

**МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**  
**ИРКУТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ**  
**им. А.А.ЕЖЕВСКОГО**

**КОЛЛЕДЖ АВТОМОБИЛЬНОГО ТРАНСПОРТА И**  
**АГРОТЕХНОЛОГИЙ**

**Васильева С.Е.**

**Математический анализ**  
**(часть 1)**

Учебное пособие, предназначено для студентов очной и заочной формы обучения направления подготовки 21.02.04 – Землеустройство, колледжа автомобильного транспорта и агротехнологий ФГБОУ ВО «Иркутский государственный аграрный университет имени А.А. Ежевского»

**Молодежный -2021**

УДК

Автор ст. преподаватель Васильева С.Е.

Рецензенты: доцент кафедры математики Иркутского ГАУ им. А.А.

Ежевского Т.А. Шумай

Компьютерный набор и верстка: ст. преподаватель Васильева С.Е

**Математический анализ (часть 1)** Учебное пособие, предназначено для студентов очной и заочной формы обучения направления подготовки 21.02.04 –Землеустройство, колледжа автомобильного транспорта и агротехнологий ФГБОУ ВО «Иркутский государственный аграрный университет имени А.А. Ежевского» /Иркут. гос. аграр. ун-т им. А.А. Ежевского; сост. С.Е. Васильева.-Молодежный: Изд-во ИрГАУ, 2021.- 87 с. – Текст электронный.

Настоящее пособие представляет собой систематизированную подборку примеров и задач, где рассмотрены основные вопросы математического анализа. В пособии приводятся основные определения и соответствующие формулы. Далее излагаются решения типовых примеров, затем следуют задачи для самостоятельного решения.

Пособие предназначено для студентов очной и заочной формы обучения направления подготовки 21.02.04 –Землеустройство, колледжа автомобильного транспорта и агротехнологий ФГБОУ ВО «Иркутский государственный аграрный университет имени А.А. Ежевского» Кроме того, она может быть полезна студентам технических специальностей.

© С.Е. Васильева, 2020

© Иркутский ГАУ, 2020

# 1. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

## 1.1 Основные понятия

*Комплексным числом*  $z$  называется выражение вида  $z = x + iy$ , где  $x$  и  $y$  – действительные числа, а  $i$  – так называемая *мнимая единица*,  $i^2 = -1$ .

Если  $x=0$ , то число  $0 + iy = iy$  называется *чисто мнимым*; если  $y=0$ , то число  $x + i0 = x$  отождествляется с действительным числом  $x$ , а это означает, что множество  $R$  всех действительных чисел является подмножеством множества  $C$  всех комплексных чисел, т.е.  $R \subset C$ .

Число  $x$  называется *действительной частью* комплексного числа  $z$  и обозначается  $x = \operatorname{Re} z$ , а  $y$  – *мнимой частью*  $z$ ,  $y = \operatorname{Im} z$ .

Два комплексных числа  $z_1 = x_1 + iy_1$  и  $z_2 = x_2 + iy_2$  называются *равными* ( $z_1 = z_2$ ) тогда и только тогда, когда равны их действительные части и равны их мнимые части:  $x_1 = x_2$ ,  $y_1 = y_2$ . В частности, комплексное число  $z = x + iy$  равно нулю тогда и только тогда, когда  $x = y = 0$ . Понятие «больше» и «меньше» для комплексных чисел не вводится.

Два комплексных числа  $z = x + iy$  и  $\bar{z} = x - iy$ , отличающихся лишь знаком мнимой части, называются *сопряженными*.

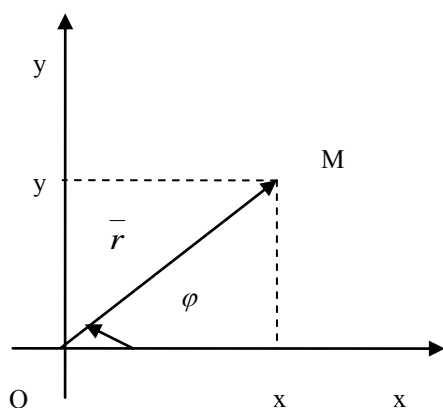
**Пример 1.** Для комплексного числа  $z = 5 - \sqrt{7}i$ , найти  $\operatorname{Re} z$  и  $\operatorname{Im} z$ .

**Решение:**  $\operatorname{Re} z = 5$ ,  $\operatorname{Im} z = \sqrt{7}$ .

**Пример 2.** Среди комплексных чисел  $z_1 = 2 - i$ ,  $z_2 = -3i$ ,  $z_3 = \sqrt{3} + i$ ,  $z_4 = 2 + i$ ,  $z_5 = 3i$ , найти сопряженные.

**Решение:** Числа  $z_1$  и  $z_4$ ,  $z_2$  и  $z_5$  отличаются лишь знаком мнимой части, значит они сопряженные  $z_1 = \bar{z}_4$ ,  $z_2 = \bar{z}_5$ .

## 1.2. Геометрическое изображение комплексных чисел



Всякое комплексное число  $z = x + iy$  можно изобразить точкой  $M(x; y)$  плоскости  $Oxy$  такой, что  $x = \operatorname{Re} z$ ,  $y = \operatorname{Im} z$ . И, наоборот, каждую точку  $M(x; y)$  координатной плоскости можно рассматривать как образ

комплексного числа  $z = x + iy$ .

Плоскость, на которой изображаются комплексные числа называется *комплексной* плоскостью (ее также обозначают  $C$ ). Ось абсцисс называется *действительной осью*, а ось ординат – *мнимой*.

Комплексное число  $z = x + iy$  можно изображать и с помощью радиус-вектора  $\vec{r} = \overline{OM} = (x; y)$ .

Длина вектора  $\vec{r}$ , изображающего комплексное число  $z$ , называется *модулем* этого числа и обозначается  $|z|$  или  $r$ . Модуль  $r = |z|$  однозначно определяется по формуле  $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

Величина угла между положительным направлением действительной оси и вектором  $\vec{r}$ , изображающим комплексное число, называется *аргументом* этого числа, обозначается  $\operatorname{Arg} z$ .

Аргумент комплексного числа  $z \neq 0$  величина многозначная:  $\operatorname{Arg} z = \arg z + 2k\pi, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , где  $\arg z = \varphi$  – *главное значение аргумента*, заключенное в промежутке  $(-\pi; \pi]$ , т.е.  $-\pi < \arg z \leq \pi$ . Аргумент комплексного числа  $z = 0 = 0 + i0$  не определен.

*Замечание.* В качестве значения аргумента можно брать величину принадлежащую промежутку  $[0; 2\pi)$ .

Аргумент  $\varphi$  определяется из формул  $\cos \varphi = \frac{x}{r}, \sin \varphi = \frac{y}{r}$ , где  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ . Аргумент  $z$  можно найти, используя формулу  $\operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}$ , т.к.

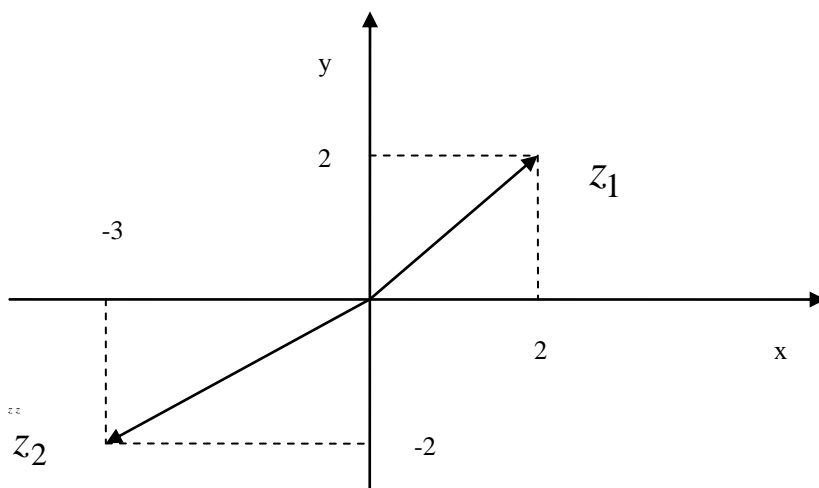
$-\pi < \operatorname{arg} z \leq \pi$ , то из формулы  $\operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}$  находим

$$\varphi = \operatorname{arg} z = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, & \text{для внутренних точек I, IV четвертей,} \\ \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + \pi, & \text{для внутренних точек II четверти,} \\ \operatorname{arctg} \frac{y}{x} - \pi, & \text{для внутренних точек III четверти.} \end{cases}$$

**Пример 3.** Построить комплексные числа  $z_1 = 2 + 2i, z_2 = -3 - 2i$ .

Найти  $|z|$  и  $\operatorname{arg} z$ .

**Решение:**



Модули находим по формуле  $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

$$|z_1| = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}, \quad |z_2| = \sqrt{(-3)^2 + (-2)^2} = \sqrt{13}.$$

Т.к.  $z_1$  находится в I четверти  $x_1 = 2 > 0, y_1 = 2 > 0$ , то аргумент  $\varphi_1$

находим по формуле  $\varphi_1 = \operatorname{arg} z_1 = \operatorname{arctg} \frac{2}{2} = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$ .

$z_2$  находится в III четверти  $x_2 = -3 < 0, y_2 = -2 < 0$ , то аргумент  $\varphi_2$  находим по формуле  $\varphi_2 = \arg z_2 = \operatorname{arctg} \frac{-2}{-3} - \pi = \operatorname{arctg} \frac{2}{3} - \pi$ .

### 1.3. Формы записи комплексных чисел

Запись числа  $z$  в виде  $z = x + iy$  называют *алгебраической формой* комплексного числа.

Модуль  $r$  и аргумент  $\varphi$  комплексного числа можно рассматривать как полярные координаты вектора  $\vec{r} = \overline{OM}$ , изображающего комплексное число  $z = x + iy$ . Тогда получаем  $x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi$ . Следовательно, комплексное число  $z = x + iy$  можно записать в виде  $z = r \cos \varphi + ir \sin \varphi$  или  $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ . Такая запись комплексного числа называется *тригонометрической формой*.

Запись числа  $z$  в виде  $z = re^{i\varphi}$  или  $z = |z|e^{i \arg z}$  называют *показательной формой (или экспоненциальной)* комплексного числа.

