Министерство сельского хозяйства Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
ИРКУТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ А.А. ЕЖЕВСКОГО

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ГЛАВЫ МАТЕМАТИКИ

*Учебное пособие по дисциплине «Дополнительные главы математики»
для студентов очной и заочной форм обучения направлений подготовки
13.04.01 Теплоэнергетика и теплотехника (уровень магистратура),
13.04.02 Электроэнергетика и электротехника (уровень магистратуры)
(методические указания и задания для выполнения контрольных работ)*

Иркутск, 2019

УДК 621.125: 621.438: 621.43(075)

Р е ц е н з е н т :
К.т.н., доцент кафедры электрооборудования и физики ФГБОУ ВО ИрГАУ им. А.А. Ежевского А.Ю. Логинов

Дополнительные главы математики: учебное пособие по дисциплине «Дополнительные главы математики» для студентов очной и заочной форм обучения для направлений подготовки 13.04.01 Теплоэнергетика и теплотехника (уровень магистратуры), 13.04.02 Электроэнергетика и электротехника (уровень магистратуры) / Авт.-сост. Г.С. Кудряшев, А.Н. Третьяков. – Иркутск: ФГБОУ ВО Иркутский ГАУ, 2019. – 230 с.

Учебное пособие предназначено для изучения курса «Дополнительные главы математики». Основной целью учебного пособия является оказание помощи студентам при выполнении контрольной работы.

Допущено к печати по решению научно-методического совета Иркутского ГАУ (протокол № 5 от 29 апреля 2019 г.).

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Алгебра – это раздел математики, где исследуются операции, аналогичные сложению, вычитанию, умножению и делению чисел, но выполняемые не только над числами, но и над другими математическими объектами – многочленами, векторами, тензорами, матрицами, операторами и т.д.

Подчеркнем, что алгебра является учением об операциях, где исследуются свойства самих операций, а не математических объектов. Алгебра формирует общие понятия и методы для всей математики и других наук, поскольку все они применяются на практике для получения количественных результатов. В любой науке определяется объект для исследования и его алгебра. Так дифференциально-интегральное исчисление является алгеброй бесконечно малых величин. В теории элементарных частиц из трех кварков методами алгебры получают любую из 32 элементарных частиц. В теории вероятностей определяют алгебру событий и соответствующих вероятностей и т.д.

Алгебра состоит из трех частей – теорий, изучающих пространства, матрицы и алгебраические формы. Большинство задач линейной алгебры допускает альтернативную формулировку в каждой из этих трех теорий. Матричная формулировка наиболее удобна для вычислений. С другой стороны в геометрии и механике большинство задач возникает в виде исследования алгебраических форм, интерпретируемых как кривые на плоскости или поверхности в пространстве.

Матричное исчисление имеет большое прикладное значение, поскольку позволяет решать системы линейных алгебраических или дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, описывающих явления, происходящие в природе или технологические, производственные процессы. Действительно, на практике зачастую возникают задачи именно в виде решения систем уравнений. Например, в теории электрических цепей.

Вы, несомненно, сталкивались с решением систем двух и трех уравнений с двумя и тремя неизвестными, соответственно:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{11}x_2 = b_2 \end{cases};$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases},$$

где: x_i -неизвестные, a_{ij} - постоянные коэффициенты при неизвестных

($i=\overline{1,n}$; $j=\overline{1,n}$) и b_j - постоянные из правой части этих уравнений. Запись $i=\overline{1,n}$ означает, что индекс i пробегает все целочисленные значения от 1 до n.

Если число уравнений больше трех, то возникают технические трудности вычисления таких систем. Для облегчения вычислений вводится некоторый формализм векторных пространств, который позволяет свести систему уравнений только к одному операторному уравнению

$$\widehat{A}\overline{x}=\overline{b},$$

где $\widehat{A}$ является оператором, который описывается матрицей, представляющей собой таблицу чисел, записанных в определенном порядке. Так, например, для первой из написанных систем

$\widehat{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$-матрица, $\overline{X}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$- вектор неизвестных и $\overline{b}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$- вектор, определяемый постоянными из правой части данной системы.

В рамках данного формализма вводится алгебра векторов и матриц, которая позволяет легко решать системы линейных алгебраических уравнений с любым количеством уравнений и неизвестных.

Казалось бы, что и это и не такая уж сложная и интересная задача. Однако матричное исчисление позволяет легко решать и много других прикладных задач, например, задачи оптимизации, управления и так далее.

Покажем на простом примере, как в процессе решения знакомых Вам задач возникают матрицы. Рассмотрим простую электрическую схему, приведенную на рисунке 1.

С учетом законов Кирхгофа, составляем систему уравнений для определения токов в цепи.

$$\begin{cases} J_1 = J_2 + J_3 \\ E = J_1R_1 + J_2R_2 \\ 0 = J_2R_2 + J_3R_3 \end{cases}.$$

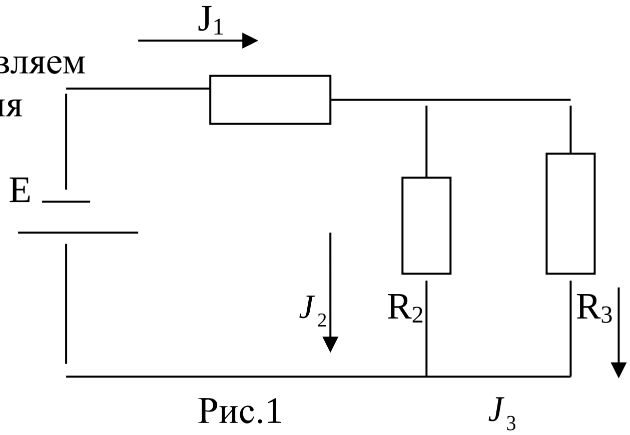


Рис.1

Перепишем данную систему в определенном порядке $\begin{cases} J_1 - J_2 - J_3 = 0 \\ J_1R_1 + J_2R_2 = E \\ J_2R_2 + J_3R_3 = 0 \end{cases}$,

которую можно представить в эквивалентном виде $\widehat{A}\overline{J}=\overline{\varepsilon}$,

где $\widehat{A}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ R_1 & R_2 & 0 \\ 0 & R_2 & R_3 \end{pmatrix}$, $\overline{J}=\begin{pmatrix} J_1 \\ J_2 \\ J_3 \end{pmatrix}$ и $\overline{\varepsilon}=\begin{pmatrix} 0 \\ E \\ 0 \end{pmatrix}$.

Как другой пример матрицы, рассмотрим матрицу поворота осей координат на плоскости ХОУ. Пусть оси координат повернуты на угол φ и образуют новую систему координат ХОУ. Найдем, как связаны координаты некоторого вектора $\bar{r}$ в этих системах, то есть получим правило перехода от одной системы координат к другой.

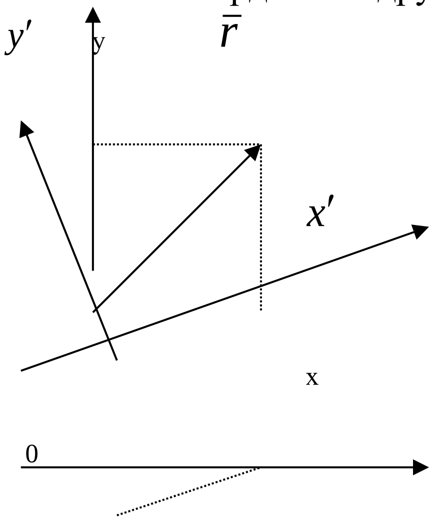


Рис. 2

Из рисунка 2 видно, что координаты связаны следующими уравнениями

$$\begin{cases} x' = x\cos\varphi + y\sin\varphi \\ y' = -x\sin\varphi + y\cos\varphi \end{cases},$$

или в операторном виде:

$$\bar{x}' = \hat{U}\,\bar{x}\,.$$

Здесь обозначены двухмерные векторы $\bar{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ и $\bar{x}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$. Матрица поворота U имеет вид:

$$\hat{U} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Система уравнений в матричной форме запишется как

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}.$$

Обратная матрица осуществляет обратный поворот и определяется

$$\hat{U}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \Leftrightarrow \bar{x} = \hat{U}^{-1}\bar{x}'\,.$$

Заметим, что именно матричное исчисление позволяет находить оптимальные решения при наложении на систему некоторого условия. Таким образом, решаются задачи оптимизации. Матричное исчисление как нельзя лучше подходит для использования компьютерной техники. Базы данных описываются непосредственно матрицами. Операторы, производящие заданные действия с этими данными, тоже являются матрицами.

Сами матрицы не абстрактны, а зачастую вполне обоснованные физические понятия. Так, например, знакомый Вам закон Ома $j = \square E$

на самом деле выглядит как $\bar{j} = \hat{\sigma}\ \bar{E}$ или в компонентах $j_i = \sum_{i=1}^{3} \sigma_{ik} E_k$,

где $\bar{j}$ - вектор плотности тока, $\bar{E}$ – вектор напряженности электрического поля и $\hat{\sigma}$ - тензор проводимости в виде квадратной матрицы, состоящей из 3х3 чисел. В этой матрице учитывается анизотропия и неоднородность вещества проводника.

В первой главе кратко дается понятие векторного пространства. Приведены основные аксиомы и теоремы линейной алгебры векторов.

Во второй главе рассмотрены отображения векторных пространств линейными операторами в матричной форме. Определяется алгебра матриц.

В третьей главе рассмотрено приложение матричного исчисления для решения систем линейных алгебраических уравнений. Приведены некоторые приближенные методы решения.

В четвертой главе рассмотрен частный случай линейных векторных пространств. Это евклидово векторное пространство, где определено понятие метрики как способа измерения расстояний и углов. Этот случай имеет важное практическое приложение, так как служит аналогом описания наблюдаемого нами трехмерного пространства, где можно измерять длину ширину и высоту.

Пятая глава посвящена рассмотрению линейных и билинейных алгебраических форм, которые интерпретируются в евклидовом пространстве для линейной формы как прямые на плоскости и в пространстве или плоскости в пространстве и для квадратичных форм как кривые на плоскости или поверхности второго порядка в пространстве, соответственно. Подробно рассмотрены задачи приведения квадратичных форм к каноническому виду.

В шестой главе рассмотрено еще одно важное приложение матричного исчисления, а именно метод линейного программирования, который является одним из стандартных инженерных методов исследования. Линейная оптимизация не требует знаний дифференциального и интегрального исчисления и может быть легко освоена в первом семестре на первом курсе. Студентамм может быть интересна теория принятия решений, которая базируется, в частности, на теории матричных игр. Показана связь теории матричных игр с задачами линейного программирования.

В седьмой главе рассмотрены алгебраические структуры дискретной математики как естественное приложение матричного исчисления.

Структурой называется алгебраическая система только с двумя основными операциями сложения и умножения. Помимо свойств коммутативности и ассоциативности этих операций добавляется свойство идемпотентности, когда сумма и произведение одинаковых объектов исследования (высказывания) приравнивается самому этому объекту.

Даны элементы теории множеств и комбинаторики. Показано, что алгебра высказываний опирается на матрицы - таблицы истинности. Показано, как преобразуется булева функция матричными способами с помощью карт Вейча. Рассмотрены элементы теории графов и их матриц.

В приложении приведены некоторые практические задачи геометрии, физики и теоретической механики, решаемые в рамках теории квадратичных форм.

В конце учебного пособия приведены индивидуальные задания для самостоятельной работы студентов.

1.ВЕКТОРНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

1.1 Векторы и их алгебра

Последовательность (множество) n действительных чисел

$$\overline{x} = \{x_1, x_2, \ldots x_n\}, \tag{1.1}$$

расположенных в определенном порядке, называется ***n-мерным вектором*** и обозначается, как $\overline{x}$. Иногда вектор записывают, как $\overline{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$, поскольку круглые скобки обозначают упорядоченную последовательность.

Числа x_i $\left(i = \overline{1, n}\right)$ называются компонентами или координатами вектора $\overline{x}$, $x_i \in \overline{x}$ ($\in$ - знак принадлежности). Нулевой вектор имеет нулевые компоненты

$$\overline{0} = \{0,0,..0\}. \tag{1.2}$$

Заметим, что двухмерные (n=2) и трехмерные (n =3) векторы имеют простое геометрическое истолкование - как направленный отрезок на плоскости и в пространстве, соответственно. Так, например двухмерный вектор $\overline{x} = \{x, y\}$, где $x = 3$ и $y = 2$ изображен на рисунке 1.1 в декартовой системе координат. Видно, что значения координаты x откладываются по оси абсцисс OX, а значения y - по оси ординат ОУ и эти значения независимы.

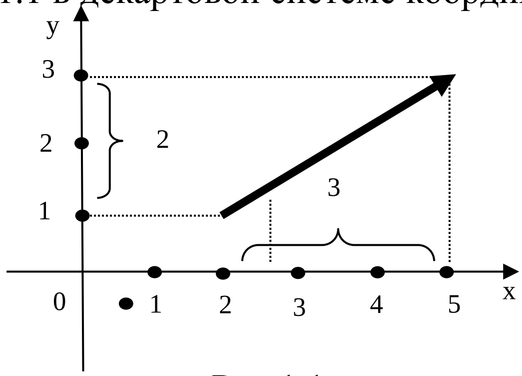


Рис.1.1

Совокупность всех n-мерных векторов называют n-мерным векторным пространством $A_n, \overline{x} \subset A_n$. ($\subset$- знак включения). Ограничимся рассмотрением векторных пространств конечной размерности n. Отметим только, что бесконечномерные пространства изучаются в курсе «математического анализа», где вводится понятие непрерывной переменной величины.

Векторное пространство называется линейным или аффинным L_n, $\overline{x} \subset L_n$ если выполняются следующие три требования.

1. Любым двум векторам в пространстве L_n ставится в соответствие третий вектор из этого же пространства называемый суммой векторов $\overline{x}$ и $\overline{y}$

$$\overline{z} = \overline{x} + \overline{y}, \tag{1.3}$$

при этом соответствующие координаты складываются

$$\overline{z} = \overline{x} + \overline{y} = \{x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots x_n + y_n\}. \tag{1.4}$$

Алгебраическая операция называется корректной относительно множества действительных чисел, если всякой паре чисел из этого множества операция ставит в соответствие определенное число из этого же множества. То есть, если $\bar{x} \subset L_n$ и $\bar{y} \subset L_n$, то и $\bar{z} = \bar{x} + \bar{y} \subset L_n$.

2. Любому вектору $\bar{x}$ из L_n и любому вещественному числу λ ставится в соответствие вектор $\bar{z} = \lambda \bar{x}$ этого же пространства, причем выполняется

$$\bar{z} = \lambda \bar{x} = \{\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots\ldots \lambda x_n\}, \tag{1.5}$$

$$\left(\bar{x} \subset L_n, \bar{z} \subset L_n\right).$$

Еще раз подчеркнем, что сложение векторов и умножение на действительное число не выводит векторы из пространства L_n. Получаем замкнутую алгебру.

3. Указанные требования подчиняются 8 аксиомам (устанавливаются их перестановочные, сочетательные и распределительные свойства).

$$\bar{x} + \bar{y} = \bar{y} + \bar{x}, \tag{1.6}$$

$$(\bar{x} + \bar{y}) + \bar{z} = \bar{x} + (\bar{y} + \bar{z}), \tag{1.7}$$

$$\bar{x} + \bar{0} = \bar{x} . \tag{1.8}$$

Для каждого вектора $\bar{x}$ существует $\bar{x}'$ такой, что

$$\bar{x} + \bar{x}' = \bar{0}. \tag{1.9}$$

Вектор $\bar{x}'$ - называют противоположным вектором.

Выполняются так же следующие соотношения

$$1 \cdot \bar{x} = \bar{x} \tag{1.10}$$

Ограничимся рассмотрением векторов, определяемых только действительными числами. Обобщение понятия вектора для комплексных чисел не представляет принципиальных трудностей, но может существенно усложнить понимание сути линейной алгебры.

1.2. Линейная зависимость векторов. Размерность и базис векторного пространства

Если $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_k$ совокупность векторов n-мерного векторного пространства A_n, то из них можно составить линейную форму, называемую ***линейной композицией векторов***

$$\bar{z} = c_\alpha \overline{x_\alpha} = \sum_{\alpha=1}^{k} c_\alpha \overline{x_\alpha} = c_1 \overline{x_1} + c_2 \overline{x_2} \ldots . c_k \overline{x_k}, \tag{1.11}$$

где c_α - произвольные действительные числа.

Совокупность k векторов считается линейно независимой, если вектор $\bar{z}$ обращается в нуль-вектор лишь при условии, когда все $c_1 = c_2 = c_3 = ... c_k = 0$. В противном случае, когда $c_1 \neq 0, c_2 \neq 0 ..., c_k \neq 0$ или хотя бы не все они равны нулю и $\bar{z}$=0, то совокупность k векторов называется линейно зависимой. Условие линейной зависимости векторов имеет вид:

$$\sum_{\alpha=1}^{k} c_\alpha \overline{x_\alpha} = \overline{0} \,. \tag{1.12}$$

Размерность n-мерного пространства A_n определяется количеством линейно независимых векторов,. Размерность обозначается как dim A_n = r, где r$\leq$n. Размерность линейного векторного пространства является основной и единственной его характеристикой.

Теорема 1. Совокупность k векторов n-мерного пространства A_n при k>n всегда линейно зависимы.

Действительно, пусть k=n+1 и выполняется условие линейной зависимости для n+1 векторов в n-мерном пространстве. Тогда должно выполняться

$$c_1 \overline{x_1} + c_2 \overline{x_2} + \ldots . c_n \overline{x_n} + c_{n+1} \overline{x_{n+1}} = \overline{0}$$

при $c_{n+1} \neq 0$. Выразим $\overline{x}_{n+1}$ через остальные векторы $\overline{x}_{n+1} = a_1 \overline{x_1} + a_2 \overline{x_2} + ... + a_n \overline{x_n}$, где $a_\alpha = -\dfrac{c_\alpha}{c_{n+1}}$.

Так как $\overline{x}_{n+1} \neq 0$, то видно, что в n-мерном пространстве n векторов линейно независимы. Это можно сформулировать и по-другому. Линейное векторное пространство A_n называется n-мерным, если в нем существует n линейно независимых векторов, а любые $n+1$ векторов уже являются линейно зависимыми.

Теорема 2. Для того, чтобы векторы были линейно зависимыми необходимо и достаточно, чтобы один из них являлся линейной комбинацией остальных векторов.

Покажем это на примере трех векторов $\overline{x}$, $\overline{y}$ и $\overline{z}$. Пусть выполняется $a\overline{x} + b\overline{y} + c\overline{z} = 0.$ Отсюда легко можно выразить вектор $\overline{z} = \alpha \overline{x} + \beta \overline{y}$, где $\alpha = -\dfrac{a}{c}$ и $\beta = -\dfrac{b}{c}$ - новые коэффициенты. Видно, что вектор $\overline{z}$ является линейной композицией векторов $\overline{x}$ и $\overline{y}$.

Теорема 3. Если часть векторов $\bar{x}_1, \bar{x}_2, .. \bar{x}_k$ является линейно зависимыми, то все эти векторы так же линейно зависимы.

Действительно, пусть $c_2\bar{x}_2 + c_3\bar{x}_3 + \ldots + c_k\bar{x}_k = \bar{0}$, где не все c_i $\left(i = \overline{2,k}\right)$ равны нулю. Тогда с этими c_i и $c_1 = 0$ справедливо $c_1\bar{x}_1 + c_2\bar{x}_2 + \ldots + c_k\bar{x}_k = \bar{0}$.

Теорема 4. Если среди векторов $\bar{x}_1, \bar{x}_2, .. \bar{x}_k$ имеется нулевой вектор, то эти векторы линейно зависимы.

Действительно, если, например $\bar{x}_1 = \bar{0}$, то выполняется $c_1\bar{x}_1 + c_2\bar{x}_2 + \ldots + c_k\bar{x}_k = \bar{0}$ при $c_1 = 1, \quad c_i = 0 \quad \left(i = \overline{2,k}\right)$.

Введем определение базиса линейного векторного пространства. Совокупность линейно независимых векторов

$$B_n = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, .. \bar{e}_n\} \tag{1.13}$$

этого пространства называется базисом, если для каждого вектора $\bar{x}$ этого пространства L_n существуют действительные числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$, для которых выполняется равенство

$$\bar{x} = x_1\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2 + \ldots + x_n\bar{e}_n. \tag{1.14}$$

Данное векторное уравнение называется разложением вектора $\bar{x}$ по базису $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n$ с компонентами $x_1, x_2, \ldots, x_n$, которые определяются в этом базисе однозначно.

Действительно, пусть имеется другое разложение по этому базису $\bar{x} = x_1'\bar{e}_1 + x_2'\bar{e}_2 + \ldots + x_n'\bar{e}_n$. Образуем разность этих разложений. $\bar{0} = (\bar{x} - \bar{x}) = (x_1 - x_1')\bar{e}_1 + (x_2 x_2')\bar{e}_2 + \ldots + (x_n - x_n')\bar{e}_n$, так как $\bar{e}_i \neq \bar{0} \ \left(i = \overline{1,n}\right)$ и они линейно независимы, то получается, что $x_1' = x_1, \ x_2' = x_2, \ldots, x_n' = x_n$.

Базис вводится для того, чтобы перейти от алгебры векторов к алгебре компонент, в выбранном базисе векторов. Должны выполнятся следующие равенства

$$\bar{x} + \bar{y} = (x_1 + y_1)\bar{e}_1 + (x_2 + y_2)\bar{e}_2 + \ldots + (x_n + y_n)\bar{e}_n \tag{1.15}$$

$$\lambda\bar{x} = \lambda x_1\bar{e}_1 + \lambda x_2\bar{e}_2 + \ldots + \lambda x_n\bar{e}_n \tag{1.16}$$

Очевидно, что значительней легче работать с конкретными компонентами в выбранном базисе, чем с абстрактными векторами. Заметим, что базисом n-мерного векторного пространства L_n могут быть любые n линейно независимых векторов этого пространства.

1.3. Изоморфизм векторных пространств. Подпространства векторного пространства

Поскольку единственной характеристикой векторного пространства L_n является его размерность, то два любых таких пространства одинаковой размерности должны быть алгебраически тождественны – изоморфны. Другими словами одинаково устроенными. Два произвольных линейных векторных пространства A_n и B_n называются изоморфными в том случае, когда между векторами этих пространств установлено взаимнооднозначное соответствие такое, что если $\bar{x} \subset A_n$, $\bar{y} \subset A_n$ и $\bar{x}' \subset B_n$, $\bar{y}' \subset B_n$, то вектору $\bar{x} + \bar{y} \subset A_n$ соответствует вектор $\bar{x}' + \bar{y}' \subset B_n$, а вектору $\lambda\bar{x} \subset A_n$ соответствует вектор

$\lambda\bar{x}' \subset B_n$. Таким образом, если пространства A_n и B_n изоморфны, то максимальное число линейно независимых векторов в каждом из этих пространств одинаково $n = m = r$ или $\dim A_n = \dim B_n = r$.
Пространства разной размерности не могут быть изоморфны.

Если в линейном векторном пространстве A_n определена совокупность векторов B_m $(n > m)$, для которых операции сложения и умножения на действительное число не выводят их из этой совокупности $\bar{x} \subset A_n$, $\bar{y} \subset A_n$, но $\bar{x} \subset B_m$, $\bar{y} \subset B_m$ и $\bar{x} + \bar{y} \subset B_m$, $\lambda\bar{x} \subset B_m$ и, кроме того, $\bar{x} + \bar{y} \subset A_n$ и $\lambda\bar{x} \subset A_n$, то говорят, что задано подпространство B_m векторного пространства A_n.

Под пространством B_m линейного векторного пространства A_n называют любое не пустое множество векторов этого пространства, в котором корректны операции сложения и умножения на число, введенные в пространстве A_n, но не выводящие их из подпространства B_m. Так как $n > m$ $(\dim A_n > \dim B_m)$, то говорят, что подпространство B_m включено в A_n и обозначается как $B_m \subset A_n$. Если обозначено $B_m \subseteq A_n$, то говорят, что пространство A_n включает в себя подпространство B_m вплоть до совпадения.

Если L_1 и L_2 два подпространства линейного векторного пространства L, то совокупность всех векторов L принадлежащих одновременно как L_1 $(\bar{x} \subset L_1)$, так и L_2 $(\bar{x} \subset L_2)$, образуют подпространство называемое пересечением подпространств L_1 и L_2.

Суммой двух подпространств L_1 и L_2 называют совокупность всех векторов $\bar{x} + \bar{y}$ $(\bar{x} \subset L_1, \bar{y} \subset L_2)$ образующих другое подпространство пространства L.

Пусть размерность пересечения пространств l, а размерность L_1 равна $k + l$ и L_2 равна $m + l$, соответственно, то размерность суммы подпространств L_1 и L_2 равно $k + m + l$. Векторы, входящие в пересечение подпространств L_1 и L_2, учитываются только один раз.

Поясним это на примере трехмерного пространства L_3. Пусть L_1 - подпространство векторов $\bar{x} = \{x, y, 0\}$ параллельных плоскости XOY, $\dim L_1 = 2$, L_2 - подпространство векторов $\bar{x} = \{x, 0, z\}$ параллельных плоскости XOZ, $\dim L_2 = 2$. Тогда пересечением L_1 и L_2 будет совокупность векторов параллельных оси OX $\bar{x} = \{x, 0, 0\}$ с размерностью равной единице. Тогда как суммой подпространств L_1 и L_2 будет совокупность векторов $\bar{x} = \{x, y, z\}$ с размерностью $n = 3$.

Прямой суммой подпространств L_1 и L_2 пространства L называют подпространство, образованное совокупностью векторов

$$\overline{x} = \overline{x}_1 + \overline{x}_2 \ , \qquad (1.17)$$

где $\overline{x}_1$ - векторы, образующие только подпространство L_1, и $\overline{x}_2$ - векторы, образующие только подпространство L_2, и обозначается символически через знак прямой суммы как $L = L_1 \oplus L_2$ (1.18)

Очевидно, для того, чтобы пространство L представляло прямую сумму подпространств L_1 и L_2 необходимо и достаточно, чтобы пересечение L_1 и L_2 содержало только нулевой вектор. В этом случае размерность L равна сумме размерностей данных подпространств $\dim(L_1 \oplus L_2) = k + m = n$. Отметим, что прямая сумма подпространств понадобится для определения блочных матриц.

1.4. Евклидово n-мерное пространство. Ортонормированный базис векторного пространства

Евклидово n-мерное векторное пространство E_n отличается от линейного n-мерного векторного пространства L_n тем, что вводится операция скалярного умножения векторов, когда всякой паре векторов $\overline{x}$ и $\overline{y}$ ($\overline{x} \subset E_{n,}\ \overline{y} \subset E_n$) ставится в соответствие действительное число – скаляр. Скаляром называется величина, характеризующаяся только одним числом. Напомним, что, например, двухмерный вектор характеризуется двумя числами, расположенными в определенном порядке, то есть двумя скалярами. Скалярное произведение векторов должно удовлетворять следующим условиям:

1. $(\overline{x}, \overline{y}) = (\overline{y}, \overline{x})$. (1.18)

2. Для любых действительных чисел x и y выполняется

$$(\alpha\overline{x} + \beta\overline{y}, \overline{z}) = \alpha(\overline{x}, \overline{z}) + \beta(\overline{y}, \overline{z}). \qquad (1.19)$$

3. $(\overline{x}, \overline{x}) > 0, \ x \neq 0$ (1.20)

Длиной или *модулем* **(нормой) вектора $\overline{x}$ называют число**

$$\left|\overline{x}\right| = \sqrt{(\overline{x}, \overline{x})}. \qquad (1.21)$$

Вектор $\overline{x}$ называется нормированным или единичным, если $\left|\overline{x}\right| = 1$.

Для любых векторов $\overline{x}$ и $\overline{y}$ выполняется неравенство Коши-Буняковского

$$\left|(\overline{x}, \overline{y})\right| \leq \left|\overline{x}\right|\left|\overline{y}\right|. \qquad (1.22)$$

Для любого действительного числа λ в силу определения скалярного произведения следует $(\lambda\bar{x}-\bar{y},\ \lambda\bar{x}-\bar{y})\geq 0$ и $\lambda^2(\bar{x},\bar{x})-2\lambda(\bar{x},\bar{y})+(\bar{y},\bar{y})\geq 0$. Необходимым и достаточным условием неотрицательности квадратного трехчлена является отрицательность его дискриминанта $D=(\bar{x},\bar{y})^2-(\bar{x},\bar{x})(\bar{y},\bar{y})\leq 0$, откуда и следует утверждение Коши-Буняковского.

