 \end{cases}$$

Из первого уравнения последней системы можно найти коэффициент k:

$$e^{k}\approx 0{,}56 \quad \Rightarrow \quad \ln e^{k}\approx \ln 0{,}56 \quad \Rightarrow \quad k\approx -0{,}58.$$

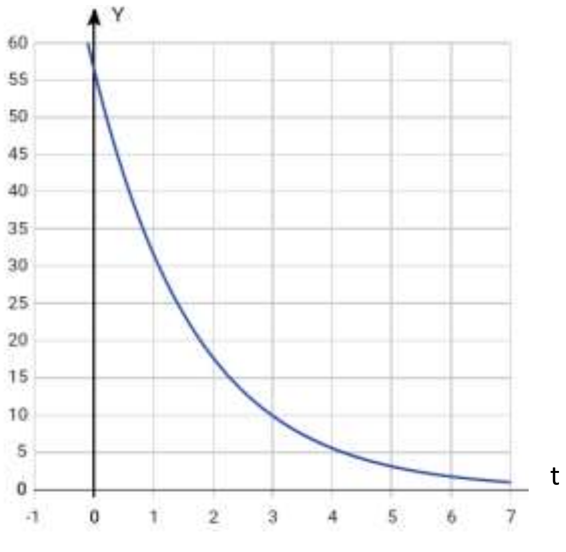


Рис. 63. График функции $y(t)=56{,}5e^{-0{,}58t}$

Таким образом, подставляя полученные данные в функцию $y(t)=Ce^{kt}$, получим частное решение ДУ (рис. 20):

$$y(t)=56{,}5e^{-0{,}58t}.$$

Следовательно, в начале процесса количества вещества было

$$y(0)\approx 56{,}5\,\textit{г}.$$

2) Чтобы узнать, через сколько времени после начала процесса останется 1% от первоначального количества, нужно количество вещества в начале процесса умножить на 0,01 и приравнять к $56{,}5e^{-0{,}58t}$:

$$56{,}5\cdot 0{,}01=56{,}5e^{-0{,}58t} \quad \Rightarrow 0{,}01=e^{-0{,}58t} \ \Rightarrow$$

$$ln0{,}01=-0{,}58t \ \Rightarrow \ t\approx 7{,}94.$$

$$56{,}5\cdot 0{,}01=56{,}5e^{-0{,}58t} \quad \Rightarrow \quad 0{,}01=e^{-0{,}58t} \ \Rightarrow \ ln0{,}01=-0{,}58t \ \Rightarrow \ t\approx 7{,}94.$$

Таким образом, примерно через 7,94 ч от первоначального количества вещества остался его 1%.

Ответ: 1) 56,5; 2) 7,94.

Задача 56. Известно, что скорость распада радия прямо пропорциональна его количеству в каждый момент времени t; γ – коэффициент пропорциональности. Найдите закон изменения массы радия в зависимости от времени, если до распада его масса составляла m_0. [3]

Решение. Пусть в момент времени t масса радия составляла $m(t)$, за период Δt масса его изменилась на Δm, т.е. за время $(t+\Delta t)$ его масса стала $m(t+\Delta t)$. Приращение массы составит $\Delta m=m(t+\Delta t)-m(t)$. Переходя к пределу Δm при $\Delta t\to 0$, найдем скорость изменения массы радия от времени t.

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta m}{\Delta t}=m'(t)$$

Поскольку $m'(t)=\gamma m(t)$.

Интегрируя ДУ, получим

$$\frac{dm}{dt}=-\gamma m \ \Rightarrow \ m(t)=Ce^{-\gamma t}.$$

Так как $m(0)=m_0$, то $m(t)=m_0e^{-\gamma t}$. Чтобы определить коэффициент пропорциональности γ, предполагают, пусть за время t_0 распаду подвергнется α % от первоначальной массы m_0, т.е. $0{,}01\alpha m_0$. Тогда

$$(1-0{,}01\alpha)m_0=m_0e^{-\gamma t_0} \quad \Rightarrow \quad \gamma=-\frac{1}{t_0}(1-0{,}01\alpha).$$

Для радия было определено, что $\gamma=0{,}000436$ (единица измерения времени – год). Подставим это значение в формулу массы $m(t)$, получим

$m(t) = m_0 e^{-0{,}000436t}$. Далее определим период полураспада радия, т.е. время, за которое распадается половина начальной массы радия.

$$\frac{m_0}{2} = m_0 e^{-0{,}000436t} \quad \Rightarrow \quad t = \frac{ln2}{0{,}000436} = 1590 \text{ лет.}$$

Следует отметить, что уравнением распада радия описываются многие физические и химические процессы.

Ответ: $m(t) = m_0 e^{-\gamma t}$.

Задача 57. Скорость растворения известняка в воде при постоянной температуре пропорциональна количеству этого вещества, которое в потенциале может раствориться в жидкости до насыщения последней. Предполагается, что, во-первых, вещества, входящие в раствор, химически не действуют друг на друга, во-вторых, раствор еще далек от насыщения, так как линейный закон ля скорости растворения не применим. Найти закон растворения известняка в воде. [3]

Решение. Пусть P – количество вещества, дающее насыщенный раствор, в $x(t)$ – количество уже растворившегося вещества в зависимости от времени t, в начальный момент времени $t = 0$ $x = 0$. Приходим к ДУ вида

$$x' = k(P - x) \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{dt} = k(P - x) \Rightarrow -ln|P - x| = kt + C \quad \Rightarrow \quad x = P + Ce^{-kt}.$$

Применяя начальное условие $x(0) = 0$, находим $C = P$.

Таким образом, закон процесса растворения известняка в воде таков:

$$x = P\left(1 - Ce^{-kt}\right).$$

Ответ: $x = P\left(1 - Ce^{-kt}\right)$.

Задача 58. Исследования куска горной породы показали, что в нем содержится 105 *мг* урана и 15 *мг* уранового свинца. Требуется определить возраст горной породы, считая, что в момент образования в ней отсутствовал свинец, если известно, что период полураспада урана равен $45 \cdot 10^8$ лет и, что при полном распаде 238 *г* урана образуется 206 *г* уранового свинца. (Наличием промежуточных радиоактивных продуктов между ураном и свинцом пренебречь, т.к. они распадаются намного быстрее урана) [3, с. 22].

Решение. Обозначим через x – количество урана в куске горной породы, распавшегося полностью. Тогда можем составить пропорцию по условию задачи:

$$\frac{x}{15}=\frac{238}{206} \Rightarrow x=17{,}33\textit{мг}.$$

Следовательно, первоначально в куске было 122,3 *мг* урана. Известно, что количество нераспавшегося урана составляет $y(t)=122{,}3\cdot e^{kt}$ (см. ***задачу 55***). Применяя период полураспада, составим уравнение и найдем коэффициент k:

$$\frac{122{,}3}{2}=122{,}3\cdot e^{45\cdot 10^{8}k} \Rightarrow k=\frac{ln0{,}5}{45\cdot 10^{8}}.$$

Поскольку в определенный период времени T количество урана составляло 105 *мг*, определим время T из уравнения

$$105=122{,}3\cdot e^{kT} \Rightarrow T=\frac{ln0{,}86}{k}\approx 979\cdot 10^{6}\text{лет} –$$

возраст горной породы.

Ответ: $979\cdot 10^{6}$.

Задача 59. В сосуд объемом в 50 *л*, содержащий воздух, в котором 70% азота и 30% кислорода, при непрерывном помешивании втекает азот в объеме 0,1 *л* в секунду и вытекает такое же количество смеси. Определите, через какое время содержание азота в сосуде составит 90%? [11, с. 17]

Решение. Пусть $x(t)$ *л* – количество азота в сосуде в момент времени t *с* после начала помешивания. Оформим условие задачи в виде таблицы 5.

