МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ИРКУТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. А.А.ЕЖЕВСКОГО

КОЛЛЕДЖ АВТОМОБИЛЬНОГО ТРАНСПОРТА И АГРОТЕХНОЛОГИЙ

Васильева С.Е.

Математический анализ

(часть 1)

Учебное пособие, предназначено для студентов очной и заочной формы обучения направления подготовки 21.02.04 –Землеустройство, колледжа автомобильного транспорта и агротехнологий ФГБОУ ВО «Иркутский государственный аграрный университет имени А.А. Ежевского»

Молодежный -2021

УДК

Автор ст. преподаватель Васильева С.Е.

Рецензенты: доцент кафедры математики Иркутского ГАУ им. А.А. Ежевского Т.А. Шумай

Компьютерный набор и верстка: ст. преподаватель Васильева С.Е

Математический анализ (часть 1) Учебное пособие, предназначено для студентов очной и заочной формы обучения направления подготовки 21.02.04 –Землеустройство, колледжа автомобильного транспорта и агротехнологий ФГБОУ ВО «Иркутский государственный аграрный университет имени А.А. Ежевского» /Иркут. гос. аграр.. ун-т им. А.А. Ежевского; сост. С.Е. Васильева.-Молодежный: Изд-во ИрГАУ, 2021.- 87 с. – Текст электронный.

Настоящее пособие представляет собой систематизированную подборку примеров и задач, где рассмотрены основные вопросы математического анализа. В пособии приводятся основные определения и соответствующие формулы. Далее излагаются решения типовых примеров, затем следуют задачи для самостоятельного решения.

Пособие предназначено для студентов очной и заочной формы обучения направления подготовки 21.02.04 –Землеустройство, колледжа автомобильного транспорта и агротехнологий ФГБОУ ВО «Иркутский государственный аграрный университет имени А.А. Ежевского» Кроме того, она может быть полезна студентам технических специальностей.

1. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

1.1 Основные понятия

Комплексным числом z называется выражение вида $z = x + iy$, где x и y – действительные числа, а i – так называемая *мнимая единица,* $i^2 = -1$.

Если x=0, то число $0 + iy = iy$ называется *чисто мнимым*; если y=0, то число $x + i0 = x$ отождествляется с действительным числом x, а это означает, что множество R всех действительных чисел является подмножеством множества C всех комплексных чисел, т.е. $R \subset C$.

Число x называется *действительной частью* комплексного числа z и обозначается $x = \operatorname{Re} z$, а у – *мнимой частью* z, $y = \operatorname{Im} z$.

Два комплексных числа $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ называются *равными* $(z_1 = z_2)$ тогда и только тогда, когда равны их действительные части и равны их мнимые части: $x_1 = x_2, y_1 = y_2$. В частности, комплексное число $z = x + iy$ равно нулю тогда и только тогда, когда $x = y = 0$. Понятие «больше» и «меньше» для комплексных чисел не вводится.

Два комплексных числа $z = x + iy$ и $\overline{z} = x - iy$, отличающихся лишь знаком мнимой части, называются *сопряженными.*

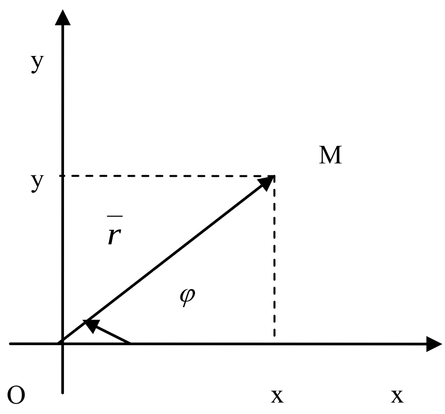
Пример 1. Для комплексного числа $z = 5 - \sqrt{7}i$, найти $\operatorname{Re} z$ и $\operatorname{Im} z$.

Решение: $\operatorname{Re} z = 5, \qquad \operatorname{Im} z = \sqrt{7}$.

Пример 2. Среди комплексных чисел $z_1 = 2 - i,\ \ z_2 = -3i,\ z_3 = \sqrt{3} + i,$ $z_4 = 2 + i,\ z_5 = 3i$, найти сопряженные.

Решение: Числа z_1 и z_4, z_2 и z_5 отличаются лишь знаком мнимой части, значит они сопряженные $z_1 = \overline{z_4},\ z_2 = \overline{z_5}$.

1.2. Геометрическое изображение комплексных чисел



Всякое комплексное число $z = x + iy$ можно изобразить точкой $M(x; y)$ плоскости Oxy такой, что $x = \operatorname{Re} z, y = \operatorname{Im} z$. И, наоборот, каждую точку $M(x; y)$ координатной плоскости можно рассматривать как образ комплексного числа $z = x + iy$.

Плоскость, на которой изображаются комплексные числа называется *комплексной* плоскостью (ее также обозначают C). Ось абсцисс называется *действительной осью*, а ось ординат – *мнимой.*

Комплексное число $z = x + iy$ можно изображать и с помощью радиус-вектора $\bar{r} = \overline{OM} = (x; y)$.

Длина вектора $\bar{r}$, изображающего комплексное число z, называется *модулем* этого числа и обозначается $|z|$ или r. Модуль $r = |z|$ однозначно определяется по формуле $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Величина угла между положительным направлением действительной оси и вектором $\bar{r}$, изображающим комплексное число, называется *аргументом* этого числа, обозначается $\operatorname{Arg} z$.

Аргумент комплексного числа $z \neq 0$ величина многозначная: $\operatorname{Arg} z = \arg z + 2k\pi, k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, где $\arg z = \varphi$ – *главное значение аргумента*, заключенное в промежутке $(-\pi; \pi]$, т.е. $-\pi < \arg z \leq \pi$. Аргумент комплексного числа $z = 0 = 0 + i0$ не определен.

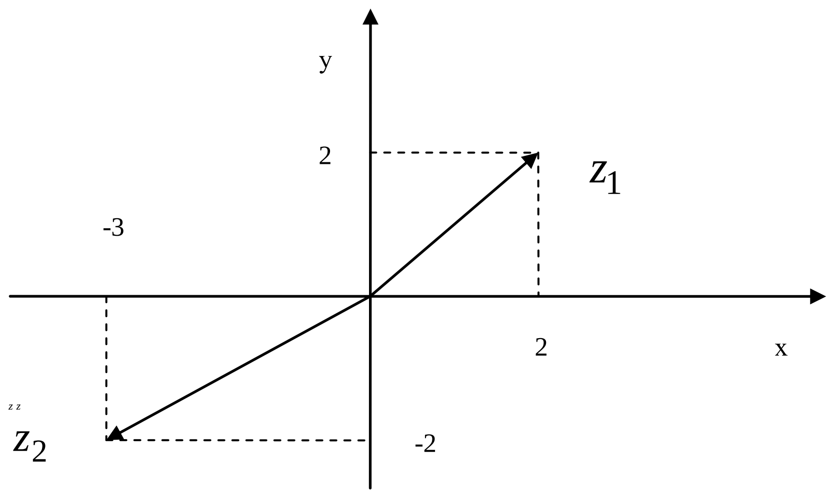
Замечание. В качестве значения аргумента можно брать величину принадлежащую промежутку $[0; 2\pi)$.

Аргумент φ определяется из формул $\cos\varphi = \frac{x}{r}, \sin\varphi = \frac{y}{r}$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Аргумент z можно найти, используя формулу $tg\varphi = \frac{y}{x}$, т.к. $-\pi < \arg z \le \pi$,то из формулы $tg\varphi = \frac{y}{x}$ находим

$$\varphi = \arg z = \begin{cases} arctg\frac{y}{x}, \text{для внутренних тточе I, IV четвертей,} \\ arctg\frac{y}{x} + \pi, \text{для внутренних тточе II четверти,} \\ arctg\frac{y}{x} - \pi, \text{для внутренних тточе III четверти.} \end{cases}$$

Пример 3. Построить комплексные числа $z_1 = 2 + 2i,\ z_2 = -3 - 2i$. Найти $|z|$ и $\arg z$.

Решение:



Модули находим по формуле $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

$$|z_1| = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}, \quad |z_2| = \sqrt{(-3)^2 + (-2)^2} = \sqrt{13}.$$

Т.к. z_1 находится в I четверти $x_1 = 2 > 0, y_1 = 2 > 0$, то аргумент φ_1 находим по формуле $\varphi_1 = \arg z_1 = arctg\frac{2}{2} = arctg1 = \frac{\pi}{4}$.

z_2 находится в III четверти $x_2 = -3 < 0, y_2 = -2 < 0$, то аргумент φ_2 находим по формуле $\varphi_2 = \arg z_2 = arctg\dfrac{-2}{-3} - \pi = arctg\dfrac{2}{3} - \pi$.

1.3. Формы записи комплексных чисел

Запись числа z в виде $z = x + iy$ называют *алгебраической формой* комплексного числа.

Модуль r и аргумент φ комплексного числа можно рассматривать как полярные координаты вектора $\bar{r} = \overline{OM}$, изображающего комплексное число $z = x + iy$. Тогда получаем $x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi$. Следовательно, комплексное число $z = x + iy$ можно записать в виде $z = r\cos\varphi + ir\sin\varphi$ или $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Такая запись комплексного числа называется *тригонометрической формой*.

Запись числа z в виде $z = re^{i\varphi}$ или $z = |z|e^{i\arg z}$ называют *показательной формой (или экспоненциальной)* комплексного числа.

