Министерство сельского хозяйства РФ

Департамент научно – технической политики и образования

ФГОУ ВО «Иркутский государственный аграрный университет им. АА. Ежевского»

Кафедра Математики

А.И. Мартыненко, С.П. Голышева

МАТЕМАТИКА

Методические указания и индивидуальные контрольные задания для студентов – заочников биологических специальностей

Издание второе

$$y' = sin(3x-5)\cdot\sqrt{x^3-1}$$

$$\int(7x^3+e^x)dx$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

Теория вероятностей

Иркутск – 2016

УДК 517 ()

Рекомендовано к изданию научно-методическим Советом Иркутской государственной сельскохозяйственной академии (протокол №1 от 31 октября 2005 г.).

Составители: Мартыненко А.И., Голышева С.П.

Методические указания и индивидуальные контрольные задания для студентов – заочников биологических специальностей. – 2-е изд., перераб. и доп. – Иркутск: Изд-во ИрГСХА, 2005, 60 стр.

Данные методические указания предназначены для студентов – заочников первых курсов биологических специальностей Иркутской государственной сельскохозяйственной академии: «Зоотехния», «Биология», «Агрономия», «Лесное дело».

Рецензент: д.т.н., проф., зав. каф. Математики ИрГСХА

Овчинникова Н.И.

ФГОУ ВПО Иркутская государственная сельскохозяйственная академия

ВВЕДЕНИЕ

В методические указания включены некоторые вопросы из аналитической геометрии на плоскости (прямая на плоскости), математического анализа (переделы; дифференциальное и интегральное исчисления функций одной переменной) и теории вероятностей (классическое определение вероятности; основные теоремы сложения и умножения вероятностей; повторные независимые испытания; дискретные случайные величины и их числовые характеристики).

Данная разработка содержит общие методические указания к выполнению контрольной работы и индивидуальные контрольные задания по каждому разделу. В ней также представлен разбор решений задач, что окажет помощь студенту при выполнении контрольной работы по указанным темам.

ОБЩИЕ МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

В соответствии с действующим учебным планом студенты заочной формы обучения сельскохозяйственных специальностей изучают математику в течение первого курса и выполняют одну контрольную работу.

При выполнении контрольной работы по математике студент должен руководствоваться следующими указаниями:

1. Контрольная работа должна выполняться в отдельной тетради в клетку, на внешней обложке которой должны быть ясно написаны: фамилия, имя, отчество, полный шифр (№ зачетной книжки), дата ее отправления в академию и обратный адрес.

2. Контрольные задачи следует располагать в порядке номеров, указанных в заданиях. Перед решением каждой задачи необходимо полностью переписать ее условие.

3. Решения задач и объяснения к ним должны быть подробными.

4. Решение задач геометрического содержания должно сопровождаться чертежами, выполненными аккуратно, с указанием осей координат и единичного масштаба.

5. На страницах тетради необходимо оставлять поля шириной 3 -4 см. для замечаний преподавателя.

6. Контрольную работу нужно выполнять самостоятельно. Несамостоятельно выполненная работа не дает возможности преподавателю указать студенту на недостатки в его работе, в усвоении им учебного материала. В результате чего студент не приобретает необходимых знаний и может оказаться не подготовленным к экзамену или зачету.

7. Студент выполняет тот вариант контрольной работы, который совпадает с последней цифрой его учебного шифра. При этом, если предпоследняя цифра учебного шифра есть число нечетное (1, 3, 5, 7, 9), то номера задач для соответствующего варианта даны в таблице № 1. Если же предпоследняя цифра четная (2, 4, 6, 8, 0), то номера задач даны в таблице № 2.

Например, если шифр студента 4328, то он должен выполнять задания варианта 8 из таблицы № 1. Или, если учебный шифр 4286, то он выполняет задания под вариантом 6 из таблицы № 2.

Контрольные работы, выполненные с нарушением изложенных правил или выполненные студентом не по своему варианту, не зачитываются и возвращаются без проверки.

Таблица № 1

№ вар.	**Контрольная работа**						
1	1	21	41	61	81	101	121
2	2	22	42	62	82	102	122
3	3	23	43	63	83	103	123
4	4	24	44	64	84	104	124
5	5	25	45	65	85	105	125
6	6	26	46	66	86	106	126
7	7	27	47	67	87	107	127
8	8	28	48	68	88	108	128
9	9	29	49	69	89	109	129
0	10	30	50	70	90	110	130

Таблица № 2

№ вар.	**Контрольная работа**						
1	11	31	51	71	91	111	131
2	12	32	52	72	92	112	132
3	13	33	53	73	93	113	133
4	14	34	54	74	94	114	134
5	15	35	55	75	95	115	135
6	16	36	56	76	96	116	136
7	17	37	57	77	97	117	137
8	18	38	58	78	98	118	138
9	19	39	59	79	99	119	139
0	20	40	60	80	100	120	140

Раздел I. Элементы аналитической геометрии на плоскости

1.1. Прямоугольная декартова система координат (ПДСК)

ПДСК определяется заданием двух взаимно перпендикулярных прямых, на каждой из которых выбрано положительное направление и единица масштаба. Эти прямые называются осями координат, причем горизонтальная ось – ось Ох, называется осью абсцисс, а вертикальная ось – Оу – осью ординат. Точка пересечения координат называется началом координат – $O(0;0)$.

Выберем произвольную точку *М* в плоскости хОу (рис.1). Пусть M_1 – проекция точки *М* на ось Ох, а M_2 – на ось Оу. Координата x точки M_1 называется абсциссой точки *М*, а координата y точки M_2 – ординатой точки *М* и все это принято записывать так: $M(x;y)$.

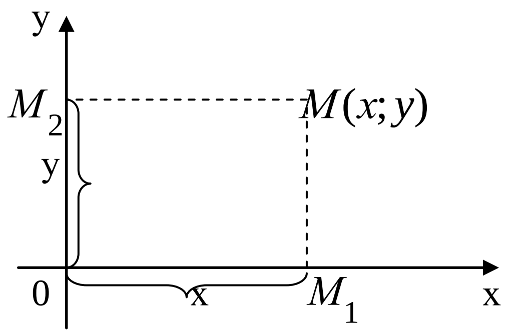

Рис. 1

Пусть на плоскости хОу даны две точки $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$. Тогда расстояние *d* между ними определяется по формуле:

$$d=\sqrt{\left(x_2-x_1\right)^2+\left(y_2-y_1\right)^2}\,. \tag{1}$$

В частности, расстояние от точки $M(x;y)$ до начала координат находится по формуле:

$$d=\sqrt{x^2+y^2}\,. \tag{2}$$

1.2. Деление отрезка в данном отношении

Пусть в ПДСК даны точки $A(x_1;y_1)$, $B(x_2;y_2)$ и $C(x;y)$, делящая отрезок *AB* в отношении λ, т.е. $\frac{|AC|}{|CB|}=\lambda$ (рис. 2). Тогда координаты точки *C* будут определяться по формуле:

$$x_C=\frac{x_A+\lambda x_B}{1+\lambda};\ \ y_C=\frac{y_A+\lambda y_B}{1+\lambda}. \tag{3}$$

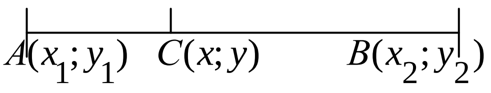

Рис. 2

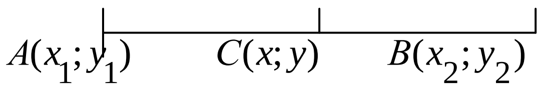

Рис. 3

В частности, если *C* лежит посередине отрезка *AB* (рис. 3), то ее координаты будут равны:

$$x_C=\frac{x_A+x_B}{2};\ \ y_C=\frac{y_A+y_B}{2}. \tag{4}$$

1.3. Прямая на плоскости

Всякая линия на плоскости определяется уравнением вида $F(x;y)=0$, где x и y – текущие координаты. В прямоугольных координатах каждая прямая определяется уравнением первой степени относительно переменных x и y и, наоборот, всякому уравнению первой степени относительно x и y соответствует прямая на плоскости.

Общее уравнение прямой имеет вид:

$$Ax+By+C=0. \tag{5}$$

Уравнение прямой с угловым коэффициентом *k*:

$$y=kx+b. \tag{6}$$

Угловой коэффициент *k* равен тангенсу угла наклона прямой с положительным направлением оси Ох (т.е. движение совершается против часовой стрелки). Итак, $k=tg\alpha$. Параметр *b* называют начальной ординатой, который равен отрезку, отсекаемому данной прямой на оси Оу (рис.4).

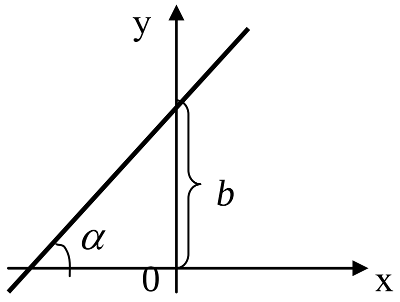

Рис. 4

Уравнение прямой, проходящей через две точки $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$, определяется формулой:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}. \qquad (7)$$

Уравнение прямой, проходящей через данную точку $M_0(x_0;y_0)$ в заданном направлении (или уравнение пучка прямых, проходящих через данную точку), имеет вид:

$$y-y_0=k(x-x_0). \qquad (8)$$

Пусть даны на плоскости две прямые l_1 и l_2, которым соответствуют уравнения на плоскости $y=k_1x+b_1$ и $y=k_2x+b_2$.

Условием параллельности двух прямых является равенство их угловых коэффициентов, т.е. $k_1=k_2$;

Условием перпендикулярности двух прямых является то, что их угловые коэффициенты обратно-пропорциональны по абсолютной величине и противоположны по знаку, т.е. $k_2=-\dfrac{1}{k_1}$.

Угол φ, образованный между двумя прямыми l_1 и l_2 определяется формулой:

$$tg\varphi=\frac{k_2-k_1}{1+k_1\cdot k_2}. \qquad (9)$$

Задача 1. Даны вершины треугольника *ABC*: $A(-2;3)$, $B(1;12)$, $C(11;6)$. Составить уравнение: 1) сторон *AB* и *BC*; 2) высоты *CH*, опущенной из вершины C на сторону AB; 3) медианы AE; 4) окружности, для которой медиана AE служит диаметром; 5) найти $\angle B$.

Решение. Сделаем чертеж (рис. 5).

1) Подставляя в формулу (7) координаты точек A и B, найдем уравнение прямой AB:

$$\frac{x-(-2)}{1-(-2)}=\frac{y-3}{12-3} \Rightarrow \frac{x+2}{3}=\frac{y-3}{9} \Rightarrow 3(y-3)=9(x+2),$$

$$y-3=3(x+2) \Rightarrow y_{AB}=3x+9, \;\; k_{AB}=3.$$

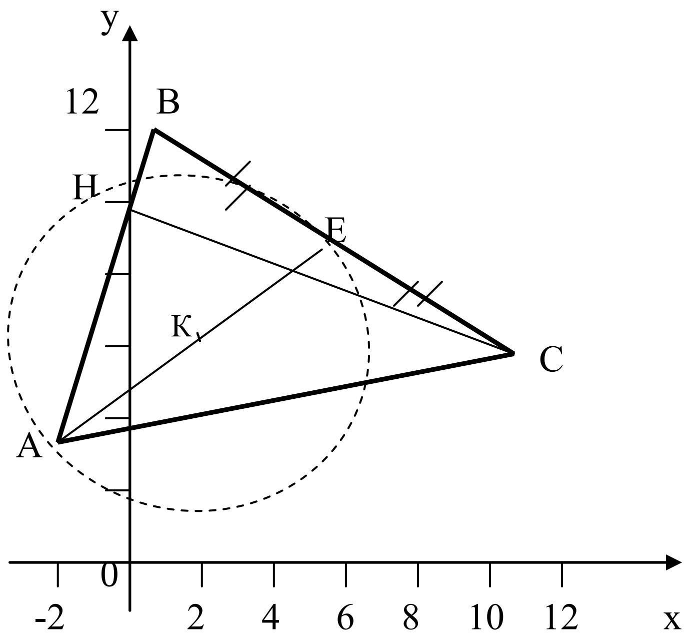

Рис. 5

Аналогичным образом находим уравнение стороны BC.

$$\frac{x-1}{11-1}=\frac{y-12}{6-12} \Rightarrow \frac{x-1}{10}=\frac{y-12}{-6} \Rightarrow 10(y-12)=-6(x-1);$$

$$y-12=-\frac{6}{10}(x-1) \Rightarrow y=-\frac{3}{5}x+\frac{3}{5}+12 \Rightarrow y_{BC}=-\frac{3}{5}x+\frac{63}{5},$$

$$k_{BC}=-\frac{3}{5}.$$

2) Так как высота *CH* перпендикулярна стороне *AB*, то по условию перпендикулярности прямых, угловой коэффициент прямой *CH* будет равен:

$$k_{CH} = -\frac{1}{3}.$$

Подставив в (8) координаты точки *C* и угловой коэффициент $k_{CH} = -\frac{1}{3}$, получим искомое уравнение высоты *CH*:

$$y - 6 = -\frac{1}{3}(x - 11) \Rightarrow y = -\frac{1}{3}x + \frac{11}{3} + 6 \Rightarrow y_{CH} = -\frac{1}{3}x + \frac{29}{3}.$$