Таблица 5. Условие задачи

За определенное кол-во времени, *с*	Втекает кол-во азота, *л*	Вытекает кол-во смеси, *л*	Вытекает кол-во азота, *л*
t	$x(t)$	$x(t)$	$\frac{x(t)}{50}$
1	0,1	0,1	$\frac{0{,}1}{50}$
Δt	$0{,}1\Delta t$	$0{,}1\Delta t$	$\frac{0{,}1x(t)\Delta t}{50}$

Тогда за Δt останется азота $\Delta x=0{,}1\Delta t-\frac{0{,}1x(t)\Delta t}{50}=0{,}1\left(1-\frac{x(t)}{50}\right)\Delta t.$

Переходя к пределу при $\Delta t\to 0$, получим ДУ.

$$\Delta x=0{,}1\left(1-\frac{x(t)}{50}\right)\Delta t \Rightarrow \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{0{,}1(50-x)}{50} \Rightarrow x'=\frac{0{,}1(50-x)}{50}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{50-x}=\frac{0{,}1dt}{50} \Rightarrow ln|50-x|=-0{,}002t+C \Rightarrow x=50-Ce^{-0{,}002t}.$$

Применив начальное условие $x(0)=35$, определим $C=15$. Итак, закон изменения количества азота в сосуде: $x(t)=50-15e^{-0{,}002t}$. Далее определим время, по истечении которого количество азота станет 90%, т.е. $x(t)=45$*л*.

$$50-15e^{-0{,}002t}=45 \Rightarrow e^{-0{,}002t}=\frac{1}{3} \Rightarrow t=\frac{ln0{,}333}{-0{,}002}\approx 554{,}3\ с \approx 9\ мин\ 14\ с.$$

Ответ: ≈ 9 *мин* 14 *с*.

Задача60. Две жидкости подвергают дистиллированию. Известно, что в любой момент времени этого процесса отношение количеств жидкостей, которые превращаются в пар, пропорционально отношению количеств, которые находятся еще в жидком состоянии. Определите зависимость между жидкостями [3, с. 39].

Решение. Обозначим через $x(t)$ и $y(t)$ – количества жидкостей x и y соответственно, которые еще не превратились в пар в момент времени t. Тогда $x(t+\Delta t)$ и $y(t+\Delta t)$ – количества жидкостей, которые не превратились в пар в момент времени $(t+\Delta t)$. За время Δt в пар превратилось количество жидкости $x(t)-x(t+\Delta t)$, а также $y(t)-y(t+\Delta t)$. По условию задачи составим соотношение

$$\frac{y(t+\Delta t)-y(t)}{x(t+\Delta t)-x(t)}=\gamma\frac{y(t_1)}{x(t_1)},$$

где γ – коэффициент пропорциональности, $t_1\in(t;t+\Delta t)$. Предположим, что функции $x(t)$ и $y(t)$ дифференцируемы, тогда, переходя к пределу при $\Delta t\to 0$, получим ДУ

$$\frac{y(t+\Delta t)-y(t)}{x(t+\Delta t)-x(t)}=\gamma\frac{y(t_1)}{x(t_1)} \Rightarrow y'=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\gamma\frac{y}{x}$$

Легко определить, что общим решением его является функция $y=Cx^{\gamma}$. Таким образом, найдена зависимость между указанными двумя жидкостями.

Ответ: $y=Cx^{\gamma}$.

2.5 Приложения дифференциальных уравнений второго порядка в частных производных. Уравнение теплопроводности для нестационарного случая

Изучении темы «Дифференциальные уравнения», как правило, ограничен рассмотрением обыкновенных дифференциальных уравнений, и совершенно несправедливо дифференциальные уравнения в частных производных остаются в стороне. Именно последние представляют наибольший интерес, поскольку ими описываются процессы и явления, происходящие в окружающей действительности.

Так, к примеру, уравнение $\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$, где $u(M,t)$ - температура однородного тела в точке M, ограниченного поверхностью M в момент времени t, является уравнением теплопроводности для нестационарного случая. Если однородным телом, поглощаемым количество тепла, является стержень, то уравнение примет вид

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{51}$$

Рассмотрим ряд примеров, иллюстрирующие нахождение температуры стержня в точке в зависимости от его длины.

Задача 61. Дан тонкий однородный стержень длины l, изолированный от внешнего пространства и имеющий начальную температуру

$$u(x,t)\big|_{t=0}=f(x)=\frac{c\left(lx-x^2\right)}{l^2}.$$

Концы стержня поддерживаются притемпературе, равной нулю. Определить температуру стержня в момент времени $t>0$ (рис. 64) [6, с. 104].

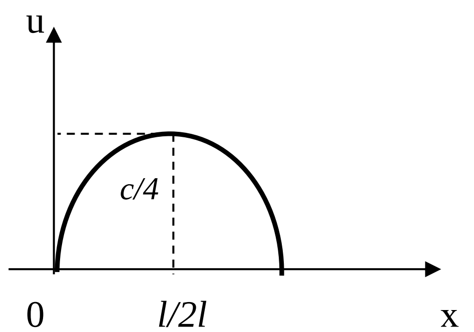


Рис. 64 График функции $u=\frac{c(lx-x^2)}{l^2}$

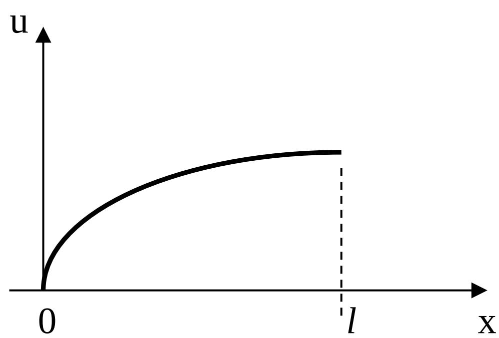


Рис. 65 График функции $u=lnx$

Решение. Из условия задачи следует, что стержень ограничен с обоих концов, т.е. $u(x,t)\big|_{x=0} = u(x,t)\big|_{x=l} = 0$. Закон распределения температуры стержня описывается уравнением (51). Для нахождения температуры стержня в момент времени $t > 0$ применим следующие формулы:

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \cdot e^{-\left(\frac{\pi k a}{l}\right)^2 \cdot t} \cdot sin\frac{\pi kx}{l},$$

где $b_k = \frac{2}{l}\int\limits_0^l f(x) sin\frac{\pi kx}{l}dx$.

Итак,

$b_k = \frac{2c}{l^3}\int\limits_0^l \left(lx - x^2\right)\cdot sin\frac{\pi kx}{l}dx$; дважды интегрируя по частям, получим $b_k = \frac{4c}{\pi^3 k^3}(1 - cos\pi k)$, при k четном $b_k = 0$, при k нечетном $b_k = \frac{8c}{\pi^3 k^3}$ или $b_k = \frac{8c}{\pi^3 (2n+1)^3}$, $n = \overline{0,\infty}$. Следовательно, температура стержня при $t > 0$ будет изменяться по закону

$$u(x,t) = \frac{8c}{\pi^3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^3}\cdot e^{-\left(\frac{\pi a(2n+1)}{l}\right)^2 \cdot t}\cdot sin\frac{\pi(2n+1)x}{l}.$$

Задача 62. Имеется однородный полубесконечный стержень, левый конец которого поддерживается нулевой температурой. Найти закон изменения температуры в момент времени $t > 0$, если в начальный момент времени температура изменялась по закону: $u(x,0) = ln(x+1)$, $0 < x < l$ и $u(x,0) = 0$, $x > l$, причем $u(0,t) = 0$ (рис. 65) [6, с. 103].