**Пример 4.** Записать комплексное число  $z = -1 + i\sqrt{3}$  в тригонометрической и показательной формах.

**Решение:** Чтобы записать комплексное число в тригонометрической и показательной форме необходимо найти его модуль и аргумент:

$$|z| = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2,$$

$z$  находится в II четверти  $x = -1 < 0, y = \sqrt{3} > 0$ , то аргумент  $\varphi$  находим

$$\text{по формуле } \varphi = \arg z = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{-1} + \pi = -\frac{\pi}{3} + \pi = \frac{2\pi}{3}.$$

$$\text{Тригонометрическая форма: } z = 2 \left( \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right).$$

$$\text{Показательная форма: } z = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}.$$

#### 1.4. Действия над комплексными числами

Основные действия над комплексными числами  $z_1 = x_1 + iy_1$  и  $z_2 = x_2 + iy_2$ , заданные в алгебраической форме, определяются следующими равенствами:

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2),$$

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + y_1x_2),$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{\overline{z_2}}{\overline{z_2}} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \cdot \frac{y_1x_2 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}, \text{ где } z_2 \neq 0.$$

**Пример 5.** Найти  $z_1 + z_2$ ,  $z_1 - z_2$ ,  $z_1 \cdot z_2$ ,  $\frac{z_1}{z_2}$ , если

$$z_1 = 1 + 2i, \quad z_2 = 2 - i.$$

**Решение:**

$$z_1 + z_2 = (1 + 2i) + (2 - i) = (1 + 2) + i(2 - 1) = 3 + i;$$

$$z_1 - z_2 = (1 + 2i) - (2 - i) = (1 - 2) + i(2 - (-1)) = -1 + 3i;$$

$$z_1 \cdot z_2 = (1 + 2i) \cdot (2 - i) = (1 \cdot 2 - 2 \cdot (-1)) + i(1 \cdot (-1) + 2 \cdot 2) = 4 + 3i;$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(1 + 2i)(2 + i)}{(2 - i)(2 + i)} = \frac{1 \cdot 2 + 2 \cdot (-1)}{2^2 + (-1)^2} + i \cdot \frac{2 \cdot 2 - 1 \cdot (-1)}{2^2 + (-1)^2} = \frac{5i}{5} = i$$

При умножении комплексных чисел  $z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$  и  $z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$ , заданных в тригонометрической форме их модули перемножаются, а аргументы складываются, т.е.

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)).$$

**Пример 6.** Выполнить умножение

$$\left( \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right) \cdot \frac{1}{6} \left( \cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right).$$

**Решение:**

$$\begin{aligned}
& \left( \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right) \cdot \frac{1}{6} \left( \cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right) = \\
& = 1 \cdot \frac{1}{6} \left( \cos \left( \frac{2\pi}{3} + \frac{5\pi}{6} \right) + i \sin \left( \frac{2\pi}{3} + \frac{5\pi}{6} \right) \right) = \frac{1}{6} \left( \cos \frac{9\pi}{6} + i \sin \frac{9\pi}{6} \right) = \\
& = \frac{1}{6} \left( \cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} \right) = \frac{1}{6} (0 + i(-1)) = -\frac{1}{6}i.
\end{aligned}$$

Формула Муавра для возведения комплексного числа  $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$  в натуральную степень

$$z^n = (r(\cos \varphi + i \sin \varphi))^n = r^n \cdot (\cos n\varphi + i \sin n\varphi).$$

**Пример 7.** Найти  $(-1 - i\sqrt{3})^{15}$ .

**Решение:** Запишем число  $z = -1 - i\sqrt{3}$  в тригонометрической форме:

$$|z| = \sqrt{(-1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2,$$

$$\varphi = \arg z = \arctg \frac{-\sqrt{3}}{-1} - \pi = \frac{\pi}{3} - \pi = -\frac{2\pi}{3}.$$

По формуле Муавра имеем

$$\begin{aligned}
(-1 - i\sqrt{3})^{15} &= \left[ 2 \left( \cos \left( -\frac{2\pi}{3} \right) + i \sin \left( -\frac{2\pi}{3} \right) \right) \right]^{15} = \\
&= 2^{15} \cdot (\cos(-10\pi) + i \sin(-10\pi)) = 2^{15}(1 + 0i) = 2^{15} = 32768.
\end{aligned}$$

При делении комплексных чисел  $z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$  и  $z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$ , заданных в тригонометрической форме их модули, соответственно делятся, а аргументы, соответственно вычитаются, т.е.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)).$$

**Пример 8.** Выполнить деление

$$4 \left( \cos \frac{5\pi}{12} + i \sin \frac{5\pi}{12} \right) : \frac{1}{2} \left( \cos \left( -\frac{\pi}{12} \right) + i \sin \left( -\frac{\pi}{12} \right) \right).$$



**Решение:**

$$\begin{aligned} & 4\left(\cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12}\right) : \frac{1}{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right) = \\ & = \frac{4}{\frac{1}{2}}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{12} - \left(-\frac{\pi}{12}\right)\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{12} - \left(-\frac{\pi}{12}\right)\right)\right) = 8\left(\cos\frac{6\pi}{12} + i\sin\frac{6\pi}{12}\right) = \\ & = 8\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = 8(0 + i) = 8i. \end{aligned}$$

Корень  $n$ -ой степени из комплексного числа имеет  $n$  различных значений, которые находятся по формуле

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r} \cdot \left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right), \text{ где } k = \overline{0, n-1}$$

**Пример 9.** Найти все значения корня  $\sqrt[3]{-i}$ .

**Решение:** Запишем число  $z = -i$  в тригонометрической форме:

$$|z| = \sqrt{0^2 + (-1)^2} = 1, \quad \varphi = \arg z = -\frac{\pi}{2},$$

$$z = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right).$$

$$\sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)} = \cos\frac{-\frac{\pi}{2} + 2\pi k}{3} + i\sin\frac{-\frac{\pi}{2} + 2\pi k}{3}, \quad k = 0, 1, 2.$$

Пологая  $k = 0, 1, 2$ , получим

$$k = 0, \quad z_0 = \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2},$$

$$k = 1, \quad z_1 = \cos\frac{\pi}{2} + i \sin\frac{\pi}{2} = i,$$

$$k = 2, \quad z_2 = \cos\frac{7\pi}{6} + i \sin\frac{7\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}.$$

**Пример 10.** Даны два комплексных числа  $z_1 = 1 - \frac{7}{2}i$ ;  $z_2 = -7 - 2i$ .

Требуется а) найти значение выражения  $\left(\frac{1 - \frac{7}{2}i}{-7 - 2i}\right)^{-4}$  в алгебраической

форме, б) для числа  $z = 2 - 2\sqrt{3}i$  найти тригонометрическую форму, найти  $z^{20}$ , найти корни уравнения  $w^3 + z = 0$ .

**Решение.**

а) Очевидно, справедливо следующее преобразование:

$$\left(\frac{1 - \frac{7}{2}i}{-7 - 2i}\right)^{-4} = \left(\frac{2 - 7i}{-14 - 4i}\right)^{-4} = \left(\frac{-14 - 4i}{2 - 7i}\right)^4 = 16\left(\frac{-7 - 2i}{2 - 7i}\right)^4$$

Далее производим деление двух комплексных чисел:

$$\frac{-7 - 2i}{2 - 7i} = \frac{(-7 - 2i)(2 + 7i)}{(2 - 7i)(2 + 7i)} = \frac{-14 - 49i - 4i + 14}{4 + 49} = \frac{-53i}{53} = -i.$$

Получаем значение заданного выражения:  $16(-i)^4 = 16i^4 = 16$ .

б) Число  $z = 2 - 2\sqrt{3}i$  представим в виде  $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ , где

$$r = |z| = \sqrt{4 + 12} = 4; \quad \varphi = \arctg \frac{b}{a} = \arctg(-\sqrt{3}) = -60^\circ$$

Тогда  $z = 4(\cos 60^\circ - i \sin 60^\circ)$ .

Для нахождения  $z^{20}$  воспользуемся формулой Муавра.

$$\begin{aligned} z^{20} &= 4^{20}(\cos 1200^{\circ} - i \sin 1200^{\circ}) = 4^{20}(\cos(3 \cdot 2\pi + 120^{\circ}) - i \sin(3 \cdot 2\pi + 120^{\circ})) = \\ &= 4^{20}(\cos 120^{\circ} - i \sin 120^{\circ}) = -4^{20} \left( \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i \right). \end{aligned}$$

Если  $w^3 + z = 0$ , то  $w = \sqrt[3]{z}$

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{z} &= \sqrt[3]{r} \left( \cos \frac{\varphi + 2\pi k}{3} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{3} \right) = \\ &= \sqrt[3]{4} \left( \cos \frac{-60^{\circ} + 2\pi k}{3} + i \sin \frac{-60^{\circ} + 2\pi k}{3} \right); \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Задания для самостоятельной работы.

1. Построить комплексные числа. Найти  $|z|$  и  $\arg z$ .

- a)  $z = 2 - i$ ;
- б)  $z = -3 + i$ ;
- в)  $z = -5i$ ;
- г)  $z = -1 + i$ ;
- д)  $z = -6$ .

2. Записать комплексные числа в тригонометрической и показательной формах.

- a)  $z = 2 + 4i$ ;
- б)  $z = \sqrt{3} + i$ ;
- в)  $z = 2006$ ;
- г)  $z = 2 \cos \frac{\pi}{3} - 2i \sin \frac{\pi}{3}$ ;
- д)  $z = 12i$ .

3. Найти  $z_1 + z_2$ ,  $z_1 - z_2$ ,  $z_1 \cdot z_2$ ,  $\frac{z_1}{z_2}$ , если

а)  $z_1 = -2 + 5i$ ,  $z_2 = 3 - 4i$ ;

б)  $z_1 = 5 + 2\sqrt{6}i$ ,  $z_2 = 5 - 2\sqrt{6}i$ ;

в)  $z_1 = 5 - 3i$ ,  $z_2 = -1 + 6i$ ;

г)  $z_1 = 1 + 2i$ ,  $z_2 = -4 + 7i$ ;

д)  $z_1 = 2 + 2i$ ,  $z_2 = 1 - i$ .

4. Выполнить умножение

а)  $8\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) \cdot \frac{1}{4}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$ ;

б)  $\sqrt{3}(\cos 92^\circ + i\sin 92^\circ) \cdot \sqrt{6}(\cos 88^\circ + i\sin 88^\circ)$ .

5. Выполнить деление

а)  $4\left(\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right) : 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$ ;

б)  $\sqrt{6}(\cos 160^\circ + i\sin 160^\circ) : \sqrt{3}(\cos 40^\circ + i\sin 40^\circ)$ .

6. Возвести в степень

а)  $(-1 + i\sqrt{3})^9$ ;

б)  $(1 + i)^{10}$ ;

в)  $(2 + i2)^5$ .