Два вектора $\bar{x}$ и $\bar{y}$ называются ***ортогональными***, если выполняется

$$(\bar{x},\bar{y})=0. \tag{1.23}$$

Введем понятие базиса *n*-мерного векторного пространства E_n по аналогии с пространством L_n. Базисом пространства E_n может быть любая система *n* независимых векторов этого пространства и любой вектор может быть разложен в этом базисе с соответствующими координатами. Базис вводится для упрощения алгебры векторов. Обозначается как $B=\{\overline{e_1},\overline{e_2},\overline{e_3},...\overline{e_n}\}$, где $\overline{e_i}\ (i=\overline{1,n})$ - базисные вектора в E_n. Удобно работать в ортонормированном базисе, когда выполняются соотношения

$$(\bar{e}_i,\bar{e}_j)=\begin{cases}1, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases},$$

$$|\overline{e_i}|=1\ (i=\overline{1,n}). \tag{1.24}$$

Приведем пример стандартного базиса

$$\begin{aligned}\bar{e}_1&=\{1,0,0,...,0\}\\ \bar{e}_2&=\{0,1,0,...,0\}\\ \bar{e}_3&=\{0,0,1,...,0\}\\ &.....................\\ \bar{e}_n&=\{0,0,0,...,1\}\end{aligned}\quad. \tag{1.25}$$

Тогда разложение вектора $\bar{x}$ в этом базисе имеет вид

$$\bar{x}=\sum_{i=1}^{n}\overline{e_i}\ x_i=\overline{e_1}x_1+\overline{e_2}x_2+....+\overline{e_n}x_n, \tag{1.26}$$

где $x_i\ (i=\overline{1,n})$ являются компонентами вектора в этом базисе. Таким образом, алгебра векторов сводится к алгебре компонент

$$\bar{x}+\bar{y}=(x_1+y_1)\overline{e_1}+(x_2+y_2)\overline{e_2}+....(x_n+y_n)\overline{e_n} \tag{1.27}$$

$$\lambda\bar{x}=\lambda x_1\overline{e_1}+\lambda x_2\overline{e_2}+...+\lambda x_n\overline{e_n} \tag{1.28}$$

В евклидовом *n*-мерном векторном пространстве скалярное произведение выражается через координаты векторов формулой

$$\left(\overline{x,y}\right)=\overline{x}^{\tau}\widehat{\Gamma}\overline{y^{-T}}=\sum_{i=1}^{n}g_{i}x_{ij}y_{j}^{T} \quad , \tag{1.29}$$

где x_i и y_i компоненты векторов $\overline{x}$ и $\overline{y}$ в базисе $B=\left\{\overline{e_1},\overline{e_2},...\overline{e_n}\right\}$ и где $g_{ij}=\left(\overline{e_i},\overline{e_j}\right)$, $\Gamma=\left\{g_{ij}\right\}$ - так называемая матрица Грама в базисе B_n и $\overline{y}^T$ - транспонированный вектор, который определяется как вектор-столбец - $\overline{y}^T=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ . \\ y_n \end{pmatrix}$, тогда как $\overline{y}=\left\{y_1,y_2,...,y_n\right\}$ есть вектор-строка.

В ортонормированном базисе $\widehat{\Gamma}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & . & 0 \\ 0 & 1 & 0 & . & 0 \\ 0 & 0 & 1 & . & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & 1 \end{pmatrix}=E$ - есть единичная матрица, и скалярное произведение определяется как

$$\left(\overline{x},\overline{y}\right)=\sum_{i=1}^{n}x_i g_{ij}y_j^{T}=\left(x_1,x_2,...x_n\right)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & . & 0 \\ 0 & 1 & 0 & . & 0 \\ 0 & 0 & 1 & . & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ . \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Окончательно, $\left(\bar{x},\bar{y}\right)=x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3+..+x_ny_n$. (1.30)

Длина вектора тогда определяется как

$$\left|\overline{x}\right|=\sqrt{\left(\bar{x},\bar{x}\right)}=\sqrt{x_1^2+x_2^2+...+x_n^2}\,, \tag{1.31}$$

что является обобщением теоремы Пифагора на n-мерный случай.

Для евклидова пространства размерности $n = 3$ $\left(E_3=R_3\right)$, вводятся специальные обозначения базисных векторов $\overline{e_1}=\bar{i}$, $\overline{e_2}=\bar{j}$, $\overline{e_3}=\bar{k}$, которые называются ортами. Эти вектора единичны $\left|\bar{i}\right|=\left|\bar{j}\right|=\left|\bar{k}\right|=1$ и взаимно перпендикулярны (ортогональны) $\left(\bar{i},\bar{j}\right)=0,\ \left(\bar{i},\bar{k}\right)=0,\left(\bar{j},\bar{k}\right)=0$ и определяются следующим образом

$\bar{i} = \{1,0,0\}$,
$\bar{j} = \{0,1,0\}$,
$\bar{k} = \{0,0,1\}$.

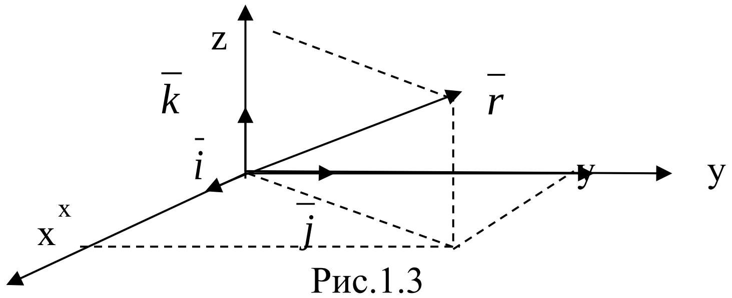


Рис.1.3

Например, радиус-вектор $\bar{r}$ раскладывается по данным ортам следующим образом:

$$\bar{r} = \{x, y, z\} = \bar{i}x + \bar{j}y + \bar{k}z \qquad (1.32)$$

и представлен графически на рис.1.3.

Приведем стандартный метод ортогонализации Грама-Шмидта.

Пусть задана система линейно независимых векторов $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3, ..., \bar{a}_n$. Тогда можно перейти к ортогональной системе попарно ненулевых векторов $\bar{b}_1, \bar{b}_2, \bar{b}_3, ..., \bar{b}_n$, где $(\bar{b}_i, \bar{b}_j) = 0$ для $i \neq j$.

Полагаем $\bar{b}_1 = \bar{a}_1$. (1.33)

Далее положим $\bar{b}_2 = \alpha_1 \bar{b}_1 + \bar{a}_2$.

Из условия (1.37) $(\bar{b}_i, \bar{b}_j) = 0$ получим $\alpha_1(\bar{a}_1, \bar{b}_1) = -(\bar{a}_1 \bar{a}_2)$.

Таким образом $$\bar{b}_2 = -\frac{(\bar{a}_1, \bar{a}_2)}{(\bar{a}_1, \bar{a}_1)} \bar{a}_1 + \bar{a}_2 \, . \qquad (1.34)$$

Затем положим $\bar{b}_3 = \beta_1 \bar{b}_1 + \beta_2 \bar{b}_2 + \bar{a}_3$.

Из условий $(\bar{b}_1, \bar{b}_3)$=0 и $(\bar{b}_2, \bar{b}_3)$=0 получим, что

$$\beta_1 = -\frac{(\bar{b}_1, \bar{a}_3)}{(\bar{a}_1, \bar{b}_1)} \text{ и } \beta_2 = -\frac{(\bar{b}_2, \bar{a}_3)}{(\bar{b}_2, \bar{b}_2)}.$$

Тогда $$\bar{b}_3 = -\frac{\bar{b}_1, \bar{a}_3}{(\bar{a}_1, \bar{b}_1)} \bar{b}_1 - \frac{(\bar{b}_2, \bar{a}_3)}{(\bar{b}_2, \bar{b}_2)} + \bar{a}_3 \qquad (1.35)$$

И так далее.

Пример. Даны линейно независимые векторы $\bar{a}_1 = (1,1,0,0)^T$, $\bar{a}_2 = (1,0,1,0)^T$, $\bar{a}_3 = (1,0,0,1)^T$ и $\bar{a}_4 = (0,1,0,1)$. Найти ортонормированный базис при условии, что скалярное произведение задается единичной матрицей Грама.

Решение. Полагаем $\bar{b}_1 = \bar{a}_1$, $\bar{b}_1 = (1,1,0,0)^T$. Далее

$$\bar{b}_2 = \alpha_1 \bar{b}_1 + \bar{a}_2 = \alpha_1 (1,1,0,0)^T + (1,1,0,0)^T, \text{ где } \alpha_1 = -\frac{(\bar{b}_1, \bar{a}_2)}{(\bar{b}_1, \bar{b}_1)} = -\frac{1}{2}.$$

Тогда $\bar{b}_2 = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, 0\right)^T$.

Наконец положим, $\beta_3 = \beta_1 \bar{b}_1 + \beta_2 \bar{b}_2 + a_3$ где $\beta_1 = -\frac{(\bar{b}_1, \bar{a}_3)}{(\bar{b}_1, \bar{b}_1)} = -\frac{1}{2}$ и $\beta_2 = -\frac{(\bar{b}_2, \bar{a}_3)}{(\bar{b}_2, \bar{b}_2)} = -\frac{1}{3}$.

Получаем $\bar{b}_3 = -\frac{1}{2}\bar{b}_1 - \frac{1}{3}\bar{b}_2 + \bar{a}_3 = \left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, 1\right)^T$

Положим далее, что $\bar{b}_4 = \gamma_1 \bar{b}_1 + \gamma_2 \bar{b}_2 + \gamma_3 \bar{b}_3 + \bar{a}_4$, где $\gamma_1 = -\frac{(\bar{b}_1, \bar{a}_4)}{(\bar{b}_1, \bar{b}_1)} = -\frac{1}{2}$, $\gamma_2 = -\frac{(\bar{b}_2, \bar{a}_4)}{(\bar{b}_2, \bar{b}_2)} = \frac{1}{3}$ и $\gamma_3 = -\frac{(\bar{b}_3, \bar{a}_4)}{(\bar{b}_3, \bar{b}_3)} = -\frac{1}{2}$.

Таким образом, получаем $\bar{b}_1 = (1,1,0,0)^T$, $\vec{b}_2 = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, 0)^T$, $\bar{b}_3 = (\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, 1)^T$ и $\bar{b}_4 = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})^T$. Остается только нормировать данные векторы и окончательный ответ имеет вид:

$\bar{e}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0)\right)^T$, $\bar{e}_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, 0\right)^T$, $\bar{e}_3 = \left(\frac{\sqrt{3}}{6}, -\frac{\sqrt{3}}{6}, -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^T$, $\bar{e}_4 = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})^T$.

2. МАТРИЦЫ

2.1.Отображение векторных пространств. Матрицы

Покажем, что линейное отображение одного векторного пространства на другое задается матрицей. Определим ее свойства и алгебру. Пусть A_n и B_m два линейных векторных пространства размерностей n и m, соответственно. Определим операцию отображения, когда каждому вектору $\bar{y} \subset B_m$ ставится в однозначное соответствие вектор $\bar{x} \subset A_n$ как

$$\bar{x} = A\,\bar{y}\,, \tag{2.1}$$

где A – линейный оператор отображения. Для него должно выполняться требование линейности $A\left(c_1\overline{y_1} + c_2\overline{y_2}\right) = c_1 A\overline{y_1} + c_2 A\overline{y_2}$.

Пусть совокупность $\overline{e_i}\left(i = \overline{1,n}\right)$ является базисом в A_n, а совокупность векторов $\overline{f_j}\left(j = \overline{1,m}\right)$ является базисом в B_m, то есть выполняется

$$\bar{x} = \sum_1^n x_i \overline{e_i}\,, \quad \bar{y} = \sum_1^m y_j \overline{f_j}\,.$$

Тогда операция отображения запишется в виде

$$\sum_1^n x_i \overline{e_i} = \sum_1^m y_j\, A\overline{f_j}$$

Разложим вектор $A\overline{f_j}$ по базису $\overline{e_i}$, $A\overline{f_j} = \sum_1^n a_{ij}\,\overline{e_i}$. (2.2)

Тогда, поменяв местами суммы, получаем соотношение

$$\sum_1^n x_i \overline{e_i} = \sum_1^n \overline{e_i} \sum_1^m a_{ij} y_j\,. \tag{2.3}$$

Рассматривая это соотношение, как уравнение относительно базисных векторов $\overline{e_i}$ получаем связь компонент векторов $\bar{x}$ и $\bar{y}$ между собой

$$x_i = \sum_{j=1}^m a_{ij} y_j \tag{2.4}$$

Числа a_{ij} являются компонентами матрицы A, которую можно записать в виде таблицы

$$A = \{\, a_{ij} \,\} \equiv \left\| a_{ij} \right\| = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \equiv (\, n \times m \,) \tag{2.5}$$

Как правило, матрица записывается в круглых скобках, квадратных или двойных. Мы будем пользоваться в основном круглыми скобками.
Принято, что первый индекс относится к строке, а второй к столбцу.

Матрицей называется таблица чисел, записанная в определенном порядке и состоящая из n строк и m столбцов. Числа n и m определяют порядок матрицы и называются ее размерностью. Если $n \neq m$, то матрица называется прямоугольной. Если $n = m$, то матрица называется квадратной. Главная диагональ квадратной матрицы имеет элементы $a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{44}, ..., a_{nn}$. Сумма элементов квадратной матрицы, стоящих на главной её диагонали, называют следом матрицы и обозначают как

$$SpA = a_{11} + a_{22} + a_{33} + ... + a_{nn} \tag{2.6}$$

Вспомогательная или побочная диагональ состоит из элементов $a_{n1}, a_{n-12}, a_{n-23}, ... a_{1n}$.

Нулевая матрица состоит из одних нулей. Единичная матрица представляет собой диагональную матрицу, где по главной диагонали располагаются единицы, а остальные компоненты равны нулю.

Единичная матрица обозначается как E

$$E = (\delta_{ik}), \text{ где символ Кронекера } \delta_{ik} = \begin{cases} 0, & i \neq k \\ 1, & i = k \end{cases}. \tag{2.7}$$

Например, для $n = 3$, $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Прямоугольная матрица, состоящая из одного столбца, называется ***вектором столбцом*** или просто вектором $\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}$ (2.8)

Матрицу $I_p \equiv (\gamma_{jk}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ... & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 & 1 & ... & 0 \\ . & . & ... & . & . & ... & . \\ 0 & 0 & ... & 0 & 0 & ... & 1 \\ . & . & ... & . & . & ... & . \\ 0 & 0 & ... & 0 & 0 & ... & 0 \end{pmatrix} \}n-p$, (2.9)

где $\gamma_{jj+p} = 1$, $\gamma_{jk} = 0$ при $k - j = p$ $(0 \leq p \leq n-1)$, называют p единичным косым рядом порядка n. Очевидно, что $I_0 = E$.

Диагональная квадратная матрица определяется, как матрица

$$D=\begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix} (\text{ для } n=2\,). \qquad (2.10)$$

Если $d_1 = d_2$, то матрица называется ***скалярной.***

Транспонированная матрица отличается тем, что строки меняются местами со столбцами (например, для матрицы размерности $n=m=2$).

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}, \qquad (2.11)$$

при этом должны выполняться свойства: $\left(A^T\right)^T = A,$

(A+B)= A + B , (2.12)

$(\lambda A)^T = \lambda A^T$.

Кроме того, очевидно, что $SpA^T = SpA$.

Квадратная симметричная матрица имеет одинаковые компоненты симметрично главной диагонали и может быть образована следующим образом

$$S=\frac{1}{2}\left(A+A^T\right).\ \text{Для неё выполняется } S^T = S. \qquad (2.13)$$

Кососимметричная квадратная матрица имеет хоть и равные компоненты относительно главной диагонали, но они имеют противоположные знаки

$$K=\frac{1}{2}\left(A-A^T\right).\text{Для неё выполняется } K^T = -K. \qquad (2.14)$$

Прямоугольная матрица, состоящая из одной строки, называется ***вектором строкой*** и получается из вектора столбца транспонированием, $\bar{x}^T = \{x_1, x_2, x_3, .., x_n\}$. (2.15)

Матрица называется ***не отрицательной***, если все её элементы

$a_{ik} \geq 0$, где, $i=\overline{1,n}$ $k=\overline{1,m}$.

Матрица называется ***положительной***, если $a_{ik} > 0$.

Матрица называется ***блочной (клеточной),*** если ее можно представить в виде блоков. Например,

$$\text{матрица } M=\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

является блочной, если элементы A, B, C и D сами являются матрицами $A=(k\times n)$, $B=(p\times m)$, $C=(n\times l)$, $D=(t\times m)$.

Размерность матрицы M определяется как $k+n$ строк и $l+m$ столбцов. Блочная матрица отображает подпространства векторного пространства на соответствующие подпространства другого векторного пространства.

Модулем матрицы называется матрица, состоящая из модулей соответствующих элементов

$$\operatorname{mod} A \equiv |A| = \{|a_{ik}|\}\ . \qquad (2.16)$$

Например, для $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ получается $\operatorname{mod} A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Нормой матрицы называется квадратный корень из суммы квадратов всех ее элементов. Например, для квадратной матрицы размерности $n=2$

$$\|A\| = \sqrt{a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{21}^2 + a_{22}^2}\ . \qquad (2.17)$$

Как частный случай норма вектора строки или вектора столбца будет выражаться:

$$\|(x_1, x_2, \ldots x_n)\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2} \qquad (3.18)$$

2.2. Алгебра матриц и их свойства

1. Две матрицы считаются равными, если их порядки равны и все их компоненты совпадают

$$A = B \Rightarrow \begin{cases} a_{ik} = b_{ik} \\ \ n = m \qquad p = l \end{cases} \qquad \left(i = \overline{1,n}; k = \overline{1,l}\right). \qquad (2.19)$$

2. Складываются матрицы только одного порядка, причем складываются соответствующие компоненты:

$$c_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta} + b_{\alpha\beta} \ \Rightarrow\ C = A + B\,. \qquad (2.20)$$

Свойства операции сложения: $A + B = B + A$ и

$(A + B) + C = A + (B + C)$. (2.21)

Пример. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$.

3. Если матрица умножается на число, то каждый элемент матрицы умножается на это число:

$$c_{\alpha\beta} = \lambda\ a_{\alpha\beta} \Rightarrow C = \lambda\ A\,. \qquad (2.22)$$

Пример. $3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$.

4. Определим правило умножения матриц. Пусть вектор $\bar{x}$ отображается на вектор $\bar{y}$ ($B\,\bar{x} = \bar{y}$), а вектор $\bar{y}$ в свою очередь отображается на вектор $\bar{z}$ (

$A\,\bar{y} = \bar{z}$), то вектор $\bar{x}$ отображается на вектор $\bar{z}$ как $\bar{z} = A\,B\,\bar{x} = C\,\bar{x}$. Компоненты матрицы C определяется как

$$c_{\alpha\beta} = \sum_{\gamma=1}^{n} a_{\alpha\gamma} b_{\gamma\beta}, \qquad (2.23)$$

где по повторяющему индексу идет суммирование.

Видно, что элементы столбца матрицы B умножается на элементы строки матрицы A, и их произведения складываются. Необходимо, чтобы число строк умножаемой матрицы равнялось числу столбцов матрицы, которая умножается. Количество столбцов матрицы B определяет количество столбцов матрицы C, а количество ее строк определяет количество строк матрицы A. Можно сформулировать правило умножения: элемент $c_{\alpha\beta}$,стоящий на пересечении α строки и β столбца матрицы $C = A\,B$ равен сумме попарных произведений соответствующих элементов α строки матрицы A и β столбца матрицы B.

Пример для n=2

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим конкретный пример.

Перемножим матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ -5 & 7 \end{pmatrix}$.

И еще один пример $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 2 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 3 \\ 14 & 7 \end{pmatrix}$**.**

Нельзя перемножать такие матрицы как, например,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ или } \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 7 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

*Пример***.** Перемножим вектор-столбец с вектором-строкой.

Решение. Рассмотрим вектор-столбец $\bar{x} = (3\times 1) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ и вектор-строку

$\bar{y} = (1\times 3) = (y_1, y_2, y_3)$. Тогда по правилу перемножения следует, что

$$\bar{x}\cdot\bar{y} = (1\times 3)\cdot(3\times 1) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3\ . \qquad (2.25)$$

Свойства произведения матриц:

$$A(\,B\,C\,) = (\,A\,B\,)\,C \text{ (сочетательное),}$$

$$A(B+C)=AB+AC \text{ (распределительное)},$$
$$AB \neq BA \text{ (переместительное)}. \qquad (2.26)$$

Последнее свойство показывает, что произведение матрицы не обладает переместительным свойством. Поэтому порядок следования матриц при перемножении следует строго соблюдать, иначе получим ошибку в вычислениях.

Заметим, что блочные матрицы умножаются таким же способом. Однако надо следить, чтобы в перемножаемых блоках количество строк и столбцов соответствовало правилам перемножения матриц.

Пример 1. $AB=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$, $BA=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$

Видно, что $AB \neq BA$. Коммутируют, то есть переставляются при умножении, только ограниченный класс матриц, например, единичная ($AE = EA$).

Нормальной матрицей называется матрица, которая коммутирует со своей транспонированной матрицей, то есть выполняется $A^T \cdot A = A \cdot A^T$.

*Пример 2***.** Умножить квадратную матрицу второго порядка на вектор столбец

$$\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}x_1+a_{12}x_2\\a_{21}x_1+a_{22}x_2\end{pmatrix}. \qquad (2.27)$$

Таким образом, наглядно видно, как система, например, двух алгебраических уравнений может быть сведена к матричному уравнению

$$A\,\overline{x}=\overline{b} \Rightarrow \begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1\\a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2\end{cases},$$

способы решения, которого будут рассмотрены в дальнейшем.

Пример 3. Найти матрицу зеркального отражения декартовых координат относительно прямой $y=x$.

Решение. Матрица поворота на угол 45^0 определяется

$$\overline{x'}=U\,\overline{x}, \quad U=\begin{pmatrix}\cos 45^0&-\sin 45^0\\\sin 45^0&\cos 45^0\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}.$$

Матрица зеркального отражения определяется из системы преобразованных координат

$$\begin{cases}x''=x'+0y'\\y''=0x'-y'\end{cases} \Rightarrow B=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}.$$

Искомая матрица будет иметь вид $\overline{x''}=BU\,\overline{x}=C\,\overline{x}$

$$C=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}=-\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1&1\\1&1\end{pmatrix}.$$

***Пример*. Возведем матрицу** $A=\begin{pmatrix}2&1&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$ **в степень 100.**

Решение. $A^2=\begin{pmatrix}2&1&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&3&0\\0&1&0\\0&0&4\end{pmatrix}$

$$A^3=\begin{pmatrix}4&3&0\\0&1&0\\0&0&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8&7&0\\0&1&0\\0&0&8\end{pmatrix}$$

$$A^4=\begin{pmatrix}8&7&0\\0&1&0\\0&0&8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}16&15&0\\0&1&0\\0&0&16\end{pmatrix}\text{ и т.д.}$$

Видим закономерность $A^{100}=\begin{pmatrix}2^{100}&2^{100}-1&0\\0&1&0\\0&0&2^{100}\end{pmatrix}$.

Отметим, что если выполняется $A^2=E$, то матрицу называют ***инволютивной.*** Если $A^2=A$, то матрицу называют ***идемпотентной.*** Отметим так же, что существует достаточно много специальных матриц. Например, ***перестановочные*** матрицы. Как пример, приведем перестановочную матрицу $P=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$, которая при умножении на другую квадратную матрицу $(n=3)$ переставляет в ней вторую и третью строки.

Как частный случай квадратной матрицы, рассмотрим преобразования координат при преобразовании базиса в n-мерном линейном векторном пространстве.

Пусть вектор $\bar{x}=\bar{e}_1x_1+\bar{e}_2x_2+...+\bar{e}_nx_n$ представлен в базисе линейно независимых векторов $\bar{e}_i$ $\left(i=\overline{1,n}\right)$.

Выберем другой базис $\bar{x}=\bar{e}_1'x_1+\bar{e}_2'x_2'+...+\bar{e}_n'x_n'$, где $\bar{e}_i'$ $\left(i=\overline{1,n}\right)$ компоненты вектора в этом базисе. Любой базисный вектор $\bar{e}_i'$ как и любой вектор, может быть разложен по базису $\bar{e}_i$. Получаем систему

$$\begin{cases} \bar{e}_1' = V_{11}\bar{e}_1 + V_{12}\bar{e}_2 + \ldots + V_{1n}\bar{e}_n \\ \bar{e}_2' = V_{21}\bar{e}_1 + V_{22}\bar{e}_2 + \ldots + V_{2n}\bar{e}_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \bar{e}_n' = V_{n1}\bar{e}_1 + V_{n2}\bar{e}_2 + \ldots + V_{nn}\bar{e}_n \end{cases}.$$

Таким образом, переход от базиса $\bar{e}_i$ $\left(i = \overline{1,n}\right)$ к базису $\bar{e}_i'$ $\left(i = \overline{1,n}\right)$ определяем матрицей V

$$V = \begin{pmatrix} V_{11} & V_{12} & \ldots & V_{1n} \\ V_{21} & V_{22} & \ldots & V_{2n} \\ . & . & \ldots & . \\ V_{n1} & V_{n2} & \ldots & V_{nn} \end{pmatrix}.$$

Так как вектор $\bar{x}$ один и тот же, то получаем равенство $\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} \bar{e}_i' x_i'$, подставив в которое разложение векторов $\bar{e}_i'$, получаем систему преобразований координат при смене базиса

$$\begin{cases} x_1 = V_{11}x_1' + V_{12}x_2' + \ldots + V_{1n}x_n' \\ x_2 = V_{21}x_1' + V_{22}x_2' + \ldots + V_{2n}x_n' \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = V_{n1}x_1' + V_{n2}x_2' + \ldots + V_{nn}x_n' \end{cases},$$

которую можно записать в операторной форме, как $\bar{x} = V\,\bar{x}'$ или в матричной форме

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_{11} & V_{12} & \ldots & V_{1n} \\ V_{21} & V_{22} & \ldots & V_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ V_{n1} & V_{n2} & \ldots & V_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ . \\ x_n' \end{pmatrix}.$$

Если имеются два последовательных преобразования координат сначала от x_i к x_i' ($\bar{x} = V_1\bar{x}'$), а затем от x_i' к x_i'' ($\bar{x}' = V_2\bar{x}''$), то, очевидно, можно перейти от координат x_i'' к координатам x_i' с помощью преобразования $\bar{x} = V_1V_2\bar{x}''$.

Пример. Даны два линейных преобразования

$$\begin{cases} x_1' = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \\ x_2' = x_1 + x_2 + 5x_3 \\ x_3' = 3x_1 - 2x_2 + x_3 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x_1'' = x_1' + 2x_2' + 2x_3' \\ x_2'' = -3x_2' + x_3' \\ x_3'' = 2x_1' + 3x_3' \end{cases}.$$

Найти линейное преобразование, выражающее x_1, x_2, x_3 через x_1'', x_2'', x_3''.

Решение. Здесь $\bar{x}' = V_1\bar{x}$ и $\bar{x}'' = V_2\bar{x}_1$, где $V_1 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 5 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ и

$$V_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$V = V_2 \cdot V_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 5 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 1 & 16 \\ 0 & -5 & -14 \\ 13 & 0 & 11 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, $\bar{x}'' = V\,\bar{x}$ задается преобразованием координат

$$\begin{cases} x_1'' = 10x_1 + x_2 + 16x_3 \\ x_2'' = -5x_2 - 14x_3 \\ x_3'' = 13x_1 + 11x_3 \end{cases}.$$

В заключении этого параграфа введем понятие ***прямой суммы*** квадратных матриц A и B порядков n и m, соответственно, которое определяет квадратную блочную матрицу C порядка $n+m$

$$C = \begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix} = A \oplus B,$$

где O- прямоугольные нулевые матрицы размерности $(m \times n)$и $(n \times m)$, соответственно.