Решение. Закон изменения температуры стержня задается уравнением (51). В случае ограниченности стержня с одной стороны, температуру можно найти по формуле

$$u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int\limits_0^{+\infty} f(\xi)\cdot\left[e^{-\frac{(\xi - x)^2}{4a^2 t}} - e^{-\frac{(\xi + x)^2}{4a^2 t}}\right]d\xi +$$

$$+\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_0^t \varphi(\eta)\cdot e^{\frac{x^2}{4a^2(t-\eta)}}\cdot(t-\eta)^{-1,5}d\eta.$$

В нашем случае $\varphi(x)=0$.

$$u(x,t)=\frac{ln(x+1)}{2a\sqrt{\pi t}}\int_0^{+\infty}\left[e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}-e^{-\frac{(\xi+x)^2}{4a^2t}}\right]d\xi=$$

$$=\frac{ln(x+1)}{2a\sqrt{\pi t}}\left[\int_0^l\left(e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}-e^{-\frac{(\xi+x)^2}{4a^2t}}\right)d\xi\right].$$

Применяя подстановки: $\frac{\xi-x}{2a\sqrt{t}}=\theta_1$ и $\frac{\xi+x}{2a\sqrt{t}}=\theta_2$, учитывая, что $\int_0^z e^{-\mu^2}d\mu=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\Phi(z)$, где $\Phi(z)$ – функция Лапласа, окончательно получим:

$$u(x,t)=\frac{ln(x+1)}{2}\left(\Phi\left(\frac{l-x}{2a\sqrt{t}}\right)+2\Phi\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right)-\Phi\left(\frac{l+x}{2a\sqrt{t}}\right)\right).$$

Задача 63. Имеется однородный бесконечный стержень, температура которого в начальный момент времени изменялась по прямолинейному закону от точки $(1;0)$ к точке $(l;2)$. Определить, по какому закону изменялась температура стержня при $t>0$, если закон изменения ее описывается уравнением $\frac{\partial u}{\partial t}=4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ (рис. 66) [6, с. 105].

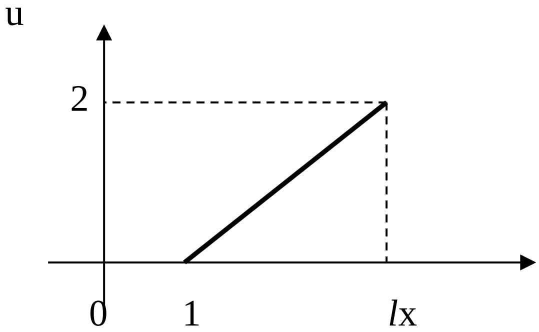


Рис. 66 График функции $u=\frac{2(x-l)}{l}$

В начальный момент времени температура изменялась по закону

$$u(x,0)=\varphi(x)=\frac{2(x-l)}{l-1}.$$

В случае бесконечного стержня температуру стержня можно найти по формуле:

$$u(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\cdot e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}d\xi .$$

Следовательно,

$$u(x,t)=\frac{1}{4\sqrt{\pi t}}\int\limits_1^l \frac{2(x-l)}{l-1}\cdot e^{-(\xi-x)^2/16t}d\xi=\frac{x-l}{2(l-1)\sqrt{\pi t}}\int\limits_1^l e^{-(\xi-x)^2/16t}d\xi=$$

$$=\left\{\begin{matrix}\dfrac{\xi-x}{4\sqrt{t}}=\theta \\ d\xi=4\sqrt{t}d\theta\end{matrix}\right\};\left\{\begin{matrix}если \quad \xi=1, \quad то \ \theta=\dfrac{1-x}{4\sqrt{t}} \\ если \quad \xi=l, \quad то \ \theta=\dfrac{l-x}{4\sqrt{t}}\end{matrix}\right\}=$$

$$=\frac{2(x-l)}{(l-1)\sqrt{\pi}}\cdot\int\limits_{(1-x)/4\sqrt{t}}^{(l-x)/4\sqrt{t}} e^{-\theta^2}d\theta=$$

$$=\frac{2(x-l)}{(l-1)\sqrt{\pi}}\left[\int\limits_0^{(l-x)/4\sqrt{t}} e^{-\theta^2}d\theta-\int\limits_0^{(1-x)/4\sqrt{t}} e^{-\theta^2}d\theta\right]=\frac{x-l}{l-1}\left[\Phi\left(\frac{l-x}{4\sqrt{t}}\right)-\Phi\left(\frac{1-x}{4\sqrt{t}}\right)\right].$$

Для студентов инженерно-технических направлений наибольший интерес представляет задача колебания струны.

Задача 64. Описать колебание струны при начальных условиях $u|_{t=0}=2x-1 \ \left.\frac{\partial u|}{\partial t}\right|_{t=0}=cos2x$, в момент времени $t=\frac{\pi}{6}$, если его движение описывается уравнением $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=16\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$. [5, с. 98]

Решение. Ясно, что $a=4$, $\varphi(x)=2x-1;\ \psi(x)=cos2x$;

Тогда по формулеДаламбера (27) получим:

$$u(x,t)=\frac{\varphi(x-4t)+\varphi(x+4t)}{2}+\frac{1}{8}\int\limits_{x-4t}^{x+4t} cos2zdz=$$

$$=\frac{2(x-4t)-1+2(x+4t)-1}{2}+\frac{1}{8}\int\limits_{x-4t}^{x+4t} cos2zdz=2x-1+\frac{\sqrt{3}}{16}cos2x.$$

РАЗДЕЛ 3. ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

1. Парашютист массой 80 кг весом совершает падение с высоты 800 м. При падении он испытывает сопротивление воздуха, пропорциональное квадрату скорости тела. Найдите закон движения парашютиста, если начальная скорость падения была равна нулю, а $S(0)=1$.

2. Лист цветка лотоса имеет круглую форму, площадь которого пропорциональна окружности листа и количеству солнечного света, падающего на лист. Последнее, в свою очередь, пропорционально площади листа и косинусу угла между направлением лучей и вертикалью. Найти зависимость между площадью листа S и временем t, если известно, что в 6 часов утра эта площадь равна 2500 $см^2$, а в 6 часов вечера того же дня – 3600 $см^2$, полагая, что наблюдение проводилось на экваторе в день равноденствия, когда угол между направлением лучей солнца и вертикалью можно считать равным 90° в 6 часов утра и в 6 часов вечера, и равным 0° в полдень.

3. Найти время, в течение которого вся вода вытечет из конической воронки, если известно, что половина воды вытекает за 2 мин.

4. В баке находится 100 л раствора, содержащего 10 кг соли. В бак втекает 5 л воды в минуту, а смесь с той же скоростью переливается в другой бак той же емкости, изначально наполненный чистой водой. Избыток жидкости выливается из него. Найдите, в какой момент времени количество соли во втором баке будет наибольшим. Чему равно это количество?

5. Функции спроса и предложения задаются соответствующими уравнениями $y=7-5p+3\dfrac{dp}{dt}$, $x=10-2p+4\dfrac{dp}{dt}$ Найти зависимость равновесной цены от времени t, если в начальный момент времени t $p=2$.

6. Вагон массой 20 *т* движется равнозамедленно, имея начальную скорость 54 *км/ч*. Известно, что сила торможения пропорциональна скорости, коэффициент пропорциональности $\gamma=400$. Найдите закон движения вагона, если до замедления было уже пройдено 10 *м*. Какое расстояние пойдет вагон за 20 *с*?

7. В условиях ненасыщаемости рынка найти объем производства по истечении 6 месяцев, если в начальный момент времени объем производства $y(0)=24$ усл. ед. при норме инвестиций 0,6, продажной цене, равной 0,15 ден. ед и $l=0{,}4$.

8. Предполагая, что цена на товар задается функцией $p(y)=\dfrac{5+3e^{-y}}{y}$, а также зная, что норма инвестиций составляет 0,6 и $l=0{,}4$. Найти зависимость объема $y=y(t)$ реализованной продукции от времени, если начальный объем продукции составлял 1.

