Министерство сельского хозяйства Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное общеобразовательное учреждение высшего образования
Иркутский государственный аграрный университет имени А.А. Ежевского

А.В. Шистеев

КУРС ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

Учебное пособие
для студентов высших учебных заведений очного и заочного обучения
направления подготовки:
35.03.06 «Агроинженерия»
23.03.03 «Эксплуатация транспортно-технологических машин и комплексов»
Уровень бакалавриата
44.03.04 «Профессиональное обучение»

Молодежный, 2019

УДК 531.01(075.8)

Ш 647

Ш 647 Шистеев А.В. **Курс теоретической механики**: учеб. пособие. – п. Молодежный: Издательство Иркутского государственного аграрного университета имени А.А. Ежевского, 2019. – 118 с.: ил

Рекомендовано к изданию учебно-методическим советом
ФГБОУ ВО Иркутский государственный аграрный университет
имени А.А. Ежевского. Протокол № 4 от 25.03.2019

Рецензенты

Т.И. Кривцова, к.т.н., доцент кафедры «Автомобильный транспорт» ФГБОУ ВО Иркутский национально-исследовательский технический университет;

А.В. Кузьмин, д.т.н., профессор кафедры «Технический сервис и общеинженерные дисциплины» ФГБОУ ВО Иркутский государственный аграрный университет имени А.А. Ежевского

В учебном пособии даны материалы по основам теоретической механики, предложен краткий курс лекций и практических работ. Представлены методические рекомендации для успешного освоения студентами подразделов статики, кинематики и динамики, приводятся примеры решения задач.

Учебное пособие предназначено студентов высших учебных заведений направлений подготовки 35.03.06 «Агроинженерия», 23.03.03 «Эксплуатация транспортно-технологических машин и комплексов», 44.03.04 «Профессиональное обучение», уровень бакалавриата.

Пособие может быть полезным для широкого круга лиц, интересующихся данными теоретическими и практическими вопросами.

СС ИЕ

Введение………………………………………………………………………………….. 4

Курс лекций

Раздел I. Статика…………………………………………………………………….. 5
Лекция 1. ………………………………………....…………………………………….. 5
Лекция 2. ……………………………………………………………………………….. 15
Лекция 3. ……………………………………………………………………………….. 21
Лекция 4. ……………………………………………………………………………….. 30
Лекция 5. ……………………………………………………………………………….. 37
Контрольные вопросы к разделу «Статика»…………………………………………. 43
Раздел II. Кинематика………………………………………………………………….. 44
Лекция 1…………………………………………………..……………………………. 44
Лекция 2. ……………………………………………………………………………….. 55
Лекция 3. ……………………………………………………………………………….. 63
Лекция 4. ……………………………………………………………………………….. 68
Лекция 5. ……………………………………………………………………………….. 75
Лекция 6. ………………………………………………………………………………. 81
Контрольные вопросы к разделу «Кинематика»…………………………………….. 88
Раздел III. Динамика…………………………………………………………………… 89
Лекция 1. ....……………………………… 89
Лекция 2. ……………………………………………………………………………….. 95
Лекция 3. ………………………………………………………………………………. 99
Лекция 4. ……………………………………………………………………………….. 100
Лекция 5. ………………………………………………………………………………. 105
Контрольные вопросы к разделу «Динамика»………………………………………. 112
Список литературы…………………………………………………………………….. 113
Для заметок…………………………………………………………………………….. 114

Введение

Одним из самых существенных критериев успеха в современное время является конкурентоспособность выпускаемой продукции, а также работ и услуг, зависящих в свою очередь от качества проведенных расчетов на разных стадиях производственного проектирования. В связи с этим, изучение теоретической механики является одним из инструментов обеспечения необходимого уровня качества оказываемых работ, услуг или производимой продукции.

Механика - (от греческого mechanike – это искусство построения машин) - наука о механическом движении материальных тел (об изменении с течением времени взаимного положения тел или частей этих тел в пространстве) и взаимодействиях между ними.

Механика зародилась в глубокой древности. Например, строители египетских пирамид пользовались эмпирическими знаниями по механике. Знаменитый древнегреческий философ Аристотель (384 – 322 гг. до н.э.) уже знал закон сложения сил, приложенных в одной точке и направленных по одной прямой. Выдающийся ученый Архимед (287 – 212 гг. до н.э.) заложил основы статики, как точной науки.

Во все времена теоретическая механика развивалась параллельно с развитием техники и ее достижения обеспечивали своевременный, а иногда идущий на опережение технический прогресс человечества и эта ее роль сохраняется и в современное время.

В основе классической механики, современные положения которой приведены в настоящем пособии, лежат законы Ньютона, соответственно такими методами классической механики изучаются движения любых материальных тел (кроме микрочастиц), которые перемещаются в пространстве со скоростями, являющимися очень малыми по сравнению со скоростью света.

Движения тел со скоростями, близкими к скорости света, рассматриваются в теории относительности, а движение микрочастиц - в квантовой механике. На протяжении многих тысяч лет законы механики используются человеком для расчетов машин, механизмов, строительных сооружений, транспортных средств, космических летательных аппаратов и т.д.

Иными словами теоретическая механика – это математика, приложенная к законам равновесия и движения тел; наука о силе и сопротивлении ей, своеобразное искусство применять силу к делу и строить машины, наука выгодного приспособления сил, как пишет в своем словаре Владимир Иванович Даль в середине XIX века.

Огромный вклад в развитие механики внесли и наши многочисленные отечественные ученые, такие как: Ломоносов М.В., Леонард Эйлер, Остроградский М.В., Чебышев П.Л., Ковалевская С.В., Ляпунов А.М., Мещерский И.В., Крылов А.Н., Жуковский Н.Е., Седов Л.И., Ишлинский А.Ю., Яненко Н.Н., Антонец Д.А. и многие другие.

Предмет теоретической механики является одним из самых важнейших при изучении фундаментальных общенаучных инженерных дисциплин и играет существенную роль при подготовке инженеров любых специальностей. На результатах теоретической механики базируются такие общеинженерные дисциплины как: сопротивление материалов, детали машин, теория механизмов и машин и многие другие.

Раздел I. Статика

Лекция 1

1. Введение в теоретическую механику.
2. Основные понятия и аксиомы статики.
3. Система сходящихся сил: сложение сходящихся сил (геометрический и аналитический способы), условия равновесия системы сходящихся сил на плоскости и в пространстве.
4. Момент силы относительно точки (алгебраический и как вектор).
5. Теорема Вариньона о моменте равнодействующей. Условие равновесия рычага.
6. Момент силы относительно оси и его связь с моментом силы относительно точки на оси. Аналитические формулы момента силы относительно осей координат.

Введение в теоретическую механику

Теоретической механикой называется наука об общих законах механического движения и равновесия материальных твердых тел.

Под механическим движением понимается изменение положения тела в пространстве относительно других тел с течением времени.

Теоретическая механика – наука естественная. Ее основные понятия и законы имеют первоисточником непосредственные наблюдения и повседневный опыт человека. Поэтому теоретическая механика, как и все другие науки о законах развития природы, широко пользуется математическими методами исследования, а также методом абстракции, методами обобщения и формальной логики.

Теоретическая механика подразделяется на три раздела: статику, кинематику, динамику.

Основные понятия и аксиомы статики

Статикой называется раздел теоретической механики, в котором излагается учение о силах и условиях равновесия твердых тел при действии на них сил.

Под равновесием твердого тела понимается состояние его покоя или равномерного прямолинейного поступательного движения.

Под твердым телом в теоретической механике понимается абсолютно твердое тело, то есть такое тело, геометрическая форма которого и размеры не изменяются ни при каких механических воздействиях со стороны других тел, а расстояние между двумя любыми его точками остается всегда постоянным.

Механическим воздействием или взаимодействием тел называется такое воздействие, при котором пренебрегают изменениями в химической структуре тела и его физическом состоянии (нагревом, охлаждением и т.д.). Механическое воздействие может происходить как при соприкосновении тел, так и на расстоянии (притяжение, отталкивание).

Сила – одно из основных понятий статики. Силой называется векторная величина, являющаяся количественной мерой механического взаимодействия тел. действие силы на тело

определяется тремя факторами: модулем силы, направлением силы, точкой приложения силы. На чертежах сила, как и всякий вектор, изображается отрезком со стрелкой и обозначаются заглавными буквами латинского алфавита с черточкой над буквой (в книгах могут выделяться жирным шрифтом). Буква без черточки означает, что речь идет о модуле силы.
Линией действия силы называется такая прямая, вдоль которой направлен вектор силы.

Обычно на тела действует несколько сил. Совокупность всех сил, действующих на данное тело, называется системой сил.

Если системы сил, приложены порознь к данному телу, но оказывают на него одинаковое действие, то они называются эквивалентными.

Система сил, под действием которой свободное твердое тело находится в равновесии, называется уравновешенной или эквивалентной нулю.

Если система сил может быть заменена одной силой (эквивалентна одной силе), то эту силу называют равнодействующей.

Силу, которая при добавлении ее к данной системе сил образует вместе с нею систему сил эквивалентную нулю, называют уравновешивающей силой.

Для системы сил, имеющей равнодействующую, уравновешивающая будет равна ей по модулю и направлена по линии действия равнодействующей в противоположную сторону.

Различают силы <u>сосредоточенные</u> и <u>распределенные</u>. Сосредоточенной называют силу, приложенную к телу в какой-либо точке. Распределенными называют силы, действующие на все точки какого-либо объема тела или его поверхности, или некоторой части линии. Задаются эти силы <u>интенсивностью q</u> – величиной силы, приходящейся на единицу объема, площади, длины линии. При решении задач распределенные силы заменяют на сосредоточенные, поскольку все положения статики формулируются для сосредоточенных сил.

По расположению различают следующие системы сил: сходящиеся на плоскости и в пространстве; как угодно расположенные (произвольные) на плоскости и в пространстве; системы пар на плоскости и в пространстве; системы параллельных сил на плоскости и в пространстве (это частные случаи произвольных систем сил).

<u>Сходящейся</u> называется такая система сил, у которой линии действия всех сил пересекаются в одной точке.

<u>Произвольной</u> называется система сил, у которой линии действия сил не пересекаются в одной точке.

Научные положения статики базируются на пяти аксиомах (постулатах) – не требующих доказательства, так как их справедливость подтверждена многовековой практикой и наблюдениями за равновесием и движением тел. Далее приведем формулировки аксиом.

<u>Аксиома 1.</u> Если на свободное твердое тело действуют 2 силы, то оно будет находится в равновесии только тогда, когда эти силы равны по модулю и направлены вдоль одной прямой в разные стороны.

<u>Аксиома 2.</u> Действие данной системы сил на твердое не изменится, если к ней прибавить или от нее отнять уравновешенную систему сил.

<u>Аксиома 3.</u> При всяком действии одного тела на другое имеет место такое же по величине, но противоположное по направлению противодействие.

Заметим, что сила действия и противодействия уравновешенной системы сил не образуют, так как они приложены к разным телам.

Аксиома 4 (аксиома параллелограмма). Равнодействующая двух сил, приложенных к твердому телу в одной точке под углом друг к другу, равна по модулю и направлению диагонали параллелограмма, построенного на этих силах, как на сторонах.

Аксиома 5 (принцип отвердевания). Если какое-либо деформируемое твердое тело находится в равновесии под действием данной системы сил, то это состояние не нарушится и после, как это тело отвердеет, то есть станет абсолютно твердым.

Эта аксиома позволяет получаемые в статике условия равновесия для абсолютно твердых тел применять для рассмотрения равновесия реальных (деформируемых) тел.

Из первой и второй аксиом вытекает следствие: действие силы на тело не изменится от переноса точки ее приложения в любую другую точку тела. Это следствие касается равновесия тела. Если же речь идет о характере усилия (растяжение, сжатие), то оно не справедливо, так как от переноса точки приложения силы характер усилия изменяется.

Система сходящихся сил. Сложение сходящихся сил.

Сложить сходящиеся силы – это значит найти их равнодействующую. Существуют два способа сложения - геометрический и аналитический.

Геометрический способ заключается в том, что из сил системы строят силовой многоугольник *A, B, C,…, D, E*, для чего силы, в масштабе, последовательно откладывают так, чтобы конец вектора предыдущей силы являлся началом вектора последующей силы. После отложения всех сил проводят замыкающую сторону многоугольника. Она дает и модуль, и направление равнодействующей *R* (Рисунок 1).

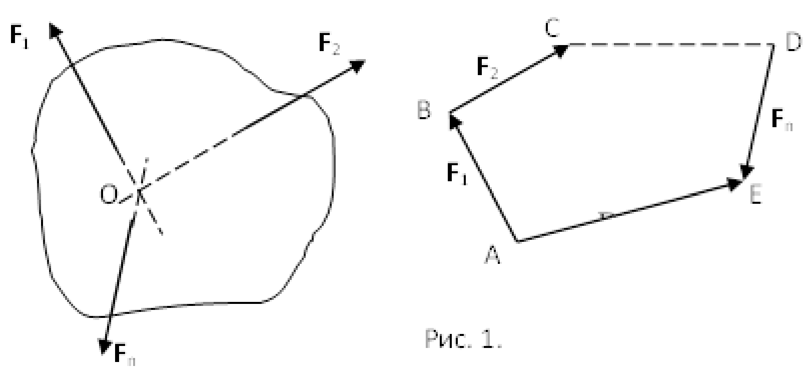

Рисунок 1 – Построение силового многоугольника

При этом линия действия равнодействующей проходит через точку О пересечения сил системы. Необходимо отметить, что если конец вектора последней откладываемой силы придет в начальную точку А многоугольника (получится замкнутый многоугольник), то это будет значить, что равнодействующая равна нулю (замыкающей стороны у силового многоугольника нет). В качестве недостатков данного способа можно выделить недостаточную точность и большую трудоемкость выполнения.

Аналитический способ сложения сходящихся сил дает точный результат и состоит в следующем. Сначала определяют проекции равнодействующей на оси координат, которые равны суммам проекций всех сил системы на соответствующие оси.

$$R_x = \sum F_{kx},\ R_y = \sum F_{ky},\ R_z = \sum F_{kz}.$$

Затем определяют модуль равнодействующей:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}. \qquad (1)$$

После чего определяют направление равнодействующей по направляющим косинусам:

$$\cos\alpha = R_x / R,\ \cos\beta = R_y / R,\ \cos\gamma = R_z / R,$$

где $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ - этоуглы между равнодействующей и осями x, y, z соответственно.

Условия равновесия системы сходящихся сил

Ранее было отмечено, что при равновесии система сил эквивалентна нулю. Поскольку любая система сходящихся сил имеет равнодействующую (заменяется одной силой), следовательно, для равновесия системы сходящихся сил необходимо и достаточно, чтобы ее равнодействующая была равна нулю ($R = 0$).

В геометрической форме это значит, что многоугольник, построенный из сил системы должен быть замкнутым.

В аналитической форме равенство нулю равнодействующей будет при равенстве нулю сумм проекций всех сил системы на оси координат (1).

Таким образом, для равновесия сходящейся системы сил в пространстве необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций всех сил системы на оси *x, y, z* были равны нулю:

$$\begin{aligned} \sum F_{kx} &= 0, \\ \sum F_{ky} &= 0, \\ \sum F_{kz} &= 0. \end{aligned} \qquad (2)$$

Для равновесия же системы сходящихся сил на плоскости необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций всех сил системы на оси x и y, расположенные в той же плоскости что и силы системы, были равны нулю:

$$\begin{aligned} \sum F_{kx} &= 0, \\ \sum F_{ky} &= 0. \end{aligned} \qquad (3)$$

То есть, плоскостная и пространственная модели систем координат отличаются по количеству равенств и по количеству осей системы.

Момент силы относительно точки (алгебраический и как вектор)

Вращательное действие силы относительно точки (оси) оценивается ее моментом. Различают алгебраический момент силы относительно точки (для краткости слово алгебраический часто опускается) и момент силы относительно точки, как вектор.

Моментом силы относительно точки называется взятое со знаком плюс или минус произведение модуля силы на ее плечо.

$$m_o(\overline{F}) = \pm Fh.$$

Плечом h называется наименьшее расстояние от точки до линии действия силы (рисунок 2).

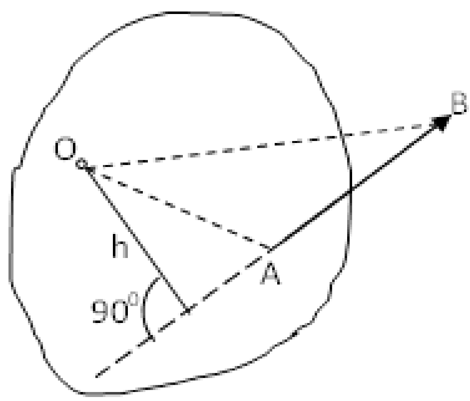

Рисунок 2 – Плечо силы h

Момент (в теоретической механике) считается положительным тогда, когда сила стремится повернуть тело против хода часовой стрелки, и отрицательным, если по ходу часовой стрелки.

Заметим, что с геометрической точки зрения

$$m_o(\overline{F}) = \pm 2\ \text{пл.}\ \Delta\text{OAB}.$$

Рассмотренным алгебраическим моментом силы пользуются тогда, когда все силы системы и точка O лежат в одной плоскости (моменты имеют одну плоскость действия). Когда же плоскости действия моментов сил разные, то их необходимо учитывать, поскольку вращательное действие силы относительно неподвижной точки определяется не только модулем момента (Fh) и направлением вращения, но и плоскостью действия момента (она проходит через вектор силы и точку). В этом случае момент силы представляют вектором, приложенным в данной точке, расположенным перпендикулярно плоскости действия момента и направленным от этой плоскости в ту сторону, откуда поворот силы виден против хода часовой стрелки (Рисунок 3).

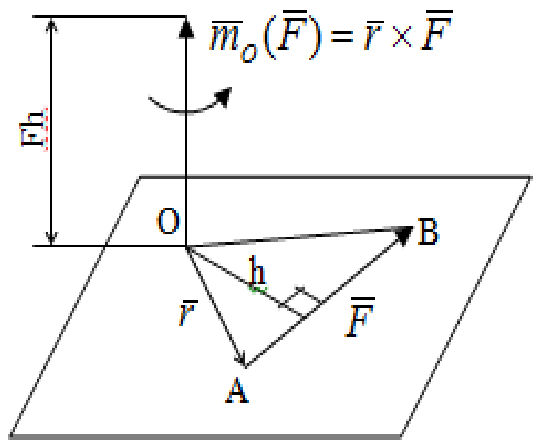

Рисунок 3 – Направление вектора момента силы

Такой вектор задает и плоскость действия момента, и модуль момента, и направление вращения.

Остановимся на выражении вектор-момента силы относительно точки векторным произведением радиус-вектора $\overline{r} = \overline{OA}$ и вектора силы $\overline{F}$. Как отмечалось выше момент силы относительно точки O равен удвоенной площади треугольника OAB. С другой стороны

$$2\,\text{пл.}\,\Delta OAB = \left|\overline{r} \times \overline{F}\right|,$$

то есть векторы $\overline{m}_O(\overline{F})$ и $\overline{r} \times \overline{F}$ равны по модулю.

Если исходить из определения векторного произведения двух векторов, что это есть вектор расположенный перпендикулярно к перемножаемым векторам и направленный туда, откуда поворот первого вектора ко второму на наименьший угол виден против хода часовой стрелки, по рисунку 3 можно увидеть, что векторы $\overline{m}_O(\overline{F})$ и $\overline{r} \times \overline{F}$ совпадают по направлению. Тогда получается, что

$$\overline{m}_o(\overline{F}) = \overline{r} \times \overline{F} \quad (4)$$

Таким образом, равенство является актуальным и доказывается даже по чертежу.

Теорема Вариньона о моменте равнодействующей

Дадим обобщенную формулировку теоремы (без доказательства): момент равнодействующей системы сил относительно точки или оси равен сумме моментов всех сил системы относительно этой точки или оси.

Условие равновесия рычага

Под рычагом в механике понимается любое тело, которое может поворачиваться вокруг некоторой точки или оси под действием активных сил.

Рассмотрим рычаг (Рисунок 4), на который действуют активные силы $\overline{F}_1, \overline{F}_2, ..., \overline{F}_n$.

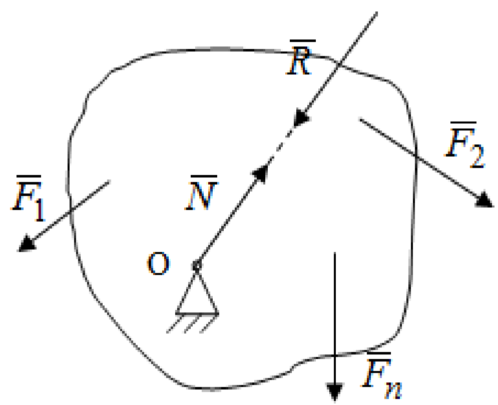

Рисунок 4 – Рычаг и активные силы

Приведем эту систему сил к равнодействующей $\overline{R}$. Тогда на рычаг будут действовать две силы – равнодействующая $\overline{R}$ и реакция $\overline{N}$ опоры (оси) O рычага. При равновесии рычага эти силы будут равны по модулю и направлены вдоль одной прямой в противоположные стороны (согласно аксиомы 1 статики). Из этого следует, что момент равнодействующей активных сил системы относительно точки опоры (оси) рычага будет равен нулю, так как линия действия равнодействующей будет проходить через O. Последний же, согласно теоремы Вариньона о моменте равнодействующей, равен сумме моментов всех активных сил системы относительно точки опоры (оси) рычага. То есть:

$$\sum m_o(\overline{F}_k^a) = 0.$$

Полученное равенство является условием равновесия рычага: для равновесия рычага необходимо и достаточно, чтобы сумма моментов всех активных сил, действующих на рычаг, относительно точки опоры (оси) рычага была равна нулю.

Момент силы относительно оси

Рассмотрим тело в виде прямоугольной пластины, которое может поворачиваться вокруг оси *z* под действием силы $\overline{F}$ (Рисунок 5).

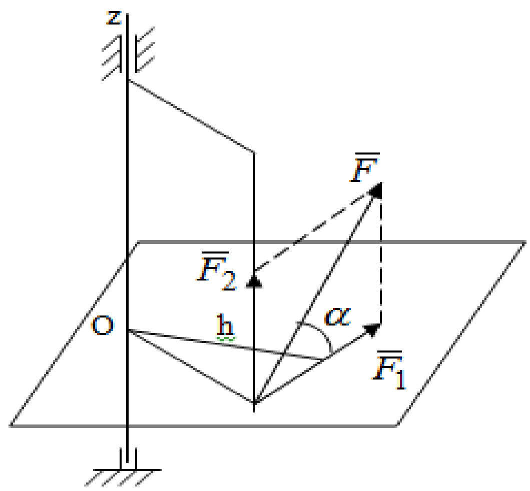

Рисунок 5 – Момент силы относительно точки

Разложим эту силу на две составляющие $\overline{F}_1$, лежащую в плоскости перпендикулярной оси z, и силу $\overline{F}_2$ параллельную этой оси. Согласно теореме Вариньона о моменте равнодействующей момент силы $\overline{F}$ относительно оси *z* будет равен сумме моментов сил $\overline{F}_1$ и $\overline{F}_2$ относительно этой оси:

$$m_z(\overline{F}) = m_z(\overline{F}_1) + m_z(\overline{F}_2).$$

Момент силы $\overline{F}_1$ будет равен: $m_z(\overline{F}_1) = F_1 h = (F\cos\alpha)h$, а момент $m_z(\overline{F}_2) = 0$, так как она параллельна оси z и повернуть тело вокруг оси не может, что вполне очевидно. Тогда окончательно получим

$$m_z(\overline{F}) = \pm F_1 h = \pm(F\cos\alpha)h.$$

Таким образом, для определения момента силы относительно оси необходимо силу спроектировать на плоскость перпендикулярную оси и найти момент этой проекции относительно точки пересечения этой плоскости с осью. Момент считается положительным, если глядя с положительного конца оси видят поворот, совершаемый силой, против хода часовой стрелки, и отрицательным, если по ходу часовой стрелки.

Обратим внимание на то, что если сила параллельна оси или линия ее действия пересекает ось, то ее момент относительно оси будет равен нулю.

Связь момента силы относительно оси с моментом силы относительно любой точки на оси

Покажем на чертеже ось z, силу $\overline{F}$, вектор-момент этой силы относительно произвольной точки O на оси, проекцию этой силы $\overline{F}_1$ на плоскость перпендикулярную оси z, треугольники OAB и Oab, удвоенные площади которых равны соответственно моменту силы относительно точки o и моменту силы относительно оси z (Рисунок 6).

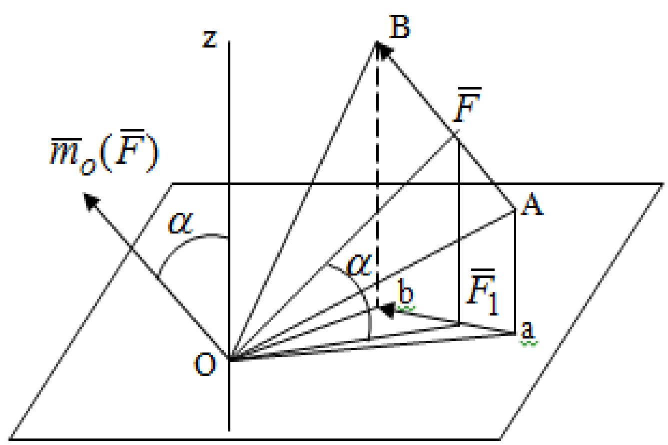

Рисунок 6 – Взаимосвязь моментов сил

Учитывая, что

$$2\,\text{пл.}\,\Delta\text{Oab} = (2\,\text{пл.}\,\Delta\text{OAB})\cos\alpha$$

тогда окончательно получим:

$$m_z(\overline{F}) = \left[\overline{m}_o(\overline{F})\right]\cos\alpha\,.$$

Это равенство показывает, что момент силы относительно оси равен проекции на эту ось вектор-момента силы относительно любой точки на этой оси.

Аналитические формулы момента силы относительно координатных осей

Как было установлено выше, вектор-момент силы относительно точки равен:

$$\overline{m}_o(\overline{F}) = \overline{r} \times \overline{F}$$

Выразим векторное произведение $\overline{r} \times \overline{F}$ через проекции этих векторов на оси координат:

$$\overline{m}_o(\overline{F}) = \overline{r} \times \overline{F} = (yF_z - zF_y)\,\overline{i} + (zF_x - xF_z)\,\overline{j} + (xF_y - yF_x)\overline{k},$$

где x, y z – проекции радиус-вектора $\overline{r}$ на координатные оси и они же координаты точки приложения силы.

Учитывая, что проекция вектор-момента силы относительно точки на оси на ось равна моменту силы относительно оси, из полученного равенства следует, что моменты силы $\overline{F}$ относительно координатных осей равны:

$$m_x(\overline{F}) = yF_z - zF_y\ ,$$
$$m_y(\overline{F}) = zF_x - xF_z,$$
$$m_z(\overline{F}) = xF_y - yF_x.$$

Данные равенства называются аналитическими формулами момента силы относительно координатных осей.