7. Извлечь корни

а)  $\sqrt[3]{-8i}$ ;

б)  $\sqrt[3]{-125}$ ;

в)  $\sqrt[4]{-8-8\sqrt{3}i}$ .

## Контрольная работа 1

1) Найти значение выражения.

2) Даны комплексные числа  $z_1$  и  $z_2$ . Вычислить: а)  $2z_1 \pm 3z_2$ ; б)  $\bar{z}_1 \cdot (-z_2)$ ;

в)  $\frac{z_1}{z_2}$ ; г)  $(z_1)^6$ ; д)  $\sqrt[3]{z_1}$ ; е) представить  $z_1$  и  $z_2$  в различных формах записи

КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ.

<p><b>В-1</b></p> <p>1) <math>i^{15} - 5i^2 + 3i^4 - i + 17</math>.</p> <p>2) <math>z_1 = -3 + 3\sqrt{3}i</math>, <math>z_2 = i</math>.</p>	<p><b>В-2</b></p> <p>1) <math>4i^{13} - i^2 - 3i^5 + 2i + 1</math>.</p> <p>2) <math>z_1 = 4\sqrt{3} + 4i</math>, <math>z_2 = 2i</math>.</p>	<p><b>В-3</b></p> <p>1) <math>-i^{12} - 5i^2 + i^5 - i + 10</math>.</p> <p>2) <math>z_1 = \frac{\sqrt{3}}{8} + \frac{i}{8}</math>, <math>z_2 = -3i</math>.</p>
<p><b>В-4</b></p> <p>1) <math>i^{12} - 7i^9 - i^6 + 6i + 5</math>.</p> <p>2) <math>z_1 = \sqrt{2} + \sqrt{2}i</math>, <math>z_2 = -6i</math>.</p>	<p><b>В-5</b></p> <p>1) <math>-2i^{24} - 5i^{15} + i^9 + i</math>.</p> <p>2) <math>z_1 = \sqrt{3} + i</math>, <math>z_2 = \sqrt{2}i</math>.</p>	<p><b>В-6</b></p> <p>1) <math>-8i^{23} + 2i^{19} - i^3 + 6i - 4</math>.</p> <p>2) <math>z_1 = \sqrt{3} - i</math>, <math>z_2 = 4i</math>.</p>
<p><b>В-7</b></p> <p>1) <math>-5i^{33} - 4i^{19} + 3i^2 - 8</math>.</p> <p>2) <math>z_1 = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{i}{4}</math>, <math>z_2 = -3i</math>.</p>	<p><b>В-8</b></p> <p>1) <math>-6i^{45} - 5i^{22} + i^4 + 9i</math>.</p> <p>2) <math>z_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i</math>, <math>z_2 = -5i</math>.</p>	<p><b>В-9</b></p> <p>1) <math>-14i^{28} - 7i^3 + 2i^{15} + 8</math>.</p> <p>2) <math>z_1 = \sqrt{2} + \sqrt{2}i</math>, <math>z_2 = 6i</math>.</p>
<p><b>В-10</b></p> <p>1) <math>-i^{35} + 9i^{17} - 8i^{10} + 12i^2</math>.</p> <p>2) <math>z_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i</math>, <math>z_2 = -7i</math>.</p>	<p><b>В-11</b></p> <p>1) <math>-7i^{56} - i^{42} - 8i^5 + 1</math>.</p> <p>2) <math>z_1 = \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{i}{3}</math>, <math>z_2 = 8i</math>.</p>	<p><b>В-12</b></p> <p>1) <math>-9i^{25} - 5i^{14} + i^5 + 6i - 3</math>.</p> <p>2) <math>z_1 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i</math>, <math>z_2 = 9i</math>.</p>
<p><b>В-13</b></p> <p>1) <math>-4i^{37} - 2i^{12} - 3i^5 + 24i^6</math>.</p> <p>2) <math>z_1 = \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{3}}{3}i</math>, <math>z_2 = -10i</math>.</p>	<p><b>В-14</b></p> <p>1) <math>i^{57} - 4i^{35} - 7i^{15} + i + 9</math>.</p> <p>2) <math>z_1 = 3\sqrt{3} - 3i</math>, <math>z_2 = \sqrt{2}i</math>.</p>	<p><b>В-15</b></p> <p>1) <math>-25i^{19} + 2i^2 - 13i^5 + 10</math>.</p> <p>2) <math>z_1 = 4 - 4\sqrt{3}i</math>, <math>z_2 = 3i</math>.</p>

<p><b>B-16</b></p> <p>1) <math>-14i^{43} - 5i^{72} - 3i^5 + 7</math></p> <p>2) <math>z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i, z_2 = 2i.</math></p>	<p><b>B-17</b></p> <p>1) <math>-37i^{40} - 5i^{29} - i^{17}i.</math></p> <p>2) <math>z_1 = \sqrt{3} - i, z_2 = \sqrt{3}i.</math></p>	<p><b>B-18</b></p> <p>1) <math>-5i^{63} - 4i^{13} - 7i^{18} + 2.</math></p> <p>2) <math>z_1 = -3 + \sqrt{3}i, z_2 = 7i.</math></p>
<p><b>B-19</b></p> <p>1) <math>4i^{100} - 17i^{12} - i^5i.</math></p> <p>2) <math>z_1 = 2\sqrt{3} + 2i, z_2 = 8i.</math></p>	<p><b>B-20</b></p> <p>1) <math>-8i^{13} \cdot i^2 - 8i^{12} - i^7.</math></p> <p>2) <math>z_1 = \frac{\sqrt{3}}{5} + \frac{i}{5}, z_2 = -9i.</math></p>	<p><b>B-21</b></p> <p>1) <math>-i^{17} - i^{22} - i^{45} + 12i.</math></p> <p>2) <math>z_1 = \sqrt{3} + 3i, z_2 = -4i.</math></p>
<p><b>B-22</b></p> <p>1) <math>-9i^3 - i^{20} - 5i^7 + 6i.</math></p> <p>2) <math>z_1 = \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i, z_2 = 10i.</math></p>	<p><b>B-23</b></p> <p>1) <math>-6i^{17} - 8i^{12} - 4i^{15} + 3i</math></p> <p>2) <math>z_1 = \sqrt{2} - \sqrt{2}i, z_2 = -2i.</math></p>	<p><b>B-24</b></p> <p>1) <math>5i^{23} - 4i^{12} - 3i^{25} + 7.</math></p> <p>2) <math>z_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i, z_2 = \sqrt{3}i.</math></p>
<p><b>B-25</b></p> <p>1) <math>-7i^4 - 8i^{10} - 3i^{15} + 4.</math></p> <p>2) <math>z_1 = \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{i}{3}, z_2 = -8i.</math></p>	<p><b>B-26</b></p> <p>1) <math>8i^{13} - i^7 + 13i^{10} + 3.</math></p> <p>2) <math>z_1 = \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{3}}{3}i, z_2 = -6i.</math></p>	<p><b>B-27</b></p> <p>1) <math>-5i^{17} - 6i^{22} - 7i^{15} + 9i</math></p> <p>2) <math>z_1 = 2 - 2i, z_2 = -\sqrt{2}i.</math></p>
<p><b>B-28</b></p> <p>1) <math>4i^{13} - 5i^2 - i^{15} + 2i.</math></p> <p>2) <math>z_1 = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}i, z_2 = 7i.</math></p>	<p><b>B-29</b></p> <p>1) <math>-8i^4 - i^{13} + i^{45} + 10i.</math></p> <p>2) <math>z_1 = 3 + 3i, z_2 = -3i.</math></p>	<p><b>B-30</b></p> <p>1) <math>-8i^{23} - i^{33} + i^{17} + 36i</math></p> <p>2) <math>z_1 = 1 - i, z_2 = 3i.</math></p>

## 2. Предел функции

### 2.1. Основные понятия

Пусть  $D$  — некоторое множество чисел. Если задан закон, по которому каждому числу  $x$  из множества  $D$  ставится в соответствие единственное определенное число  $y$ , то будем говорить, что на множестве  $D$  задана функция, которую назовём  $f$ . Число  $y$  — это значение функции  $f$  в точке  $x$ , что обозначается формулой  $y = f(x)$ .

Число  $x$  называется аргументом функции, множество  $D$  — областью определения функции, а все значения  $y$  образуют множество  $E$ , которое называется множеством значений или областью изменения функции.

Функция  $f$  называется возрастающей (убывающей) на множестве  $G$ , если для любых чисел  $x_1$  и  $x_2$  из множества  $G$ , таких что  $x_1 < x_2$ , выполняется условие  $f(x_1) < f(x_2)$  ( $f(x_1) > f(x_2)$ ).

Так как между множеством действительных чисел и множеством точек числовой оси можно установить взаимно-однозначное соответствие, в дальнейшем изложении понятиям “число  $x$ ” и “точка  $x$  числовой оси” в некоторых случаях будет придаваться один и тот же смысл. Например, вместо “значение функции при значении аргумента, равном  $x_1$ ” будет говориться “значение функции в точке  $x_1$ ”. В нижеследующем определении можно везде заменить выражение “точка  $x$ ” на выражение “число  $x$ ”.

Пусть  $\varepsilon$  — некоторое положительное число.  **$\varepsilon$ -окрестностью** точки  $x_0$  называется множество всех точек  $x$ , принадлежащих промежутку  $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ , кроме самой точки  $x_0$ . Принадлежность точки  $x$   $\varepsilon$ -окрестности точки  $x_0$  можно выразить с помощью двойного неравенства

$$0 < |x - x_0| < \varepsilon.$$

Число  $\varepsilon$  называется **радиусом окрестности**.

### 2.2. Предел и непрерывность функции

Рассмотрим функцию  $y = x^2$  в точке  $x_0 = 2$ . Значение функции в этой точке равно 4.

Отметим одну особенность поведения функции в этой точке. Можно

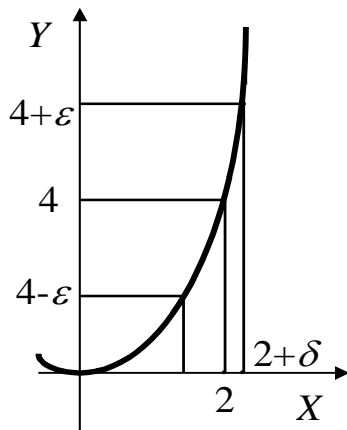


Рис. 1

выбрать какое-либо положительное число  $\varepsilon$  и построить  $\varepsilon$ -окрестность точки  $y_0 = 4$ . Очевидно, что найдется такая окрестность точки  $x_0 = 2$  (на рисунке 1 эта окрестность имеет радиус  $\delta$ ), что если  $x$  будет лежать в этой окрестности, то соответствующее значение  $y$ , равное  $x^2$ , попадет в  $\varepsilon$ -окрестность точки  $y_0 = 4$ . Это заключение справедливо для любого, сколь угодно малого числа  $\varepsilon$ . Здесь точка  $x_0 = 2$  выбрана произвольно. Можно было бы для данной функции выбрать любую другую точку и сделать подобное заключение.