2.3. Определитель квадратной матрицы и его свойства. Метод Крамера

Каждая квадратная матрица характеризуется еще одним числом, а именно – определителем, который показывает масштаб изменения вектора при отображении его в другое пространство. На примере матрицы второго порядка покажем, как вводится определитель, и покажем способ его подсчета.

Пусть дана система двух линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \Rightarrow A\,\bar{x} = \bar{b},\ A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \bar{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}.$$

Умножая первое уравнение на a_{21}, а второе на a_{11} и вычитая, получим

$$x_1 = \frac{a_{11}b_2 - b_1 a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \equiv \frac{\Delta_1}{\Delta}, \text{ аналогично } x_2 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{\Delta_2}{\Delta} \quad (2.28)$$

Здесь обозначено $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ - основной определитель системы,

и $\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$ - вспомогательные определители системы, получаемые из основного определителя заменой соответствующего столбца на столбец из свободных членов уравнения. Наглядно видно, как подсчитывается определитель матрицы второго порядка – для этого необходимо от произведения элементов стоящих на главной диагонали отнять произведение элементов стоящих на вспомогательной диагонали

$$\det A \equiv \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \quad (2.29)$$

Этот метод можно обобщить на систему n линейных алгебраических уравнений. Получаем следующий алгоритм решения.

Метод Крамера. Для решения системы n алгебраических линейных уравнений с n неизвестными необходимо найти ряд определителей $\Delta, \Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, ..., \Delta_n$, где Δ основной определитель системы, а остальные вспомогательные, причем номер каждого из них означает, что именно под этим номером столбец основного определителя заменяется на столбец из свободных членов уравнений. Неизвестные определяются по правилу:

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, i = \overline{1, n}. \quad (2.30)$$

Таким образом, решение систем уравнений сводится к вычислению определителей.

Пример. Решить систему $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 1 \\ 2x_1 - 3x_2 = 0 \end{cases}$.

Решение. $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-3) - 2 \cdot 2 = -7$,

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = -3, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2$$

Ответ: $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{3}{7}$, $x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{2}{7}$. Проверка дает $\begin{cases} \frac{3}{7} + \frac{4}{7} = 1 \\ \frac{6}{7} - \frac{6}{7} = 0 \end{cases}$.

Перечислим основные свойства определителя.

1. Свойство равноправности строк и столбцов.

При транспонировании матрицы ее определитель не меняется.

$$\det A = \det A^{\mathrm{T}}.$$

Справедливость этого утверждения непосредственно следует из теорем 1 и 2 следующего параграфа, где утверждается, что можно раскладывать определитель, как по строке, так и по столбцу. Кроме того, это легко проверить на примере определителя второго порядка.

2. Свойство антисимметричности определителя.

При перестановке двух любых строк (столбцов) между собой определитель меняет знак, а абсолютное значение определителя остается тем же самым. Покажем это на примере определителя второго порядка

$$\begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{vmatrix} = a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

3. Свойство линейности определителя.

Если каждый элемент i строки (j столбца) определителя представить в виде двух слагаемых, то определитель может быть представлен в виде суммы определителей. Покажем на примере для $n=2$.

$$\begin{vmatrix} a_{11}+a_{11}' & a_{12}+a_{12}' \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \left(a_{11}+a_{11}'\right)a_{22} - \left(a_{12}+a_{12}'\right)a_{21} = a_{11}a_{22} -$$

$$a_{12}a_{21} + a_{11}'a_{22} - a_{12}'a_{21} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11}' & a_{12}' \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

4. Умножение определителя на число $\lambda \neq 0$ равносильно умножению некоторой строки (любой) или столбца (любого) на это число. Видно принципиальное отличие от матрицы, где на это число умножается каждый элемент матрицы.

$$\begin{vmatrix} a_{11}\lambda & a_{12}\lambda \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \lambda\,(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

5. Если все элементы столбца (строки) определителя равны нулю, то и определитель равен нулю.

Действительно определитель можно разложить по этому столбцу (строке) и везде будут сомножителями нули (по теореме 3 следующего параграфа).

6. Если элементы двух строк (столбцов) определителя пропорциональны, то он равен нулю.

Действительно, пусть $a_{21} = \lambda\, a_{11}$, $a_{22} = \lambda\, a_{12}$, то

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ \lambda a_{11} & \lambda a_{12} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 0.$$

7. Если к элементам некоторой строки (столбца) прибавить элементы другой строки (столбца) умноженные на произвольное число λ, то величина определителя не изменится.

Покажем это, используя свойство линейности и свойство под номером 6,

$$\begin{vmatrix} a_{11}+\lambda a_{12} & a_{12} \\ a_{21}+\lambda a_{22} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \lambda \cancel{\begin{vmatrix} a_{12} & a_{12} \\ a_{22} & a_{22} \end{vmatrix}} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},$$

так как второй определитель в сумме равен нулю.

8. Сумма произведения элементов какой-либо строки (столбца) на алгебраическое дополнение другой строки (столбца) равно нулю

$$\sum_{i=1,k\neq j}^{n} a_{ij} A_{ik} = 0 \ . \tag{2.31}$$

Покажем это на примере определителя третьего порядка. Доказательство базируется на теореме 1 (2) следующего параграфа.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad A_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}, \ A_{23} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix},$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Образуем сумму

$$\sum_{i=1}^{3} a_{i1} A_{i3} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} + a_{31} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = 0,$$

что и требовалось доказать.

9. Теорема об определителе произведения двух матриц

$$\det AB = \det A \det B \ . \tag{2.32}$$

Видно, что определитель обладает мультипликативным свойством.
Докажем на примере матриц второго порядка

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}, \quad A\ B = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$$

$$\det(AB) = \begin{vmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{vmatrix} = \{\text{по свойству линейности}\} =$$

$$\begin{vmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} \\ a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11}b_{11} & a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} & a_{22}b_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} \\ a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{12}b_{21} & a_{12}b_{22} \\ a_{22}b_{21} & a_{22}b_{22} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{12} \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{11} & b_{12} \end{vmatrix} + b_{11}b_{22} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + b_{21}b_{12} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{vmatrix} + b_{21}b_{22} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{12} \\ a_{22} & a_{22} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} (b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} = \det A \det B \ .$$

2.4. Способы вычисления определителей

Перечислим способы вычисления определителя матрицы с размерностью $n \le 3$.

1. Метод звездочки

Для $n=2$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

Для $n=3$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} -$$

$$a_{31}a_{13}a_{22} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{32}a_{23}a_{11} \qquad (2.33)$$

Произведение элементов стоящих на главной диагонали и образующих треугольники вокруг нее берутся с положительными знаками, а произведения элементов стоящих на вспомогательной диагонали и вокруг нее берутся с отрицательными знаками.

2. Метод Саррюса. Дописываются элементы двух строк снизу или сверху определителя. Можно дописывать элементы двух столбцов справа или слева. Затем элементы на главных диагоналях перемножаются и образуют сумму с положительными знаками, а произведение элементов стоящих на вспомогательных диагоналях образуют сумму с отрицательными знаками. Например, для определителя с $n=3$ добавляем два первых столбца справа и получаем

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} + & + & + & & \end{matrix} \\ \left|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}\right|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix} \\ \begin{matrix} - & - & - & & \end{matrix} \end{array} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$

$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{33}a_{21}a_{12}.$$

3.Метод Маклорена, связывающий определитель третьего порядка с пятью определителями второго порядка.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \frac{1}{a_{22}} \begin{Vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \end{Vmatrix}. \qquad (2.34)$$

4.Метод разложения по строке (столбцу). Для того, чтобы воспользоваться этим методом необходимо прежде ввести некоторые вспомогательные характеристики матрицы.

Минором любого элемента a_{ij} квадратной матрицы A n-го порядка называется определитель n-1 порядка соответствующий той матрице, которая получается из данной путем вычеркивания i-й строки и j-го столбца

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad (2.35)$$

Пример 1. Для матрицы $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ найти минор M_{21}

Ответ: $M_{21}= a_{12}$

Пример 2. Для матрицы $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 5 & 6 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ найти миноры элементов $a_{22}=6$ и $a_{31}=2$

*Решение****.*** $M_{22}=\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}=-6$ и $M_{31}=\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 6 & 1 \end{vmatrix}=-19$

Главные миноры матрицы (2.32.) определяются как $D_1=a_{11}$, $D_2=$ $=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},\dots,$ $D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$; $A=\begin{Bmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & a_{2n} \\ .. & .. & . & . & .. \\ .. & .. & . & . & .. \\ a_{n1} & a_{n2} & . & . & a_{nn} \end{Bmatrix}$.

*Пример****.*** Для матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ найти минор элемента a_{32}.

*Решение****:*** $M_{32}=\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}=2.$

Алгебраическое дополнение или ***адъюнкта*** какого-либо элемента матрицы отличается от его минора только знаком по правилу

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij} \qquad (2.36)$$

Пример. Найти алгебраическое дополнение A_{23} элемента a_{23} для матрицы из предыдущего примера. Ответ: $A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=1.$

Для подсчета определителей n-го порядка (n>3) существуют 3 способа. Приведем их в виде теорем, но доказательства опустим.

Теорема 1 (2). Каков бы ни был номер строки (столбца) $i\ \left(i=\overline{1,n}\right)\ \left(j,\left(j=\overline{1,n}\right)\right)$ квадратной матрицы n-го порядка ее определитель вычисляется по формуле

$$\det A=\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\,A_{ij}=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\,A_{ij}=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}\,a_{ij}\,M_{ij} \qquad (2.37)$$

и равен сумме произведений элементов какой-либо строки (столбца) на соответствующее алгебраическое дополнение. Так для $n=3$

$$\begin{vmatrix} \boxed{a_{11} & a_{12} & a_{13}} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix} \equiv a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}=a_{11}(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}+$$

$$a_{12}(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix}+a_{13}(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix}=a_{13}A_{13}+a_{23}A_{23}+a_{33}A_{33}\ \text{и т.д.}$$

Пример. Дана матрица $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}$. Вычислим её определитель сначала разложением по первой строке, а затем по третьему столбцу.

$\Delta=\begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1\end{vmatrix}=3\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1\end{vmatrix}-\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1\end{vmatrix}+4\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1\end{vmatrix}=3+1-12=-8$. Сделаем разложение по третьему столбцу $\Delta=4\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1\end{vmatrix}-\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2\end{vmatrix}=-12-1+5=-8$.

Видно, что это правило основано на рекуррентном соотношении определителя n-го порядка с определителями n-1 порядка.

Теорема 3. (правило звездочки). Выражает определитель n-го порядка через произведение его элементов $a_{\alpha_1 1}, a_{\alpha_2 2}, a_{\alpha_3 3},\dots a_{\alpha_n n}$.

$$\det A=\sum_{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,..\alpha_n}^{n}(-1)^{N(\alpha_1,\alpha_2,\dots\alpha_n)}\,a_{\alpha_1 1}, a_{\alpha_2 2}, a_{\alpha_3 3},\dots a_{\alpha_n n}, \qquad (2.38)$$

где N символ общего числа беспорядка образованного из последовательности 1,2,3,.., n.

$$N=\begin{cases} 1, & \textit{при}\ (2;1),\ (3;1),(3;2),\dots\ \textit{беспорядок} \\ 0, & \textit{при}\,(1;2),(0;1),(2;2),\dots\ \textit{порядок}\end{cases}.$$

Продемонстрируем действие правила звездочки для определителя второго порядка $\Delta=(-1)^{0+0}\,a_{11}a_{12}+(-1)^{0+1}\,a_{12}a_{21}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$.

Элементы строк (столбцов) сами являются минорами первого порядка. Если в определителе n-го порядка взять минор k-го порядка $(k < n)$ и вычеркнуть все его строчки и столбы, то оставшиеся элементы составляют минор $(n-k)$-го порядка, который называется дополнительным минором к минору M. Соответствующее алгебраическое дополнение минора M называют его дополнительный минор взятый со знаком $(-1)^{S(M)}$, где $S(M)$ сумма номеров строк и столбцов на пересечении которых располагается минор M. Тогда можно обобщить теорему 1 и 2.

Теорема Лапласа. Если в определителе матрицы A n-го порядка выбраны k-строк $(1 \le k \le n-1)$, то сумма произведений всех миноров k-го порядка, расположенных на данных строках на их алгебраические дополнения равна определителю матрицы A.

Заметим, что число миноров расположено на k-строках определяется значением биноминального коэффициента (число сочетаний) $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$, где обозначено n-факториал: $n! = n \cdot (n-1)(n-2)\ldots 3 \cdot 2 \cdot 1$.

Пример. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$.

Решение. Заметим, что вторая и четвертая строка имеют только один минор второго порядка (остальные равны нулю), тогда по теореме Лапласа можно довольно легко вычислить определитель:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} (-1)^{(2+4)(3+5)} \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (-3) \cdot 23 = -69.$$

Здесь $S(M) = (i_1 + i_2) + (j_1 + j_2) = (2+4) + (3+5) = 14$ есть величина четная.

*Пример***.** Представить произведения двух определителей в виде одного определителя $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$.

Решение. По теореме Лапласа $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 1 & -1 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & 2 & -2 & 3 \\ a_{51} & a_{52} & -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$,

при произвольных значениях $a_{31}, a_{32}, a_{41}, a_{42}, a_{51}$ и a_{52}.

Для быстрого подсчета определителя удобно использовать свойство под номером 7. Покажем это на примере. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & 4 & 0 \\ -3 & 0 & 8 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 5 \\ -1 & -2 & 5 & -2 \\ -3 & -3 & 11 & -5 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 \\ -2 & 5 & -2 \\ -3 & 1 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & 8 \\ 0 & 5 & 10 \end{vmatrix} = = \begin{vmatrix} 1 & 8 \\ 5 & 10 \end{vmatrix} = 3$$

$$\times 3+$$

Здесь сделаны следующие операции: первый столбец складываем со вторым, вычитаем его из третьего столбца и умножив на коэффициент 2 (в уме) складываем с последним столбцом. Получаем строку, состоящую из одного элемента $a_{11} = 1$. Раскладываем по этой строке определитель и переходим к одному определителю уже третьего порядка. Те же процедуры делаем и дальше до определителя 2-го или 1-го порядка.

Сделаем еще одно замечание по поводу быстрого подсчета определителя. Можно просто довести его до треугольного вида и тогда он будет определяться произведением элементов стоящих на главной диагонали. Рассмотрим предыдущий пример

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 8 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & -2 & 5 & -2 \\ 0 & -3 & 11 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 5 & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & -30 \end{vmatrix} = -30.$$

Пример. Вычислить определитель $\Delta = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & b \\ 0 & a & 0 & 0 & \ldots & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 & \ldots & b & 0 & 0 \\ . & . & . & . & \ldots & . & . & . \\ b & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & a \end{vmatrix}$ n-го порядка, где n - четное натуральное число.

Решение: Из первой строчки вычесть последнюю. А затем к последнему столбцу прибавить первый и разложить по первой строке.

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a-b & 0 & 0 & 0 & .. & 0 & 0 & b-a \\ 0 & a & 0 & 0 & .. & 0 & b & 0 \\ . & . & . & . & .. & . & . & . \\ b & 0 & 0 & 0 & .. & 0 & 0 & a \end{vmatrix} = (a-b) \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & .. & 0 & b \\ 0 & a & 0 & .. & b & 0 \\ . & . & . & .. & . & . \\ b & 0 & 0 & .. & \bar{a} & 0 \\ 0 & 0 & a & .. & 0 & a+b \end{vmatrix} =$$

$(a^2 - b^2) \begin{vmatrix} a & 0 & .. & 0 & b \\ 0 & a & .. & b & 0 \\ . & . & .. & . & . \\ b & 0 & .. & 0 & a \end{vmatrix}$, где определитель уже n-2 порядка.

Очевидно $\Delta_n = (a^2 - b^2)\Delta_{n-2}$. Далее ту же процедуру делаем n/2 раз.

Ответ: $\left(a^2-b^2\right)^{\frac{n}{2}}$, для четных n.

В заключении этого параграфа обобщим понятия определителя на блочные квадратные размерности $2n$ матрицы треугольного типа

$$\det\begin{pmatrix} A & O \\ B & C \end{pmatrix} = \det A \cdot \det C, \tag{2.39}$$

где A, B, C и O сами матрицы порядка n. Выполняются так же следующие формулы

$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ C & O \end{pmatrix} = (-1)^n \det B \cdot \det C \quad \text{и} \tag{2.40}$$

$$\det A \oplus B = \begin{vmatrix} A & O \\ O & B \end{vmatrix} = \det A \cdot \det B. \tag{2.41}$$

2.5. Обратная матрица. Метод обратной матрицы

Введем понятие обратной матрицы, поскольку с её помощью можно построить один из простых способов решения систем линейных алгебраических уравнений. Действительно из $A\,\bar{x} = \bar{b}$ следует $\bar{x} = A^{-1}\,\bar{b}$, остается только перемножить две матрицы.

Пусть A - квадратная матрица n-го порядка, тогда обратная матрица определяется как $A\,A^{-1} = E$ (или $A\,B = BA = E$, следует $B = A^{-1}$).

Теорема: Для того, чтобы матрица A имела обратную матрицу и притом только одну необходимо и достаточно, чтобы ее определитель был отличен от нуля. В этом случае говорят, что ***матрица невырождена***. Если же $\det A = 0$, то матрица A ***вырождена*** (***особенная*** или ***сингулярная***) и в ней обязательно имеются линейно зависимые строки или столбцы. Обратная матрица определяется как

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & .. & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & .. & A_{2n} \\ .. & .. & .. & .. \\ A_{n1} & A_{n2} & .. & A_{nn} \end{pmatrix}^T = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & .. & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & .. & A_{n2} \\ .. & .. & .. & .. \\ A_{1n} & A_{2n} & .. & A_{nn} \end{pmatrix}. \tag{2.42}$$

Структура этой формулы просматривается из правила Крамера

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta} = \frac{\sum\limits_{ji}^{n} M_{ji} b_j (-1)^{i+j}}{\Delta}.$$

С другой стороны $x_i = \sum\limits_{j=1} a_{ij}^{-1} b_j$ и из сравнения следует, что

$$a_{ij}^{-1} = \frac{(-1)^{i+j} M_{ji}}{\Delta}.$$

Отметим, что матрица, состоящая из алгебраических дополнений A_{ij} элементов матрицы А= $\{a_{ij}\}$, называется ***присоединенной***

$$B = \{A_{ij}\}^T = \{A_{ji}\}.$$

Отметим так же, как очевидное, что обратная матрица имеется только у квадратной невырожденной матрицы.

Покажем справедливость определения (2.42) для обратной квадратной матрицы размерности n =2

$$A\ A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} & a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} \\ a_{21}A_{11} + a_{22}A_{22} & a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} \end{pmatrix}$$

По свойству определителей

$a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} = \det A$, $a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} = \det A$, $a_{21}A_{11} + a_{22}A_{12} = 0$ и $a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} = 0$ (восьмое свойство определителя).

Таким образом, получаем $A\ A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} \det A & 0 \\ 0 & \det A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E$, что и требовалось доказать.

Сделаем несколько замечаний.

1.Имеет место, следующее свойство $(AB)^{-1} = B^{-1}\ A^{-1}$, которое легко доказывается умножением слева сначала на B и затем на A.

$$B\ (AB)^{-1} = B\ B^{-1}\ A^{-1} = A^{-1},\ (AB)\,(AB)^{-1} = A^{-1}\ A = E.$$

Можно обобщить на произведение нескольких матриц, например, трех $(ABC)^{-1} = C^{-1} B^{-1} A^{-1}$.

2.Операции транспонирования и получения обратной матрицы перестановочны: $\left(A^T\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T$.

3. $A^{-1}\ A = A\ A^{-1} = E$. (доказать самостоятельно).

4. Матрица называется ***ортогональной.*** Если выполняется $A\ A^T = E$, то есть $A^T = A^{-1}$.

5. Матрица называется ***унитарной***, если выполняется $\det A = 1$.

6. $\det\ A^{-1} = \frac{1}{\det A}$.

7.Определитель присоединенной матрицы равен единице, $\det\ B$ =1, где B - присоединенная матрица (доказать самостоятельно).

8.Матрица A называется ***подобной*** матрице B, если существует невырожденная матрица V, такая что выполняется $VA = BV$ или $A = V^{-1}BV$.

Свойство подобия матриц используют для преобразования её к диагональному виду, который называют ***каноническим.***

Представление матрицы в виде произведения нескольких специальных матриц называют разложением матрицы, например, LV, QR, сингулярным и так далее разложениями.

Преобразования подобия позволяет переводить векторы из одного базиса в другой $\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} \bar{e}_i x_i = \sum_{i=1}^{n} \bar{e}'_i x'_i$, где $x_i = V_{ij} x'_j n$ и $x'_i = V_{ij}^{-1} x_j$ $(i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,n})$.

Тогда решение систем алгебраических уравнений можно существенно упростить. Действительно, $A\bar{x} = \bar{b} \Rightarrow V^{-1}BV\bar{x} = \bar{b} \Rightarrow B\bar{x}' = V\bar{b} \Rightarrow B\bar{x}' = \bar{b}'$, где B - диагональная матрица (см. далее метод Гаусса). Алгебра подобных матриц следующая $V^{-1}(A_1 + A_2)V = V^{-1}A_1V + V^{-1}A_2V$ и $V^{-1}A_1A_2V = V^{-1}A_1V \cdot V^{-1}A_2V$.

9. Матрица называется ***нормальной***, если выполняется $AA^T = A^T A$.
Примером нормальных матриц является унитарные матрицы. Отметим, что нормальные матрицы всегда приводятся к диагональному виду.

Определим обратную матрицу блочной квадратной матрицы. Ограничимся рассмотрением блочной матрицы треугольного вида $\begin{pmatrix} A & B \\ O & D \end{pmatrix}$. Если A, B и D имеют обратные матрицы, то обратная блочная матрица определяется, как $\begin{pmatrix} A & B \\ O & D \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}BD^{-1} \\ O & D^{-1} \end{pmatrix}$. За доказательством этой формулы отправляем в параграф 3.3. следующей главы (метод Гаусса получения обратной матрицы).

Аналогично, если дана блочная матрица $\begin{pmatrix} A & O \\ C & D \end{pmatrix}$, то обратная матрица определяется как $\begin{pmatrix} A & O \\ C & D \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ -D^{-1}CA^{-1} & D^{-1} \end{pmatrix}$.

Пример. Найти обратную матрицу $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

Решение. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$; $D = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow D^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$;

$$D^{-1}C = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 7 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$$

$$D^{-1}CA^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 7 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -31 & 19 \\ 23 & -14 \end{pmatrix}.$$

Получается окончательный ответ: $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & 0 \\ 31 & -19 & 3 & -4 \\ -23 & 14 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

Примеры

1. Найти обратную матрицу $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$.

Решение. $\det A = 2 \neq 0$, матрица невырождена и значит, имеет обратную матрицу.

$$A_{11} = 2,\ A_{12} = -4,\ A_{21} = -1,\ A_{22} = 3. \text{ Ответ: } A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$$

2. Найти A^{-1} для $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}$

Решение. $\det A$ = -1, матрица невырождена. $A_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -3 \end{vmatrix}$ = -1,

$A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 5 & -3 \end{vmatrix}$ = 38, $A_{13} = \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix}$ = -27, A_{21} = 1, A_{22} = -41, A_{23} = 29,

A_{31} = -1, A_{32} = 34, A_{33} = -24. Получаем $A^{-1} = -\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 38 & -41 & 34 \\ -27 & 29 & -24 \end{pmatrix}$. Проверка дает $A\,A^{-1} = E$.

3. Решить систему методом обратной матрицы.

$$\begin{cases} x + 3y = 1 \\ 4x + y = 2 \end{cases}.$$

Решение. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ $\overline{B} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\det A$ = -11

$A^{-1} = -\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}\frac{1}{11}$ Тогда $\overline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1}\,\overline{B} = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \end{pmatrix}$

Ответ: $\begin{cases} x = 7 \\ y = -2 \end{cases}$

Проверка: $A\,A^{-1} = \frac{-1}{11}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{11}\begin{pmatrix} -11 & 0 \\ 0 & -11 \end{pmatrix} = E$

4. Решить систему $\begin{cases} x - y = 3 \\ 3x + y = 1 \end{cases}$.

Решение. $\det A$ = 4, $\overline{B} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$. $A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}. \qquad \textit{Ответ:} \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \end{cases}.$$

2.6. Ранг матрицы. Элементарные преобразования матриц. *LU* разложение матриц.

Рангом матрицы A (в общем случае прямоугольной) называется наибольшее натуральное число $r = Rg\ A$, для которого существует не равный нулю определитель порядка r, порождаемый матрицей A. Очевидно, что $r \le n, m$. Дадим альтернативное определение. ***Рангом*** матрицы называется наивысший порядок отличных от нуля миноров этой матрицы**.**

Поскольку в матрице возможны строчки или столбцы пропорциональные друг другу, то определитель такой матрицы (свойство определителя номер 6) равен нулю. Необходимо вычеркнуть такую строку или столбец и у новой матрицы вычислить определитель. Если он отличен от нуля, то все строчки и столбцы линейно независимы и порядок этого определителя будет рангом матрицы. Таким образом, можно дать еще одно определение ранга. ***Ранг*** матрицы A равен максимальному числу ее независимых строк и столбцов**.**

Пример. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 8 \\ 2 & 5 & 1 \\ 3 & 9 & 24 \end{pmatrix}$ Видно, что $\det A$=0, так как первая строчка пропорциональна третьей. Значит $r < 3$. Поскольку $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$, имеет $\det A_1 \neq 0$, то следует r = 2.

Элементарные преобразования матриц.

1.Умножение строки или столбца на число $\lambda \neq 0$.

2.Прибавление к одной строке (столбцу) другой строки (столбца) умноженной на число $\lambda \neq 0$.

3.Перестановка строк (столбцов) между собой.

4.Отбрасывание строки (столбца) состоящей из нулей.

В результате таких преобразований матрица меняет вид, определители этих матриц разные, но однако у таких матриц остается одно и тоже число независимых строк и столбцов - r и такие матрицы называются ***эквивалентными*** ($\propto$, $\sim$ или $\Leftrightarrow$ - знаки эквивалентности).

Пример

$$.\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \ldots \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Таким образом, элементарные преобразования не меняют ранга матрицы. Элементарным преобразованиям легко дать интерпретацию на примере систем линейных алгебраических уравнений. Так умножение строки на число

$\lambda \neq 0$ тождественно умножению уравнения на это число, при этом число независимых уравнений не меняется, и решение остается прежним. Перестановка строк и столбцов матрицы – это просто перестановка уравнений в системе или перестановка неизвестных и опять, очевидно, решение системы то же самое. Далее, прибавление к одному уравнению другого умноженного на какое-либо число также не изменяет количество независимых уравнений. И последнее, отбрасывание строки (столбца), состоящего из нулей это не что иное, как удаление зависимого уравнения из системы. Например, $\begin{cases} 3x - y = 1 \\ 6x - 2y = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x - y = 1 \\ 0 - 0 = 0 \end{cases}$

Системы алгебраических уравнений называются ***равносильными*** (эквивалентными), если они имеют одно и то же решение.

Еще раз подчеркнем, что после элементарных преобразований матрицы эквивалентны, но не равны. Очевидно, что и определители у этих матриц разные. Главное, что сохраняется ранг, то есть число независимых строк и столбцов.

Перечислим свойства ранга матрицы.

1. $Rg\ A \leq \min\{m; n\}$, не превосходит наименьшей размерности матрицы.
2. $|RgA - RgB| \leq Rg(A + B) \leq RgA + RgB$.
3. $Rg(A \cdot B) \leq \min\{RgA; RgB\}$ - ранг произведения матриц не превосходит ранга любого из сомножителей.

Как частный случай, $RgAB = RgA$, если A и B квадратные матрицы одного порядка, но $\det B = 0$.

Перейдем к правилам вычисления ранга матриц. Вычислить ранг матрицы можно двумя способами.

С помощью элементарных преобразований довести матрицу до единичной, тогда количество единиц на главной диагонали дает непосредственно ранг матрицы.

Примеры.

1. $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 10 \\ 7 & 8 & 18 \\ 3 & 7 & 17 \end{pmatrix} \propto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 7 & -20 & -52 \\ 3 & -5 & -13 \end{pmatrix} \propto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -20 & -52 \\ 0 & -5 & -13 \end{pmatrix} \propto . \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -13 \end{pmatrix} \propto . \propto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$\propto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow RgA = 2$.

2. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \propto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & -7 & 1 \end{pmatrix} \propto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -7 & 1 \end{pmatrix} \propto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & 8 \end{pmatrix} \propto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Ответ: $RgA = 3$.

3. Определить ранг матрицы $\begin{pmatrix} 2 & 11 & 5 & 1 \\ 1 & 9 & 7 & 2 \\ 3 & 1 & 19 & 1 \\ 7 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Решение.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & -7 & 2 \\ 1 & 0 & -4 & 1 \\ -5 & -1 & -14 & 3 \end{pmatrix} \propto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & -7 & 2 \\ 1 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \propto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & -7 & 0 \\ 1 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \propto$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -19 & 0 \\ 1 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \propto$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \propto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \propto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$ *Ответ*: *RgA*=4.

Другим методом определения ранга является метод окаймляющего минора. По определению рангом матрицы называется наивысший порядок ненулевых миноров этой матрицы. Минор наивысшего порядка отличный от нуля, называется ***базисным.***

Если не все элементы матрицы равны нулю (миноры первого порядка M_1 и есть элементы матрицы), то ранг матрицы $r \geq 1$. Далее любой элемент матрицы не равный нулю ($M_1 \neq 0$) окаймляется строкой и столбцом, в результате чего получаем набор миноров второго порядка M_2. Если все миноры второго порядка равны нулю, то ранг матрицы равен $r = 1$. Если хотя бы один из них отличен от нуля, то ранг матрицы $r \geq 2$.

Далее опять окаймляется минор второго порядка не равный нулю строкой и столбцом. В результате опять получается набор миноров третьего порядка M_3. Если все M_3=0, то ранг матрицы однозначно равен $r = 2$. Если хотя бы один из миноров $M_3 \neq 0$, то $r \geq 3$. Не равный нулю минор третьего порядка опять окаймляется, и анализируются миноры четвертого порядка и так далее.

При вычислении ранга матрицы следует переходить от миноров меньших порядков к минорам больших порядков. Если найдется минор порядка отличный от нуля, то необходимо вычислить миноры $k+1$ порядка, окаймляющие данный минор. Если все окаймляющие миноры равны нулю, то ранг матрицы равен $r = k$.

*Пример***.** Найти ранг матрицы $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 5 & 4\\ 3 & 1 & 3 & 1\\ 2 & 4 & 10 & 8\\ 4 & 3 & 8 & 5\end{pmatrix}$

*Решение***.** Удобно начинать вычисления с главных миноров $M_1=D_1=1\neq 0$, что означает, что $RgA\geq 1$. Далее $M_2=D_2=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 1\end{vmatrix}=-5\neq 0$, поэтому $RgA\geq 2$.

Составляем окаймляющие миноры $M_3'=\begin{vmatrix}1 & 2 & 5\\ 3 & 1 & 3\\ 2 & 4 & 10\end{vmatrix}=0$, $M_3''=\begin{vmatrix}1 & 2 & 5\\ 3 & 1 & 3\\ 4 & 3 & 8\end{vmatrix}=0$ и

$M_3'''=\begin{vmatrix}1 & 2 & 4\\ 3 & 1 & 1\\ 4 & 3 & 5\end{vmatrix}=0$.

Отсюда следует, что ранг матрицы $RgA=2$.

С помощью элементарных преобразований можно представить произвольную матрицу A в виде произведения $A=L\cdot U$.
Невырожденной левой нижней треугольной матрицы L с единицами на главной диагонали и правой верхней треугольной матрицы U. Такое представление называется LU разложением и возможно в том случае, когда главные диагональные миноры не равны нулю. Разложение LU находит широкое применение в вычислительной практике.

Пример. Построить LU разложение матрицы $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 5 & -1\\ 1 & -1 & 12\end{pmatrix}$

*Решение***.** $D_1=1$, $D_2=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 5\end{vmatrix}=1$, $D_3=\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 5 & -1\\ 1 & -1 & 12\end{vmatrix}=2$. Значит LU разложение этой матрицы возможно. С помощью элементарных преобразований доводим данную матрицу до треугольного вида $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & -3\\ 0 & -3 & 11\end{pmatrix}=$

$\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & -3\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}=U$

Составляем разложение LU с матрицей L специального вида $LU = A$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 12 \end{pmatrix}$$

Элементы матрицы L определяются их данных уравнения $l_{21} = 2,\ l_{31} = 1$ из первого столбца и $2l_{31} + l_{32} = -1$ дает $l_{32} = -3$.

Проверка: $2l_{21} + 1 = 5$

$$l_{31} - l_{32} + 2 = 12,$$

подтверждает правильность результата. Окончательно LU разложение данной матрицы имеет вид $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Заметим, что данная матрица A симметрична, поэтому её можно представить в виде разложения на три матрицы специального вида. Разложим матрицу $U = DU_1$, на произведение диагональной и правой верхней треугольной матрицы U_1 с единицами по главной диагонали.

$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, где $U_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ легко определяется из уравнения $U = DU_1$.

Замечаем, что $U_1 = L^T$ и поэтому разложение A имеет вид $A = U^T{}_1 DU_1$.

Таким образом, матрицы A и D являются подобными.

2.7. Собственные значения и собственные векторы матрицы

Ранее было показано, что матрица A отображает вектор $\bar{x}$ в одном векторном пространстве на вектор $\bar{y}$ в другом векторном пространстве $\left(\bar{x} \subset A_n, \bar{y} \subset B_m\right)$. Если же отображение осуществляется на то же векторное пространство

$$A\bar{x} = \lambda\bar{x}, \quad \bar{x} \neq \bar{0}, \tag{2.28}$$

то матрица A осуществляет переход от одного базиса векторного пространства $\left(\bar{x} \subset A_n\right)$ к другому базису. Число λ называется собственным значением матрицы A, а вектор $\bar{x}$, удовлетворяющий уравнению (2.28) называют собственным вектором этой матрицы. Каждому собственному числу λ матрицы соответствует собственный вектор $\bar{x}$, то есть собственное направление.

Матрица $$A-\lambda T=\begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}-\lambda \end{pmatrix} \qquad (2.29)$$

называется характеристической матрицей. Её определителем является полином степени n относительно собственного числа λ

$$P_n(\lambda)=|A-\lambda E|=(-1)^n\left(\lambda^n-c_1\lambda^{n-1}+c_2\lambda^{n-2}-\ldots\pm c_n\right), \qquad (2.30)$$

который называется характеристическим многочленом матрицы A. Коэффициенты c_i $\left(i=\overline{1,n}\right)$ можно по теореме Виета выразить через корни $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, определяемые из уравнения

$$P_n(\lambda)=0, \qquad (2.31)$$

следующим образом $$\begin{cases} c_1=\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n \\ c_2=\lambda_1\lambda_2+\lambda_1\lambda_3+..\lambda_{n-1}\lambda_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_n=\lambda_1\cdot\lambda_2\cdot\lambda_3\cdots\lambda_n \end{cases}. \qquad (2.32)$$

Видно, что $c_1=\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n=a_{11}+a_{22}+\ldots+a_{nn}=SpA$ является следом матрицы A. Последнее выражение $c_n=\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n=\det A$ есть определитель матрицы A, так как $P_n(0)=\det A=|A|$.

Покажем, что характеристические многочлены подобных матриц равны друг другу. Пусть матрицы A и B подобны, то есть $A=V^{-1}BV$ $(\det V\neq 0)$. Тогда $|A-\lambda E|=\left|V^{-1}BV-\lambda E\right|=\left|V^{-1}BV-\lambda V^{-1}V\right|=\left|V^{-1}(B-\lambda E)V\right|=|B-\lambda E|$, так как $\det V^{-1}=\dfrac{1}{\det V}$. Значит у подобных матриц определители и следы одинаковы.

Отметим также, что транспонированная матрица A^T имеет одинаковые с матрицей A характеристические многочлены и характеристические числа. Отметим также, что для характеристического многочлена выполнятся теорема Гамильтона-Келли - всякая квадратная матрица является корнем своего характеристического многочлена. Покажем это на примере.

Пример. Дана $A=\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Показать, что матрица A удовлетворяет своему характеристическому многочлену.

Решение. Составим характеристический многочлен $\begin{vmatrix} 4-\lambda & 3 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$, $\lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0$ или $(\lambda-1)(\lambda-5)=0$. Вместо λ подставляем А, тогда

$$A^2 - 6A + 5E = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - 6\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 19 & 18 \\ 6 & 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 24 & 18 \\ 6 & 12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

что и требовалось показать.

Если характеристический многочлен имеет кратные корни, то приходиться вводить понятие ***минимального характеристического многочлена***, у которого все корни различны, то есть необходимо отбросить все кратности.

Например, $P_n(\lambda) = (\lambda-5)^2(\lambda+1)$, то минимальный характеристический многочлен определяется как $P_{n\min}(\lambda) = (\lambda-5)\,(\lambda+1)$.

Рассмотрим метод получения собственных чисел и векторов матрицы A.

Теорема: Для того, чтобы числа λ_i $\left(i=\overline{1,n}\right)$ были собственными числами матрицы A необходимо и достаточно, чтобы эти числа были корнями характеристического уравнения $\det(A-\lambda E)=0$

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ .. & .. & .. & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \text{или} \quad \sum_{k=o}^{n} c_k \cdot \lambda^k = 0. \qquad (2.33)$$

Действительно, из уравнения $A\bar{x} = \lambda\bar{x}$ образуем систему однородных линейных алгебраических уравнений, записанную в операторной форме,

$$(A-\lambda E)\bar{x} = \bar{0}, \qquad (2.34)$$

которая имеет ненулевое решение $(\bar{x} \neq \bar{0})$, когда её определитель равен нулю ($\det(A-\lambda E)=0$). Более подробный анализ решения систем однородных линейных алгебраических уравнений будет сделан в начале следующей главы. Решения (2.33) и определяют все собственные значения $\lambda_1, \lambda_2, \dots\lambda_n$, которые называются ***спектром матрицы*** A.

Перечислим свойства собственных векторов матрицы A.

1.Для того, чтобы матрица была диагональной необходимо и достаточно, чтобы базисные векторы $\bar{e}_i$ $\left(i=\overline{1,n}\right)$ были собственными векторами матрицы

$$A\bar{e}_i = \lambda\bar{e}_i \Leftrightarrow D\bar{e}_i = \lambda_i\bar{e}_i. \qquad (2.35)$$

Покажем это. Пусть действительные векторы $\bar{e}_i$ являются собственными векторами A, то есть выполняется

$$A\bar{e}_i = \lambda \bar{e}_i \quad \text{или} \quad \sum_{i=1}^{n} a_{ik}\bar{e}_i = \lambda_k \bar{e}_i . \qquad (2.36)$$

Очевидно, что в равенстве при одних и тех же векторах справа и слева от знака равенства коэффициенты должны быть равны. Отсюда получаем

$$a_{ik} = \delta_{ik} \cdot \lambda_i \text{, где } \delta_{ik} = \begin{cases} 1, & i = k \\ 0, & i \neq k \end{cases} . \qquad (2.37)$$

Таким образом, матрица A является диагональной $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \equiv D$, что и требовалось показать.

2. Если собственные значения матрицы A различны $\lambda_i \neq \lambda_j \quad (i \neq j)$, то соответствующие собственные векторы линейно независимы. Покажем это на примере матрицы второго порядка. Пусть $\lambda_1 \neq \lambda_2$ и предположим, что собственные векторы линейно зависимы (противоположное утверждение) $c_1\bar{x}_1 + c_2\bar{x}_2 = \bar{0}$.

Тогда $A(c_1\bar{x}_1 + c_2\bar{x}_2) = c_1 A\bar{x}_1 + c_2 A\bar{x}_2 = c_1\lambda_1\bar{x}_1 + c_2\lambda_2\bar{x}_2 = \bar{0}$.

Получаем систему векторных уравнений $\begin{cases} c_1\bar{x}_1 + c_2\bar{x}_2 = \bar{0} \\ c_1\lambda_1\bar{x}_1 + c_2\lambda_2\bar{x}_2 = \bar{0} \end{cases}$.

Исключая, например вектор $\bar{x}_1$, получаем $c_2\bar{x}_2(\lambda_1 - \lambda_2) = \bar{0}$ и так как $\bar{x}_2 \neq \bar{0}$ и $\lambda_1 \neq \lambda_2$ следует, что $c_2 = 0$. То есть предположение о линейной зависимости векторов не выполняется. Таким образом, собственные векторы при различных значениях собственных чисел линейно независимы и определяют разные направления в пространстве.

*Пример***.** Найти собственные векторы и значения матрицы $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$.

*Решение***.** $A\bar{x} = \lambda\bar{x} \Rightarrow \det(A - \lambda E) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 3-\lambda & 4 \\ 5 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$.

Получаем характеристическое уравнение $\lambda^2 - 5\lambda - 14 = 0$, решения которого есть $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 7$. Заметим, что порядок следования корней определяется порядком возрастания их значений $(\lambda_2 > \lambda_1)$. Находим собственные векторы A. Для $\lambda_1 = -2$ получаем $A\bar{x} = -2\bar{x}$ или в матричной форме $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = -2\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 3x_1 + 4y_1 = -2x_1 \\ 5x_1 + 2y_1 = -2y_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x_1 + 4y_1 = 0 \\ 5x_1 + 4y_1 = 0 \end{cases}$. Так как $\det(A - \lambda E) = 0$, то имеем бесконечное множество решений. Выбираем одно, как более удобное $x_1 = 4,\ y_1 = -5$. Собственному значению $\lambda = -2$ соответствует собственный вектор $\bar{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix}$.

Для $\lambda = 7$ $\quad \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = 7\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -4x_2 + 4y_2 = 0 \\ 5x_2 - 5y_2 = 0 \end{cases}$.

Собственному значению $\lambda = 7$ соответствует собственный вектор $\bar{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

*Пример***.** Найти собственные значения и векторы матрицы $A = \begin{pmatrix} -11 & -2 & 12 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 5 & 6 \end{pmatrix}$.

*Решение***.** Из $\det(A - \lambda E) = 0$ следует $\begin{vmatrix} -(1+\lambda) & -2 & 12 \\ 0 & 4-\lambda & 3 \\ 0 & 5 & 6-\lambda \end{vmatrix} = 0$. Получаем $\lambda^3 - 9\lambda^2 - \lambda + 9 = 0$ или $(\lambda + 1)(\lambda^2 - 10\lambda + 9) = 0$. Спектр матрицы: $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 9$. Найдем собственные векторы матрицы.

Для $\quad \lambda_1 = -1,\quad \begin{pmatrix} -1 & -2 & 12 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 5 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{cases} -x - 2y + 12z = -x \\ 4y + 3z = -y \\ 5y + 6z = -z \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} -2y + 12z = 0 \\ 5y + 3z = 0 \\ 5y + 7z = 0 \end{cases}$. Следует, что $z = 0$ и $y = 0$, а $x = k$ - произвольное число. Собственный вектор, соответствующий собственному значению $\lambda = -1$, имеет вид $\bar{x}_1 = \begin{pmatrix} k \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Для $\lambda = 1,\quad \begin{pmatrix} -1 & -2 & 12 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 5 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -2x - 2y + 12z = 0 \\ 3y + 3z = 0 \\ 5y + 5z = 0 \end{cases}$.

Видно, что $y = -z$ и, полагая $y = 1$, получаем $z = -1$ и $x = -7$. Следовательно, для $\lambda = 1$ $\quad \bar{x}_2 = \begin{pmatrix} -7 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Для $\lambda = 9$, $\begin{pmatrix} -1 & -2 & 12 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 5 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix} = 9\begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -10x - 2y + 12z = 0 \\ -5y + 3z = 0 \\ 5y - 3z = 0 \end{cases}$.

Полагая $z = 5$, получаем $y = 3$ и $x = \dfrac{54}{10} = 5{,}4$. Третий вектор матрицы определится как $\bar{x}_3 = \begin{pmatrix} 5{,}4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Если матрица имеет кратные собственные значения, то характеристическая матрица $A - \lambda E$ имеет соответственно меньший ранг. От величины этого ранга зависит, будут ли у кратного собственного значения независимые собственные векторы или их не будет, поскольку в этом случае происходит вырождение главных направлений.

Геометрическая кратность матрицы A по λ_i определяется как $l_i = n - r_i$, где r_i - ранг матрицы $A - \lambda E$. Геометрическая кратность определяет максимальное количество линейно независимых собственных векторов принадлежащих λ_i.

Алгебраическая кратность λ определяется кратностью, с которой λ входит корнем в характеристический многочлен $|A - \lambda E|$.

Квадратная матрица A называется ***простой***, если для каждого её собственного значения его геометрическая кратность равна алгебраической кратности. В этом случае возможно определение собственных векторов для всех λ_i, даже кратных, а матрица A приводится к диагональному виду. Если алгебраическая кратность больше геометрической кратности, то матрица называется ***дефектной*** и её нельзя привести к диагональному виду, а собственные векторы соответствуют только различным λ_i без учета их кратности (λ определяются минимальным характеристическим многочленом).

Покажем это на конкретных примерах.

*Пример 1***.** Найти собственные значения и собственные векторы матрицы $A = \begin{pmatrix} 5 & 9 & 7 \\ 0 & 7 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

Решение. $\begin{vmatrix} 5-\lambda & 9 & 7 \\ 0 & 3-\lambda & -2 \\ 0 & 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (5-\lambda)(\lambda - 1)^2 = 0$.

Характеристические числа $\lambda_1 = 1$ кратности $k_1 = 2$ и $\lambda_2 = 5$ кратности $k_2 = 1$.

Для $\lambda = 1$, получаем систему $\begin{cases} 4x_1 + 9y_1 + 7z_1 = 0 \\ 2y_1 - 2z_1 = 0 \\ 2y_1 - 2z_1 = 0 \end{cases}$

Геометрическая кратность $l_1 = n - r_1 = 3 - 2 = 1$. Видно, что $k_1 > l_1$, поэтому собственному значению $\lambda_1 = 1$ кратности 2 соответствует только один собственный вектор. Полагаем $y = z = 1$ и получаем $x = 4$. Вектор определится как

$$\bar{x}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Для $\lambda_2 = 5$, получаем систему $\begin{cases} 9y_2 + 7z_2 = 0 \\ -2y_2 - 2z_2 = 0 \\ 2y_2 - 6z_2 = 0 \end{cases}$, откуда следует y =0 и z =0,

а x_2 - произвольно, $x_2 = k$.Получаем второй вектор матрицы A

$$\bar{x}_2 = \begin{pmatrix} k \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Окончательно получаем, что трем собственным значениям данной матрицы соответствует только два независимых собственных вектора.

*Пример 2***.** Найти собственные значения и собственные векторы матрицы

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение. $\begin{vmatrix} -1-\lambda & 3 & -1 \\ - & 5-\lambda & -1 \\ -3 & 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -(\lambda - 2)^2 \cdot (\lambda - 1) = 0.$

Собственные числа данной матрицы $\lambda_1 = 1$ алгебраической кратности $k_1 = 1$ и $\lambda_2 = 2$ кратности $k_2 = 2$.

Для $\lambda_1 = 1$, получаем систему $\begin{cases} -2x_1 + 3y_1 - z_1 = 0 \\ -3x_1 + 4y_1 - z_1 = 0 \\ -3x_1 + 3y_1 \qquad = 0 \end{cases}.$

Ранг данной системы равен $r_1 = 2$. Полагаем $x_1 = y_1 = 1$, получаем $z_1 = 1$.

Таким образом, значению $\lambda_1 = 1$ соответствует вектор $\bar{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$

Для $\lambda_2 = 2$, получаем систему $\begin{cases} -3x_2 + 3y_2 - z_2 = 0 \\ -3x_2 + 3y_2 - z_2 = 0. \\ -3x_2 + 3y_2 - z_2 = 0 \end{cases}$

Ранг данной системы $r_2 = 1$. Поэтому геометрическая кратность $l_2 = n - r_2 = 3 - 1 = 2$. Видно, что $k_2 = l_2$, поэтому собственным числам $\lambda_2 = 2$ и $\lambda_3 = 2$ соответствуют два линейно независимых собственных вектора. Получим их из уравнения $z_2 = -3x_2 + 3y_2$.

Полагаем $x_2 = 0$ и $y_2 = 1$, получаем первый вектор $\bar{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Полагаем $x_2 = 1$ и $y_2 = 0$, получаем второй вектор $\bar{x}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$. Таким образом, трем собственным значениям $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ и $\lambda_3 = 2$ соответствуют три линейно независимых собственных вектора.

Рассмотрим, каким образом формируется матрица V, которая диагонализирует матрицу A. Пусть имеется невырожденная квадратная матрица А, для которой выполняется $V^{-1}AV = D$, где D - есть диагональная матрица. Тогда исходя из уравнения $A\bar{x} = \lambda\bar{x}$ умножая его слева на V^{-1}, получаем $V^{-1}A\bar{x} = \lambda V^{-1}\bar{x} \Rightarrow V^{-1}AVV^{-1}\bar{x} = \lambda V^{-1}\bar{x} \Rightarrow DV^{-1}\bar{x} = \lambda V^{-1}\bar{x} \Rightarrow D\bar{e} = \lambda\bar{e}$,
По первому свойству собственных векторов для диагональной матрицы векторы $V^{-1}\bar{x}$ являются базисными $V^{-1}\bar{x} = \bar{e}$ и $\bar{x} = V\bar{e}$,
где $\bar{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\bar{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Тогда на примере, для $n = 2$ $(\lambda_1 \neq \lambda_2)$, получаем

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} V_{11} = x_1 \\ V_{21} = y_1 \end{cases},$$

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} V_{12} = x_2 \\ V_{22} = y_2 \end{cases}.$$

Таким образом, матрица, которая диагонализирует данную матрицу A, состоит из столбцов собственных векторов матрицы A

$$V = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}.$$

Когда геометрическая кратность меньше алгебраической кратности и число собственных векторов меньше числа собственных значений матрицы A, то нельзя составить квадратную матрицу преобразования V, переводящую матрицу A в диагональную. Если матрица A является простой, то существует базис, состоящий из собственных векторов этой матрицы, и в этом базисе эта матрица имеет вид:

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & .. & 0 \\ 0 & \lambda_2 & .. & 0 \\ .. & .. & .. & .. \\ 0 & 0 & .. & \lambda_n \end{pmatrix}, \qquad (2.38)$$

которая получается из D обратным преобразованием

$$D = V^{+1} A V^{-1}. \qquad (2.39)$$

Представление матрицы A в виде произведения трех таких специальных матриц называется, как уже упоминалось, каноническим

$$A = V^{-1} \Lambda V. \qquad (2.40)$$

Такое разложение часто используется в вычислительной практике. Отметим, что нормальные матрицы всегда приводятся к диагональному виду.

Пример. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. Найти A^{100}.

*Решение***.** A^m представим в канонической форме

$$A^m = (VAV) = V^{-1} \Lambda^m V = V^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_1^m & .0 & . & 0 \\ .0 & \lambda_2^m. & . & . \\ . & . & . & . \\ 0 & . & . & \lambda_n^m \end{pmatrix} V. \qquad (2.40^*)$$

Для данного примера $\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$. Получаем спектр $\lambda_1 = 1$ и $\lambda_2 = 3$.

Для $\lambda_1 = 1$, $\begin{cases} x_1 + 2y_1 = x_1 \\ ------- \end{cases} \Rightarrow \quad y_1 = 0,\ x_1 = k$ - любое, положим $k = 1$.

Для $\lambda_2 = 3$, $\begin{cases} x_2 + 2y_2 = 3x_2 \\ ------- \end{cases} \Rightarrow \quad x_2 = y_2 = 1.$ Получаем

$$\bar{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \bar{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ и } V = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} V^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Lambda = V^{-1} A V = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, получаем $\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$.

Возведение в степень дает следующий результат:

$$A^{100} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1^{100} & 0 \\ 0 & 3^{100} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^{100} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3^{100}-1 \\ 0 & 3^{100} \end{pmatrix}$$

Формула (2.40*) выполняется и при $m = \frac{1}{n}$, где n - целое

$$\sqrt[k]{A} = V^{-1}\begin{pmatrix} \sqrt[k]{\lambda_1} & 0 & .. & 0 \\ 0 & \sqrt[k]{\lambda_2} & .. & 0 \\ .. & .. & .. & .. \\ 0 & 0 & .. & \sqrt[k]{\lambda_n} \end{pmatrix} V \ . \qquad (2.41)$$

Арифметическим корнем k степени неотрицательной матрицы (все $\lambda_i \geq 0,\ i = \overline{1,n}$) называется матрица B такая, что $B^k = A$. Для вычисления $\sqrt[k]{A}$ следует построить каноническое разложение $A = V^{-1}\Lambda V$ и положить $\sqrt[k]{A} = V^{-1}\sqrt[k]{D}V$

*Пример***.** Найти $\sqrt{\begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix}}$.

Решение. $\begin{vmatrix} 7-\lambda & 10 \\ 15 & 22-\lambda \end{vmatrix} = 0$, $\lambda^2 - 29\lambda + 4 = 0$ $\lambda_1 = 0{,}14$, $\lambda_2 = 28{,}85$.

Для $\lambda_1 = 0{,}14$, получим систему $\begin{cases} 7x_1 + 10y_1 = 0{,}14x_1 \\ \overline{\qquad\qquad\qquad} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6{,}86x_1 + 10y_1 = 0 \\ \overline{\qquad\qquad\qquad} \end{cases}$.

Полагая $y_1 = 0{,}686$, получим $x_1 = -1$. Тогда $\bar{x}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0{,}686 \end{pmatrix}$.

Для $\lambda_2 = 28{,}85$, получаем $\begin{cases} 7x_2 + 10y_2 = 28{,}85x_2 \\ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -21{,}86x_2 + 10y_2 = 0 \\ \end{cases}$.

Полагая $x_2 = 1$, получаем значение $y_2 = 2{,}18$ и $\bar{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2{,}18 \end{pmatrix}$. Тогда

$$V = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0{,}68 & 2{,}18 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad V^{-1} = \frac{1}{-2{,}87}\begin{pmatrix} 2{,}18 & -1 \\ -0{,}68 & -1 \end{pmatrix}.$$

Проверка.

$$VV^{-1} = \frac{1}{-2{,}87}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0{,}68 & 2{,}18 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2{,}18 & -1 \\ -0{,}68 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{-2{,}87}\begin{pmatrix} -2{,}87 & 0 \\ 0 & -2{,}87 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вычисляем корень из данной матрицы:

$$\sqrt{A} = V^{-1}\begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} \end{pmatrix} V = \frac{1}{-2{,}87}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0{,}68 & 2{,}18 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0{,}37 & 0 \\ 0 & 5{,}3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2{,}18 & -1 \\ -0{,}68 & -1 \end{pmatrix} \approx$$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. *Ответ*: $\begin{pmatrix} 12 \\ 34 \end{pmatrix}$.

Проверка: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix}$.

Такая задача может быть решена непосредственно впрямую, поскольку число уравнений используемых при её решении ограничено и равно четырем.

Матрица $\begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 20 \end{pmatrix}$ положительно определенная. Нужно найти матрицу, которая при умножении самой на себя дает $\begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 20 \end{pmatrix}$.

Итак $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, тогда $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{pmatrix}$, где a, b, c, d целые положительные числа.

$$\begin{cases} a^2+bc=7 \\ (a+d)b=10 \\ c(a+d)=15 \\ bc+d^2=22 \end{cases} \Rightarrow \qquad \frac{c}{b}=\frac{3}{2}, \qquad d^2-a^2=22-7=15, \qquad c(a+d)=15,$$

$(d-a)(d+a)=15=5\cdot 3$.

Отсюда $d=4,\ a=1,\ c=3,\ b=2$. Ответ: $\sqrt{\begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 20 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Пример. Найти $\sqrt{A}$, где $A = \begin{pmatrix} 17 & 16 & 16 \\ 16 & 41 & 32 \\ 16 & 32 & 41 \end{pmatrix}$.

Решение. Матрица A не отрицательна. Характеристическое уравнение дает $\lambda^3 - 99\lambda^2 + 1539\lambda - 6561 = 0$.

$\lambda_1 = 81,\ \lambda_2 = \lambda_3 = 9$. Тогда $D = \begin{pmatrix} 81 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$.