Лекция 2

1. Связи и их реакции. Виды связей и направление их реакций. Аксиома связей.
2. Пара сил. Момент пары алгебраический и как вектор.
3. Теорема об эквивалентных парах на плоскости. Свойства пар на плоскости. Теорема о переносе пары в параллельную плоскость.
4. Теоремы о сложении пар на плоскости и в пространстве.
5. Условия равновесия пар на плоскости и в пространстве.

Связи и их реакции

Все твердые тела можно разделить на свободные и несвободные. Свободным называется тело, которому из данного положения можно сообщить перемещение в любом направлении в пространстве. Несвободными называются тела, перемещение которых по какому-либо направлению ограничено другими телами.

Все ограничения (тела), препятствующие перемещению данного тела в пространстве по какому-либо направлению, называются связями.

Силы, с которыми связи действуют на данное тело, называются реакциями связей.

В дальнейшем силы, не являющиеся реакциями связей, будем называть активными силами. Их направление и численная величина не зависят от других действующих на тело сил и от наложенных на него связей. Реакции же связей, наоборот, зависят от активных сил полностью.

Виды связей и направление их реакций

Для решения задач механики очень важно знать виды связей и направление их реакций. Рассмотрим основные виды связей:

1. Опора на гладкую поверхность. Под гладкой понимается поверхность, трением о которую пренебрегают. Такая поверхность не дает телу перемещаться по направлению по перпендикулярному к ней направлению. Поэтому, реакция $\boldsymbol{N}$ гладкой поверхности направлена перпендикулярно от этой поверхности (Рисунок 1).

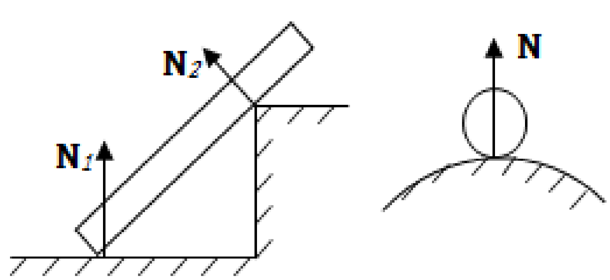

Рисунок 1 – Реакция опоры гладкой поверхности

2. Нить. Связью служит гибкая нерастяжимая нить. Практически к этому виду связи относятся все гибкие тела: ремни, цепи, тросы, канаты, веревки и другие. Реакция нити всегда направлена вдоль нити к точке ее подвеса (Рисунок 2).

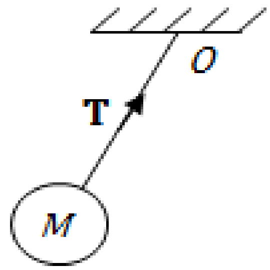

Рисунок 2 – Вид связи нить

3. Стержень. Это жесткое длинное тело AB с шарнирами на концах, сечение которого мало по сравнению с его длиной. Трением в шарнирах и весом стержня обычно пренебрегают, тогда он работает или на сжатие, или на растяжение. Поэтому реакция стержня всегда направлена вдоль стержня. Направление ее наперед неизвестно и если показано будет не то направление, то перед значением реакции получим знак минус (Рисунок 3).

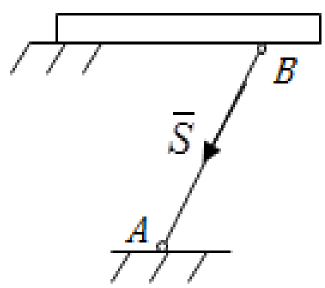

Рисунок 3 – Стержень

4. Неподвижный цилиндрический шарнир (подшипник). По конструкции они могут быть самые разнообразные, простейший пример – две тела соединенные круглым прутком, проходящим через отверстия в этих телах. Осевая линия z прутка называется осью шарнира. Условные изображения такого шарнира A показаны на рисунке 4. Так как шарнир не препятствует движению тела (прутка) вдоль оси шарнира, а ограничивает его перемещения по любому направлению перпендикулярному этой оси, то реакция неподвижного цилиндрического шарнира направлена перпендикулярно его оси, но в каком направлении неизвестно наперед. Поэтому, в большинстве случаев, ее наугад задают двумя составляющими (например $\overline{X}_A$, $\overline{Y}_A$, как на рисунке 4) параллельными осям координат, которые к оси шарнира располагают перпендикулярно. Правильность выбора направления этих составляющих уточняется по за-

вершении их вычисления: если направления показаны верно, то значения составляющих будут иметь знаки плюс, а если нет, то знаки минус. Модули же составляющих будут верны и от того угадали мы или нет направления составляющих не зависят.

Когда на тело действует не более трех сил, включая реакции связей, и они расположены в одной плоскости и не параллельны, то направление (точнее линию действия) реакции неподвижного цилиндрического шарнира определяют с помощью теоремы о трех силах. Она состоит в следующем: если на тело, находящееся в равновесии, действуют три непараллельные силы, лежащие в одной плоскости, то линии их действия пересекаются в одной точке.

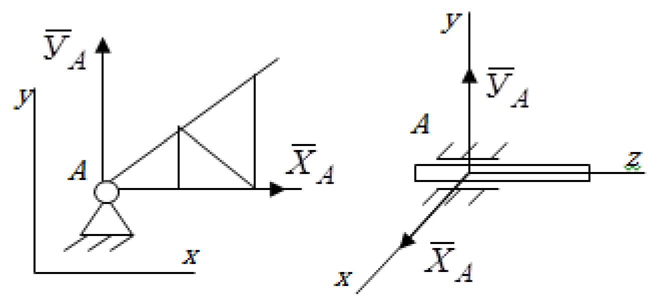

Рисунок 4 – Неподвижный цилиндрический шарнир или подшипник

5. <u>Шаровой шарнир и подпятник</u>. Направления реакций этих связей наперед неизвестны, так как они ограничивают перемещение тела по всем направлениям. Поэтому их реакцию задают тремя составляющими параллельными осям координат x, y, z и по полученным знакам этих величин судят о правильности указания направлений составляющих.

6. <u>Жесткая заделка.</u> В этом случае часть тела, например конец балки, вмонтирована в другое тело (связь) жестко – замурована в кладку, залита бетоном, запрессована в отверстие, ввинчена в резьбовое отверстие и т.п. При действии на тело плоской системы сил реакция жесткой заделки будет состоять из произвольной плоской системы сил, которая приводится к силе и паре, с неизвестными наперед направлениями. Поэтому реакцию жесткой заделки задают двумя составляющими параллельными осям x и y, расположенными в плоскости действующих на тело сил, и парой сил, расположенной в той же плоскости (Рисунок 5).

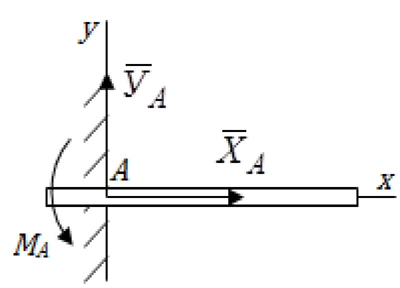

Рисунок 5 – Жесткая заделка балки

Направления составляющих и вращения пары указывают произвольно и уточняют по завершении их определения по полученным знакам их значений.

Аксиома связей.

Эта аксиома состоит в следующем: любое не свободное тело можно сделать свободным, если отбросить связи и их действие заменить реакциями.

Пара сил. Момент пары алгебраический и как вектор

Парой сил называется система из двух равных по модулю антипараллельных сил. Пара равнодействующей не имеет, т. е. заменить и уравновесить ее одной силой нельзя. Пара оказывает вращательное действие, которое определяется тремя факторами: модулем момента пары, направлением вращения, плоскостью действия пары (та плоскость, в которой лежат силы пары).

Различают алгебраический момент пары и момент пары как вектор.

Моментом пары (алгебраическим) называется взятое со знаком плюс или минус произведение модуля любой из сил пары на плечо пары.

$$m = \pm F_1 h = \pm F_2 h.$$

Плечо h – это наименьшее расстояние между линиями действия сил пары. Знак учитывает направление вращения пары: если пара стремится вращать тело против хода часовой стрелки, то ее момент принято считать положительным, а если по ходу часовой стрелки, то отрицательным. На чертежах пары чаще изображают дуговыми стрелками с указанием их момента.

Заметим, что с геометрической точки зрения момент пары равен удвоенной площади треугольника, одной стороной которого является любая сила пары, а двумя другими отрезки, соединяющие начало и конец вектора этой силы с точкой приложения второй силы пары, например ΔABC (Рисунок 6).

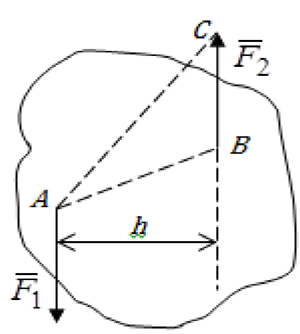

Рисунок 6 – Момент пары сил

Алгебраическим моментом пары пользуются тогда, когда пары лежат в одной плоскости, а поэтому задавать ее не надо. Если же пары имеют разные плоскости действия, то надо учитывать плоскости их действия, и тогда момент пары представляют вектором. Этот вектор-момент пары, численно равный модулю момента пары, прилагают в любой точке плоскости действия пары и направляют его перпендикулярно от этой плоскости туда, откуда поворот пары виден против хода часовой стрелки (Рисунок 7).

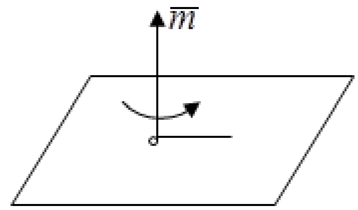

Рисунок 7 – Вектор-момент пары сил

Такой вектор один задает все три, упомянутые выше, фактора, определяющие действие пары.

Теорема об эквивалентных парах на плоскости

Данная теорема гласит: две пары, лежащие в одной плоскости и имеющие численно равные моменты и одинаковые направления вращения эквивалентны друг другу. Приведем доказательство теоремы.

Пусть в плоскости чертежа действует пара $\overline{F}_1, \overline{F}_1'$ (Рисунок 8).

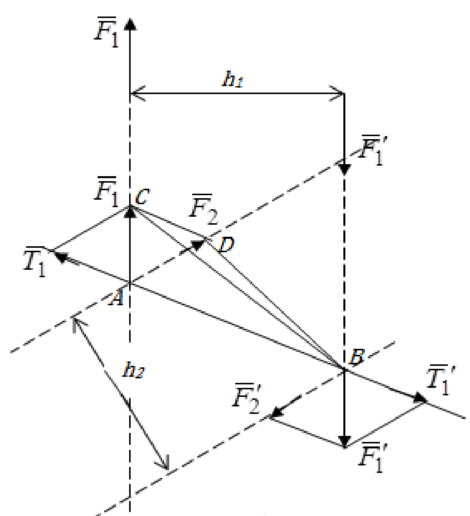

Рисунок 8 - Теорема об эквивалентных парах на плоскости

Проведем линии действия этих сил и пересечем их двумя параллельными наклонными прямыми. Проведем через точки A и B пересечения этих наклонных прямых с линиями действия сил $\overline{F}_1, \overline{F}_1'$ прямую. Перенесем силы $\overline{F}_1, \overline{F}_1'$ по линиям их действия и приложим в точках A и B, а затем разложим их на составляющие, построив соответствующие параллелограммы.

В силу разложения одинаковых по модулю сил $\overline{T}_1 = -\overline{T}_1'$ (эти две силы образуют уравновешенную систему сил, так как направлены вдоль одной прямой в разные стороны), $\overline{F}_2 = -\overline{F}_2'$ (эти две силы образуют пару сил, так как антипараллельны). Кроме того в силу разложения

$$(\overline{F}_1, \overline{F}_1') \equiv (\overline{F}_2, \overline{F}_2', \overline{T}_1, \overline{T}_1').$$

Отнимем от полученной в результате разложения системы сил систему сил ($\overline{T}_1, \overline{T}_1'$) эквивалентную нулю (на основания аксиомы 2 статики) и тогда будет:

$$(\overline{F}_1, \overline{F}_1') \equiv (\overline{F}_2, \overline{F}_2').$$

Таким образом, имеем, что две пары, лежащие в одной плоскости, имеющие одинаковые направления вращения и численно равные моменты (а моменты этих пар численно равны, так как треугольники ABC и ABD имеют одинаковые площади – у них общее основание и одинаковая высота) эквивалентны друг другу.

Свойства пар на плоскости

Из рассмотренной теоремы об эквивалентных парах на плоскости вытекают следующие два свойства пар на плоскости**:**

1. Пару в плоскости ее действия можно как угодно перемещать и поворачивать.
2. У пары можно изменять силы и плечо, сохраняя без изменения момент.

Теорема о переносе пары в параллельную плоскость

Теорема состоит в том, что действие пары на тело не изменяется от ее переноса в параллельную плоскость.

Теорема о сложении пар на плоскости.

Она имеет формулировку: система пар на плоскости эквивалентна одной паре, лежащей в той же плоскости, момент которой равен алгебраической сумме моментов всех пар системы ($M = \sum m_k$).

Докажем теорему на примере сложения трех, расположенных в одной плоскости пар с моментами m_1, m_2, m_3 (Рисунок 9).

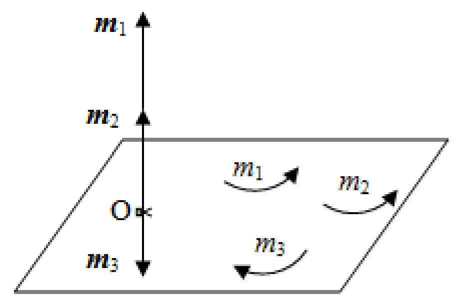

Рисунок 9 – Теорема о сложении пар на плоскости

Представим их моменты векторами, приложенными в произвольной точке О плоскости (напомним, что пару в плоскости ее действия можно как угодно перемещать). Получим векторы, расположенные на одной прямой. Их можно сложить и заменить одним вектор-моментом

$M = m_1 + m_2 – m_3$,то есть парой с моментом равным алгебраической сумме моментов пар системы расположенной в той же плоскости. Вполне очевидно, что этот результат справедлив для любого числа пар.

Теорема о сложении пар в пространстве

Эта теорема гласит: система пар в пространстве эквивалентна одной паре, момент которой равен геометрической сумме моментов всех пар системы ($\overline{M} = \sum \overline{m}_k$).

В самом деле, пусть пары с моментами m_1 и m_2 лежат в разных плоскостях (Рисунок 10).

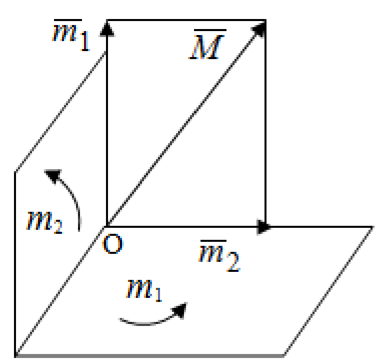

Рисунок 10 – Сложение пар в пространстве

Представим их моменты векторами, приложенными в любой точке прямой, образуемой пересечением этих плоскостей. Затем их сложим геометрически и получим вектор-момент $\overline{M} = \overline{m}_1 + \overline{m}_2$ результирующей пары. Действуя подобным образом можно сложить любое число пар в пространстве.

Условия равновесия пар на плоскости и в пространстве.

Для равновесия система пар должна быть эквивалентны нулю, следовательно момент их результирующей пары должен быть равен нулю. Таким образом, учитывая теоремы о сложении пар, имеем:

1. Для равновесия системы пар на плоскости необходимо и достаточно, чтобы алгебраическая сумма моментов всех пар системы была равна нулю:

$$\sum m_k = 0.$$

2. Для равновесия системы пар в пространстве необходимо и достаточно, чтобы геометрическая сумма моментов всех пар системы была равна нулю:

$$\sum \overline{m}_k = 0.$$

Лекция 3

1. Произвольные системы сил
2. Теорема о параллельном переносе силы.
3. Приведение произвольных систем сил к данному центру. Разные случаи приведения.
4. Условия равновесия произвольных систем сил.
5. Условия равновесия системы параллельных сил.

Теорема о параллельном переносе силы

Силу, приложенную к твердому телу, можно перенести параллельно самой себе в любую точку тела, если при этом к телу приложить пару, момент которой равен моменту переносимой силы относительно точки переноса (Рисунок 1).

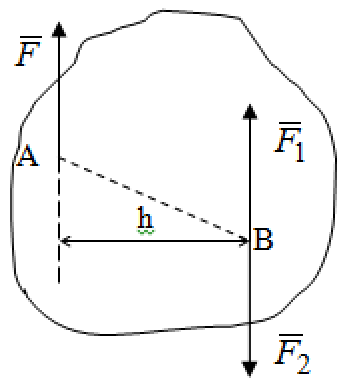

Рисунок 1 - Теорема о параллельном переносе силы

Действительно, пусть на твердое тело в точке А действует сила $\overline{F}$. Действие этой силы на тело не изменится, если в любой его точке В приложим две уравновешенные силы $\overline{F}_1$ и $\overline{F}_2$, равные мо модулю силе $\overline{F}$ и параллельные ей. Полученная система сил будет представлять из себя силу $\overline{F}_1 = \overline{F}$, но приложенную в точке В и пару сил с моментом

$$m = Fh = m_B(\overline{F}),$$

что и требовалось доказать.

Приведение произвольных систем сил к данному центру

Привести систему сил – это значит максимально ее упростить.

Пусть на твердое тело действует произвольная пространственная система сил F_1, F_2, , F_n. (Рисунок 2).

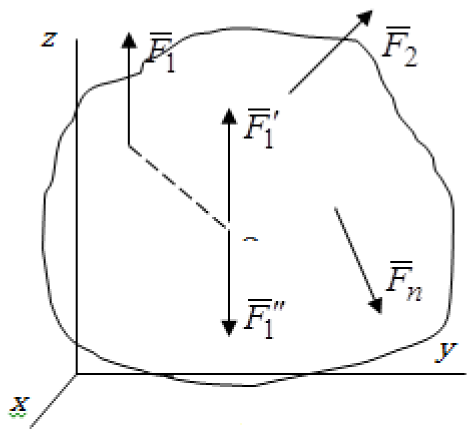

Рисунок 2 – Приведение произвольной системы сил

Перенесем, в соответствии с теоремой о параллельном переносе силы, все силы системы в некоторую точку О, именуемую в дальнейшем центр приведения (для примера на рис. 2 показан перенос силы $\overline{F}_1$). В результате получим систему сходящихся в центре приведения сил (пространственную) и систему пар в пространстве.

Сходящиеся силы можно сложить и заменить одной силой

$$\overline{R}' = \sum \overline{F}_k \, , \tag{1}$$

именуемой главный вектор системы сил.

Систему пар тоже можно заменить одной парой, момент которой равен геометрической сумме моментов всех пар системы:

$$\overline{M}_o = \sum \overline{m}_o(\overline{F}_k) \, . \tag{2}$$

Момент этой пары называется главным моментом системы сил.

Таким образом, в общем случае, произвольная пространственная система сил приводится к силе и паре – главному вектору и главному моменту системы.

Заметим, что величина главного вектора не зависит от выбора центра приведения, а главного момента – зависит.

Главный вектор произвольной системы сил на плоскости определяется также равенством (1), а главный момент равен не геометрической, а алгебраической сумме моментов всех сил системы относительно центра приведения:

$$M_o = \sum m_o(\overline{F}_k) \, . \tag{3}$$

Модуль главного вектора системы определяют по той же формуле, что и модуль равнодействующей сходящейся системы сил, а именно:

$R=\sqrt{(\sum F_{kx})^2+(\sum F_{kx})^2}$ - для произвольной системы сил на плоскости,

$R=\sqrt{(\sum F_{kx})^2+(\sum F_{ky})^2+(\sum F_{kz})^2}$ - для произвольной системы сил в пространстве.

Направление главного вектора определяют по направляющим косинусам:

$$\cos\alpha = R_x / R,\ \cos\beta = R_y / R,\ \cos\gamma = R_z / R,$$

где R_x, R_y, R_z – проекции главного вектора на оси координат, а равны они суммам проекций всех сил системы на эти оси.

Главный момент произвольной системы сил на плоскости определяется по формуле (3).

Главный момент произвольной пространственной системы сил определяется по его проекциям на координатные оси, поскольку он является вектором (2), по формуле:

$$M_o=\sqrt{\left[\sum m_x(\overline{F}_k)\right]^2+\left[\sum m_y(\overline{F}_k)\right]^2+\left[\sum m_z(\overline{F}_k)\right]^2},$$

где величины, стоящие в квадратных скобках - есть проекции главного момента системы $M_{ox},\ M_{oy},\ M_{oz}$ на оси координат x, y, z соответственно.

Направление главного момента системы определяется по направляющим косинусам:

$$\cos\alpha = M_{ox} / M_o,\ \cos\beta = M_{oy} / M_o,\ \cos\gamma = M_{oz} / M_o.$$

Разные случаи приведения произвольной системы сил к данному центру

В зависимости от значений главного вектора и главного момента системы возможны следующие четыре частных случая приведения произвольной системы сил к данному центру:

1. $R' \neq 0,\ M_o \neq 0$ - система приводится к силе и паре, равновесия нет;
2. $R' \neq 0,\ M_o = 0$ - система приводится к 1 силе (равнодействующей), равновесия нет;
3. $R' = 0,\ M_o \neq 0$ - система приводится к паре, равновесия нет;
4. $R' = 0,\ M_o = 0$ - система эквивалентна нулю и находится в равновесии.

В первом случае для произвольной системы сил на плоскости возможно дальнейшее упрощение и приведение ее к одной силе, то есть равнодействующей, но она будет проходить не через центр приведения, а смещена параллельно от него на расстояние

$$h=\frac{M_o}{R'}.$$

Оставим неизменным M_o, но силы пары ($\overline{R}$, $\overline{R}_1$) возьмем равными по модулю главному вектору $\overline{R}'$. Тогда плечо пары будет

$$h = \frac{M_o}{R'}.$$

После этого пару в ее плоскости переместим и повернем так, чтобы силы $\overline{R}'$ и $\overline{R}_1$ были направлены по одной прямой в разные стороны, то есть давали уравновешенную систему сил, которую отбросим (по аксиоме 2 статики) (Рисунок 3).

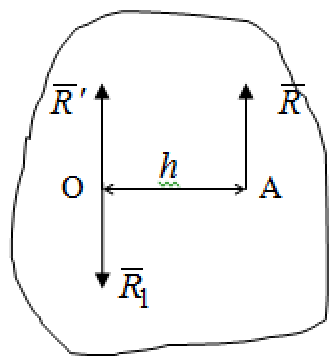

Рисунок 3 – Перенос пары в ее плоскости

Тогда останется только сила $\overline{R}$ - равнодействующая, линия действия которой смещена от центра приведения O на расстояние

$$h = \frac{M_o}{R'}.$$

Что касается произвольной пространственной системы сил, то в первом случае приведения возможны три различных варианта:

1. Если $\overline{M}_o \perp \overline{R}'$, то такую систему сил можно привести к равнодействующей, не проходящей через центр приведения O. В этом случае главный вектор и пара с моментом $\overline{M}_o$ лежат в одной плоскости (Рисунок 4).

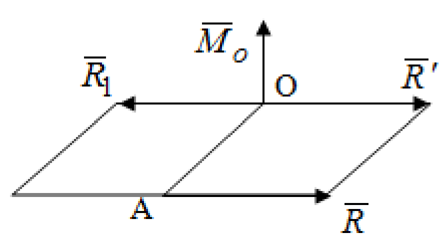

Рисунок 4 – Главный момент расположен перпендикулярно главному вектору

Выбрав силы пары $\overline{R}$ и $\overline{R}_1$ равными по модулю $\overline{R}'$ получим, что силы $\overline{R}'$ и $\overline{R}_1$ взаимно уравновесятся, и система приведется только к одной силе $\overline{R}$, линия действия которой отстоит от центра приведения О на расстояние ОА = $M_o/\overline{R}'$.

2. Если $\overline{M}_o \parallel \overline{R}'$, то система сил приводится к силе и паре, плоскость действия которой перпендикулярна силе (Рисунок 5).

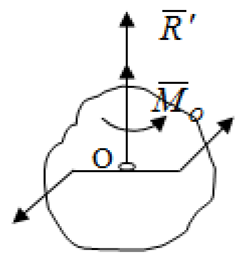

Рисунок 5 – Главный момент расположен параллельно главному вектору

Такая совокупность силы и пары называется динамическим винтом или динамой, а линия действия главного вектора называется осью динамы. Дальнейшее упрощение ее невозможно.

3. Если главный вектор и главный момент и не параллельны и не перпендикулярны, то такую систему сил можно привести к динаме, ось которой не будет проходить через центр приведения.

Разложим главный момент системы $\overline{M}_o$ на составляющие перпендикулярную $\overline{M}_2$ и параллельную $\overline{M}_1$ главному вектору $\overline{R}'$ (Рисунок 6).

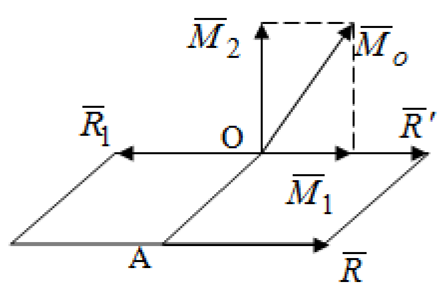

Рисунок 6 - Главный вектор и главный момент и не параллельны и не перпендикулярны

$\overline{M}_2$ и $\overline{R}'$ можно привести к силе $\overline{R} = \overline{R}'$. Тогда останется сила $\overline{R}$ и параллельный ей момент $\overline{M}_1$, то есть динама со смещенной осью (ось динамы будет направлена вдоль вектора $\overline{R}$).

Условия равновесия произвольных систем сил

Условия равновесия произвольной плоской системы сил. Как установлено, данная система сил будет в равновесии только тогда, когда ее главный вектор и главный момент равны нулю. Приравняем к нулю выражения модулей этих величин:

$$R=\sqrt{(\sum F_{kx})^2+(\sum F_{kx})^2}=0,$$
$$M_o=\sum m_o(\bar{F}_k)=0.$$

Как видно из этих равенств, это выполнимо при следующих условиях:

$$\begin{aligned}&\sum F_{kx}=0,\\&\sum F_{ky}=0,\\&\sum m_o(\bar{F}_k)=0.\end{aligned}\qquad(4)$$

Таким образом, для равновесия произвольной плоской системы сил необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций всех сил системы на оси x и y, расположенные в той же плоскости, что и силы, были равны нулю и, чтобы сумма моментов всех сил системы относительно любой точки, расположенной в плоскости действия сил, была равна нулю.

Эта первая форма условий равновесия называется основной, в ней нет никаких ограничений на выбор положения осей и точки. Кроме основной есть еще две дополнительные формы условий равновесия.