Рассмотрим функцию  $y = \frac{2x^2 - 5x - 2}{x - 2}$ . Эта функция не определена в точке  $x_0 = 2$ . При  $x_0 \neq 2$  её можно преобразовать:

$$y = \frac{2(x - 2)(x - 0,5)}{x - 2} = 2x - 1.$$

График функции представлен на рисунке 2. Хотя исходная функция не определена в точке  $x_0 = 2$  и естественно не равна 3 в этой точке,

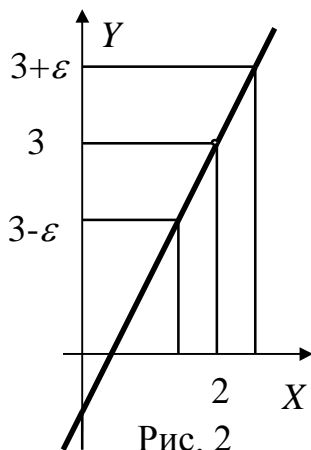


Рис. 2

точка  $y_0 = 3$  имеет характерную особенность. Выбрав положительное число  $\varepsilon$ , можно утверждать, что если рассматривать значения  $x$ , расположенные достаточно близко к точке  $x_0 = 2$  (или лежащие в некоторой окрестности точки  $x_0 = 2$ , причем радиус этой окрестности зависит от  $\varepsilon$ ), то соответствующие значения  $y$  попадут в  $\varepsilon$ -окрестность точки  $y_0 = 3$ . Всё сказанное остаётся справедливым независимо от того, насколько малым выбрано положительное число  $\varepsilon$ .

Введем понятие предела функции. Число  $A$  называется **пределом функции**  $y = f(x)$  в точке  $x_0$  (иногда говорят, при  $x$ , стремящемся к  $x_0$ ), если для любого положительного числа  $\varepsilon$  можно найти такое положительное число  $\delta$ , что для всех  $x$  из  $\delta$ -окрестности точки  $x_0$  соответствующие значения  $y$  попадают в  $\varepsilon$ -окрестность точки  $y = A$ .

Можно сформулировать определение предела функции по-другому. Число  $A$  называется **пределом функции**  $y = f(x)$  в точке  $x_0$ , если для любого положительного числа  $\varepsilon$  можно найти такое положительное число  $\delta$ , что для всех  $x$ , удовлетворяющих условию

$$0 < |x - x_0| < \delta,$$



выполняется условие

$$|y - A| < \varepsilon.$$

Тот факт, что  $A$  есть предел функции  $y = f(x)$  в точке  $x = x_0$ , записывается формулой

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A.$$

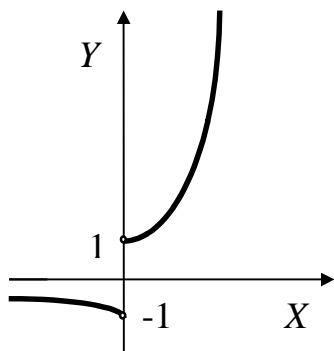


Рис. 3

Как видно из второго из рассмотренных выше примеров, для того, чтобы функция имела предел в точке  $x = x_0$ , не требуется, чтобы она была определена в этой точке.

Рассмотрим функцию  $y = \frac{|x|}{x} 2^x$ . Очевидно, что если  $x > 0$ , то  $y = 2^x$ ; если  $x < 0$ , то  $y = -2^x$ ; при  $x = 0$  функция не определена.

График функции изображен на рисунке 3. Легко убедиться в том, что, согласно приведенному выше определению предела, эта функция в точке  $x = 0$  предела не имеет.

Функция  $y = f(x)$  называется **непрерывной в точке**  $x = x_0$ , если она определена в этой точке и ее значение  $f(x_0)$  равно пределу функции в этой точке:  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ .

Функция  $y = x^2$  непрерывна в точке  $x = 2$ , как и во всех точках числовой оси. Функция  $y = \frac{2x^2 - 5x + 2}{x - 2}$  не является непрерывной в точке  $x = 2$ . Функция  $y = \frac{|x|}{x} 2^x$  не является непрерывной в точке  $x = 0$ .

Функция, непрерывная в каждой точке открытого промежутка, называется **непрерывной на этом промежутке**.

Приведем свойства предела функции.

1. Функция не может иметь в одной точке два разных предела.

2.  $\lim_{x \rightarrow x_0} C = C$ , если  $C$  — постоянная функция.

3. Если существует  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  и  $C$  — постоянная функция, то

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (Cf(x)) = C \lim_{x \rightarrow x_0} f(x).$$

4. Если существуют  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  и  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ , то существует

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)), \text{ равный } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x), \text{ а также существует}$$

$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x)g(x))$ , равный  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ . Если при этом  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \neq 0$ , то существует  $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x)/g(x))$ , равный  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) / \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ .

Введем определения так называемых “односторонних пределов”.

Число  $B$  называется **пределом функции  $f(x)$  в точке  $a$  справа** (это записывается в виде формулы  $B = \lim_{x \rightarrow a+} f(x)$ ), если для любого

положительного числа  $\varepsilon$  найдется положительное число  $\delta$ , такое что из условия  $0 < x - a < \delta$  будет следовать  $|B - f(x)| < \varepsilon$ .

Согласно приведенному определению  $\lim_{x \rightarrow 0+} \sqrt{x} = 0$ . Отметим, что обыкновенного предела функция  $y = \sqrt{x}$  в точке  $x = 0$  не имеет.

Число  $C$  называется **пределом функции  $f(x)$  в точке  $b$  слева** (это записывается в виде формулы  $C = \lim_{x \rightarrow b-} f(x)$ ), если для любого

положительного числа  $\varepsilon$  найдется положительное число  $\delta$  такое, что из условия  $0 < b - x < \delta$  будет следовать  $|C - f(x)| < \varepsilon$ .

Очевидно, что функция  $y(x) = \frac{|x|}{x} 2^x$  (её график, изображен на рисунке 3) имеет два односторонних предела в точке  $x = 0$ :

$$\lim_{x \rightarrow 0+} y(x) = 1; \quad \lim_{x \rightarrow 0-} y(x) = -1.$$

Функция  $f(x)$  называется **непрерывной в точке  $a$  справа** (непрерывной в точке  $b$  слева), если

$$\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = f(a) \quad (\lim_{x \rightarrow b-} f(x) = f(b)).$$

Функция  $y = \sqrt{x}$  непрерывна справа в точке  $x=0$ .

Функция называется **непрерывной на замкнутом промежутке  $[a, b]$** , если она непрерывна на открытом промежутке  $(a, b)$ , непрерывна справа в точке  $a$  и непрерывна слева в точке  $b$ .

Достаточно просто можно доказать теорему, связывающую понятия предела функции в точке и односторонних пределов. Мы ограничимся только формулировкой теоремы.

Для того, чтобы выполнялось равенство  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ , необходимо и достаточно, чтобы одновременно выполнялись два равенства:

$$\lim_{x \rightarrow x_0+} f(x) = A; \quad \lim_{x \rightarrow x_0-} f(x) = A$$

В дальнейшем нам понадобятся понятия предела функции в бесконечно удалённых точках. Рассмотрим сначала функцию  $f(x)$ , определенную на полубесконечном промежутке  $(x_0; \infty)$ . Число  $A$  называется пределом функции  $f(x)$  при  $x$ , стремящемся к бесконечности:

$$A = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x),$$

если для любого положительного числа  $\varepsilon$  можно найти такое положительное число  $M$  (зависящее от  $\varepsilon$ ), что для всех чисел  $x$ , превосходящих  $M$ , выполняется условие:

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

Пусть теперь функция  $f(x)$  определена на полубесконечном промежутке  $(-\infty; x_0)$ . Число  $A$  называется пределом функции  $f(x)$  при  $x$ , стремящемся к минус бесконечности:

$$A = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x),$$

если для любого положительного числа  $\varepsilon$  можно найти такое положительное число  $M$  (зависящее от  $\varepsilon$ ), что для всех чисел  $x$ , меньших, чем  $-M$ , выполняется условие:

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

Отметим два, так называемых, "замечательных предела".

1.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ . Геометрический смысл этой формулы заключается в том, что прямая  $y = x$  является касательной к графику функции  $y = \sin x$  в точке  $x = 0$ .

2.  $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{1/x} = e$ . Здесь  $e$  — иррациональное число, приблизительно равное 2,72.

Приведем пример применения понятия предела функции в экономических расчетах. Рассмотрим обыкновенную финансовую сделку: предоставление в долг суммы  $S_0$  с условием, что через период времени  $T$  будет возвращена сумма  $S_T$ . Определим величину  $r$  **относительного роста** формулой

$$r = \frac{S_T - S_0}{S_0}. \quad (1)$$

Относительный рост можно выразить в процентах, умножив полученное значение  $r$  на 100.

Из формулы (1) легко определить величину  $S_T$ :

$$S_T = S_0(1 + r)$$

При расчете по долгосрочным кредитам, охватывающим несколько полных лет, используют схему сложных процентов. Она состоит в том, что если за 1-й год сумма  $S_0$  возрастает в  $(1 + r)$  раз, то за второй год в  $(1 + r)$  раз возрастает сумма  $S_1 = S_0(1 + r)$ , то есть  $S_2 = S_0(1 + r)^2$ . Аналогично получается  $S_3 = S_0(1 + r)^3$ . Из приведенных примеров можно вывести общую формулу для вычисления роста суммы за  $n$  лет при расчете по схеме сложных процентов:

$$S_n = S_0(1 + r)^n.$$

В финансовых расчетах применяются схемы, где начисление сложных процентов производится несколько раз в году. При этом оговариваются **годовая ставка  $r$**  и **количество начислений за год  $k$** . Как правило, начисления производятся через равные промежутки времени, то есть длина каждого промежутка  $T_k$  составляет  $\frac{1}{k}$  часть года. Тогда для срока в  $T$  лет (здесь  $T$  не обязательно является целым числом) сумма  $S_T$  рассчитывается по формуле

$$S_T = S_0 \left(1 + \frac{r}{k}\right)^m \quad (2)$$

Здесь  $m = \left[ \frac{T}{T_k} \right]$  — целая часть числа  $\frac{T}{T_k}$ , которая совпадает с самим числом, если, например,  $T$  - целое число.