9. Определить закон движения гусеницы массы m, перемещающейся по прямой под влиянием восстанавливающей силы, направленной к началу отсчета перемещений и прямо пропорциональной расстоянию точки от начала отсчета, если сопротивление среды отсутствует, но на точку действует внешняя сила $F = A\sin\omega t$.

10. Предполагая, что цена на товар задается функцией $p(y) = \dfrac{2+5e^{-y}}{y}$, а также зная, что норма инвестиций составляет 0,75 и $l = 0{,}6$. Найти зависимость объема $y = y(t)$ реализованной продукции от времени, если начальный объем продукции составлял 3.

11. Популяция некоторого вида рыбы возрастает на 1,2% в год. Во сколько раз она увеличится через 100 лет?

12. При обходе заповедника егерь обнаружил тушу убитого кабана. Ее осмотр показал, что выстрел браконьера был точным и кабан убит наповал. Рассудив, что браконьер должен вернуться за добычей, егерь решил дождаться его, укрывшись недалеко от того места, где лежала туша. Вскоре показался человек, прямо направляющийся к убитому животному. Задержанный всячески отрицал свою причастность к браконьерству. Однако у егеря уже были косвенные улики его виновности, но для ее полного доказательства следовало еще уточнить время, когда был убит кабан, если известно, что в момент задержания неизвестного температура туши кабана была равна $33^\circ C$, а спустя час составляла $31^\circ C$; в момент выстрела кабана его температура была равна $38^\circ C$, а температура воздуха– $22^\circ C$[2].

13. Эластичность спроса задается соотношением $E_p = \dfrac{p^2}{p-10}$, $0 < y < 4$. Найти функцию спроса, если заданном спросе $y = 3$ цена товара равна 9 ден. ед.

14. Некоторое вещество преобразуется в другое со скоростью, пропорциональной количеству непреобразованного вещества. Известно, что количество первого вещества равно 35,2 г по истечении 1 ч и 12,7 г по истечении 2 ч. Определить:
1) сколько вещества было в начале процесса;
2) через сколько времени после начала останется 2% первоначального количества.

15. За время Δt ($\Delta t \to 0$ и выражено в долях года) из каждого грамма радия распадается $0{,}00044\Delta t$ грамма и образуется $0{,}00043\Delta t$ грамма радона. Из каждого грамма радона за время Δt распадается $70\Delta t$ грамма. В начале опыта имелось некоторое количество x_0 чистого радия. Когда количество образовавшегося еще не распавшегося радона было наибольшим?

16. Свободно висячая на крюке однородная цепь соскальзывает с него под действием собственного веса. Определите время, за которое вся цепь соскользнет с крюка, если в начальный момент времени скорость цепи была нулевой, и с одной стороны крюка висело 10 *м*, а с другой – 8 *м*. Сила трения между цепью и крюком равна весу 1 *м* цепи.

17. Комбайн «Енисей 1200» массой 15 *т* движется с начальной скоростью 8 *км/ч*. Известно, что сила торможения пропорциональна скорости, коэффициент пропорциональности $\gamma = 400$. Найдите закон движения комбайна, если до замедления было пройдено 10 *м*. Какое расстояние пройдет комбайн за минуту?

18. Найти время, в течение которого вся вода вытечет из конической воронки, если половина воды вытекает за 2 мин.

19. Найти функцию спроса, если $E_p(y) = -y^2 + 1,\ y(2) = 3.$

20. Для влажности воздуха в теплице объемом $V\ м^3$ установили открытый сосуд с водой. Скорость испарения воды пропорциональна разности между количеством q_1 водяного пара, насыщающего $1\,м^3$ воздуха при данной температуре, и количеством q водяного пара, имеющегося в $1\,м^3$ воздуха в рассматриваемый момент времени. Найти остаток воды после испарения за время t, если в начальный момент в сосуде было m_0 грамм воды, а в $1\,м^3$ воздуха – q_0 грамм пара. (Температура воздуха в теплице и воды в сосуде остаются неизменными).

РАЗДЕЛ 4.
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В КРОССВОРДАХ, РЕБУСАХ, ГОЛОВОЛОМКАХ

4.1. Кроссворды

Кроссворд №1.

Вопросы кроссворда

1. В честь какого ученого названа задача вида $\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$?

2. Какое решение находится при решении задачи Коши?

3. Что получается в результате подстановки решения в данное ДУ?

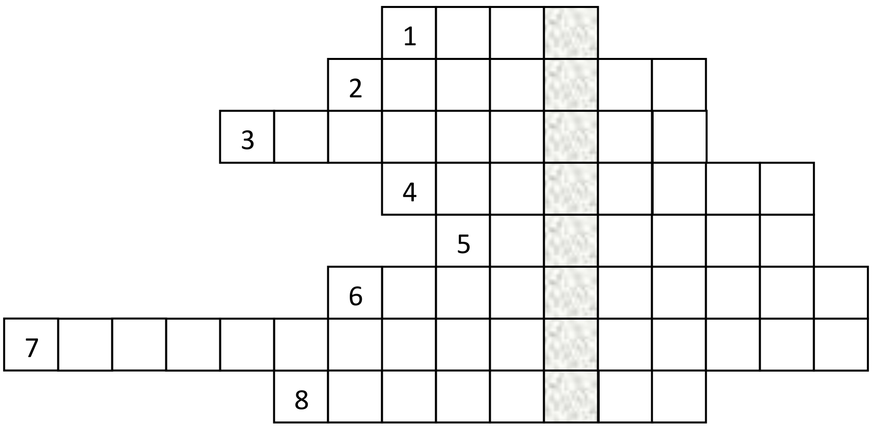
4. Как называется уравнение вида $y' + P(x)y = Q(x)$?

5. В честь какого ученого назван метод вариации произвольных постоянных при решении линейных неоднородных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами?

6. К какому типу относится уравнение $y' = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$?

7. Как называется уравнение, связывающее независимую переменную x, неизвестную функцию y и ее производные или дифференциалы?

8. В честь какого ученого названо уравнение $y' + P(x)y = Q(x) \cdot y^n$?



Ключевое слово:

Кроссворд №2. Эндемики Байкала

Решая дифференциальные уравнения и вставляя буквы в клетки, соответствующие полученным ответам, сможете разгадать кроссворды.

Вопрос №1. Эндемик и царь-рыба Байкала, масса которого может достигать до 130 кг и 180 см в длину. Занесена в Красную книгу редких и исчезающих видов.

1. $y' = x$, если $y(0) = 1$ и найти $y(1)$.

2. $\dfrac{dy}{\sqrt{x}} - dx = 0$, если $y(1) = -\dfrac{1}{3}$ и найти $y(9) - 10$.

3. $y'' = \dfrac{1}{x}$, если $y(1) = 1,\ y'(1) = -1$ и найти $y(-1)$.

4. $y'' - 6y' - 5y = 0$, если $y(0) = 2,\ y'(0) = -2$ и найти $y'''(0) + 100$.

5. $y'' + 9y = x$, если $y(0) = 1,\ y'(0) = -3$ и найти $\dfrac{6y''(0)}{y'(0)}$.

Вопрос №2. Ценная промысловая рыба семейства лососевых. Средний вес достигает до 1,5 кг, длина до 60 см. питается рачками, донными беспозвоночными и молодью рыб.

Задание. Найти частное решение дифференциального уравнения при заданных начальных условиях и значение указанного выражения.

1. $y'' + y = e^x sinx$, если $y(0) = 1,\ y'(0) = -1$ и найти $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) - 0{,}2e^{\pi/2} + 2{,}3$.

2. $y' = \dfrac{y}{x}$, если $y(1) = 1$ и найти $y(4)$.