Вторая форма условий равновесия: для равновесия произвольной плоской системы сил необходимо и достаточно, чтобы суммы моментов всех сил системы относительно двух точек, лежащих в плоскости действия сил, и сумма проекций всех сил системы на ось, расположенную в той же плоскости и не перпендикулярную отрезку, соединяющему эти точки, были равны нулю.

$$\begin{aligned}&\sum F_{kx}=0,\\&\sum m_A(\bar{F}_k)=0,\\&\sum m_B(\bar{F}_k)=0.\end{aligned}$$

В этой форме условий равновесия наложены требования на выбор положения оси и точек. Следует иметь ввиду, что если ось x будет перпендикулярна к отрезку AB, то система может иметь равнодействующую, проходящую через точки A и B и не быть, следовательно, в равновесии, хотя все три уравнения будут выполняться. Предписанный выбор положения оси обеспечивает достаточность этой формы условий равновесия.

Третья форма условий равновесия: для равновесия произвольной системы сил на плоскости необходимо и достаточно, чтобы суммы моментов всех сил системы относительно любых трех точек, расположенных в той же плоскости и не лежащих на одной прямой, были равны нулю.

Эта форма условий равновесия является достаточной, поскольку, если бы система привелась к равнодействующей, то равнодействующая должна была бы проходить через три точки, не лежащие на одной прямой, а это невозможно.

Условия равновесия произвольной пространственной системы сил. Для получения этих аналитических условий приравняем к нулю модули главного вектора и главного момента сил инерции системы.

$$R=\sqrt{(\sum F_{kx})^2+(\sum F_{ky})^2+(\sum F_{kz})^2}=0,$$

$$M_o=\sqrt{\left[\sum m_x(\overline{F}_k)\right]^2+\left[\sum m_y(\overline{F}_k)\right]^2+\left[\sum m_z(\overline{F}_k)\right]^2}=0.$$

Отсюда видно, что равенство нулю этих величин возможно только при следующих условиях:

$$\sum F_{kx}=0,$$
$$\sum F_{ky}=0,$$
$$\sum F_{kz}=0,$$
$$\sum m_x(\overline{F}_k)=0,$$
$$\sum m_y(\overline{F}_k)=0,$$
$$\sum m_z(\overline{F}_k)=0.$$

Следовательно, для равновесия произвольной системы сил в пространстве необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций всех сил системы на оси x, y, z были равны нулю и, чтобы суммы моментов всех сил системы относительно этих осей были равны нулю.

Приведенные условия равновесия справедливы и для систем параллельных сил, так как эти системы сил есть частные случаи произвольных. Однако условия равновесия можно упростить, если одну из осей координат располагать параллельно силам. Тогда условия равновесия будут:

Для равновесия системы параллельных сил на плоскости необходимо и достаточно, чтобы сумма проекций всех сил системы на ось параллельную силам и сумма моментов всех сил системы относительно любой точки плоскости, в которой лежат эти силы, были равны нулю

Для равновесия системы параллельных сил в пространстве необходимо и достаточно, чтобы сумма проекций всех сил системы на ось параллельную силам и суммы моментов всех сил системы относительно двух других осей были равны нулю.

Лекция 4

1. Сложение двух параллельных и антипараллельных сил.
2. Центр параллельных сил.
3. Центр тяжести твердого тела
4. Координаты центров тяжести однородных твердых тел.
5. Способы определения координат центров тяжести тел.
6. Центры тяжести некоторых однородных тел.

Сложение двух параллельных и антипараллельных сил

Приведем без доказательства основные положения о сложении этих сил.

Равнодействующая двух параллельных сил равна их арифметической сумме и направлена в ту же сторону, что и складываемые силы. Линия действия равнодействующей делит отрезок между точками приложения сил на части обратно пропорциональные силам внутренним образом (рисунок 1).

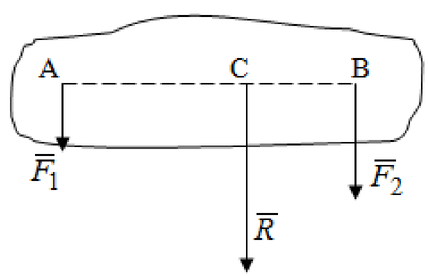

Рисунок 1 – Сложение двух параллельных сил

То есть

$$R = F_1 + F_2;$$

$$\frac{F_1}{BC} = \frac{F_2}{AC} = \frac{R}{AB}.$$

Следует иметь ввиду, что положение точки С на отрезке АВ не изменяется ни при каких поворотах тела (или сил $\overline{F}_1$ и $\overline{F}_2$ в одну и туже сторону на один и тот же угол).

Равнодействующая двух антипараллельных сил равна по модулю разности модулей этих сил, параллельна им и направлена в сторону большей силы. Линия действия равнодействующей делит отрезок между точками приложения сил на части обратно пропорциональные этим силам внешним образом (Рисунок 2).

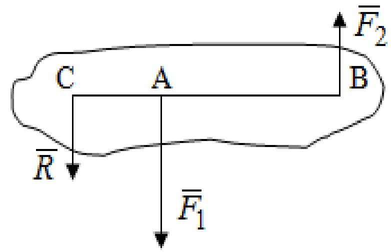

Рисунок 2 – Сложение двух антипараллельных сил

То есть

$$R = F_1 - F_2;$$

$$\frac{F_1}{BC} = \frac{F_2}{AC} = \frac{R}{AB}.$$

Центр параллельных сил

Центром параллельных сил называется геометрическая точка С, неизменно связанная с телом, через которую проходит линия действия равнодействующей этой системы параллельных сил при любых их поворотах относительно точек их приложения в одну и ту же сторону на один и тот же угол.

Пусть на тело действует система параллельных сил $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2, \ldots, \overline{F}_n$, имеющая равнодействующую $R = \sum F_k$ (Рисунок 3).

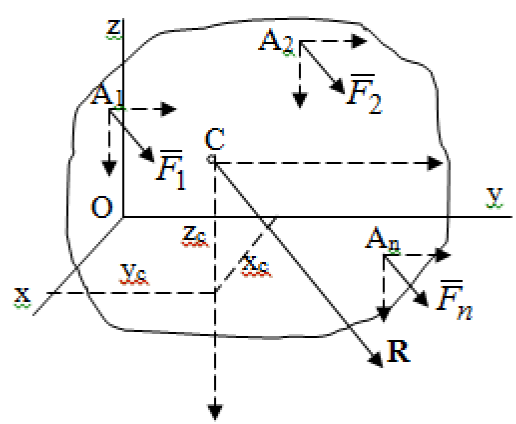

Рисунок 3 – Система параллельных сил и центр параллельных сил

Если силы системы поворачивать относительно точек их приложения в одну и ту же сторону, на один и тот же угол, то независимо от этого равнодействующая **R** будет проходить через неизменно связанную с телом точку С – центр параллельных сил. Определим координаты центра параллельных сил. Расположим силы параллельно оси z и выразим момент равнодействующей относительно осей y и x, а затем расположим силы параллельно оси y и выразим момент равнодействующей относительно оси x, учитывая, что они, согласно теоремы Вариньона, равны сумме моментов всех сил системы относительно этих осей:

$$Rx_c = F_1 x_1 + F_2 x_2 + ... + F_n x_n = \sum F_k x_k \ ,$$

и аналогично

$$Ry_c = \sum F_k y_k \ , \ Rz_c = \sum F_k z_k \ ,$$

где x_k, y_k, z_k – координаты точек приложения сил.

Тогда

$$x_c = \frac{\sum F_k x_k}{R}, \quad y_c = \frac{\sum F_k y_k}{R}, \quad z_c = \frac{\sum F_k z_k}{R}. \qquad (1)$$

Указанным способом получены формулы координат центра параллельных сил.

Центр тяжести твердого тела

На каждую *k-ю* точку тела, находящегося в поле тяжести Земли, действует сила тяжести P_k, направленная к центру Земли. Поскольку размеры любого тела ничтожно малы по сравнению с радиусом Земли, то схождением этих сил можно пренебречь и считать, что они образуют систему параллельных сил. Равнодействующая этих сил $P = \sum P_k$ называется силой тяжести тела и она всегда будет проходить через неизменно связанную с телом точку С – центр параллельных сил тяжести всех точек тела, которую и именуют центром тяжести тела.

Таким образом, центром тяжести твердого тела называется неизменно связанная с ним геометрическая точка, через которую проходит линия действия силы тяжести тела при любых его положениях в пространстве (поле тяжести Земли).

Координаты центра тяжести твердого тела, как центра параллельных сил, определяются формулами (1) и будут:

$$x_c = \frac{\sum P_k x_k}{P}, \quad y_c = \frac{\sum P_k y_k}{P}, \quad z_c = \frac{\sum P_k z_k}{P}. \qquad (2)$$

В этом заключается отличие понятий центра тяжести и центра масс.

Координаты центров тяжести однородных твердых тел

Однородные твердые тела могут быть объемными, плоскими тонкими пластинами, состоять из тонких стержней или проволоки одинакового сечения. Вес всего тела и каждой части таких тел пропорционален объему, площади или длине этой части:

$$P_k = \gamma V_k;\ P_k = \gamma S_k;\ P_k = \gamma l_k.$$

Подставим эти значения веса тела и его частей в формулы (2) и сократим γ в числителях и знаменателях. В результате получим формулы координат центра тяжести однородных твердых тел.

1. Для объемного тела

$$x_c = \frac{\sum V_k x_k}{V},\quad y_c = \frac{\sum V_k y_k}{V},\quad z_c = \frac{\sum V_k z_k}{V}, \tag{3}$$

где V_k – объем части тела; V – объем всего тела; x_k, y_k, z_k – координаты части тела.

Равенства (3) называют формулами координат центра тяжести объема.

2. Для плоской тонкой пластины

$$x_c = \frac{\sum S_k x_k}{S},\qquad y_c = \frac{\sum S_k y_k}{S}, \tag{4}$$

где S_k – площади частей пластины; S – площадь пластины.

Выражения (4) называют формулами координат центра тяжести площади.

3. Для тел из тонких однородных стержней или проволоки (или как говорят линии)

$$x_c = \frac{\sum l_k x_k}{L},\qquad y_c = \frac{\sum l_k y_k}{L},\qquad z_c = \frac{\sum l_k z_k}{L}, \tag{5}$$

где L – длина всей линии; l_k – длины частей линии.

Выражения (5) называются формулами координат центра тяжести линии.

Таким образом, положения центров тяжести однородных тел определяются как положения центров тяжести соответствующих объемов, площадей, линий.

Способы определения координат центров тяжести тел

Существуют следующие способы определения координат центров тел: симметрии, разбиения, дополнения, интегрирования и экспериментальные. Рассмотрим каждый из этих способов в отдельности.

1. Способ симметрии. Если однородное тело имеет центр, ось или плоскость симметрии, то центр его тяжести соответственно расположен в центре симметрии, на оси симметрии или в плоскости симметрии. Например, центр тяжести круглого однородного кольца, ромба, пря-

моугольника, прямоугольного параллелепипеда, шара и прочих тел, имеющих центр симметрии расположен в геометрическом центре симметрии этих тел.

2. Способ разбиения. При этом способе тело разбивается (если это возможно) на несколько частей (объемов, площадей линий), положения центров тяжести которых известно. Затем применяют формулы координат центров тяжести однородных тел, в зависимости от вида тела. Например, пластину можно разбить на два прямоугольника, центры тяжести которых, как известно, находятся в точках пересечения их диагоналей (Рисунок 4).

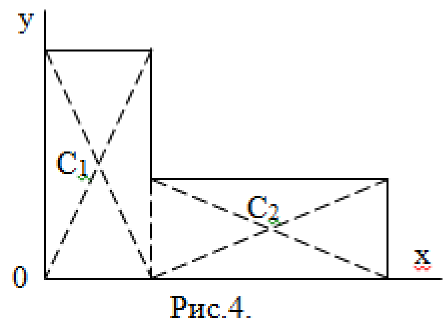

Рисунок 4 – Разбиение прямоугольников

Затем применив формулы (4) получим:

$$x_c = \frac{S_1 x_1 + S_2 x_2}{S_1 + S_2}, \quad y_c = \frac{S_1 y_1 + S_2 y_2}{S_1 + S_2},$$

где x_1, y_1, x_2, y_2 – координаты точек C_1 и C_2; S_1 и S_2 – площади соответствующих прямоугольников.

3. Способ дополнения. Тело, имеющее вырезанную часть, мысленно дополняется этой частью. В результате получают как бы два тела: цельное без выреза и тело, в виде вырезанной части. Далее, если само тело и вырезанную часть можно разбить на части, положения центров тяжести которых известно, применяют способ разбиения.

4. Способ интегрирования. Если тело нельзя разбить на части, положения центров тяжести которых известно, то его разбивают на произвольно малые части, например объемы ΔV_k и тогда формулы координат центра тяжести получают вид $x_c = \frac{\sum x_k \Delta V_k}{V}$ и т. д. Затем переходят к пределу правой части, устремляя ΔV_k к нулю. Тогда, суммы стоящие в числителях, обращаются в интегралы, распространяющиеся на весь объем тела, и формулы координат центра тяжести получают вид:

$$x_c = \frac{1}{V}\int_{(V)} x dV, \quad y_c = \frac{1}{V}\int_{(V)} y dV, \quad z_c = \frac{1}{V}\int_{(V)} z dV.$$

Аналогично получают формулы координат центров тяжести площади и линии. Для площади они будут иметь вид:

$$x_c = \frac{1}{S}\int_{(S)} x dS, \quad y_c = \frac{1}{S}\int_{(S)} y dS,$$

а для линии

$$x_c = \frac{1}{L}\int_{(L)} x d\ell, \quad y_c = \frac{1}{L}\int_{(L)} y d\ell, \quad z_c = \frac{1}{L}\int_{(L)} z d\ell.$$

Примеры применения способа интегрирования приведены в учебниках.

5. Экспериментальные способы. Эти способы применяют для определения положения центра тяжести неоднородных тел, тел сложной формы, тел составных (машин и их отдельных узлов). Возможны разные способы, например способ подвешивания, способ взвешивания.

При первом из упомянутых способов тело подвешивают на нити или тросе за различные его точки. Направление нити, к которой подвешено тело, будет каждый раз давать направление линии действия силы тяжести тела. Точка пересечения этих направлений будет центром тяжести тела.

Второй способ, способ взвешивания, покажем на примере определения положения центра тяжести автомобиля (Рисунок 5).

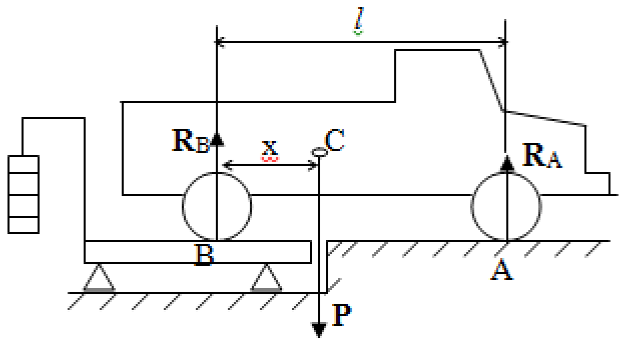

Рисунок 5 – Определение центра тяжести автомобиля

Для определения расстояния x замерим расстояние l между осями автомобиля. Определим взвешиванием на весах вес ***P*** автомобиля. Поставим автомобиль задними колесами на платформу весов и определим взвешиванием силу давления их на платформу, а она численно равна реакции R_B этих колес. Затем составим уравнение суммы моментов сил, действующих на автомобиль, относительно точки A и приравняем ее к нулю, так как автомобиль находится в равновесии: $P(l - x) - R_B l = 0$.

Откуда найдем искомое расстояние:

$$x = \frac{(P - R_B)l}{P}.$$

Полученное равенство в конечном случае определяет координату центра тяжести автомобиля.

Центры тяжести некоторых однородных тел

1. Центр тяжести площади треугольника расположен в точке пересечения его медиан.
2. Центр тяжести дуги окружности радиуса R лежит на оси ее симметрии на расстоянии от центра O, равном

$$x_c = R\frac{\sin\alpha}{\alpha},$$

где α в радианах (Рисунок 6).

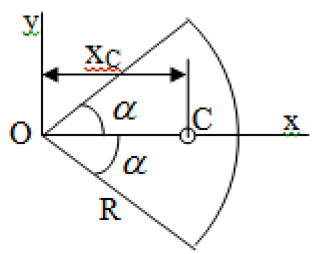

Рисунок 6 – Центр тяжести дуги

3. Центр тяжести площади кругового сектора лежит на оси его симметрии на расстоянии от центра O, равном

$$x_c = \frac{2}{3}R\frac{\sin\alpha}{\alpha}.$$

4. Центр тяжести объема пирамиды или кругового конуса лежит на отрезке прямой, соединяющем вершину пирамиды (конуса) с центром тяжести основания, на расстоянии одной четвертой длины этого отрезка от основания пирамиды (конуса).

Лекция 5

1. Трение скольжения.
2. Трение качения.

Трение скольжения

Трением скольжения называется сопротивление, возникающее при скольжении одного тела по поверхности другого.

Представим себе тело. лежащее на некоторой неподвижной горизонтальной поверхности (рис. 1). Если к нему, кроме действующих на него силы тяжести ***P*** и нормальной реакции ***N***, приложим очень малую силу ***Q*** (сдвигающую силу) и начнем ее увеличивать, то из опыта известно, что для того , чтобы тело начало скользить по опорной поверхности эта сила должна достичь вполне определенной величины (Рисунок 1).

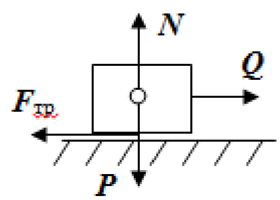

Рисунок 1 – Сила трения скольжения

Из этого следует, что со стороны опорной поверхности на тело кроме нормальной реакции действует сила, препятствующая скольжению тела. Эту силу называют силой трения скольжения. Ее будем обозначать $\boldsymbol{F}_{тр}$. О величине трения скольжения судят по этой силе.

Итак, с увеличением сдвигающей силы, растет и сила трения скольжения и уравновешивает сдвигающую силу до тех пор, пока тело не начнет двигаться (скользить) по опорной поверхности.

Момент, предшествующий началу скольжения тела, называется порогом покоя. До порога покоя силу трения называют силой трения скольжения в покое. При пороге покоя сила трения скольжения в покое достигает максимальной величины. После порога покоя силу трения называют силой трения скольжения в движении.

Она может изменяться по разному - увеличиваться или уменьшаться по сравнению с максимальной силой трения скольжения в покое, но она всегда будет меньше сдвигающей силы. Характер взаимосвязи сил ***Q*** и $\boldsymbol{F}_{тр}$ представлен на рисунке 2.

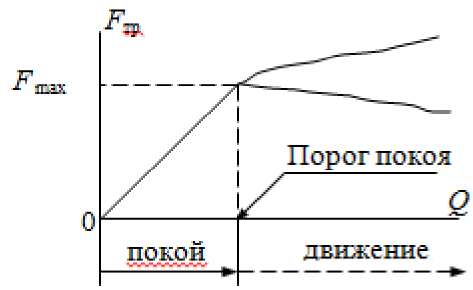

Рисунок 2 – Порог покоя

Следует заметить, что зависимости, о которых идет речь в данной лекции относятся к сухому трению, то есть тому, когда трущиеся поверхности не разделены каким-либо третьим телом (смазкой, водой, окисными пленками и т д.).

Путем многочисленных опытов Кулон установил, что максимальная сила трения скольжения (в покое) равна произведению коэффициента трения скольжения в покое f на нормальное давление тела на опорную поверхность или, что количественно то же, на нормальную реакцию N опорной поверхности

$$F_{max} = f\,N\,.$$

Сила трения скольжения в движении тоже пропорциональна нормальному давлению трущихся тел друг на друга:

$$F' = f'\,N\,,$$

где f' - коэффициент трения скольжения в движении, который несколько меньше коэффициента трения скольжения в покое и, как правило, с увеличением скорости уменьшается до некоторой постоянной величины.

Из приведенных зависимостей следует, что коэффициент трения скольжения является величиной безразмерной.

Значения коэффициентов трения скольжения определяется опытным путем и зависит от многих факторов: материалов трущихся тел, шероховатости соприкасающихся поверхностей, влажности, температуры, направления скольжения – вдоль или поперек волокон (для волокнистых тел), от скорости скольжения и других.

Следует также иметь ввиду, что приведенные зависимости являются приближенными и далеко не полно отражают сложности процессов трения, но дают в ряде случаев достаточную точность и поэтому широко применяются.

Что касается причин возникновения трения скольжения, то в основном они состоят в геометрическом сцеплении шероховатостей соприкасающихся поверхностей и их молекулярном взаимодействии.

Полезно или нет трение – сказать однозначно невозможно. Если бы не было трения, то мы не смогли бы ходить (достаточно вспомнить, как скользят ноги на льду), машины передвигаться; гвозди бы, шурупы, болты не могли скрепить детали (они тоже держатся трением). Не было бы тканей, так как нити в них держатся силами трения. Подобные примеры бесконечны. Так. Что трение отнюдь не вредное явление. Оно вредно в машинах, так как поглощает энергию на бесполезную работу, вызывает износ деталей, снижает надежность и эффективность машин, поэтому с ним борются.

Многие задачи на равновесие тел на поверхности с трением удобно решать геометрически, используя понятия угол трения и конус трения.

Угол трения. На тело, находящееся на поверхности с трением, при приложении сдвигающей силы $\boldsymbol{Q}$ со стороны этой поверхности действуют сила трения скольжения в покое $\boldsymbol{F}_{тр}$ и нормальная реакция реакция $\boldsymbol{N}$, которые имеют равнодействующую $\boldsymbol{R}$. При пороге покоя эта равнодействующая $\boldsymbol{R}$ образует с нормалью угол φ, который называется углом трения (рисунок 3).

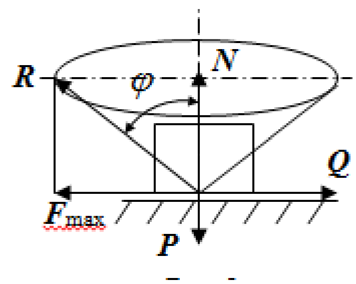

Рисунок 3 – Угол трения

Угол трения интересен тем, что его тангенс, как следует из рис. 3, равен коэффициенту f трения скольжения в покое:

$$tg\varphi = \frac{F_{\max}}{N} = \frac{fN}{N} = f\ .$$

Конус трения. При доведении тела до порога покоя по всем направлениям его скольжения по опорной поверхности полная реакция $\boldsymbol{R}$ поверхности опишет конус, который называется конусом трения (Рисунок 4).

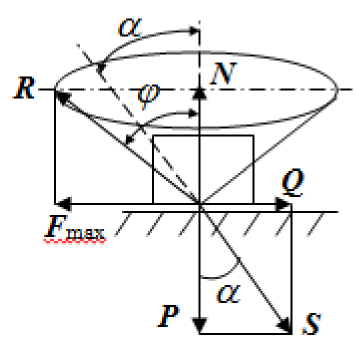

Рисунок 4 – Конус трения

Конус трения интересен тем, что пока сила, действующая на тело, находится внутри конуса трения или на его образующей тело будет в покое.

В самом деле, пусть на тело действует сила ***S*,** образующая с нормалью угол α. Разложим ее на силы ***P*** и ***Q***. Тело будет в покое при условии

$$Q \le F_{\max}.$$

$$Q = Ptg\alpha,$$

или, учитывая, что P = N,

$$Q = P\ tg\alpha = N\ tg\alpha.$$

Тогда, учитывая, что

$$F_{\max} = f\ N = f\ tg\varphi$$

условие равновесия тела будет:

$$N\ tg\alpha \le N\ tg\varphi.$$

Отсюда следует, что пока $\alpha \le \varphi$ тело будет находится в покое, какой большой не была бы сила ***S***.

Заметим, что конус и угол трения используются при экспериментальном определении коэффициента трения скольжения в покое с помощью наклонной плоскости. Тело помещают на наклонную плоскость и медленно увеличивают угол наклона, доводя его до порога покоя, то есть начала скольжения. В этот момент линия действия силы тяжести будет проходить по образующей конуса трения, а угол наклона плоскости будет равен углу трения, а $tg\varphi = f$.

Коснемся, для расширения кругозора, теоремы Эйлера о трении нити о цилиндрическую поверхность:

$$T = P^{f\alpha},$$

где T – сдвигающая сила; P – удерживающая сила; f – коэффициент трения скольжения нити о поверхность; α - угол охвата нитью цилиндрической поверхности (Рисунок 5).

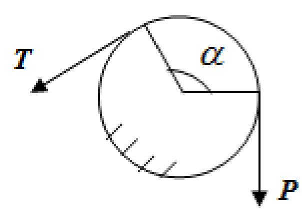

Рисунок 5 – Трение нити о цилиндрическую поверхность

Трение нити о цилиндрическую поверхность весьма велико. Так, если канат обмотать вокруг цилиндра 3 раза ($\alpha = 6\pi$), то при f =0,35 силой P = 15 Н можно уравновесить силу T = 10000 Н.

И еще один интересный факт, что при передвижении тела скольжением, например тянуть его веревкой, наименьшее усилие будет в том случае, когда угол наклона веревки к поверхности будет равен углу трения тела о поверхность.

Трение качения

Трением качения называется сопротивление, возникающее при перекатывании одного тела по другому.

Так, если к катку приложить сдвигающую силу $\boldsymbol{Q}$, то возникнет равная ей модулю и противоположная по направлению сила трения скольжения $\boldsymbol{F}_{тр}$. (Рисунок 6)

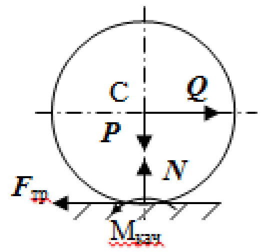

Рисунок 6 – Каток и сдвигающая сила при трении качения

Эта пара сил будет стремиться катить каток, однако он начнет катиться лишь тогда, когда момент ее достигнет определенной величины. Следовательно, со стороны опорной поверхности действует пара сил, препятствующая качению катка. Трение качения оценивается моментом этой пары – пары терния качения. Максимальный момент ее будет при пороге покоя. Он, как установил Кулон, пропорционален нормальному давлению соприкасающихся тел:

$$M_{кач} = f_k N,$$

где f_k - коэффициент трения качения (плечо пары трения качения).

Коэффициент трения качения зависит от упругих свойств материала катка и опорной поверхности, для сильно деформируемых тел зависит еще и от радиуса катка. Определяют его опытным путем, и равен он тысячным долям метра.

Возникновение пары трения качения объясняется тем, что в силу деформации и катка, и опорной поверхности они соприкасаются не по образующей катка, а на некоторой площадке. Образно выражаясь, каток продавливает лунку в опорной поверхности (Рисунок 7).