3) Так как точка *E* лежит посередине отрезка *BC*, то по формуле (4) ее координаты будут равны:

$$x_E = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{1+11}{2} = 6; \quad y_E = \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{12+6}{2} = 9 \Rightarrow E(6;9).$$

Далее воспользуемся вновь формулой (7) и составим уравнение медианы *AE* в общем виде:

$$\frac{x-(-2)}{6-(-2)} = \frac{y-3}{9-3} \Rightarrow \frac{x+2}{8} = \frac{y-3}{6} \Rightarrow 6(x+2) = 8(y-3) \Rightarrow 3x - 4y + 18 = 0.$$

4) Уравнение окружности радиуса *R* с центром в точке $K(a;в)$, имеет вид:

$$(x-a)^2 + (y-в)^2 = R^2. \qquad (10)$$

По условию *AE* является диаметром искомой окружности, тогда центр ее находится в точке *K*, которая делит *AE* пополам. Тогда по формуле (4) координаты точки *K*, как середины отрезка *AE*, будут равны:

$$x_K = \frac{x_A + x_E}{2} = \frac{-2+6}{2} = 2; \quad y_K = \frac{y_A + y_E}{2} = \frac{3+9}{2} = 6 \Rightarrow K(2;6).$$

Чтобы найти радиус данной окружности $R = AK$, воспользуемся формулой (1), как расстояния между двумя точками *A* и *K*:

$$d=|AK|=\sqrt{(2-(-2))^2+(6-3)^2}=\sqrt{16+9}=\sqrt{25}=5.$$

И тогда по формуле (10) искомое уравнение окружности будет иметь вид:

$$(x-2)^2+(y-6)^2=25.$$

5) $\angle B$ заключен между сторонами треугольника *AB* и *BC*. Поэтому его значение найдем как угол между прямыми *AB* и *BC*, применив формулу (9), где $k_{AB}=3$, $k_{BC}=-\frac{3}{5}$:

$$tg\angle B=\frac{k_{BC}-k_{AB}}{1+k_{AB}\cdot k_{BC}}=\frac{-\frac{3}{5}-3}{1+3\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)}=\frac{-\frac{18}{5}}{1-\frac{9}{5}}=-\frac{18}{5}:\left(-\frac{4}{5}\right)=4{,}5.$$

$$tg\angle B=4{,}5.$$

Отсюда

$$\angle B=arctg4{,}5\approx 77^\circ 35'.$$

Раздел II. Введение в математический анализ

2.1. Пределы. Неопределенность вида: $\left(\frac{0}{0}\right)$; $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$.

В данной теме рассматривается вычисление пределов функций, которое основывается на следующих теоремах:

1. Предел постоянной равен самой постоянной:

$$\lim_{x\to a} C=C,\ (C=const).$$

2. Постоянный множитель можно выносить за знак предела:

$$\lim_{x\to a} C\cdot f(x)=C\cdot\lim_{x\to a} f(x).$$

3. Предел от алгебраической суммы нескольких функций равен алгебраической сумме пределов этих же функций:

$$\lim_{x\to a}\left[f(x)\pm\varphi(x)\right]=\lim_{x\to a} f(x)\pm\lim_{x\to a}\varphi(x).$$

4. Предел произведения нескольких функций равен произведению пределов этих же функций:

$$\lim_{x\to a}\left[f(x)\cdot\varphi(x)\right]=\lim_{x\to a} f(x)\cdot\lim_{x\to a}\varphi(x).$$

5. Предел частного функций равен частному пределов, при условии, что предел знаменателя не равен нулю:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)},\ \lim_{x\to a}\varphi(x)\neq 0.$$

6. Для элементарных функций имеет место равенство:

$$\lim_{x\to a} f(x)=f\left(\lim_{x\to a} x\right).$$

Определение 1. Величина (функция) называется *бесконечно малой* (б.м.), если ее предел при $x\to a$, равен нулю, т.е.

$$\lim_{x\to a} f(x)=0.$$

Определение 2. Величина (функция) называется *бесконечно большой* (б.б.), если ее предел при $x\to a$, равен бесконечности, т.е.

$$\lim_{x\to a} f(x)=\infty.$$

Теорема (о связи б.м. и б.б. величин): Величина, обратная бесконечно большой, есть величина бесконечно малая и, наоборот, величина, обратная бесконечно малой, есть величина бесконечно большая.

Символически это обозначают так: $\frac{1}{\infty}=0$ и $\frac{1}{0}=\infty$.

2.2. Свойства бесконечно малых величин

Пусть α, β - б.м. величины, y – переменная величина, имеющая предел, равный A, т.е. $\lim\limits_{x\to a} y = A(const)$. Тогда справедливы следующие свойства, которые символически можно представить так:

1. $\alpha \pm \beta = 0$. 2. $\alpha \cdot A = 0$. 3. $\dfrac{\alpha}{A} = 0$, $A \neq 0$, где $A = const$.

2.3. Свойства бесконечно больших величин

Свойства б.б. величин также можно символически записать так:

1. $\infty \pm A = \infty$. 2. $\infty \cdot A = \infty$. 3. $\dfrac{\infty}{A} = \infty$.

4. $\infty^n = \infty$. 5. $\sqrt[n]{\infty} = \infty$. 6. $\begin{matrix} +\infty + (+\infty) = +\infty \\ -\infty + (-\infty) = -\infty \end{matrix}$,

где $\lim\limits_{x\to a} y = A(const)$, y – переменная величина.

Задача 2. Вычислить пределы: а) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2x^2 + x - 10}{x^2 + x - 6}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4x^2 - 3x + 1}{2x^2 + x - 5}$; в) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2x^2 + 3x - 9}{6x^3 + x - 5}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^4 - x + 1}{x^2 + 3x - 8}$.

Решение. а) Непосредственная подстановка вместо x значения 2 в данную дробь приводит к неопределенности вида $\left(\dfrac{0}{0}\right)$. Чтобы раскрыть эту неопределенность, необходимо числитель и знаменатель разложить на линейные множители.

$$\lim_{x\to 2}\frac{2x^2+x-10}{x^2+x-6}=\left(\frac{0}{0}\right)=\left\{\begin{array}{l} 2x^2+x-10=a(x-x_1)(x-x_2)=2(x-2)(x+\frac{5}{2}). \\ D=в^2-4ac=1-4\cdot 2\cdot(-10)=81. \\ x_{1;2}=\frac{-в\pm\sqrt{D}}{2a}=\frac{-1\pm 9}{4}=2;-\frac{5}{2}. \\ \textit{Аналогично}, x^2+x-6=(x-2)(x+3). \\ D=1-4\cdot 1\cdot(-6)=25. \\ x_{1;2}=\frac{-1\pm 5}{2}=2;-3. \end{array}\right\}=$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{2\cancel{(x-2)}(x+\frac{5}{2})}{\cancel{(x-2)}(x+3)}=\left\{\begin{array}{c} \textit{т.к. } x\to 2\ (\textit{но не равен } 2), \textit{сократим на } (x-2); \\ (x-2)-\textit{критический множитель}. \end{array}\right\}=$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{2x+5}{x+3}=\frac{2\cdot 2+5}{2+3}=\frac{9}{5}=1{,}8.$$

б) $$\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2-3x+1}{2x^2+x-5}=\frac{4\cdot\infty^2-3\cdot\infty+1}{2\cdot\infty^2+\infty-5}=\{\textit{по св}-\textit{ам б.б. величин}\}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right).$$

В данном случае получили неопределенность вида $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$. Чтобы ее раскрыть, пользуемся **правилом 1**: если под знаком предела при $x\to\infty$, стоит дробно-рациональная функция $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$, в которой $P_m(x)$ и $Q_n(x)$ многочлены степени m и n соответственно, то числитель и знаменатель делим на x^k, где k – наивысшая степень многочленов $P_m(x)$ и $Q_n(x)$. Другими словами, делим на x^m, если $m\ge n$ или на x^n, если $m<n$.

Правило 2 раскрытия неопределенности $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$**:** если под знаком предела при $x\to\infty$, стоит дробно-рациональная функция $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$, в которой $P_m(x)$ и $Q_n(x)$ – многочлены степени m и n соответственно, то предел равен отношению коэффициентов при x^k, где k – наивысшая степень многочленов $P_m(x)$ и $Q_n(x)$.

Итак, по **правилу 1**, числитель и знаменатель делим на x^2, т.к «2» – наивысшая степень x из числителя и знаменателя:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2-3x+1}{2x^2+x-5}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{4\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}}-\frac{3\cancel{x}}{x^{\cancel{2}}}+\frac{1}{x^2}}{\frac{2\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}}+\frac{\cancel{x}}{x^{\cancel{2}}}-\frac{5}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{4-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}{2+\frac{1}{x}-\frac{5}{x^2}}=$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4-\frac{3}{\infty}+\frac{1}{\infty}}{2+\frac{1}{\infty}-\frac{5}{\infty}}=\frac{4-0+0}{2+0-0}=\frac{4}{2}=2.$$

По **правилу 2**: т.к. «2» – наивысшая степень x из числителя и знаменателя, то находим отношение коэффициентов при x^2 в числителе и знаменателе: в числителе этот коэффициент равен 4, а в знаменателе – 2. Тогда предел будет равен:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2-3x+1}{2x^2+x-5}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\frac{4}{2}=2.$$

в) Так как степень числителя меньше степени знаменателя, т.е. $m=2<n=3$, то правилу 2 получим:

$$\lim_{x\to 2}\frac{2x^2+3x-9}{6x^3+x-5}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\frac{0}{6}=0.$$

г) Так как степень числителя больше степени знаменателя, т.е. $m=4\geq n=2$, то по правилу 2 получим:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^4-x+1}{x^2+3x-8}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\frac{2}{0}=\infty.$$

Раздел III. Дифференциальное исчисление функций одной переменной

3.1. Понятие производной и дифференциала

Пусть дана функция $y = f(x)$, определенная на некотором промежутке $X \in D_f$.

Определение 3. Если существует конечный предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда последнее стремится к нулю, то этот предел называется *производной* данной функции $f(x)$ в точке x и обозначается:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \qquad (10)$$

Определение 4. Главная линейная часть приращения функции Δy ($\Delta y = y' \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x$, где $\alpha = \alpha(\Delta x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$) называется *дифференциалом функции* в точке x и обозначается: dy, т.е.

$$dy = y' \cdot dx. \qquad (11)$$

Таким образом, чтобы найти дифференциал функции (dy), нужно производную данной функции (y') умножить на дифференциал независимой переменной (dx).

Операция нахождения производной называется *дифференцированием*.

Для справок приводим таблицу основных формул и правил дифференцирования.

Таблица основных формул производных

1. $c' = 0$, $c = const$
2. $x' = 1$.
3. $(c \cdot u)' = c \cdot u'$.
4. $(u + v - w)' = u' + v' - w'$.
5. $(u \cdot v)' = u' \cdot v + uv'$.
6. $(u \cdot v \cdot w)' = u' \cdot v \cdot w + u \cdot v' \cdot w + u \cdot v \cdot w'$.
7. $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$.

8. $(u^n)' = n\cdot u^{n-1}\cdot u'$.

а) $\left(\sqrt{u}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{u}}\cdot u'$.

б) $\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{1}{u^2}\cdot u'$.

в) $\left(\sqrt[n]{u^m}\right)' = \left(u^{\frac{m}{n}}\right)' = \dfrac{m}{n}\cdot u^{\frac{m}{n}-1}$.

9. $(a^u)' = a^u\cdot lna\cdot u'$

10. $(e^u)' = e^u\cdot u'$.

11. $(lnu)' = \dfrac{1}{u}\cdot u'$.

12. $(sinu)' = cosu\cdot u'$

13. $(cosu)' = -sinu\cdot u'$.

14. $(tgu)' = \dfrac{1}{cos^2u}\cdot u'$.

15. $(ctgu)' = -\dfrac{1}{sin^2u}\cdot u'$.

16. $(arcsinu)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u'$.

17. $(arccosu)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u'$.

18. $(arctgu)' = \dfrac{1}{1+u^2}\cdot u'$.

19. $(arcctgu)' = -\dfrac{1}{1+u^2}\cdot u'$.

Задача 3. Найти производные следующих функций:

а) $y = 2x^4 - \dfrac{5}{x^3} - 9\sqrt[3]{x^2}$; б) $y = \left(x^3+1\right)\cdot sinx$; в) $y = \dfrac{arccos5x}{ln(x^2-3x)}$.

Решение. а) Вводя дробные и отрицательные показатели: $x^{-n} = \dfrac{1}{x^n}$ и $\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$, получим:

$$y = 2x^4 - 5x^{-3} - 9x^{\frac{2}{3}}.$$

Применяя правило дифференцирования суммы (4) и формулу дифференцирования степенной функции (8), (8в) соответственно, будем иметь:

$$y' = 2\cdot 4x^{4-1} - 5\cdot(-3)x^{-3-1} - 9\cdot\frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1} = 8x^3 + 15x^{-4} - 6x^{-\frac{1}{3}} = 8x^3 + \frac{15}{x^4} - \frac{6}{\sqrt[3]{x}}.$$

б) Применим правило дифференцирования произведения двух функций (5). Тогда

$$y' = \left(x^3+1\right)'\cdot sinx + \left(x^3+1\right)\cdot(sinx)' = 3x^2\cdot sinx + \left(x^3+1\right)\cdot cosx\,.$$

в) Здесь необходимо воспользоваться правилом дифференцирования частного – формула (7):

$$y' = \frac{(arccos5x)'\cdot ln(x^2-3x) - arccos5x\cdot(ln(x^2-3x))'}{ln^2(x^2-3x)} =$$

$$= \frac{-\frac{1}{\sqrt{1-25x^2}}\cdot(5x)'\cdot ln(x^2-3x) - arccos5x\cdot\frac{1}{x^2-3x}(x^2-3x)'}{ln^2(x^2-3x)} =$$

$$= \frac{-\frac{5}{\sqrt{1-25x^2}}\cdot ln(x^2-3x) - arccos5x\cdot\frac{1}{x^2-3x}(2x-3)}{ln^2(x^2-3x)}.$$

Задача 4. Найти дифференциалы следующих функций:

а) $y = e^{sinx}$; б) $y = 2x^3 - tg(cos2x)$.