3. $y' - xy = x^2 \cdot e^{0{,}5x^2}$, если $y(0) = 2$ и найти $y''(0) - 5$.

4. $(x-1)y' = \dfrac{1}{y}$, если $y(0)=1$ и найти $y^2(2)$.

5. $y' = \dfrac{y}{\sqrt{x+1}}$, если $y(0)=1$ и найти $ln\left|y(3)\right|$.

Вопрос №3. Единственное эндемичное ластоногое млекопитающее Байкала. Один из трех пресноводных видов тюленя в мире. Его вес достигает до 130 кг, длина до 165 см. Окраска спины буровато-серая с легким оливкого-сизоватым оттенком. Средняя продолжительность жизни – 55 лет.

1. $y'' = x + cos3x$, если $y(0)=1,\ y'(0)=2$ и найти $y'(-2) + \dfrac{1}{3}sin6 + 4$.

2. $y'' - y' = \cos x$, если $y(0)=1,\ y'(0)=-3$ и найти $y(\pi) + 2{,}5e^{\pi}$.

3. $y' = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, если $y(1)=4$ и найти $\dfrac{y(4)}{-3}$.

4. $y''' - sin2x = 0$, если $y(0)=1$, $y'(0)=-1$, $y''(0)=-1$ и найти $y(1) - 0{,}125cos1 - 0{,}875$.

5. $y'' - y' = e^{x}$, если $y(0)=1,\ y'(0)=2$ и найти $\dfrac{y'(1)}{e} + 2$.

Ответы:

3 – Ё; 2 – Ь; 1,5 – О; 4 – М; -2 – Р;

-3 – У; 8 – Н; 7 – С; 1 – Л; -22 – Т;

4,5 – Е; -1,25 – П; 17 – Б; 0 – Ф; 5 – А.

Кроссворд №3*(для студентов биологических направлений)*

Дифференциальное уравнение в цветах

Дав названия цветам, сможете прочитать ключевые слова

1.  **2.**  **3.**  **4.** 

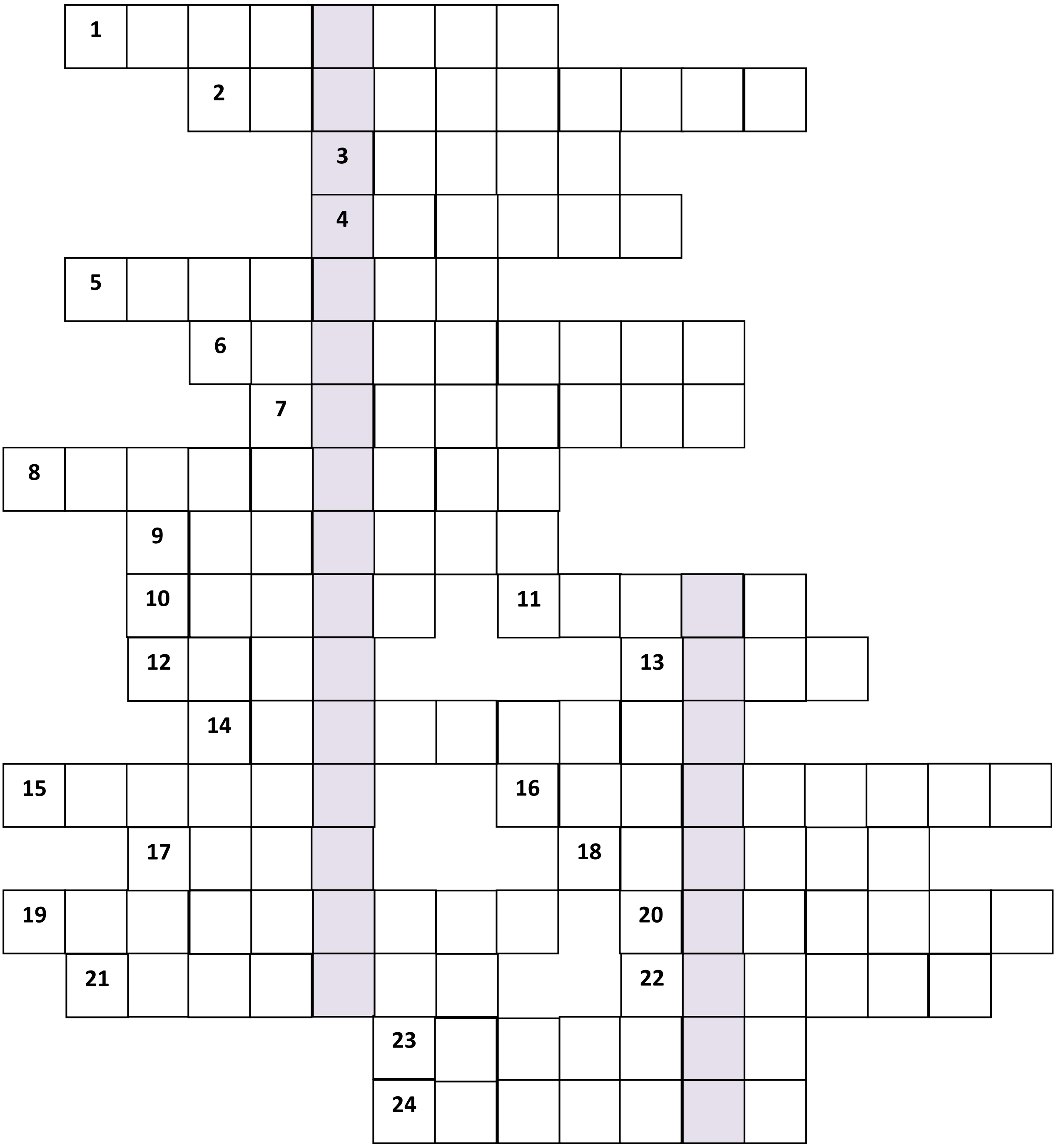
5.  **6.**  **7.**  **8.** 

9.  **10.**  **11.**  **12.** 

13.  **14.**  **15.**  **16.** 

17.  **18.**  **19.**  **20.** 

21.  **22.**  **23.**  **24.** 

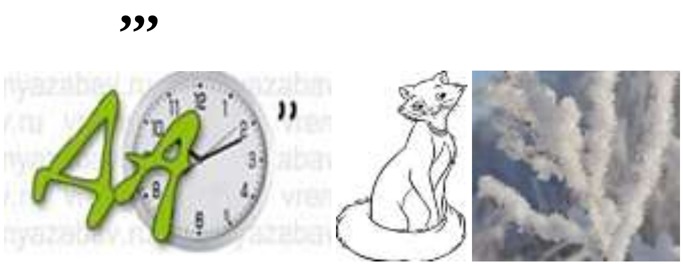


Ключевые слова:

4.2 Ребусы

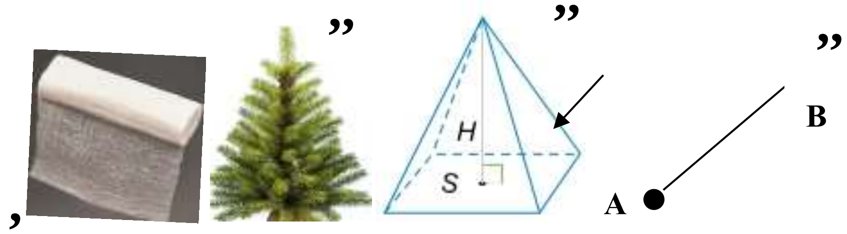
Ребус №1.