Для $\sqrt{\lambda_1}=9$, получаем $\bar{x}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$.Для $\sqrt{\lambda_2}=3$, получаем $\bar{x}_2=\begin{pmatrix}-2\\-1\\2\end{pmatrix}$ и для

$\sqrt{\lambda_3}=3$ $\bar{x}_3=\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}$.Тогда $V=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&-2&2\\2&-1&-2\\2&2&1\end{pmatrix}$.

Проверка.

$$A=V^{-1}DV=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&-2&2\\2&-1&-1\\2&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}81&0&0\\0&9&0\\0&0&9\end{pmatrix}\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&2&2\\-2&-1&2\\2&-2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}17&16&16\\16&41&32\\16&32&41\end{pmatrix}.$$

Ответ:

$$A=V^{-1}DV=\begin{pmatrix}1-2&2\\2-1-1\\2&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}9&0&0\\0&3&0\\0&0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&2\\-2-1&2\\2-2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}33&12&12\\12&51&24\\12&24&51\end{pmatrix}.$$

Если известно каноническое разложение матрицы, то может быть предложен ещё один способ решения систем линейных алгебраических уравнений. Действительно, пусть дана система $A\bar{x}=\bar{b}$. Переходим к системе $VAV^{-1}V\bar{x}=V\bar{b}$. Так как $VAV^{-1}=D$, то $DV\bar{x}=V\bar{b}$. Обозначив $\bar{b}'=V\bar{b}$ и $\bar{z}=V\bar{x}$, получим систему в виде $D\bar{z}=\bar{b}'$, которая легко решается. Затем возвращаемся к вектору $\bar{x}=V^{-1}\bar{z}$.

*Пример***.** Решить систему $\begin{cases}3x+4y=3\\5x+2y=-2\end{cases}$.

Решение. Собственные значения и собственные векторы данной матрицы были уже получены в этом параграфе: $\lambda_1=-2$ и $\bar{x}_1=\begin{pmatrix}4\\-5\end{pmatrix}$, $\lambda_2=7$ и $\bar{x}_2=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$.

Тогда $V=\begin{pmatrix}4&1\\-5&1\end{pmatrix}$ и $V^{-1}=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}1&-1\\5&4\end{pmatrix}$. Далее приводим матрицу А к диагональному виду

$$V^{-1}AV=\begin{pmatrix}1&-1\\5&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&4\\5&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&1\\-5&1\end{pmatrix}\frac{1}{9}=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}-2&2\\35&28\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&1\\-5&1\end{pmatrix}=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}-18&0\\0&63\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-2&0\\0&7\end{pmatrix}=D.$$

Начальное уравнение запишется так:

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}\overline{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Обозначим $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}\overline{x} = \overline{y}$, тогда $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}\overline{y} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$.

Решение последнего уравнения дает $y_1 = -\frac{5}{18}$ и $y_2 = \frac{1}{9}$.

Окончательно: $\overline{x} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{18}\begin{pmatrix} -18 \\ 27 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$.

Ответ: $\begin{cases} x = -1 \\ y = \frac{3}{2} \end{cases}$.

Видно, что такой метод является достаточно громоздким в вычислениях, поэтому применяется редко.

3. РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

3.1. Исследование систем

Одним из важных и непосредственных приложений теории матриц является решение систем линейных алгебраических уравнений. Собственно рационализация решения систем и привела к понятию матрицы.

Как известно из практики, системы могут вообще не иметь решения, иметь единственное решение или иметь бесконечное множество решений. Давайте свяжем эти случаи с количеством уравнений в системе - m, с количеством независимых уравнений - r, определяемых рангом этой системы и, наконец, с количеством неизвестных в системе - n.

Пусть дана система

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \Leftrightarrow A\overline{x} = \overline{b}. \qquad (3.1)$$

Здесь a_{ij} - заданные числа $\left(A = \{a_{ij}\}, i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}\right)$, x_i $\left(i = \overline{1,n}\right)$ - искомые числа, определяющие вектор-столбец неизвестных $\overline{x} = (x_1, x_2, ..x_n)^T$ и b_j $\left(j = \overline{1,m}\right)$ - свободные члены системы, определяющие вектор-столбец $\overline{b} = (b_1, b_2, ..., b_m)^T$.

Решением системы называют такую совокупность чисел $x_1 = \alpha_1,\ x_2 = \alpha_2, ...x_n = \alpha_n$, которые при подстановке в систему вместо неизвестных обращают все уравнения в тождества.

Системы называются равносильными или эквивалентными, если они имеют одинаковые решения. Систему уравнений называют совместной (решаемой), если существует хотя бы одно её решение и несовместной, если она не имеет решений.

Например, система $\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 2x + 4y = 6 \end{cases}$ несовместна, так как из неё непосредственно следует, что 1=3, что бессмысленно. Графически это означает, что на плоскости *XOY* заданы две параллельные прямые, которые нигде не пересекаются. Данная система не имеет решения.

Совместную систему линейных алгебраических уравнений называют определенной, если она имеет единственное решение и неопределенной, если уже существует, по крайней мере, два различных решения.

Очевидно, что решать имеет смысл только совместную систему алгебраических уравнений. Поэтому прежде чем приступить к решению, необходимо провести исследование системы на совместность и определенность. Установим необходимое и достаточное условие совместности системы.

Начнем с исследования однородной системы, когда все числа $b_1, b_2, ...b_m$ равны нулю

$$A\bar{x} = \bar{0} \tag{3.2}$$

Эта система всегда совместна, так как обладает нулевым (тривиальным) решением $\bar{x} = \bar{0}$.

Различимы два случая решения.

1. Если $\det A \neq 0$ и $m = n$, то система имеет только нулевое решение $\bar{x} = \bar{0}$. Например, система $\begin{cases} 3x - y = 0 \\ x + 3y = 0 \end{cases}$ имеет $\det A = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 10 \neq 0$, $RgA = 2$. По правилу Крамера $\Delta_1 \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 0,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$, получаем $x = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} = 0,\ \ y = \dfrac{\Delta_2}{\Delta} = 0$. Ответ: $\bar{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

2. Если $\det A = 0$ и $m = n$, то система имеет бесчисленное множество решений. Например, система $\begin{cases} 3x - y = 0 \\ 6x - 2y = 0 \end{cases}$ имеет $\det A = 0$, $RgA = 1$. Её решением является любая точка на прямой *y=3x*, где $x = c$ - произвольное

число. Ответ: $\bar{x} = \begin{pmatrix} c \\ 3c \end{pmatrix}$. Это решение включает в себя тривиальное решение $\bar{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, как частный случай, когда *c=0.*

Если $\det A \neq 0$ и ранг системы RgA меньше числа неизвестных $r < n$. То система также имеет бесконечное множество решений.

Пример. Решить систему $\begin{cases} x - 2y + 5z = 0 \\ 2x - 3y + z = 0 \\ 4x - 7y + 11z = 0 \end{cases}$

Решение. $\det A = 0$, так как умножая первую строку на 2 и складывая её со второй, получаем третью строку. Значит, третье уравнение можно отбросить, так как оно линейно зависимо. Переходим к новой равносильной системе $\begin{cases} x - 2y + 5z = 0 \\ 2x - 3y + z = 0 \end{cases}$, где базисный минор $M = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, поэтому ранг этой системы $RgA' = RgM = 2, \;\; m = r$ и $n = 3$. Разрешая систему относительно переменных x и y, получаем $\begin{cases} x - 2y = -5z \\ 2x - 3y = -z \end{cases}$, которую решаем по формуле Крамера.

Ответ: $\bar{x} = \begin{pmatrix} 13z \\ 9z \\ z \end{pmatrix}$. Следовательно, множество решений имеет вид $\begin{cases} x = 13c \\ y = 9c \\ z = c \end{cases}$,

где *c* – произвольное число.

3.2. Теорема Кронекера-Капелли о совместности системы

Вернемся к рассмотрению задачи о совместности неоднородной системы (3.1.), когда $b_i \neq 0$ или не все $b_i = 0 \;\; \left(i = \overline{1, m}\right)$. Итак, имеем $A\bar{x} = \bar{b}$.

Составим расширенную матрицу, включающую еще один столбец

$$A_1 = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & .. \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right) \qquad (3.3)$$

Здесь вертикальная черта символически обозначает умножение на столбец неизвестных и знак равенства.

Теорема Кронекера-Капелли. Для того, чтобы линейная системы алгебраических уравнений являлась совместной необходимо и достаточно, чтобы ранг расширенной матрицы был равен рангу её основной матрицы

$RgA_1 = RgA$. Если же $RgA_1 > RgA$, то система несовместна и не имеет решений.

Если ранг совместной матрицы равен числу переменных $(r = n)$. То система имеет единственное решение. Если ранг системы меньше числа переменных $(r < n)$, то система неопределенна и имеет бесконечное множество решений.

Покажем необходимость этого утверждения. Пусть $RgA = r = m$ и имеет m- независимых уравнений. Пусть система совместна и имеет решение $x_1 = \alpha_1, x_2 = \alpha_2, \dots x_n = \alpha_n$, которые при подстановке в систему превращают все уравнения в тождества $\begin{cases} a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \dots + a_{1n}\alpha_n \equiv b_1 \\ a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \dots + a_{2n}\alpha_n \equiv b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}\alpha_1 + a_{m2}\alpha_2 + \dots + a_{mn}\alpha_n \equiv b_m \end{cases}$

Видно, что последний столбец в расширенной матрице *A* является линейной композицией остальных столбцов и его можно превратить в нулевой с помощью элементарных преобразований. Таким образом, добавление столбца из нулей не изменит ранг основной матрицы, поэтому $RgA_1 = RgA$.

Покажем достаточность этого утверждения. Пусть $RgA_1 = RgA$, тогда базисный минор матрицы *A* является базисным и для A_1. Значит, последний столбец не базисный и является линейной композицией всех остальных столбцов матрицы *A*, то есть

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \dots + \alpha_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \dots \\ a_{mn} \end{pmatrix},$$ а это означает, что числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ являются решением системы. Значит, система совместна.

Приведем поясняющий пример, построенный на очевидном. Пусть имеем заранее несовместную систему $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 3 \\ 2x_1 + 4x_2 = 4 \end{cases}$. Она несовместна, так как $3 \neq 2$. Ранг основной матрицы $RgA = 1$, т.к. $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0$. Ранг расширенной матрицы $\left(M = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = -4 \neq 0 \right)$ $RgA_1 = 2$. Видно, что несовместная система действительно имеет разные ранги RgA и RgA_1.

Можно сформулировать правило решения систем алгебраических уравнений следующим образом:

- исследовать систему на совместность, определив RgA и RgA_1,

- если система совместна $(RgA_1 = RgA)$, то надо выбрать метод решения и приступить к решению. Если система не совместна, то решать её не имеет смысла.

Отметим, что существует три точных метода решения, а именно – метод Крамера, метод обратной матрицы и метод Гаусса-Жордана, или просто Гаусса. Кроме этого существует большое число приближенных методов решения, таких, как метод регуляризации, метод итераций, метод наименьших квадратов, и так далее.

3.3. Метод Гаусса

Познакомимся с методом Гаусса (метод последовательных исключений), который позволяет исследовать систему на совместность, одновременно решая её. Этот метод значительно целесообразней методов Крамера и обратной матрицы, связанных с громоздкими вычислениями определителей и алгебраических дополнений.

Метод Гаусса сводится к диагонализации расширенной матрицы или доведения её до треугольной формы. С помощью элементарных преобразований, а именно, складывая и вычитая строки, умноженные на требуемые числа, приводим матрицу к диагональному виду. Так для квадратной основной матрицы $m = n = r$ получаем

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & .. \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & b_n \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & .. & 0 & b_1' \\ 0 & 1 & .. & 0 & b_2' \\ .. & .. & .. & .. & .. \\ 0 & 0 & .. & 1 & b_n' \end{array}\right),$$

где ответ просто считывается $\begin{cases} x_1 = b_1' \\ x_2 = b_2' \\ \dots\dots\dots \\ x_n = b_n' \end{cases}$.

Пример. Решить систему $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 2 \end{cases}$.

Решение. Расширенную матрицу $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

x 2 -

\-

доведем до треугольной формы $A_1 \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, где $x_3 = \dfrac{1}{2}$ из третьей строчки и $x_2 = 1$ из второй строчки. Подставляя, полученные значения в первую строчку $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ определяем, что $x_1 = -\dfrac{1}{2}$.

Ответ: $\begin{cases} x_1 = -0{,}5 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 0{,}5 \end{cases}$.

Более последователен и прост метод диагонализации, когда сразу получаем решение по строчкам. Покажем это на примере.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Ответ считывается сразу $\begin{cases} x_1 = -0{,}5 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 0{,}5 \end{cases}$. Проверка: $\begin{cases} -\frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2} = 1 \\ -1 + 1 + 1 = 1 \\ -\frac{1}{2} + 1 + \frac{3}{2} = 2 \end{cases}$.

Пример. Решить систему $\begin{cases} 2x - 4y + 3z = 1 \\ x - 2y + 4z = 3 \\ 3x - y + 5z = 2 \end{cases}$.

Решение. $A_1 = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 4 & 3 \\ 3 & -1 & 5 & 2 \end{array}\right)$ x 2 - x 3 - $\sim \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & -5 & -5 \\ 1 & -2 & 4 & 3 \\ 0 & 5 & -7 & -7 \end{array}\right) \sim$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 4 & 3 \\ 0 & 5 & -7 & -7 \end{array}\right)$ x 4 - x 7 + $\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \text{x 2 +} \quad \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Ответ: $\begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 1 \end{cases}.$

Здесь символ x 2 - обозначает умножение всей строки на 2 и вычитание её из второй строки. В результате этого получаем 0 во второй строке и во втором столбце. Последовательно «зануляем» элементы в первой, второй и других строках. Удобно оперировать строчками, где есть элемент равный 1. Если его нет, например в столбце $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ $\;\text{-}\;\text{-}$, то единица легко выделяется вычитанием $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Заметим, что диагонализация производится с помощью элементарных преобразований строк и только строк (в этом случае структура уравнений системы сохраняется) и тем самым принципиально отличается от процедуры определения ранга, когда можно оперировать как строчками, так и столбцами.

*Пример***.** Решить однородную систему $\begin{cases} 2x - y + 3z = 0 \\ x + 2y - 5z = 0 \\ 3x + y - 2z = 0 \end{cases}.$

Решение. $A_1 = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -5 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \quad \begin{matrix} \text{x 2 -} \\ \text{x 3 -} \end{matrix} \quad \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -5 & 13 & 0 \\ 1 & 2 & -5 & 0 \\ 0 & -5 & 13 & 0 \end{array}\right)$

$$\sim \begin{pmatrix} 0 & -5 & 13 & 0 \\ 1 & 2 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Видно, что первое и последнее уравнение линейно зависимы (просто равны) и одно из них можно отбросить. Приходим к новой равносильной системе $\begin{cases} 2x - y = -3z \\ x + 2y = 5z \end{cases}$. Положим $z = k$ - произвольному числу.

Тогда новая расширенная матрица

$$A_1=\left(\begin{array}{cc|c}2&-1&-3k\\1&2&5k\end{array}\right)\ x\,2\,-\ \sim\left(\begin{array}{cc|c}0&-5&-13k\\1&2&5k\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cc|c}0&1&\frac{13k}{5}\\1&2&5k\end{array}\right)\ x2-$$

$$\sim\left(\begin{array}{cc|c}0&1&\frac{13k}{5}\\1&0&-\frac{k}{5}\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cc|c}1&0&-\frac{k}{5}\\0&1&\frac{13k}{5}\end{array}\right)$$

Ответ: $\begin{cases}x=-\frac{k}{5}\\y=\frac{13k}{5}\\z=k\end{cases}$ система имеет бесчисленное множество решений.

Пример. Решить $\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3=4\\2x_1+4x_2+6x_3=3\\3x_1+x_2-x_3=1\end{cases}$.

Решение.

$$A_1=\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&3&4\\2&4&6&3\\3&1&-1&1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&3&4\\0&0&0&-5\\0&-5&-10&-11\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&3&0\\0&0&0&1\\0&1&2&0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\end{array}\right)$$

$\det A=0$. Итак $RgA=2$, а ранг расширенной матрицы $RgA_1=3$. Система несовместна и не имеет решения.

Пример. Решить систему $\begin{cases}3x_1-x_2+x_3=6\\x_1-5x_2+x_3=12\\x_1+2x_2=-3\\2x_1+x_2+3x_3=3\end{cases}$.

Решение. $A_1=\begin{pmatrix}3&-1&1&6\\1&-5&1&12\\1&2&0&-3\\2&1&3&3\end{pmatrix}$ x 2 - $\sim\begin{pmatrix}0&-7&1&15\\0&-7&1&15\\1&2&0&-3\\0&-3&3&9\end{pmatrix}\sim$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}0&0&0&0\\0&-7&1&15\\1&2&0&-3\\0&-1&1&3\end{array}\right)$$

Видно, что два первых уравнения в системе одинаковы, и одно можно отбросить.

Новая расширенная матрица $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & -7 & 1 & 15 \\ 1 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \text{x7-} \\ \leftarrow + \\ \end{array}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & -6 & -6 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Ответ: $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -2 \\ x_3 = 1 \end{cases}$ *Проверка:* $\begin{cases} 3+2+1=6 \\ 1+10+1=12 \\ 1-4=-3 \\ 2-2+3=3 \end{cases}$

Рассмотрим случай, когда число неизвестных в системе больше ранга данной системы, то есть система не определена, но совместна $(RgA = RgA_1)$. Тогда в основной матрице системы A выбираем базисный минор порядка $r = RgA$ не равный нулю. Переменные, определяемые столбцами базисного минора, называются базисными, а остальные свободными. Необходимо переписать систему в базисных переменных, а свободные перенести в правые части уравнений. Таким образом, задавая произвольные значения свободных переменных, получаем бесчисленное множество решений.

Пример. Решить систему $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 7 \\ 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 - x_4 = 2 \\ 5x_1 + 10x_2 + 7x_3 + 2x_4 = 11 \end{cases}$.

Решение. $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 & 7 \\ 2 & 4 & 5 & -1 & 2 \\ 5 & 10 & 7 & 2 & 11 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 11 & -9 & -12 \\ 0 & 0 & 22 & -18 & -24 \end{pmatrix} \sim$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 11 & -9 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Видно, что $RgA_1 = RgA = 2$. Система совместна. Последнее уравнение можно отбросить. Так как количество неизвестных $n = 3$ больше ранга системы, то будет иметь место бесчисленное множество решений. В качестве базисного минора можно выбрать $M=\begin{vmatrix}2 & -3\\ 4 & 5\end{vmatrix}=22\neq 0$. При таком выборе минора базисными переменными являются x_2 и x_3, а свободными x_1 и x_4.

Новая равносильная система имеет вид $\begin{cases}2x_2-3x_3=7-x_1-4x_4\\ 4x_2+5x_3=2-2x_1+x_4\end{cases}$

Положим $x_1=c_1$ и $x_4=c_2$ - произвольным числом.

$$A_1=\begin{pmatrix}2 & -3 & 7-c_1-4c_2\\ 4 & 5 & 2-2c_1+c_2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}2 & -3 & 7-c_1-4c_2\\ 0 & 11 & -12+9c_2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}2 & -3 & 7-c_1-4c_2\\ 0 & 1 & \dfrac{-12+9c_2}{11}\end{pmatrix}\sim$$

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & \dfrac{41-11c_1-17c_2}{22}\\ 0 & 1 & \dfrac{-12+9c_2}{11}\end{pmatrix}.$$

Ответ: $\begin{cases}x_1=c_1\\ x_2=\dfrac{41-11c_1-17c_2}{22}\\ x_3=\dfrac{-12+9c_2}{11}\\ x_4=c_2\end{cases}.$

В заключение отметим, что методом Гаусса можно довольно просто и быстро вычислять обратные матрицы. Исходя из матричного уравнения $AA^{-1}=E$, где матрицу A^{-1} будем рассматривать как неизвестную, составим расширенную матрицу (A/E), которая после диагонализации с помощью элементарных преобразований строчками будет задавать в правой части после черты обратную матрицу (E/A^{-1}). Алгоритм решения запишем как

$$(A/E)\Rightarrow(E/A^{-1}) \qquad (3.4)$$

Получим обратные матрицы блочных квадратных матриц треугольного вида. Пусть задана блочная матрица $M=\begin{pmatrix}A & B\\ 0 & D\end{pmatrix}$, где матрицы A, B и D имеют обратные матрицы. Составим расширенную матрицу

$$\begin{pmatrix}A & B & E & 0\\ 0 & D & 0 & E\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}AD & BD & ED & 0\\ 0 & BD & 0 & BE\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}AD & 0 & D & -B\\ 0 & BD & 0 & B\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}E & 0 & D^{-1}A^{-1}D & -D^{-1}A^{-1}B\\ 0 & E & 0 & D^{-1}B^{-1}B\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}E & 0 & A^{-1} & -A^{-1}BD^{-1}\\ 0 & E & 0 & D^{-1}\end{pmatrix}$$

Отсюда следует, $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}BD^{-1} \\ 0 & D^{-1} \end{pmatrix}$. Аналогично можно получить (самостоятельно) $\begin{pmatrix} A & 0 \\ C & D \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ -D^{-1}CA^{-1} & D^{-1} \end{pmatrix}$.

Пример. Найти обратную матрицу для $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

Решение. $(A/E) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$. ***Ответ*:** $A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$.

Пример. Найти A^{-1}, если $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -3 & 5 & 6 \\ 1 & -4 & 2 \end{pmatrix}$.

***Решение*.** $A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 5 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 13 & 7 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 6 & 7 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim$

$\begin{pmatrix} 0 & 7 & 0 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 6 & 7 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{7} & -\frac{3}{7} \\ 0 & -1 & 7 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -4 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim$

$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{7} & -\frac{3}{7} \\ 0 & 0 & 7 & 1 & \frac{13}{7} & \frac{18}{7} \\ 1 & -4 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{7} & -\frac{3}{7} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{7} & \frac{13}{49} & \frac{18}{49} \\ 1 & -4 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim$

$$\sim\begin{pmatrix}0&1&0&0&-\frac{1}{7}&-\frac{3}{7}\\0&0&1&\frac{1}{7}&\frac{13}{49}&\frac{18}{49}\\1&0&0&\frac{2}{7}&-\frac{2}{49}&\frac{1}{49}\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0&\frac{2}{7}&-\frac{2}{49}&\frac{1}{49}\\0&1&0&0&-\frac{1}{7}&-\frac{3}{7}\\0&0&2&\frac{1}{7}&\frac{13}{49}&\frac{18}{49}\end{pmatrix}$$

Ответ: $A^{-1}=\frac{1}{49}\begin{pmatrix}14&-2&1\\0&-7&21\\7&13&18\end{pmatrix}$. Проверка даёт $AA^{-1}=E$.

*Пример***.** Установить, пересекаются ли прямые линии $2x-3y=6$, $3x+y=9$ и $x+4y=3$ в одной точке. Найти эту точку.

Решение. Система характеризуется $m=3,\ n=2$.

$$A_1=\begin{pmatrix}2&-3&6\\3&1&9\\1&4&3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}0&-11&0\\0&-11&0\\1&4&3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}0&0&0\\0&-11&0\\1&4&3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}.$$

$RgA_1=RgA=2$, система совместна. Точка пересечения есть.

Решаем эквивалентную систему $\begin{cases}3x+y=9\\x+4y=3\end{cases}\Rightarrow\begin{pmatrix}3&1&9\\1&4&3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}0&-11&0\\1&4&3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}0&1&0\\1&4&3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&3\end{pmatrix}.$

*Ответ***:** $\begin{cases}x=3\\y=0\end{cases}.$

3.4. Фундаментальная система решений

Рассмотрим сначала однородную систему с m - уравнениями и n - неизвестными.

$$A\overline{x}=\overline{0},$$

где $A=(m\times n)$. Как показано в предыдущем параграфе такие системы имеют бесчисленное множество решений, когда $RgA<n$. Если найдено два решения данной системы $\overline{x}^{(1)}=\left(x_1^{(1)},x_2^{(1)},\ldots,x_n^{(1)}\right)^T$ и $\overline{x}^{(2)}=\left(x_1^{(2)},x_2^{(21)},\ldots,x_n^{(2)}\right)^T$, то в силу линейности системы линейная композиция этих решений

$$c_1\overline{x}^{(1)}+c_2\overline{x}^{(2)}$$

тоже является решением данной системы. Пусть базисный минор, отличный от нуля, находится в левом верхнем углу матрицы *А*. Заметим, что это всегда возможно сделать перестановкой переменных (столбцов) и перестановкой уравнений (строк). Тогда $x_1,x_2,\ldots x_r$ будут базисными переменными, а $x_{r+1},x_{r+2},\ldots,x_n$ будут свободными переменными. Базисные переменные изначально линейно независимы. Нашей задачей будет выразить базисные переменные через композицию свободных переменных. Если задавать свободные переменные, а их $n-r$, следующие значения (по аналогии с базисными или 0, или 1)

$$\left\{\begin{matrix} x_{r+1}=1 & x_{r+2}=0 & ..... & x_n=0 \\ x_{r+1}=0 & x_{r+2}=1 & ... & x_n=0 \\ ..... & .... & .... & ...... \\ x_{r+1}=0 & x_{r+2}=0 & ..... & x_n=1 \end{matrix}\right\} n-r,$$

то они тоже будут линейно независимы. Получим $(n-r)$ независимых столбцов решений

$$\bar{x}_1=\begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ . \\ x_r^{(1)} \\ 1 \\ 0 \\ . \\ 0 \end{pmatrix},\ \bar{x}_2=\begin{pmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \\ . \\ x_r^{(2)} \\ 0 \\ 1 \\ . \\ 0 \end{pmatrix},\ldots,\bar{x}_{n-r}=\begin{pmatrix} x_1^{(n-r)} \\ x_2^{(n-r)} \\ . \\ x_r^{(n-r)} \\ 0 \\ 0 \\ . \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{3.5}$$

Совокупность таких решений называется ***фундаментальной системой решений,*** а решение $\bar{x}=c_1\bar{x}_1+c_2\bar{x}_2+\ldots+c_{n-r}\bar{x}_{n-r}$. где $c_1,c_2,\ldots c_{n-r}$ произвольные числа, называется ***общим решением однородной системы***.

Пример. Найти фундаментальные решения и построить общее решение системы $\begin{cases} 2x_1+x_2-x_3+x_4=0 \\ 4x_1+2x_2+x_3-3x_4=0 \end{cases}$.

Решение. $RgA=2$, так как минор $M=\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=3\neq 0$.

Базисные переменные x_2 и x_3, а свободные x_1 и x_4. Составим равносильную систему $\begin{cases} x_2-x_3=-2x_1-x_4 \\ 2x_2+x_3=-4x_1-3x_4 \end{cases}$.

Её решение $\begin{cases} x_2=-2x_1+\dfrac{2}{3}x_4 \\ x_3=\dfrac{5}{3}x_4 \end{cases}$.

Положим $x_1=1$ и $x_4=0$-получим $\begin{cases} x_2^{(1)}=-2 \\ x_3^{(1)}=0 \end{cases}$.

Положим $x_1 = 0$ и $x_4 = 1$ получим $\begin{cases} x_2^{(2)} = \dfrac{2}{3} \\ x_3^{(2)} = \dfrac{5}{3} \end{cases}$.

Фундаментальная система решений данной системы есть совокупность столбцов $\bar{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ и $\bar{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2/3 \\ 5/3 \\ 1 \end{pmatrix}$, а общее решение

$\bar{x} = c_1\bar{x}^{(1)} + c_2\bar{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} c_1 \\ -2c_1 + \dfrac{2}{3}c_2 \\ \dfrac{5}{3}c_2 \\ c_2 \end{pmatrix}$, где c_1 и c_2 - произвольные постоянные.

Перейдем к рассмотрению неоднородной системы линейных алгебраических уравнений $A\bar{x} = \bar{b}$.