Решение. Для нахождения дифференциала применим формулу (11), предварительно найдя производные:

а) $y' = \left(e^{sinx}\right)' = e^{sinx}\cdot(sinx)' = e^{sinx}\cdot cosx$; $dy = e^{sinx}\cdot cosxdx$;

б) $y' = (2x^3 - tg(cos2x))' = 6x^2 - \dfrac{1}{cos^2(cos2x)}\cdot(cos2x)' =$

$$= 6x^2 - \frac{1}{cos^2(cos2x)} \cdot (-sin2x \cdot (2x)') = 6x^2 + \frac{2sin2x}{cos^2(cos2x)};$$

тогда

$$dy = \left[6x^2 + \frac{2sin2x}{cos^2(cos2x)} \right] dx.$$

3.2. Применение производной к исследованию функций

Определение 5. Функция $y = f(x)$ называется *возрастающей* (*убывающей*) в интервале $(a; в)$, если в этом интервале большему значению аргумента соответствует большее (меньшее) значение функции, т.е. для любой пары значений x_1 и x_2, принадлежащих интервалу $(a; в)$ и удовлетворяющих неравенству $x_2 > x_1$, имеет место неравенство: $f(x_2) > f(x_1)$ $\left[f(x_2) < f(x_1) \right]$.

Достаточный признак возрастания (убывания) функции

Если функция в каждой точке интервала имеет положительную (отрицательную) производную y', то сама функция в этом интервале возрастает (убывает).

Говорят, что функция имеет *максимум* (*минимум*) в точке x_0, если значение функции в этой точке больше (меньше), чем ее значение во всех точках окрестности точки x_0.

Экстремум функции – это *максимум* или *минимум* функции (y_{min} и y_{max}).

Точками экстремума или экстремальными точками называются точки, в которых функция имеет экстремум – это $\left(x_{min}; y_{min}\right)$ и $\left(x_{max}; y_{max}\right)$.

Исследовать функцию на *монотонность* – это значит найти ее промежутки возрастания и убывания.

Необходимое условие существования экстремум

Если функция имеет экстремум в точке x_0, то ее производная в этой точке равна нулю или не существует.

Точки, в которых первая производная y' равна нулю или не существует, называются *критическими точками I рода*.

Точки, в которых вторая производная y'' равна нулю или не существует, называются *критическими точками II рода*.

Точки, в которых производная равна нулю, называются *стационарными*.

Первый достаточный признак существования экстремума

Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в окрестности критической точки x_0 и при переходе через нее меняет знак с «+» на «–», то в точке x_0 функция имеет максимум – y_{max}, при этом сама точка x_0 является точкой максимума, т.е. $x_0 = x_{max}$. Если производная y' меняет знак с «–» на «+», то в точке x_0 функция имеет минимум – y_{min}, при этом сама точка x_0 является точкой минимума, т.е. $x_0 = x_{min}$. Если знак производной не изменяется, то функция в точке x_0 экстремума не имеет.

Второй достаточный признак существования экстремума

Если в точке x_0 первая производная $f'(x_0)$ обращается в нуль, а вторая производная $f''(x_0) \neq 0$, то функция $f(x)$ в точке x_0 имеет максимум, если $f''(x_0) < 0$, и минимум, если $f''(x_0) > 0$.

Определение 6. Кривая $y = f(x)$ называется *выпуклой* (*вогнутой*) на интервале $(a; в)$, если дуга кривой расположена ниже (выше) касательных, проведенных в любой точке из этого интервала.

Определение 7. Точки, отделяющие выпуклую часть кривой от вогнутой, называются *точками перегиба* данной кривой.

Достаточный признак выпуклости (вогнутости) кривой

Если во всех точках x интервала $(a; в)$ вторая производная $f''(x) > 0$ ($f''(x) < 0$), то на этом интервале кривая вогнута (выпукла).

Достаточный признак существования точки перегиба

Если при переходе через критическую точку II рода $-\ x_0$ вторая производная $f''(x)$ меняет знак (безразлично как), то точка $\left(x_0; f(x_0)\right)$ является точкой перегиба графика функции $y = f(x)$.

Общая схема исследования функции и построения графика

1. Найти область определения функции D_f.
2. Исследовать функцию на четность, нечетность.
3. Исследовать функцию на монотонность и экстремум.
4. Найти интервалы выпуклости, вогнутости и точки перегиба графика функции.
5. Найти дополнительные точки графика функции (по необходимости).
6. Построить график функции.

Задача 5. Исследовать функцию $y = \frac{1}{12}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 3x + 10$ и построить ее график.

Решение: Исследование предусматривает нахождение точек экстремума, интервалов возрастания и убывания, выпуклости и вогнутости, а также точек перегиба графика заданной функции. Далее по результатам проведенного исследования необходимо построить график.

Опираясь на выше указанную схему, находим:

1. $D_f : x \in (-\infty; +\infty)$.

2. Функция $y = f(x)$ называется четной, если $f(-x) = f(x)$, нечетной, если $f(-x) = -f(x)$. В нашем случае,
$f(-x) = \frac{1}{12}(-x)^3 - \frac{1}{2}(-x)^2 - 3(-x) + 10 =$
$= -\frac{1}{12}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 3x + 10$ – ни четная, ни нечетная, или иначе, функция общего вида.

3. Для исследования функции на монотонность и экстремум, необходимо найти первую производную y', приравнять ее к нулю и найти критические точки I рода.

$$y' = \frac{1}{4}x^2 - x - 3;\ \frac{1}{4}x^2 - x - 3 = 0 \Rightarrow x^2 - 4x - 12 = 0.$$

Корни этого уравнения: $x_{1,2} = -2; 6$ – критические точки I рода. Точки –2 и 6 разбивают числовую ось на три интервала: $(-\infty; -2)$, $(-2; 6)$, $(6; +\infty)$ (рис. 6).

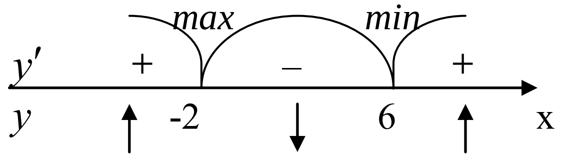

Рис. 6

На интервалах $(-\infty; -2) \cup (6; +\infty)$ $y' > 0$, поэтому (по достаточному признаку возрастания (убывания) функции) на данных интервалах функция возрастает, а на промежутке $(-2; 6)$ $y' < 0$, следовательно, на нем функция убывает. Так как при переходе через критическую точку $x_0 = -2$ производная y' меняет знак с «+» на «–», то (по I достаточному признаку существования экстремума) в точке $x_0 = -2$ функция имеет максимум – y_{max}, а точка –2 является точкой максимума, т.е. $x_{max} = -2$,

$$y_{max} = f(x_{max}) = f(-2) = -\frac{8}{12} - 2 + 10 = 13\frac{1}{3}.$$

При переходе через критическую точку $x_0 = 6$ производная y' меняет знак с «–» на «+», следовательно, в точке $x_0 = 6$ функция имеет минимум – y_{min}, а точка 6 является точкой минимума, т.е. $x_{min} = 6$, тогда

$$y_{min} = f(x_{min}) = f(6) = 18 - 18 - 18 + 10 = -8.$$

Итак, $A(-2; 13\frac{1}{3})$ – точка максимума, $B(6; -8)$ – точка минимума графика функции.

4. Чтобы найти интервалы выпуклости, вогнутости и точки перегиба графика данной функции, необходимо найти вторую производную y'', приравнять ее к нулю, найти критические точки II рода и исследовать знак y'' слева и справа от критических точек.
Итак,

$$y'' = \frac{1}{2}x - 1; \ \frac{1}{2}x - 1 = 0 \Rightarrow x = 2.$$

Точка $x_0 = 2$ является критической точкой II рода. Отметим ее на числовой оси (рис.7).

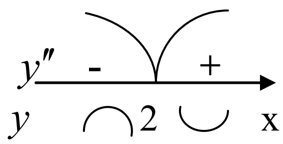

Рис. 7

На интервале $(-\infty; 2)$ $y'' < 0$, а на $(2; +\infty)$ $y'' > 0$, следовательно, (по достаточному признаку выпуклости (вогнутости) кривой) на правом интервале кривая выпукла, на левом – вогнута. Производная y'' при переходе через $x_0 = 2$ меняет знак, тогда (по достаточному признаку существования точки перегиба) точка $\mathrm{M}(2; 2\frac{2}{3})$ является точкой перегиба, где $f(2) = \frac{8}{12} - 2 - 6 + 10 = 2\frac{2}{3}$.

5. Необходимо найти дополнительные точки графика данной функции:

$$f(0) = 10,$$

$$f(-4) = \frac{1}{12} \cdot (-4)^3 - \frac{1}{2} \cdot 16 + 3 \cdot 4 + 10 \approx 8{,}6,$$

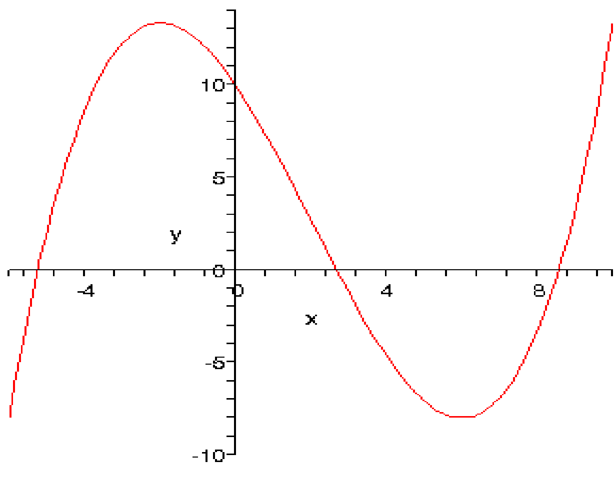

Рис.8

$$f(8)=\frac{1}{12}\cdot 8^3-\frac{1}{2}\cdot 32+3\cdot 8+10\approx -3{,}3.$$

6. Построим график данной функции (рис. 8).

Раздел IV. Интегральное исчисление функций одной переменной

4.1. Понятие первообразной и неопределенного интеграла

Определение 8. Функция $F(x)$ называется *первообразной* для функции $y=f(x)$ на интервале $X\in D_f$, если для каждой точки из этого интервала выполняется равенство:

$$F'(x)=f(x). \tag{12}$$

Определение 9. Совокупность всех первообразных функции $y=f(x)$ на промежутке $X\in D_f$ называется *неопределенным интегралом* от данной функции и обозначается:

$$\int f(x)dx=F(x)+C, \tag{13}$$

где $\int$ – знак неопределенного интеграла;

$f(x)$ – подынтегральная функция;

$f(x)dx$ – подынтегральное выражение.

4.2. Основные свойства неопределенного интеграла

1. В неопределенном интеграле постоянный множитель можно выносить за знак интеграла:

$$\int k\cdot f(x)dx=k\cdot\int f(x)dx, \tag{14}$$

где $k=const$.

2. Неопределенный интеграл от алгебраической суммы нескольких функций равен алгебраической сумме неопределенных интегралов от каждой функции :

$$\int[f(x)\pm\varphi(x)]dx=\int f(x)dx\pm\int\varphi(x)dx. \tag{15}$$

3. Дифференциал неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению:

$$d\left[\int f(x)dx\right] = f(x)dx. \qquad (16)$$

4. Неопределенный интеграл от дифференциала некоторой функции равен этой же функции с точностью до постоянной C:

$$\int d\left[f(x)\right] = f(x) + C. \qquad (17)$$

Правило интегрирования: если $F(x)$ – первообразная для функции $f(x)$, то $\frac{1}{a}\cdot F(ax+в)$ является первообразной для функции $f(ax+в)$, где $\frac{1}{a}$ называется компенсирующим множителем.

Для справок приведем таблицу основных интегралов.

Таблица основных интегралов

1. $\int dx = x + C$, $\int dt = t + C$,

$\int du = u + C$, $\int dv = v + C$.

2. $\int 0dx = C$.

3. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$, $n \neq -1, n \in R$.

4. $\int \sqrt{x}dx = \frac{2x^{3/2}}{3} + C$.

5. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C$.

6. $\int \frac{dx}{x^n} = \int x^{-n}dx = \frac{x^{-n+1}}{-n+1} + C =$

$= \frac{1}{(1-n)x^{-n+1}} + C$, $n \neq 1$

7. $\int \sqrt[n]{x^m}dx = \int x^{\frac{m}{n}}dx = \frac{x^{\frac{m}{n}+1}}{\frac{m}{n}+1} + C$,

$\frac{m}{n} \neq -1, \frac{m}{n} \in R$.