Ребус №2.,,

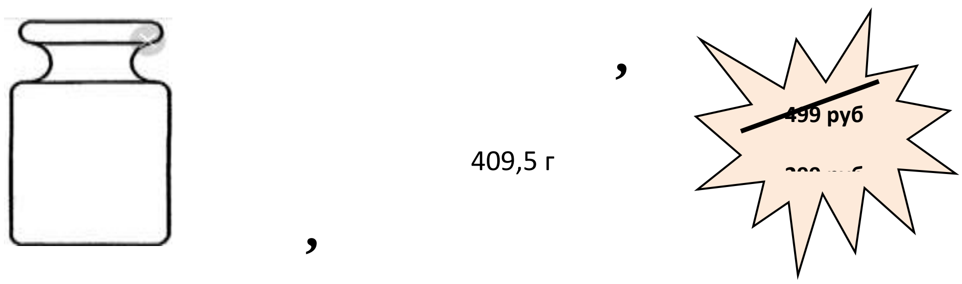


Ребус №3.

Ребус №4.

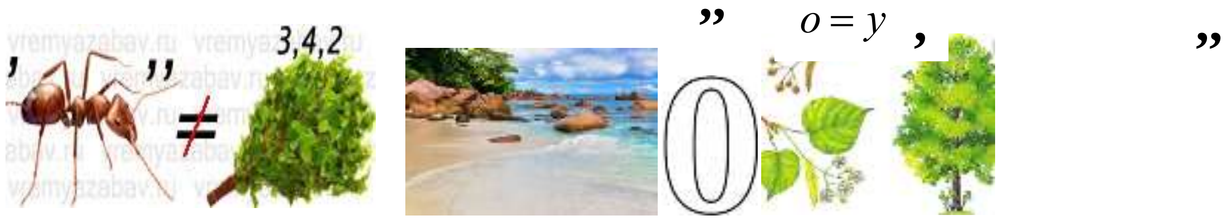


Ребус №5.



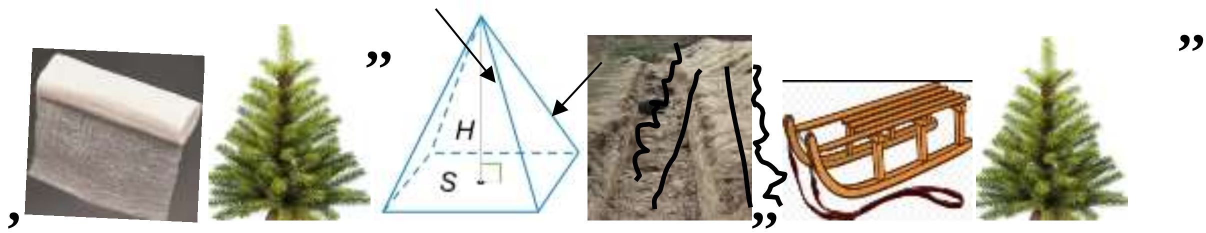
Ребус №6.

Ребус №7.



Ребус №8.

Ребус №9.



Ребус №10.

Ребус №11.

,, к=г ,

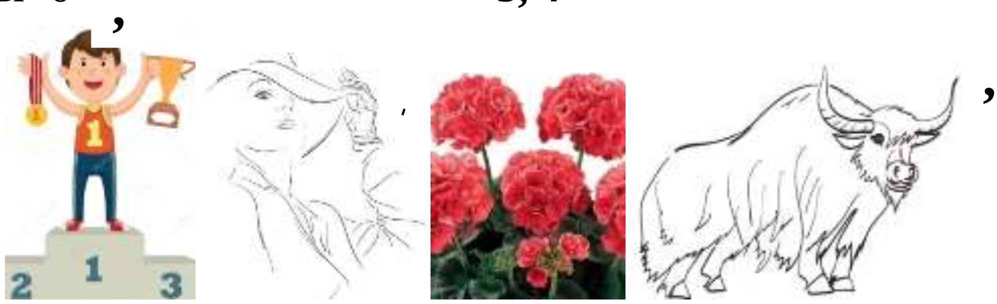
Ребус №12.

Ребус №13.

Ребус №14.

Ребус №15.

ы=о 5, 4



4.3 Анаграммы, головоломки

Анаграмма – это литературный прием, состоящий в перестановке букв или звуков определенного слова (или словосочетания), что в результате дает другое слово или словосочетание.

1. Расшифруйте анаграммы и исключите из них лишнее слово.

еруванием

арлтиегн

товспиозротв

2. Расшифруйте анаграммы и вставьте недостающую букву.

нелрибул

еровпозан…бен

еришнее

3. Расшифруйте анаграммы и вставьте недостающую букву.

фериceда…нфи

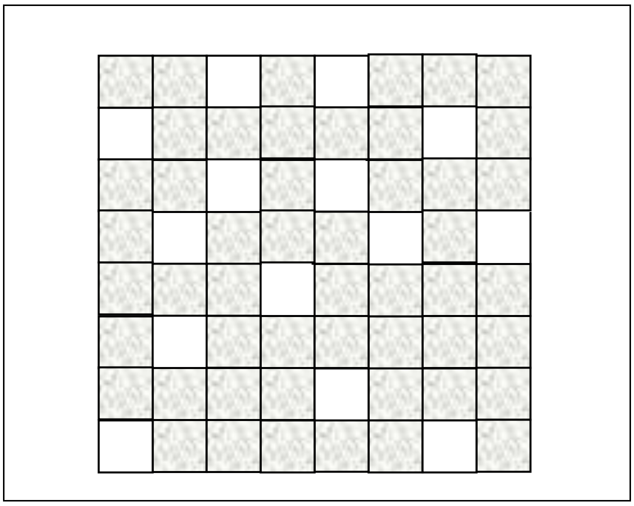
варопандиязо

кызинило

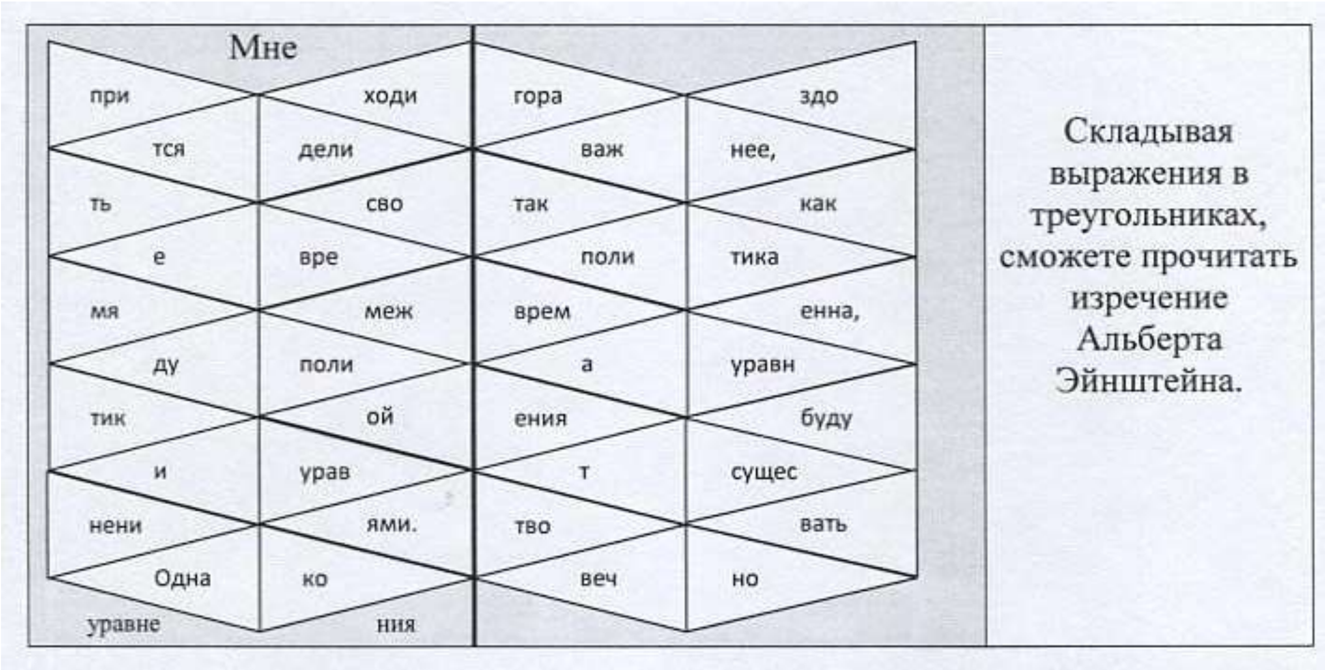
Головоломка №1

При наложении второго квадрата с прорезями (белые квадратики) на первый (с буквами), поворачивая его 4 раза почасовой стрелке на 90° и записывая буквы, не изменяя порядка, которые будут появляться в белых квадратиках, вы сможете прочитать изречение немецкого ученого-математика Карла Вейерштрасса.