Здесь, как было показано, бесчисленное множество решений имеет место, когда $RgA < n$. Покажем, что общее решение неоднородной системы m-уравнений с n- неизвестными при $RgA < n$ состоит из суммы общего решения однородной системы и какого-либо частного решения неоднородной системы. Действительно, пусть $\bar{x}^{(1)}$, $\bar{x}^{(2)}, \ldots, \bar{x}^{(n-r)}$ решение однородной системы $A\bar{x} = \bar{0}$ и общее решение неоднородной системы: $\bar{x}_{общ} = c_1\bar{x}^{(1)} + c_2\bar{x}^{(2)} + \ldots + c_{n-r}\bar{x}^{(n-r)}$ и пусть $\bar{x}_1$- частные решения неоднородной системы $A\bar{x}_1 \equiv \bar{b}$, тогда решение неоднородной системы имеет вид $\bar{x} = \bar{x}_{общ} + \bar{x}_1$. Подставим это решение в уравнение $A\bar{x} = \bar{b}$ и получаем $c_1A\bar{x}^{(1)} + c_2A\bar{x}^{(2)} + \ldots + c_{n-r}A\bar{x}^{(n-r)} + A\bar{x}_1 = \bar{b}$, где $A\bar{x}^{(1)} \equiv \bar{0}$, $A\bar{x}^{(2)} \equiv \bar{0}$, …, $A\bar{x}^{(n-r)} \equiv \bar{0}$. Получаем тождество: $A\bar{x}_1 \equiv \bar{b}$. Что и требовалось доказать.

Пример. Найти общее решение системы $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 7 \\ 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 - x_4 = 2 \\ 5x_1 + 10x_2 + 7x_3 + 2x_4 = 11 \end{cases}$.

*Решение***.** Отметим, что этот пример уже был решен и поэтому будет интересно сравнить результаты решений.

Итак, $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 & 7 \\ 2 & 4 & 5 & -1 & 2 \\ 5 & 10 & 7 & 2 & 11 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 11 & -9 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$RgA_1 = RgA = r$. Перепишем однородную систему в базисных переменных $\begin{cases} 2x_2 - 3x_3 = -x_1 - 4x_4 \\ 4x_2 + 5x_3 = -2x_1 + x_4 \end{cases}$. Задаем $x_1 = 1,\ x_4 = 0$ получаем систему

$$\begin{cases} 2x_2 - 3x_3 = -1 \\ 4x_2 + 5x_3 = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = -\dfrac{1}{2} \\ x_3 = 0 \end{cases} \text{ и } \bar{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Задаем $x_1 = 0,\ x_4 = 1$ и получаем систему $\begin{cases} 2x_2 - 3x_3 = 4 \\ 4x_2 + 5x_3 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = \dfrac{17}{22} \\ x_3 = \dfrac{9}{11} \end{cases}$ и

$\bar{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\dfrac{17}{22} \\ \dfrac{9}{11} \\ 1 \end{pmatrix}$, где $\bar{x}^{(1)}$ и $\bar{x}^{(2)}$ являются фундаментальными решениями однородной системы. Общее решение однородной системы имеет вид

$$\bar{x}_{общ} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -\dfrac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -\dfrac{17}{22} \\ \dfrac{9}{11} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Получим частное решение неоднородной системы при $x_1 = 0,\ x_4 = 0$

$$\begin{cases} 2x_2 - 3x_3 = 7 \\ 4x_2 + 5x_3 = 2 \end{cases} \Rightarrow \bar{x}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{41}{22} \\ -\dfrac{12}{11} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Окончательно, общее решение неоднородной системы получим сложением $\bar{x} = \bar{x}_{общ} + \bar{x}_1$.

Ответ: $\bar{x}=\begin{pmatrix} c_1 \\ -\dfrac{c_1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 \\ -\dfrac{17}{22}c_2 \\ \dfrac{9}{11}c_2 \\ c_2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{41}{22} \\ -\dfrac{12}{11} \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c_1 \\ \dfrac{41-17c_2-11c_1}{22} \\ \dfrac{-12+9c_2}{11} \\ c_2 \end{pmatrix}.$

Ответ совпадает с ранее полученным.

3.5. Приближенные методы решения

Рассмотрим только некоторые приближенные методы решения систем линейных алгебраических уравнений.

Прежде всего, это ***метод псевдообратной матрицы***. Пусть дана не обязательно совместная система $A\bar{x}=\bar{b}$, где A – матрица размерности $(n\times m)$ и ранга r. Приближенное решение или, как говорят, псевдорешение определяется формулой $\bar{x}=A^{+}\bar{b}$, где A^{+} - псевдообратная матрица. В этом случае получается, так называемое, ***нормальное псевдорешение,*** которое из всего множества решений имеет наименьшую длину

$$\bar{x}=x_1\bar{e}_1+x_2\bar{e}_2+...+x_r\bar{e}_r$$

$$|\bar{x}|=\sqrt{x_1^2+x_2^2+...+x_r^2}\Rightarrow \min\,, \qquad (3.6)$$

где $(\bar{e}_i,\bar{e}_j)=\begin{cases}1, & i=j \\ 0 & i\neq j\end{cases}$, $i=\overline{1,r},\ j=\overline{1,r}$. Для получения общего решения, необходимо данную систему умножить на A^T слева. Тогда получится система нормальных уравнений, которая всегда совместна и имеет единственное решение $A^TA\bar{x}=A^T\bar{b}$. Здесь A^TA является квадратной симметричной матрицей. Решение такой системы записывается в следующей форме $\bar{x}=A^{+}\bar{b}+(E-A^{+}A)\bar{C}$, где A^{+} обратная матрица и $\bar{c}$ - произвольный вектор. Для общего псевдорешения разложение по базису имеет вид

$$\bar{x}=x_1\bar{e}_1+x_2\bar{e}_2+...+x_r\bar{e}_r+...+x_n\bar{e}_n. \qquad (3.7)$$

Для получения нормального псевдорешения возможны три формы решения, которые и определяют структуру псевдообратной матрицы, определенной в параграфе 2.8.

1. Если $A\bar{x}=\bar{b}$ и $A=(n\times m)$, где $r=m$ и $n>m$, то домножаем слева на A^T и получаем нормальную систему уравнений

$A^TA\bar{x}=A^T\bar{b}$, где $A^TA=(m\times m)$, которое служит аналогом начальному матричному уравнению. Тогда можно найти обратную матрицу $\bar{x}=(A^TA)^{-1}A^T\bar{b}$, где

$$A^{+}=(A^TA)^{-1}A^T \qquad (3.8)$$

- есть псевдообратная матрица размерности $(r\times m)$.

2. Если $A\bar{x}=\bar{b}$ и $A=(n\times m)$, где $r=n$ и $m>n$, то, полагая $\bar{x}=A^T\bar{y}$, получаем $AA^T\bar{y}=\bar{b}$. Далее используя обратную матрицу, находим $\bar{y}=\left(AA^T\right)^{-1}\bar{b}$ и окончательно $\bar{x}=A^T\left(AA^T\right)^{-1}\bar{b}=A^+\bar{b}$, где псевдообратная матрица определена как

$$A^+=A^T\left(AA^T\right)^{-1}. \tag{3.9}$$

3. Если же $A\bar{x}=\bar{b}$ и $A=(n\times m)$, где $r\neq n$ $(r<n)$ и $r\neq m$ $(r<m)$, то необходимо воспользоваться скелетным разложением $A=BC$. Получим

$$BC\bar{x}=\bar{b}.$$

Положим $\bar{y}=c\bar{x}$, откуда $\bar{x}=c^+\bar{y}$, для случая $r=n$. Далее из $B\bar{y}=\bar{b}$ следует $\bar{y}=B^+\bar{b}$. для случая $r=m$, и окончательно получаем

$\bar{x}=c^+B^+\bar{b}=A^+\bar{b}$, где

$$A^+=C^T\left(CC^T\right)^{-1}\cdot\left(B^TB\right)^{-1}B^T \tag{3.10}$$

- псевдообратная матрица размерности $(m\times n)$.

Пример. Решить систему $\begin{cases} 2x_1-x_2=1 \\ -x_1+x_2+x_3=0 \\ x_2+2x_3=1 \end{cases}$

Решение. $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\det A=0$. Здесь $n=m=3,\ r=2$ поэтому необходимо сделать скелетное разложение матрицы A (вариант 3)

$A=BC=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Тогда $C^T=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B^T=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,

$CC^T=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ и $\left(CC^T\right)^{-1}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$,

$B^TB=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$ и $\left(B^TB\right)^{-1}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$,

$\left(CC^T\right)^{-1}\left(B^TB\right)^{-1}=\frac{1}{36}\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}=\frac{1}{36}\begin{pmatrix} 9 & 5 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ и

$$A^{+} = C^T\left(CC^T\right)^{-1}\left(B^TB\right)^{-1}B^T = \frac{1}{36}\begin{pmatrix} 13 & -4 & 5 \\ -4 & 4 & 4 \\ 5 & 4 & 13 \end{pmatrix}.$$

Окончательно получаем *ответ*: $\bar{x} = A^{+}\bar{b} = \frac{1}{36}\begin{pmatrix} 13 & -4 & 5 \\ -4 & 4 & 4 \\ 5 & 4 & 13 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{36}\begin{pmatrix} 18 \\ 0 \\ 18 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1/2 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 1/2 \end{cases}.$$

Другим наиболее употребляемым является ***метод наименьших квадратов.***

Пусть дана не обязательно совместная система $A\bar{x} = \bar{b}$, где $A = (n \times m)$ ранга r. Псевдорешение данной системы ищется при условии минимальности функции

$$F(\bar{x}) = \left|A\bar{x} - \bar{b}\right|^2 \Rightarrow \min \qquad (3.11)$$

и при условии, что ортонормированное псевдорешение должно иметь наименьшую длину

$$\left|\bar{x}_n\right|^2 = \sum_{i=1}^{n}\left|x_i\right|^2 \Rightarrow \min . \qquad (3.12)$$

Как было показано выше, аналогом этих условий служит система нормальных уравнений

$$A^TA\bar{x} = A^T\bar{b} . \qquad (3.13)$$

Покажем это. $F(\bar{x}) = \left|A\bar{x} - \bar{b}\right|^2 = \left(A\bar{x} - b\right)^T\left(A\bar{x} - \bar{b}\right) =$

$= \bar{x}^TA^TA\bar{x} - \bar{b}^TA\bar{x} - \bar{x}^TA^T\bar{b} + \bar{b}^T\bar{b}$. Тогда любое приращение по $\bar{x}$ приводит к $\Delta F(\bar{x}) = 0$. Получаем

$\Delta\bar{x}^TA^TA\bar{x} + \bar{x}^TA^TA\Delta\bar{x} - \bar{b}^TA\Delta\bar{x} - \Delta\bar{x}^TA^T\bar{b} = 0.$

Для ортогональной матрицы получаем $2\Delta\bar{x}^T\left(A^TA\bar{x} - A^T\bar{b}\right) = 0$, где $\Delta\bar{x}^T \neq \bar{0}$. Окончательно $A^TA\bar{x}_n = A^T\bar{b}$, что и требовалось показать.

Пример. Решить систему $\begin{cases} x_1 + x_4 = 4 \\ x_2 + x_4 = -4 \\ x_3 + x_4 = 4 \end{cases}$ методом наименьших квадратов.

Решение. Так как $m = 3 = r$ и $n = 4$, то

$$A^T A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$ Переходим к системе

$$A^T A\bar{x} = A^T \bar{b} \ \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_4 = 4 \\ x_2 + x_4 = -4 \\ x_3 + x_4 = 4 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = 4 \end{cases}.$$ Его решение $\bar{x} = \begin{pmatrix} 4 - x_4 \\ -4 - x_4 \\ 4 - x_4 \\ x_4 \end{pmatrix}$.

Из условия наименьшей длины вектора $\Delta|\bar{x}|^2 = 0$ получаем

$$|\bar{x}|^2 = |4 - x_4|^2 + |4 + x_4|^2 + |4 - x_4|^2 + |x_4|^2$$

$$\Delta|x|^2 = 2[-4 + x_4 + 4 + x_4 - 4 + x_4 + x_4]\Delta x_4 = 0, \quad \Delta x_4 \neq 0$$ и

$4x_4 = 4 \Rightarrow x_4 = 1$. Получаем ответ $\bar{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$. Видно, что ответ совпадает с точным решением, полученным методом псевдообратной матрицы (см. параграф 2.8.).

Другим приближенным методом решения систем является ***метод Гаусса.*** В данном случае приближение обусловлено погрешностями арифметических вычислений. Покажем это на примере. Отметим, что методы Крамера и обратной матрицы, начиная с $n > 5$ требуют громоздких арифметических операций и не эффективны.

Пример. Решить систему $\begin{cases} 1{,}2x_1 + 3{,}1x_2 - 1{,}4x_3 = 1{,}8 \\ 3{,}4x_1 + 5{,}1x_2 + 2x_3 = 3 \\ 0{,}5x_1 - 2{,}2x_2 + 1{,}3x_3 = 2{,}3 \end{cases}$.

*Решение***.** Здесь $n = m = 3 = 3, \ \det A \neq 0$. Первую строчку делим на ведущий элемент $a_{11} = 1{,}2$, вторую на $a_{21} = 3{,}4$ и третью на $a_{13} = 0{,}5$. Получаем новую систему $\begin{cases} x_1 + 2{,}6x_2 - 1{,}2x_3 = 1{,}5 \\ x_1 + 1{,}5x_2 + 0{,}4x_3 = 0{,}9 \\ x_1 - 4{,}4x_2 + 2{,}6x_3 = 4{,}6 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2{,}6 & -1{,}2 & 1{,}5 \\ 0 & -0{,}9 & 1{,}8 & -0{,}6 \\ 0 & -7 & -3{,}8 & 3{,}1 \end{pmatrix} \sim$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2{,}6 & -1{,}2 & 1{,}5 \\ 0 & 1 & -2 & 0{,}7 \\ 0 & 1 & -0{,}5 & 0{,}4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2{,}6 & -1{,}2 & 1{,}5 \\ 0 & 1 & -2 & 0{,}7 \\ 0 & 0 & 1{,}5 & -0{,}3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2{,}6 & -1{,}2 & 1{,}5 \\ 0 & 1 & -2 & 0{,}7 \\ 0 & 0 & 1 & -0{,}2 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0{,}5 \\ 0 & 1 & 0 & 6{,}3 \\ 0 & 0 & 1 & -0{,}2 \end{pmatrix}. \quad \textit{Ответ:} \begin{cases} x_1 = 0{,}5 \\ x_2 = 0{,}7 \\ x_3 = -0{,}2 \end{cases}.$$

Заметим, что приближенный метод Гаусса применим, если ведущие элементы не равны нулю, но практически всегда можно переставить столбцы (переименовать неизвестные), чтобы ведущие элементы отличались от нуля.

Метод итерации – это метод последовательных приближений. (итерация – повторение). Пусть дана система $A\bar{x} = \bar{b}$. Преобразуем её так чтобы диагональные элементы $a_{ij} \neq 0$ $\left(i = \overline{1,n}\right)$ и представим в виде $\bar{x}(2) = \bar{\beta} + \alpha\bar{x}(1)$. (3.14)

$\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \Rightarrow a_{ii}x_i + \sum\limits_{\substack{j=1 \\ i\neq j}}^{n} a_{ij}x_j = b_i$, $a_{ii} \neq 0$ и $x_i = \dfrac{b_i}{a_{ii}} - \sum\limits_{i \neq j}^{n} \dfrac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j$. Обозначим $\beta_i = \dfrac{b_i}{a_{ii}}$ и $\alpha_{ij} = \begin{cases} -\dfrac{a_{ij}}{a_{ii}}, \text{ где } i \neq j \\ 0, \quad \text{где } i = j \end{cases}$.

Алгоритм расчета $\bar{x}(k) = \bar{\beta} + \alpha\bar{x}(k-1)$. (3.15)

Такую систему называют системой, записанной в нормальном виде. Видно, что сразу выделяются диагональные элементы, как и в методе Гаусса. Рассмотрим действие метода итераций на примере.

Пример. Решить систему $\begin{cases} 4x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + 4x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 + x_2 + 4x_3 = -17 \end{cases}$

Решение. Приведем систему к нормальному виду $\bar{x}(1) = \bar{\beta} + \alpha\bar{x}(0)$ или

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{4}x_2 - \dfrac{1}{4}x_3 \\ x_2 = 1 - \dfrac{1}{4}x_1 - \dfrac{1}{4}x_3 \\ x_3 = -\dfrac{17}{4} - \dfrac{1}{4}x_1 - \dfrac{1}{4}x_2 \end{cases}, \text{ где } \beta = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{4} \\ 1 \\ -\dfrac{17}{4} \end{pmatrix} \text{ и } \alpha = \begin{pmatrix} 0 & -\dfrac{1}{4} & -\dfrac{1}{4} \\ -\dfrac{1}{4} & 0 & -\dfrac{1}{4} \\ -\dfrac{1}{4} & -\dfrac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}.$$

В первом приближении примем $\bar{x}(0) = \bar{\beta}$, тогда $\bar{x}(1) = \bar{\beta} + \alpha\bar{\beta}$,

во втором $\bar{x}(2) = \bar{\beta} + \alpha\bar{x}(1)$,

………………………

в k - том приближении $\bar{x}(k) = \bar{\beta} + \alpha\bar{x}(k)$.

Полагаем $\bar{x}(0)=\begin{pmatrix}\frac{1}{4}\\1\\-\frac{17}{4}\end{pmatrix}$, $\bar{x}(1)=\begin{pmatrix}\frac{1}{4}\\1\\-\frac{17}{4}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4}\\-\frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4}\\-\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{4}\\1\\-\frac{17}{4}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1{,}06\\2\\-4{,}56\end{pmatrix}$,

$$\bar{x}(2)=\begin{pmatrix}0{,}89\\1{,}88\\-5{,}02\end{pmatrix},\quad \bar{x}(3)=\begin{pmatrix}1{,}04\\2{,}03\\-4{,}94\end{pmatrix},\quad \bar{x}(4)=\begin{pmatrix}0{,}98\\1{,}98\\-5{,}02\end{pmatrix},\quad \bar{x}(5)=\begin{pmatrix}1{,}01\\2{,}01\\-4{,}99\end{pmatrix}.$$

Видно, что приближенное решение сходится к точному решению $\begin{cases}x_1=1\\x_2=2\\x_3=-5\end{cases}$.

Достаточный признак сходимости итерационного процесса заключается в следующем: если максимальная сумма модулей коэффициентов при неизвестных правых частей каждого уравнения нормальной системы меньше единицы $\max\sum_{j=i}^{n}|\alpha_{ij}|<1,\ \left(j=\overline{1,n}\right)$, то итерационный процесс быстро сходится.

Метод Зейделя представляет модификацию метода итераций и имеет лучшую сходимость, но более громоздок в вычислениях, что не существенно при расчетах на ЭВМ.

Идея метода заключается в том, что при вычислении $\overline{X}_2(k+1)$ уже надо учитывать значение $\overline{X}_1(k+1)$. Схема вычисления (алгоритм) такова:

$$\begin{cases}x_1^{(k+1)}=\beta_1+\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_{ij}x_j^{(k)}\\ x_2^{(k+1)}=\beta_2+\alpha_{21}x_1^{(k+1)}+\sum\limits_{j=2}^{n}\alpha_{2j}x_j^{(k)}\\ x_3^{(k+1)}=\beta_3+\alpha_{31}x_1^{(k+1)}+\alpha_{32}x_2^{(k+1)}+\sum\limits_{j=3}^{n}\alpha_{3j}x_j^{(k)}\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ x_n^{(k+1)}=\beta_n+\sum\limits_{j=1}^{n-1}\alpha_{nj}x_n^{(k+1)}+\alpha_{nn}x_n^{(k)}\end{cases} \tag{3.16}$$

Пример. Решить систему $\begin{cases}10x_1+x_2+x_3=12\\2x_1+10x_2+x_3=13\\2x_1+2x_2+10x_3=14\end{cases}$.

Решение. Представим систему в нормальном виде $\begin{cases} x_1 = 1{,}2 - 0{,}1x_2 - 0{,}1x_3 \\ x_2 = 1{,}3 - 0{,}2x_1 - 0{,}1x_3 \\ x_3 = 1{,}4 - 0{,}2x_1 - 0{,}2x_2 \end{cases}$

Нулевое приближение выберем как $x_1^{(0)} = 1{,}2,\ x_2^{(0)} = 0,\ x_3^{(0)} = 0$

Заметим, что вариации выбора нулевого решения не сказывается на конечном ответе.

Тогда метод Зейделя в первом приближении дает

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = 1{,}2 - 0{,}1 \cdot 0 - 0{,}1 \cdot 0 = 1{,}2 \\ x_2^{(1)} = 1{,}3 - 0{,}2(1{,}2) - 0{,}1 \cdot 0 = 1{,}06 \\ x_3^{(1)} = 1{,}4 - 0{,}2(1{,}2) - 0{,}2(1{,}06) = 0{,}948 \end{cases}.$$

Во втором приближении $\begin{cases} x_1^{(1)} = 1{,}2 - 0{,}1(1{,}06) - 0{,}1(0{,}948) = 0{,}9992 \\ x_2^{(1)} = 1{,}3 - 0{,}2(0{,}992) - 0{,}1(0{,}948) = 1{,}00536 \\ x_3^{(1)} = 1{,}4 - 0{,}2(0{,}992) - 0{,}2(1{,}00536) = 0{,}999098 \end{cases}$

Видно, что точный ответ будет: $x_1 = 1,\ x_2 = 1,\ x_3 = 1$.

Отметим, что существует достаточно много других приближенных методов решения систем линейных алгебраических уравнений таких как, например, метод регуляции, методы, основанные на полярном и сингулярном разложении матриц и многие другие.

В заключении рассмотрим вопрос об устойчивости решения систем $A\bar{x} = \bar{b}$. Для случая, когда $n = m,\ \Delta \neq 0$, как следует из метода Крамера, решение имеет вид: $x_i = \dfrac{\Delta_i}{\Delta},\ \ i = \overline{1,n}$. Если определитель системы имеет достаточно малые значения, то при небольших возмущениях данной системы, её решения могут существенно меняться. Под возмущениями понимают небольшие изменения коэффициентов при неизвестных. В этом случае говорят, что система неустойчива.

Пример. $\begin{cases} 1{,}3x_1 + 1{,}6x_2 = 2{,}1 \\ 3{,}5x_1 + 4{,}1x_2 = 5{,}8 \end{cases}$

Решение.

$\Delta = \begin{vmatrix} 1{,}3 & 1{,}6 \\ 3{,}5 & 4{,}1 \end{vmatrix} = -0{,}27,\ \ \Delta_1 = \begin{vmatrix} 2{,}1 & 1{,}6 \\ 5{,}8 & 4{,}1 \end{vmatrix} = -0{,}67$ и $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1{,}3 & 2{,}1 \\ 3{,}5 & 5{,}8 \end{vmatrix} = 0{,}2$.

Решение имеет вид:

$$x_1 = \frac{-0{,}67}{-0{,}27} = 2{,}4 \quad x_2 = \frac{0{,}2}{-0{,}27} = -0{,}7.$$

Составим возмущенную систему, изменяя коэффициент $a_{11} = 1{,}3$ на 10%. Тогда $\tilde{\Delta} = \begin{vmatrix} 1{,}4 & 1{,}6 \\ 3{,}5 & 4{,}1 \end{vmatrix} = 0{,}14$, $\tilde{\Delta}_1 = \Delta_1 = -0{,}67$ и $\tilde{\Delta}_2 = 0{,}77$.

Ответ: $\tilde{x}_1 = \dfrac{-0{,}67}{0{,}14} = -4{,}9$, $\tilde{x}_2 = \dfrac{0{,}77}{0{,}14} = 5{,}2$.

Таким образом, прежде чем начать решение данной системы необходимо убедиться в её устойчивости.

Говорят, что обратная матрица A^{-1} устойчива, если при малом изменении элементов матрицы A элементы матрицы A^{-1}изменяются соответственно мало. При этом A называют ***хорошо обусловленной матрицей.*** Если же это условие не выполняется, то A^{-1} является неустойчивой, а матрицу A называют плохо обусловленной.

Как правило, неустойчивые решения не имеют смысл и их появление связано с неправильным заданием систем линейных алгебраических уравнений. Надо перепроверить начальную постановку задачи. Для приближенных решений систем с $n \neq m$, как совместных, так и несовместных существует несколько достаточно надежных способов получения устойчивых решений, а именно – метод наименьших квадратов, метод регуляции и все итерационные методы.

4. ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

4.1. Алгебра векторов в евклидовом пространстве

Рассмотрим частный случай векторных евклидовых пространств с размерностью $n \le 3$. Этот случай весьма важен, поскольку с таким пространством мы ассоциируем пространство, в котором мы живем и действуем, измеряем длину, высоту и ширину материальных тел. Такое векторное пространство имеет специфическое обозначение $A_2 \triangleq R_2$ или $A_3 \triangleq R_3$, в соответствии с размерностью $n = 2$ или $n = 3$.

Вектором в R_3 называют последовательность действительных чисел, расположенных в определенном порядке

$$\bar{a} = \{a_x, a_y, a_z\}, \qquad (4.1)$$

где a_x, a_y, a_z - компоненты вектора. Такой вектор имеет геометрическую интерпретацию – как направленный отрезок. Если $A\left(x_A, y_A, z_A\right)$ начальная точка вектора $\bar{a}$, а точка $B\left(x_B, y_B, z_B\right)$ конечная, то вектор AB направлен в точку B и определяется в координатной форме

$$\overrightarrow{AB} = \vec{a} = \{x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A\} = \{a_x, a_y, a_z\}. \qquad (4.2)$$

Вектор называют свободным, так как его можно передвигать параллельно самому себе, поскольку он зависит от координат точек A и B относительно.

Действительно, имеет место

$\overline{a} = \{4,3,1\} = \{6-2;7-4;-2+3\} = \{-1+5;10-7;6-5\}$.

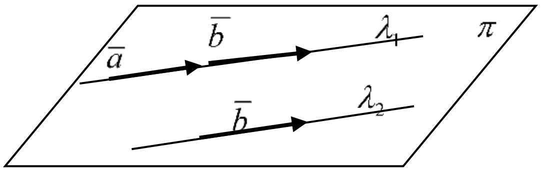
В своей совокупности векторы могут быть «скользящими», когда их можно передвигать только вдоль их направления, например вектор силы или вектор угловой скорости и «связанными», когда важна точка их приложения, например, вектор момента сил.

Напомним, что скаляром называют величину, не имеющую направления, и характеризующуюся только одним числом.

Вектор называют нулевым, если его начало и конец лежат в одной точке. Нулевой вектор обозначают как $\overline{O} = (0;0;0)$.

Векторы называются ***коллинеарными***, если они лежат на одной прямой или параллельных прямых, то есть $\overline{a} \,//\, \overline{b}$ или $\overline{a} = \lambda \overline{b}$, где λ - коэффициент пропорциональности есть действительное число, $\lambda \neq 0$

Рис.4.1



Векторы называют ***компланарными***, если они лежат в одной плоскости или в параллельных плоскостях.

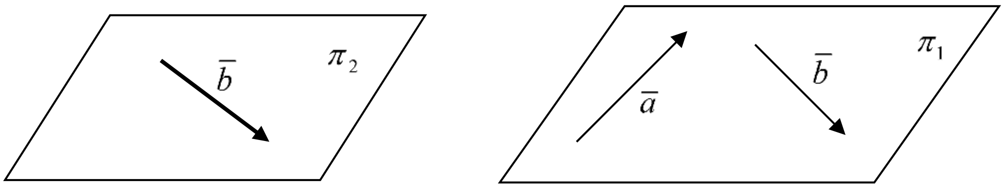


Рис.4.2

Два вектора называют равными, если они колинеарны, имеют одинаковую длину и одинаковое направление.

Длиной вектора $\overrightarrow{AB}$ или модулем называется неотрицательное число равное наикратчайшему расстоянию между точками A и B, определяемое как

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2} \qquad (4.3)$$

или через компоненты $\left|\overline{a}\right| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$. (4.4)

Можно определять сумму векторов по правилу “ параллелограмма “, когда вектора приводятся к одному общему началу.

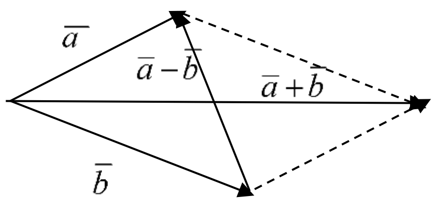


Рис.4.3

Тогда $\overline{a}+\overline{b}$ - большая диагональ, а $\overline{a}-\overline{b}$ - малая диагональ параллелограмма.

Введем понятие единичного вектора в направлении данного.

$$\overline{e}=\frac{\overline{a}}{|\overline{a}|}, \qquad |\overline{e}|=1 \ . \tag{4.5}$$

Пример. Найти вектор биссектрисы угла образованного векторами $\overline{a}$ =(3;4) и $\overline{b}$ =(2;0).