8. $\int \frac{dx}{x} = ln|x| + C$.

9. $\int \frac{dx}{ax+в} = \frac{1}{a} ln|ax+в| + C$.

10. $\int e^x dx = e^x + C$.

11. $\int a^x dx = \frac{a^x}{lna} + C$.

13. $\int cosxdx = sinx + C$.

12. $\int sinxdx = -cosx + C$.

14. $\int tgxdx = -ln|cosx| + C$.

18. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \cdot ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$.

15. $\int ctgxdx = ln|sinx| + C$.

19. $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \cdot arctg\frac{x}{a} + C = -\frac{1}{a} \cdot arcctg\frac{x}{a} + C$.

16. $\int \frac{dx}{cos^2 x} = tgx + C$.

20. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a}} = ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a}\right| + C$.

17. $\int \frac{dx}{sin^2 x} = -ctgx + C$.

21. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = arcsin\frac{x}{a} + C = -arccos\frac{x}{a} + C$.

Раздел V. Методы интегрирования в неопределенном интеграле

5.1. Непосредственное интегрирование

Интегрирование, основанное на применении таблицы основных интегралов, свойств неопределенного интеграла, а также простейших тождественных преобразований подынтегральной функции, принято называть *непосредственным интегрированием*.

Задача 6. Вычислить интеграл: а) $\int \left(4x^3 - \sqrt{x} + \frac{6}{x^2}\right)dx$; б) $\int \frac{dx}{25x^2 - 4}$;

в) $\int \left(\frac{1}{\sqrt{16 - 9x^2}} + \frac{5}{cos^2(6x-7)} - e^{-\frac{6}{7}x - 8}\right)dx$.

Решение: а) Вводя дробные и отрицательные показатели и применяя формулу интегрирования для степенной функции (1), а также св-во (2) неопределенного интеграла, получим:

$$\int \left(4x^3 - \sqrt{x} + \frac{6}{x^2}\right)dx = \int 4x^2 dx - \int \sqrt{x}dx + \int \frac{6}{x^2}dx =$$

$$=4\int x^2dx-\int \sqrt{x}dx+6\int x^{-2}dx=\frac{4x^3}{3}-\frac{2x^{3/2}}{3}+\frac{6x^{-1}}{-1}+C=\frac{4x^3}{3}-\frac{2x^{3/2}}{3}-\frac{6}{x}+C.$$

б) Преобразуем выражение в знаменателе, применив формулу (9) и, введенное выше, правило интегрирования:

$$\int \frac{dx}{25x^2-4}=\int \frac{dx}{(5x)^2-2^2}=\frac{1}{2\cdot 2}\cdot\frac{1}{5}ln\left|\frac{5x-2}{5x+2}\right|+C=\frac{1}{20}ln\left|\frac{5x-2}{5x+2}\right|+C,$$

где $\frac{1}{5}$ – компенсирующий множитель – это число, взаимно-обратное к коэффициенту при *x*, т.е. 5.

в) Применив к слагаемым подынтегральной функции формулы (12), (7) и (3) соответственно, получим:

$$\int\left(\frac{1}{\sqrt{16-9x^2}}+\frac{5}{cos^2(6x-7)}-e^{-\frac{6}{7}x-8}\right)dx=\int\frac{1}{\sqrt{16-9x^2}}dx+\int\frac{5}{cos^2(6x-7)}dx-$$

$$-\int e^{-\frac{6}{7}x-8}dx=\frac{1}{3}arcsin\frac{3x}{4}+\frac{5}{6}tg(6x-7)+\frac{7}{6}e^{-\frac{6}{7}x-8}+C.$$

5.2. Метод подстановки (замены переменной) в неопределенном интеграле

Если данный интеграл $\int f(x)dx$ не является табличным и не может быть найден методом непосредственного интегрирования, то введение новой переменной интегрирования позволяет свести данный интеграл к табличному.

Положим $x=\varphi(t)$, где $\varphi(t)$ непрерывная и дифференцируемая функция на некотором промежутке. Если на указанном промежутке изменения переменной *x* функция $f(x)$ интегрируема, то имеет место формула замены переменной в неопределенном интеграле:

$$\int f(x)dx=\int f[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t)dt. \qquad (18)$$

После того, как интеграл вычислен с помощью подстановки $x=\varphi(t)$, следует вернуться к старой переменой х.

Иногда вместо указанной подстановки применяют подстановку $t=\varphi(x)$.

Вычисление интегралов методом подстановки значительно упрощается, если пользоваться следующими формулами:

а) $\int \dfrac{f'(x)dx}{f(x)} = \left\{ \begin{matrix} f(x)=t \\ f'(x)dx=dt \end{matrix} \right\} = \int \dfrac{dt}{t} = ln|t| + C = ln|f(x)| + C$.

б) $\int [f(x)]^n \cdot f'(x)dx = \left\{ \begin{matrix} f(x)=t \\ f'(x)dx=dt \end{matrix} \right\} = \int t^n dt = \dfrac{t^{n+1}}{n+1} + C = \dfrac{f^{n+1}(x)}{n+1} + C$,

$n \in R,\ n \neq -1$.

в) $\int \dfrac{f'(x)dx}{[f(x)]^n} = \left\{ \begin{matrix} f(x)=t \\ f'(x)dx=dt \end{matrix} \right\} = \int \dfrac{dt}{t^n} = \dfrac{1}{(1-n)\cdot t^{n-1}} + C =$

$= \dfrac{1}{(1-n)\cdot [f(x)]^{n-1}} + C$, $n \in R,\ n \neq 1$.

г) $\int \dfrac{f'(x)dx}{\sqrt{f(x)}} = \left\{ \begin{matrix} f(x)=t \\ f'(x)dx=dt \end{matrix} \right\} = \int \dfrac{dt}{\sqrt{t}} = 2\sqrt{t} + C = 2\sqrt{f(x)} + C$.

д) $\int e^{f(x)} \cdot f'(x)dx = \left\{ \begin{matrix} f(x)=t \\ f'(x)dx=dt \end{matrix} \right\} = \int e^t dt = e^t + C = e^{f(x)} + C$.

е) $\int a^{f(x)} \cdot f'(x)dx = \left\{ \begin{matrix} f(x)=t \\ f'(x)dx=dt \end{matrix} \right\} = \int a^t dt = \dfrac{a^t}{lna} + C = \dfrac{a^{f(x)}}{lna} + C$.

Задача 7. Вычислить интеграл методом подстановки:

а) $\int \dfrac{dx}{5x+1}$; б) $\int e^{x^2+1} \cdot xdx$; в) $\int (tg2x+1)^3 \cdot \dfrac{dx}{cos2x}$; г) $\int \sqrt[5]{4x+7}dx$.

Решение:

а) <u>I способ</u>:

$$\int \frac{dx}{5x+1} = \left\{ \begin{array}{l} 5x+1=t \\ 5dx=dt \\ dx=\dfrac{dt}{5} \end{array} \right\} = \int \frac{dt}{5t} = \frac{1}{5}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{5} \cdot ln|t| + C = \frac{1}{5} ln|5x+1| + C.$$

<u>II способ</u>: применим формулу (в), в которой $f(x) = \dfrac{1}{5x+1}$; $F(x) = \dfrac{1}{5} ln|5x+1|$; $\dfrac{1}{5}$ – компенсирующий множитель. Итак, $\displaystyle\int \frac{dx}{5x+1} = \frac{1}{5} ln|5x+1| + C$.

б) $$\int e^{x^2+1} \cdot xdx = \left\{ \begin{array}{l} x^2+1=t \\ 2xdx=dt \\ xdx=\dfrac{dt}{2} \end{array} \right\} = \int e^t dt = e^t + C = e^{x^2+1} + C.$$

в) Здесь также применим формулу (в), где $f(x) = tg2x+1$; $n=3$:

$$\int (tg2x+1)^3 \cdot \frac{dx}{cos2x} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(tg2x+1)^4}{4} + C = \frac{(tg2x+1)^3}{8} + C.$$

г) Аналогично, применяя формулу (в), где $f(x) = 4x+7$; $n = \dfrac{1}{5}$:

$$\int \sqrt[5]{4x+7}\,dx = \int (4x+7)^{1/5} dx = \frac{1}{4} \cdot \frac{5(4x+7)^{6/5}}{6} + C = \frac{5(4x+7)^{6/5}}{24} + C.$$

Раздел VI. Основы теории вероятностей

6.1. Основные определения теории вероятностей

Событие, которое при наличии некоторого комплекса условий может произойти или не произойти, называется *случайным*.

Событие называется *достоверным*, если оно обязательно произойдет при осуществлении определенной совокупности условий.

Событие называется *невозможным,* если оно при выполнении определенного комплекса условий заведомо не произойдет.

События *A*, *B*, *C*, *D*, … называются *несовместными*, если наступление какого – либо из них в условиях испытания исключает всякую возможность появления другого события этой совокупности.

События *A*, *B*, *C*, *D*, … называются *совместными*, если в данных условиях появление одного из этих событий не исключает возможность появления другого.

События *A*, *B*, *C*, *D*, … считают *единственно возможными* в данном испытании, если одно и только одно из них обязательно произойдет.

События *A*, *B*, *C*, *D*, … называются *равновозможными*, если нет основания предполагать большую вероятность появления одного из них перед всеми остальными.

Два единственно возможных и несовместных события называются *противоположными*.

Если одно из противоположных событий обозначено *A*, то другое принято обозначать $\overline{A}$. Для любого события *A* вероятность противоположного события выражается равенством:

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A).$$

Если события *A*, *B*, *C*, *D*, … при данных условиях являются несовместными и единственно возможными, то говорят, что они образуют *полную группу* событий.

6.2. Классическое определение вероятности

Определение 10. Вероятность события *A* называют отношение числа, благоприятствующих этому событию исходов к общему числу всех равновозможных несовместных элементарных исходов, образующих полную группу.

Итак, вероятность события *A* определяется формулой:

$$P(A) = \frac{m}{n}, \tag{19}$$

где m – число элементарных исходов, благоприятствующих *A*; n – число всех возможных элементарных исходов испытания.

Из определения вероятности вытекают следующие свойства:

1) вероятность любого события есть неотрицательное число, заключенное между нулем и единицей, т.е. $0 \le P(A) \le 1$;

2) вероятность достоверного события *A* равна единице, т.е. $P(A)=1$;

3) вероятность невозможного события *A* равна нулю, т.е. $P(A)=0$.

Два события называются *независимыми*, если вероятность одного из них не зависит от появления или непоявления другого. В противном случае, они называются *зависимыми.*

Несколько событий называются *попарно независимыми*, если любые два из них независимы.

Вероятность события *B*, вычисленная в предположении, что событие *A* произошло, называется *условной вероятностью* и обозначают $P_A(B)$.

Суммой двух событий *A* и *B* называется событие *C*, состоящее в появлении хотя бы одного из этих событий.

Произведением двух событий *A* и *B* называется событие *C*, состоящее в том, что произойдет и событие *A*, и событие *B*.

6.3. Теоремы сложения и умножения вероятностей

Теоремы сложения вероятностей. Вероятность появления хотя бы одного из двух совместных событий или *A*, или *B* равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления:

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB). \qquad (20)$$

Если события *A* и *B* являются несовместными, то вероятность их совместного появления равна нулю, т.е. $P(AB)=0$ и, следовательно,

$$P(A+B)=P(A)+P(B). \qquad (21)$$

Теоремы умножения вероятностей. Вероятность совместного появления двух зависимых событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, вычисленную в предположении, что первое событие уже наступило:

$$P(AB)=P(A)\cdot P_A(B). \qquad (22)$$

Если события A и B являются независимыми, то условная вероятность $P_A(B)$ равна безусловной вероятности $P(B)$ и, следовательно,

$$P(AB)=P(A)\cdot P(B). \qquad (23)$$

Задача 8. Три стрелка производят по одному выстрелу в цель независимо друг от друга. Вероятности попадания в цель для каждого из них равны соответственно 0,7; 0,8; 0,9. Найти вероятность того, что: а) в цель попадет только один стрелок; б) попадут только два стрелка; в) попадут не менее двух стрелков.

Решение: а) Рассмотрим следующие события:

A_1 - первый стрелок попал в цель;

A_2 - второй стрелок попал в цель;

A_3 - третий стрелок попал в цель;

$\overline{A}_1$ - первый стрелок не попал в цель;

$\overline{A}_2$ - второй стрелок не попал в цель;

$\overline{A}_3$ - третий стрелок не попал в цель.