Пусть годовая ставка равна  $r$  и производится  $n$  начислений в год через равные промежутки времени. Тогда за год сумма  $S_0$  наращивается до величины, определяемой формулой

$$S_1 = S_0 \left(1 + \frac{r}{n}\right)^n \quad (3)$$

В теоретическом анализе и в практике финансовой деятельности часто встречается понятие “непрерывно начисляемый процент”. Чтобы перейти к непрерывно начисляемому проценту, нужно в формулах (2) и (3) неограниченно увеличивать соответственно, числа  $k$  и  $n$  (то есть устремить  $k$  и  $n$  к бесконечности) и вычислить, к какому пределу будут стремиться функции  $S_T$  и  $S_1$ . Применим эту процедуру к формуле (3):

$$S_1^* = \lim_{n \rightarrow \infty} S_1 = S_0 \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{r}{n}\right)^n = S_0 \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{\frac{n}{r}} \right)^r = S_0 \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{\frac{n}{r}} \right\}^r.$$

Заметим, что предел в фигурных скобках совпадает со вторым замечательным пределом. Отсюда следует, что при годовой ставке  $r$  при непрерывно начисляемом проценте сумма  $S_0$  за 1 год наращивается до величины  $S_1^*$ , которая определяется из формулы

$$S_1^* = S_0 e^r. \quad (4)$$

Пусть теперь сумма  $S_0$  предоставляется в долг с начислением процента  $n$  раз в год через равные промежутки времени. Обозначим  $r_e$  годовую ставку, при которой в конце года сумма  $S_0$  наращивается до величины  $S_1^*$  из формулы (4). В этом случае будем говорить, что  $r_e$  — это **годовая ставка при начислении процента  $n$  раз в год, эквивалентная годовому проценту  $r$  при непрерывном начислении**. Из формулы (3) получаем

$$S_1^* = S_0 \left(1 + \frac{r_e}{n}\right)^n.$$

Приравнивая правые части последней формулы и формулы (4), полагая в последней  $T = 1$ , можно вывести соотношения между величинами  $r$  и  $r_e$ :

$$r = n \ln \left(1 + \frac{r_e}{n}\right), \quad r_e = n \left(e^{\frac{r}{n}} - 1\right).$$

Эти формулы широко используются в финансовых расчётах.

### 2.3. Пределы. Неопределенность вида: $\left(\frac{0}{0}\right)$ ; $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ ;

.

В данной теме рассматривается вычисление пределов функций, которое основывается на следующих теоремах:

1. Предел постоянной равен самой постоянной:

$$\lim_{x \rightarrow a} C = C, \quad (C = \text{const}).$$

2. Постоянный множитель можно выносить за знак предела:

$$\lim_{x \rightarrow a} C \cdot f(x) = C \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x).$$

3. Предел от алгебраической суммы нескольких функций равен алгебраической сумме пределов этих же функций:

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \pm \varphi(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} \varphi(x).$$

4. Предел произведения нескольких функций равен произведению пределов этих же функций:

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot \varphi(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} \varphi(x).$$

5. Предел частного функций равен частному пределов, при условии, что предел знаменателя не равен нулю:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x)}, \quad \lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) \neq 0.$$

**Определение 20.** Величина (функция) называется *бесконечно малой* (б.м.), если ее предел при  $x \rightarrow a$ , равен нулю, т.е.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0.$$

**Определение 21.** Величина (функция) называется *бесконечно большой* (б.б.), если ее предел при  $x \rightarrow a$ , равен бесконечности, т.е.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty.$$

**Теорема 1 (о связи б.м. и б.б. величин):** Величина, обратная бесконечно большой, есть величина бесконечно малая и, наоборот, величина, обратная бесконечно малой, есть величина бесконечно большая.

Символически это обозначают так:  $\frac{1}{\infty} = 0$  и  $\frac{1}{0} = \infty$ .

### Свойства бесконечно малых величин

Пусть  $\alpha, \beta$  – б.м. величины,  $y$  – переменная величина, имеющая предел, равный  $A$ , т.е.  $\lim_{x \rightarrow a} y = A (const)$ . Тогда справедливы следующие свойства, которые символически можно представить так:

$$1. \alpha \pm \beta = 0. \quad 2. \alpha \cdot A = 0. \quad 3. \frac{\alpha}{A} = 0, \quad A \neq 0,$$

где  $A = const$ .

### Свойства бесконечно больших величин

Свойства б.б. величин также можно символически записать так:

$$1. \infty \pm A = \infty. \quad 2. \infty \cdot A = \infty. \quad 3. \frac{\infty}{A} = \infty.$$

$$4. \infty^n = \infty. \quad 5. \sqrt[n]{\infty} = \infty. \quad 6.$$

$$\begin{aligned} +\infty + (+\infty) &= +\infty \\ -\infty + (-\infty) &= -\infty \end{aligned}, \quad \text{где } \lim_{x \rightarrow a} y = A (const), \quad y \text{ – переменная величина.}$$

### I и II замечательные пределы

#### I замечательный предел:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad (\text{или } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1).$$

(38)

#### II замечательный предел:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = (1^\infty) = e \quad (\text{или } \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x} = (1^\infty) = e).$$

(39)

### Эквивалентные бесконечно малые величины

**Свойство эквивалентных б.м.в.:** при нахождении предела отношения двух б.м.в. можно каждую из них (или только одну) заменить другой б.м., эквивалентной ей.

Применение эквивалентностей б.м. значительно упрощает вычисление пределов. Приведем некоторые из них: пусть  $\alpha(x)$  – б.м.  $\rightarrow 0$  при  $x \rightarrow 0$ .

$$\sin \alpha(x) \sim \alpha(x);$$

$$a^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x) \cdot \ln a;$$

$$\operatorname{tg} \alpha(x) \sim \alpha(x);$$

$$e^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x);$$

$$\arcsin \alpha(x) \sim \alpha(x);$$

$$\sqrt{1+x} - 1 \sim \alpha(x)/2;$$

$$\operatorname{arctg} \alpha(x) \sim \alpha(x);$$

$$\ln(1 + \alpha(x)) \sim \alpha(x).$$

*Задача 6:* Вычислить пределы:

$$1) \lim_{x \rightarrow -3} \frac{4x^2 + 11x - 3}{3x^2 + 10x + 3},$$

$$2) \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \sqrt{x^2 + 3x} - x \right),$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\operatorname{arctg} 5x},$$

$$4) \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x-3}{2x+1} \right)^{4x+5}.$$

$$5. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^3}{2x^2 - 1} - \frac{x^2}{4x + 1} \right) = A,$$

*Решение:* 1) Подстановка предельного значения аргумента  $x = -3$  приводит к неопределенному выражению вида  $\frac{0}{0}$ .



Для устранения этой неопределенности разложим числитель и знаменатель дроби на множители и сократим дробь на множитель  $(x+3)$ . Такое сокращение здесь возможно, т.к. множитель  $(x+3)$  отличен от нуля при  $x = -3$ :

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{4x^2 + 11x - 3}{3x^2 + 10x + 3} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{(4x-1)(x+3)}{(3x+1)(x+3)} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{4x-1}{3x+1} = \frac{4 \cdot (-3) - 1}{3 \cdot (-3) + 1} = \frac{13}{8};$$

2) При  $x \rightarrow \infty$  выражение  $\sqrt{x^2 + 3x} - x$  дает неопределенность вида  $\infty - \infty$ . Для ее устранения умножим и разделим это выражение на  $(\sqrt{x^2 + 3x} + x)$ :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 3x} - x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 3x} - x) \cdot (\sqrt{x^2 + 3x} + x)}{\sqrt{x^2 + 3x} + x} = \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 3x - x^2}{\sqrt{x^2 + 3x} + x} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3}{\sqrt{1 + \frac{3}{x}} + 1} = \frac{3}{2}; \end{aligned}$$

3) Обозначим  $\operatorname{arctg} 5x = y$ . Тогда  $5x = \operatorname{tgy}$  и  $y \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow 0$ . Применяя

свойства предела  $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1$ , имеем:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\operatorname{arctg} 5x} = \frac{2}{5} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tgy}}{y} = \frac{2}{5} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} \cdot \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{\cos y} = \frac{2}{5} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{2}{5};$$

4) При  $x \rightarrow \infty$  выражение  $\left(\frac{2x-3}{2x+1}\right)^{4x+5}$  является неопределенностью

вида  $1^\infty$ . Для устранения этой неопределенности представим основание степени в виде 1 и бесконечно малой при  $x \rightarrow \infty$  величины и применим формулу второго замечательного предела:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e. \quad (13)$$

Тогда имеем:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x-3}{2x+1} \right)^{4x+5} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x+1-4}{2x+1} \right)^{4x+5} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{-4}{2x+1} \right)^{4x+5}$$

Пусть  $2x+1 = -4y$ . Тогда  $4x+5 = -8y+3$  и  $y \rightarrow -\infty$  при  $x \rightarrow \infty$ . Переходя к переменной  $y$ , получим:

$$\lim_{y \rightarrow -\infty} \left( 1 + \frac{1}{y} \right)^{-8y+3} = \left[ \lim_{y \rightarrow -\infty} \left( 1 + \frac{1}{y} \right)^y \right]^{-8} \cdot \lim_{y \rightarrow -\infty} \left( 1 + \frac{1}{y} \right)^3 = e^{-8} \cdot 1^3 = \frac{1}{e^8}.$$

5. Если необходимо найти предел

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^3}{2x^2-1} - \frac{x^2}{4x+1} \right) = A,$$

можно предварительно привести к общему знаменателю

$$A = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 + x^3 - 2x^4 + x^2}{(2x^2-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2x^4 + x^3 + x^2}{2x^3 + 2x^2 - x - 1}.$$

Поделив на член, имеющий максимальную степень, получим в числителе постоянную величину, а в знаменателе – все члены, стремящиеся к 0, то есть

$$A = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}{\frac{2}{x} + \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^4}} = -\infty.$$

**Пример 17.** Вычислить пределы: а)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 + x - 10}{x^2 + x - 6}$ ; б)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 - 3x + 1}{2x^2 + x - 5};$$

в)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{3x-2} - 2}{\sqrt{2x+5} - 3}$ ; г)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \sqrt{4x+x^2} - x \right)$ ; д)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{2x \cdot \sin 7x}$ ; е)

ж)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x}{\arctg 2x}$ ; з)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x-1}{2x+3} \right)^{4x^2-3}$ .