*Решение***.** Образуем единичные векторы $\overline{e}_1$ =(3/5;4/5) и $\overline{e}_2$ =(1;0). Вектор биссектрисы тогда определится как $\overline{e}$ $=\overline{e}_1$ + $\overline{e}_2$ =(3/5+1;4/5+0)=(8/5;4/5).

Заметим, что сумму векторов можно определить и по-другому.

Суммой двух векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называется вектор, идущий из начала вектора $\overline{a}$ в конец вектора $\overline{b}$ при условии, что вектор $\overline{b}$ приложен в конец вектора $\overline{a}$. Это, так называемое, правило “треугольников “.

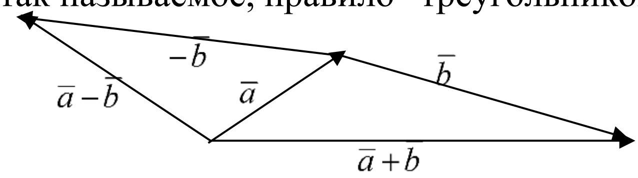


Рис.4.4

Если, при сложении нескольких векторов, последний вектор приходит в начало первого вектора, то сумма этих векторов равна нулевому вектору.

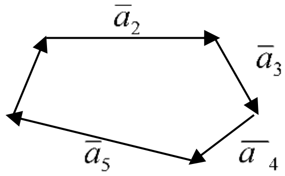


Рис.4.5

Для случая изображенного на рисунке 4.5 выполняется $\overline{a}_1+\overline{a}_2+\overline{a}_3+\overline{a}_4+\overline{a}_5=\overline{0}$.

*Пример***.** Точка О пересечения медиан треугольника *ABC* является к тому же центром тяжести этого треугольника. Доказать, что $\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC}=\overline{O}$.

*Решение***.** Непосредственно из рисунка 4.6 следует, что $\overline{MA}+\overline{AC}+\overline{CM}=\overline{O}$, $\overline{OA}=\frac{2}{3}\overline{MA}$ и $\overline{CM}=\frac{1}{2}\overline{CB}$. Получаем $\overline{OA}=\frac{2}{3}\left(\overline{CA}+\frac{1}{2}\overline{BC}\right)$, аналогично получаем $\overline{OB}=\frac{2}{3}\left(\overline{AB}+\frac{1}{2}\overline{CA}\right)$ и $\overline{OC}=\frac{2}{3}\left(\overline{BC}+\frac{1}{2}\overline{AB}\right)$.

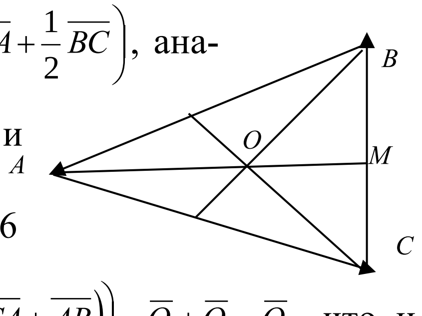


Рис.4.6

Тогда $\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC}=\frac{2}{3}\left(\overline{CA}+\overline{AB}+\overline{BC}+\frac{1}{2}\left(\overline{BC}+\overline{CA}+\overline{AB}\right)\right)=\overline{O}+\overline{O}=\overline{O}$, что и требовалось показать.

Для суммы векторов выполняются переместительное и сочетательное свойства
$$\bar{a}+\bar{b}=\bar{b}+\bar{a} \qquad (4.6)$$
$$(\bar{a}+\bar{b})+\bar{c}=\bar{a}+(\bar{b}+\bar{c}) \qquad (4.7)$$

Для каждого вектора можно определить противоположный вектор, который равен данному по длине, но имеет противоположное направление
$$\bar{a}+\bar{a}'=\bar{0}, \quad \bar{a}'=-\bar{a} \qquad (4.8)$$

Произведением вектора $\bar{a}$ на действительное число λ $(\lambda \neq 0)$ называется вектор коллинеарный вектору $\bar{a}$ и имеющий длину $\lambda|\bar{a}|$ и тоже направление, если $\lambda > 0$, и противоположное, если $\lambda < 0$.

Приведем основные теоремы о линейной композиции векторов в трехмерном евклидовом пространстве (R_3).

Теорема 1. Необходимым и достаточным условием линейной зависимости двух векторов является их колинеарность.

Покажем это. Положим, что два вектора линейно зависимы, тогда выполняется $c_1\overline{a_1}+c_2\overline{a_2}=\bar{0}$, откуда непосредственно следует, что они колинеарны $\overline{a_2}=-\frac{c_1}{c_2}\overline{a_1}=\lambda\overline{a_1}$, $\overline{a_2}\,//\,\overline{a_1}$. Условие коллинеарности векторов для их компонент имеет вид
$$\frac{a_{1x}}{a_{2x}}=\frac{a_{1y}}{a_{2y}}=\frac{a_{1z}}{a_{2z}}=\lambda . \qquad (4.9)$$

Теорема 2. Необходимым и достаточным условием линейной зависимости трех векторов является их компланарность.

Покажем это. Пусть три вектора линейно зависимы $c_1\overline{a_1}+c_2\overline{a_2}+c_3\overline{a_3}=\bar{0}$, то $\overline{a_3}=-\frac{c_1}{c_3}\overline{a_1}-\frac{c_2}{c_3}\overline{a_2}=\lambda_1\overline{a_1}+\lambda_2\overline{a_2}$ - есть сумма двух векторов. Видно, что вектор $\overline{a_3}$ лежит в той же плоскости, что и векторы $\overline{a_1}$ и $\overline{a_2}$. Таким образом, операция сложение двух векторов ($\bar{a}_1 \subset \pi$, $\bar{a}_2 \subset \pi \Rightarrow \bar{a}_3 \subset \pi$) не выводит их из плоскости, где они расположены.

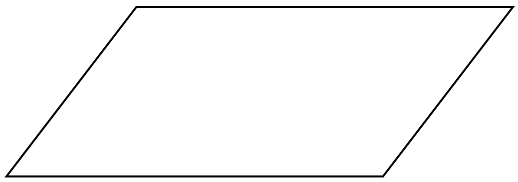


Рис.4.7

Теорема 3. Любые четыре вектора в трехмерном пространстве линейно зависимы. Покажем это геометрически. Пусть три любых вектора $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ некомпланарны, тогда четвертый вектор $\bar{d}$ всегда можно выразить через них.

Введем понятие базиса. Любая тройка некомпланарных векторов (линейно независимых) образует в пространстве базис, по которому можно разложить любой вектор. Базис вводится для удобства вычисления. Пусть тройка векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ некомпланарны, то есть не принадлежат одной плоскости, то сложение векторов $\bar{d}_1$ и $\bar{d}_2$, где $\bar{d}_1=\alpha_1\bar{a}+\beta_1\bar{b}+\gamma_1\bar{c}$ и $\bar{d}_2=\alpha_2\bar{a}+\beta_2\bar{b}+\gamma_2\bar{c}$ определяется как

$$\overline{d_1}+\overline{d_2}=\overline{a}(\alpha_1+\alpha_2)+\overline{b}(\beta_1+\beta_2)+(\gamma_1+\gamma_2)\overline{c}.$$

Здесь числа α, β и γ являются компонентами вектора $\overline{d}$ в базисе векторов $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$.

Пример. Даны вектора $\overline{a}=\{1;3;2\}$, $\overline{b}=\{3;0;1\}$ и $\overline{c}=\{-1;2;3\}$.

Найти разложение вектора $\overline{d}=\{1;2;1\}$ в базисе этих векторов.

Решение. Итак, по определению $\vec{d}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}$. Надо определить числа α,β,γ.

Распишем векторы через компоненты

$$\begin{cases} d_x=\alpha a_x+\beta b_x+\gamma c_x \\ d_y=\alpha a_y+\beta b_y+\gamma c_y \\ d_z=\alpha a_z+\beta b_z+\gamma c_z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha+3\beta-\gamma=1 \\ 3\alpha+2\gamma=2 \\ 2\alpha+\beta-3\gamma=1 \end{cases};\quad \begin{matrix} \Delta=34 \\ \Delta_1=20 \\ \Delta_2=6 \\ \Delta_3=4 \end{matrix}.$$

По правилу Крамера $\alpha=\dfrac{\Delta_1}{\Delta}=\dfrac{10}{17}$, $\beta=\dfrac{3}{17}$, $\gamma=\dfrac{2}{17}$.

Ответ: $\vec{d}=\dfrac{10}{17}\vec{a}+\dfrac{3}{17}\vec{b}+\dfrac{2}{17}\vec{c}$.

Наиболее удобным базисом для вычислений является тройка ортогональных (взаимно перпендикулярных) единичных векторов, называемых ортами, $\overline{i}=\{1;0;0\}$, $\overline{j}=\{0;1;0\}$, $\overline{k}=\{0;0;1\}$. Орт $\overline{i}$ направлен по *OX*, орт $\overline{j}$ по оси *OУ* и орт $\overline{k}$ по оси *OZ.*

*Пример***.** Найти координаты точки *M,* делящей заданный отрезок *AB* в отношении λ.

Решение. Дано $\overline{BM}=\lambda\overline{MA}$. Из рисунка видно, что $\overline{OM}-\overline{OB}=\lambda\left(\overline{OA}-\overline{OM}\right)$. Отсюда следует, что

$$\overline{OM}=\frac{\overline{OB}+\lambda\overline{OA}}{1+\lambda}.$$

Тогда координаты точки M определяются

$$x_M=\frac{x_B+\lambda x_A}{1+\lambda},\quad y_M=\frac{y_B+\lambda y_A}{1+\lambda}\quad \text{и}\quad z_M=\frac{z_B+\lambda z_A}{1+\lambda}.$$

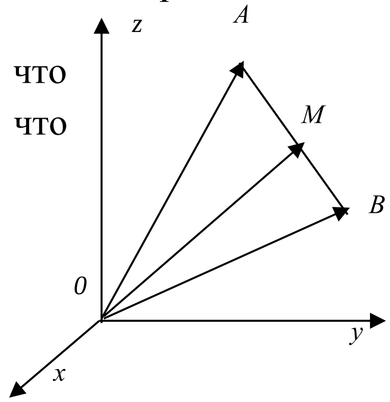


Рис.4.8

Введем понятие проекции вектора на некоторую ось. Пусть дана прямая (ось) *U* и вектор $\overrightarrow{AB}$. Проведем плоскости перпендикулярные данной оси и проходящие через начало и конец вектора $\overrightarrow{AB}$.

Проведем ось *V* параллельную *U* и проходящую через точку *A*.

Проекция вектора $\overrightarrow{AB}$ на ось *U* равна модулю вектора $\left|\overrightarrow{AB}\right|$ умноженного на косинус угла вектора $\overrightarrow{AB}$ к оси *U*.

$$Пр_u AB=\left|\overline{AB}\right|\cos\varphi. \qquad (4.10)$$

Основные свойства проекции

1. $np_u\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=np_u\overline{a}+np_u\overline{b}$,
2. $\lambda np_u\vec{a}=np_u\lambda\vec{a}$. (4.11)

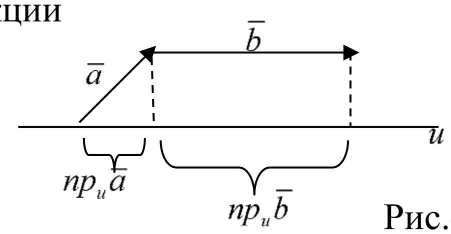


Рис.4.9

Пример. Найти координаты точки, делящей расстояние между точками $A(1,-7,8)$ и $B(3,2,1)$ в отношении 1/2.

Решение. Здесь $\lambda=\frac{1}{2}$. $x_M=\dfrac{1+\frac{1}{2}\cdot 3}{1+\frac{1}{2}}=\frac{5}{3}$, $y_M=-4$, $z_M=\frac{17}{3}$.

В декартовой системе координат компоненты вектора $\overline{a}$ равны проекциям вектора на оси *OX, OУ* и *OZ*

$$np_{ox}\vec{a}=a_x,\ np_{oy}\vec{a}=a_y,\ np_{oz}\vec{a}=a_z.$$

Получаем важное соотношение для направляющих косинусов

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1 \qquad (4.12)$$

Сумма квадратов направляющих косинусов равна единице. В случае плоскости, когда $\gamma=0$ и $\alpha=90^o-\beta$, получаем известную формулу
$\cos^2\alpha+\sin^2 a=1$, как частный случай.

Отметим, что вектор можно задать тремя способами.

1.Двумя последовательными точками *A* и *B*, $\overrightarrow{AB}=\{x_B-x_A, y_B-y_A, z_B-z_A\}$

2.Тремя компонентами $\overline{a}=\{a_x,a_y,a_z\}$.

3.Модулем вектора и тремя направляющими косинусами, причем из четырех параметров только три являются независимыми.

4.2. Скалярное произведение векторов

Скалярным произведением двух векторов называется число, равное произведению длин (модулей) этих векторов на косинус угла между ними

$$\overline{a}\cdot\overline{b}\equiv(\overline{a},\overline{b})=/\,\overline{a}\,/\cdot/\,\overline{b}\,/\cos\varphi. \qquad (4.13)$$

Или, так как $np_{\overline{b}}\overline{a}=|a|\cos\varphi$, то

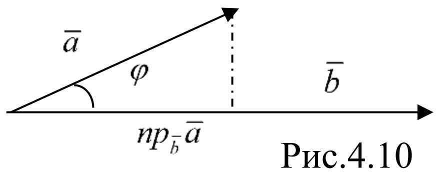


Рис.4.10

$$\overline{a}\cdot\overline{b}=\left|\overline{b}\right|np_{\overline{b}}\overline{a}=\left|\overline{a}\right|np_{\overline{a}}\overline{b}. \qquad (4.14)$$

Наглядной физической интерпретацией скалярного произведения является работа, совершаемая по перемещению некоторого материального тела под воздействием силы $\overline{F}$

$$A = \left(\overline{F}, \overline{S}\right), \tag{4.15}$$

где $\left|\overline{S}\right|$ - пройденный телом путь.

Непосредственно из определения скалярного произведения вытекают следующие свойства:

1.) Необходимым и достаточным условием перпендикулярности двух векторов является равенство нулю их скалярного произведения

$$\left(\overline{a}, \overline{b}\right) = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b} .$$

2.) Два вектора составляют острый угол, если их скалярное произведение положительно и тупой, если отрицательно.

3.) $\left(\overline{a}, \overline{b}\right) = \left(\overline{b}, \overline{a}\right)$ - перестановочное свойство.

4.) $\left(\alpha\overline{a}, \overline{b}\right) = \left(\overline{a}, \alpha\overline{b}\right)$ - сочетательное свойство.

5.) $\left(\overline{a} + \overline{b}, \overline{c}\right) = \left(\overline{a}, \overline{c}\right) + \left(\overline{b}, \overline{c}\right)$ - распределительное свойство.

Выразим скалярное произведение через компоненты перемножаемых векторов. Используем, тот факт, что по определению $\left(\overline{i}, \overline{i}\right) = \left(\overline{j}, \overline{j}\right) = \left(\overline{k}, \overline{k}\right) = 1, \quad \left(\overline{i}, \overline{j}\right) = \left(\overline{i}, \overline{k}\right) = \left(\overline{j}, \overline{k}\right) = 0$

Итак, $\left(\overline{a}, \overline{b}\right) = \left(\overline{i}a_x + \overline{j}a_y + \overline{k}a_z\right)\left(\overline{i}b_x + \overline{j}b_y + \overline{k}b_z\right) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$ или

$$\left(\overline{a}, \overline{b}\right) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \tag{4.16}$$

Можно этот же результат получить, вспомнив, что вектор это матрица, состоящая из одного столбца, и применить правило перемножения матриц

$$\left(\overline{a}, \overline{b}\right) = \overline{a}^T \cdot \overline{b} = \left(a_x, a_y, a_z\right)\begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z . \tag{4.17}$$

Получим формулу, удобную для вычисления угла между заданными векторами,

$$\cos\varphi = \frac{\left(\overline{a}, \overline{b}\right)}{\left|\overline{a}\right|\left|\overline{b}\right|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}} \quad . \tag{4.18}$$

*Пример***.** Даны координаты вершины треугольника *ABC*: $A(1,2,3)$, $B(-1,8,1)$ и $C(3,-1,-1)$. Найти угол при вершине *A*.

*Решение***.** Образуем два вектора выходящих из вершины *A*.

$\overline{AB} = \{-2,6,-2\}$ и $\overline{AC} = \{2,-3,-4\}$. Угол определяется следующим образом

$\varphi = \arccos\dfrac{\overline{AB} \cdot \overline{AC}}{\left|\overline{AB}\right| \cdot \left|\overline{AC}\right|} = \arccos\dfrac{-4-18+8}{\sqrt{4+36+4} \cdot \sqrt{4+9+16}} = \arccos\dfrac{-14}{\sqrt{44} \cdot \sqrt{29}}$, что приблизительно равно 115^{0}.

4.3. Векторное произведение векторов

Векторным произведением двух векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называется вектор $\overline{c}$, удовлетворяющий трем требованиям:

1. Длина этого вектора равна произведению длин перемножаемых векторов на синус угла между ними

$$|\bar{c}| = |\bar{a}||\bar{b}|\sin\varphi \qquad (4.19)$$

2. Полученный вектор ортогонален

как вектору $\bar{a}$, так и вектору $\bar{b}$.

Рис.4.15

3. Вектор $\bar{c}$ направлен так, что тройка векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ является правой (правило буравчика) и обозначается:

$$\bar{c} = [\bar{a}, \bar{b}] \equiv \bar{a} \times \bar{b} . \qquad (4.20)$$

Как физическую интерпретацию векторного произведения можно привести вектор момента сил приложенных к рычагу $\bar{r}$

$$\bar{M} = \bar{r} \times \bar{F} \qquad (4.21)$$

Непосредственно из определения следуют два важных практических вывода.

1. Необходимым и достаточным условием коллинеарности векторов является равенство нулю их векторного произведения

$$\bar{a} \,//\, \bar{b} \Rightarrow \bar{a} \times \bar{b} = \bar{0} .$$

2. Длина векторного произведения равна площади параллелограмма построенного на перемножаемых векторах.

$$S = h|\bar{b}| = |\bar{a}||\bar{b}|\sin\varphi$$

$$\text{или } [\bar{a}, \bar{b}] = \bar{e}S \quad , \qquad (4.22.)$$

где $\bar{e}_c$ - единичный вектор в

направлении $\bar{c} = |\bar{c}|\bar{e}_c$.

Рис.4.16

Получаем формулу, удобную для подсчета площадей параллелограммов или треугольников, расположенных в пространстве.

$$S = |[\bar{a}, \bar{b}]|, \quad S_\Delta = \frac{1}{2} S . \qquad (4.23)$$

Выразим векторное произведение через компоненты умножаемых векторов. Пусть $\bar{a} = \bar{i}a_x + \bar{j}a_y + \bar{k}a_z$ и $\bar{b} = \bar{i}b_x + \bar{j}b_y + \bar{k}b_z$, учитывая, что $[\bar{i}, \bar{i}] = [\bar{j}, \bar{j}] = [\bar{k}, \bar{k}] = \bar{0}$, и по правилу буравчика $[\bar{j}, \bar{k}] = \bar{i}$, $[\bar{k}, \bar{i}] = \bar{j}$, $[\bar{j}, \bar{i}] = -\bar{k}$ получаем

$$[\bar{a}, \bar{b}] = \bar{i}(a_y b_z - a_z b_y) - \bar{j}(a_x b_z - a_z b_x) + \bar{k}(a_x b_y - a_y b_x) \qquad (4.24)$$

Видно, что это разложение по первой строке определителя. Таким образом, получаем известную формулу

$$\bar{a} \times \bar{b} = [\bar{a}, \bar{b}] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} . \qquad (4.25)$$

Свойства векторного произведения определяются свойствами определителя:

1. $\left[\bar{a},\bar{b}\right]=-\left[\bar{b},\bar{a}\right]$,
2. $\left[\alpha\bar{a},\bar{b}\right]=\alpha\left[\bar{a},\bar{b}\right]$,
3. $\left[\left(\bar{a}+\bar{b}\right)\bar{c}\right]=\left[\bar{a},\bar{c}\right]+\left[\bar{b},\bar{c}\right]$,
4. $\left[\bar{a},\bar{a}\right]=\bar{0}$, для любых векторов.

*Пример***.** Заданы три вершины треугольника $A(1;2;0)$; $B(3;0;-3)$ и $C(5;2;6)$. Найти площадь данного треугольника.

Решение. Определим два вектора $\overline{AB}==\{2,-2,-3\}$ и $\overrightarrow{AC}=\{4,0,6\}$, соответственно. Образуем векторное произведение этих векторов $\left[\overline{AB},\overline{AC}\right]=-12\bar{i}-24\bar{j}+8\bar{k}$.

По определению, модуль $\left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right|$ равен площади параллелограмма, а значит, площадь искомого треугольника равна $S_{\Delta}=\frac{1}{2}2\sqrt{6^2+12^2+4^2}=14$ кв.ед.

Получим формулу для вычисления площади треугольника лежащего в заданной плоскости. Пусть вектора $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ лежат на плоскости XOY.

Тогда $A\bar{B}=(x_B-x_A;\ y_B-y_A;\ 0)$ и $\overline{AC}=(x_C-x_A;\ y_C-y_A;\ 0)$

и $$\bar{c}=\left[\overline{AB},\overline{AC}\right]=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ x_B-x_A & y_B-y_A & 0\\ x_C-x_A & y_C-y_A & 0\end{vmatrix}=\bar{k}\left[(x_B-x_A)(y_C-y_A)-(x_C-x_A)(y_B-y_A)\right].$$

Окончательно получаем

$$S=\frac{1}{2}\left[(x_B-x_A)(y_C-y_A)-(x_C-x_A)(y_B-y_A)\right] \qquad (4.26)$$

*Пример***.** Найти площадь треугольника с вершинами $A(1;2), B(2;4), C(2;5)$.

Решение. $S=\frac{1}{2}\left[1\cdot 3-1\cdot 2\right]=0{,}5$ единиц площади.

4.4. Смешанное произведение векторов

Смешанное произведение векторов можно получить, умножив векторное произведение двух векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ скалярно на вектор $\bar{c}$. Оно обозначается как

$$\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c}\equiv\left(\left[\bar{a},\bar{b}\right],\bar{c}\right)\equiv\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\cdot\bar{c}, \qquad (4.27)$$

и имеет интересный геометрический смысл. Смешанное произведение трех некомпланарных векторов равно объему параллелепипеда, построенного на приведенных к одному началу данных векторах. Действительно, $\left[\bar{a},\bar{b}\right]=S\bar{e}_d$, $S=\left|\left[\bar{a},\bar{b}\right]\right|$, тогда $|\bar{c}|\cos\varphi=h$, $(\bar{e}_d,\bar{c})=h$, $V=Sh=\left(\bar{c},\left[\bar{a},\bar{b}\right]\right)$.

Рис.4.17

Таким образом, объем параллелепипеда со сторонами $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ определяется

$$V = \left(\bar{a}, \left[\bar{b}, \bar{c}\right]\right). \qquad (4.28)$$

Заметим, что если векторы компланарны, то есть все лежат в одной плоскости, то смешанное произведение равно нулю $(V = 0)$. Получаем полезную формулу для проверки компланарности трех векторов:

$$\left(\bar{a}, \left[\bar{b}, \bar{c}\right]\right) = 0 . \qquad (4.29)$$

В декартовой системе координат смешанное произведение векторов выражается через компоненты этих векторов с помощью определителя

$$\left(\bar{a}, \left[\bar{b}, \bar{c}\right]\right) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} \qquad (4.30)$$

.

Покажем это. Дано $\bar{a} = \bar{i}a_x + \bar{j}a_y + \bar{k}a_z$

и векторное произведение $\left[\bar{b}, \bar{c}\right] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = \bar{i}\begin{vmatrix} b_y & b_z \\ c_y & c_z \end{vmatrix} - \bar{j}\begin{vmatrix} b_x & b_z \\ c_x & c_y \end{vmatrix} + \bar{k}\begin{vmatrix} b_x & b_y \\ c_x & c_y \end{vmatrix}$.

Образуем скалярное произведение

$$\left(\bar{a}, \left[\bar{b}, \bar{c}\right]\right) = a_x\begin{vmatrix} b_y & b_z \\ c_y & c_z \end{vmatrix} - a_y\begin{vmatrix} b_x & b_z \\ c_x & c_z \end{vmatrix} + a_z\begin{vmatrix} b_x & b_y \\ c_x & c_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix},$$

что и требовалось показать.

Свойства смешанного произведения определяются свойствами определителя.

1. Если два вектора из трех коллинеарны, то $\left(\bar{a}, \left[\bar{b}, \bar{c}\right]\right) = 0$.

2. Если три вектора компланарны, то $\left(\bar{a}, \left[\bar{b}, \bar{c}\right]\right) = 0$.

3. При перестановке двух рядом стоящих векторов знак смешанного произведения меняется.

4. Смешанное произведение не меняется при циклической (круговой) перестановки векторов $\left(\bar{a}, \left[\bar{b}, \bar{c}\right]\right) = \left(\bar{c}, \left[\bar{a}, \bar{b}\right]\right) = \left(\bar{b}, \left[\bar{c}, \bar{a}\right]\right) = \left(\bar{b}, \left[\bar{c}, \bar{a}\right]\right)$.

Пример 1. Доказать, что точки $A(1;0;7)$, $B(-1;-1;2)$, $C(2;-2;2)$ и $D(0;1;9)$ лежат в одной плоскости.

Решение. Образуем вектора $\overline{AB} = \{-2;-1;-5\}$, $\overline{AC} = \{1;-2;-5\}$, $\overline{AD} = \{-1;1;2\}$. Тогда из них образуем смешанное произведение

$$\left(\overline{AB}, \left[\overline{AC}, \overline{AD}\right]\right) = \begin{vmatrix} -2 & -1 & -5 \\ 1 & -2 & -5 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 .$$

Ответ: Все точки лежат в одной плоскости.

*Пример 2***.** Вычислить объем тетраэдра (пирамида), вершины которого находятся в точках $O(1;1;2)$, $A(2;3;-1)$, $B(2;-2;4)$, $C(-1;1;3)$

***Решение*.** Образуем вектора $\overline{OA}=\{1;2;-3\}$, $\overline{OB}=\{1;-3;2\}$, $\overline{OC}=\{-2;0;1\}$. Заметим, что $V_T=\frac{1}{6}V_П=\left(\overline{OA},\left[\overline{OB},\overline{OC}\right]\right)$.

Получаем $V_T=\frac{1}{6}\begin{vmatrix}1 & 2 & -3\\ 1 & -3 & 2\\ -2 & 0 & 1\end{vmatrix}=\frac{5}{6}$ куб.ед.

Пример 3. Даны три вершины пирамиды $A_1(4;2;5)$, $A_2(0;7;2)$, $A_3(0;2;7)$ и $A_4(1;5;0)$. Найти длину ребра A_1A_2, угол между ребрами A_1A_2 и A_1A_3, угол между ребром A_1A_2 и гранью $A_2A_3A_4$, площадь грани $A_2A_3A_4$, объем пирамиды и высоту, опущенную из вершины A_1 на грань $A_2A_3A_4$.

Решение. Образуем векторы $A_1\overline{A}_2$ =(-4;5;-3), $A_1\overline{A}_3$= (-4;0;2) и $A_1\overline{A}_4$= (-3;3;-5).

Длина ребра $A_1\overline{A}_2$ определится как $/\overline{A_1A_2}/ = \sqrt{16 + 25 + 9} = \sqrt{50} \approx 7{,}1$.

Угол между ребрами A_1A_2 и A_1A_3 определится из cos $\varphi=\frac{\overline{A}_1A_2}{/\overline{A_1A_2}/}\frac{\overline{A_1A_3}}{/\overline{A_1A_3}/}$ = =

$\frac{10}{7{,}1\sqrt{20}}$ $\approx$0,3 и составит $\varphi \approx 25^{0}$. Далее определим угол между ребром A_1A_2 и гранью $A_2A_3A_4$, для этого вычислим вектор перпендикулярный этой грани

$$\overline{d} = [\,A_2\overline{A}_3,\ A_2\overline{A}_4\,] = \begin{matrix} i & j & k\\ 0 & -5 & 5\\ 1 & -2 & -2\end{matrix} = 20\,i + 5j + 5\,k\ .$$

Таким образом, этот угол определится из $\sin\psi=\frac{\overline{A_1A_2}}{/\overline{A_1A_2}/}\frac{\overline{d}}{/\overline{d}/}$ = 0,8.