По условию: $P(A_1)=0{,}7$; $P(A_2)=0{,}8$; $P(A_3)=0{,}9$;

$$P(\overline{A}_1)=1-0{,}7=0{,}3;\ P(\overline{A}_2)=0{,}2;\ P(\overline{A}_3)=0{,}1.$$

Пусть событие B – попал только один стрелок. Тогда

$$B=A_1\overline{A}_2\overline{A}_3+\overline{A}_1A_2\overline{A}_3+\overline{A}_1\overline{A}_2A_3.$$

Так как каждое событие (слагаемое) несовместное и каждое событие (сомножители) независимое, то по соответствующим теоремам:

$$P(B)=P\left(A_1\right)\cdot P\left(\overline{A}_2\right)\cdot P\left(\overline{A}_3\right)+P\left(\overline{A}_1\right)\cdot P\left(A_2\right)\cdot P\left(\overline{A}_3\right)+P\left(\overline{A}_1\right)\cdot P\left(\overline{A}_2\right)\cdot P\left(A_3\right)=$$

$$=0{,}7\cdot 0{,}2\cdot 0{,}1+0{,}3\cdot 0{,}8\cdot 0{,}1+0{,}3\cdot 0{,}2\cdot 0{,}9=0{,}092.$$

б) Пусть событие C – попадут только два стрелка. Тогда

$$C=A_1A_2\overline{A}_3+A_1\overline{A}_2A_3+\overline{A}_1A_2A_3.$$

Отсюда

$$P(C)=P\left(A_1\right)\cdot P\left(A_2\right)\cdot P\left(\overline{A}_3\right)+P\left(A_1\right)\cdot P\left(\overline{A}_2\right)\cdot P\left(A_3\right)+P\left(\overline{A}_1\right)\cdot P\left(A_2\right)\cdot P\left(A_3\right)=$$

$$=0,7\cdot 0,8\cdot 0,1+0,7\cdot 0,2\cdot 0,9+0,3\cdot 0,8\cdot 0,9=0,398.$$

в) Пусть событие D – попадут не менее двух стрелков. Событие D означает, что из трех стрелков попадут либо только два, либо все три стрелка. Тогда

$$D=A_1A_2\overline{A}_3+A_1\overline{A}_2A_3+\overline{A}_1A_2A_3+A_1A_2A_3.$$

Следовательно,

$$P(D)=0,398+0,7\cdot 0,8\cdot 0,9=0,902.$$

Задача 9. Студент знает 15 из 20 вопросов программы. Какова вероятность того, что он знает все три вопроса, предложенные экзаменатором?

Решение: Пусть событие:
A – студент знает первый предложенный ему вопрос;
B – студент знает второй предложенный ему вопрос;
C – студент знает третий предложенный ему вопрос.
Тогда $P(A)=\frac{15}{20}=\frac{3}{4}$.

Вероятность того, что второй вопрос он будет знать при условии, что первый он знает, т.е. условная вероятность события B, равна:

$$P_A(B)=\frac{14}{19}.$$

Вероятность того, что третий вопрос он будет знать при условии, что первые два он знает, т.е. условная вероятность события C, равна:

$$P_{AB}(C)=\frac{13}{18}.$$

Искомая вероятность того, что студент знает все три предложенные экзаменатором вопроса, будет равна:

$$P(ABC)=P(A)\cdot P_A(B)\cdot P_{AB}(C)=\frac{3}{4}\cdot\frac{14}{19}\cdot\frac{13}{18}=0,399\approx 0,4.$$

6.4. Повторные независимые испытания

Рассмотрим методы решения задач, в которых один и тот же опыт повторяется несколько раз. В результате каждого опыта интересующее нас событие может появиться или не появиться. Однако нам не важен результат отдельного опыта, а важен результат серии опытов, т.е. какова вероятность появления того или иного числа событий в серии опытов. Характерным примером такой задачи являются различного рода выборки. Когда образована выборка и производится ее изучение, то каждый элемент ее обследуется и устанавливается наличие или отсутствие того или иного фактора. Обследование одного элемента выборки есть опыт или испытание. Обследование всех элементов выборки, проводимое в одинаковых условиях, есть повторение испытаний.

Основными формулами вычисления вероятностей появления события в повторных испытаниях являются формулы Бернулли, Пуассона, локальная и интегральная формулы Лапласа.

$$P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}. \tag{24}$$

где C_n^k – число сочетаний из n по k, определяется по формуле:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \tag{25}$$

где $n!$ (читается: «эн факториал») означает произведение натуральных чисел от 1 до n включительно, т.е. $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$. Например, $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$.

Замечание: $0! = 1$.

Формула (24) называется формулой Бернулли. Она применяется в том случае, когда n – мало, а p – велико ($p \geq 0{,}1$).

Если n – велико, а p – мало ($p < 0{,}1$; $np \leq 10$), то применяется формула Пуассона:

$$P_n(k) = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}. \tag{26}$$

Формула Пуассона наряду с задачей повторения испытаний используется также для расчета вероятности появления различного числа событий (например, точек или других элементов) в какой – либо области (площади, объеме или во времени), при этом должны соблюдаться следующие условия:

а) события (точки) в области распределены равномерно;

б) положение каждого события случайное – независимое друг от друга;

в)события появляются в области поодиночке, а не парами, тройками и т.д.

При решении задач с использованием формулы Пуассона исходные данные могут встречаться в двух вариантах:

1) в условии задачи указывается вероятность p появления события в одном испытании и число испытаний n;

2) в условии задачи среднее число λ_1 появлений события за какую – либо единицу области (площади, объема, времени) и размер области s (площади, объема, времени), внутри которой появляются интересующие события.

В первом случае параметр распределения Пуассона определяется как произведение вероятности p и числа испытаний n:

$$\lambda = np. \tag{27}$$

Во втором случае этот параметр определяется произведением среднего числа появлений события и размера области:

$$\lambda = \lambda_1 \cdot s. \tag{28}$$

Дальнейший расчет вероятности по формуле (26) одинаков в обоих случаях.

Если вероятность появления события A в каждом из n независимых испытаний постоянна и равна p $(0 < p < 1)$, причем n – велико и p – велико, то вероятность того, что событие A в этих испытаниях появится ровно k раз, вычисляется, в силу локальной теоремы Лапласа, по приближенной формуле (и тем точнее, чем больше n):

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x), \tag{29}$$

где $x = \dfrac{k - np}{\sqrt{npq}}$; $\varphi(x)$ – функция Лапласа, значения которой даны в приложении 1; при этом она четная, т.е. $\varphi(-x) = \varphi(x)$ и $\varphi(x \geq 4) = 0$.

Следует отметить, что на точность результата оказывает влияние и значение pq (произведение вероятностей появления и непоявления события в каждом испытании). Погрешность результата тем больше, чем больше будет значение pq отличаться от 0,25.

Если вероятность появления события A в каждом из n независимых испытаний постоянна и равна p $(0 < p < 1)$, то вероятность того, что событие A появится не менее k_1 и не более k_2 раз, вычисляется, в силу интегральной теоремы Лапласа, по формуле:

$$P_n(k_1; k_2) \approx \Phi\left(\frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}\right), \qquad (30)$$

где $\Phi(x)$ - функция Лапласа, значения которой даны в приложении 2; при этом она нечетная, т.е. $\Phi(-x) = -\Phi(x)$ и $\Phi(x > 5) = 0{,}5$.

Задача 10. Всхожесть семян данного растения составляет 90%. Найти вероятность того, что из пяти посеянных семян взойдут: а) четыре семени; б) не менее четырех.

Решение. Воспользуемся формулой Бернулли (24), т.к. n – мало, p – велико.
а) По условию задачи вероятность всхожести семян $p = 0{,}9$, тогда вероятность того, что семя не взойдет, будет равна: $q = 1 - p = 1 - 0{,}9 = 0{,}1$; $n = 5$, $\kappa = 4$. Подставляя данные в формулу, найдем искомую вероятность.

$$P_5(4) = C_5^4 \cdot 0{,}9^4 \cdot 0{,}1 = \frac{5!}{4! \cdot 1!} \cdot 0{,}656 \cdot 0{,}1 = 0{,}328.$$

б) Событие A состоит в том, что из пяти посеянных семян взойдут либо четыре, либо пять. Таким образом,

$$P(A) = P_5(4) + P_5(5).$$

Первое слагаемое $P_5(4)$ найдено в пункте а). Для вычисления второго слагаемого также применяется формула (24).

$$P_5(5) = C_5^5 \cdot 0{,}9^5 \cdot 0{,}1^0 = 0{,}591.$$

Следовательно, искомая вероятность равна:

$$P(A) = 0{,}328 + 0{,}591 = 0{,}919.$$

Задача 11. В среднем на 1 $м^2$ площади посева встречаются 0,5 стеблей сорняков. Определить вероятность того, что на площади 4 $м^2$ окажется два стебля сорняков.

Решение. Каждый стебель сорняков рассматривается как точка, появляющаяся в заданной площади, следовательно, вновь применим формулу (26). Известно: $\lambda_1 = 0{,}5 м^{-2}$, $s = 4\ м^2$, тогда $\lambda = \lambda_1 \cdot s = 0{,}5 \cdot 4 = 2$.

Следовательно,

$$P(2) = \frac{2^2}{2!} \cdot e^{-2} = \frac{4}{1 \cdot 2 \cdot 2{,}7282^2} \approx 0{,}2707, \quad \text{где } e \approx 2{,}7182.$$

Задача 12. Вероятность того, что зерно заражено вредителями, равна 0,002. Найти вероятность того, что из 1000 зерен будет зараженных вредителями: а) ровно три зерна; б) не менее трех.

Решение: Дано: $n = 1000$; $p = 0{,}002$; $k = 3$. Определить: $P_{1000}(3)$.

Согласно (26) , где $\lambda = np = 1000 \cdot 0{,}002 = 2$, получим:

$$P_{1000}(3) = \frac{2^3}{3!} \cdot e^{-2} = \frac{4}{3} \cdot 0{,}1353 \approx 0{,}1804.$$

б) Событие «не менее трех» определяется неравенством $k \geq 3$. Определить $P_{1000}(k \geq 3)$. Так как события: «появление не менее 3-х раз» и «появление менее 3-х раз» являются противоположными и образуют полную группу, то вероятность искомого события будем определять из формулы полной вероятности, т.е. $P_{1000}(k \geq 3) = 1 - P_{1000}(k < 3)$. Но

$$P_{1000}(k < 3) = P_{1000}(0) + P_{1000}(1) + P_{1000}(2).$$

Каждую из $P_{1000}(0)$, $P_{1000}(0)$ и $P_{1000}(0)$ будем определять также по формуле (26).

$$P_{1000}(0) = \frac{2^0}{0!} \cdot e^{-2} = 0{,}1353;$$

$$P_{1000}(1) = \frac{2^1}{1!} \cdot e^{-2} = 0{,}2707;$$

$$P_{1000}(2) = \frac{2^2}{2!} \cdot e^{-2} = 0{,}2707.$$

Таким образом, искомая вероятность

$$P_{1000}(k \geq 3) = 1 - (0{,}1353 + 0{,}2707 + 0{,}2707) = 0{,}3233.$$

Задача 13. В некотором водохранилище карпы составляют 80%. Найти вероятность того, что из 400 выловленных в этом водохранилище карпов окажется 330.

Решение: По условию задачи: $n = 400$ (велико); $p = 0{,}8$ (велико); $q = 0{,}2$; $k = 330$. Следовательно, имеем условия локальной теоремы Лапласа. Для начала найдем: а)

$$x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}} = \frac{330 - 400 \cdot 0{,}8}{\sqrt{400 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2}} = \frac{330 - 320}{8} = \frac{10}{8} = 1{,}25.$$

б) По приложению 1определяем, что $\varphi(1{,}25) = 0{,}1826$.

в) Тогда по формуле (29) искомая вероятность будет равна:

$$P_{400}(330) = \frac{1}{8} \cdot 0{,}1826 = 0{,}022'8 \approx 0{,}023.$$

Задача 14. Вероятность того, что в стаде крупного рогатого скота одна ее единица будет являться породой черно-пестрой, равна 0,6. Какова вероятность того, что из 150 голов не менее 78 и не более 96 будут такой породы?

Решение: Здесь $n = 150$ (велико); $p = 0{,}6$ (велико); $q = 0{,}4$; $k_1 = 78$ и $k_2 = 96$. Имеем данные, удовлетворяющие интегральной теореме Лапласа. Следовательно, для нахождения искомой вероятности, применим формулу (30).

$$P_{150}(78; 96) \approx \Phi\left(\frac{96 - 150 \cdot 0{,}6}{\sqrt{150 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4}}\right) - \Phi\left(\frac{78 - 150 \cdot 0{,}6}{\sqrt{150 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4}}\right) = \Phi\left(\frac{96 - 90}{6}\right) - \Phi\left(\frac{78 - 90}{6}\right) =$$

$$= \Phi(1) - \Phi(-2) = \Phi(1) + \Phi(2) = \{\text{см. прилож. } 2\} = 0{,}3413 + 0{,}4772 = 0{,}818'5 \approx 0{,}819.$$

6.5. Дискретная случайная величина

Определение 11. Случайной называют величину (СВ), которая в результате испытания примет одно и только одно возможное значение, наперед неизвестное и зависящее от случайных причин, которые заранее не могут быть учтены.

Определение 12. Дискретной (прерывной) случайной величиной (ДСВ) называют СВ, которая принимает отдельные, изолированные возможные значения с определенными вероятностями.

Закон распределения СВ можно задать в виде таблицы с указанием значений, принимаемых ею и соответствующими этим значениям вероятностями.

Задача 15. Закон распределения ДСВ X задан таблицей:

x_i	-1	6	13	20	27
p_i	0,2	0,1	0,4	0,2	0,1

Вычислить: а) математическое ожидание $M(X)$; б) дисперсию $D(X)$; в) среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$. Начертить график закона распределения и показать на нем вычисленные $M(x)$ и $D(x)$.