о	о	н	н	е	т	я	м
л	о	щ	,	и	с	ь	г
к	у	з	о	я	м	н	м
п	б	о	а	е	ы	э	т
б	т	у	ь	т	е	д	м
о	н	м	у	а	ч	й	э
т	и	о	!	а	ф	и	н
с	х	щ	е	к	м	т	ю



Головоломка №2



Головоломка №3

м	а	о	м	н	а	я	м
е	т	р	о	и	п	ф	г
м	а	о	т	с	а	н	у
и	т	к	а	а	н	э	т
к	а	,	н	к	н	д	ы
э	-	к	ы	г	и	о	р
т	о	я	з	а	п	р	и

Собирая по две буквы в каждом столбце в форме зигзага, сможете прочитать высказывание Галилео Галилея о математике.
(Примечание.
В высказывании задействованы не все буквы квадрата.)

4.4 Нестандартные дифференциальные уравнения

1. Найдите частное решение дифференциального уравнения $\dfrac{t'}{dx}=1$, где

$$t=t(\gamma) \text{ и } t(0)=1.$$

2. Может ли функция $x = Xt + C$ являться решениемдифференциального уравнения $\dfrac{x'}{X}=1$?

3. Найдите функцию f, если $\frac{df}{dx} = f$.

4. Можетли дифференциальное уравнение $y' = -y$ иметь решение $y = \frac{1}{Ce^x}$?

5. Может ли неопределенный интеграл $\int \frac{dx}{dx} = \frac{1}{d} ln|x| + C$?

6. Определите уравнение $y' = f(x, y)$, которому удовлетворяет неявно заданная функция $xy + e^y = 1$.

7. Составьте уравнение вида $y' = f(x, y)$, которому удовлетворяет функция $y = tg\left(\int_0^{e^x} \frac{dt}{ln^2 t + a}\right)$, $a \in R$.

8. Найдите общее решение дифференциального уравнения $\left(x^2 + y\right)' = \left(\int_0^x tdt\right)'$.

9. Найти функцию $y = y(x)$ из дифференциального уравнения $y' + 2ye^x - y^2 = e^x + e^{2x}$.

10. Решите дифференциальное уравнение $\begin{vmatrix} 1 & -x & y \\ 0 & 1 & y' \\ x & 0 & y \end{vmatrix} = 0$ при $y(1) = 1$.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1) Что такое дифференциальная модель?

2) Каким уравнением описывается:
- радиоактивный распад радия;
- рост населения города;
- рост бактерий на грязной посуде;
- вытекание жидкости из сосуда через отверстие;
- изменение температуры тела (охлаждающего, нагревающего);
- движение комбайна, замедляющего движение?

3) Каким уравнением описывается движение шарика, закрепленного на конце пружины:
- весом которого пренебрегают;
- весом которого не пренебрегают;
- пренебрегают сопротивлением воздуха;
- не пренебрегают сопротивлением воздуха?

4) Каким уравнением описывается движение камня, брошенного вертикально вверх, в котором:
- пренебрегают сопротивлением воздуха;
- не пренебрегают сопротивлением воздуха?

5) В каком случае возникает резонанс в колебании пружины?

6) Что такое математический маятник?

7) Каким уравнением описывается движение математического маятника?

8) Что называется секундным маятником?

9) При какой длине одно колебание маятника совершается в 1 *с*?

10) Сформулируйте первый, второй и третий закон Ньютона.

11) Запишите формулу Циолковского.

12) Какие силы действуют на:
- тонкую однородную цепь, которая соскальзывает со стола;
- мальчика, скатывающегося с горы на санях;
- трактор, совершающий замедляющее движение?

13) Записать уравнение теплопроводности для нестационарного случая.

14) Какие силы действуют на каплю дождя, если она падает сверху?

15) Записать формулу Даламбера (колебание струны).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

- Одно и то же ДУ может описывать различные природные процессы или явления.
- «Если в технических науках создается, обосновывается и исследуется набор методов решения инженерных задач, то главным показателем инженерного искусства является выбор такого математического описания и такой точности проводимых решений, которые были бы адекватныпоставленной задаче. Этотвыбор и оценкарезультатов решений должны основываться на понимании допущений, лежащих в их основе, на умении физически интерпретировать сложные формализованные решения».[14]
- При составлении математической модели (дифференциальных уравнений) физических процессов, помимо применения физических законов (законы Ньютона, формула Бернулли, закон Бойля-Мариотта и т.д.), применялся механический смысл производной: $S'(t)=v(t)$, $v'(t)=a(t)$, где $S(t)$ – путь, пройденный материальной точкой за время t , $v(t)$ – скорость, $a(t)$ – ускорение, а также как скорость изменения какой-либо величины, рассматриваемой в задаче.

Изложение материала пособия преследует достижения образовательной, дидактической, воспитательной целей развития математического мышлениями формирования профессиональных компетенций будущего выпускника аграрного вуза.

Предложенные задачи позволяют не только закрепить методы решения дифференциальных уравнений, но и способствуют более глубокому изучению данной темы. Стоит отметить, что такой подход организации учебной деятельности способствует такжеразвитию у студентов аналитического мышления, внимания, воображения, раскрытию их творческого потенциала;умению устанавливать внутри- и межпредметные связи при изучении раздела «Дифференциальные уравнения»; к примеру, применять ранее изученные ими математические методы такит, как дифференцирование и интегрирование функций одной или нескольких переменных.

ОТВЕТЫ

Раздел 3.

1. $V(t)=\sqrt{\frac{mg}{k}}\cdot th\sqrt{\frac{kg}{m}}t$, $S(t)=\frac{m}{k}ln\left(ch\sqrt{\frac{kg}{m}}t\right)$ 2. $S=\dfrac{360000}{\left(11+sin\frac{\pi t}{12}\right)^2}$ 3. $\approx 4{,}16$ *мин* 4. $\approx 3{,}68$ *кг* 5. $p=3e^{-3t}-1$ 6. $S(t)=750e^{0{,}02t}-740$; $S(20)\approx 379$*м* 7. $\approx 29{,}786$ 8. $y=ln\left(3{,}32\cdot e^{1{,}2t}-0{,}6\right)$.

9. 1) $\omega\neq\sqrt{\frac{\gamma}{m}}$, $x=C_1cos\sqrt{\frac{\gamma}{m}}t+C_2sin\sqrt{\frac{\gamma}{m}}t+\frac{Am}{\gamma m\omega^2}$; 2) $\omega=\sqrt{\frac{a}{m}}$, $x=C_1cos\sqrt{\frac{\gamma}{m}}t+C_2sin\sqrt{\frac{\gamma}{m}}t-\frac{At}{2\sqrt{\gamma m}}cos\sqrt{\frac{\gamma}{m}}t$. 10. $y=ln\left(22{,}59\cdot e^{0{,}9t}-2{,}5\right)$. 11. $e^{1{,}2}\approx 3{,}3$. 12. $t=1{,}86$ *ч*. 13. $y=0{,}0004\cdot e^{p}(p-10)^{10}$. 14. 1) 97,56; 2) 3,8.15. ≈ 62 дня. 16. $t=\frac{3}{\sqrt{g}}ln\left(17+12\sqrt{2}\right)c$. *Указание. Уравнение движения центра тяжести цепи имеет вид* $18x''=gx-(18-x)g-g\cdot 1.$). 17. $S(t)=110e^{0{,}02t}-100$; $S(60)=110e^{0{,}02\cdot 60}-100=265$ *м*.). 18. 4,16 *мин*. 19. $\frac{y\sqrt{2}}{3p}-\sqrt{\frac{y-1}{y+1}}=0$. 20. $m_1(t)=m_0-V(q_1-q_0)\left(1-e^{-kt/V}\right)$.