**Решение.** а) Непосредственная подстановка вместо  $x$  значения 2 в данную дробь приводит к неопределенности вида  $\left(\frac{0}{0}\right)$ . Чтобы раскрыть эту неопределенность, необходимо числитель и знаменатель разложить на линейные множители по формуле  $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ :

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 + x - 10}{x^2 + x - 6} = \left(\frac{0}{0}\right) = \left\{ \begin{array}{l} 2x^2 + x - 10 = 2(x-2)\left(x + \frac{5}{2}\right). \\ D = b^2 - 4ac = 1 - 4 \cdot 2 \cdot (-10) = 81. \\ x_{1;2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-1 \pm 9}{4} = 2; -\frac{5}{2}. \\ \text{Аналогично, } x^2 + x - 6 = (x-2)(x+3). \\ D = 1 - 4 \cdot 1 \cdot (-6) = 25. \\ x_{1;2} = \frac{-1 \pm 5}{2} = 2; -3. \end{array} \right\} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2(x-2)(x+\frac{5}{2})}{(x-2)(x+3)} = \left\{ \begin{array}{l} \text{т.к. } x \rightarrow 2 \text{ (но не равен 2), сократим на } (x-2); \\ (x-2) \text{ — критический множитель.} \end{array} \right\} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x+5}{x+3} = \frac{2 \cdot 2 + 5}{2 + 3} = \frac{9}{5} = 1,8.$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 - 3x + 1}{2x^2 + x - 5} = \frac{4 \cdot \infty^2 - 3 \cdot \infty + 1}{2 \cdot \infty^2 + \infty - 5} = \left\{ \text{по св-ам б.б. величин} \right\} = \left( \frac{\infty}{\infty} \right).$$

В данном случае получили неопределенность вида  $\left( \frac{\infty}{\infty} \right)$ . Чтобы ее раскрыть, пользуемся **правилом 1**: если под знаком предела при

$x \rightarrow \infty$ , стоит дробно-рациональная функция  $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ , в которой  $P_m(x)$  и

$Q_n(x)$  — многочлены степени  $m$  и  $n$  соответственно, то числитель и

знаменатель делим на  $x^k$ , где  $k$  — наивысшая степень многочленов

$P_m(x)$  и  $Q_n(x)$ . Другими словами, делим на  $x^m$ , если  $m \geq n$  и на  $x^n$ ,

если  $n > m$ .

**Правило 2** раскрытия неопределенности  $\left( \frac{\infty}{\infty} \right)$ : если под знаком

предела при  $x \rightarrow \infty$ , стоит дробно-рациональная функция  $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ , в

которой  $P_m(x)$  и  $Q_n(x)$  — многочлены степени  $m$  и  $n$  соответственно, то

предел равен отношению коэффициентов при  $x^k$ , где  $k$  — наивысшая

степень многочленов  $P_m(x)$  и  $Q_n(x)$ .

Итак, по **правилу 1**, числитель и знаменатель делим на  $x^2$ , т.к «2» – наивысшая степень  $x$  из числителя и знаменателя:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 - 3x + 1}{2x^2 + x - 5} = \left( \frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{4x^2}{x^2} - \frac{3x}{x^2} + \frac{1}{x^2}}{\frac{2x^2}{x^2} + \frac{x}{x^2} - \frac{5}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}}{2 + \frac{1}{x} - \frac{5}{x^2}} =$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4 - \frac{3}{\infty} + \frac{1}{\infty}}{2 + \frac{1}{\infty} - \frac{5}{\infty}} = \frac{4 - 0 + 0}{2 + 0 - 0} = \frac{4}{2} = 2.$$

По **правилу 2**: т.к. «2» – наивысшая степень  $x$  из числителя и знаменателя, то находим отношение коэффициентов при  $x^2$  в числителе и знаменателе: в числителе этот коэффициент равен 4, а в знаменателе – 2. Тогда предел будет равен:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\overset{\textcircled{4}}{x^2} - 3x + 1}{\underset{\textcircled{2}}{2}x^2 + x - 5} = \left( \frac{\infty}{\infty} \right) = \frac{4}{2} = 2.$$

в) Непосредственная подготовка предельного значения аргумента приводит к неопределенности вида  $\left( \frac{0}{0} \right)$ . Чтобы раскрыть эту неопределенность, умножим числитель и знаменатель дроби на произведение  $(\sqrt{3x-2}+2)(\sqrt{2x+5}+3)$ . Такое преобразование даст возможность сократить дробь на множитель  $(x-2)$ , отличный от нуля при  $x \rightarrow 2$ .

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{3x-2}-2}{\sqrt{2x+5}-3} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{3x-2}-2)(\sqrt{3x-2}+2)(\sqrt{2x+5}+3)}{(\sqrt{2x+5}-3)(\sqrt{3x-2}+2)(\sqrt{2x+5}+3)} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(3x-2-4)(\sqrt{2x+5}+3)}{(2x+5-9)(\sqrt{3x-2}+2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(3x-6)(\sqrt{2x+5}+3)}{(2x-4)(\sqrt{3x-2}+2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3(\sqrt{2x+5}+3)}{2(\sqrt{3x-2}+2)} = \frac{9}{4}$$

г) При  $x \rightarrow \infty$  получаем разность двух б.б.в., т.е. неопределенность вида  $(\infty - \infty)$ . Чтобы раскрыть эту неопределенность, умножим и разделим функцию, стоящую под знаком предела, на сумму  $(\sqrt{4x+x^2} + x)$  и затем сделаем необходимые преобразования:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{4x+x^2} - x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{4x+x^2} - x)(\sqrt{4x+x^2} + x)}{\sqrt{4x+x^2} + x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x+x^2-x^2}{\sqrt{4x+x^2} + x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x}{\sqrt{4x+x^2} + x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x}{\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{4}{x}\right)} + x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x}{x \left(\sqrt{\left(1 + \frac{4}{x}\right)} + 1\right)} = \frac{4}{\sqrt{1+0} + 1} = 2 \end{aligned}$$

д) Данный предел сведем к I замеч. пределу. Для этого числитель и знаменатель умножить на 3 и 7x:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{2x \cdot \sin 7x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin 3x \cdot 7x}{2 \cdot 3x \cdot \sin 7x \cdot 7x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{14x} = \frac{3}{0} = \infty.$$

**Замечание 4.** Этот предел можно было вычислить, применив свойство эквивалентных б.м.:  $\sin 3x \sim 3x$  и  $\sin 7x \sim 7x$  при  $x \rightarrow 0$ :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{2x \cdot \sin 7x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{2x \cdot 7x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{14x} = \frac{3}{0} = \infty.$$

е) 1 способ. Пусть  $\operatorname{arctg} 2x = y$ . Тогда  $\operatorname{tgy} = 2x$ ; очевидно, что при  $x \rightarrow 0$  и  $y \rightarrow 0$ . Имеем:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x}{\operatorname{arctg} 2x} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{2\operatorname{tgy}}{y} = 2.$$

2 способ. Применяя эквивалентность б.м.:  $\operatorname{arctg} 2x \sim 2x$  при  $x \rightarrow 0$ , получим:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x}{\operatorname{arctg} 2x} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{4x}{2x} = 2.$$

ж) Преобразуем выражение, стоящее под знаком предела:

$$\frac{2x-1}{2x+3} = \frac{(2x+3)-3-1}{2x+3} = \frac{2x+3}{2x+3} - \frac{4}{2x+3} = 1 - \frac{4}{2x+3}.$$

Исходный предел будет иметь неопределенность  $(1^\infty)$ , который надо будет свести к (39). Для этого выполним ряд действий: показатель

умножим на выражение, обратное выражению  $\left(-\frac{4}{2x+3}\right)$ . Это будет

$\left(-\frac{2x+3}{4}\right)$ , и чтобы действие было равносильным, снова умножим на

выражение  $\left(-\frac{4}{2x+3}\right)$ . В полученном пределе выделим II замеч.:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{4}{2x+3}\right)^{-\frac{2x+3}{4}} = e. \text{ Далее, основываясь на непрерывности}$$

элементарной функции  $e^x$ , перейдем к пределу показателя.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-1}{2x+3}\right)^{4x^2-3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{4}{2x+3}\right)^{4x^2-3} = (1^\infty) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{4}{2x+3}\right)^{-\frac{2x+3}{4} \cdot \left(-\frac{4}{2x+3}\right) \cdot 4x^2-3} =$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-\frac{4}{2x+3} \cdot 4x^2-3} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-16x^2+12}{2x+3}} = e^{\frac{-16}{0}} = e^{-\infty} = \frac{1}{e^\infty} = \frac{1}{\infty} = 0$$

В задачах 1-20 найди указанные пределы

1. 1)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - 7x + 2}{2x^2 - 5x + 2};$

2)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 3x + 1}{4x^2 + x - 2};$

3)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\operatorname{tg} 2x};$

4)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x-2}\right)^{2x+3}.$



$$2. 1) \lim_{x \rightarrow 7} \frac{x^2 - 8x + 7}{(x-7)^2};$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{3x-2} - 2}{x-2};$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x}{3x};$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{2}{x}}.$$

$$3. 1) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 + x - 1}{5x^2 + 4x - 1};$$

$$2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - 2x - x^2}{4x^2 - 5x + 2};$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\arcsin 3x};$$

$$4) \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x+3}{2x+1} \right)^{4x}.$$

$$4. 1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x^2 - 1};$$

$$2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 3}{4x^2 - 5x};$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{tg} 2x \cdot \operatorname{ctg} 4x;$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} (x+1)^{\frac{3}{x}}.$$

$$5. 1) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 + 3x + 1}{x^3 + 1};$$

$$2) \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x});$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x^2};$$

$$4) \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x-4}{x+2} \right)^{2x+2}.$$

$$6. 1) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - 10x + 8}{2x^2 - 3x - 2};$$

$$2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x} - 2x}{3x + 4};$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\operatorname{arctg} 2x};$$

$$4) \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x+1}{2x-1} \right)^{3x}.$$

$$7. 1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{2x^2 - x - 1};$$

$$2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x};$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{1 - \cos x};$$

$$4) \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3x+2}{3x+1} \right)^{6x-4}.$$

$$8. 1) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^3 - 27};$$

$$2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 3x + 4}{5 - 3x^2};$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 5x}{\operatorname{tg} 3x};$$

$$4) \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+3}{x+4} \right)^{2x-1}.$$