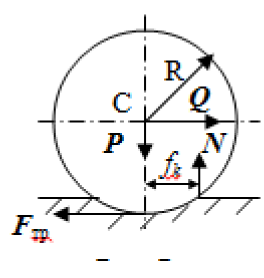

Рисунок 5 – Пара трения качения

При отсутствии силы $\boldsymbol{Q}$ нормальная реакция $\boldsymbol{N}$ поверхности проходит через центр тяжести катка, по линии действия силы тяжести и численной равна ей. После приложения и постепенного увеличения, до порога покоя тела, силы $\boldsymbol{Q}$ нормальная реакция смещается в направлении силы $\boldsymbol{Q}$ на край лунки и силы $\boldsymbol{P}$ и $\boldsymbol{N}$ образуют пару трения качения – оказывающую сопротивление качению. В момент начала качения каток, как рычаг, поворачивается относительно точки приложения силы $\boldsymbol{N}$, снова проминая опорную поверхность, и этот процесс продолжается во все время движения катка.

Что касается покоя катка, то он будет в покое при

$$QR \leq f_k N.$$

Теперь сопоставим силы необходимые для скольжения и качения катка:
для скольжения катка необходима сила

$$Q_{ск} = f\,N.$$

для качения катка необходима сила

$$Q_k = \frac{f_k}{R} N.$$

Поскольку

$$\frac{f_k}{R} << \mathrm{f}\ ,$$

то

$$Q_k << Q_{ск}.$$

Таким образом сила необходимая для качения тела во много раз (практически в десятки раз) меньше силы необходимой для перемещения тела скольжением. Поэтому в технике, где это только возможно, вместо подшипников скольжения применяются подшипники качения (шариковые, роликовые, игольчатые).

Между прочим, следует отметить, что первый в мире прообраз шарикового подшипника был сделан и применен в России. История эта такова. Во времена Екатерины Второй для изготовления пьедестала памятнику Петру 1 «Медный всадник» скульптору Фальконе в 1678 году потребовалась большая скала гранита. Нашли ее в 20 км от места установки памятника, на другом берегу Невы, в Финляндии. Размеры ее были 16×8×7 м^3, а вес 2500 т. Сначала сделали модель скалы в 1/10 натуральной величины и попробовали передвигать ее на катках, но опыт и расчеты показали, что имеющегося тягла (людей и лошадей) для перемещения скалы недостаточно. Затем из березы выточили шары, которые поместили в желоба, окованные железом. Поверх шаров положили деревянную платформу, а на нее скалу и с помощью такого устройства передвинули скалу до Невы, там ее закатили на притопленную баржу, переправили на другой берег, и снова, по суше, докатили до места установки памятника, поворачивая на перекрестках на шарах в круговых желобах. Вся работа была завершена с марта по сентябрь 1769 года.

Контрольные вопросы к разделу «Статика»

1. Что называется теоретической механикой?
2. Что понимается под механическим движением?
3. Давно ли возникла теоретическая механика?
4. Какими методами пользуется теоретическая механика?
5. На какие разделы делится теоретическая механика?
6. Что называется статикой?
7. Что понимается под равновесием твердого тела?
8. Что понимается под твердым телом в теоретической механике?
9. Какое воздействие (взаимодействие) тел называется механическим?
10. Что называется силой?
11. Какими факторами определяется действие силы на твердое тело?
12. Какое тело называется свободным?
13. Какие тела называются несвободными?
14. Что называется связями?
15. Что называется реакциями связей?
16. Что значит “сложить сходящиеся силы”?
17. Какие способы сложения сходящихся сил существуют?
18. В чем заключается геометрический способ сложения сходящихся сил?
19. Как производится сложение сходящихся сил аналитическим способом?
20. Чему равна равнодействующая системы сходящихся сил при равновесии?
21. Какое действие силы оценивает ее момент?
22. Какие моменты силы относительно точки различают?
23. Что называется алгебраическим моментом силы относительно точки?
24. Какими факторами характеризуется действие момента силы относительно точки?
25. Как момент силы относительно точки изображают вектором?
26. В чем состоит теорема о параллельном переносе силы?
27. Что значит “привести” произвольную систему сил к данному центру?
28. Как осуществляется приведение произвольной системы сил к данному центру и каков его результат?
29. Чему равны модули главного вектора R' и главного момента M_o произвольной системы сил на плоскости?
30. Чему равны модули главного вектора R' и главного момента M_o произвольной пространственной системы сил?

Раздел II. Кинематика

Лекция 1

1. Предмет кинематики и ее основные понятия и определения.
2. Кинематика точки. Способы задания движения точки
3. Связь способов задания движения точки между собой
4. Скорость точки при векторном способе задания ее движения
5. Ускорение точки при векторном способе задания ее движения
6. Скорость точки при координатном способе задания ее движения
7. Ускорение точки при координатном способе задания ее движения
8. Скорость точки при естественном способе задания ее движения
9. Ускорение точки при естественном способе задания ее движения
10. Частные случаи движения точки.

Предмет кинематики и ее основные понятия и определения

Кинематикой называется раздел теоретической механики, в котором изучается механическое движение твердых тел с геометрической стороны, то есть без учета их инерции и действующих сил.

Под механическим движением понимается изменение положения тела в пространстве с течением времени относительно других тел, называемых телами отсчета.

Телом отсчета называется тело, по отношению к которому определяется положение данного тела.

Совокупность тела отсчета и жестко связанной с ним системы координат называется системой отсчета. На рисунках тело отсчета обычно не изображается, а изображаются только координатные оси.

Пространство в классической механике трактуется как трехмерное евклидовое с одинаковыми свойствами во всех точках и направлениях, не зависящими от находящихся в нем тел и их движений.

Время предполагается одинаковым во всех системах отсчета, не зависящим от относительного движения этих систем. Оно является скалярной, непрерывно изменяющейся величиной, играющей в задачах кинематики роль независимой переменной величины.

Такие пространство и время отражают реальные их свойства приближенно. Однако для движений со скоростями, далекими от скорости света, это допущение дает вполне достаточную для практики точность.

Следует иметь ввиду, что если система отсчета не указана, то изучение механического движения тела невозможно.

Механическое движение обладает относительностью, поскольку по отношению к разным телам отсчета оно различно (в силу их разного перемещения – в природе неподвижных тел нет). Так, например, поршень дизеля, движущегося прямолинейно и равномерно трактора, относительно блока цилиндров совершает возвратно-поступательное прямолинейное движение, а по отношению к поверхности Земли он перемещается по синусоиде. Относительность механического движения проявляется и в том, что при наличии в пространстве только двух тел, наблюдателю, находящемуся на одном из низ, невозможно установить какое из этих тел находится в покое, а какое движется. Вспомните, когда вы смотрите из вагона стоящего поезда только на вагон другого поезда, стоящего на соседнем пути, то вы не можете установить, пока не посмотрите на перрон, какой из поездов начал движение.

Относительность движения хорошо описана в стихотворениях А.С. Пушкина и М.В. Ломоносова. Так, у А.С. Пушкина:

Движенья нет, сказал мудрец брадатый.
Другой смолчал и стал пред ним ходить.
Сильнее бы не смог он возразить;
Хвалили все ответ замысловатый.
Но, господа, забавный случай сей
Другой пример на память мне приводит:
Ведь каждый день пред нами Солнце ходит,
Однако ж прав упрямый Галилей.

У М.В. Ломоносова:

Случились вместе два астронома в пиру
И спорили весьма между собой в жару.
Один твердил:”Земля, вертясь, круг Солнца ходит”;
Другой, что Солнце все с собой планеты водит.
Один Коперник был, другой слыл Птоломей.
Тут повар спор решил усмешкою своей.
Хозяин спрашивал:”Ты звезд теченье знаешь?
Скажи, как ты о сем сомненье рассуждаешь?”.
Он дал ответ:”Что в том Коперник прав,
Я правду докажу на Солнце не бывав.
Кто видел простака из поваров такова,
Который бы вертел очаг кругом жаркова?”.

В кинематике твердые тела представляются двумя моделями: точкой и абсолютно твердым телом. При моделировании тела точкой его формой и размерами пренебрегают.

Наличие этих моделей обуславливает деление кинематики на кинематику точки и кинематику твердого тела.

Задачами кинематики точки являются: задание движения точки относительно данной системы отсчета; определение кинематических характеристик движения точки (траектории, скорости, ускорения).

В кинематике твердого тела решаются следующие задачи: задание его движения относительно данной системы отсчета; определение общих для всех точек тела кинематических характеристик; определение кинематических характеристик отдельных точек тела.

Задать движение точки или твердого тела – это значит указать способ, позволяющий определить их положение в пространстве относительно данной системы отсчета в любой момент времени. Если движение не задано, то изучать его невозможно.

Траекторией точки называется линия, описываемая точкой при ее движении.

Скоростью точки называется вектор $\overline{V}$, характеризующий в каждый момент времени быстроту и направление движения точки.

Ускорением точки называется вектор $\overline{W}$, характеризующий быстроту изменения ее скорости, как по модулю, так и по направлению.

Кинематика точки. Способы задания движения точки

Движение точки может задаваться тремя способами: координатным, естественным и векторным.

Координатный способ состоит в том, что положение точки в данной системе отсчета в каждый момент времени определяется ее координатами, непрерывно изменяющимися с течением времени:

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t).$$

Эти уравнения называются уравнениями (законом) движения точки в декартовой системе координат.

Одновременно эти уравнения являются уравнениями траектории точки в параметрической форме. Для получения уравнения траектории точки в обычной форме из них надо исключить параметр t (время) и связать координаты точки между собой непосредственно. Например, если $x = 2t$, $y = 12t^2$, то уравнение траектории точки будет $y = 3x^2$.

Движение точки можно задать, пользуясь и другими системами координат, например, полярными, сферическими и т. д.

Естественный способ заключается в том, что траекторию точки, заранее известную или заданную, рассматривают как координатную ось (Рисунок 1).

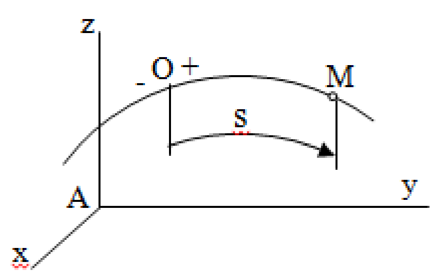

Рисунок 1 – Естественный способ задания движения точки

На ней выбирают начало отсчета, указывают положительное и отрицательное направления отсчета и уравнение (закон) движения точки вдоль траектории в виде

$$s = s(t).$$

Это равенство называется уравнением (законом) движения точки в естественной форме. Необходимо иметь ввиду, что s есть не путь, пройденный точкой за данное время, а расстояние от начала отсчета до точки в данный момент времени, измеренное вдоль траектории или, как говорят, криволинейная координата точки.

Векторный способ состоит в том, что положение точки в данной системе отсчета определяется ее радиус-векторм $\bar{r}$, проведенным к точке из начала координат (точка всегда находится на конце этого вектора) и, являющимся функцией времени:

$$\bar{r} = \bar{r}(t).$$

Это равенство называется уравнением (законом) движения точки в векторной форме (Рисунок 2).

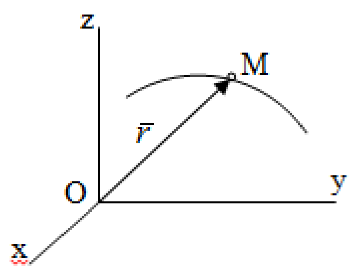

Рисунок 2 – Задание движения точки через годографа радиус-вектора

Отметим, что геометрическое место концов радиус-вектора $\bar{r}$ (годограф радиус-вектора $\bar{r}$) будет траекторией точки.

Связь способов задания движения точки между собой

Векторный и координатный способы задания движения точки связаны между собой зависимостью

$$\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k} \ ,$$

а естественный способ с координатным зависимостью вида

$$s = \int_0^t \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} \ dt,$$

где – под корнем стоят производные по времени от координат точки.

Скорость точки при векторном способе задания ее движения

Пусть в момент времени t точка занимала положение М, определяемое радиус-вектором $\bar{r}$, а в момент времени t_1 положение M_1, определяемое радиус-вектором $\bar{r}_1$ (Рисунок 3).

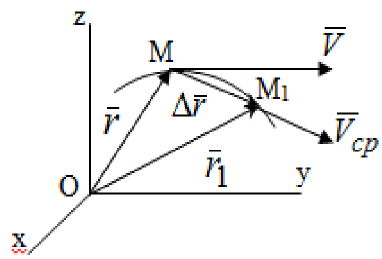

Рисунок 3 - Скорость точки при векторном способе задания ее движения

Таким образом, за время $\Delta t = t_1 - t$ радиус-вектор точки получил приращение $\Delta\bar{r}$ = $\bar{r}_1$ - $\bar{r}$, которое называют вектором перемещения.

Отношение вектора перемещения к промежутку времени Δt дает векторную величину, называемую средней скоростью точки за этот промежуток времени:

$$\bar{V}_{cp} = \frac{\Delta\bar{r}}{\Delta t}.$$

Направлена средняя скорость точки вдоль вектора перемещения в сторону движения точки.

В задачах кинематики средней скоростью пользуются редко, как правило в расчетах используют скорость точки в данный момент времени (данное мгновение). Для определения скорости точки в данный момент времени надо определить предел средней скорости при стремлении Δt к нулю:

$$\bar{V} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\bar{r}}{\Delta t}.$$

А этот предел, учитывая, что радиус-вектор есть функция времени, дает первую производную по времени от радиус-вектора точки.

Следовательно, вектор скорости точки в данный момент времени равен первой производной по времени от ее радиус-вектора:

$$\bar{V} = \frac{d\bar{r}}{dt}.$$

Направлен вектор скорости точки по касательной к ее траектории в сторону ее движения.

Ускорение точки при векторном способе задания ее движения

Предположим, что в момент времени *t* точка была в положении М и имела скорость $\bar{V}$, а по прошествии некоторого времени Δt переместилась в положение M_1 и скорость ее стала $\bar{V}_1$ (Рисунок 4).

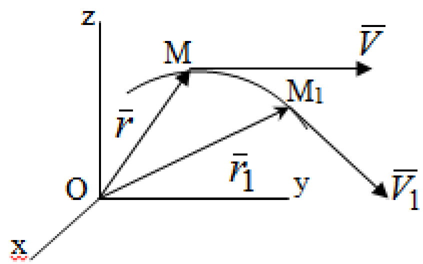

Рисунок 4 - Ускорение точки при векторном способе задания ее движения

Таким образом, за время Δt скорость точки изменилась на величину $\Delta\bar{V}$ (рисунок 5).

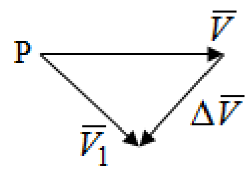

Рисунок 5 – Быстрота изменения скорости

Если это приращение скорости разделим на указанное приращение времени, то получим величину, именуемую средним ускорением точки за время Δt:

$$\bar{W}_{cp} = \frac{\Delta\bar{V}}{\Delta t}.$$

Для определения ускорения точки в данный момент времени возьмем предел среднего ускорения, устремив Δt к нулю и получим:

$$\bar{W} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\bar{V}}{\Delta t} = \frac{d\bar{V}}{dt} = \frac{d^2\bar{r}}{dt^2}.$$

Следовательно, вектор ускорения точки равен первой производной по времени от вектора скорости точки или второй производной по времени от ее радиус-вектора.

Полученные выражения скорости и ускорения точки служат исходными для определения скорости и ускорения точки при других способах задания ее движения.

Скорость точки при координатном способе задания ее движения

Пусть движение точки задано уравнениями: $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$ и требуется определить скорость точки. Так как мы знаем, как определяется скорость точки при векторном способе задания ее движения, то перейдем от координатного способа задания ее движения к векторному:

$$\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}\ . \qquad (1)$$

Продифференцируем обе части равенства (1) по времени и получим:

$$\bar{V} = \frac{dx}{dt}\bar{i} + \frac{dy}{dt}\bar{j} + \frac{dz}{dt}\bar{k}.$$

Полученный трехчлен есть формула разложения вектора скорости точки на составляющие по осям координат и из нее следует, что

$$V_x = \frac{dx}{dt},\ \ V_y = \frac{dy}{dt},\ \ V_z = \frac{dz}{dt},$$

то есть проекции скорости точки на оси координат равны первым производным по времени от соответствующих координат точки.

Зная проекции скорости точки на оси координат, можно легко вычислить модуль скорости по формуле

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}$$

и определить направление вектора скорости по отношению к осям по направляющим косинусам

$$\cos\alpha = V_x / V, \quad \cos\beta = V_y / V, \quad \cos\gamma = V_z / V.$$

Ускорение точки при координатном способе задания ее движения

По аналогии с определением скорости точки, для определения ускорения точки при координатном способе задания ее движения необходимо:

1. Найти проекции ускорения точки на оси координат – они равны первым производным по времени от соответствующих проекций скорости точки или вторым производным по времени от соответствующих координат точки:

$$W_x = \frac{dV_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2},\ \ W_y = \frac{dV_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2},\ \ W_z = \frac{dV_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2}.$$

2. Вычислить модуль ускорения по формуле

$$W = \sqrt{W_x^2 + W_y^2 + W_z^2}.$$

3. Определить направление вектора ускорения точки по направляющим косинусам:

$$\cos\alpha = W_x / W, \quad \cos\beta = W_y / W, \quad \cos\gamma = W.$$

Скорость точки при естественном способе задания ее движения

Пусть в момент времени t точка занимала положение M, определяемое расстоянием s, а по прошествии некоторого времени Δt, в момент времени t_1 положение M_1, определяемое расстоянием s_1 (рисунок 6).

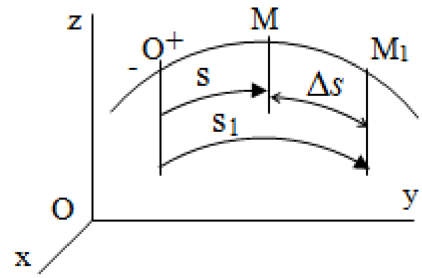

Рисунок 6 – Скорость точки при естественном способе задания движения

Таким образом, за время Δt криволинейная координата точки получила приращение Δs. Если взять отношение Δs к Δt, то получим среднее значение численной величины скорости точки за время Δt:

$$V_{cp} = \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

Переходя к пределу найдем численную скорость точки в данный момент времени:

$$V = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}.$$

Итак, численная (алгебраическая) величина скорости точки в данный момент времени равна первой производной по времени от расстояния (криволинейной координаты):

$$V = \frac{ds}{dt}.$$

Определяемая по этой формуле скорость называется алгебраической, поскольку имеет знак плюс или минус. Знак указывает в каком направлении отсчета расстояния s, положительном или отрицательном, движется в данный момент точка. Направляют вектор скорости точки по касательной к траектории ее движения с учетом ее знака.

Ускорение точки при естественном способе задания ее движения

В случае естественного способа задания движения точки ее ускорение определяют по его проекциям на естественные оси координат (касательную $M\tau$, нормальную Mn и бинормальную Mb оси). Эти оси имеют свое начало в данной точке М (они перемещаются вместе с нею) и образованы они пересечением граней естественного трехгранника (пересечением соприкасающейся, нормальной и спрямляющей плоскостей.

Разложим вектор скорости точки на составляющие по естественным осям координат с помощью единичных векторов этих осей $\bar{\tau}_0$, $\bar{n}_0$, $\bar{b}_0$ (Рисунок 7).

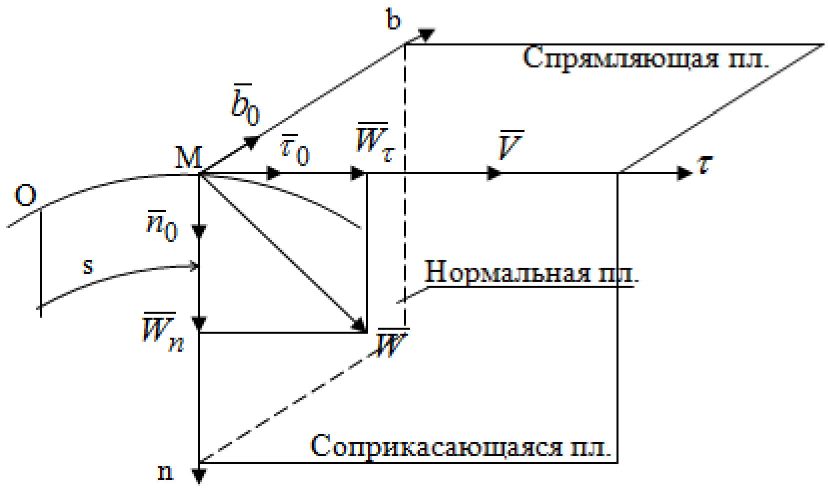

Рисунок 7 - Ускорение точки при естественном способе задания ее движения

$$\bar{V} = V_\tau \bar{\tau}_0 + V_n \bar{n}_0 + V_b \bar{b}_0.$$

А также видно, что

$$V_\tau = V \text{, а } V_n = 0,\ V_b = 0.$$

Тогда будет

$$\bar{V} = V\bar{\tau}_0.$$

Для определения ускорения обе части этого равенства продифференцируем по времени, учитывая, что V и $\bar{\tau}_0$ величины переменные, получим:

$$\bar{W} = \frac{d\bar{V}}{dt} = \frac{dV}{dt}\bar{\tau}_0 + \frac{d\bar{\tau}_0}{dt}V. \qquad (2)$$

Преобразуем производную

$$\frac{d\bar{\tau}_0}{dt},$$

представив ее как производную с промежуточным аргументом

$$\text{s - } \frac{d\bar{\tau}_0}{dt} = \frac{d\bar{\tau}_0}{ds}\frac{ds}{dt}.$$

Далее применим формулу Френе $\frac{d\bar{\tau}_0}{ds} = \frac{\bar{n}_0}{\rho}$ из курса дифференциальной геометрии.

Тогда

$$\frac{d\bar{\tau}_0}{dt} = \frac{\bar{n}_0}{\rho}V$$

и формула (2) получит вид

$$\bar{W} = \frac{dV}{dt}\bar{\tau}_0 + \frac{V^2}{\rho}\bar{n}_0. \qquad (3)$$

Выражение (3) есть формула разложения вектора ускорения на составляющие по естественным осям координат. Из нее следует, что вектор ускорения точки всегда лежит в соприкасающейся плоскости и равен геометрической сумме касательного и нормального ускорений (бинормальное ускорение равно нулю). Следует также, что модули этих ускорений равны:

$$W_\tau = \frac{dV}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2}, \quad W_n = \frac{V^2}{\rho},$$

где ρ - радиус кривизны траектории точки в данный момент времени.

Таким образом, касательное ускорение точки равно первой производной по времени от алгебраической скорости точки или второй производной по времени от расстояния (криволинейной координаты) s. Нормальное ускорение точки равно квадрату скорости точки деленному на радиус кривизны ее траектории в данный момент времени.

Касательное ускорение точки направлено по касательной к ее траектории в положительном или отрицательном направлениях отсчета расстояния s (в зависимости от его знака – оно может иметь знак плюс или минус, как и скорость).

Нормальное ускорение точки всегда направлено к центру кривизны ее траектории (в положительном направлении нормальной оси).

Модуль ускорения точки будет равен:

$$W = \sqrt{W_\tau^2 + W_n^2}.$$

Учитывая расположение этих ускорений на чертеже.

Частные случаи движения точки.

1. Прямолинейное движение точки. В этом случае радиус кривизны траектории равен бесконечности, поэтому нормальное ускорение равно нулю и полное ускорение точки равно ее касательному ускорению. В этом случае скорость изменяется только по модулю, следовательно, касательное ускорение точки характеризует изменение скорости по модулю.

   Заметим, что нормальное ускорение точки равно нулю еще и в точках перегиба ее траектории, поскольку в них радиус кривизны траектории бесконечно большой.
2. Равномерное криволинейное движение. В этом случае модуль скорости точки постоянен. Поэтому касательное ускорение точки равно нулю. Полное ускорение точки равно ее нормальному ускорению. Так как в этом случае скорость изменяется только по направлению, то, следовательно, нормальное ускорение точки характеризует изменение скорости по направлению.
3. Равномерное прямолинейное движение. В этом случае и нормальное, и касательное, а, следовательно, и полное ускорения точки равны нулю. Это единственный частный случай, при котором ускорение точки равно нулю.
4. Равнопеременное движение. Равнопеременным называется такое движение точки, при котором ее касательное ускорение постоянно.

   В этом случае точка движется согласно уравнения (закона)

$$s = V_0 t + \frac{W_\tau t^2}{2},$$

а скорость точки

$$V = V_0 + W_\tau t.$$

Если знаки скорости и касательного ускорения одинаковые, то точка движется равноускоренно, а если знаки разные, то точка движется равнозамедленно.

Лекция 2

1. Поступательное движение твердого тела.
2. Вращательное движение твердого тела.
3. Основные определения и понятия, задание вращательного движения.
4. Угловая скорость и угловое ускорение.
5. Частные случаи вращательного движения тела.
6. Линейная скорость точки вращающегося тела.
7. Ускорение точки вращающегося тела.
8. Формула Эйлера для линейной скорости точки вращающегося тела.
9. Кинематические формулы Эйлера.

Поступательное движение твердого тела

Поступательным называется такое движение твердого тела, при котором любая прямая, проведенная в теле остается параллельной своему первоначальному положению.

Такое движение совершают, например, педаль велосипеда; спарник AB, соединяющий два кривошипа (рисунок 1).

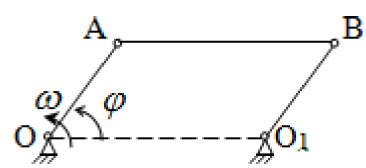

Рисунок 1 – Спарник

При поступательном движении точки тела могут двигаться по любым траекториям, поэтому его нельзя смешивать с прямолинейным движением.

Остановимся на задании поступательного движения тела. Пусть тело D движется поступательно относительно неподвижных осей координат Oxyz (рисунок 2).

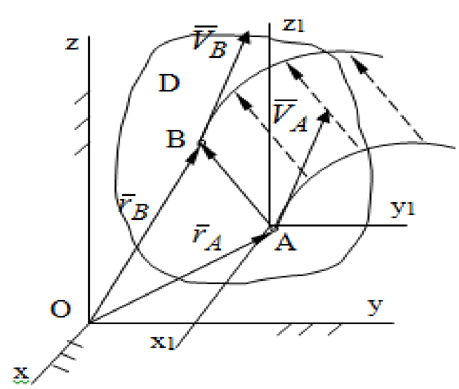

Рисунок 2 – Задание поступательного движения

Возьмем в теле произвольную точку А и проведем через нее оси координат $O_1x_1y_1z_1$ жестко связанные с телом, расположив их параллельно осям *x, y, z*. Так как тело относительно осей, жестко с ним связанных, занимает неизменное положение, то его положение относительно неподвижных осей координат Oxyz в любой момент времени определяется положением подвижных осей координат. А их положение, поскольку они будут всегда параллельны неподвижным осям, можно определить по положению точки А – началу этой системы координат.

Отсюда следует, что положение тела при поступательном движении можно определить по положению одной любой его точки, движение которой можно задать координатным, естественным или векторным способом.