Решение. а) Математическое ожидание $M(x)$ дискретной случайной величины вычисляется по формуле:

$$M(X)=x_1p_1+x_2p_2+...+x_np_n=\sum_{i=1}^{n}x_ip_i\,. \qquad (31)$$

Подставляя данные задачи в формулу (31), получим:

$$M(X)=-1\cdot 0{,}2+6\cdot 0{,}1+13\cdot 0{,}4+20\cdot 0{,}2+27\cdot 0{,}1=12{,}3.$$

б) Дисперсия $D(x)$ дискретной случайной величины вычисляется по формуле:

$$D(X)=\sum_{i=1}^{n}(x_i-M(X))^2\cdot p_i\,. \qquad (32)$$

Подставляя в формулу (32) данные из таблицы, получим:

$$D(X) = (-1-12{,}3)^2 \cdot 0{,}2 + (6-12{,}3)^2 \cdot 0{,}1 + (13-12{,}3)^2 \cdot 0{,}4 + (20-12{,}3)^2 \cdot 0{,}2 +$$

$$+ (27-12{,}3)^2 \cdot 0{,}1 = 35{,}378 + 3{,}969 + 0{,}196 + 11{,}858 + 21{,}609 = 73{,}01.$$

в) Среднеквадратическое отклонение $\sigma(X)$ вычисляется по формуле:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}\,. \qquad (33)$$

Тогда, в нашем случае,

$$\sigma(X) = \sqrt{73{,}01} \approx 8{,}5\,.$$

Далее сделаем чертеж. В плоскости xOp по оси Ox в выбранном масштабе откладываем значения x_i, по оси Op – их соответствующие вероятности. Точки $(x_i\,; p_i)$ соединяем отрезками прямой. Таким образом, получили многоугольник распределения заданной случайной величины. Вычисленное значение математического ожидания $M(X)$ откладываем от начала координат по оси абсцисс. От значения $M(X)$ вправо и влево откладываем отрезки размером в одно среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$ (рис. 9).

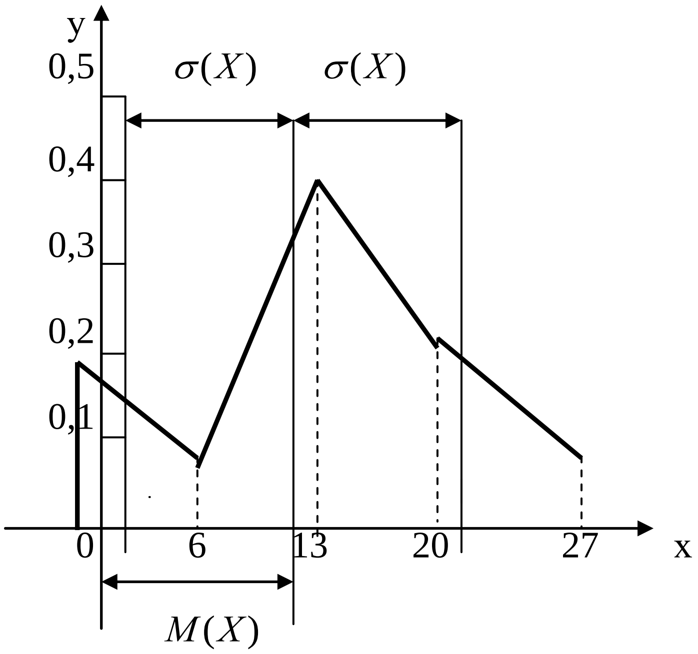

Рис. 9

Раздел VII. Задания контрольной работы

Задание №1. Даны координаты вершин треугольника ABC. Найти уравнение: 1) сторон данного треугольника; 2) высоты CD, опущенной из вершины C на сторону AB; 3) медианы AE; 4) окружности, для которой медиана AE служит диаметром; 5) $\angle A$.

1. $A(-2;-3)$;	$B(0;7)$;	$C(8;3)$.
2. $A(1;2)$;	$B(3;12)$;	$C(11;8)$.
3. $A(-4;-1)$;	$B(-2;9)$;	$C(6;5)$.
4. $A(4;1)$;	$B(6;11)$;	$C(14;7)$.
5. $A(-3;-2)$;	$B(-1;8)$;	$C(7;4)$.
6. $A(2;-5)$;	$B(4;5)$;	$C(12;1)$.
7. $A(3;0)$;	$B(5;10)$;	$C(13;6)$.
8. $A(0;3)$;	$B(2;13)$;	$C(10;9)$.
9. $A(-1;5)$;	$B(1;15)$;	$C(9;11)$.
10. $A(5;4)$;	$B(7;14)$;	$C(15;10)$.
11. $A(0;3)$;	$B(1;0)$;	$C(-2;-3)$.
12. $A-5;6)$;	$B(2;2)$;	$C(1;8)$.
13. $A(-4;-2)$;	$B(-2;8)$;	$C(-2;5)$.
14. $A(7;0)$;	$B(-3;10)$;	$C(4;7)$.
15. $A(-3;-1)$;	$B(-1;-5)$;	$C(0;0)$.
16. $A(-5;-1)$;	$B(9;-6)$;	$C(-12;0)$.
17. $A(3;-7)$;	$B(-4;0)$;	$C(10;-7)$.
18. $A(3;3)$;	$B(2;3)$;	$C(4;8)$.
19. $A(-7;5)$;	$B(1;-5)$;	$C(-6;10)$.
20. $A(-2;7)$;	$B(7;7)$;	$C(1;5)$.

Задание № 2. Найдите пределы указанных функций.

21. а) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-16}{3x^2-16x+16}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-2x+1}{4x^2+x+3}$.

22. а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2+x-3}{3x^2-x-2}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-x-1}{3x^2+4x-2}$.

23. а) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2x^2+5x+2}{4x^2+11x+6}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-3x+1}{5x^2+4x-3}$.

24. а) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{3x^2+8x-3}{x^2+x-6}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+3x-4}{3x^2+x+2}$.

25. а) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-6x+9}{2x^2-3x-9}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3+4x-2}{x^3-3x^2+4}$.

26. а) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-16}{3x^2-16x+16}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-5x-2}{2x-x^3-6}$.

27. а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2-5x-2}{2x^2-x-6}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-3x+1}{3x^2+x+4}$.

28. а) $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{2x^2+15x+25}{5-4x-x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2-2x+1}{2x^2+x^5-3}$.

29. а) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{4x^2+7x+3}{2x^2+x-1}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3-2x-x^2}{x^2+4x+1}$.

30. а) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x^2-9x+9}{x^2-5x+6}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-5x+4}{x^3-x+1}$.

31. а) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{5x-x^2-4}{x^2-2x-8}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+x-4}{3+x-4x^2}$.

32. а) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-2x-8}{2x^2+5x+2}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4-7x+1}{3x^2+x+3}$.

33. а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-2x-1}{x^2-4x+3}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+5x+4}{2x^3-x+1}$.

34. а) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{6-x-x^2}{3x^2+8x-3}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-2x+1}{3x^2+4x+2}$.

35. а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{5x^2-4x-1}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5-2x^4-3x^2}{x^2+x+3}$.

36. а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+2x-8}{8-x^3}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-3x+4}{-2x^3+5x-6}$.

37. а) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-x-6}{x^2-6x+9}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-7x^4-6x^3-6}{3x^4-x+5}$.

38. а) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+4x+4}{x^2-4}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^2-3x^5}{3x^5-4x+3}$.

39. а) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3+8}{x^2+x-2}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6+3x-8x^3}{4-3x^2+5x^{10}}$.

40. а) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-6x+9}{x^3-27}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5-7x+6x^2}{-3+8x+2x^4}$.

Задание № 3. Найти производные и дифференциалы указанных функций.

41. а) $y=3x^4-\dfrac{5}{3x^3}-9\sqrt[3]{x^2}-1$; б) $y=\left(x^3+1\right)\cdot ln(x+1)$;

в) $y=\dfrac{arctgx}{1+x^2}$; г) $y=e^{sin5x}+5$.

42. а) $y=2x^5-\dfrac{1}{3x^3}+4\sqrt[4]{x}-1$; б) $y=(x^2-2)\cdot sinx$;

в) $y=\dfrac{2^x}{arctgx}-10x$; г) $y=\sqrt[4]{x^3+lnx}$.

43. а) $y=4x^2-\dfrac{5}{6x^6}+10\sqrt[5]{x^4}$; б) $y=(1-x^2)\cdot ctgx$;

в) $y=\dfrac{5e^x}{2x+1}-9x$; г) $y=ln(3x^2+5)$.

44. а) $y=6x^5-\dfrac{2}{7x^2}-\sqrt[3]{x^2+5}$; б) $y=5^x\cdot tgx$;

в) $y=\dfrac{2arccosx}{x^3-1}$;

г) $y=\sqrt{x^3+sin3x}-4$.

45. а) $y=3x-\dfrac{4}{x^3}-3\sqrt[6]{x^2}$;

б) $y=(x^2+4)\cdot arcsin2x^2$;

в) $y=\dfrac{2sinx}{4x^2+x}$;

г) $y=(lnx-cos3x)^2$.

46. а) $y=-5x^2+\dfrac{1}{x}+2\sqrt{x}-1$;

б) $y=(x^{-2}+5)\cdot 3^x$;

в) $y=\dfrac{lnx}{\sqrt{x}+5}$;

г) $y=(e^x-sin2x)^3$.

47. а) $y=4x^2-\dfrac{3}{\sqrt{x}}+5\sqrt[5]{x^2}-1$;

б) $y=(x^3-3)\cdot e^{2x}$;

в) $y=\dfrac{ctgx}{x^2-2x}$;

г) $y=(lnsinx-x)^2$.

48. а) $y=x^5+\dfrac{1}{2x^2}-4\sqrt{x}+3$;

б) $y=(4x^2+1)\cdot(sinx-3x)$;

в) $y=\dfrac{sinx}{x-cosx}$;

г) $y=(3x^4-1)\cdot cos^2x$.

49. а) $y=-2x^3-\dfrac{3}{2x^6}+3\sqrt[3]{x^2}+5$;

б) $y=(2x+e^x)\cdot arcsin(3x-2)$;

в) $y=\dfrac{2-4^x}{cosx^3}$;

г) $y=(3^x+sin(3x-2)^{1/3})^2$.

50. а) $y=5\sqrt[3]{x^2}+\dfrac{x^{-6}}{3}-4x+5$;

б) $y=arctg(4x+3)\cdot x^{-1/4}$;

в) $y=\dfrac{2\sqrt{x}}{sin(3x-1)}$;

г) $y=cos\left(ln(3x-5)^{1/3}\right)$.

51. а) $y=-3x^6+\frac{2}{3x^2}-18\sqrt[3]{x^2}$;

б) $y=(4x+e^{5x})\cdot(3x^8-2)$;

в) $y=\frac{2\sqrt{(x-7)^3}}{tg(2x+10)}$;

г) $y=(5^x+cos(2x-2))^3$.

52. а) $y=2x^{-4}-\frac{3}{x^{-3}}-\frac{8}{\sqrt[3]{x^2}}+4$;

б) $y=(x+7^{5x})\cdot 3^{-2x}$;

в) $y=\frac{2x^3-x}{arcsin(4x-1)}$;

г) $y=(ln4x+sin(5x-1))^{-2}$.

53. а) $y=3x^{-5}-\frac{15}{x^3}-7\sqrt[3]{x^2}+7$;

б) $y=tg(4x+3)\cdot(5x)^{-1/7}$;

в) $y=\frac{sin\sqrt{x}}{x}$;

г) $y=(e^{4x-2}+3sin(3x-1)^{-1/5})^3$.

54. а) $y=-6x^{-3}+\frac{5x}{3x^{-3}}-\sqrt[3]{x^2}+8$;

б) $y=(6x-3)^2\cdot x^{-2}$;

в) $y=\frac{arccosx}{sin5x}$;

г) $y=(4^x-6sin(6x-2)^{1/3})^{-5}$.

55. а) $y=-6\frac{x^{3/2}}{\sqrt{x}}-\frac{10}{x^{-2}}-5\sqrt[3]{x^2}-2$;

б) $y=arcsin(2x-3)\cdot 5x^6$;

в) $y=\frac{e^{5x-2}}{cos(3-5x)}$;

г) $y=(ln4x+sin(7x-2)^3)^2$.

56. а) $y=x^{2/3}-\frac{3}{3x^{-4}}-6\sqrt[5]{x^2}-10$;

б) $y=\left(3x^6+x\right)\cdot ln\sqrt{x}$;

в) $y=\frac{arccos(2x-3)}{x^2}$

г) $y=\left(e^{cos3x}+5\sqrt[3]{x^5}\right)^{-1/6}$.

57. а) $y=x^{-4/5}-\frac{10}{3x^{-3}}-\sqrt[7]{x^2}-1$

б) $y=\left(2x^{-3}-5x\right)\cdot\sqrt[6]{x^5}$;

в) $y=\dfrac{5^{6x-7}}{8+x^2}$;

г) $y=\left(4^{5x-3}+5\sqrt[3]{x^5}\right)^{2/3}$.

58. а) $y=-3x^{-5}+\dfrac{5}{3x^{3/8}}-2\sqrt[5]{x^2}-6$;

б) $y=\left(x^5+1\right)\cdot ln(3x+\sqrt{x})$;

в) $y=\dfrac{8^{3x}}{ctg(3x-6)}$;

г) $y=\left(e^{sin(2x-6)}+5\right)^3$.

59. а) $y=-5x^4-\dfrac{6}{x^5}-8\sqrt[9]{x^2}-1$;

б) $y=\left(\dfrac{1}{4x}+3x^2\right)\cdot ln(6x+1)$;

в) $y=\dfrac{arctg(3x-6)}{sin(1+x^2)}$;

г) $y=\left(e^{tg(4-5x)}+5\sqrt{x}\right)^{-2}$.