Пример 4. Записать комплексное число $z = -1 + i\sqrt{3}$ в тригонометрической и показательной формах.

Решение: Чтобы записать комплексное число в тригонометрической и показательной форме необходимо найти его модуль и аргумент:

$$|z| = \sqrt{(-1)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{4} = 2,$$

z находится в II четверти $x = -1 < 0, y = \sqrt{3} > 0$, то аргумент φ находим по формуле $\varphi = \arg z = arctg\dfrac{\sqrt{3}}{-1} + \pi = -\dfrac{\pi}{3} + \pi = \dfrac{2\pi}{3}$.

Тригонометрическая форма: $z = 2\left(\cos\dfrac{2\pi}{3} + i\sin\dfrac{2\pi}{3}\right)$.

Показательная форма: $z = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

1.4. Действия над комплексными числами

Основные действия над комплексными числами $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$, заданные в *алгебраической форме*, определяются следующими равенствами:

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2),$$
$$z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + y_1x_2),$$
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{\overline{z_2}}{\overline{z_2}} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \cdot \frac{y_1x_2 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}, \text{ где } z_2 \neq 0.$$

Пример 5. Найти $z_1 + z_2,\ z_1 - z_2,\ z_1 \cdot z_2,\ \dfrac{z_1}{z_2}$, если $z_1 = 1 + 2i,\ z_2 = 2 - i.$

Решение:

$$z_1 + z_2 = (1 + 2i) + (2 - i) = (1 + 2) + i(2 - 1) = 3 + i;$$
$$z_1 - z_2 = (1 + 2i) - (2 - i) = (1 - 2) + i(2 - (-1)) = -1 + 3i;$$
$$z_1 \cdot z_2 = (1 + 2i) \cdot (2 - i) = (1 \cdot 2 - 2 \cdot (-1)) + i(1 \cdot (-1) + 2 \cdot 2) = 4 + 3i;$$
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(1 + 2i)(2 + i)}{(2 - i)(2 + i)} = \frac{1 \cdot 2 + 2 \cdot (-1)}{2^2 + (-1)^2} + i \cdot \frac{2 \cdot 2 - 1 \cdot (-1)}{2^2 + (-1)^2} = \frac{5i}{5} = i$$

При умножении комплексных чисел $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ и $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$, заданных в *тригонометрической форме* их модули перемножаются, а аргументы складываются, т.е.

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)).$$

Пример 6. Выполнить умножение

$$\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) \cdot \frac{1}{6}\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right).$$

Решение:

$$\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)\cdot\frac{1}{6}\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)=$$

$$=1\cdot\frac{1}{6}\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{5\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{5\pi}{6}\right)\right)=\frac{1}{6}\left(\cos\frac{9\pi}{6}+i\sin\frac{9\pi}{6}\right)=$$

$$=\frac{1}{6}\left(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}\right)=\frac{1}{6}(0+i(-1))=-\frac{1}{6}i.$$

Формула Муавра для возведения комплексного числа $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ в натуральную степень

$$z^n=(r(\cos\varphi+i\sin\varphi))^n=r^n\cdot(\cos n\varphi+i\sin n\varphi).$$

Пример 7. Найти $\left(-1-i\sqrt{3}\right)^{15}$.

Решение: Запишем число $z=-1-i\sqrt{3}$ в тригонометрической форме:

$$|z|=\sqrt{(-1)^2+\left(-\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{4}=2,$$

$$\varphi=\arg z=arctg\frac{-\sqrt{3}}{-1}-\pi=\frac{\pi}{3}-\pi=-\frac{2\pi}{3}.$$

По формуле Муавра имеем

$$\left(-1-i\sqrt{3}\right)^{15}=\left[2\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right)\right]^{15}=$$

$$=2^{15}\cdot(\cos(-10\pi)+i\sin(-10\pi))=2^{15}(1+0i)=2^{15}=32768.$$

При делении комплексных чисел $z_1=r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)$ и $z_2=r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)$, заданных в *тригонометрической форме* их модули, соответственно делятся, а аргументы, соответственно вычитаются, т.е.

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2)).$$

Пример 8. Выполнить деление

$$4\left(\cos\frac{5\pi}{12}+i\sin\frac{5\pi}{12}\right):\frac{1}{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right).$$

Решение:

$$4\left(\cos\frac{5\pi}{12}+i\sin\frac{5\pi}{12}\right):\frac{1}{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right)=$$

$$=\frac{4}{1/2}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{12}-\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{12}-\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right)\right)=8\left(\cos\frac{6\pi}{12}+i\sin\frac{6\pi}{12}\right)=$$

$$=8\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)=8(0+i)=8i.$$

Корень n-ой степени из комплексного числа имеет n различных значений, которые находятся по формуле

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r(\cos\varphi+i\sin\varphi)}=\sqrt[n]{r}\cdot\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right), \text{где } k=\overline{0,n-1}$$

Пример 9. Найти все значения корня $\sqrt[3]{-i}$.

Решение: Запишем число $z=-i$ в тригонометрической форме:

$$|z|=\sqrt{0^2+(-1)^2}=1,\quad \varphi=\arg z=-\frac{\pi}{2},$$

$$z=\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right).$$

$$\sqrt[3]{z}=\sqrt[3]{\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)}=\cos\frac{-\frac{\pi}{2}+2\pi k}{3}+i\sin\frac{-\frac{\pi}{2}+2\pi k}{3},\quad k=0,1,2.$$

Пологая $k=0,1,2,$ получим

$$k=0,\qquad z_0=\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2},$$

$$k=1,\qquad z_1=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}=i,$$

$$k=2,\qquad z_2=\cos\frac{7\pi}{6}+i\sin\frac{7\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}.$$

Пример 10. Даны два комплексных числа $z_1=1-\frac{7}{2}i;\quad z_2=-7-2i$.

Требуется а) найти значение выражения $\left(\dfrac{1-\frac{7}{2}i}{-7-2i}\right)^{-4}$ в алгебраической форме, б) для числа $z=2-2\sqrt{3}i$ найти тригонометрическую форму, найти z^{20}, найти корни уравнения $w^3+z=0$.

Решение.

а) Очевидно, справедливо следующее преобразование:

$$\left(\frac{1-\frac{7}{2}i}{-7-2i}\right)^{-4}=\left(\frac{2-7i}{-14-4i}\right)^{-4}=\left(\frac{-14-4i}{2-7i}\right)^{4}=16\left(\frac{-7-2i}{2-7i}\right)^{4}$$

Далее производим деление двух комплексных чисел:

$$\frac{-7-2i}{2-7i}=\frac{(-7-2i)(2+7i)}{(2-7i)(2+7i)}=\frac{-14-49i-4i+14}{4+49}=\frac{-53i}{53}=-i.$$

Получаем значение заданного выражения: $16(-i)^4=16i^4=16$.

б) Число $z=2-2\sqrt{3}i$ представим в виде $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, где

$$r=|z|=\sqrt{4+12}=4;\qquad \varphi=arctg\frac{b}{a}=arctg\left(-\sqrt{3}\right)=-60^0$$

Тогда $z=4(\cos 60^0-i\sin 60^0)$.

Для нахождения z^{20} воспльзуемся формулой Муавра.

$$z^{20} = 4^{20}(\cos 1200^0 - i\sin 1200^0) = 4^{20}(\cos(3\cdot 2\pi + 120^0) - i\sin(3\cdot 2\pi + 120^0)) =$$

$$= 4^{20}(\cos 120^0 - i\sin 120^0) = -4^{20}\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right).$$

Если $w^3 + z = 0$, то $w = \sqrt[3]{z}$

$$\sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{3} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{3}\right) =$$

$$= \sqrt[3]{4}\left(\cos\frac{-60^0 + 2\pi k}{3} + i\sin\frac{-60^0 + 2\pi k}{3}\right); \quad k \in Z.$$

Задания для самостоятельной работы.

1. Построить комплексные числа. Найти $|z|$ и $\arg z$.

$а)$ $z = 2 - i;$

$б)$ $z = -3 + i;$

$в)$ $z = -5i;$

$г)$ $z = -1 + i;$

$д)$ $z = -6.$

2. Записать комплексные числа в тригонометрической и показательной формах.

$а)$ $z = 2 + 4i;$

$б)$ $z = \sqrt{3} + i;$

$в)$ $z = 2006;$

$г)$ $z = 2\cos\frac{\pi}{3} - 2i\sin\frac{\pi}{3};$

$д)$ $z = 12i.$

3. Найти $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$, $z_1 \cdot z_2$, $\dfrac{z_1}{z_2}$, если

$а)\ z_1 = -2 + 5i,\ z_2 = 3 - 4i;$

$б)\ z_1 = 5 + 2\sqrt{6}i,\ z_2 = 5 - 2\sqrt{6}i;$

$в)\ z_1 = 5 - 3i,\ z_2 = -1 + 6i;$

$г)\ z_1 = 1 + 2i,\ z_2 = -4 + 7i;$

$д)\ z_1 = 2 + 2i,\ z_2 = 1 - i.$

4. Выполнить умножение

$$а)\ 8\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)\cdot\frac{1}{4}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right);$$

$$б)\ \sqrt{3}\left(\cos 92^\circ + i\sin 92^\circ\right)\cdot\sqrt{6}\left(\cos 88^\circ + i\sin 88^\circ\right).$$

5. Выполнить деление

$$а)\ 4\left(\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right) : 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right);$$

$$б)\ \sqrt{6}\left(\cos 160^\circ + i\sin 160^\circ\right) : \sqrt{3}\left(\cos 40^\circ + i\sin 40^\circ\right).$$

6. Возвести в степень

$а)\ \left(-1 + i\sqrt{3}\right)^9;$

$б)\ (1 + i)^{10};$

$в)\ (2 + i2)^5.$

7. Извлечь корни

$а)\ \sqrt[3]{-8i};$

$б)\ \sqrt[3]{-125};$

$в)\ \sqrt[4]{-8-8\sqrt{3}i}.$

Контрольная работа 1

1) Найти значение выражения.