Раздел 4. Кроссворды, ребусы, головоломки

4.1 Кроссворды

Кроссворд №1. 1) Коши; 2) частное; 3) тождество; 4) линейное; 5) Лагранж; 6) однородное; 7) дифференциальное; 8) Бернулли. Ключевое слово – интеграл.

Кроссворд №2. 1) осетр; 2) омуль; 3) нерпа.

Кроссворд №3. 1) гвоздика; 2) хризантема; 3) флокс; 4) фиалка; 5) драцена; 6) гортензия; 7) георгина; 8) подснежник; 9) нарцисс; 10) лилия; 11) фикус; 12) роза; 13) ирис; 14) календула; 15) герань; 16) одуванчик; 17) пион; 18) ландыш; 19) гладиолус; 20) бегония; 21) гербера; 22) мимоза; 23) петуния; 24) орхидеи. Ключевые слова – дифференциальное, уравнение.

4.2 Ребусы

1) дифференциальное уравнение; 2) Задача Коши; 3) частное решение; 4) интеграл; 5) функция; 6) уравнение Клеро; 7) уравнение Бернулли; 8) производная; 9) интегрирование; 10) линейное уравнение; 11) метод Лагранжа; 12) изоклины; 13) однородное уравнение; 14) дифференциал; 15) первообразная.

4.3 Анаграммы

1. Уравнение, интеграл, производство - лишнее. 2. Бернулли, первообразная, решение. 3. Дифференциал, производная, изоклины.

Головоломка №1. «Нельзя быть настоящим математиком, не будучи немного поэтом».

Головоломка №2. «Мне приходится делить свое время между политикой и уравнениями. Однако уравнения гораздо важнее, так как политика временна, а уравнения будут существовать вечно».

Головоломка №3. «Математика – это язык, на котором написана книга природы».

4.4 Нестандартные дифференциальные уравнения

1. $t = \gamma dx + \dfrac{1}{dx}$ 2. Да. 3. $y = Ce^{x}$. 4. Да, т.к. $C = const$. 5. Да, при $d = const$.

6. $y' = -\dfrac{y}{x + e^{y}}$. 7. $y' = \dfrac{1 + y^{2}}{x^{2} + a}$. 8. $y = -0{,}5x^{2}$. 9. $y = e^{x}$, $y = e^{x} + \dfrac{1}{C - x}$. 10. $y = \dfrac{e^{1-1/x}}{x}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Амелькин В.В. Дифференциальные уравнения: учеб. пособие / под ред. В.В. Амелькина. Минск: БГУ, 2012. 288с. (Классическое университетское издание).
2. Баврин И. И. Высшая математика для химиков, биологов и медиков: учебник и практикум. 2-е изд., испр. и доп. Москва: Юрайт, 2016. 329 с.
3. Боярчук А. К., Головач Г. П. Справочное пособие по высшей математике. Т. 5. Часть 1. Дифференциальные уравнения в примерах и задачах. Дифференциальные уравнения первого порядка. Москва, 2010. 240 с.
4. Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика: учебник для академического бакалавриата. В 3 т. Т. 2. 7-е изд. Москва: Юрайт, 2018. 219 с.
5. Высшая математика для экономического бакалавриата: учеб. и практикум / Н.Ш. Кремер, Б.А. Прутко, И.М. Тришин. 4-е изд., перераб., доп. Москва: Юрайт, 2013. 909 с.
6. Голышева С.П., Астапов Я.Ю. Применение уравнения колебания струны при изучении математики студентами инженерных направлений аграрных вузов. – Научное сообщество студентов XXI столетия. Естественные науки. Электронный сборник статей по материалам XXVII студ. Междунар. научно-практ. конф.. Новосибирск: Изд. «СибАК». 2018. №5 (63)/[Электронный ресурс]. Режим доступа: URL:http//www.sibac.info/archive/nature/5(63).pdf(дата обращения 24.10.2019)
7. Голышева С.П., Молчанова А.А. Уравнение теплопроводности для нестационарного случая при изучении дифференциальных уравнений студентами инженерных направлений аграрных вузов. – Научное сообщество студентов XXI столетия. Естественные науки. Электрон. сб. статей по матер. XXVII студ. Междунар. научно-практ. конф. Новосибирск: Изд. «СибАК». 2018. №5 (63)/[Электрон. ресурс]. Режим доступа:URL:http//www.sibac.info/ archive/nature/5(63).pdf (дата обращения 24.10.2019)
8. Кремер Н. Ш. Практикум по высшей математике для экономистов: Учебн. пособие для вузов/ Кремер Н.Ш., Тришин И.М., Путко Б.А. и др. /под ред. Н. Ш. Кремера. Москва: Юнити-Дана, 2005. 423 с.
9. Некоторые приложения обыкновенных дифференциальных уравнений в экономике: метод. Указания для студентов всех форм обучения / состав: О.В. Авдеева, О.Ю. Микрюкова. Вологда: ВоГУ, 2015. 43 с.
10. Орлова В.В. Особенности составления дифференциальных уравнений при решении инженерно-технических задач. Научное сообщество студентов XXI столетия. Естественные науки. Электрон. сб. статей по матер. XXVII студ. Междунар. научно-практ. конф. – Новосибирск: Изд. «СибАК». 2015. №1 (26)/[Электрон. ресурс]. Режим доступа:URL:http//www.sibac.info/archive/nature/1(26).pdf (дата обращения 24.10.2019)
11. Пантелеев А.В., Якимова А.С., Рыбаков К.А. Обыкновенные дифференци-альные уравнения. Практический курс. Москва: Логос, 2010. 384 с.
12. Понтрягин Л.С. Дифференциальные уравнения и их приложения. 4-е изд. Москва: Эдиториал УРСС, 2011. 208 с.
13. Сергеев И.Н. Дифференциальные уравнения: учебник для студ. учреждений высш. проф. образования/И.Н. Сергеев. Москва: Издательский центр «Академия», 2013. 288 с. (Университетский учебник. Сер. Прикладная математика и информатика).
14. Симоненко О.Д. Математика и технические науки. [Электронный ресурс]. Режим доступа:URL:https://www.portal-slovo.ru/impressionism/36325.php(дата обращения 27.10.2019)
15. Толстых О.Д. Нестандартные и прикладные задачи высшей математики: учебное пос. В 4 ч. Ч. 3. / под ред. О.Д. Толстых. Иркутск: ИрГУПС, 2017. 172 с.

Голышева Светлана Павловна

Математика.
Приложения дифференциальных уравнений

Учебное пособие
для студентов первых, вторых курсов инженерно-технических, экономических
и биологических направлений очной формы обучения
аграрных вузов

Компьютерный набор и верстка Голышевой С.П.

Редактор Тесля В.И.

Лицензия ЛР № 070444 от 11.03.98 г.
Подписано к печати 22.01.2020 г.
Формат 60×84. Печ. 4,7 л.
Тираж 25 экз.

Издательство Иркутского государственного
аграрного университета им. А.А. Ежевского
664038, Иркутская обл., Иркутский р-он,
п. Молодежный