60. а) $y=x^{-3/5}-\dfrac{4}{3x^{-6}}-6\sqrt[5]{x^2}-6$;

б) $y=\left(\dfrac{1}{3}x^{-3}+\dfrac{2}{x}\right)\cdot ln(5x-4x^{-2})$;

в) $y=\dfrac{ln(5x-8)}{10+x^2}$;

г) $y=\left(e^{x^2-2x}-6x+\dfrac{3}{\sqrt{x}}\right)^{-3}$.

Задание № 4. Исследовать функцию и построить график.

61. $y=\dfrac{1}{2}x^3+3x^2-7$.

62. $y=\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{3}{2}x^2-4x+10$.

63. $y=\dfrac{1}{4}x^3-\dfrac{3}{2}x^2+3$.

64. $y=\dfrac{1}{5}x^3-\dfrac{9}{5}x^2+3x+3$.

65. $y=\dfrac{1}{6}x^3-\dfrac{3}{2}x^2+8$.

66. $y=2x^3-9x^2+12x-5$.

67. $y=-\dfrac{1}{2}x^3+6x-1$.

68. $y=x^3-6x^2+9x+1$.

69. $y=-\frac{1}{3}x^3+x^2+3x-2$.

70. $y=x^3-3x^2-9x+10$.

71. $y=-\frac{1}{4}x^3+\frac{9}{8}x^2+3x-6$.

72. $y=x^3+3x^2-9x-10$.

73. $y=-\frac{1}{5}x^3+\frac{3}{2}x^2-4$.

74. $y=x^3+6x^2+9x+2$.

75. $y=-\frac{1}{6}x^3+\frac{9}{2}x+2$.

76. $y=2x^3-3x^2-12x+5$.

77. $y=\frac{1}{2}x^3+3x^2-7$.

78. $y=2x^3+3x^2-12x-8$.

79. $y=\frac{1}{2}x^3+3x^2-7$.

80. $y=2x^3+9x^2+12x+7$.

Задание № 5. Найти неопределенные интегралы.

81. а) $\int\left(3x^2+\frac{8}{x^5}+11\sqrt[9]{x^2}\right)dx$; б) $\int\frac{dx}{cos^2(3x+2)}$; в) $\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(4x-3)^2}}$;

г) $\int\frac{(2x-1)dx}{x^2-x+5}$; д) $\int\frac{dx}{4x-3}$.

82. а) $\int\left(2-\frac{3}{x^4}-\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)dx$; б) $\int\frac{dx}{(2x+3)^5}$; в) $\int\frac{dx}{\sqrt{1-9x^2}}$;

г) $\int\frac{dx}{5-3x}$; д) $\int\frac{dx}{sin^2(3+2x)}$.

83. а) $\int\left(5x^4-\frac{2}{x^4}-\frac{1}{\sqrt[5]{x^2}}\right)dx$; б) $\int e^{3x}dx$; в) $\int\frac{x^2dx}{5x^3+1}$;

г) $\int cos(7x+1)dx$;

д) $\int \frac{dx}{\frac{2}{3}x-7}$.

84. а) $\int\left(5x^4+\frac{3}{x^6}-\frac{3}{\sqrt[4]{x}}\right)dx$;

б) $\int sin(4x-1)dx$;

в) $\int \frac{dx}{\sqrt{25-4x^2}}$;

г) $\int \frac{x^2dx}{4x^3+1}$;

д) $\int \frac{\sqrt[5]{ln(2x-3)}dx}{2x-3}$.

85. а) $\int\left(4x^3-\frac{2}{x^3}-\frac{5}{\sqrt[7]{x^2}}\right)dx$;

б) $\int e^{5x+3}dx$;

в) $\int sin^4x\cdot cosxdx$;

г) $\int \frac{dx}{4+9x^2}$;

д) $\int 6^{-5x+1}dx$.

86. а) $\int\left(5x^4-\frac{4}{\sqrt{x}}+\frac{9}{\sqrt[4]{x}}\right)dx$;

б) $\int \frac{dx}{3x+1}$;

в) $\int \sqrt[3]{2x+3}dx$;

г) $\int cos^3x\cdot sinxdx$;

д) $\int sin(-4x+3)dx$.

87. а) $\int\left(6x^5-\frac{1}{x^2}-8\sqrt[5]{x^3}\right)dx$;

б) $\int 5^{2x+1}dx$;

в) $\int \frac{cosxdx}{sin^3x}$;

г) $\int \frac{(x^2-1)dx}{x^3-3x+5}$;

д) $\int \frac{\sqrt[3]{ln^2(4x-1)}dx}{4x-1}$.

88. а) $\int\left(7x^6-\frac{3}{x}+3\sqrt{x}\right)dx$;

б) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{3x+2}}$;

в) $\int tg2xdx$;

г) $\int e^{x^3}\cdot x^2dx$;

д) $\int \frac{dx}{sin^2(3-5x)}$.

89. а) $\int\left(8x-\frac{5}{x^6}+7\sqrt[6]{x}\right)dx$;

б) $\int \frac{e^xdx}{e^x+5}$;

в) $\int \frac{dx}{sin^2(4x-3)}$;

г) $\int \frac{dx}{16+4x^2}$;

д) $\int cos\left(\frac{2}{5}x-1\right)dx$.

90. а) $\int \left(4-\frac{4}{2x+5}-\frac{1}{\sqrt[5]{x^3}}\right)dx$;

б) $\int \frac{x^3dx}{x^4+3}$;

в) $\int e^{sinx}\cdot cosxdx$;

г) $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{4x+1}}$;

д) $\int \frac{\sqrt[5]{ln^3(x+5)}dx}{x+5}$.

91. а) $\int \left(7-\frac{3}{x^4}-\frac{10}{\sqrt[5]{x^2}}\right)dx$;

б) $\int \frac{dx}{(-5x+4)^{1/7}}$;

в) $\int \frac{dx}{49x^2+225}$;

г) $\int \frac{x^2dx}{2x^3+1}$;

д) $\int \frac{\sqrt{ln3x}dx}{3x}$.

92. а) $\int \left(2-\frac{\sqrt{x}}{x^{-2/5}}-\frac{5}{\sqrt[7]{x^2}}\right)dx$;

б) $\int \frac{dx}{(2x-3)^8}$;

в) $\int \frac{dx}{49x^2+9}$;

г) $\int \frac{(2x-1)dx}{x^2-x+5}$;

д) $\int \frac{ln^2(x-1)dx}{x-1}$.

93. а) $\int \left(\sqrt[7]{x^2}+\frac{5\sqrt{x}}{x^{1/5}}-\frac{2}{\sqrt[3]{x^2}}\right)dx$;

б) $\int \frac{dx}{(1-6x)^{1/5}}$;

в) $\int \frac{dx}{1-9x^2}$;

г) $\int cos^5x\cdot sinxdx$;

д) $\int \frac{dx}{(x-3)\cdot ln^3(x-3)}$.

94. а) $\int \left(3x-\frac{5\sqrt[3]{x}}{x^4}-\frac{8}{\sqrt[5]{x^2}}\right)dx$;

б) $\int \frac{dx}{(-8x+3)^{-1/4}}$;

в) $\int \frac{dx}{\sqrt{17+9x^2}}$;

г) $\int \frac{cosx}{sin^3x}dx$;

д) $\int \frac{dx}{cos^2(8x+6)}$.

95. а) $\int\left(9-\frac{5\sqrt{x}}{x^4}-\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)dx$; б) $\int\frac{dx}{(10-5x)^5}$; в) $\int\frac{dx}{4+5x^2}$;

г) $\int\frac{sin(2x-1)dx}{cos^2(2x-1)}$; д) $\int\frac{dx}{(x-1)\cdot ln^2(x-1)}$.

96. а) $\int\left(7-\frac{3}{\sqrt{x}}-\frac{x}{\sqrt[3]{x^2}}\right)dx$; б) $\int\frac{dx}{(2+3x)^{3/7}}$; в) $\int\frac{dx}{\sqrt{9-4x^2}}$;

г) $\int(4x^3-2)\cdot 6^{x^4-2x}dx$; д) $\int\frac{ln(x+2)dx}{(x+2)}$.

97. а) $\int\left(3-\frac{1}{x^{-7}}-\frac{4}{\sqrt[3]{x^2}}\right)dx$; б) $\int(2x-5)^{-5}dx$; в) $\int\frac{dx}{\sqrt{16-36x^2}}$;

г) $\int(6x+8)\cdot 5^{3x^2+8x}dx$; д) $\int\frac{dx}{(x+7)\cdot ln(x+7)}$.

98. а) $\int\left(5x^4+\frac{2}{x^{-1/4}}+\frac{5}{\sqrt[3]{x^2}}\right)dx$; б) $\int\frac{dx}{(-2x+3)^{-4/7}}$; в) $\int\frac{dx}{\sqrt{10+9x^2}}$;

г) $\int(2x-4x)\cdot 7^{x^2-4x+5}dx$; д) $\int\frac{dx}{sin^2(3x+5)}$.

99. а) $\int\left(2\sqrt{x}-\frac{4}{x^{4/7}}-\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)dx$; б) $\int\frac{dx}{(x+3)^{3/5}}$; в) $\int\frac{dx}{\sqrt{9x^2+3}}$;

г) $\int 3x^2\cdot 6^{x^3-4}dx$; д) $\int\frac{dx}{3x\cdot ln3x}$.

100. а) $\int\left(2x-\frac{5}{x}-\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)dx$; б) $\int\frac{dx}{(2x+3)^{-5}}$; в) $\int\frac{dx}{\sqrt{25-4x^2}}$;

г) $\int \frac{(3x^2-2+5)dx}{x^3-2x+5x}$; д) $\int \frac{dx}{cos^2(-3x-1)}$.

Задание № 6. Решить следующие задачи.

101. Три охотника произвели залп по цели. Вероятность поражения цели первым охотником равна 0,7, вторым – 0,8 и третьим - 0,9. Найти вероятность того, что: а) только один из охотников поразит цель; б) все три охотника поразят цель.

102. В клетке находятся кролики пород шиншиллы и короткошерстого. Вероятность того, что кролик окажется породы шиншиллы, равна 0,2. Какова вероятность того, что из 600 наудачу отобранных кроликов, 375 окажутся породы шиншиллы?

103. Вероятность того, что среднегодовой удой молока от одной коровы превзойдет 2500 кг, равна 0,6. какова вероятность того, что 350 из 600 коров фермы дадут за год более, чем по 2500 кг?

104. Известно, что на поле у 2% кустов картофеля стебли поражены фитофторой. Найти вероятность того, что из 300 кустов картофеля этого поля фитофторой будут поражены не более четырех кустов.

105. В ветеринарную лечебницу поступили животные с некоторой болезнью «А», число которых составило 80%. Найти вероятность того, что из 100 поступивших этой болезнью страдают не менее 70 и не более 80 животных.

106. В случайной выборке из 100 клубней картофеля оказалось 80 здоровых. Найти вероятность того, что во всей партии картофеля, содержащей 10000 клубней, окажется здоровых 7900.

107. В среднем на 1 $м^2$ площади посева встречается 0,5 стеблей сорняков. Найти вероятность того, что на 4 $м^2$ не окажется ни одного сорняка.

108. Студент знает 20 из 35 вопросов программы. Какова вероятность того, что он знает: а) только два вопроса из трех, содержащихся в его экзаменационном билете; б) все три вопроса?

109. Вероятность того, что корова найдет свое место в стойле, равна 0,8. Найти вероятность того, что из 200 коров найдут свое место не менее 100 и не более 180.

110. Собранный урожай помидоров сортируют по определенной технологии. Вероятность того, что помидор окажется нужным для сортировки, равна 0,8. Найти вероятность того, что из 400 выбранных помидоров не менее 360 и не более 380 подлежат сортировке.

111. В пяти одинаковых стаканах содержится молоко 3,2%-, 3,5% и 3,8%-ной жирности. В двух из них – молоко 3,2%-, а в одном – 3,5%-ной жирности. Какова вероятность того, что: а) из четырех наугад выбранных стаканов два окажутся с молоком 3,8%-ной жирности; б) не более двух стаканов окажутся с молоком 3,2%-ной жирности?

112. В коробке имеются яйца московских и русских белых пород куриц. Вероятности, того что яйцо будет московской курицы и русской белой, относятся как 3:7. Какова вероятность того, что: а) все три яйца, вынутые из коробки наудачу, окажутся от московских куриц; б) из восьми вынутых пять из них окажутся яйцами русских белых?

113. Отдел контроля зараженности семян проверяет семена на пригодность. Вероятность того, что семя окажется зараженным, равна 0,2. Найти вероятность того, что из 144 семян незараженными окажутся 120.

114. Вероятность того, что откормленный молодняк будет отправлен на мясокомбинат, равна 0,7. Какова вероятность того, что из восьми телят: а) не менее пяти будут отобраны для отправки на мясокомбинат; б) шесть телят будут отправлены на мясокомбинат?

115. Производится взвешивание 2-месячных телят. Вероятность того, что его масса будет не менее 55 кг, равна 0,6. Какова вероятность того, что из 50 телят 45 будут массу, не меньшей 55 кг?

116. В ящике имеется 20 шт. различных биологических добавок для корма телят, из которых 8 шт. изготовлены по новейшей технологии. Найти вероятность того, что наудачу вынутые 3 окажутся добавками новейшей технологии.