2) Даны комплексные числа z_1 и z_2. Вычислить: а) $2z_1 \pm 3z_2$; б) $\bar{z}_1 \cdot (-z_2)$;

в) $\dfrac{z_1}{z_2}$; г) $(z_1)^6$; д) $\sqrt[3]{z_1}$; е) представить z_1 и z_2 в различных формах записи комплексных чисел.

В-1 1) $i^{15} - 5i^2 + 3i^4 - i + 17$. 2) $z_1 = -3 + 3\sqrt{3}i$, $z_2 = i$.	**В-2** 1) $4i^{13} - i^2 - 3i^5 + 2i + 1$. 2) $z_1 = 4\sqrt{3} + 4i,\ z_2 = 2i$.	**В-3** 1) $-i^{12} - 5i^2 + i^5 - i + 10$. 2) $z_1 = \frac{\sqrt{3}}{8} + \frac{i}{8},\ z_2 = -3i$.
В-4 1) $i^{12} - 7i^9 - i^6 + 6i + 5$. 2) $z_1 = \sqrt{2} + \sqrt{2}i,\ z_2 = -6i$.	**В-5** 1. $-2i^{24} - 5i^{15} + i^9 + i$. 2) $z_1 = \sqrt{3} + i,\ z_2 = \sqrt{2}i$.	**В-6** 1) $-8i^{23} + 2i^{19} - i^3 + 6i - 4$ 2) $z_1 = \sqrt{3} - i,\ z_2 = 4i$.
В-7 1. $-5i^{33} - 4i^{19} + 3i^2 - 8$. 2) $z_1 = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{i}{4},\ z_2 = -3i$.	**В-8** 1) $-6i^{45} - 5i^{22} + i^4 + 9i$ 2) $z_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i,\ z_2 = -5i$.	**В-9** 1) $-14i^{28} - 7i^3 + 2i^{15} + 8$. 2) $z_1 = \sqrt{2} + \sqrt{2}i,\ z_2 = 6i$.
В-10 1) $-i^{35} + 9i^{17} - 8i^{10} + 12i^2$. 2) $z_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i,\ z_2 = -7i$.	**В-11** 1) $-7i^{56} - i^{42} - 8i^5 + 1$. 2) $z_1 = \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{i}{3},\ z_2 = 8i$.	**В-12** 1) $-9i^{25} - 5i^{14} + i^5 + 6i - 3$ 2) $z_1 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i,\ z_2 = 9i$.
В-13 1) $-4i^{37} - 2i^{12} - 3i^5 + 24i^6$ 2) $z_1 = \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{3}}{3}i,\ z_2 = -10i$.	**В-14** 1) $i^{57} - 4i^{35} - 7i^{15} + i + 9$ 2) $z_1 = 3\sqrt{3} - 3i,\ z_2 = \sqrt{2}i$.	**В-15** 1) $-25i^{19} + 2i^2 - 13i^5 + 10$ 2) $z_1 = 4 - 4\sqrt{3}i,\ z_2 = 3i$.

В-16 1) $-14i^{43}-5i^{72}-3i^5+7$. 2) $z_1=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i,\ z_2=2i$.	**В-17** 1) $-37i^{40}-5i^{29}-i^{17}i$. 2) $z_1=\sqrt{3}-i,\ z_2=\sqrt{3}i$.	**В-18** 1) $-5i^{63}-4i^{13}-7i^{18}+2$. 2) $z_1=-3+\sqrt{3}i,\ z_2=7i$.
В-19 1) $4i^{100}-17i^{12}-i^5i$. 2) $z_1=2\sqrt{3}+2i,\ z_2=8i$.	**В-20** 1) $-8i^{13}\cdot i^2-8i^{12}-i^7$. 2) $z_1=\frac{\sqrt{3}}{5}+\frac{i}{5},\ z_2=-9i$.	**В-21** 1) $-i^{17}-i^{22}-i^{45}+12i$. 2) $z_1=\sqrt{3}+3i,\ z_2=-4i$.
В-22 1) $-9i^3-i^{20}-5i^7+6i$. 2) $z_1=\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}i,\ z_2=10i$.	**В-23** 1) $-6i^{17}-8i^{12}-4i^{15}+3i$ 2) $z_1=\sqrt{2}-\sqrt{2}i,\ z_2=-2i$.	**В-24** 1) $5i^{23}-4i^{12}-3i^{25}+7$. 2) $z_1=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i,\ z_2=\sqrt{3}i$.
В-25 1) $-7i^4-8i^{10}-3i^{15}+4$. 2) $z_1=\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{i}{3},\ z_2=-8i$.	**В-26** 1) $8i^{13}-i^7+13i^{10}+3$. 2) $z_1=\frac{1}{3}-\frac{\sqrt{3}}{3}i,\ z_2=-6i$.	**В-27** 1) $-5i^{17}-6i^{22}-7i^{15}+9i$. 2) $z_1=2-2i,\ z_2=-\sqrt{2}i$.
В-28 1) $4i^{13}-5i^2-i^{15}+2i$. 2) $z_1=1-\frac{\sqrt{3}}{3}i,\ z_2=7i$.	**В-29** 1) $-8i^4-i^{13}+i^{45}+10i$. 2) $z_1=3+3i,\ z_2=-3i$.	**В-30** 1) $-8i^{23}-i^{33}+i^{17}+36i$. 2) $z_1=1-i,\ z_2=3i$.

2. Предел функции

2.1. Основные понятия

Пусть D — некоторое множество чисел. Если задан закон, по которому каждому числу x из множества D ставится в соответствие единственное определенное число y, то будем говорить, что на множестве D задана функция, которую назовём f. Число y — это значение функции f в точке x, что обозначается формулой $y = f(x)$.

Число x называется аргументом функции, множество D — областью определения функции, а все значения y образуют множество E, которое называется множеством значений или областью изменения функции.

Функция f называется возрастающей (убывающей) на множестве G, если для любых чисел x_1 и x_2 из множества G, таких что $x_1 < x_2$, выполняется условие $f(x_1) < f(x_2)$ ($f(x_1) > f(x_2)$).

Так как между множеством действительных чисел и множеством точек числовой оси можно установить взаимно-однозначное соответствие, в дальнейшем изложении понятиям "число x" и "точка x числовой оси" в некоторых случаях будет придаваться один и тот же смысл. Например, вместо "значение функции при значении аргумента, равном x_1" будет говориться "значение функции в точке x_1". В нижеследующем определении можно везде заменить выражение "точка x" на выражение "число x".

Пусть ε — некоторое положительное число. **ε-окрестностью** точки x_0 называется множество всех точек x, принадлежащих промежутку $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$, кроме самой точки x_0. Принадлежность точки x ε-окрестности точки x_0 можно выразить с помощью двойного неравенства

$$0 < |x - x_0| < \varepsilon.$$

Число ε называется **радиусом окрестности**.

2.2. Предел и непрерывность функции

Рассмотрим функцию $y = x^2$ в точке $x_0 = 2$. Значение функции в этой точке равно 4.

Отметим одну особенность поведения функции в этой точке. Можно

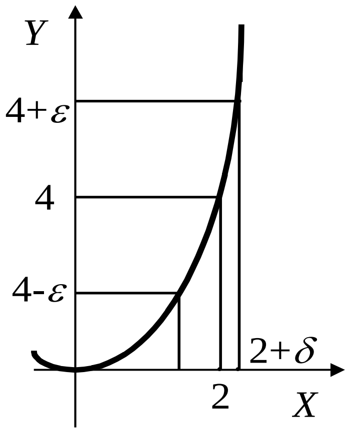


Рис. 1

выбрать какое-либо положительное число ε и построить ε-окрестность точки $y_0 = 4$. Очевидно, что найдется такая окрестность точки $x_0 = 2$ (на рисунке 1 эта окрестность имеет радиус δ) , что если x будет лежать в этой окрестности, то соответствующее значение y, равное x^2, попадет в ε-окрестность точки $y_0 = 4$. Это заключение справедливо для любого, сколь угодно малого числа ε. Здесь точка $x_0 = 2$ выбрана произвольно. Можно было бы для данной функции выбрать любую другую точку и сделать подобное заключение.

Рассмотрим функцию $y = \dfrac{2x^2 - 5x\text{-}2}{x - 2}$. Эта функция не определена в точке $x_0 = 2$. При $x_0 \neq 2$ её можно преобразовать:

$$y = \frac{2(x-2)(x-0{,}5)}{x-2} = 2x - 1.$$

График функции представлен на рисунке 2. Хотя исходная функция не определена в точке $x_0 = 2$ и естественно не равна 3 в этой точке,

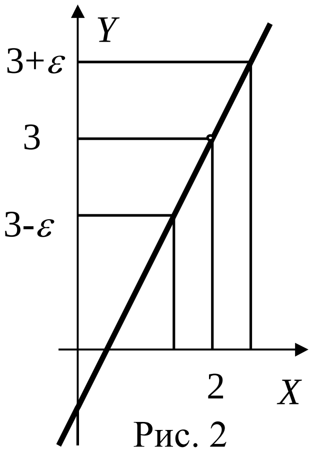


Рис. 2

точка $y_0 = 3$ имеет характерную особенность. Выбрав положительное число ε, можно утверждать, что если рассматривать значения x, расположенные достаточно близко к точке $x_0 = 2$ (или лежащие в некоторой окрестности точки $x_0 = 2$, причем радиус этой окрестности зависит от ε), то соответствующие значения y попадут в ε-окрестность точки $y_0 = 3$. Всё сказанное остаётся справедливым независимо от того, насколько малым выбрано положительное число ε.