$$9. 1) \lim_{x \rightarrow -7} \frac{x^2 + 6x - 7}{x^3 + 1};$$

$$2) \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \sqrt{x^2 + 1} - x \right);$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 2x}{x};$$

$$4) \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{4x+2}{4x-1} \right)^{2x+3}.$$

$$10. 1) \lim_{x \rightarrow -3} \frac{2x^2 + 5x - 3}{x^2 + 4x + 3};$$

$$2) \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \sqrt{x+2} - \sqrt{x} \right);$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\operatorname{tg} 3x};$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} (1+5x)^{\frac{3}{x}}.$$

$$11. 1) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x^2 + 5x - 2}{x^2 + 3x + 2};$$

$$2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sqrt[3]{8-x} - \sqrt[3]{8+x}};$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{tg} 3x \cdot \operatorname{ctg} 5x;$$

$$4) \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x-3}{x+4} \right)^{x-1}.$$

$$12. 1) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 9};$$

$$2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x - 4}{x + \sqrt[3]{x}};$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\operatorname{arctg} 3x};$$

$$4) \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3x - 2}{3x - 1} \right)^{6x + 4}.$$

$$13. 1) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4x - 12}{x^2 - 6x + 8};$$

$$2) \lim_{x \rightarrow \infty} (x - \sqrt{x + 1});$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\sin 4x};$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} (1 - 2x)^{\frac{4}{x}}.$$

$$14. 1) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{7x^2 + 8x + 1}{2x + 2};$$

$$2) \lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 - \sqrt{x^4 + x^2});$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 6x}{\operatorname{tg} 3x};$$

$$4) \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{5x + 2}{5x - 3} \right)^{2x + 1}.$$

$$15. 1) \lim_{x \rightarrow -4} \frac{2x^2 + 6x - 8}{x^2 - 16};$$

$$2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 3x - 1}{\sqrt{x^4 - 2x + 3}};$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{tg} 4x \cdot \operatorname{ctg} 2x;$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 3x)^{\frac{5}{x}}.$$

$$16. 1) \lim_{x \rightarrow 10} \frac{5x^2 - 51x + 10}{2x - 20};$$

$$2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^5 - x^2 + 1}{x^3 + 3x - 7};$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{\arcsin 2x};$$

$$4) \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{4x - 3}{4x + 2} \right)^{2x + 1}.$$

$$17. 1) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 - 7x + 3}{x^2 - x - 6};$$

$$2) \lim_{x \rightarrow \infty} \left( x - \sqrt{x^4 - x^2} \right);$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \operatorname{ctg} 3x;$$

$$4) \lim_{x \rightarrow -1} (2x + 3)^{\frac{1}{x+1}}.$$

$$18. 1) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2 + 2x - 1}{2x^2 + 3x + 1};$$

$$2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - 3x - 2x^2}{x^2 - 4x + 3};$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\operatorname{tg} 4x};$$

$$4) \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x-2}{x+3} \right)^{4-x}.$$

$$19. 1) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 5x + 2}{4x^2 - 7x - 2};$$

$$2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 3x + 1}{4x^2 + x - 2};$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \operatorname{ctg} 2x;$$

$$4) \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+3}{x+1} \right)^{x-2}.$$

$$20. 1) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{8 + 2x - x^2}{x^2 - 16};$$

$$2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x + 3}{x^3 + 2x^2 - 1};$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 3x}{x};$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 4} (x-3)^{\frac{2}{x-4}}.$$

Примеры для контрольной работы 2

<p style="text-align: center;"><b>B-1</b></p> <p>a) <math>\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - 5x - 2}{2x^2 - x - 6};</math></p> <p>б) <math>\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 3x + 1}{3x^2 + x + 4};</math></p> <p>в) <math>\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 2x}{x^2};</math></p> <p>г) <math>\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{3x-2} - 2}{x^2 - 4};</math></p> <p>д) <math>\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x-3}{2x+5} \right)^{x-1};</math></p> <p>е) <math>\lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{3}{2x-1} \right)^{4x+1}.</math></p>	<p style="text-align: center;"><b>B-2</b></p> <p>a) <math>\lim_{x \rightarrow -5} \frac{2x^2 + 15x + 25}{5 - 4x - x^2};</math></p> <p>б) <math>\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 - 8x + 1}{-10x^3 + x + 4};</math></p> <p>в) <math>\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\operatorname{tg} 5x};</math></p> <p>г) <math>\lim_{x \rightarrow -3} \frac{\sqrt{x+4} - 1}{\sqrt{3-2x} - 3};</math></p> <p>д) <math>\lim_{x \rightarrow 0} \left( 1 - \frac{2x}{3} \right)^{\frac{-7}{3x}};</math></p> <p>е) <math>\lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{3}{8x-1} \right)^{-4x^2+1}.</math></p>	<p style="text-align: center;"><b>B-3</b></p> <p>a) <math>\lim_{x \rightarrow -1} \frac{4x^2 + 7x + 3}{2x^2 + x - 1};</math></p> <p>б) <math>\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 - 2x - x^3}{x^2 + 4x + 1};</math></p> <p>в) <math>\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 3x}{\operatorname{tg}^2 2x};</math></p> <p>г) <math>\lim_{x \rightarrow \infty} \left( x - \sqrt{x^2 + 2x} \right);</math></p> <p>д) <math>\lim_{x \rightarrow 0} \left( 1 - \frac{6x}{7} \right)^{\frac{-4}{5x}};</math></p> <p>е) <math>\lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{3}{9x+1} \right)^{-5x+6}.</math></p>
<p style="text-align: center;"><b>B-4</b></p> <p>a) <math>\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 - 9x + 9}{x^2 - 5x + 6};</math></p> <p>б) <math>\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-8x^2 - 3x + 1}{16x^2 + 2x - 4};</math></p> <p>в) <math>\lim_{x \rightarrow 0} (\sin 3x \cdot \operatorname{ctg} 5x);</math></p> <p>г) <math>\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{x+6} - 2}{x^2 - 4};</math></p> <p>д) <math>\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3x-3}{3x+5} \right)^{2x-1};</math></p> <p>е)</p>	<p style="text-align: center;"><b>B-5</b></p> <p>a) <math>\lim_{x \rightarrow 4} \frac{5x - x^2 - 4}{x^2 - 2x - 8};</math></p> <p>б) <math>\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2x^2 - 5x + 10}{3x^3 + x + 4};</math></p> <p>в) <math>\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}^2 2x}{\sin 5x \cdot 4x};</math></p> <p>г) <math>\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \sqrt{4x^2 + x} - 2x \right);</math></p> <p>д) <math>\lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{7}{1+4x} \right)^{4x+1};</math></p>	<p style="text-align: center;"><b>B-6</b></p> <p>a) <math>\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 2x - 8}{2x^2 + 5x + 2};</math></p> <p>б) <math>\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - 7x + x^2}{3x^2 + x + 3};</math></p> <p>в) <math>\lim_{x \rightarrow 0} (x \cdot \operatorname{ctg} 4x);</math></p> <p>г) <math>\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{2x+1} - 3};</math></p> <p>д) <math>\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{6x-8}{6x-3} \right)^{3x};</math></p>

$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{7x-6}\right)^{-5x+3}$	$\text{e) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x-2}{5x-1}\right)^{3x-4}$	$\text{e) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{9}{5x+3}\right)^{-6x+1}$
<p style="text-align: center;"><b>B-7</b></p> <p>a) <math>\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 2x - 1}{x^2 - 4x + 3}</math>;</p> <p>б) <math>\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5 - 12x - 4x^3}{4x^2 + 5x + 1}</math>;</p> <p>в) <math>\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4\sin^2 5x}{\text{tg}^2 3x}</math>;</p> <p>г) <math>\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{2x+3} - 3}{2 - \sqrt{x+1}}</math>;</p> <p>д) <math>\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 - \frac{9x}{11}\right)^{\frac{2}{7x}}</math>;</p> <p style="text-align: center;">e)</p> $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-3}{5x-2}\right)^{-3x+4}$	<p style="text-align: center;"><b>B-8</b></p> <p>a) <math>\lim_{x \rightarrow -3} \frac{6 - x - x^2}{3x^2 + 8x - 3}</math>;</p> <p>б) <math>\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5 - 2x - 5x^3}{-8x^3 - 4x - 10}</math>;</p> <p>в) <math>\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 8x}{10\text{tg}^2 4x}</math>;</p> <p>г) <math>\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{9-x} - 3}{\sqrt{x+4} - 2}</math>;</p> <p>д) <math>\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 - \frac{2x}{13}\right)^{\frac{-3}{5x}}</math>;</p> <p style="text-align: center;">e)</p> $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{10}{3x+1}\right)^{-4x+3}$	<p style="text-align: center;"><b>B-9</b></p> <p>a) <math>\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{5x^2 - 4x - 1}</math>;</p> <p>б) <math>\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 + 2x + 10x^2}{5x^2 + 4x + 1}</math>;</p> <p>в) <math>\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x \cdot \cos^2 3x}{\text{tg}^2 2x}</math>;</p> <p>г) <math>\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 9} - 3}{\sqrt{4 - x^2} - 2}</math>;</p> <p>д) <math>\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{7x-2}{7x+3}\right)^{2x+5}</math>;</p> <p style="text-align: center;">e)</p> $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{5}{6x+1}\right)^{-2x+1}$
<p style="text-align: center;"><b>B-10</b></p> <p>a) <math>\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 2x - 8}{8 - x^3}</math>;</p> <p>б) <math>\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{13 - x - x^4}{x^3 + 4x + 1}</math>;</p> <p>в) <math>\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3\sin^2 9x}{\text{tg}^2 4x}</math>;</p> <p>г) <math>\lim_{x \rightarrow 4} \frac{5 - \sqrt{x^2 + 9}}{\sqrt{2x+1} - 3}</math>;</p> <p>д) <math>\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 - \frac{4x}{5}\right)^{\frac{-4}{5x}}</math>;</p>	<p style="text-align: center;"><b>B-11</b></p> <p>a) <math>\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 6x + 9}</math>;</p> <p>б) <math>\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{10 - 4x - 8x^2}{2x^2 + x + 4}</math>;</p> <p>в) <math>\lim_{x \rightarrow 0} (2x \cdot \text{ctg} 5x)</math>;</p> <p>г) <math>\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4}{\sqrt{1-4x} - 3}</math>;</p> <p>д) <math>\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-8}{2x-3}\right)^{-5x}</math>;</p>	<p style="text-align: center;"><b>B-12</b></p> <p>a) <math>\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 4}</math>;</p> <p>б) <math>\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{15 - 2x - 4x^3}{4x^4 - 5x + 3}</math>;</p> <p>в) <math>\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 8x \cdot \text{ctg} 2x}{\text{tg}^2 4x}</math>;</p> <p>г) <math>\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{2x+3} - 3}{x^2 - 9}</math>;</p> <p>д) <math>\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 - \frac{3x}{7}\right)^{\frac{-5}{x}}</math>;</p>

e) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{8}{6x+1}\right)^{-5x+3}$ .	e) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{12}{4x+3}\right)^{-4x+12}$ .	e) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{4x+1}\right)^{-x+6}$ .
<b>B-13</b>	<b>B-14</b>	<b>B-15</b>
a) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3+8}{x^2+x-2}$ ;	a) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2-7x+10}{x^2-10x+25}$ ;	a) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2-10x+25}{x^2-3x-10}$ ;
б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2+x-x^4}{x^4+7x+4}$ ;	б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3-2x-8x^3}{4x^3+4x+1}$ ;	б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^5-2x-x^3}{x^5+4x^4+1}$ ;
в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{12x^2 \cdot \sin^2 6x}{\operatorname{tg}^2 3x}$ ;	в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{8x^2 \cdot \sin^2 5x}{\operatorname{tg}^2 22x}$ ;	в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{9x^2 \cdot \sin^2 3x}{\operatorname{tg}^2 x}$ ;
г) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x^2-6x+8}$ ;	г) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{\sqrt{3x+7}-2}$ ;	г) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3}-2}{\sqrt{x}-1}$ ;
д) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 - \frac{11x}{9}\right)^{\frac{-3}{8x}}$ ;	д) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 - \frac{15x}{7}\right)^{\frac{-3}{5x}}$ ;	д) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 - \frac{13x}{9}\right)^{\frac{-1}{5x}}$ ;
e) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{3}{10x-7}\right)^{-3x}$	e) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{4}{3x+1}\right)^{-5x^2+6}$ .	e) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{3}{8x+5}\right)^{-4x^2}$ .
<b>B-16</b>	<b>B-17</b>	<b>B-18</b>
a) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-6x+9}{x^3-27}$ ;	a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2+x-3}{x^2-2x+1}$ ;	a) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{2x^2+5x-3}{3x^2+11x+6}$ ;
б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{12x^4-9x^3+x^2}{-6x^4+x^2+3}$ ;	б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^8-12x^6-4x^3}{4x^8+5x+1}$ ;	б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-3x^2-12-8x^3}{4x^2+5x+1}$ ;
в) $\lim_{x \rightarrow 0} (12x \cdot \operatorname{ctg} 5x)$ ;	в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{6\sin^2 6x}{x^2 \cdot \operatorname{tg}^2 2x}$ ;	в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4\sin 3x}{\operatorname{tg}^2 5x}$ ;
г) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-x-2}{\sqrt{4x+1}-3}$ ;	г) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{9x^2+4x}-3x\right)$ ;	г) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2-25}{\sqrt{2x-1}-3}$ ;
д) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{-8}{6x-3}\right)^{3x+7}$ ;	д) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 - \frac{3x}{13}\right)^{\frac{-4}{15x}}$ ;	

$\text{e) } \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 - \frac{5x}{8}\right)^{-\frac{2}{6x}}.$	$\text{e) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{x+4}\right)^{2x-1}.$	$\text{д) } \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 - \frac{14x}{8}\right)^{\frac{-3}{5x}};$ $\text{e) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{3x-1}\right)^{x+6}.$
<p style="text-align: center;"><b>B-19</b></p> $\text{a) } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^2 + 3x - 2}{x^2 + 4x + 4};$ $\text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 2x^4 - x^3}{x^2 + 4x^4 + 1};$ $\text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 3x}{6 \operatorname{tg} 4x};$ $\text{г) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(2x - \sqrt{4x^2 + 3x}\right);$ $\text{д) } \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 - \frac{6x}{13}\right)^{\frac{4}{7x}};$ $\text{e) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{3}{4x-3}\right)^{5x+6}$	<p style="text-align: center;"><b>B-20</b></p> $\text{a) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{4x^2 + x - 5};$ $\text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x - 2x^2 - x^3}{5x^3 + 4x^2};$ $\text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 4x \cdot \cos 4x}{16 \operatorname{tg}^2 6x};$ $\text{г) } \lim_{x \rightarrow -3} \frac{\sqrt{1-x} - 2}{4 - \sqrt{1-5x}};$ $\text{д) } \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 - \frac{x}{8}\right)^{\frac{3}{5x}};$ $\text{e) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{6}{4x+10}\right)^{3x+2}.$	<p style="text-align: center;"><b>B-21</b></p> $\text{a) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2 + 2x - 1}{x^3 + 1};$ $\text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{10x^3 - 7x + x^2}{-5x^3 + x + 3};$ $\text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 3x \cdot \cos 3x}{5x^2};$ $\text{г) } \lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{1}{x+2} - \frac{4}{x^2 - 4}\right);$ $\text{д) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{9x-4}{9x+3}\right)^{2x};$ $\text{e) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{6}{5x+1}\right)^{6x^2+12}.$
<p style="text-align: center;"><b>B-22</b></p> $\text{a) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-2x^2 + 9x - 10}{x^2 - x - 2};$ $\text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - 2x^4 - 3x^3}{4x^5 + 6x};$ $\text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 12x}{\operatorname{tg} 4x \cdot x^2};$ $\text{г) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{2x^2 + x} - x\right);$	<p style="text-align: center;"><b>B-23</b></p> $\text{a) } \lim_{x \rightarrow 5} \frac{35 - 17x + 2x^2}{-20 - x + x^2};$ $\text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6 - 2x^2 - x^3}{4x^2 + 5x + 1};$ $\text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 3x \cdot x^2}{\operatorname{tg}^2 2x};$ $\text{г) } \lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{1}{x+2} - \frac{12}{x^3 + 8}\right);$	<p style="text-align: center;"><b>B-24</b></p> $\text{a) } \lim_{x \rightarrow -4} \frac{2x^2 + 7x - 4}{-x^2 - 3x + 4};$ $\text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x - x^3}{5x^3 - 8x + 10};$ $\text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 7x}{8x^2 \cdot \operatorname{tg}^2 5x};$ $\text{г) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{3x^2 + x} - x\right);$



$\text{д) } \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 - \frac{12x}{9}\right)^{\frac{3}{4x}};$ $\text{е) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{5x+1}\right)^{4x+1}.$	$\text{д) } \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 - \frac{x}{7}\right)^{\frac{-4}{5x}};$ $\text{е) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{3}{4x+1}\right)^{5x+6}.$	$\text{д) } \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 - \frac{2x}{9}\right)^{\frac{-4}{6x}};$ $\text{е) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{3}{6x-1}\right)^{-5x+6}.$
<b>B-25</b>	<b>B-26</b>	<b>B-27</b>
$\text{а) } \lim_{x \rightarrow -3} \frac{3-8x-3x^2}{x^2+x-6};$ $\text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-4x^2-2x^3}{x^3+5x^2+8};$ $\text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{10\sin^2 3x}{\text{tg}^2 x};$ $\text{г) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x+2}-\sqrt{4-x}} \text{ д)}$ $\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 - \frac{17x}{7}\right)^{\frac{-4}{9x}};$ $\text{е) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{3}{4x-2}\right)^{6x^3+2}$	$\text{а) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-x^2+7x-12}{2x^2-11x+15};$ $\text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8+x^2}{3x^2+x+2};$ $\text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{tg}^2 6x}{5x^2 \cdot \sin x};$ $\text{г) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^2+2}-\sqrt{x^2-2}\right);$ $\text{д) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x-5}{4x+3}\right)^{2x};$ $\text{е) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{3}{5x+3}\right)^{6x+1}.$	$\text{а) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2-x-3}{x^2-3x-4};$ $\text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^5-12x-4x^3}{4x^2+5x+1};$ $\text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{\text{tg}^2 4x};$ $\text{г) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(x - \sqrt{x^2-x+1}\right);$ $\text{д) } \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 - \frac{12x}{8}\right)^{\frac{-4}{3x}};$ $\text{е) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{5}{3x-1}\right)^{4x+3}.$
<b>B-28</b>	<b>B-29</b>	<b>B-30</b>
$\text{а) } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{-2+3x+2x^2}{3x^2+2x-8};$ $\text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^6-2-x^3}{x^5+4x^6+1};$ $\text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 6x}{\text{tg}^2 7x};$ $\text{г) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 6x}{\text{tg}^2 7x};$	$\text{а) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2-5x+2}{2x^2-x-1};$ $\text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2-2x-2x^3}{x^3+4x+1};$ $\text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{7\sin^2 3x}{\text{tg}^2 2x};$	$\text{а) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{10x-3x^2-8}{3x^2-8x+4};$ $\text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^4-2x-x^3}{-4x^3+4x+1};$ $\text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 8x}{10\text{tg}^2 2x};$

$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \sqrt{x^2 + 3x - 5} - x \right)$	$\text{г) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \sqrt{x^2 - 5x + 7} - x \right);$	$\text{г) } \lim_{x \rightarrow -4} \frac{\sqrt{x+12} - \sqrt{4-x}}{x^2 + 2x - 8};$
$\text{д) } \lim_{x \rightarrow 0} \left( 1 - \frac{2x}{5} \right)^{\frac{-4}{9x}};$	$\text{д) } \lim_{x \rightarrow 0} \left( 1 - \frac{5x}{9} \right)^{\frac{-3}{5x}};$	$\text{д) } \lim_{x \rightarrow 0} \left( 1 - \frac{14x}{8} \right)^{\frac{-7}{5x}};$
$\text{е) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{5}{11x+1} \right)^{-6x+1}.$	$\text{е) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{4}{7x+1} \right)^{5x+2}.$	$\text{е) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{8}{6x-12} \right)^{-5x^4}.$

Васильева Светлана Егоровна

## Математический анализ

### Часть 1

Учебное пособие, предназначено для студентов очной и заочной формы обучения направления подготовки 21.02.04 – Землеустройство, колледжа автомобильного транспорта и агротехнологий ФГБОУ ВО «Иркутский государственный аграрный университет имени А.А. Ежевского»

Редактор Тесля В.И.

Подготовка оригинал-макета: Васильева С.Е.

Лицензия ЛР № 070444 от 11.03.98 г.

Формат 60x84

Усл. печ. л. 3,2

Тираж 250 экз.

Отпечатано на ризографе ИрГСХА  
664038 г. Иркутск, пос. Молодежный