Возьмем еще одну произвольную точку В тела. Положение точек А и В будем определять их радиус-векторами $\bar{r}_A$ и $\bar{r}_B$. Соединим точку А с точкой В вектором $\overline{AB}$ (заметим, что этот вектор постоянен по модулю и направлению). Тогда, как видим (рис. 2)

$$\bar{r}_B = \bar{r}_A + \overline{AB}. \qquad (1)$$

Из уравнения (1) вытекает, что траектория точки В получается смещением всех точек траектории точки А на постоянную величину $\overline{AB}$, то есть траектории всех точек тела будут одинаковыми, совпадающими при наложении.

Теперь обе части равенства (1) продифференцируем дважды по времени, учитывая, что первая производная от радиус-вектора точки есть вектор ее скорости, а вторая производная- вектор ускорения точки, получим:

$$\bar{V}_B = \bar{V}_A; \quad \bar{W}_B = \bar{W}_A.$$

Из всего изложенного следует, при поступательном движении твердого тела все его точки движутся по одинаковым, совпадающим при наложении, траекториям и в каждый момент времени имеют одинаковые по модулю и направлению скорости и равные по модулю и направлению ускорения. Таким образом, для изучения этого движения тела достаточно изучить движение одной любой его точки.

Вращательное движение твердого тела

Вращательным называется такое движение твердого тела, при котором две его точки (или две неизменно связанные с ним точки) остаются неподвижными.

Прямая, проходящая через эти точки называется осью вращения. Все точки тела, лежащие на оси вращения неподвижны, все остальные точки тела движутся по окружностям вокруг оси вращения. Плоскости этих окружностей перпендикулярны к оси вращения.

Для задания вращательного движения тела проведем через ось его вращения две полуплоскости: неподвижную и жестко связанную с телом (врезанную в него) и вращающуюся вместе с ним (рисунок 3).

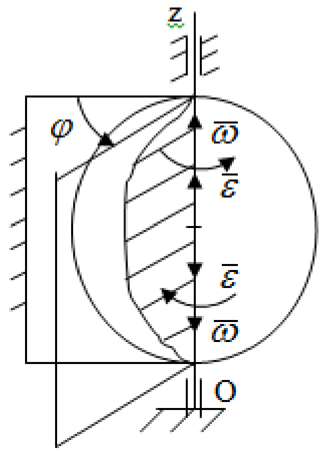

Рисунок 3 – Вращательное движение твердого тела

Тогда положение тела в любой момент времени можно определить по углу φ между этими полуплоскостями взятому с соответствующим знаком. Угол φ называется угломповорота тела. Измеряется он в радианах. С течением времени он непрерывно изменяется и, следовательно, является функцией времени:

$$\varphi = \varphi(t).$$

Это уравнение называется уравнением (законом) вращательного движения твердого тела.

Угол φ поворота тела принято считать положительным, если он образован вращением тела против хода часовой стрелки, и отрицательным, если вращением по ходу часовой стрелки. Направление вращения смотрят с положительного конца координатной оси, проведенной вдоль оси вращения тела.

Угловая скорость и угловое ускорение вращающегося тела

Угловая скорость ω и угловое ускорение ε являются основными, общими для всех точек тела, кинематическими характеристиками вращательного движения тела.

Если за время Δt угол поворота тела получил приращение $\Delta\varphi$, то средняя угловая скорость тела за это время

$$\omega_{cp} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}.$$

Для определения угловой скорости тела в данный момент времени возьмем предел от средней угловой скорости при $\Delta t \to 0$ и получим

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt}.$$

Таким образом, угловая скорость равна первой производной по времени от угла поворота тела:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}.$$

Единицей измерения угловой скорости являются радианы в секунду (1 рад/с). Угловая скорость, как и угол поворота, может иметь знак плюс или минус. Если она имеет знак плюс, то тело вращается против хода часовой стрелки, а если минус, то по ходу часовой стрелки (правило знаков то же, что и для угла поворота тела).

Угловую скорость можно, а иногда и необходимо, изображать вектором. Вектор угловой скорости располагают на оси вращения и направляют туда, откуда поворот тела виден против хода часовой стрелки.

Угловое ускорение характеризует быстроту изменения угловой скорости с течением времени. Если за время Δt угловая скорость изменилась на $\Delta\omega$, то среднее угловое ускорение тела за это время будет

$$\varepsilon_{cp} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t},$$

а перейдя к пределу среднего ускорения при $\Delta t \to 0$ получим, что

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}, \text{ или } \varepsilon = \frac{d^2\varphi}{dt^2}.$$

Следовательно, угловое ускорение тела равно первой производной по времени от его угловой скорости или второй производной по времени от угла поворота тела.

Измеряется оно в радианах за секунду в квадрате (1 рад/с^2) и может иметь знаки плюс или минус. На рисунках его направление следует показывать с учетом знака. Обратим внимание на то, что если знаки угловой скорости и углового ускорения будут одинаковые (совпадают), то вращение будет ускоренным, а если нет, то замедленным.

По аналогии с угловой скоростью, угловое ускорение можно изображать вектором, который располагают на оси вращения тела и направляют с учетом его знака: при ускоренном вращении в сторону вектора угловой скорости, при замедленном – против вектора угловой скорости.

Частные случаи вращательного движения тела

1. Равномерное вращение. Равномерным называется такое вращение тела, при котором его угловая скорость постоянна. Следовательно при равномерном вращении тела его угловое ускорение равно нулю. Из формулы

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}$$

следует что

$$d\varphi = \omega dt.$$

Интегрируя обе части этого дифференциального уравнения в соответствующих пределах получим закон равномерного вращения тела:

$$\varphi = \omega t.$$

Отсюда угловая скорость тела при равномерном вращении

$$\omega = \frac{\varphi}{t}.$$

В технической практике угловая скорость равномерного вращения как правило задается не в 1/с, а частотой n вращения об/мин. Найдем зависимость между ними:

$$\omega = \frac{\varphi}{t} = \frac{2\pi\, n}{60}.$$

Следовательно

$$\omega = \frac{\pi\, n}{30} \quad \text{или} \quad \omega \approx 0{,}1n,$$

что и требовалось доказать.

2. Равнопеременное вращение. Равнопеременным называется такое вращение тела, при котором его угловое ускорение постоянно.

При равнопеременном вращении угол поворота тела

$$\varphi = \omega_0 t + \frac{\varepsilon\, t^2}{2}.$$

Это равенство есть уравнение (закон) равнопеременного вращения тела.

Если обе части этого равенства продифференцируем по времени, то получим формулу угловой скорости тела при равнопеременном вращении

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon\, t\,.$$

Если знаки угловой скорости и углового ускорения совпадают, то вращение будет равноускоренное, а если нет – равнозамедленное.

Линейная скорость точки вращающегося тела

Пусть в момент времени *t* произвольная точка вращающегося тела была в положении М, а в момент времени t_1 переместилась в положение $М_1$ (рисунок 4).

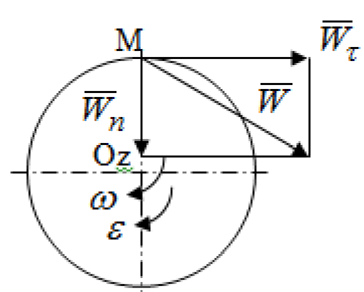

Рисунок 4 – Линейная скорость вращающегося тела

Тогда расстояние пройденное точкой по дуге, описываемой ей окружности будет

$$s = \varphi R .$$

Это равенство является уравнением движения точки вращающегося тела в естественной форме. Для определения скорости точки продифференцируем обе части этого равенства по времени:

$$V = \frac{ds}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} R.$$

Учитывая, что

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega$$

окончательно получим

$$V = \omega R .$$

Таким образом, линейная скорость точки вращающегося тела равна произведению его угловой скорости на расстояние от этой точки до оси вращения (радиус окружности, описываемой точкой). Направлена скорость точки по касательной к ее траектории в сторону вращения тела (рис. 4).

Из полученной формулы видно, что скорости точек вращающегося тела пропорциональны их расстояниям до оси вращения.

Ускорение точки вращающегося тела

Ускорение точки вращающегося тела определяют по ее касательному и нормальному ускорениям, поскольку движение точки легко задается естественным способом:

$$W = \sqrt{W_\tau^2 + W_n^2},$$

где $W_\tau = \frac{dV}{dt} = \frac{d\omega}{dt} R,$ или $W_\tau = \varepsilon R;$

$$W_n = \frac{V^2}{\rho} = \frac{(\omega R)^2}{R}, \text{ или } W_n = \omega^2 R.$$

С учетом значений касательного и нормального ускорений формулу полного ускорения можно преобразовать к виду

$$W = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}.$$

Из последней формулы следует, что ускорения точек вращающегося тела пропорциональны их расстояниям до оси вращения.

Касательное ускорение точки направлено по касательной к ее траектории в сторону углового ускорения Нормальное ускорение точки всегда направлено к оси вращения тела по радиусу окружности, описываемой точкой. Направления ускорений показаны ранее.

Формула Эйлера для линейной скорости точки вращающегося тела

Покажем на чертеже вращающееся тело, вектор угловой скорости тела, некоторую произвольную точку М тела, ее радиус-вектор $\bar{r}$ и скорость $\bar{V}$, расстояние R от точки М до оси вращения тела - радиус окружности, описываемой точкой (Рисунок 6).

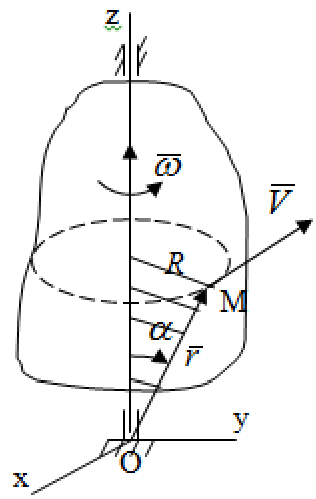

Рисунок 6 – Доказательство формулы Эйлера для линейной скорости точки вращающегося тела

Выразим линейную скорость точки М:

$$V = \omega R = \omega r \sin \alpha,$$

с другой стороны

$$\omega\, r \sin \alpha = \left| \bar{\omega} \times \bar{r} \right|.$$

Следовательно, модуль линейной скорости точки вращающегося тела равен модулю векторного произведения угловой скорости и радиус-вектора точки:

$$V = \left| \bar{\omega} \times \bar{r} \right|.$$

Кроме того, исходя из определения векторного произведения названных векторов и их расположения на рис. 6, направления линейной скорости точки (она перпендикулярна плоскости, проходящей через радиус-вектор и вектор угловой скорости) можно сделать вывод, что векторы $\bar{V}$ и $\bar{\omega} \times \bar{r}$ совпадают по направлению.

Из изложенного вытекает, что вектор линейной скорости точки вращающегося тела равен векторному произведению вектора угловой скорости тела и радиус-вектора этой точки относительно любой точки на оси вращения тела:

$$\bar{V} = \bar{\omega} \times \bar{r} \ .$$

Эта формула называется формулой Эйлера для линейной скорости точки вращающегося тела.

Кинематические формулы Эйлера

Приведенная выше формула Эйлера позволяет вычислить линейную скорость точки вращающегося тела по ее проекциям на оси *x, y, z* жестко связанные с телом:

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}.$$

Для определения проекций скорости на координатные оси нужно векторное произведение $\bar{\omega} \times \bar{r}$ выразить через проекции этих векторов на оси координат.

Разложим векторы $\bar{\omega}$ и $\bar{r}$ на составляющие по осям координат:

$$\bar{\omega} = \omega_x \bar{i} + \omega_y \bar{j} + \omega_z \bar{k},$$

$$\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k},$$

где x, y, z – координаты точки (они же проекции $\bar{r}$ на оси координат).

Тогда

$$\bar{V} = \bar{\omega} \times \bar{r} = (\omega_y z - \omega_z y)\bar{i} + (\omega_z x - \omega_x z)\,\bar{j} + (\omega_x y - \omega_y x)\bar{k}.$$

Из этой формулы, разложения вектора скорости точки на составляющие по осям координат, следует, что проекции скорости точки вращающегося тела на оси координат равны:

$$V_x = \omega_y z - \omega_z y,$$

$$V_y = \omega_z x - \omega_x z,$$

$$V_z = \omega_x y - \omega_y x.$$

Эти формулы называются <u>кинематическими формулами Эйлера.</u>

Лекция 3

1. Плоскопараллельное движение твердого тела, основные определения
2. Упрощение изучения плоскопараллельного движения.
3. Задание плоскопараллельного движения
4. Разложение плоскопараллельного движения на поступательное и вращательное.
5. Определение скорости точки плоской фигуры, движущейся в своей плоскости.
6. Определение ускорения точки плоской фигуры, движущейся в своей плоскости.

Плоскопараллельное движение твердого тела, основные определения

Плоскопараллельным (плоским) называется такое движение твердого тела, при котором все его точки движутся в плоскостях параллельных некоторой неподвижной плоскости.

Плоскопараллельное движение совершают многие детали механизмов и машин. Например, шатуны кривошипно-шатунных механизмов, шестерни планетарных и дифференциальных зубчатых передач, катки и колеса машин на прямолинейных участках пути.

Упрощение изучения плоскопараллельного движения

Рассмотрим тело D, совершающее плоскопараллельное движение относительно неподвижной плоскости движения α (рисунок 1).

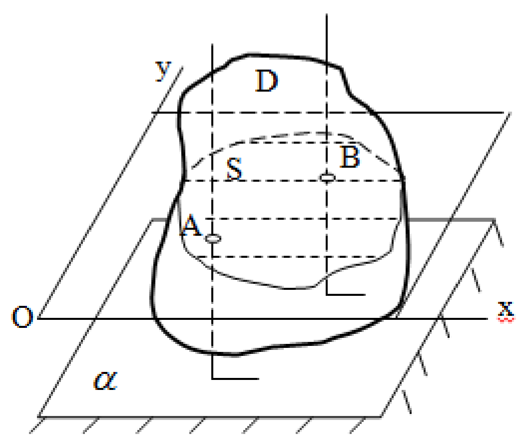

Рисунок 1 – Упрощение изучения плоскопараллельного движения

Проведем в теле некоторую прямую перпендикулярную плоскости α. Все точки тела, лежащие на этой прямой будут двигаться тождественно, поскольку все они остаются в плоскостях параллельных плоскости α и расстояния между ними остаются неизменными (т.к. тело абсолютно твердое).

Следовательно, для изучения движения точек тела на этой прямой достаточно изучить движение только одной точки, например, точки А. Так, для изучения движения точек тела на второй прямой, показанной на рисунке, достаточно изучить движение точки В.

Этот вывод будет справедлив для точек тела, лежащих на любой прямой перпендикулярной плоскости α. Если же все эти точки взять на одинаковом расстоянии от неподвижной плоскости, то можно прийти к следующему заключению: для упрощения изучения плоскопараллельного движения твердого тела надо рассечь его плоскостью параллельной плоскости движения, например Оху, и изучить движение точек полученной в результате сечения плоской фигуры S в плоскости этой фигуры. Чтобы охватить этим единым методом все многообразие частных случаев сечения плоскую фигуру представляют неограниченно большой.

Задание плоскопараллельного движения

В силу отмеченного выше, положение тела при плоскопараллельном движении в любой момент времени может быть определено по положению плоской фигуры S относительно координат Оху. Положение же этой плоской фигуры можно определить по положению двух любых ее точек, например, точек А и В (рисунок 2).

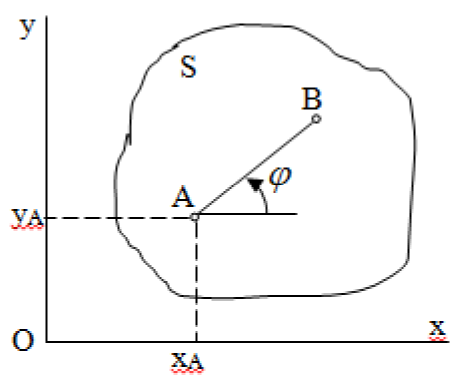

Рисунок 2 – Задание плоскопараллельного движения

Одной точкой положение фигуры определить невозможно. Задачу можно заметно упростить, если эти точки соединить отрезком АВ и определять положение плоской фигуры по положению этого отрезка. Для чего достаточно задать положение одной его точки, например точки А, которую именуют полюсом, и угол φ между этим отрезком и положительным направлением оси x, то есть тремя, зависящими от времени, параметрами:

$$x_A = x_A(t),$$
$$y_A = y_A(t),$$
$$\varphi = \varphi(t).$$

Эти равенства называются уравнениями (законом) плоскопараллельного движения твердого тела.

Из них следует, что если координаты полюса А будут неизменны, то тело будет вращаться вокруг оси, проходящей через полюс перпендикулярно плоскости движения. Если же постоянным будет угол φ, то тело будет совершать поступательное движение. Следовательно, поступательное и вращательное движения тела есть частные случаи плоскопараллельного движения.

Разложение плоского движения на поступательное и вращательное

Пусть плоская фигура в момент времени *t* была в положении 1, а в момент времени t_1 переместилась в положение 2 (Рисунок 3).

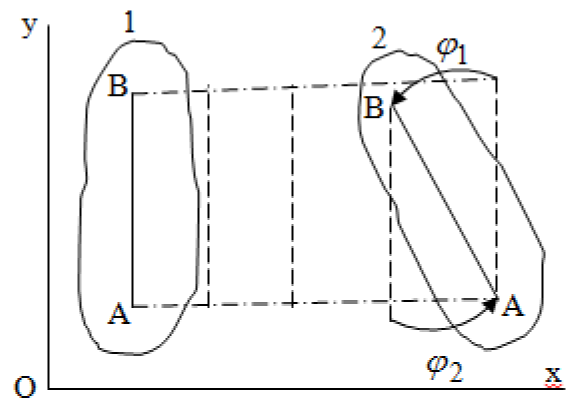

Рисунок 3 – Методика разложения плоского движения
на поступательное и вращательное

Перемещение фигуры из положения 1 в положение 2 можно представить следующим образом:

1.Принять за полюс точку А, переместить фигуру поступательно и совместить точки А, а затем повернуть ее вокруг полюса А на угол φ_1 и совместить точки В;

2.Принять за полюс точку В, переместить фигуру поступательно, а затем повернуть ее вокруг полюса В на угол φ_2 и совместить точки А.

Таким образом, плоскопараллельное движение можно представить состоящим из суммы двух движений: поступательного движения тела со скоростью выбранного полюса и вращательного движения вокруг оси, проходящей через этот полюс перпендикулярно плоскости движения.

Так как при поступательном движении фигура при разных полюсах должна за время Δt перемещения ее из одного положения в другое пройти разные расстояния, то поступательная часть движения зависит от выбора полюса. Вращательная же часть движения от выбора полюса не зависит, поскольку мы видим, что за время Δt $\varphi_1 = \varphi_2$, следовательно будут равны друг другу и угловые скорости и угловые ускорения фигуры.

Скорость точки плоской фигуры, движущейся в своей плоскости

Пусть плоская фигура S движется в своей плоскости Оху (рисунок 4).

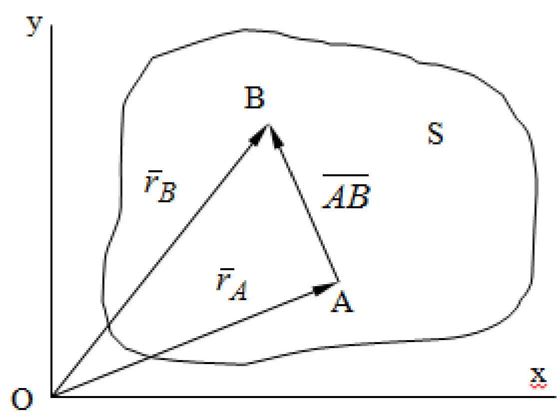

Рисунок 4 - Скорость точки плоской фигуры, движущейся в своей плоскости

Примем некоторую точку А фигуры за полюс и определим скорость произвольной точки В фигуры.

Для решения задачи зададим движение полюса А и точки В векторным способом (покажем на рисунке их радиус-векторы), а отрезку АВ дадим направление. Тогда, для любого момента времени, будет справедливо векторное равенство

$$\bar{r}_A = \bar{r}_B + \overline{AB}. \tag{1}$$

Продифференцируем по времени обе части этого векторного равенства:

$$\frac{d\bar{r}_B}{dt} = \frac{d\bar{r}_A}{dt} + \frac{d(\overline{AB})}{dt}.$$

Отсюда, учитывая, что производная по времени от радиус-вектора точки равна вектору скорости точки и то, что

$$\frac{d(\overline{AB})}{dt} = \bar{V}_{BA},$$

то есть равна скорости точки во вращении ее (мгновенном) вместе с фигурой вокруг полюса А, получим

$$\bar{V}_B = \bar{V}_A + \bar{V}_{BA}. \tag{2}$$

Таким образом, скорость любой точки плоской фигуры, движущейся в своей плоскости, равна геометрической сумме скорости точки фигуры, принятой за полюс, и скорости данной точки во вращении вместе с фигурой вокруг полюса.

При решении практических задач за полюс принимается та точка, скорость которой известна или скорость которой можно определить по исходным данным. Заметим, что

$$\overline{V}_{BA} = \omega\, AB,$$

где ω - угловая скорость фигуры.

Ускорение точки плоской фигуры, движущейся в своей плоскости

Для определения ускорения точки плоской фигуры воспользуемся формулой (2) предыдущего параграфа, а именно – обе ее части продифференцируем по времени, поскольку известно, что ускорение точки равно первой производной по времени от вектора ее скорости. Получим

$$\overline{W}_B = \overline{V}_A + \overline{W}_{BA}. \tag{3}$$

Следовательно, ускорение любой точки плоской фигуры, движущейся в своей плоскости, равно геометрической сумме ускорения точки фигуры, принятой за полюс, и ускорения данной точки во вращении вместе с фигурой вокруг полюса.

Если принять во внимание, что

$$\overline{W}_{BA} = \overline{W}_{BA}^{n} + \overline{W}_{BA}^{\tau},$$

то формула (3) получит вид:

$$\overline{W}_B = \overline{V}_A + \overline{W}_{BA}^{n} + \overline{W}_{BA}^{\tau}. \tag{4}$$

Нормальное и касательное ускорения точки B во вращении вокруг полюса A определяются по формулам:

$$W_{BA}^{n} = \omega^2 AB,$$
$$W_{BA}^{\tau} = \varepsilon\, AB.$$

Направляют их так же, как соответствующие ускорения точек вращающегося тела.

За полюс, при решении практических задач, принимается точка, ускорение которой задано или может быть определено по исходным данным.

Модуль ускорения точки B определяют геометрически построением многоугольника из ускорений, входящих в равенство (4), или аналитическим методом по его проекциям на оси координат, которые определяют проектированием обеих частей векторного равенства (4) на оси координат.

Лекция 4

1. Плоскопараллельное движение твердого тела. Теорема о проекциях скоростей двух точек плоской фигуры на прямую, проходящую через эти точки.
2. Мгновенный центр скоростей.
3. Определение скоростей точек плоской фигуры с помощью мгновенного центра скоростей.
4. Разные случаи определения положения мгновенного центра скоростей.

Теорема о проекциях скоростей двух точек плоской фигуры на прямую, проходящую через эти точки

Данная теорема имеет следующую формулировку: проекции скоростей двух точек плоской фигуры на прямую, проходящую через эти точки, равны друг другу.

Рассмотрим доказательство теоремы. Возьмем две точки А и В плоской фигуры (рисунок 1).

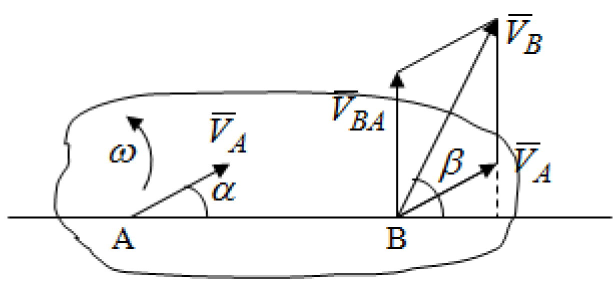

Рисунок 1 - Теорема о проекциях скоростей двух точек плоской фигуры

Предположим, что точка А имеет скорость $\overline{V}_A$, а фигура имеет угловую скорость ω. Тогда, принимая точку А за полюс, можем записать. Что скорость точки В будет равна:

$$\overline{V}_B = \overline{V}_A + \overline{V}_{BA}.$$

Далее изобразим это векторное равенство. Для этого спроектируем обе части этого векторного равенства на прямую, проходящую через точки А и В. Получим

$$V_B \cos\beta = V_A \cos\alpha + V_{BA} \cos 90^0.$$

Так как $\cos 90^0 = 0$, то окончательно будет

$$V_B \cos\beta = V_A \cos\alpha,$$

что и требовалось доказать.

Данная теорема позволяет легко определять скорость любой точки плоской фигуры, если известны скорость какой-либо другой точки фигуры, направления скоростей этих двух точек и углы, которые образуют векторы их скоростей с прямой, проходящей через эти две точки.

Мгновенный центр скоростей

Мгновенным центром скоростей называется точка плоской фигуры, скорость которой в данный момент времени равна нулю.

Докажем, что такая точка существует. Пусть плоская фигура движется в своей плоскости и в данный момент известна скорость некоторой ее точки А по модулю и направлению и угловая скорость фигуры (рисунок 2).

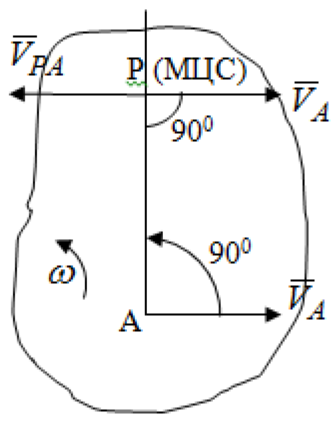

Рисунок 2 – Мгновенный центр скоростей произвольной фигуры

Для определения положения мгновенного центра скоростей выполним следующее:

1. вектор скорости точки А $\overline{V}_A$ повернем в плоскости фигуры на 90^0 по ходу вращения фигуры и проведем вдоль него прямую, туда, куда он будет направлен после поворота;
2. отложим от точки А в указанном направлении отрезок

$$AP = \frac{V_A}{\omega}.$$

Точка P будет мгновенным центром скоростей фигуры в данный момент времени.

В самом деле, если точку А примем за полюс, то скорость точки P

$$\overline{V}_P = \overline{V}_A + \overline{V}_{PA}.$$

Нанесем векторы скоростей правой части этого равенства на чертеж (рис. 2). Как видно из чертежа, указанные скорости направлены вдоль одной прямой в разные стороны. Кроме того модуль скорости

$$V_{PA} = \omega\, AP = \omega \frac{V_A}{\omega} = V_A.$$

Тогда получается, что скорость точки P равна нулю. Следовательно, она действительно есть мгновенный центр скоростей фигуры в данный момент времени.

Необходимо иметь ввиду, что положение мгновенного центра скоростей постоянно изменяется, поскольку может изменяться модуль и направление скорости точки А, модуль и направление угловой скорости фигуры.

С позиций понятия мгновенного центра скоростей плоскопараллельное движение можно трактовать как непрерывную серию мгновенных вращений тела вокруг оси, проходящей через мгновенный центр скоростей перпендикулярно плоскости движения тела.