Введем понятие предела функции. Число A называется **пределом функции** $y = f(x)$ в точке x_0 (иногда говорят, при x, стремящемся к x_0), если для любого положительного числа ε можно найти такое положительное число δ, что для всех x из δ-окрестности точки x_0 соответствующие значения y попадают в ε-окрестность точки $y = A$.

Можно сформулировать определение предела функции по-другому. Число A называется **пределом функции** $y = f(x)$ в точке x_0, если для любого положительного числа ε можно найти такое положительное число δ, что для всех x, удовлетворяющих условию

$$0 < |x - x_0| < \delta,$$

выполняется условие

$$|y - A| < \varepsilon.$$

Тот факт, что A есть предел функции $y = f(x)$ в точке $x = x_0$, записывается формулой

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A.$$

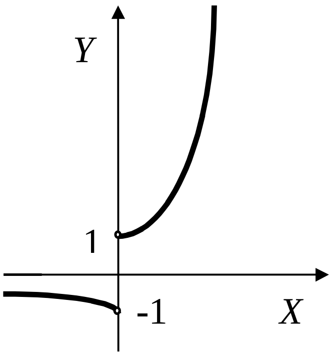


Рис. 3

Как видно из второго из рассмотренных выше примеров, для того, чтобы функция имела предел в точке $x = x_0$, не требуется, чтобы она была определена в этой точке.

Рассмотрим функцию $y = \frac{|x|}{x} 2^x$. Очевидно, что если $x > 0$, то $y = 2^x$; если $x < 0$, то $y = -2^x$; при $x = 0$ функция не определена.

График функции изображен на рисунке 3. Легко убедиться в том, что, согласно приведенному выше определению предела, эта функция в точке $x = 0$ предела не имеет.

Функция $y = f(x)$ называется **непрерывной в точке** $x = x_0$, если она определена в этой точке и ее значение $f(x_0)$ равно пределу функции в этой точке: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Функция $y = x^2$ непрерывна в точке $x = 2$, как и во всех точках числовой оси. Функция $y = \frac{2x^2 - 5x + 2}{x - 2}$ не является непрерывной в точке $x = 2$. Функция $y = \frac{|x|}{x} 2^x$ не является непрерывной в точке $x = 0$.

Функция, непрерывная в каждой точке открытого промежутка, называется **непрерывной на этом промежутке**.

Приведем свойства предела функции.

1. Функция не может иметь в одной точке два разных предела.

2. $\lim\limits_{x \to x_0} C = C$, если C — постоянная функция.

3. Если существует $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ и C — постоянная функция, то $\lim\limits_{x \to x_0} (Cf(x)) = C \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$.

4. Если существуют $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ и $\lim\limits_{x \to x_0} g(x)$, то существует $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) + g(x))$, равный $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) + \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$, а также существует

$\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)g(x))$, равный $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$. Если при этом $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\neq 0$, то существует $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x)/g(x))$, равный $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)/ \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.

Введем определения так называемых “односторонних пределов”.

Число B называется **пределом функции** $f(x)$ **в точке** a **справа** (это записывается в виде формулы $B=\lim\limits_{x\to a+} f(x)$), если для любого положительного числа ε найдется положительное число δ, такое что из из условия $0 < x - a < \delta$ будет следовать $|B - f(x)| < \varepsilon$.

Согласно приведенному определению $\lim\limits_{x\to 0+}\sqrt{x}=0$. Отметим, что обыкновенного предела функция $y=\sqrt{x}$ в точке $x = 0$ не имеет.

Число C называется **пределом функции** $f(x)$ **в точке** b **слева** (это записывается в виде формулы $C=\lim\limits_{x\to b-} f(x)$), если для любого положительного числа ε найдется положительное число δ такое, что из условия $0 < b - x < \delta$ будет следовать $|C - f(x)| < \varepsilon$.

Очевидно, что функция $y(x)=\frac{|x|}{x}2^x$ (её график, изображен на рисунке 3) имеет два односторонних предела в точке $x = 0$:

$$\lim_{x\to 0+} y(x)=1; \quad \lim_{x\to 0-} y(x)=-1.$$

Функция $f(x)$ называется **непрерывной в точке** a **справа** (непрерывной в точке b слева), если
$\lim\limits_{x\to a+} f(x)=f(a)$ ($\lim\limits_{x\to b-} f(x)=f(b)$).

Функция $y=\sqrt{x}$ непрерывна справа в точке x=0.

Функция называется **непрерывной на замкнутом промежутке** $[a, b]$, если она непрерывна на открытом промежутке (a, b), непрерывна справа в точке a и непрерывна слева в точке b.

Достаточно просто можно доказать теорему, связывающую понятия предела функции в точке и односторонних пределов. Мы ограничимся только формулировкой теоремы.

Для того, чтобы выполнялось равенство $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$, необходимо и достаточно, чтобы одновременно выполнялись два равенства:

$$\lim_{x\to x_0+} f(x)=A; \quad \lim_{x\to x_0-} f(x)=A$$

В дальнейшем нам понадобятся понятия предела функции в бесконечно удалённых точках. Рассмотрим сначала функцию $f(x)$, определенную на полубесконечном промежутке $(x_0; \infty)$. Число A называется пределом функции $f(x)$ при x, стремящемся к бесконечности:

$$A = \lim_{x \to \infty} f(x),$$

если для любого положительного числа ε можно найти такое положительное число M (зависящее от ε), что для всех чисел x, превосходящих M, выполняется условие:

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

Пусть теперь функция $f(x)$ определена на полубесконечном промежутке
$(-\infty; x_0)$. Число A называется пределом функции $f(x)$ при x, стремящемся к минус бесконечности:

$$A = \lim_{x \to -\infty} f(x),$$

если для любого положительного числа ε можно найти такое положительное число M (зависящее от ε), что для всех чисел x, меньших, чем $-M$, выполняется условие:

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

Отметим два, так называемых, "замечательных предела".

1. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$. Геометрический смысл этой формулы заключается в том, что прямая $y = x$ является касательной к графику функции $y = \sin x$ в точке $x = 0$.

2. $\lim\limits_{x \to 0} (1 + x)^{1/x} = e$. Здесь e — иррациональное число, приблизительно равное 2,72.

Приведем пример применения понятия предела функции в экономических расчетах. Рассмотрим обыкновенную финансовую сделку: предоставление в долг суммы S_0 с условием, что через период времени T будет возвращена сумма S_T. Определим величину r **относительного роста** формулой

$$r = \frac{S_T - S_0}{S_0}. \qquad (1)$$

Относительный рост можно выразить в процентах, умножив полученное значение r на 100.

Из формулы (1) легко определить величину S_T:

$$S_T = S_0(1 + r)$$

При расчете по долгосрочным кредитам, охватывающим несколько полных лет, используют схему сложных процентов. Она состоит в том, что если за 1-й год сумма S_0 возрастает в $(1 + r)$ раз, то за второй год в $(1 + r)$ раз возрастает сумма $S_1 = S_0(1 + r)$, то есть $S_2 = S_0(1 + r)^2$. Аналогично получается $S_3 = S_0(1 + r)^3$. Из приведенных примеров можно вывести общую формулу для вычисления роста суммы за n лет при расчете по схеме сложных процентов:

$$S_n = S_0(1 + r)^n.$$

В финансовых расчетах применяются схемы, где начисление сложных процентов производится несколько раз в году. При этом оговариваются **годовая ставка** r и **количество начислений за год** k. Как правило, начисления производятся через равные промежутки времени, то есть длина каждого промежутка T_k составляет $\frac{1}{k}$ часть года. Тогда для срока в T лет (здесь T не обязательно является целым числом) сумма S_T рассчитывается по формуле

$$S_T = S_0\left(1 + \frac{r}{k}\right)^m \qquad (2)$$

Здесь $m = \left[\frac{T}{T_k}\right]$ — целая часть числа $\frac{T}{T_k}$, которая совпадает с самим числом, если, например, T - целое число.