117. По оценкам, волк, в одиночку нападающий на лося, добивается успеха в 8% столкновений. Какова вероятность того, что в пяти столкновениях ни один лось не станет добычей волка?

118. Вероятность того, что в стаде мелкого рогатого скота некоторая овца окажется забайкальской породы, равна 0,75. Какова вероятность того, что из 300 овец не менее 210 и не более 225 будут иметь такую породу?

119. На картинке изображены следы лесных зверей: медведя, лисы и белки. Вероятности того, что след принадлежит медведю, лисе и белке,

относятся как 3:5:2 соответственно. Какова вероятность того, что из четырех наугад указанных следа три будут медвежьи, а один – лисий.

120. Вероятность выхода из строя доильного аппарата в течение одного рабочего дня, равна 0,01. Какова вероятность того, что: а) за три рабочих дня аппарат ни разу не выйдет из строя; б) из пяти рабочих дней аппарат выйдет из строя не более двух раз?

Задание № 7. Закон распределения дискретной случайной величины X задан в виде таблицы. В первой строке ее указаны возможные значения x_i случайной величины X, во второй – их соответствующие вероятности p_i. Вычислить: а) математическое ожидание $M(X)$; б) дисперсию $D(X)$; в) среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$. Начертить график закона распределения и показать на нем вычисленные $M(X)$ и $\sigma(X)$.

121.

x_i	25	30	35	40	45
p_i	0,2	0,3	0,2	0,1	0,2

122.

x_i	5	10	15	20	25
p_i	0,1	0,3	0,4	0,1	0,1

123.

x_i	5	15	25	35	45
p_i	0,1	0,1	0,3	0,3	0,2

124.

x_i	3	8	13	18	23
p_i	0,2	0,2	0,3	0,2	0,1

125.

x_i	2	3	3	4	5
p_i	0,1	0,2	0,4	0,2	0,1

126.

x_i	-5	-1	3	7	11
p_i	0,2	0,4	0,2	0,1	0,1

127.

x_i	110	120	130	140	150
p_i	0,2	0,3	0,3	0,1	0,1

128.

x_i	-10	0	10	20	30
p_i	0,1	0,2	0,3	0,3	0,1

129.

x_i	10	12	14	16	18
p_i	0,1	0,1	0,6	0,1	0,1

130.

x_i	8	11	14	17	20
p_i	0,2	0,1	0,3	0,3	0,1

131.

x_i	-7	-5	4	10	25
p_i	0,1	0,1	0,2	0,5	0,1

132.

x_i	20	30	40	50	60
p_i	0,3	0,1	0,2	0,2	0,2

133.

x_i	-5	-4	-1	0	2
p_i	0,4	0,2	0,2	0,1	0,1

134.

x_i	3	7	10	15	18
p_i	0,1	0,2	0,3	0,3	0,1

135.

x_i	8	11	14	17	20
p_i	0,2	0,1	0,3	0,3	0,1

136.

x_i	-8	-6	-4	-1	0
p_i	0,5	0,1	0,1	0,1	0,2

137.

x_i	10	13	15	18	20
p_i	0,1	0,1	0,5	0,2	0,1

138.

x_i	-1	3	5	7	10
p_i	0,3	0,1	0,2	0,3	0,1

139.

x_i	-3	-1	1	3	5
p_i	0,1	0,3	0,2	0,1	0,3

140.

x_i	-6	-1	4	8	12
p_i	0,4	0,2	0,1	0,2	0,1

Раздел VIII. Приложения

Приложение 1

Значения функции $\varphi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3426	3712	3697
0,4	3683	3668	3653	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	00088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

Приложение 2

Значения функции $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{0}^{x} e^{-\frac{z^2}{2}}\,dz$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,0000	0,43	0,1664	0,86	0,3051	1,29	0,4015
0,01	0,0040	0,44	0,1700	0,87	0,3078	1,30	0,4032
0,02	0,0080	0,45	0,1736	0,88	0,3106	1,31	0,4049
0,03	0,0120	0,46	0,1772	0,89	0,3133	1,32	0,4066
0,04	0,0160	0,47	0,1808	0,90	00,3159	1,33	0,4082
0,05	0,0199	0,48	0,1844	0,91	0,3186	1,34	0,4099
0,06	0,0239	0,49	0,1879	0,92	0,3212	1,35	0,4115
0,07	0,0279	0,50	0,1915	0,93	0,3238	1,36	0,4131
0,08	0,0319	0,51	0,1950	0,94	0,3264	1,37	0,4147
0,09	0,0359	0,52	0,1985	0,95	0,3289	1,38	0,4162
0,10	0,0398	0,53	0,2019	0,96	0,3315	1,39	0,4177
0,11	0,0438	0,54	0,2054	0,97	0,3340	1,40	0,4192
0,12	0,0478	0,55	0,2088	0,98	0,3365	1,41	0,4207
0,13	0,0517	0,56	0,2123	0,99	0,3389	1,42	0,4222
0,14	0,0557	0,57	0,2157	1,00	0,3413	1,43	0,4236
0,15	0,0596	0,58	0,2190	1,01	0,3438	1,44	0,4251
0,16	0,0636	0,59	0,2224	1,02	0,3461	1,45	0,4265
0,17	0,0675	0,60	0,2257	1,03	0,3485	1,46	0,4279
0,18	0,0714	0,61	0,2291	1,04	0,3508	1,47	0,4292
0,19	0,0753	0,62	0,2324	1,05	0,3531	1,48	0,4306
0,20	0,0793	0,63	0,2357	1,06	0,3554	1,49	0,4319
0,21	0,0832	0,64	0,2389	1,07	0,3577	1,50	0,4332
0,22	0,871	0,65	0,2422	1,08	0,3599	1,51	0,4345
0,23	0,0910	0,66	0,2454	1,09	0,3621	1,52	0,4357
0,24	0,0948	0,67	0,2486	1,10	0,3643	1,53	0,4370
0,25	0,0987	0,68	0,2517	1,11	0,3665	1,54	0,4382
0,26	0,1026	0,69	0,2549	1,12	0,3686	1,55	0,4394
0,27	0,1064	0,70	0,2580	1,13	0,3708	1,56	0,4406
0,28	0,1103	0,71	0,2611	1,14	0,3729	1,57	0,4418
0,29	0,1141	0,72	0,2642	1,15	0,3749	1,58	0,4429
0,30	0,1179	0,73	0,2643	1,16	0,3770	1,59	0,4441
0,31	0,1217	0,74	0,2703	1,17	0,3790	1,60	0,4452
0,32	0,1255	0,75	0,2734	1,18	0,3810	1,61	0,4463
0,33	0,1293	0,76	0,2764	1,19	0,3830	1,62	0,4474
0,34	0,1331	0,77	0,2794	1,20	0,3849	1,63	0,4484
0,35	0,1368	0,78	0,2823	1,21	0,3869	1,64	0,4495
0,36	0,1406	0,79	0,2852	1,22	0,3883	1,65	0,4505
0,37	0,1443	0,80	0,2881	1,23	0,3907	1,66	0,4515
0,38	0,1480	0,81	0,2910	1,24	0,3925	1,67	0,4525
0,39	0,1517	0,82	0,2939	1,25	0,3944	1,68	0,4535
0,40	0,1554	0,83	0,2967	1,26	0,3962	1,69	0,4545
0,41	0,1591	0,84	0,2995	1,27	0,3980	1,70	0,4554
0,42	0,1628	0,85	0,3023	1,28	0,3997	1,71	0,4564
1,72	0,4573	1,94	0,4738	2,32	0,4898	2,76	0,4971
1,73	0,4582	1,95	0,4744	2,34	0,4904	2,78	0,4973
1,74	0,4591	1,96	0,4750	2,36	0,4909	2,80	0,4974
1,75	0,4599	1,97	0,4756	2,38	0,4913	2,82	0,4976
1,76	0,4608	1,98	0,4761	2,40	0,4918	2,84	0,4977
1,77	0,4616	1,99	0,4767	2,42	0,4922	2,86	0,4979
1,78	0,4625	2,00	0,4772	2,44	0,4927	2,88	0,4980
1,79	0,4633	2,02	0,4783	2,46	0,4931	2,90	0,4981

1,80	0,4641	2,04	0,4793	2,48	0,4934	2,92	0,4982
1,81	0,4649	2,06	0,4803	2,50	0,4938	2,94	0,4984
1,82	0,4656	2,08	0,4812	2,52	0,4941	2,96	0,4985
1,83	0,4664	2,10	0,4821	2,54	0,4945	2,98	0,4986
1,84	0,4671	2,12	0,4830	2,56	0,4948	3,00	0,49865
1,85	0,4678	2,14	0,4838	2,58	0,4951	3,20	0,49931
1,86	0,4686	2,16	0,4846	2,60	0,4953	3,40	0,49966
1,87	0,4693	2,18	0,4854	2,62	0,4956	3,60	0,49984
1,88	0,4690	2,20	0,4861	2,64	0,4959	3,80	0,499928
1,89	0,4706	2,22	0,4868	2,66	0,4961	4,00	0,499968
1,90	0,4713	2,24	0,4875	2,68	0,4963	4,50	0,499997
1,91	0,4719	2,26	0,4881	2,70	0,4965	5,00	0,4999997
1,92	0,4726	2,28	0,4887	2,72	0,4967	∞	0,5
1,93	0,4732	2,30	0,4893	2,74	0,4969		

Приложение 3

Значения функции e^{-x}

x	e^{-x}	x	e^{-x}	x	e^{-x}	x	e^{-x}	x	e^{-x}
0,00	1,000	0,33	0,719	0,66	0,517	0,99	0,372	4,20	0,0150
0,01	0,990	0,34	0,712	0,67	0,512	1,00	0,368	4,30	0,0136
0,02	0,980	0,35	0,705	0,68	0,507	1,10	0,333	4,40	0,0123
0,03	0,970	0,36	0,698	0,69	0,502	1,20	0,302	4,50	0,0111
0,04	0,961	0,37	0,691	0,70	0,497	1,30	0,273	4,60	0,0101
0,05	0,951	0,38	0,684	0,71	0,492	1,40	0,247	4,70	0,0091
0,06	0,942	0,39	0,677	0,72	0,487	1,50	0,223	4,80	0,0082
0,07	0,932	0,40	0,670	0,73	0,482	1,60	0,202	4,90	0,0074
0,08	0,923	0,41	0,664	0,74	0,477	1,70	0,183	5,00	0,0067
0,09	0,914	0,42	0,657	0,75	0,472	1,80	0,165	5,10	0,0061
0,10	0,905	0,43	0,650	0,76	0,468	1,90	0,150	5,20	0,0055
0,11	0,896	0,44	0,644	0,77	0,463	2,00	0,135	5,30	0,0050
0,12	0,887	0,45	0,638	0,78	0,458	2,10	0,122	5,40	0,0045
0,13	0,878	0,46	0,631	0,79	0,454	2,20	0,111	5,50	0,0041
0,14	0,869	0,47	0,625	0,80	0,449	2,30	0,100	5,60	0,0037
0,15	0,861	0,48	0,619	0,81	0,445	2,40	0,091	5,70	0,0033
0,16	0,852	0,49	0,613	0,82	0,440	2,50	0,082	5,80	0,0030
0,17	0,844	0,50	0,606	0,83	0,436	2,60	0,074	5,90	0,0027
0,18	0,835	0,51	0,600	0,84	0,432	2,70	0,067	6,00	0,0025
0,19	0,827	0,52	0,595	0,85	0,427	2,80	0,061	6,10	0,0022
0,20	0,819	0,53	0,589	0,86	0,423	2,90	0,055	6,20	0,0020
0,21	0,811	0,54	0,583	0,87	0,419	3,00	0,50	6,30	0,0018
0,22	0,803	0,55	0,577	0,88	0,415	3,10	0,045	6,40	0,0017
0,23	0,795	0,56	0,571	0,89	0,411	3,20	0,041	6,50	0,0015
0,24	0,787	0,57	0,565	0,90	0,407	3,30	0,037	6,60	0,0014
0,25	0,779	0,58	0,560	0,91	0,403	3,40	0,033	6,70	0,0012
0,26	0,771	0,59	0,554	0,92	0,399	3,50	0,030	6,80	0,0011
0,27	0,763	0,60	0549	0,93	0,395	3,60	0,027	6,90	0,0010
0,28	0,756	0,61	0,543	0,94	0,391	3,70	0,025	7,00	0,0009
0,29	0,748	0,62	0,538	0,95	0,387	3,80	0,022	7,10	0,0008
0,30	0,741	0,63	0,533	0,96	0,383	3,90	0,020	7,20	0,0007
0,31	0,733	0,64	0,527	0,97	0,379	4,00	0,0183	7,30	0,0007
0,32	0,726	0,65	0,522	0,98	0,375	4,10	0,0166	7,40	0,0006
								7,50	0,0005

Содержание

Мартыненко Алла Ивановна

Голышева Светлана Павловна

МАТЕМАТИКА

Методические указания и индивидуальные контрольные задания
для студентов – заочников биологических специальностей

Издание второе

Компьютерный набор и верстка Голышевой С.П.

Редактор Тесля В.И.

Лицензия ЛР № 070444 от 11.03.98 г.
Подписано к печати
Формат 60×84. Печ. л. 3,3. Тираж 300 экз.

664038, Иркутская обл., Иркутский р-он, п.Молодежный