Определение скоростей точек плоской фигуры с помощью мгновенного центра скоростей

Зная положение мгновенного центра скоростей можно легко определить скорость любой точки плоской фигуры. В самом деле, принимая мгновенный центр скоростей P за полюс (Рисунок 3),

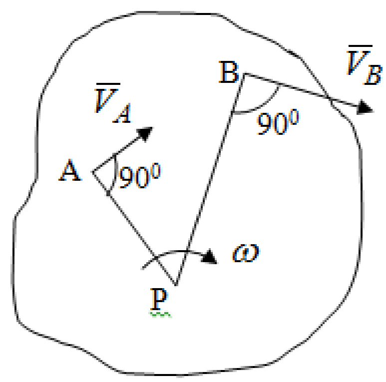

Рисунок 3 – Определение скоростей точек при использовании МЦС

можно для двух произвольных точек A и B фигуры (рис. 3) написать, что

$$\overline{V}_A = \overline{V}_P + \overline{V}_{AP},$$
$$\overline{V}_B = \overline{V}_P + \overline{V}_{BP}.$$

Учитывая, что $\overline{V}_P = 0$, получим:

$$\overline{V}_A = \overline{V}_{AP},$$
$$\overline{V}_B = \overline{V}_{BP}.$$

Таким образом, видим, что скорости произвольных точек A и B фигуры равны по модулю и направлению скоростям этих точек во вращении их вокруг мгновенного центра скоростей вместе с фигурой.

Поэтому модули скоростей точек A и B можно выразить так:

$$V_A = \omega\, AP,$$
$$V_B = \omega\, BP.$$

Разделив левые и правые части этих равенств друг на друга, будем иметь

$$\frac{V_A}{V_B} = \frac{AP}{BP},$$

то есть, что скорости точек плоской фигуры пропорциональны их расстояниям от мгновенного центра скоростей (как и точек вращающегося тела).

Из всего изложенного следует, что скорости точек тела при плоскопараллельном движении можно определять как скорости точек тела, вращающегося вокруг оси, проходящей через мгновенный центр скоростей перпендикулярно плоскости движения тела.

Чтобы воспользоваться этим простым и эффективным способом определения скоростей точек тел, совершающих плоскопараллельное движение, нужно уметь определять положение мгновенный центр скоростей плоской фигуры.

Разные случаи определения положения мгновенного центра скоростей

Всего существует семь разных случаев определения положения мгновенного центра скоростей. В них исходят либо из механических условий ситуации, либо из того, что скорости точек плоской фигуры пропорциональны их расстояниям от мгновенного центра скоростей.

1. Если тело катится без скольжения по неподвижной поверхности, то точка касания тела с поверхностью неподвижна и, следовательно, она будет мгновенным центром скоростей тела (Рисунок 4).

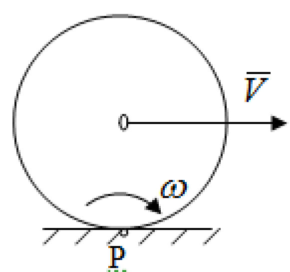

Рисунок 4 – Тело катится

В основу такого заключения положены механические условия.

2. В случае, когда известны направления скоростей двух точек плоской фигуры и эти скорости не параллельны между собой, то мгновенный центр скоростей находится в точке пересечения перпендикуляров, восстановленных в этих точках к их скоростям (Рисунок 5).

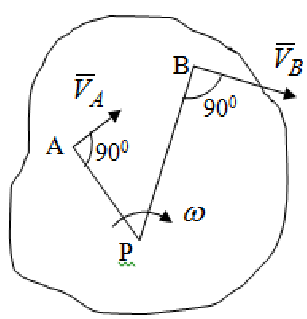

Рисунок 5 - Скорости не параллельны между собой

3. Если скорости двух точек плоской фигуры перпендикулярны к отрезку, соединяющему эти точки, направлены в одну сторону и не равны друг другу по модулю, то мгновенный центр скоростей находится в точке пересечения прямых, проведенной через эти точки и проведенной через концы векторов скоростей этих точек (Рисунок 6).

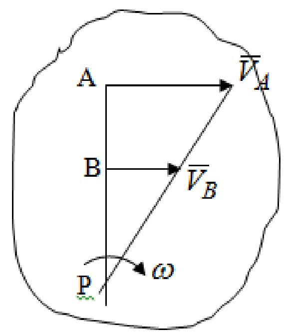

Рисунок 6 - Скорости двух точек плоской фигуры перпендикулярны к отрезку, соединяющему эти точки

4. В случае, когда скорости двух точек тела антипараллельны и к отрезку, соединяющему эти точки перпендикулярны, мгновенный центр скоростей плоской фигуры находится в точке пересечения отрезка, соединяющего точки и прямой, проведенной через концы векторов скоростей этих точек (Рисунок 7).

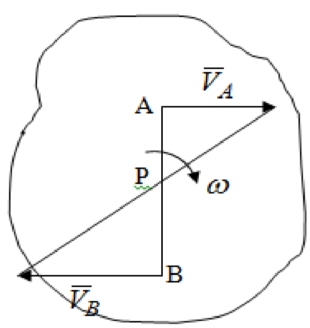

Рисунок 7 - Скорости двух точек тела антипараллельны к отрезку

5. Если известны модуль и направление скорости одной точки плоской фигуры и ее угловая скорость, то для определения положения мгновенного центра скоростей необходимо скорость точки повернуть в плоскости фигуры на 90^0 по ходу вращения фигуры и туда, куда она будет направлена провести по ней прямую. Затем на этой прямой в направлении повернутой скорости отложить отрезок, равный частному деления модуля скорости точки на угловую скорость фигуры (Рисунок 8).

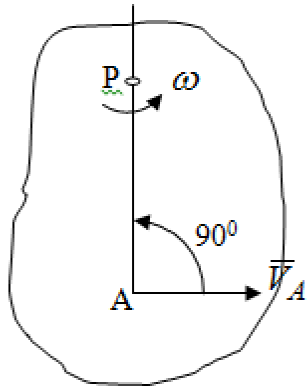

Рисунок 8 – МЦС при наличии угловой скорости

$$AP = \frac{V_A}{\omega}.$$

Полученная точка Р и будет мгновенным центром скоростей фигуры в данный момент времени.

6. Если скорости двух точек плоской фигуры перпендикулярны к отрезку, соединяющему эти точки, направлены в одну сторону и равны по модулю, то мгновенный центр скоростей отсутствует, в этом случае его нет (Рисунок 9).

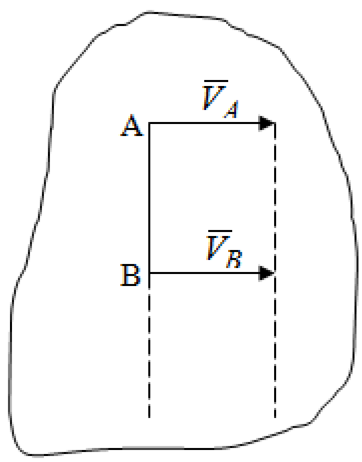

Рисунок 9 - Скорости двух точек плоской фигуры перпендикулярны к отрезку

Действительно, если мы проведем прямые вдоль отрезка АВ и через концы векторов скоростей точек, то они будут параллельны и не пересекутся.

В этом случае угловая скорость плоской фигуры будет равна нулю и все точки фигуры будут иметь равные по модулю и направлению скорости. Заметим, что ускорения точек фигуры будут разные.

7. Если скорости двух точек плоской фигуры параллельны друг другу и к отрезку, соединяющему эти точки не перпендикулярны, то мгновенный центр скоростей у фигуры отсутствует (Рисунок 10).

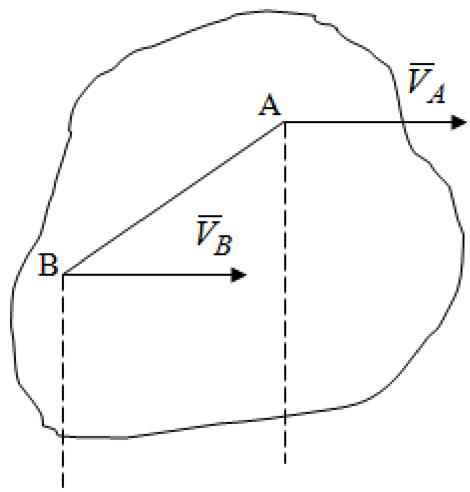

Рисунок 10 – Скорости двух точек плоской фигуры параллельны друг другу и не перпендикулярны к отрезку, соединяющему эти точки

В самом деле, если мы попробуем действовать так, как в случае 2, то увидим, что перпендикуляры, восстановленные в точках к их скоростям не пересекаются, поскольку параллельны друг другу.

В этом случае, как и в предыдущем, угловая скорость фигуры равна нулю и все точки ее имеют равные по модулю и направлению скорости (но ускорения точек будут разные).

Лекция 5

1. Сложное движение точки. Основные понятия и определения.
2. Теорема сложения скоростей.
3. Теорема сложения ускорений (теорема Кориолиса).
4. Модуль и направление ускорения Кориолиса, случаи его отсутствия.
5. Физические причины возникновения ускорения Кориолиса.

Сложное движение точки. Основные понятия и определения

Сложным, или составным, называется такое движение точки, которое мысленно можно представить, как сумму двух движений: движения точки относительно подвижной системы координат и движения точки вместе с подвижной системой координат относительно неподвижной (Рисунок 1).

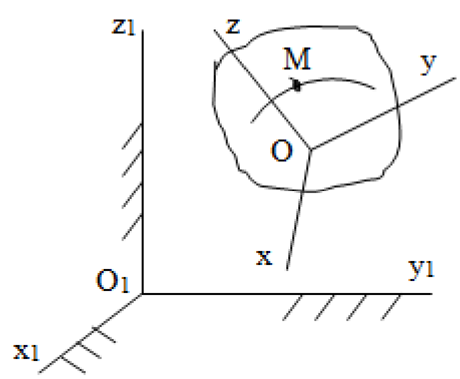

Рисунок 1 – Задание сложного движения точки

Сложное движение совершают многие точки деталей машин. Например, любая точка грабли мотовила жатки комбайна вращается вокруг оси мотовила и одновременно перемещается с жаткой относительно поверхности поля; человек, если принять его за точку, может перемещаться по салону автобуса и, одновременно с этим, перемещаться вместе с автобусом.

Прежде, чем приступить к определению кинематических характеристик движения точки введем ряд понятий.

Движение точки относительно подвижной системы координат называется относительным. Скорость и ускорение точки в этом движении называются относительными и обозначаются $\overline{V}_r$ и $\overline{W}_r$ соответственно.

Движение точки вместе с подвижной системой координат по отношению к неподвижной системе координат называется переносным. Скорость и ускорение точки (той точки подвижной системы координат, с которой совпадает данная точка) в этом движении называются переносными и обозначаются $\overline{V}_e$ и $\overline{W}_e$ соответственно.

Движение точки по отношению к неподвижной системе координат непосредственно называется абсолютным или сложным. Скорость и ускорение точки в этом движении называются абсолютными и обозначаются $\overline{V}_a$ и $\overline{W}_a$ соответственно. Они определяются по теоремам сложения скоростей и ускорений.

Прежде, чем перейти к рассмотрению этих теорем заметим, что для наблюдения и изучения относительного движения точки надо мысленно остановить ее переносное движение и, наоборот, для наблюдения и изучения переносного движения точки надо мысленно остановить ее относительное движение.

Теорема сложения скоростей

Суть этой теоремы состоит в следующем: абсолютная скорость точки в сложном движении равна геометрической сумме ее переносной и относительной скоростей, то есть

$$\overline{V}_a = \overline{V}_e + \overline{V}_r.$$

Рассмотрим доказательство теоремы. Пусть точка М совершает сложное движение, состоящее из относительного движения в подвижной системе координат Oxyz и переносного движения точки вместе с этой системой координат по отношению неподвижной системы координат $O_1x_1y_1z_1$ (рис. 2).

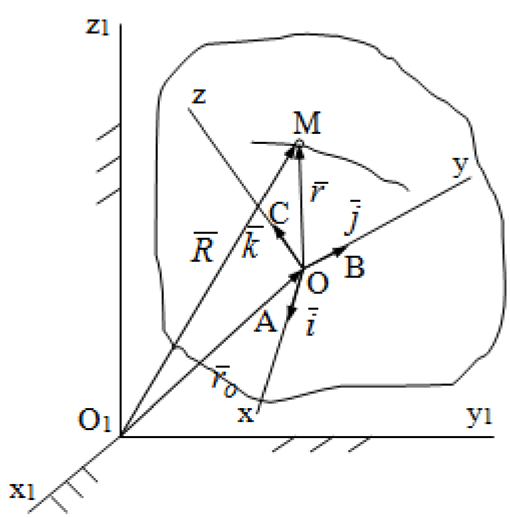

Рисунок 2 – Доказательство теоремы сложения скоростей

Зададим движение точки векторным способом: относительное движение радиус-вектором $\overline{r}$, переносное движение радиус-вектором $\overline{r}_o$, абсолютное движение радиус-вектором $\overline{R}$. Как следует из чертежа

$$\overline{R} = \overline{r}_o + \overline{r}. \qquad (1)$$

Разложим радиус-вектор $\bar{r}$ на составляющие по подвижным осям координат с помощью единичных векторов $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ этих осей: $\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$. Тогда уравнение (1) абсолютного движения точки М получит вид

$$\bar{R} = \bar{r}_o + x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}. \tag{2}$$

Теперь рассмотрим относительное движение точки М. Для этого мысленно остановим переносное движение (подвижную систему координат). Тогда величины $\bar{r}_o$, $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ будут постоянными и, дифференцируя по времени обе части равенства (2) получим относительную скорость точки:

$$\bar{V}_r = \frac{d\bar{R}}{dt} = \frac{dx}{dt}\bar{i} + \frac{dy}{dt}\bar{j} + \frac{dz}{dt}\bar{k}. \tag{3}$$

Рассмотрим переносное движение точки М, для чего мысленно остановим относительное движение точки (ее движение относительно подвижной системы координат). Тогда величины *x, y, z* будут постоянными и, дифференцируя обе части равенства (2) по времени получим переносную скорость точки:

$$\bar{V}_e = \frac{d\bar{R}}{dt} = \frac{d\bar{r}_o}{dt} + x\frac{d\bar{i}}{dt} + y\frac{d\bar{j}}{dt} + z\frac{d\bar{k}}{dt}. \tag{4}$$

И, наконец, рассмотрим абсолютное движение точки. Продифференцируем по времени обе части равенства (2), учитывая, что все величины в его правой части переменные, получим выражение абсолютной скорости точки М:

$$\bar{V}_a = \frac{d\bar{R}}{dt} = \frac{d\bar{r}_o}{dt} + x\frac{d\bar{i}}{dt} + y\frac{d\bar{j}}{dt} + z\frac{d\bar{k}}{dt} + \frac{dx}{dt}\bar{i} + \frac{dy}{dt}\bar{j} + \frac{dz}{dt}\bar{k}. \tag{5}$$

С учетом выражений (3) и (4) из равенства (5) следует, что

$$\bar{V}_a = \bar{V}_e + \bar{V}_r, \tag{6}$$

что требовалось доказать.

Итак, вектор абсолютной скорости точки геометрически равен диагонали параллелограмма, построенного на векторах переносной и относительной скоростей (Рисунок3).

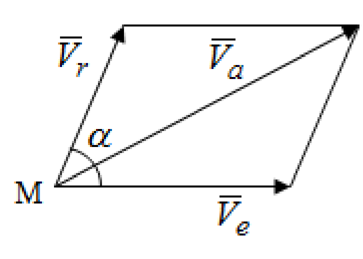

Рисунок 3 – Построение параллелограмма на векторах переносной и относительной скоростей

Поэтому модуль абсолютной скорости точки можно определить, как длину этой диагонали, по формуле:

$$V_a = \sqrt{V_e^2 + V_r^2 + 2V_e V_r \cos\alpha}\,.$$

Кроме того, при решении задач часто модуль абсолютной скорости точки определяют по ее проекциям на оси координат

$$(V_a = \sqrt{V_{ax}^2 + V_{ay}^2 + V_{az}^2}\,),$$

для чего векторы $\overline{V}_r$ и $\overline{V}_e$ показывают на чертеже, а затем обе части равенства (6) проектируют на координатные оси, которые также показывают на чертеже.

Теорема сложения ускорений (теорема Кориолиса)

Данная теорема гласит, что абсолютное ускорение точки в сложном движении равно геометрической сумме ее переносного, относительного и кориолисова ускорений:

$$\overline{W}_a = \overline{W}_e + \overline{W}_r + \overline{W}_k\,.$$

Для доказательства теоремы воспользуемся рис. 2 и формулами, полученными при доказательстве теоремы о сложении скоростей.

Для определения относительного ускорения точки обе части равенства (3) продифференцируем по времени. Получим:

$$\overline{W}_r = \frac{d^2\overline{R}}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}\bar{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\bar{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\bar{k}. \qquad (7)$$

Дифференцируя по времени обе части равенства (4) получим выражение переносного ускорения точки:

$$\overline{W}_e = \frac{d^2\overline{R}}{dt^2} = \frac{d^2\bar{r}_o}{dt^2} + x\frac{d^2\bar{i}}{dt^2} + y\frac{d^2\bar{j}}{dt^2} + z\frac{d^2\bar{k}}{dt^2}. \qquad (8)$$

А теперь, для определения абсолютного ускорения точки, продифференцируем по времени дважды обе части уравнения (2), учитывая, что все величины в правой его части переменные:

$$\overline{W}_a = \frac{d^2\overline{R}}{dt^2} = \frac{d^2\bar{r}_o}{dt^2} + x\frac{d^2\bar{i}}{dt^2} + y\frac{d^2\bar{j}}{dt^2} + z\frac{d^2\bar{k}}{dt^2} +$$

$$+\frac{d^2x}{dt^2}\bar{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\bar{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\bar{k} +$$

$$+2\left(\frac{dx}{dt}\frac{d\bar{i}}{dt} + \frac{dy}{dt}\frac{d\bar{j}}{dt} + \frac{dz}{dt}\frac{d\bar{k}}{dt}\right). \qquad (9)$$

Преобразуем правую часть этого равенства. Первые четыре слагаемые правой части равенства (9) есть, согласно (8), переносное ускорение точки. Последующие три слагаемые, согласно выражения (7), есть относительное ускорение точки.

Остается выяснить что дает удвоенная скобка. Имеющиеся в ней производные по времени от координат *x, y, z* есть проекции относительной скорости точки на оси координат:

V_{rx}, V_{ry}, V_{rz}, а производные по времени от единичных векторов $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ подвижных осей координат есть скорости точек А, В, С, расположенных на концах этих векторов (рис. 2). Скорости же, указанные точки, получают в результате вращения подвижных осей координат (модули этих векторов постоянны - равны единице) вокруг начала О этих осей . Поэтому скорости точек А, В, С можно выразить по формуле Эйлера для линейной скорости точки вращающегося тела. (см. лекцию № 2 по кинематике):

$$\frac{d\bar{i}}{dt} = \bar{V}_{AO} = \bar{\omega}_e \times \bar{i},\ \frac{d\bar{j}}{dt} = \bar{V}_{BO} = \bar{\omega}_e \times \bar{j},\ \frac{d\bar{k}}{dt} = \bar{V}_{CO} = \bar{\omega}_e \times \bar{k}\ .$$

Подставим оговоренные значения величин в удвоенную скобку и проведем ее преобразование:

$$2\left[V_{rx}(\bar{\omega}_e \times \bar{i}) + V_{ry}(\bar{\omega}_e \times \bar{j}) + Vrz(\bar{\omega}_e \times \bar{k})\right] =$$
$$= 2\left[\bar{\omega}_e \times (V_{rx}\bar{i} + V_{ry}\bar{j} + V_{rz}\bar{k})\right] = 2\bar{\omega}_e \times \bar{V}_r$$

Размерность полученного результата будет

$$\left[\frac{1}{c}\frac{м}{c} = \frac{м}{c^2}\right].$$

Следовательно, удвоенная скобка есть ускорение. Это дополнительное (к относительному и переносному) ускорение обозначается $\bar{W}_k$ и называется <u>ускорением Кориолиса</u> (по имени французского ученого Гюстава Гаспара Кориолиса, доказавшего эту теорему в 1831 г.):

$$\bar{W}_k = 2\bar{\omega}_e \times \bar{V}_r\ . \tag{10}$$

С учетом всего изложенного о правой части равенства (9) оно получает вид

$$\bar{W}_a = \bar{W}_e + \bar{W}_r + \bar{W}_k\ , \tag{11}$$

что и требовалось доказать.

Модуль и направление ускорения Кориолиса, случаи его отсутствия

Из выражения (10) следует, что ускорение Кориолиса равно удвоенному векторному произведению вектора угловой переносной скорости на вектор относительной скорости точки. Следовательно, его модуль определяется, как модуль векторного произведения двух векторов:

$$W_k = 2\omega_e V_r \sin\alpha\ , \tag{12}$$

где α - угол между векторами $\bar{\omega}_e$ и $\bar{V}_r$.

Направление ускорения Кориолиса определяется <u>по правилу Н.Е. Жуковского</u>: для определения направления ускорения Кориолиса необходимо относительную скорость точки проектировать на плоскость перпендикулярную оси переносного вращения, а затем эту проекцию повернуть в этой плоскости на 90^0 по ходу переносного вращения; ее направление, после этого, будет направлением ускорения Кориолиса (Рисунок 4).

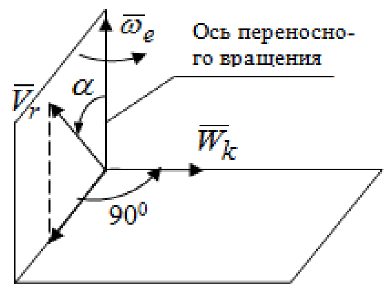

Рисунок 4 - Модуль и направление ускорения Кориолиса

Направление ускорения Кориолиса можно установить также, исходя непосредственно, из определения векторного ускорения двух векторов.

Рассмотрим случаи отсутствия ускорения Кориолиса. Как следует из анализа формулы (12) модуля ускорения Кориолиса оно будет равно нулю в следующих случаях:

1. Когда угловая скорость переносного вращения $\omega_e = 0$, то есть тогда, когда переносное движение будет поступательным или будет менять направление вращения;
2. Когда относительная скорость точки $V_r = 0$;
3. Когда угол α между векторами $\overline{\omega}_e$ и $\overline{V}_r$ равен нулю или 180^0, то есть в случае, когда относительная скорость точки параллельна оси переносного вращения.

Физические причины возникновения ускорения Кориолиса

Физические причины возникновения ускорения Кориолиса заключаются в изменении относительной скорости точки ее переносным движением и изменении переносной скорости точки ее относительным движением.

Так, ползун В, движущийся по вращающемуся стержню ОА, совершает сложное движение, состоящее из относительного движения по стержню со скоростью $\overline{V}_r$ и переносного вращения вместе со стержнем со скоростью $\overline{V}_e$ (Рисунок 5).

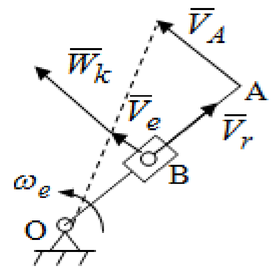

Рисунок 5 – Ползун в сложном движении

При этом переносное движение изменяет относительную скорость по направлению, а относительное движение, изменяя положение ползуна на стержне – расстояние ОВ, изменяет модуль переносной скорости ($V_e = \omega_e\, OB$). В результате возникает ускорение Кориолиса.

Лекция 6

1. Сложное движение твердого тела.
2. Сложение поступательных движений.
3. Сложение двух, направленных в одну сторону, вращений вокруг параллельных осей.
4. Сложение двух, направленных в разные стороны и имеющих разные угловые скорости, вращений вокруг параллельных осей.
5. Сложение двух, направленных в разные стороны и имеющих одинаковые угловые скорости, вращений вокруг параллельных осей.
6. Сложение двух вращений вокруг пересекающихся осей.
7. Сложение поступательного и вращательного движений.

Сложное движение твердого тела

Сложным называется такое движение твердого тела, при котором оно одновременно движется относительно подвижной системы координат и вместе с нею переносится относительно неподвижной системы координат. Возможны разные случаи сочетаний движений тела.

Сложение поступательных движений

В этом случае все точки тела в относительном движении имеют одинаковые по модулю и направлению скорости $\overline{V}_1$, а в переносном движении равные по модулю и направлению скорости $\overline{V}_2$. Стало быть в каждый момент времени все точки тела имеют равные по модулю и направлению абсолютные скорости

$$\overline{V} = \overline{V}_1 + \overline{V}_2,$$

а это значит, что результирующее (абсолютное) движение тела будет поступательным с указанной скоростью.

Сложение двух, направленных в одну сторону, вращений тела вокруг параллельных осей

Пусть тело вращается вокруг оси z с угловой скоростью ω_1, а вокруг оси z_1 с угловой скоростью ω_2 (Рисунок 1).

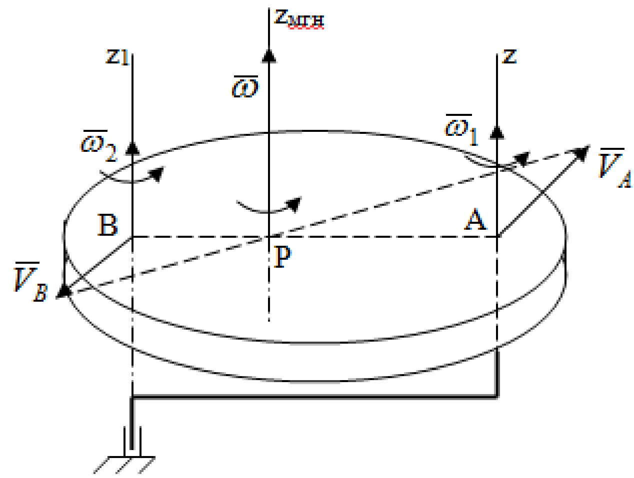

Рисунок 1 - Сложение двух, направленных в одну сторону, вращений тела вокруг параллельных осей

Вполне очевидно, что точка A, лежащая на оси z, будет получать скорость от вращения тела вокруг оси z_1, а точка B получать скорость от вращения тела вокруг оси z и эти скорости будут равны:

$$V_A = \omega_2\ AB,$$
$$V_B = \omega_1\ AB.$$

Проведем через концы векторов скоростей этих точек прямую и точка P ее пересечения с отрезком AB будет мгновенным центром скоростей. Следовательно результирующее движение тела будет мгновенным вращательным вокруг оси, проходящей через точку P. Найдем абсолютную угловую скорость.

$$\omega = \frac{V_A}{AP} = \frac{V_B}{BP} = \frac{V_A + V_B}{AP + BP} = \frac{(\omega_2 + \omega_1)AB}{AB} = \omega_1 + \omega_2 .$$

Как видим, абсолютная угловая скорость определяется аналогично равнодействующей двух параллельных сил. Следовательно, по аналогии с силами, ось мгновенного вращения делит отрезок AB на части обратно пропорциональные угловым скоростям складываемых вращений, внутренним образом:

$$\frac{\omega_1}{BP} = \frac{\omega_2}{AP} = \frac{\omega}{AB}.$$

Таким образом, при сложении двух, направленных в одну сторону, вращений тела вокруг параллельных осей, результирующее движение будет мгновенным вращательным, направленным в ту же сторону, что и складываемые вращения. Ось мгновенного вращения параллельна осям складываемых вращений и делит расстояние между ними на части обратно пропорциональные угловым скоростям этих вращений внутренним образом. Абсолютная угловая скорость равна сумме угловых скоростей складываемых вращений.