Пусть годовая ставка равна r и производится n начислений в год через равные промежутки времени. Тогда за год сумма S_0 наращивается до величины, определяемой формулой

$$S_1 = S_0\left(1 + \frac{r}{n}\right)^n \qquad (3)$$

В теоретическом анализе и в практике финансовой деятельности часто встречается понятие “непрерывно начисляемый процент”. Чтобы перейти к непрерывно начисляемому проценту, нужно в формулах (2) и (3) неограниченно увеличивать соответственно, числа k и n (то есть устремить k и n к бесконечности) и вычислить, к какому пределу будут стремиться функции S_T и S_1. Применим эту процедуру к формуле (3):

$$S_1^* = \lim_{n\to\infty} S_1 = S_0 \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{r}{n}\right)^n = S_0 \lim_{n\to\infty}\left(\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{\frac{n}{r}}\right)^r = S_0\left\{\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{\frac{n}{r}}\right\}^r.$$

Заметим, что предел в фигурных скобках совпадает со вторым замечательным пределом. Отсюда следует, что при годовой ставке r при непрерывно начисляемом проценте сумма S_0 за 1 год наращивается до величины S_1^*, которая определяется из формулы

$$S_1^* = S_0 e^r. \qquad (4)$$

Пусть теперь сумма S_0 предоставляется в долг с начислением процента n раз в год через равные промежутки времени. Обозначим r_e годовую ставку, при которой в конце года сумма S_0 наращивается до величины S_1^* из формулы (4). В этом случае будем говорить, что r_e — это **годовая ставка при начислении процента *n* раз в год, эквивалентная годовому проценту *r* при непрерывном начислении.** Из формулы (3) получаем

$$S_1^* = S_0\left(1+\frac{r_e}{n}\right)^n.$$

Приравнивая правые части последней формулы и формулы (4), полагая в последней $T = 1$, можно вывести соотношения между величинами r и r_e:

$$r = n\ln\left(1+\frac{r_e}{n}\right), \quad r_e = n\left(e^{\frac{r}{n}} - 1\right).$$

Эти формулы широко используются в финансовых расчётах.

2.3. Пределы. Неопределенность вида: $\left(\frac{0}{0}\right)$; $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$;

.

В данной теме рассматривается вычисление пределов функций, которое основывается на следующих теоремах:

1. Предел постоянной равен самой постоянной:

$$\lim_{x\to a} C = C, \ (C = const).$$

2. Постоянный множитель можно выносить за знак предела:

$$\lim_{x\to a} C\cdot f(x) = C\cdot \lim_{x\to a} f(x).$$

3. Предел от алгебраической суммы нескольких функций равен алгебраической сумме пределов этих же функций:

$$\lim_{x\to a}\left[f(x)\pm\varphi(x)\right]=\lim_{x\to a} f(x)\pm\lim_{x\to a}\varphi(x).$$

4. Предел произведения нескольких функций равен произведению пределов этих же функций:

$$\lim_{x\to a}\left[f(x)\cdot\varphi(x)\right]=\lim_{x\to a} f(x)\cdot\lim_{x\to a}\varphi(x).$$

5. Предел частного функций равен частному пределов, при условии, что предел знаменателя не равен нулю:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)},\ \lim_{x\to a}\varphi(x)\neq 0.$$

Определение 20. Величина (функция) называется *бесконечно малой* (б.м.), если ее предел при $x\to a$, равен нулю, т.е.

$$\lim_{x\to a} f(x)=0.$$

Определение 21. Величина (функция) называется *бесконечно большой* (б.б.), если ее предел при $x\to a$, равен бесконечности, т.е.

$$\lim_{x\to a} f(x)=\infty.$$

Теорема 1 (о связи б.м. и б.б. величин): Величина, обратная бесконечно большой, есть величина бесконечно малая и, наоборот, величина, обратная бесконечно малой, есть величина бесконечно большая.

Символически это обозначают так: $\frac{1}{\infty}=0$ и $\frac{1}{0}=\infty$.

Свойства бесконечно малых величин

Пусть α, β – б.м. величины, y – переменная величина, имеющая предел, равный A, т.е. $\lim\limits_{x \to a} y = A(const)$. Тогда справедливы следующие свойства, которые символически можно представить так:

$$1.\ \alpha \pm \beta = 0.\ \ 2.\ \alpha \cdot A = 0.\ \ 3.\ \frac{\alpha}{A} = 0,\ A \neq 0,$$

где $A = const$.

Свойства бесконечно больших величин

Свойства б.б. величин также можно символически записать так:

$$1.\ \infty \pm A = \infty. \qquad 2.\ \infty \cdot A = \infty. \qquad 3.\ \frac{\infty}{A} = \infty.$$

$$4.\ \infty^n = \infty. \qquad 5.\ \sqrt[n]{\infty} = \infty. \qquad 6.$$

$\begin{matrix} +\infty + (+\infty) = +\infty \\ -\infty + (-\infty) = -\infty \end{matrix}$, где $\lim\limits_{x \to a} y = A(const)$, y – переменная величина.

I и II замечательные пределы

I замечательный предел:

$$\lim_{x \to 0} \frac{sinx}{x} = 1 \ \text{(или } \lim_{x \to 0} \frac{x}{sinx} = 1;\ \lim_{x \to 0} \frac{tgx}{x} = 1).$$

(38)

II замечательный предел:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\left(1^\infty\right)=e \quad (\text{или } \lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=\left(1^\infty\right)=e).$$

(39)

Эквивалентные бесконечно малые величины

Свойство эквивалентных б.м.в.: при нахождении предела отношения двух б.м.в. можно каждую из них (или только одну) заменить другой б.м., эквивалентной ей.

Применение эквивалентностей б.м. значительно упрощает вычисление пределов. Приведем некоторые из них: пусть $\alpha(x)-б.м.\to 0$ при $x\to 0$.

$\sin\alpha(x)\sim\alpha(x)$; $\quad a^{\alpha(x)}-1\sim\alpha(x)\cdot\ln a$;

$tg\alpha(x)\sim\alpha(x)$; $\quad e^{\alpha(x)}-1\sim\alpha(x)$;

$\arcsin\alpha(x)\sim\alpha(x)$; $\quad \sqrt{1+x}-1\sim\alpha(x)/2$;

$arctg\alpha(x)\sim\alpha(x)$; $\quad \ln(1+\alpha(x))\sim\alpha(x)$.

Задача 6: Вычислить пределы:

1) $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{4x^2+11x-3}{3x^2+10x+3}$, $\quad$ 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+3x}-x\right)$,

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{arctg5x}$, $\quad$ 4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-3}{2x+1}\right)^{4x+5}$.

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3}{2x^2-1}-\dfrac{x^2}{4x+1}\right)=A$,

Решение: 1) Подстановка предельного значения аргумента $x=-3$ приводит к неопределенному выражению вида $\dfrac{0}{0}$.

Для устранения этой неопределенности разложим числитель и знаменатель дроби на множители и сократим дробь на множитель $(x+3)$. Такое сокращение здесь возможно, т.к. множитель $(x+3)$ отличен от нуля при $x=-3$:

$$\lim_{x\to-3}\frac{4x^2+11x-3}{3x^2+10x+3}=\lim_{x\to-3}\frac{(4x-1)(x+3)}{(3x+1)(x+3)}=\lim_{x\to-3}\frac{4x-1}{3x+1}=\frac{4\cdot(-3)-1}{3\cdot(-3)+1}=\frac{13}{8};$$

2) При $x\to\infty$ выражение $\sqrt{x^2+3x}-x$ дает неопределенность вида $\infty-\infty$. Для ее устранения умножим и разделим это выражение на $\left(\sqrt{x^2+3x}+x\right)$:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+3x}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+3x}-x\right)\cdot\left(\sqrt{x^2+3x}+x\right)}{\sqrt{x^2+3x}+x}=$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+3x-x^2}{\sqrt{x^2+3x}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{3}{\sqrt{1+\frac{3}{x}}+1}=\frac{3}{2};$$

3) Обозначим $\operatorname{arctg}5x=y$. Тогда $5x=\operatorname{tg}y$ и $y\to0$ при $x\to0$. Применяя свойства предела $\lim\limits_{\alpha\to0}\frac{\sin\alpha}{\alpha}=1$, имеем:

$$\lim_{x\to0}\frac{2x}{\operatorname{arctg}5x}=\frac{2}{5}\lim_{y\to0}\frac{\operatorname{tg}y}{y}=\frac{2}{5}\lim_{y\to0}\frac{\sin y}{y}\cdot\lim_{y\to0}\frac{1}{\cos y}=\frac{2}{5}\cdot1\cdot1=\frac{2}{5};$$

4) При $x\to\infty$ выражение $\left(\frac{2x-3}{2x+1}\right)^{4x+5}$ является неопределенностью вида 1^{∞}. Для устранения этой неопределенности представим основание степени в виде 1 и бесконечно малой при $x\to\infty$ величины и применим формулу второго замечательного предела:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e. \qquad (13)$$

Тогда имеем:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x-3}{2x+1}\right)^{4x+5}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1-4}{2x+1}\right)^{4x+5}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-4}{2x+1}\right)^{4x+5}$$

Пусть $2x+1=-4y$. Тогда $4x+5=-8y+3$ и $y\to-\infty$ при $x\to\infty$. Переходя к переменной y, получим:

$$\lim_{y\to-\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{-8y+3}=\left[\lim_{y\to-\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y}\right]^{-8}\cdot\lim_{y\to-\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{3}=e^{-8}\cdot 1^{3}=\frac{1}{e^{8}}.$$

5. Если необходимо найти предел

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{2x^2-1}-\frac{x^2}{4x+1}\right)=A,$$

можно предварительно привести к общему знаменателю

$$A=\lim_{x\to\infty}\frac{x^4+x^3-2x^4+x^2}{(2x^2-1)(x+1)}=\lim_{x\to\infty}\frac{-2x^4+x^3+x^2}{2x^3+2x^2-x-1}.$$

Поделив на член, имеющий максимальную степень, получим в числителе постоянную величину, а в знаменателе – все члены, стремящиеся к 0,то есть

$$A=\lim_{x\to\infty}\frac{-2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}{\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^3}-\frac{1}{x^4}}=-\infty.$$

Пример 17. Вычислить пределы: а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2+x-10}{x^2+x-6}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2-3x+1}{2x^2+x-5}$;

в) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{3x-2}-2}{\sqrt{2x+5}-3}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{4x+x^2}-x\right)$; д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{sin3x}{2x\cdot sin7x}$; е) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x}{arctg2x}$; ж) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1}{2x+3}\right)^{4x^2-3}$.

Решение. а) Непосредственная подстановка вместо x значения 2 в данную дробь приводит к неопределенности вида $\left(\dfrac{0}{0}\right)$. Чтобы раскрыть эту неопределенность, необходимо числитель и знаменатель разложить на линейные множители по формуле $ax^2+вx=c=a(x-x_1)(x-x_2)$:

$$\lim_{x\to 2}\frac{2x^2+x-10}{x^2+x-6}=\left(\frac{0}{0}\right)=\left\{\begin{array}{l} 2x^2+x-10=2(x-2)(x+\frac{5}{2}).\\ D=в^2-4ac=1-4\cdot 2\cdot(-10)=81.\\ x_{1;2}=\dfrac{-в\pm\sqrt{D}}{2a}=\dfrac{-1\pm 9}{4}=2;-\dfrac{5}{2}.\\ \\ Аналогично, x^2+x-6=(x-2)(x+3).\\ D=1-4\cdot 1\cdot(-6)=25.\\ x_{1;2}=\dfrac{-1\pm 5}{2}=2;-3.\end{array}\right\}=$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{2\cancel{(x-2)}(x+\frac{5}{2})}{\cancel{(x-2)}(x+3)}=\left\{\begin{matrix}\textit{т.к. } x\to 2 \textit{ (но не равен 2), сократим на } (x-2);\\ (x-2)-\textit{критический множитель.}\end{matrix}\right\}=$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{2x+5}{x+3}=\frac{2\cdot 2+5}{2+3}=\frac{9}{5}=1{,}8.$$

б) $$\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2-3x+1}{2x^2+x-5}=\frac{4\cdot\infty^2-3\cdot\infty+1}{2\cdot\infty^2+\infty-5}=\{\textit{по св}-\textit{ам б.б. величин}\}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right).$$

В данном случае получили неопределенность вида $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$. Чтобы ее раскрыть, пользуемся **правилом 1**: если под знаком предела при $x\to\infty$, стоит дробно-рациональная функция $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$, в которой $P_m(x)$ и $Q_n(x)$ многочлены степени m и n соответственно, то числитель и знаменатель делим на x^k, где k – наивысшая степень многочленов $P_m(x)$ и $Q_n(x)$. Другими словами, делим на x^m, если $m\geq n$ и на x^n, если $n>m$.

Правило 2 раскрытия неопределенности $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$**:** если под знаком предела при $x\to\infty$, стоит дробно-рациональная функция $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$, в которой $P_m(x)$ и $Q_n(x)$ – многочлены степени m и n соответственно, то предел равен отношению коэффициентов при x^k, где k – наивысшая степень многочленов $P_m(x)$ и $Q_n(x)$.

Итак, по **правилу 1**, числитель и знаменатель делим на x^2, т.к «2» – наивысшая степень x из числителя и знаменателя:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2-3x+1}{2x^2+x-5}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{4\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}}-\frac{3\cancel{x}}{x^{\cancel{2}}}+\frac{1}{x^2}}{\frac{2\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}}+\frac{\cancel{x}}{x^{\cancel{2}}}-\frac{5}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{4-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}{2+\frac{1}{x}-\frac{5}{x^2}}=$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4-\frac{3}{\infty}+\frac{1}{\infty}}{2+\frac{1}{\infty}-\frac{5}{\infty}}=\frac{4-0+0}{2+0-0}=\frac{4}{2}=2.$$

По **правилу 2**: т.к. «2» – наивысшая степень x из числителя и знаменателя, то находим отношение коэффициентов при x^2 в числителе и знаменателе: в числителе этот коэффициент равен 4, а в знаменателе – 2. Тогда предел будет равен:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2-3x+1}{2x^2+x-5}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\frac{4}{2}=2.$$

в) Непосредственная подготовка предельного значения аргумента приводит к неопределенности вида $\left(\frac{0}{0}\right)$. Чтобы раскрыть эту неопределенность, умножим числитель и знаменатель дроби на произведение $\left(\sqrt{3x-2}+2\right)\left(\sqrt{2x+5}+3\right)$. Такое преобразование даст возможность сократить дробь на множитель $(x-2)$, отличный от нуля при $x\to 2$.

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{3x-2}-2}{\sqrt{2x+5}-3}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{3x-2}-2\right)\left(\sqrt{3x-2}+2\right)\left(\sqrt{2x+5}+3\right)}{\left(\sqrt{2x+5}-3\right)\left(\sqrt{3x-2}+2\right)\left(\sqrt{2x+5}+3\right)}=$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{(3x-2-4)\left(\sqrt{2x+5}+3\right)}{(2x+5-9)\left(\sqrt{3x-2}+2\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{(3x-6)\left(\sqrt{2x+5}+3\right)}{(2x-4)\left(\sqrt{3x-2}+2\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{3\left(\sqrt{2x+5}+3\right)}{2\left(\sqrt{3x-2}+2\right)}=\frac{9}{4}$$

.

г) При $x\to\infty$ получаем разность двух б.б.в., т.е. неопределенность вида $(\infty-\infty)$. Чтобы раскрыть эту неопределенность, умножим и разделим функцию, стоящую под знаком предела, на сумму $\left(\sqrt{4x+x^2}+x\right)$ и затем сделаем необходимые преобразования:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{4x+x^2}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{4x+x^2}-x\right)\left(\sqrt{4x+x^2}+x\right)}{\sqrt{4x+x^2}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{4x+x^2-x^2}{\sqrt{4x+x^2}+x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{4x}{\sqrt{4x+x^2}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{4x}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{4}{x}\right)}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{4x}{x\left(\sqrt{\left(1+\frac{4}{x}\right)}+1\right)}=\frac{4}{\sqrt{1+0}+1}=2$$

.

д) Данный предел сведем к I замеч. пределу. Для этого числитель и знаменатель умножить на 3 и $7x$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{sin3x}{2x\cdot sin7x}=\lim_{x\to 0}\frac{3sin3x\cdot 7x}{2\cdot 3x\cdot sin7x\cdot 7x}=\lim_{x\to 0}\frac{3}{14x}=\frac{3}{0}=\infty .$$

Замечание 4. Этот предел можно было вычислить, применив свойство эквивалентных б.м.: $sin3x \sim 3x$ и $sin7x \sim 7x$ при $x \to 0$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{sin3x}{2x \cdot sin7x} = \lim_{x\to 0} \frac{3x}{2x \cdot 7x} = \lim_{x\to 0} \frac{3}{14x} = \frac{3}{0} = \infty .$$

е) <u>*1 способ.*</u> Пусть $arctg2x = y$. Тогда $tgy = 2x$; очевидно, что при $x \to 0$ и $y \to 0$. Имеем:

$$\lim_{x\to 0} \frac{4x}{arctg2x} = \lim_{y\to 0} \frac{2tgy}{y} = 2 .$$

<u>*2 способ.*</u> Применяя эквивалентность б.м.: $arctg2x \sim 2x$ при $x \to 0$, получим:

$$\lim_{x\to 0} \frac{4x}{arctg2x} = \lim_{y\to 0} \frac{4x}{2x} = 2 .$$

ж) Преобразуем выражение, стоящее под знаком предела:

$$\frac{2x-1}{2x+3} = \frac{(2x+3)-3-1}{2x+3} = \frac{2x+3}{2x+3} - \frac{4}{2x+3} = 1 - \frac{4}{2x+3} .$$

Исходный предел будет иметь неопределенность $\left(1^{\infty}\right)$, который надо будет свести к (39). Для этого выполним ряд действий: показатель умножим на выражение, обратное выражению $\left(-\frac{4}{2x+3}\right)$. Это будет $\left(-\frac{2x+3}{4}\right)$, и чтобы действие было равносильным, снова умножим на выражение $\left(-\frac{4}{2x+3}\right)$. В полученном пределе выделим II замеч.: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{4}{2x+3}\right)^{-\frac{2x+3}{4}}=e$. Далее, основываясь на непрерывности элементарной функции e^x, перейдем к пределу показателя.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x-1}{2x+3}\right)^{4x^2-3}=\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{4}{2x+3}\right)^{4x^2-3}=\left(1^{\infty}\right)=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{4}{2x+3}\right)^{-\frac{2x+3}{4}\cdot\left(-\frac{4}{2x+3}\right)\cdot 4x^2-3}=$$

$$\lim_{x\to\infty}e^{-\frac{4}{2x+3}\cdot 4x^2-3}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-16x^2+12}{2x+3}\cdot}=e^{\frac{-16}{0}}=e^{-\infty}=\frac{1}{e^{\infty}}=\frac{1}{\infty}=0$$

В задачах 1-20 най ти указанные пределы

1. 1) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{3x^2-7x+2}{2x^2-5x+2}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-3x+1}{4x^2+x-2}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{tg2x}$; 4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-2}\right)^{2x+3}$.

2\. 1) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{x^2-8x+7}{(x-7)^2}$; 2) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{3x-2}-2}{x-2}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 6x}{3x}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{2}{x}}$.

3\. 1) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x^2+x-1}{5x^2+4x-1}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-2x-x^2}{4x^2-5x+2}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\arcsin 3x}$; 4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x+1}\right)^{4x}$.