Сложение двух, направленных в разные стороны и имеющих разные угловые скорости, вращений тела вокруг параллельных осей

Для определенности будем полагать, что $\omega_1 > \omega_2$ (Рисунок 2).

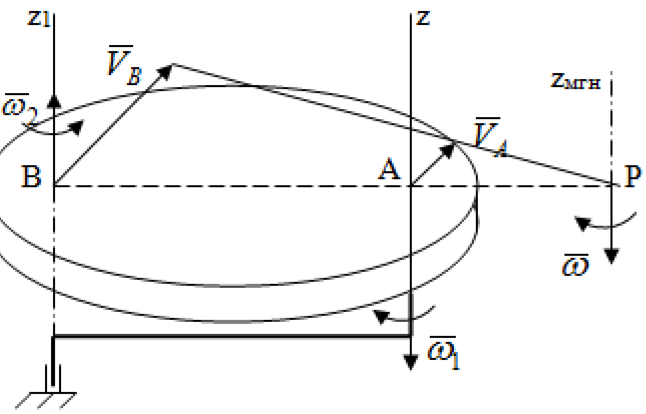

Рисунок 2 – Сложение двух, направленных в разные стороны и имеющих разные угловые скорости, вращений тела вокруг параллельных осей

Покажем на чертеже скорости точек A и B – они перпендикулярны к отрезку AB и численно они равны:

$$V_B = \omega_1\, AB,\; V_A = \omega_2\, AB\,.$$

Проведем прямые через точки A и B и через концы векторов скоростей этих точек, точка их пересечения P будет мгновенным центром скоростей. Тело будет совершать мгновенное вращение вокруг оси, проходящей через эту точку, в сторону вращения с большей угловой скоростью. Найдем абсолютную угловую скорость.

$$\omega = \frac{V_B}{BP} = \frac{V_A}{AP} = \frac{V_B - V_A}{BP - AP} = \frac{\omega_1 AB - \omega_2 AB}{AB} = \omega_1 - \omega_2\,.$$

Получен результат, как и при сложении двух антипараллельных векторов.

Из всего изложенного можно сделать следующие выводы: при сложении двух, направленных в разные стороны и имеющих разные угловые скорости, вращений тела вокруг параллельных осей, результирующее движение будет мгновенным вращательным с угловой скоростью, равной разности угловых скоростей складываемых вращений и направленным в сторону вращения, имеющего большую угловую скорость. Ось мгновенного вращения параллельна осям складываемых вращений и делит расстояние между ними на части обратно пропорциональные их угловым скоростям внешним образом.

Сложение двух, направленных в разные стороны и имеющих одинаковые угловые скорости, вращений тела вокруг параллельных осей

Такое сочетание вращений называется парой вращений, а векторы их угловых скоростей образуют пару угловых скоростей (Рисунок 3).

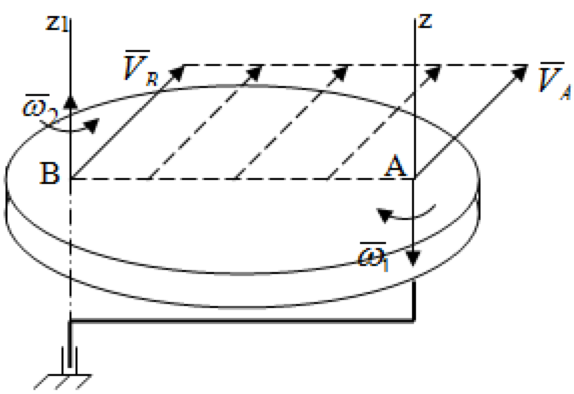

Рисунок 3 - Сложение двух, направленных в разные стороны и имеющих одинаковые угловые скорости, вращений тела вокруг параллельных осей

Скорости точек A и B будут равны друг другу и по направлению, и по модулю:

$$V_A = V_B = \omega_1 AB = \omega_2 AB.$$

Следовательно мгновенного центра скоростей нет, все точки тела имеют такие же, как и точки A и B, скорости и тело совершает поступательное движение.

Общий вывод: при сложении двух, направленных в разные стороны и имеющих одинаковые угловые скорости, вращений вокруг параллельных осей, результирующее движение тела будет поступательным, со скоростью, равной произведению любой из угловых скоростей на расстояние между данными осями. Направлена эта скорость будет перпендикулярно плоскости, проходящей через данные оси, в ту сторону, откуда поворот пары угловых скоростей складываемых вращений виден против хода часовой стрелки.

Сложение двух вращений тела вокруг пересекающихся осей

В этом случае скорость точки O тела, как лежащей одновременно на двух осях вращения, одна из которых неподвижна, будет равна нулю (Рисунок 4).

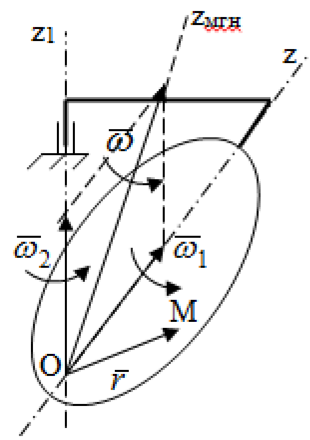

Рисунок 4 – Сложение двух вращений тела вокруг пересекающихся осей

Это значит, что тело будет совершать мгновенное вращение вокруг оси, проходящей через точку О пересечения осей.

Для определения абсолютной угловой скорости вычислим абсолютную скорость произвольной точки М тела. Положение точки М зададим радиус-вектором $\overline{r}$. Абсолютная скорость точки согласно теореме о сложении скоростей равна геометрической сумме ее относительной и переносной скоростей:

$$\overline{V}_a = \overline{V}_r + \overline{V}_e .$$

Поскольку и относительное, и переносное движения вращательные, то их скорости можно выразить по формуле Эйлера:

$$\overline{V}_r = \overline{\omega}_1 \times \overline{r}, \quad \overline{V}_e = \overline{\omega}_2 \times \overline{r} .$$

Тогда, абсолютная скорость точки

$$\overline{V}_a = \overline{\omega}_1 \times \overline{r} + \overline{\omega}_2 \times \overline{r}, \text{ или } \overline{V}_a = (\overline{\omega}_1 + \overline{\omega}_2) \times \overline{r}.$$

С другой стороны, $\overline{V}_a = \overline{\omega} \times \overline{r}$, где $\overline{\omega}$ - абсолютная угловая скорость тела.

Из сравнения двух последних равенств следует, что

$$\overline{\omega} = \overline{\omega}_1 + \overline{\omega}_2 .$$

Так как вектор угловой скорости расположен на оси вращения, то из этой формулы вытекает также, что ось мгновенного вращения будет направлена вдоль вектора $\overline{\omega}$ абсолютной угловой скорости тела. Эта ось, заметим, будет описывать конусную поверхность с вершиной в точке О.

Итак, при сложении двух вращений тела вокруг пересекающихся осей, результирующее движение тела будет мгновенным вращательным вокруг оси, проходящей через точку пересечения осей. Абсолютная угловая скорость будет равна геометрической сумме угловых скоростей складываемых вращений. Ось мгновенного вращения направлена вдоль вектора абсолютной угловой скорости и с течением времени описывает коническую поверхность с вершиной в точке пересечения осей.

Сложение поступательного и вращательного движений

При сложении указанных движений, в зависимости от расположения скорости $\overline{V}$ поступательного движения и вектора угловой скорости $\overline{\omega}$ вращательного движения, возможны три разных случая:

Первый случай. Указанные скорости перпендикулярны друг другу (Рисунок 5).

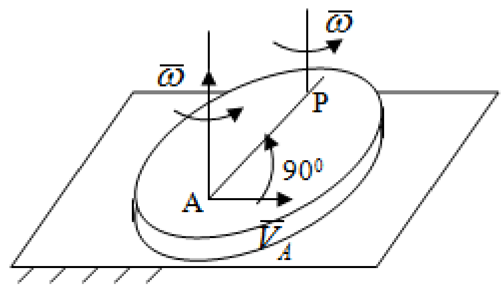

Рисунок 5 – Сложение поступательного и вращательного движения (первый случай)

В этом случае все точки тела, как видно из рис. 5, будут двигаться в плоскостях, параллельных некоторой неподвижной плоскости и тело будет совершать плоскопараллельное движение. Это же движение можно рассматривать, как состоящее из серий мгновенных вращений вокруг оси, проходящей через мгновенный центр скоростей P. причем, как известно, расстояние $AP = V/\omega$.

Второй случай. Векторы $\overline{V}$ и $\overline{\omega}$ направлены вдоль одной прямой (Рисунок 6).

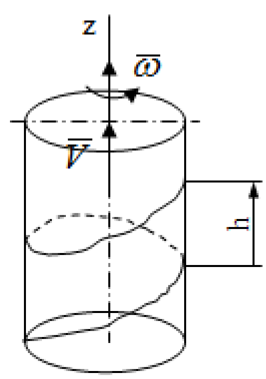

Рисунок 6 - Сложение поступательного и вращательного движения (второй случай)

То есть тело вращается вокруг оси и одновременно движется поступательно вдоль оси. Такое движение тела называется винтовым. Ось, проведенная вдоль вектора $\overline{\omega}$ (ось вращения тела) называется осью винта. Если векторы $\overline{V}$ и $\overline{\omega}$ направлены в одну сторону, то винт называют правым, а если в разные, то левым.

Все точки тела, не лежащие на оси вращения, движутся по кривым, называемым винтовыми линиями. Расстояние h, проходимое точкой вдоль оси винта за один оборот тела называется шагом винта.

Шаг винта

$$h = VT\,,$$

где T – время одного оборота тела вокруг оси винта.

При равномерном вращении тела

$$T = 2\pi/\omega\,,$$

а поэтому шаг винта

$$h = V\frac{2\pi}{\omega}\,.$$

Из этой формулы видно, что для того, чтобы шаг винта был постоянным необходимо, чтобы $\overline{V}$ и $\overline{\omega}$ были постоянными.

<u>Третий случай</u>. Векторы $\overline{V}$ и $\overline{\omega}$ образуют произвольный угол α (Рисунок 7).

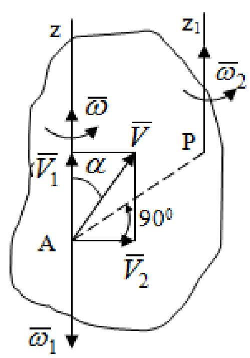

Рисунок 7 - Сложение поступательного и вращательного движения (третий случай)

Для определения абсолютного (результирующего) движения тела разложим вектор $\overline{V}$ скорости поступательного движения тела на две составляющие: $\overline{V}_1$ - параллельную оси z и $\overline{V}_2$ - перпендикулярную этой оси. Затем скорость $\overline{V}_2$ заменим парой угловых скоростей $\overline{\omega}_1$ и $\overline{\omega}_2$, равных по модулю $\overline{\omega}$ с плечом $AP = V_2/\omega$.

Векторы $\overline{\omega}$ и $\overline{\omega}_1$ в сумме дают ноль – их отбросим. В результате у тела останется поступательное движение вдоль оси Pz_1 со скоростью $\overline{V}_1 = \overline{V}\,cos\,\alpha$ и вращательное движение вокруг этой оси (мгновенного вращения) с угловой скоростью ω.

Следовательно, результирующее движение будет мгновенным винтовым вокруг оси Pz_1 винта, непрерывно изменяющей свое положение.

Контрольные вопросы к разделу «Кинематика»

1. Что называется кинематикой?
2. Что понимается под механическим движением?
3. Что называется телом отсчета?
4. Что такое “система отсчета”?
5. Можно ли изучать механическое движение твердого тела без указания системы отсчета?
6. В чем состоит относительность механического движения?
7. Как трактуется пространство в классической механике?
9. Какими моделями представляют тела в кинематике?
10. На какие части делится кинематика?
11. Какие задачи решаются в кинематике точки?
12. Какие задачи решаются в кинематике твердого тела?
13. Что значит “задать движение” точки или твердого тела?
14. Что называется траекторией точки?
15. Что называется скоростью точки?
16. Что называется ускорением точки?
17. Какими способами задается движение точки?
18. В чем состоит координатный способ задания движения точки?
19. В чем заключается естественный способ задания движения точки?
20. В чем состоит векторный способ задания движения точки?
21. Какой зависимостью связаны между собой векторный и координатный способы задания движения точки?
22. Какой зависимостью связаны между собой естественный и координатный способы движения точки?
23. Как определяют траекторию точки при координатном способе зада-ния ее движения?
24. Как определяют траекторию точки при векторном способе задания ее движения?
25. Чему равна скорость точки при векторном способе задания ее движения?
26. Как по отношению к траектории направлена скорость точки?
27. Чему равно ускорение точки при векторном способе задания ее движения?
28. Как определяют скорость точки при координатном способе задания ее движения?
29. Как определяется ускорение точки при координатном способе задания ее движения?
30. Как определяют скорость точки при естественном способе задания ее движения?

Раздел III. Динамика

Лекция 1

1. Введение в динамику.
2. Законы динамики материальной точки.
3. Дифференциальные уравнения движения точки.
4. Две основные задачи динамики точки и порядок их решения.
5. Относительное движение точки, принцип относительности классической механики, относительное равновесие.

Введение в динамику

Динамикой называется раздел теоретической механики, в котором изучается движение материальных твердых тел с учетом их инерции (инертности) и действующих на них сил.

Под инерцией понимается свойство материальных тел сопротивляться изменению их покоя или равномерного прямолинейного поступательного движения. Мера инерции – это скалярная величина, именуемая массой. Она характеризует, как инерционные, так и гравитационные свойства вещества.

При вращательном движении твердого тела мерой его инерции является момент инерции относительно оси вращения.

В динамике, в отличие от статики, учитывается действие всех сил, как постоянных, так и переменных. Переменные силы могут зависеть от расстояния, от скорости, от времени. Например, отскок металлического шарика от бетонного пола будет тем выше, чем выше мы поднимем его от поверхности пола – соответственно просматривается зависимость от расстояния, от скорости могут зависеть силы сопротивления движению, от времени – сила тяги двигателя при изменении подачи топливо-воздушной смеси.

Твердые тела в динамике представляют двумя моделями: материальной точкой или механической системой. Под материальной точкой понимается точка, обладающая массой данного тела. Она является простейшей моделью твердого тела, поскольку в данном случае размерами, габаритами, формой тела пренебрегают, что облегчает изучение движения тела под действием сил.

Здесь необходимо отметить, что, принимая тело за точку, изучают движение не абстрактной точки, а центра масс или центра тяжести тела. За материальные точки можно принимать тела, размеры которых малы по сравнению с проходимыми ими расстояниями (например, перемещение автобусов, поездов и другого транспорта на далекие расстояния или пуля, выпущенная из ружья, вес размер которой действительно очень мал в сравнении с дальностью полета).

Под механической системой понимается совокупность взаимосвязанных материальных точек, в которой положение и движение каждой точки, сказывается на положении и движении других точек. Эта модель может быть использована тогда, когда тело (механизм, конструкцию и т.д.) нельзя представить в виде точки.

Законы динамики материальной точки

В основе динамики лежат три закона Ньютона – закон инерции, второй (основной) закон динамики точки, закон равенства действия и противодействия. Эти законы впервые, в систематизированном виде, были изложены в книге «Математические начала натуральной философии», написанной Исааком Ньютоном и опубликованной еще в 1687 году.

Первый закон – закон инерции состоит в том, что изолированная от внешних воздействий материальная точка будет находиться в состоянии покоя или равномерного прямолинейного движения. Он устанавливает эквивалентность состояния покоя и равномерного прямолинейного движения. Позволяет судить о том, находится ли точка под действием неуравновешенной силы.

Второй (основной) закон динамики точки, гласит, что произведение массы точки на ускорение, которое она получает под действием данной силы, равно по модулю этой силе и направление ускорения совпадает с направлением силы:

$$mW = F$$

В случае же действия на тело нескольких сил, системы сил, то в правой части равенства будет находиться геометрическая сумма сил.

$$m\overline{W} = \sum \overline{F}_k$$

Этот закон является единственным из трех законов Ньютона, имеющим количественное выражение (почему и называется основным) и он справедлив только для точек постоянной массы. Например, в 2019 году в Японии планируется выпуск мотоциклов, оснащенных гироскопом, то есть устройством, которое помогает водителю удерживать равновесие мотоцикла за счет центробежных сил специально выполненного вращающегося диска.

Третий закон – закон равенства действия и противодействия, состоит в том, что при всяком действии одной материальной точки на другую имеет место такое же по величине, но противоположное по направлению взаимодействие. Этот закон также имеет большое значение при решении технических, производственных, экспериментальных и других задач.

Для уточнения, все законы Ньютона справедливы для движения тел в инерциальной системе отсчета. Инерциальной называется такая система отсчета, в которой выполняется закон инерции. Она считается неподвижной и в технической практике за систему такого типа принимается система отсчета жестко связанная с Землей, предметами или телами, расположенными на поверхности Земли.

Поскольку тела в динамике могут представляться материальной точкой и механической системой, то динамика делится на динамику точки и динамику системы.

Дифференциальные уравнения движения точки

Согласно второго (основного) закона динамики точки:

$$m\overline{W} = \sum \overline{F}_k \qquad (1)$$

Спроектируем обе части этого векторного равенства на оси декартовой системы координат и получим следующие три зависимости:

$$m\overline{W}_x = \sum \overline{F}_{kx}$$
$$m\overline{W}_y = \sum \overline{F}_{ky}$$
$$m\overline{W}_z = \sum \overline{F}_{kz}$$

Из раздела кинематики известно, что проекции ускорения очки на оси координат равны вторым производным по времени от соответствующих координат точки. С учетом этого уравнения получат вид:

$$m\ddot{x} = \sum \overline{F}_{kx}$$
$$m\ddot{y} = \sum \overline{F}_{ky}$$
$$m\ddot{z} = \sum \overline{F}_{kz}$$

Полученные таким образом уравнения и являются дифференциальными уравнениями движения точки в декартовой системе координат.

Если обе части уравнения (1) спроектируем на естественные оси координат (касательную и нормальную), то получим дифференциальные уравнения движения точки относительно этих осей.

$$m\frac{dV}{dt} = \sum \overline{F}_{k\tau}$$
$$m\frac{V^2}{\rho} = \sum \overline{F}_{kn}$$

Две основные задачи динамики точки

С помощью дифференциальных уравнений движения решаются две основные задачи динамики точки.

Первая основная задача состоит в том, что по известной массе точки и уравнениям ее движения ($x(t), y(t), z(t)$) необходимо определить действующую на точку силу.

Решение задачи проводят в следующем порядке:

1. Определяют проекции ускорения на оси координат. Они равны вторым производным по времени от соответствующих координат точки:

$$W_x = \ddot{x}, W_y = \ddot{y}, W_z = \ddot{z}$$

2. Массу точки умножают на эти проекции ускорения и находят проекции силы R_x, R_y, R_z на оси координат:
3. Определяют модуль силы по формуле:

$$R = \sqrt{R^2{}_x + R^2{}_y + R^2{}_z}$$

4. Определяют направление силы по направляющим косинусам:

$$cos\alpha = R_x/R,\ cos\beta = R_y/R,\ cos\varphi = R_z/R$$

Вторая основная задача состоит в том, что по известной массе точки и действующим на нее силам необходимо определить движение точки.

Решение задачи проводят в следующей последовательности:

1. Необходимо выполнить рисунок, на котором поместить точку в систему координат в произвольном положении на предполагаемой или указанной в задаче траектории, таким образом, чтобы все координаты точки были положительными.
2. Показать все действующие на точку силы.
3. Составить дифференциальные уравнения движения точки относительно каждой координатной оси. Решить эти уравнения и найти уравнения движения точки ($x(t)$, $y(t)$, $z(t)$).
4. Постоянные интегрирования при решении дифференциальных уравнений определяют по начальным условиям.

К начальным условиям относятся: начальное время t_0, проекции начальной скорости на оси координат V_{0x}, V_{0y}, V_{0z}, начальные координаты x_0, y_0, z_0.

Динамика относительного движения точки

Движение точки в инерциальной (условно неподвижной системе отсчета) изучают с помощью основного уравнения динамики точки:

$$m\overline{W}_a = \sum \overline{F}_k \qquad (1)$$

Необходимо отметить, что в этом уравнении W_a – это абсолютное ускорение точки. Поэтому становится непонятным, имеется ли возможность использования методов, основанных на этом законе применять при изучении движения точки в подвижной системе отсчета.

Для решения поставленной проблемы найдем зависимость между относительным ускорением точки и силами.

Абсолютное ускорение точки, согласно теоремы Кориолиса равно геометрической сумме ее переносного, относительного и кориолисова ускорений:

$$W_a = W_e + W_r + W_{кор}$$

С учетом этого, выражение (1) примет вид:

$$mW_e + mW_r + mW_{кор} = \sum F_k \ .$$

Далее выразим

$$mW_r = \sum F_k + (-mW_e) + (-mW_{кор}) \qquad (3)$$

Величины, стоящие в круглых скобках, представляют собой силы и называются переносной силой инерции и кориолисовой силой инерции.

Обозначим их и равенство примет вид:

$$mW_r = \sum F_k + F_e^{\ ин} + F_{кор}^{\ ин}$$

Это уравнение показывает зависимость между относительным ускорением точки и силами. Оно называется основным законом динамики относительного движения точки.

Приходим к выводу, что основное уравнение динамики для относительного движения точки составляется также, как и основное уравнение динамики для движения точки в инерциальной системе отсчета, только к действующим силам необходимо добавить переносную и кориолисову силы инерции точки.

В случае, когда переносное движение будет равномерным и прямолинейным:

$$mW_e = 0, W_{кор} = 0, F_e^{\ ин} = 0, F_{кор}^{\ ин} = 0$$

Тогда уравнение (3) получит вид:

$$m\overline{W}_r = \sum \overline{F}_k \ .$$

То есть такой же вид что и уравнение (1). Из этого вытекает принцип относительности классической механики: находясь в изолированной системе никаким механическим опытом невозможно проверить находится ли эта система в покое или движется равномерно и прямолинейно.

Под относительным равновесием точки понимается состояние покоя точки в относительном движении. При нем относительная скорость и относительное ускорение точки равны нулю. Также равно нулю кориолисово ускорение, а значит и кориолисова сила инерции. Отсюда следует условие относительного равновесия точки: для относительного равновесия точки необходимо и достаточно, чтобы геометрическая сумма сил, действующих на точку со стороны других тел, и переносной силы инерции точки была равна нулю.

Иными словами

$$\sum \overline{F}_k + F_e^{ин} = 0$$

что и требовалось доказать.

Лекция 2

1. Дифференциальные уравнения движения механической системы.
2. Центр масс механической системы.
3. Теорема о движении центра масс механической системы.
4. Сохранение движения центра масс.

Дифференциальные уравнения движения механической системы

Рассмотрим механическую систему, состоящую из n точек. Положение k-й точки определяется радиус-вектором r_k. Точка имеет массу m_k и движется со скоростью V_k и с ускорением $\overline{a}_k$.

Силы, действующие на материальную точку можно разбить на две группы.

Сделать это можно разными способами:

1. Разделим силы, действующие на k-ю точку, на внешние и внутренние. Получим следующую запись основного уравнения динамики:

$$m\overline{a}_k = \overline{F}_k{}^e + \overline{F}_k{}^i,\ k = 1,2,\ldots,n. \tag{1}$$

где F_k^e – *«external»* равнодействующая внешних сил;
F_k^i – *«internal»* равнодействующая сил, действующих со стороны тел системы.

2. Разделим силы, действующие на k-ю точку, на активные силы и реакции связей. Получим следующую запись:

$$m\overline{a}_k = \overline{F}_k + \overline{R}_k,\ k = 1,2,\ldots,n. \tag{2}$$

где F_k – равнодействующая активных сил, приложенных к точке k;
R_k – равнодействующая реакций связей, действующих на точку k.

При этом выполняется равенство:

$$\overline{F}_k{}^e + \overline{F}_k{}^i = \overline{F}_k + \overline{R}_k$$

Первый способ записи основного уравнения используется при решении задач динамики с помощью <u>основных теорем динамики</u>, которые включают в себя:

1. Теорему о движении центра масс.
2. Теорему об изменении количества движения.
3. Теорему об изменении кинетического момента.
4. Теорему об изменении кинетической энергии.

Второй способ записи основного уравнения применяется при решении задач динамики методами аналитической механики, которые используют:

1. Принцип Лагранжа.
2. Принцип д'Аламбера.
3. Принцип д'Аламбера – Лагранжа.
4. Уравнения Лагранжа второго рода.

Центр масс механической системы

Массой механической системы называется сумма масс ее точек:

$$m = \sum_{k=1}^{n} m_k \tag{3}$$

Центром масс механической системы называется геометрическая точка *C*, радиус-вектор которой определяется по формуле:

$$\overline{r_c} = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{n} m_k \bar{r}_k \tag{4}$$

Проектируя последнее равенство на оси, получим формулы для координат центра масс, которые аналогичны формулам для определения координат центра тяжести:

$$\begin{gathered} \overline{x_c} = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{n} m_k x_k \\ \overline{y_c} = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{n} m_k y_k \\ \overline{z_c} = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{n} m_k z_k \end{gathered} \tag{5}$$

Центр масс иногда называют центром инерции. Центр масс более общее понятие, чем центр тяжести, поскольку сохраняет смысл даже при отсутствии сил тяжести.

Если массы материальных точек постоянны, то дифференцированием уравнения (4) получим выражение для скорости центра масс:

$$\overline{V_c} = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{n} m_k \overline{V_k}\,, \tag{6}$$

а также выражение

$$\overline{a_c} = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{n} m_k \overline{a_k}\,, \qquad (7)$$

для определения ускорения центра масс системы.

Теорема о движении центра масс механической системы

Произведение массы системы на ускорение центра масс равно главному вектору внешних сил, действующих на точки системы:

$$m\overline{a_c} = \sum_{k=1}^{n} \overline{F_k^{\,e}} \qquad (8)$$

или в проекциях на оси

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_c &= \sum_{k=1}^{n} \overline{F_{k\,x}^{\;e}} \\ m\ddot{y}_c &= \sum_{k=1}^{n} \overline{F_{k\,y}^{\;e}} \\ m\ddot{z}_c &= \sum_{k=1}^{n} \overline{F_{k\,z}^{\;e}} \end{aligned} \qquad (9)$$

Просуммируем все дифференциальные уравнения движения механической системы (1), в результате чего получим.

$$\sum_{k=1}^{n} m\bar{a}_k = \sum_{k=1}^{n} \bar{F}_k^{\,e} + \sum_{k=1}^{n} \bar{F}_k^{\,i} \qquad (10)$$

Если учесть, что силы взаимодействия внутри системы попарно равны и противоположно направлены, получим, что главный вектор внутренних сил равен нулю:

$$\sum_{k=1}^{n} \bar{F}_k^{\,i} = 0$$

Кроме этого, по формуле (3.7) имеем:

$$\sum_{k=1}^{n} m_k \overline{a_k} = m\overline{a_c}$$

Отсюда следует справедливость уравнений (3.8), которые называются дифференциальными уравнениями поступательного движения твердого тела, что и требовалось доказать.

Другими словами, центр масс механической системы движется как материальная точка, в которой сосредоточена вся масса системы и к которой приложены все внешние силы, действующие на систему, внутренние силы не могут изменить движение центра масс.

Сохранение движения центра масс

Следствие 1

Если главный вектор внешних сил механической системы все время равен нулю, то центр масс системы находится в покое или движется равномерно и прямолинейно.

Действительно, если

$$\sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k^{\,e} = 0,$$

то из формулы (8), получаем, что $a_c = 0$

Следствие 2

Если сумма проекций всех внешних сил на какую-либо ось все время равна нулю, то проекция скорости центра масс на эту ось постоянна.

Действительно, если

$$\sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k^{\,e} = 0,$$

то из формулы (9), получаем что $\ddot{x}_c = 0$

Отсюда следует, что $x_c =$ const, Vc_x = const, а центр масс движется по оси x равномерно или покоится.

Лекция 3

1. Метод кинетостатики для материальной точки
2. Принцип Даламбера
3. Работа и мощность.

Метод кинетостатики для материальной точки

Материальная точка, движение которой в пространстве не ограничено какими либо связями, называется свободной, а материальная точка, свобода которой ограничена, называется несвободной. Для несвободной материальной точки все внешние силы необходимо делить на две категории:

1. Активные (в динамике движущие) силы
2. Реакции связи (пассивные силы).

Если несвободную материальную точку освободить от связей и заменить связи их реакциями, то движение точки можно рассматривать, как свободное, а основному закону динамики придать вид:

$$\sum \overline{F}_k + \sum \overline{R}_k = m\overline{a}$$

$$\overline{F}_{ин} = m\overline{a}$$

Силой инерции называется сила противодействия точки телу, которое вызвало ее движение. Она равна произведению массы точки на ускорение и направлена в сторонк противоположную ускорению.

Принцип Даламбера

<u>Принцип Даламбера</u> имеет несколько формулировок:

1. Если к движущейся ускоренно материальной точке приложить, кроме действующих на нее активной силы и силы реакции связи еще и силу инерции, то точка приведется в состояние равновесия.
2. Во время движения материальной точки сумма всех сил, действующих на нее, включая силу инерции, равна нулю.
3. Силы, действующие на материальную точку, и сила инерции взаимно уравновешиваются.

Таким образом, в принципе Даламбера идет речь не об абсолютном равновесии, а о равновесии условном, воображаемом, поскольку добавление к действующим на точку силам инерции является искусственным приемом, так как фактически к данной точке эта сила не приложена, поскольку она приложена к телу, вызывающему ускоренное движение точки.

Для системы сил этот принцип можно сформулировать:

1. Если к каждой точке механической системы, не находящейся в равновесии, приложить равнодействующую внешних сил, равнодействующую внутренних сил и силу инерции точки, то система приведется равновесное состояние.
2. Если к каждой точке системы приложить кроме активной силы, силы реакции связи и силу инерции, то система приведется в состояние равновесия.

Метод решения задач динамики способами статики и кинематики, основанный на принципе Даламбера, называется методом кинетостатики.

Работа и мощность

Элементарная работа силы равна произведению касательной составляющей силы на элементарное перемещение точки ее приложения:

$$dA = F_{\tau} ds\,.$$

В зависимости от способа задания движения, элементарная работа силы также может быть выражена:

$$dA = F\ ds \cos\alpha$$

где α – угол между направлениями силы и скорости точки ее приложения.

$$dA = \overline{F}\ \ d\overline{r}$$

где $d\overline{r}$ - дифференциал радиус-вектора приложения силы.

$$dA = \overline{F}_{kx} dx + \overline{F}_{ky} dy + \overline{F}_{kz} dz\,,$$

где dx, dy, dz – элементарные перемещения точки приложения силы вдоль осей координат.

Работа оценивает действие только касательной составляющей силы, то есть составляющей, которая изменяет модуль скорости точки приложения силы.

Работа на конечном промежутке перемещения равна взятому вдоль этого перемещения интегралу от элементарной работы.

$$dA = \int_{B}^{A} dA$$

Выражения работы для некоторых видов сил:

1.Работа силы тяжести равна взятому со знаком плюс или минус произведению ее модуля на вертикальное перемещение точки ее приложения:

$$A = \pm Ph$$

Таким образом, если точка приложения силы тяжести опускается, то работа силы тяжести положительная, а если поднимается, то отрицательная.

2.Работа силы упругости, например пружины, равна половине произведения коэффициента жесткости на разность квадратов ее начального и конечного растяжения от свободного состояния:

$$A = \frac{C}{2}(\Delta L^2{}_{нач} - \Delta L^2{}_{конеч})$$

Она зависит только от начального и конечного положения точек их приложения, а силы обладающие такими свойствами называются потенциальными.

3.Работа силы при вращении тела вокруг неподвижной оси равна интегралу по углу поворота тела от произведения момента силы относительно оси вращения на элементарный угол поворота тела:

$$A = \int_{0}^{\varphi} M_z d\varphi$$

При этом, если $M_z = const$, то

$$A = M_z \varphi$$

Мощностью называется отношение элементарной работы силы к элементарному промежутку времени, характеризующее быстроту приращения работы силы.

При поступательном движении мощность силы равна произведению касательной составляющей силы на скорость тела

$$N = F_\tau V$$

При вращательном движении произведению момента силы относительно оси вращения тела на его угловую скорость.

$$N = M_{вр} \omega$$

Таким образом, если тело не совершает перемещения, то работа не совершается, однако среди ученых есть мнения другого характера.

Лекция 4

1. Теоремы динамики.
2. Меры действия сил
3. Теорема об изменении количества движения материальной точки
4. Кинетическая энергия точки и системы точек

Теоремы динамики

Механическое движение обладает двумя, не противоречащими друг другу, мерами – количеством движения и кинетической энергией.

Если механическое движение передается от тела к телу в форме механического движения, то мерой является количество движения.

$$m\overline{V}$$

Если же оно передается таким образом, что исчезает, превращается в другие формы движения, то мерой является кинетическая энергия

$$\frac{mV^2}{2},$$

как половина произведения массы тела на квадрат его скорости.

Меры действия сил

Мерами действия силы являются импульс силы и работа силы. Наличие этих двух мер обусловлено тем, что силы действуют и во времени и в пространстве, поскольку они возникают в результате взаимодействия материальных тел.

Импульсом силы, измеряют действие силы за некоторый промежуток времени. Различают элементарный импульс силы, и импульс силы за конечный промежуток времени.

Элементарным импульсом силы называется векторная величина, равная произведению вектора силы на элементарный (то есть бесконечно малый) прмежуток времени:

$$d\overline{S} = \overline{F}dt\,.$$

Импульсом силы за конечный промежуток времени называется векторная величина, равная интегралу по времени от элементарного импульса силы.

$$\overline{S} = \int_0^t \overline{F}dt$$

Импульс постоянной силы равен произведению силы на время и направлен по вектору силы, а импульс переменной силы определяют по его проекциям на оси координат:

$$S_x = \int_0^t F_x dt \ S_y = \int_0^t F_y dt \ S_z = \int_0^t F_z dt$$

$$S = \sqrt{S_x + S_y + S_z}$$

Из этих формул следует, что по ним непосредственно можно вычислить импульсы сил, зависящих от времени или постоянных. Если же сила зависит от расстояния или скорости, то предварительно необходимо найти уравнение движения точки, затем выразить проекции силы на оси координат через время и только после этого по приведенным формулам определить проекции импульса на оси координат.

Теорема об изменении количества движения материальной точки

Настоящая теорема имеет <u>две формы – дифференциальную и интегральную</u>, то есть:

1. Производная по времени от количества движения материальной равна геометрической сумме сил, действующих на точку.

$$\frac{d(mV)}{dt} = \sum F_k$$

2. Изменение количества движения точки за некоторый промежуток времени равно геометрической сумме импульсов сил, действующих на точку, за тот же промежуток времени.

$$mV_1 - mV_0 = \sum S_k$$

где V_1, V_0 – соответственно конечная и начальная скорости объекта движения.

Теорема об изменении кинетической энергии точки состоит в том, что изменение кинетической энергии материальной точки на некотором ее перемещении равно сумме работ всех сил действующих на точку, на том же перемещении.

$$\frac{mV_1^2}{2} - \frac{mV_0^2}{2} = \sum A_k$$

<u>Кинетическая энергия тела при поступательном движении</u> равна половине произведения массы тела на квадрат его скорости.

$$T = \frac{mV_c^2}{2}$$

<u>Кинетическая энергия тела при вращательном движении</u> равна половине произведения его момента инерции относительно оси вращения на квадрат его угловой скорости:

$$T = \frac{I_z \omega^2}{2}$$

Кинетическая энергия при плоскопараллельном движении равна сумме кинетических энергий поступательного движения тела со скоростью его центра масс и вращательного движения тела вокруг оси, проходящей через центр масс тела.

$$T = \frac{mV_c^2}{2} + \frac{I_z \omega^2}{2}$$

Вращательное движение твердого тела вокруг неподвижной оси описывается уравнением:

$$I_z \ddot{\varphi} = \sum m_z (F_e^k)$$

Смысл здесь заключается в том, что произведение момента инерции тела относительно оси вращения на его угловое ускорение равно сумме моментов внешних сил, действующих на тело, относительно оси его вращения.

Кинетическая энергия точки и системы точек

Введение кинетического момента для описания движения механической системы наряду с такой характеристикой, как количество движения, даёт возможность более многогранного изучения механического «поведения» систем. Тем не менее, даже совместное использование этих двух характеристик эффективно далеко не всегда, например, в случае, когда движение механической системы происходит за счёт внутренних сил. Чтобы убедиться в этом, достаточно рассмотреть следующий простой пример. Пусть два одинаковых тела, соединенных пружиной, находятся на гладкой горизонтальной поверхности. Растянем пружину и отпустим грузы, не сообщая им начальной скорости. Под действием внутренних сил они начнут совершать прямолинейные колебания, такие, что скорости тел в каждый момент времени будут равны между собой и противоположно направлены (тела в данном случае перемещаются поступательно). Количество движения системы и ее кинетический момент относительно любой неподвижной точки тождественно равны нулю, хотя система находится в движении; таким образом, в данном случае эти две величины никак не характеризуют движение системы. Поэтому в механике вводится еще одна мера механического движения, называемая кинетической. Кинетической энергией материальной точки называется скалярная величина, равная половине произведения массы точки на квадрат ее скорости.

Лекция 5

1. Понятие о силовом поле.
2. Потенциальное силовое поле и силовая функция.
3. Работа силы на конечном перемещении в потенциальном силовом поле.
4. Поверхности равного уровня и их свойства.
5. Потенциальная энергия.
6. Закон сохранения механической энергии.

Понятие о силовом поле

Силовым полем называется часть пространства, в которой на материальную точку, действует сила поля, зависящая от положения точки в этом пространстве (рисунок 1):

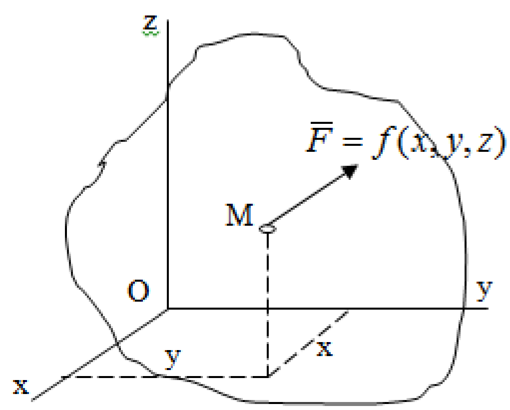

Рисунок 1 – Точка и силовое поле

Таким образом,

$$\overline{F} = f(x,y,z),$$

или

$$F_x = f_1(x,y,z),$$
$$F_y = f_2(x,y,z),$$
$$F_z = f_3(x,y,z).$$

Силовые поля делятся на стационарные и не стационарные. Стационарным называется такое силовое поле, в котором сила поля не зависит от времени, а не стационарным – такое, в котором сила зависит от времени.

Потенциальное силовое поле и силовая функция

В свою очередь стационарные поля делятся на потенциальные и не потенциальные. Стационарное поле называется потенциальным, если в любой его точке существует некоторая силовая функция *U*, зависящая от положения точки в поле, частные производные от которой по координатам точки равны проекциям силы поля на координатные оси:

$$U = f(x,y,z),$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = F_x,\ \frac{\partial U}{\partial y} = F_y,\ \frac{\partial U}{\partial z} = F_z. \tag{1}$$

Соответственно, не потенциальное поле, подразумевает неравномерное распределение силовой функции.

Работа силы на конечном перемещении в потенциальном силовом поле

Для уяснения физического значения силовой функции обратимся к известной аналитической формуле элементарной работы силы:

$$dA = F_x dx + F_y dy + F_z dz.$$

Подставим в это равенство значения проекций силы поля, выраженные через силовую функцию (1) и получим

$$dA = \frac{\partial U}{\partial x} dz + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz = dU. \tag{2}$$

Таким образом, мы видим, что смысл силовой функции состоит в том, что ее полный дифференциал есть элементарная работа силы потенциального силового поля ($dA = dU$).

Стало быть, работу силы потенциального силового поля на некотором конечном перемещении точки ее приложения M_0M можно выразить через силовую функцию U. Обозначим значение силовой функции в начальной точке перемещения ($M_0 - U_0$), а в конечной точке перемещения ($M - U$). Тогда

$$A_{(M_0M)} = \int_{M_0}^{M} dA = \int_{M_0}^{M} dU = \int_{U_0}^{U} dU = U - U_0.$$

Итак, работа силы потенциального силового поля на некотором перемещении M_0M точки ее приложения равна разности значений силовой функции в конечной и начальной точках этого перемещения:

$$A_{(M_0M)} = U - U_0. \tag{3}$$

Особо заметим, что если начальная и конечная точка перемещения совпадают, то работа силы поля на таком перемещении точки ее приложения будет равна нулю:

$$A_{(M_0M_0)} = U_0 - U_0 = 0.$$

Также из формулы (3) следует также, что работа силы потенциального силового поля не зависит от траектории точки ее приложения, а зависит только от начального и конечного положения этой точки. силы, обладающие такими свойствами называются потенциальными. Примерами таких сил служат сила тяжести и сила упругости.

Поверхности равного уровня и их свойства

Поверхностями равного уровня (или сокращенно поверхностями уровня) называются поверхности, проходящие через точки поля с одинаковыми значениями силовой функции.

Поверхности уровня обладают следующими четырьмя свойствами:

1. Если начальная и конечная точки перемещения точки приложения силы находятся на одной поверхности уровня, то работа силы поля на этом перемещении рана нулю.

Действительно, при перемещении точки приложения силы F поля из начального положения M_0 в конечное положение M по любой траектории, которая расположены на одной поверхности уровня U = C (Рисунок 2),

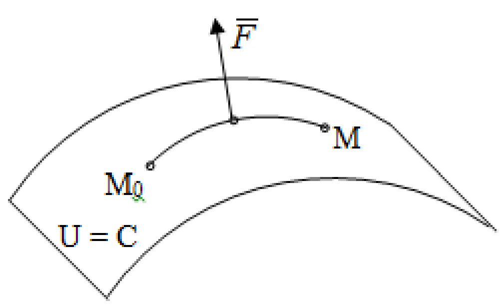

Рисунок 2 – Начальное и конечное перемещение точки M

сила произведет работу

$$A_{(M_0M)} = U - U_0. = C - C = 0.$$

2. Сила потенциального силового поля всегда перпендикулярна к поверхности уровня (Рисунок 3).

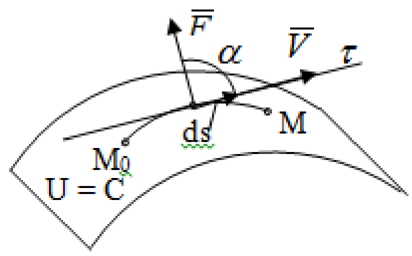

Рисунок 3 – Перпендикулярность силового поля и поверхности

Действительно, при перемещении точки приложения силы по поверхности уровня из положения M_0 в положение M работа силы на этом перемещении будет равна нулю (в силу первого свойства поверхностей уровня). Отсюда следует и элементарная работа силы dA на перемещении ds, которое расположено на касательной к поверхности уровня, тоже будет равна нулю, то есть $dA = Fds\cos\alpha = 0$. Поскольку F и ds не равны нулю, то нулю будет равен косинус угла альфа. Следовательно угол альфа равен 90^0, то есть сила F расположена перпендикулярно к поверхности уровня

3. Сила потенциального силового поля всегда направлена в сторону больших значений силовой функции.

Пусть свободная материальная точка под действием силы $\boldsymbol{F}$ потенциального силового поля перемещается по направлению силы из положения M_0, расположенного на поверхности уровня со значениями силовой функции $U = C_0$, в положение M, расположенное на другой поверхности уровня со значениями силовой функции $U = C_1$ (Рисунок 4).

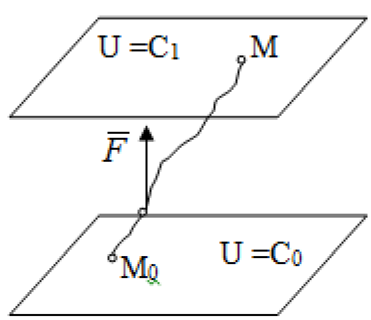

Рисунок 4 – Направление силы потенциального поля

Работа силы поля на этом перемещении будет равна разности значений силовой функции в конечной и начальной точках перемещения (3) и будет положительной:

$$A_{(M_0 M)} = U - U_0 = C_1 - C_0 \succ 0.$$

Следовательно $C_1 > C_0$ и сила действительно направлена в сторону больших значений силовой функции.

4. Сила потенциального силового поля больше там, где поверхности уровня расположены ближе друг к другу.

Справедливость этого свойства вытекает из того, что работа силы поля на перемещении точки ее приложения с одной поверхности уровня на другую, соседнюю поверхность уровня, будет одна и та же (так как она равна разности значений силовой функции на этих поверхностях уровней). А посему, там где меньше расстояние между поверхностями уровней, там больше сила (и наоборот, где больше расстояние, там меньше сила). Работа то равна произведению силы на перемещение точки ее приложения, а в данном случае на расстояние между поверхностями уровней.

Потенциальная энергия

В случае потенциального силового поля наряду с силовой функцией *U* в каждой точке поля, используют потенциальную энергию *П*, которая характеризует запас энергии в данной точке поля.

Потенциальной энергией материальной точки в некоторой точке М потенциального силового поля называется работа, которую совершает сила поля, действующая на эту материальную точку, при перемещении ее из данной точки М в некоторую нулевую точку M_0 (Рисунок 5).

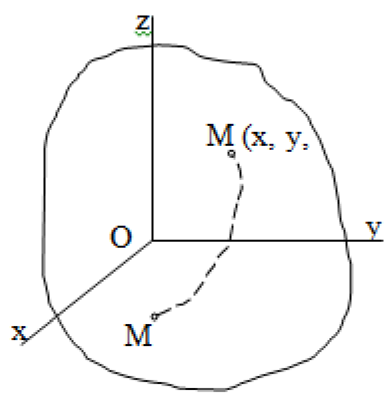

Рисунок 5 – Работа и потенциальная энергия

Таким образом, если обозначить значения силовой функции и потенциальной энергии в *нулевой точке* M_0 поля (рис. 4) соответственно U_0 и $П_0$, а в точке М – *U* и *П*, то согласно определения потенциальной энергии будем иметь:

$$\Pi = A_{(MM_0)} = U_0 - U. \tag{4}$$

Из определения следует, что потенциальная энергия *П*, также как и силовая функция *U*, зависит от координат *x, y, z* точки М. Будем в дальнейшем считать нулевые точки для функций *П*(*x*, *y*, *z*) и *U*(*x, y, z)* совпадающими. Тогда U_0 = 0 и формула (4) получит вид:

$$\Pi = -U, \tag{5}$$

<u>То есть потенциальная энергия в любой точке силового поля равна значению силовой функции в этой точке поля, взятому с обратным знаком.</u>

Отсюда следует, что в случае потенциального силового поля вместо силовой функции можно пользоваться потенциальной энергией. Так , работу потенциальной силы вычислять не по равенству (3), а по формуле (6)

$$A_{(M_0 M)} = \Pi_0 - \Pi. \tag{6}$$

Так , работу потенциальной силы вычислять не по равенству (3), а по формуле (6).

Закон сохранения механической энергии

Механической энергией называется сумма потенциальной и кинетической энергий материальной точки (системы).

Пусть материальная точка движется в потенциальном силовом поле под действием потенциальной силы из положения M_0, где ее скорость V_0, в положение М, где ее скорость V_1. Согласно теоремы, об изменении кинетической энергии точки:

$$\frac{mV_1^2}{2} - \frac{mV_0^2}{2} = A_{(M_0 M)}.$$

Тогда согласно равенству (6)

$$A_{(M_0 M)} = \Pi_0 - \Pi.$$

Тогда,

$$\frac{mV_1^2}{2} - \frac{mV_0^2}{2} = \Pi_0 - \Pi_1,$$

откуда

$$\frac{mV_1^2}{2} + \Pi_1 = \frac{mV_0^2}{2} + \Pi_0 = const. \tag{7}$$

Равенство (7) выражает <u>закон сохранения механической энергии для материальной точки</u>: при движении точки в потенциальном силовом поле под действием потенциальной <u>силы сумма ее кинетической и потенциальной энергий есть величина постоянная.</u>

Полученный результат можно распространить на все точки механической системы, находящейся в потенциальном силовом поле под действием потенциальных внешних и внутренних сил и преобразовать уравнение (7) к виду

$$T_1 + \Pi_1 = T_0 + \Pi_0 = const. \tag{8}$$

Следовательно, при движении под действием потенциальных сил сумма кинетической и потенциальной энергий механической системы есть величина постоянная. В этом и состоит закон сохранения механической энергии системы, который является частным случаем общего физического закона сохранения энергии. Величина ($T + \Pi$) называется полной механической энергией системы.

Если на механическую систему кроме потенциальных сил будут действовать и не потенциальные силы, например силы трения, то полная механическая энергия системы при ее движении будет убывать, преобразуясь в другие формы энергии, например в тепловую.

Все значение рассмотренного закона выявляется при рассмотрении его в связи с общим физическим законом сохранения энергии. При решении практико-механических задач можно во всех случаях пользоваться непосредственно теоремой об изменении кинетической энергии системы.

Контрольные вопросы к разделу «Динамика»

1. Что называется динамикой?
2 .Что понимается под инерцией тел?
3. Что является мерой инерции тела при поступательном движении?
4. Что является мерой инерции тела при вращательном движении?
5. Какими моделями представляют твердые тела в динамике?
6. Что понимается под материальной точкой?
7. Что понимается под механической системой?
8. Какие тела можно принимать за материальные точки?
9. Какие положения лежат в основе динамики точки?
10. В чем состоит закон инерции?
11. В чем состоит второй (основной) закон динамики точки?
12. В чем состоит закон равенства действия и противодействия?
13. Какая система отсчета называется инерциальной?
14. Какими дифференциальными уравнениями описывается движение материальной точки в декартовой системе координат?
15. Какими дифференциальными уравнениями описывается движение точки в естественной системе координат?
16. В чем состоит и как решается первая основная задача динамики точки?
17. В чем состоит вторая основная задача динамики точки?
18. В какой последовательности решают вторую основную задачу динамики точки?
19. Можно ли методы динамики, основанные на законах Ньютона и применяемые для изучения абсолютного движения точки, использовать для изучения ее относительного движения?
20. В чем заключается принцип относительности классической механики?
21. Что такое относительное равновесие точки и каковы его условия?
22. Что является мерами механического движения точки?
23. Что является мерами действия силы?
24. Что измеряют импульсом силы и работой силы?
25. Какая связь существует между мерами действия силы и мерами механического движения?
26. Какие импульсы силы различают и чему они равны?
27. Как определяется работа силы на конечном перемещении точки ее приложения?
28. Действие какой составляющей силы оценивает ее работа?
29. Когда применяют графический способ вычисления работы силы?
30. Чему равны работы сил тяжести и упругости?

Список литературы

1.Антонец Д.А. Теоретическая механика в конспектах лекций. Иркутск: изд-во ИрГСХА, 2003. –68 с.
2. Бутенин Н.В. и др. Курс теоретической механики: Учеб.пособие для студ-ов вузов по техн. спец.:В 2-х т./ Н.В.Бутенин, Я.Л.Лунц, Д.Р.Меркин. СПб.:Лань.-5-е изд., испр. 2008.-729 с.
3. Буторин Л.В., Бусыгина Е.Б. Теоретическая механика. Учебно-практическое пособие. – М., МГУ ТУ, 2004.
4. Григорьев А.Ю.Теоретическая механика. Динамика:Метод.указания кпрактической и самостоятельной работестудентов всех спец.очной и заочнойформ обучения.–СПб.: СПбГУНиПТ, 2009. –68 с.
5. Исаак Ньютон. Математические начала натуральной философии. - math.ru/ lib/files/ djvu/ klassik/ newton.djvu Перевод с латинского А. Н. Крылова. Под ред. Л. С. Поллака. М.: Наука. 1989.
6. КГУ - мехмат - www.ksu.ru/tm2005/
7. Мещерский И.В. Задачи по теоретической механике: Учеб. пособие для студ. вузов, обуч.по техн. спец./И.В.Мещерский; Под ред.В.А.Пальмова,Д.Д.Меркина.-45-е изд., стер.- СПб. и др.: Лань, 2009.-447 с. 2.
8. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики. – М.: Высшая школа, 2001г. - 98с.
9. Теоретическая механика. Терминология. Буквенные обозначения величин: Сборник рекомендуемых терминов. Вып. 102. М.: Наука, 2007. – 48с.
10. Яблонский А.А., Никифорова В.Н. Курс теоретической механики. М. “Лань”, 2000г.- 90 с.
11. International Engineering Mechanics Contest - theor-mech.by.ru/

Для заметок

Учебное пособие

Шистеев Алексей Валерьевич

КУРС ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

Лицензия на издательскую деятельность
ЛР № 070444 от 11.03.98 г.
Подписано в печать 25.03.2019 г. Формат 60 х 84 / 16
Усл. печ. л. 7,75. Тираж 50 экз.

Издательство
Иркутского государственного аграрного университета имени А.А. Ежевского
664038, Иркутская обл., Иркутский р-н.,
п. Молодежный