4\. 1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x^2-1}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-3}{4x^2-5x}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0} tg2x\cdot ctg4x$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}(x+1)^{3/x}$.

5\. 1) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x^2+3x+1}{x^3+1}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-cos2x}{x^2}$; 4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-4}{x+2}\right)^{2x+2}$.

6\. 1) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2-10x+8}{2x^2-3x-2}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x}-2x}{3x+4}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{arctg2x}$; 4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+1}{2x-1}\right)^{3x}$.

7\. 1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+1}{2x^2-x-1}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin x}{1-\cos x}$; 4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+2}{3x+1}\right)^{6x-4}$.

8\. 1) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-2x-3}{x^3-27}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-3x+4}{5-3x^2}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg5x}{tg3x}$; 4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x+4}\right)^{2x-1}$.

9\. 1) $\lim\limits_{x\to -7}\dfrac{x^2+6x-7}{x^3+1}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 2x}{x}$; 4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x+2}{4x-1}\right)^{2x+3}$.

10\. 1) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{2x^2+5x-3}{x^2+4x+3}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x}\right)$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{tg3x}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}(1+5x)^{3/x}$.

11\. 1) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{3x^2+5x-2}{x^2+3x+2}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{\sqrt[3]{8-x}-\sqrt[3]{8+x}}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0} tg3x\cdot ctg5x$; 4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-3}{x+4}\right)^{x-1}$.

12. 1) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-4x+3}{x^2-9}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x-4}{x+\sqrt[3]{x}}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{arctg3x}$; 4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-2}{3x-1}\right)^{6x+4}$.

13. 1) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4x-12}{x^2-6x+8}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x+1}\right)$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{\sin 4x}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}(1-2x)^{\frac{4}{x}}$.

14. 1) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{7x^2+8x+1}{2x+2}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x^2-\sqrt{x^4+x^2}\right)$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg6x}{tg3x}$; 4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x+2}{5x-3}\right)^{2x+1}$.

15. 1) $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{2x^2+6x-8}{x^2-16}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+3x-1}{\sqrt{x^4-2x+3}}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0} tg4x\cdot ctg2x$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{5}{x}}$.

16. 1) $\lim\limits_{x\to 10}\dfrac{5x^2-51x+10}{2x-20}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^5-x^2+1}{x^3+3x-7}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{\arcsin 2x}$; 4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x-3}{4x+2}\right)^{2x+1}$.

17. 1) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x^2-7x+3}{x^2-x-6}$;

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^4-x^2}\right)$;

3) $\lim\limits_{x\to 0} x\cdot ctg3x$;

4) $\lim\limits_{x\to -1}(2x+3)^{\frac{1}{x+1}}$.

18. 1) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3x^2+2x-1}{2x^2+3x+1}$;

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-3x-2x^2}{x^2-4x+3}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{tg4x}$;

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-2}{x+3}\right)^{4-x}$.

19. 1) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-5x+2}{4x^2-7x-2}$;

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-3x+1}{4x^2+x-2}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0} x\cdot ctg2x$;

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x+1}\right)^{x-2}$.

20. 1) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{8+2x-x^2}{x^2-16}$;

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-x+3}{x^3+2x^2-1}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg3x}{x}$;

4) $\lim\limits_{x\to 4}(x-3)^{\frac{2}{x-4}}$.

Примеры для контрольной работы 2

В-1

а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2-5x-2}{2x^2-x-6}$;

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-3x+1}{3x^2+x+4}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 2x}{x^2}$;

г) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{3x-2}-2}{x^2-4}$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-3}{2x+5}\right)^{x-1}$;

е) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{2x-1}\right)^{4x+1}$.

В-2

а) $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{2x^2+15x+25}{5-4x-x^2}$;

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2-8x+1}{-10x^3+x+4}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{tg 5x}$;

г) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{\sqrt{x+4}-1}{\sqrt{3-2x}-3}$;

д) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1-\dfrac{2x}{3}\right)^{\frac{-7}{3x}}$;

е) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{8x-1}\right)^{-4x^2+1}$.

В-3

а) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{4x^2+7x+3}{2x^2+x-1}$;

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3-2x-x^3}{x^2+4x+1}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 3x}{tg^2 2x}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2+2x}\right)$;

д) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1-\dfrac{6x}{7}\right)^{\frac{-4}{5x}}$;

е) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{3}{9x+1}\right)^{-5x+6}$.

В-4

а) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x^2-9x+9}{x^2-5x+6}$;

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-8x^2-3x+1}{16x^2+2x-4}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}(\sin 3x\cdot ctg 5x)$;

г) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt{x+6}-2}{x^2-4}$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-3}{3x+5}\right)^{2x-1}$;

е)

В-5

а) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{5x-x^2-4}{x^2-2x-8}$;

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-2x^2-5x+10}{3x^3+x+4}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg^2 2x}{\sin 5x\cdot 4x}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{4x^2+x}-2x\right)$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{7}{1+4x}\right)^{4x+1}$;

В-6

а) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-2x-8}{2x^2+5x+2}$;

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-7x+x^2}{3x^2+x+3}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}(x\cdot ctg 4x)$;

г) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{2x+1}-3}$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{6x-8}{6x-3}\right)^{3x}$;

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{7x-6}\right)^{-5x+3}$.	е) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{5x-2}{5x-1}\right)^{3x-4}$.	е) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{9}{5x+3}\right)^{-6x+1}$.
В-7	**В-8**	**В-9**
а) $\lim\limits_{x\to1}\frac{3x^2-2x-1}{x^2-4x+3}$;	а) $\lim\limits_{x\to-3}\frac{6-x-x^2}{3x^2+8x-3}$;	а) $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^3-1}{5x^2-4x-1}$;
б) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5-12x-4x^3}{4x^2+5x+1}$;	б) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{5-2x-5x^3}{-8x^3-4x-10}$;	б) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3+2x+10x^2}{5x^2+4x+1}$;
в) $\lim\limits_{x\to0}\frac{4\sin^2 5x}{tg^2 3x}$;	в) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin^2 8x}{10tg^2 4x}$;	в) $\lim\limits_{x\to0}\frac{4x\cdot\cos^2 3x}{tg^2 2x}$;
г) $\lim\limits_{x\to3}\frac{\sqrt{2x+3}-3}{2-\sqrt{x+1}}$;	г) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{9-x}-3}{\sqrt{x+4}-2}$;	г) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{x^2+9}-3}{\sqrt{4-x^2}-2}$;
д) $\lim\limits_{x\to0}\left(1-\frac{9x}{11}\right)^{\frac{2}{7x}}$;	д) $\lim\limits_{x\to0}\left(1-\frac{2x}{13}\right)^{\frac{-3}{5x}}$;	д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{7x-2}{7x+3}\right)^{2x+5}$;
е) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{-3}{5x-2}\right)^{-3x+4}$.	е) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{10}{3x+1}\right)^{-4x+3}$.	е) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{5}{6x+1}\right)^{-2x+1}$.
В-10	**В-11**	**В-12**
а) $\lim\limits_{x\to2}\frac{x^2+2x-8}{8-x^3}$;	а) $\lim\limits_{x\to3}\frac{x^2-x-6}{x^2-6x+9}$;	а) $\lim\limits_{x\to2}\frac{x^2-4x+4}{x^2-4}$;
б) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{13-x-x^4}{x^3+4x+1}$;	б) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{10-4x-8x^2}{2x^2+x+4}$;	б) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{15-2x-4x^3}{4x^4-5x+3}$;
в) $\lim\limits_{x\to0}\frac{3\sin^2 9x}{tg^2 4x}$;	в) $\lim\limits_{x\to0}(2x\cdot ctg5x)$;	в) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin^2 8x\cdot ctg2x}{tg^2 4x}$;
г) $\lim\limits_{x\to4}\frac{5-\sqrt{x^2+9}}{\sqrt{2x+1}-3}$;	г) $\lim\limits_{x\to-2}\frac{x^2-4}{\sqrt{1-4x}-3}$;	г) $\lim\limits_{x\to3}\frac{\sqrt{2x+3}-3}{x^2-9}$;
д) $\lim\limits_{x\to0}\left(1-\frac{4x}{5}\right)^{\frac{-4}{5x}}$;	д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x-8}{2x-3}\right)^{-5x}$;	д) $\lim\limits_{x\to0}\left(1-\frac{3x}{7}\right)^{\frac{-5}{x}}$;

е) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{8}{6x+1}\right)^{-5x+3}$.	е) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{12}{4x+3}\right)^{-4x+12}$.	е) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{4x+1}\right)^{-x+6}$.
В-13	**В-14**	**В-15**
а) $\lim\limits_{x\to-2}\frac{x^3+8}{x^2+x-2}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2+x-x^4}{x^4+7x+4}$; в) $\lim\limits_{x\to0}\frac{12x^2\cdot sin^2 6x}{tg^2 3x}$; г) $\lim\limits_{x\to4}\frac{\sqrt{x}-2}{x^2-6x+8}$; д) $\lim\limits_{x\to0}\left(1-\frac{11x}{9}\right)^{\frac{-3}{8x}}$; е) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{10x-7}\right)^{-3x}$	а) $\lim\limits_{x\to5}\frac{x^2-7x+10}{x^2-10x+25}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3-2x-8x^3}{4x^3+4x+1}$; в) $\lim\limits_{x\to0}\frac{8x^2\cdot sin^2 5x}{tg^2 22x}$; г) $\lim\limits_{x\to-1}\frac{x+1}{\sqrt{3x+7}-2}$; д) $\lim\limits_{x\to0}\left(1-\frac{15x}{7}\right)^{\frac{-3}{5x}}$; е) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{4}{3x+1}\right)^{-5x^2+6}$.	а) $\lim\limits_{x\to5}\frac{x^2-10x+25}{x^2-3x-10}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^5-2x-x^3}{x^5+4x^4+1}$; в) $\lim\limits_{x\to0}\frac{9x^2\cdot sin^2 3x}{tg^2 x}$; г) $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{\sqrt{x}-1}$; д) $\lim\limits_{x\to0}\left(1-\frac{13x}{9}\right)^{\frac{-1}{5x}}$; е) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{8x+5}\right)^{-4x^2}$.
В-16	**В-17**	**В-18**
а) $\lim\limits_{x\to3}\frac{x^2-6x+9}{x^3-27}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{12x^4-9x^3+x^2}{-6x^4+x^2+3}$; в) $\lim\limits_{x\to0}(12x\cdot ctg5x)$; г) $\lim\limits_{x\to2}\frac{x^2-x-2}{\sqrt{4x+1}-3}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{-8}{6x-3}\right)^{3x+7}$;	а) $\lim\limits_{x\to1}\frac{2x^2+x-3}{x^2-2x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^8-12x^6-4x^3}{4x^8+5x+1}$; в) $\lim\limits_{x\to0}\frac{6sin^2 6x}{x^2\cdot tg^2 2x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{9x^2+4x}-3x\right)$; д) $\lim\limits_{x\to0}\left(1-\frac{3x}{13}\right)^{\frac{-4}{15x}}$;	а) $\lim\limits_{x\to-3}\frac{2x^2+5x-3}{3x^2+11x+6}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-3x^2-12-8x^3}{4x^2+5x+1}$; в) $\lim\limits_{x\to0}\frac{4sin3x}{tg^2 5x}$; г) $\lim\limits_{x\to5}\frac{x^2-25}{\sqrt{2x-1}-3}$;

е) $\lim_{x\to0}\left(1-\frac{5x}{8}\right)^{-\frac{2}{6x}}$.	е) $\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x+4}\right)^{2x-1}$.	д) $\lim_{x\to0}\left(1-\frac{14x}{8}\right)^{\frac{-3}{5x}}$; е) $\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{3x-1}\right)^{x+6}$.
В-19	**В-20**	**В-21**
а) $\lim_{x\to-2}\frac{2x^2+3x-2}{x^2+4x+4}$; б) $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2x^4-x^3}{x^2+4x^4+1}$; в) $\lim_{x\to0}\frac{\sin^2 3x}{6tg4x}$; г) $\lim_{x\to\infty}\left(2x-\sqrt{4x^2+3x}\right)$; д) $\lim_{x\to0}\left(1-\frac{6x}{13}\right)^{\frac{4}{7x}}$; е) $\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{4x-3}\right)^{5x+6}$	а) $\lim_{x\to1}\frac{x^2-2x+1}{4x^2+x-5}$; б) $\lim_{x\to\infty}\frac{7x-2x^2-x^3}{5x^3+4x^2}$; в) $\lim_{x\to0}\frac{\sin^2 4x\cdot\cos4x}{16tg^2 6x}$; г) $\lim_{x\to-3}\frac{\sqrt{1-x}-2}{4-\sqrt{1-5x}}$; д) $\lim_{x\to0}\left(1-\frac{x}{8}\right)^{\frac{3}{5x}}$; е) $\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{6}{4x+10}\right)^{3x+2}$.	а) $\lim_{x\to-1}\frac{3x^2+2x-1}{x^3+1}$; б) $\lim_{x\to\infty}\frac{10x^3-7x+x^2}{-5x^3+x+3}$; в) $\lim_{x\to0}\frac{tg3x\cdot\cos3x}{5x^2}$; г) $\lim_{x\to-2}\left(\frac{1}{x+2}-\frac{4}{x^2-4}\right)$; д) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{9x-4}{9x+3}\right)^{2x}$; е) $\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{6}{5x+1}\right)^{6x^2+12}$.
В-22	**В-23**	**В-24**
а) $\lim_{x\to2}\frac{-2x^2+9x-10}{x^2-x-2}$; б) $\lim_{x\to\infty}\frac{1-2x^4-3x^3}{4x^5+6x}$; в) $\lim_{x\to0}\frac{\sin^2 12x}{tg4x\cdot x^2}$; г) $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{2x^2+x}-x\right)$;	а) $\lim_{x\to5}\frac{35-17x+2x^2}{-20-x+x^2}$; б) $\lim_{x\to\infty}\frac{6-2x^2-x^3}{4x^2+5x+1}$; в) $\lim_{x\to0}\frac{\sin^2 3x\cdot x^2}{tg^2 2x}$; г) $\lim_{x\to-2}\left(\frac{1}{x+2}-\frac{12}{x^3+8}\right)$;	а) $\lim_{x\to-4}\frac{2x^2+7x-4}{-x^2-3x+4}$; б) $\lim_{x\to\infty}\frac{2x-x^3}{5x^3-8x+10}$; в) $\lim_{x\to0}\frac{\sin^2 7x}{8x^2\cdot tg^2 5x}$; г) $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{3x^2+x}-x\right)$;

д) $\lim\limits_{x\to0}\left(1-\frac{12x}{9}\right)^{\frac{3}{4x}}$;

е) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{5x+1}\right)^{4x+1}$.

д) $\lim\limits_{x\to0}\left(1-\frac{x}{7}\right)^{\frac{-4}{5x}}$;

е) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{4x+1}\right)^{5x+6}$.

д) $\lim\limits_{x\to0}\left(1-\frac{2x}{9}\right)^{\frac{-4}{6x}}$;

е) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{6x-1}\right)^{-5x+6}$.

В-25

а) $\lim\limits_{x\to-3}\frac{3-8x-3x^2}{x^2+x-6}$;

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-4x^2-2x^3}{x^3+5x^2+8}$;

в) $\lim\limits_{x\to0}\frac{10sin^2 3x}{tg^2 x}$;

г) $\lim\limits_{x\to1}\frac{x-1}{\sqrt{x+2}-\sqrt{4-x}}$ д) $\lim\limits_{x\to0}\left(1-\frac{17x}{7}\right)^{\frac{-4}{9x}}$;

е) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{4x-2}\right)^{6x^3+2}$

В-26

а) $\lim\limits_{x\to3}\frac{-x^2+7x-12}{2x^2-11x+15}$;

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{8+x^2}{3x^2+x+2}$;

в) $\lim\limits_{x\to0}\frac{tg^2 6x}{5x^2\cdot sinx}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+2}-\sqrt{x^2-2}\right)$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{4x-5}{4x+3}\right)^{2x}$;

е) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{5x+3}\right)^{6x+1}$.

В-27

а) $\lim\limits_{x\to-1}\frac{2x^2-x-3}{x^2-3x-4}$;

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^5-12x-4x^3}{4x^2+5x+1}$;

в) $\lim\limits_{x\to0}\frac{sin^2 x}{tg^2 4x}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2-x+1}\right)$;

д) $\lim\limits_{x\to0}\left(1-\frac{12x}{8}\right)^{\frac{-4}{3x}}$;

е) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{5}{3x-1}\right)^{4x+3}$.

В-28

а) $\lim\limits_{x\to-2}\frac{-2+3x+2x^2}{3x^2+2x-8}$

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^6-2-x^3}{x^5+4x^6+1}$;

в) $\lim\limits_{x\to0}\frac{sin^2 6x}{tg^2 7x}$;

г)

В-29

а) $\lim\limits_{x\to1}\frac{3x^2-5x+2}{2x^2-x-1}$;

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^2-2x-2x^3}{x^3+4x+1}$;

в) $\lim\limits_{x\to0}\frac{7sin^2 3x}{tg2x}$;

В-30

а) $\lim\limits_{x\to2}\frac{10x-3x^2-8}{3x^2-8x+4}$;

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{8x^4-2x-x^3}{-4x^3+4x+1}$;

в) $\lim\limits_{x\to0}\frac{sin^2 8x}{10tg^2 2x}$;

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+3x-5}-x\right)$

д) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1-\frac{2x}{5}\right)^{\frac{-4}{9x}}$;

е) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{5}{11x+1}\right)^{-6x+1}$.

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-5x+7}-x\right)$;

д) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1-\frac{5x}{9}\right)^{\frac{-3}{5x}}$;

е) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{4}{7x+1}\right)^{5x+2}$.

г) $\lim\limits_{x\to -4}\frac{\sqrt{x+12}-\sqrt{4-x}}{x^2+2x-8}$;

д) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1-\frac{14x}{8}\right)^{\frac{-7}{5x}}$;

е) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{8}{6x-12}\right)^{-5x^4}$.

Васильева Светлана Егоровна

Математический анализ

Часть 1

Учебное пособие, предназначено для студентов очной и заочной формы обучения направления подготовки 21.02.04 –Землеустройство, колледжа автомобильного транспорта и агротехнологий ФГБОУ ВО «Иркутский государственный аграрный университет имени А.А. Ежевского»

Редактор Тесля В.И.

Подготовка оригинал-макета: Васильева С.Е.

Лицензия ЛР № 070444 от 11.03.98 г.

Формат 60х84

Усл. печ. л. 3,2

Тираж 250 экз.

Отпечатано на ризографе ИрГСХА

664038 г. Иркутск, пос. Молодежный