Определим площадь грани $A_2A_3A_4$ S= 1/2 $\sqrt{400 + 25 + 25}$ $\approx$10,5 кв. ед.

Для получения значения высоты пирамиды h =3V/S необходимо вычислить обьем пирамиды

$$V = 1/6\,(A_1\overline{A}_2\ ,[\ A_1\overline{A}_3\ ,\ A_1\overline{A}_4\ ]) = 1/6 \begin{matrix}-4 & -5 & -3\\ -4 & 0 & 2\\ -3 & 3 & -5\end{matrix} = 32 \text{ куб. ед. Тогда}$$

h = 9 ед. длины.

4.5. Двойное векторное произведение

Рассмотрим двойное векторное произведение трех векторов. Для этого векторное произведение двух векторов умножим векторно еще на один вектор. Двойное векторное произведение обозначается как

$$\left[\overline{a},\left[\overline{b},\overline{c}\right]\right]\equiv\overline{a}\times\left(\overline{b}\times\overline{c}\right)\ . \qquad (4.31)$$

Теорема: Для любых векторов $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ справедлива формула

$$\left[\bar a,\left[\bar b,\bar c\right]\right] = \bar b(\bar a,\bar c)-\bar c(\bar a,\bar b) \qquad (4.32)$$

Доказательство. Обозначим $\bar d=\left[\bar c,\bar b\right]$, из рис.4.18 видно, что $\left[\bar a,\bar d\right]$ лежит в плоскости π, так как он перпендикулярен вектору $\bar d$, а $\bar d$ перпендикулярен плоскости π. Таким образом, вектор $\left[\bar a,\left[\bar b,\bar c\right]\right]$ лежит в плоскости π, а значит, может быть представлен в виде линейной композиции двух векторов $\bar a$ и $\bar b$ лежит в этой плоскости. Получаем $\left[\bar a,\left[\bar b,\bar c\right]\right]=\alpha\bar b-\beta\bar c$,

*Пример***.** Даны вектора $\bar a=\{1;0;1\}$, $\bar b=\{2;1;3\}$ и $\bar c=\{0;1;2\}$. Найти $\left[\bar a,\left[\bar b,\bar c\right]\right]$.

Решение. $\left[\bar a,\left[\bar b,\bar c\right]\right] = 2\bar b-5\bar c=\{4;2;6\}-\{0;5;10\}=\{4;-3;-4\}$, так как $(\bar a,\bar c)=2$ и $(\bar a,\bar b)=5$.

Можно решить эту же задачу по-другому

$$\left[\bar b,\bar c\right]=\begin{vmatrix}\bar i & \bar j & \bar k\\ 2 & 1 & 3\\ 0 & 1 & 2\end{vmatrix}=-\bar i-4\bar j+2\bar k,$$

$$\left[\bar a,\left[\bar b,\bar c\right]\right]=\begin{vmatrix}\bar i & \bar j & \bar k\\ 1 & 0 & 1\\ -1 & -4 & 2\end{vmatrix}=4\bar i-3\bar j-4\bar k.$$

Разберем решения некоторых типовых задач.

*Пример 1***.** Буквами A, B и C обозначим вершины правильного треугольника, вписанного в окружность. Точка M расположена на этой окружности. Показать, что $\left|\overline{AM}\right|^2+\left|\overline{BM}\right|^2+\left|\overline{CM}\right|^2$ не зависит от выбора точки M.

Решение. Непосредственно из рисунка $\overline{AM}=\overline{OM}-\overline{OA}$. $\left|\overline{AM}\right|^2=\left|\overline{OM}\right|^2+\left|\overline{OA}\right|^2-2\overline{OM}\cdot\overline{OA}$. $BM=\overline{OM}-\overline{OB}\Rightarrow\left|\overline{BM}\right|^2=\left|\overline{OM}\right|^2+\left|\overline{OB}\right|^2-2\overline{OM}\cdot\overline{OB}$ $\overline{CM}=\overline{OM}-\overline{OC}$ $\left|\overline{CM}\right|^2=\left|\overline{OM}\right|^2+\left|\overline{OC}\right|^2-2\overline{OM}\cdot\overline{OC}$.

Суммируем

$$\left|\overline{AM}\right|^2+\left|\overline{BM}\right|^2+\left|\overline{CM}\right|^2=6R^2-6R^2(\cos\varphi+\cos(100+\varphi)+\cos(120-\varphi))=$$

$=6R^2-6R^2\left(\cos\varphi+2\cos120^0\cos\varphi\right)=6R^2=const$, что и требовалось показать.

Пример 2. Три некомпланарных вектора $\bar a,\bar b$ и $\bar c$ приведены к общему началу. Показать, что плоскость, проходящая через концы этих векторов, перпендикулярна вектору $\bar m=\bar a\times\bar b+\bar b\times\bar c+\bar c\times\bar a$.

Решение. Образуем векторы, лежащие в плоскости π $\bar a-\bar c$ и $\bar a-\bar b$. Далее образуем вектор, перпендикулярный данной плоскости $\bar n=(\bar a-\bar c)\times(\bar a-\bar b)=-\bar c\times\bar a-\bar a\times\bar b+\bar c\times\bar b=-\bar c\times\bar a-\bar a\times\bar b-\bar b\times\bar c=-\bar m$, что и требовалось показать.

Пример 3. Даны векторы $\overline{a}$ и $\overline{n}$, причем дано, что $(\overline{a},\overline{n})=0$ и $|\overline{n}|=1$. Найти вектор $\overline{b}$ образованный из $\overline{a}$ поворотом на угол φ вокруг оси $\overline{n}$.

Решение. Введем новый базис $\overline{e}_1=\dfrac{\overline{a}}{|\overline{a}|}$ и $\overline{e}_2=\dfrac{[\overline{n},\overline{a}]}{|\overline{a}|}$.

Разложим вектор $\overline{b}$ в этом базисе $\overline{b}=\overline{e}_1 b_1+\overline{e}_2 b_2$, где $b_1=|\overline{a}|\cos\varphi$ и $b_2=|\overline{a}|\sin\varphi$. Окончательно получаем $\overline{b}=\overline{a}\cos\varphi+[\overline{n},\overline{a}]\sin\varphi$.

Пример 4. Решить уравнение $\overline{x}=\left[\overline{a},\left(\overline{x}+\overline{b}\right)\right]$.

Решение. Умножим векторное уравнение векторно на $\overline{a}$. Получаем $[\overline{a},\overline{x}]=-\overline{x}a^2+\left[\overline{a},\left[\overline{a},\overline{b}\right]\right]$. Из исходного уравнения следует $[\overline{a},\overline{x}]=\overline{x}-\left[\overline{a},\overline{b}\right]$. Окончательно получаем $\overline{x}=-\overline{x}a^2+\left[\overline{a},\left[\overline{a},\overline{b}\right]\right]+\left[\overline{a},\overline{b}\right]$.

Ответ: $\overline{x}=\dfrac{\left[\overline{a},\left(\overline{b}+\left[\overline{a},\overline{b}\right]\right)\right]}{1+a^2}$.

5. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ФОРМЫ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

Рассмотрим вопрос об аналитическом представлении линии или некоторой поверхности. Линия задается в аналитическом виде в виде уравнения или системы уравнений, которые уже можно исследовать методами алгебры или математического анализа с целью выяснения её характерных особенностей и представлению её в графическом виде. Вид уравнения линии зависит от выбора системы координат и в некоторых из них существенно упрощается. Очевидно, что уравнение линии – это некоторая функция, определяющая связь неизвестных переменных *x* и *y* на плоскости или *x, y* и *z* в пространстве. Наиболее наглядной для описания линии является, декартова система координат, в которой в основном и будем работать.

Рассмотрим линию на плоскости. Линия - это геометрическое место точек, координаты которых удовлетворяют уравнению

$$\Phi(x,y)=0. \tag{5.1}$$

Так уравнение $x^2+y^2=R^2$ есть окружность радиуса *R (Рис. 5.1).* Тогда как уравнение $x^2+y^2=-R^2$ не удовлетворяет ни одной точке плоскости *XOY*.

Линия называется алгебраической, если $\Phi(x,y)$ есть алгебраический полином. Алгебраическая форма имеет вид

$$\Phi(x,y)=\sum_{k,l}^{m,n}\alpha_{kl}x^k y^l \ ,k=\overline{0,m}; \qquad (5.2)$$

$l=\overline{0,n}$, где α_{kl}- действительные числа. Например, уравнение окружности определяют такие коэффициенты $\alpha_{02}=1,\ \alpha_{20}=1,\ \alpha_{00}=-R^2,\ \alpha_{10}=0,\ \alpha_{01}=0,...,$ а остальные равны нулю.

Все линии, которые нельзя представить в виде алгебраического полинома называются трансцендентными. Например, $y=tg^2x,\quad y^2=\lg^3 x$ и так далее.

Уравнение линии может быть задано в явном виде, когда уравнение разрешается относительно $y=f(x)$ или в неявном виде $\Phi(x,y)=0$.

Например. Уравнение кубики $y^2=(x+1)(x^2+\varepsilon)$ представлено в явном виде и изображено на рисунке 5.2.

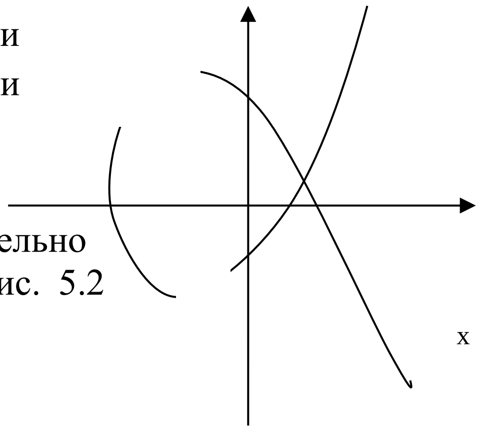


Рис. 5.2

Уравнение линии можно задать параметрически в виде системы уравнений относительно параметра t :

$$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}, \qquad (5.3)$$

исключая t можно вновь перейти к виду $\Phi(x,y)=0$.

Например. Уравнение окружности можно представить в виде

$$\begin{cases} x=R\cos t \\ y=R\sin t \end{cases},\ \text{где}\ 0\le t<2\pi .$$

Алгебраическая форма первого порядка от двух переменных $\bar{x}=\{x,y\}$ нечто иное, как уравнение прямой линии на плоскости

$$\Phi=(\bar{n},\bar{x})=0. \qquad (5.4)$$

Алгебраическая форма первого порядка от трех переменных $\bar{x}=\{x,y,z\}$

$$\Phi(x,y,z)=(\bar{n},\bar{x})=0 \qquad (5.5)$$

описывает плоскость в пространстве.

Алгебраическая форма второго порядка является билинейной формой переменной $\bar{x}=\{x,y\}$

$$\Phi=(\bar{x},A\bar{x})=0 \qquad (5.6)$$

и представляет линии второго порядка на плоскости. Так как эти линии являются сечениями конуса, то их называют «кониками».

Алгебраическая форма второго порядка (5.6.) от переменной $\bar{x} = \{x, y, z\}$ описывает канонические поверхности в пространстве, например, такие как однополостной гиперболоид, эллипсоид и другие.

Алгебраические формы третьего порядка от двух переменных описывают линии называемые «кубиками», которая характеризуются наличием угловых точек, точек возврата (ласточкин хвост) и петель.

Алгебраические формы четвертого порядка от двух переменных описывают линии называемые «квадриками» и так далее.

Зачастую в задачах требуется найти точки пересечения линий. Для этого необходимо решать систему уравнений этих линий совместно:

$$\begin{cases} \Phi_1(x, y) = 0 \\ \Phi_2(x, y) = 0 \end{cases} \tag{5.7}$$

Уравнение поверхности в пространстве задается в виде

$$\Phi(x, y, z) = 0 \tag{5.8}$$

где $\Phi = \sum\limits_{ijk} \alpha_{ijk} x^i y^j z^k$ - алгебраический полином. Поверхность – это геометрическое место точек, координаты которых удовлетворяют уравнению $\Phi(x, y, z) = 0$.

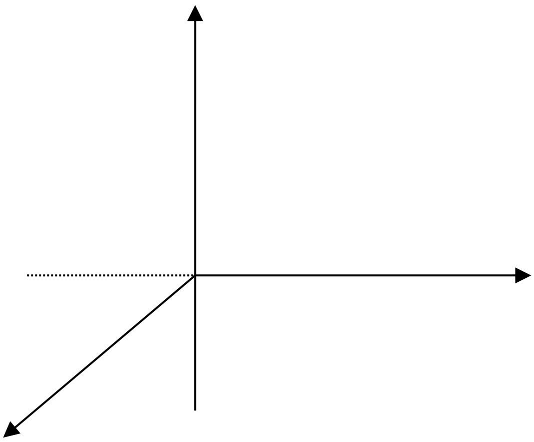


Рис.5.3

Например, уравнение $x^2 + y^2 + (z - c)^2 = R^2$ описывает поверхность сферы, смещенной по оси *OZ* на величину *c*.

На рисунке 5.3 положено $c = R$. Уравнение линии в пространстве задаётся, как пересечение двух поверхностей и решается система двух уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} \Phi_1(x, y, z) = 0 \\ \Phi_2(x, y, z) = 0 \end{cases}, \tag{5.9}$$

которая, описывает бесконечное множество решений, в совокупности изображающих линию. Точки пересечения трех поверхностей могут быть определены из решения совместной системы трех уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} \Phi_1(x, y, z) = 0 \\ \Phi_2(x, y, z) = 0 \\ \Phi_3(x, y, z) = 0 \end{cases}. \tag{5.10}$$

5.1. Алгебраическая форма первого порядка. Прямая на плоскости

Итак, прямая линия характеризуется тем, что в функцию $\Phi(x,y)$ неизвестные входят в первой степени $\Phi(x,y)=\alpha_{10}x+\alpha_{01}y+\alpha_{00}=0=(\bar{n},\bar{x})$, где обозначим $\alpha_{10}=A,\ \ \alpha_{01}=B,\ \ \alpha_{00}=C.$

Таким образом, общее уравнение прямой на плоскости имеет вид

$$Ax+By+C=0\,. \qquad \text{I} \qquad (5.11)$$

Если прямая проходит через заданную точку $M_0(x_0,y_0)$, то должно выполняться $Ax_0+By_0+C\equiv 0$. Если вычесть эти уравнения друг из друга, то получим уравнение прямой проходящей через заданную точку M_0:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0 \qquad \text{II} \qquad (5.12)$$

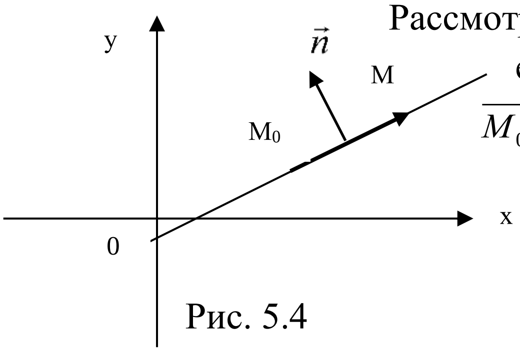


Рис. 5.4

Рассмотрим геометрическую интерпретацию коэффициентов A и B. Определим текущий вектор $\overrightarrow{M_0M}$: $\overrightarrow{M_0M}=\{x-x_0;y-y_0\}\ =\ \bar{i}(x-x_0)+\bar{j}(y-y_0)$. Введем вектор нормальный к вектору $\overrightarrow{M_0M}$

$$\vec{n}=\{A;B\}=\bar{i}A+\bar{j}B\,.$$

Очевидно, что $$\left(\overrightarrow{M_0M},\vec{n}\right)=0\,. \qquad (5.13)$$

Это уравнение прямой линии в векторной форме.

Отсюда следует ранее полученное уравнение прямой линии

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0$$

Таким образом, коэффициенты A и B входящие в уравнение прямой являются компонентами вектора перпендикулярного к этой прямой.

Приведем частные случаи уравнения прямой линии.

1. $C=0,\ Ax+By=0\ \Rightarrow y=kx$
2. $A=0,\ By+C=0\ \Rightarrow y=b$
3. $B=0,\ Ax+C=0\ \Rightarrow x=a$
4. $A=C=0,\ y=0$ это ось OX
5. $B=C=0,\ x=0$ это ось OY

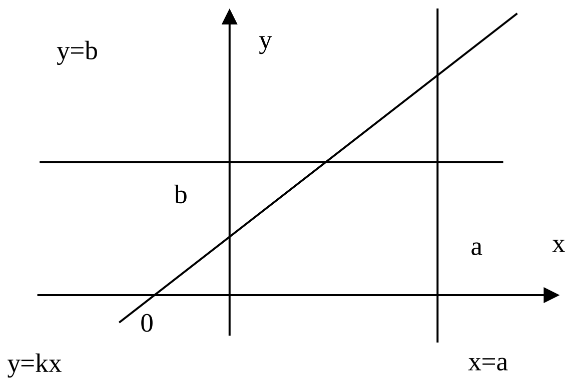


Рис. 5.5

Рассмотрим и другие формы записи прямой удобные для решения различных практических задач. Действительно, в зависимости от постановки задачи простота их решения зачастую зависит от того, какой формой записи прямой воспользовались.

Уравнение прямой в отрезках. Поставим задачу об определении площади треугольника отсекаемого прямой от координатных осей OX и OY. Из общего уравнения прямой перейдем к виду $\dfrac{x}{-\dfrac{C}{B}}+\dfrac{y}{-\dfrac{C}{A}}=1$ и обозначим

$-\dfrac{C}{A}=a,\ -\dfrac{C}{B}=b$.

Получим $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$ IY (5.14)

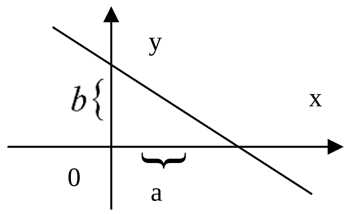


Рис. 5.6

Каноническое уравнение прямой. Задана точка, через которую проходит прямая и вектор вдоль прямой $\bar{q}=\{l;m\}$. Тогда, поскольку вектор $\overrightarrow{M_0M}=\{x-x_0;y-y_0\}$ коллинеарен $\bar{q}$, то их компоненты пропорциональны.

Отсюда следует

$$\frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m} \quad \text{V} \tag{5.15}$$

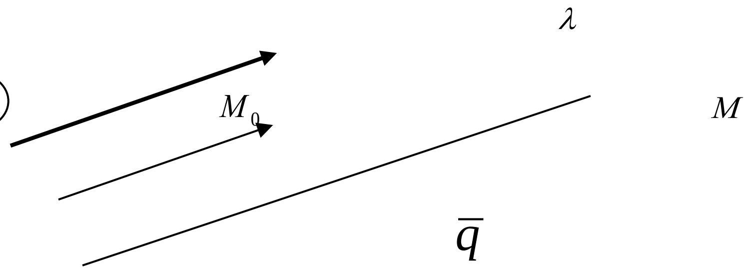


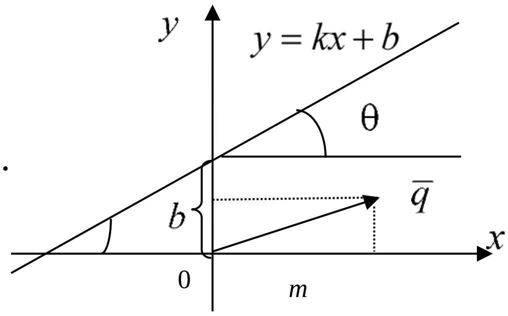
Рис. 5.7

Уравнение прямой проходящей через две точки $M_1(x_1,y_1)$ и $M_2(x_2,y_2)$. Тогда вектор $\overrightarrow{M_1M_2}$ коллинеарен вектору $\overrightarrow{M_1M}$ и тогда очевидно выполняется $\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}$ VI (5.16)

Параметрическое уравнение прямой. Из канонического вида следует

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=t \ \Rightarrow \begin{cases} x=x_0+lt \\ y=y_0+mt \end{cases},\quad a\le t\le b \quad \text{VII} \tag{5.17}$$

Заметим, что это уравнение в физике называется уравнением траектории физической точки равномерно двигающейся по прямой со скоростью $v=\sqrt{l^2+m^2}$, здесь t – время, а x и y координаты точки.



Прямая с угловым коэффициентом.
Из канонического вида получаем

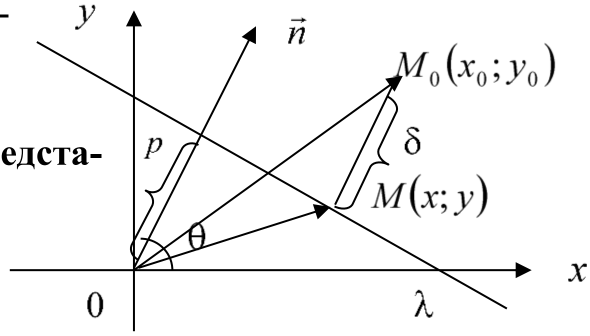
$$y=kx+b, \quad \text{VIII} \qquad (5.18)$$

где $k=\dfrac{m}{l}$, $b=y_0-\dfrac{m}{l}x_0$ при $x=0$ $y=b$,

$\bar{q}=\{l;m\}$, $l=|\bar{q}|\cos\theta$, $m=|\bar{q}|\sin\theta$ $k=\dfrac{m}{l}=tg\theta$.

Рис. 5.8

Нормированное уравнение прямой. Это уравнение очень удобно использовать для задач, где надо определять расстояние от точки до прямой. Введем единичный вектор перпендикулярный прямой, который имеет составляющие $\vec{n}=\{\cos\theta,\sin\theta\}$. Из рисунка видно, что $\overrightarrow{OM}\cdot\vec{n}=np_{\lambda}\overrightarrow{OM}=p$.



Тогда уравнение прямой можно представить в виде:

$x\cos\theta+y\sin\theta-p=0$. IX

(5.19)

Поставим задачу найти наикратчайшее расстояние от точки

Рис. 5.9

$M_0(x_0,y_0)$ до прямой заданной в форме IX .

Из рисунка следует, что $\vec{n}\cdot\overrightarrow{OM_0}=p+\delta$

или $\qquad x\cos\theta+y\sin\theta=p+\delta \qquad$ (5.20)

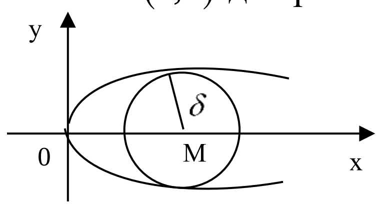
Отсюда следует $\delta=x_0\cos\theta+y_0\sin\theta-p$ удобное правило нахождения отклонения δ точки $M_0(x_0,y_0)$ до данной прямой, и не лежащей на этой прямой. Если получаем отрицательное значение, то это значит, что начало координат и точка M_0 лежат по одну сторону от прямой.

*Пример***.** Задана прямая линия $3x+4y+1=0$. Найти наименьшее расстояние от точки $M_0(1;2)$ до этой прямой.

*Решение***.** Единичный вектор перпендикулярный прямой $\vec{n}=\left\{\dfrac{3}{5};\dfrac{4}{5}\right\}$.

Тогда $\delta=\dfrac{3}{5}x_0+\dfrac{4}{5}y_0+\dfrac{1}{5}=\dfrac{3}{5}+\dfrac{8}{5}+\dfrac{1}{5}=2{,}4$ $\qquad$ *Ответ*: $\delta=2{,}4$.

Пример. Найти наименьшее расстояние от точки $M(4;0)$ до кривой $y^2 = 2x$



Решение. Впишем окружность

Решаем уравнение $\begin{cases} y^2 = 2x \\ (x-4)^2 + y^2 = \delta^2 \end{cases}$

Ответ: $\delta = \sqrt{7} \approx 2{,}6$.

Рис. 5.10

Получим условия параллельности и перпендикулярности прямых линий. Пусть заданы две прямые

$L_1:\ A_1x + B_1y + C_1 = 0, \vec{n}_1 = \{A_1; B_1\}$

$L_2: A_2x + B_2y + C_2 = 0, \vec{n}_2 = \{A_2; B_2\}$. Тогда следует

$$\cos\theta = \frac{\bar{n}_1\bar{n}_2}{|\bar{n}_1||\bar{n}_2|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}.$$

Получаем условие перпендикулярности: $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$ (5.21)

и условие параллельности: $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2}$ (5.22)

$$k = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_2k_1}. \tag{5.23}$$

Отсюда условие параллельности определяется как

$$k_2 = k_1, \tag{5.24}$$

а условие перпендикулярности при $\theta = \frac{\pi}{2}$ $(k = \infty)$ есть $1 + k_1k_2 = 0$. Тогда получаем связь угловых коэффициентов перпендикулярных прямых

$$k_2 = -\frac{1}{k_1} \tag{5.25}$$

*Пример***.** Найти длину высоты треугольника с вершинами $A(1;2)$, $B(1;5)$, $C(3;4)$, опущенную из точки A на сторону BC.

Решение 1. Получим уравнение прямой линии

$BC:\ \dfrac{x - x_B}{x_C - x_B} = \dfrac{y - y_B}{y_C - y_B} \Rightarrow \dfrac{x-1}{3-1} = \dfrac{y-5}{4-5} \Rightarrow x + 2y - 11 = 0$.

Уравнение прямой перпендикулярной BC и проходящей через точку $A(1;2)$ есть $-y = 2x$, так как $k_{BC} = -\dfrac{1}{2}$, то $k_{AD} = 2$.

Наконец найдем точку пересечения AD и BC $\begin{cases} x + 2y = 11 \\ 2x - y = 0 \end{cases} \Rightarrow D\left(\dfrac{11}{5}; \dfrac{22}{5}\right)$.

Таким образом, получаем

$$AD = \sqrt{(x_D - x_A)^2 + (y_D - y_A)^2} = \sqrt{(2{,}2-1)^2 + (4{,}4-2)^2} \approx 2{,}5$$

Решение 2. Составим нормированное уравнение прямой линии *BC*

$$\frac{x+2y-11}{\sqrt{5}}=0.$$

Подставляем в него значения координаты точки *A* и по правилу 5.20. сформулированному выше получаем искомое расстояние

$$\delta=\frac{x_A+2y_A-11}{\sqrt{5}}=\frac{1+4-11}{\sqrt{5}}=\approx-2{,}5.$$

Знак говорит о том, что точка *A* лежит вместе с прямой по одну сторону от начала координат.

Пример. Найти наименьшее расстояние от параболы $y=x^2$ до прямой $x-y-2=0$.

Решение. Перейдем к нормированному уравнению прямой $\frac{x-y-2}{\sqrt{2}}=0;\ \ p=-\frac{2}{\sqrt{2}}=-\sqrt{2}$.

Искомая точка лежит на параболе $y=x^2$,

тогда $\delta(x)=\frac{x-x^2-2}{\sqrt{2}}$, Исследуем на экстремум $\delta'(x)=\frac{1-2x}{\sqrt{2}}=0$. Получим $x=\frac{1}{2}$ и $y=\frac{1}{4}$.

$$\delta=\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-2}{\sqrt{2}}=-2{,}5$$

5.2. Уравнение плоскости в пространстве

Общее алгебраическое уравнение, описывающее некоторую поверхность в пространстве, имеет вид Ф(x,y,z) = 0,

где $\Phi(x,y,z)=\sum_{k,l,m}\alpha_{k\,l\,m}x^k y^l z^m$ - алгебраический полином по степеням переменных x, y и z. В зависимости от порядка полинома получаются различные поверхности в пространстве. Плоскость описывает полином первого порядка с коэффициентами $\alpha_{000}=D,\ \alpha_{100}=A,\ \alpha_{010}=B,\ \alpha_{001}=C$. Таким образом, уравнение плоскости в пространстве имеет общий вид:

$$Ax+By+Cz+D=0 \quad \text{I} \qquad (5.26)$$

Найдем уравнение плоскости, проходящей через заданную точку $M_0(x_0;y_0;z_0)$. Так как по условию плоскость содержит точку M_0, то выполняется $Ax_0+By_0+Cz_0+D=0$. Вычтем это выражение из общего вида (5.26). Получаем уравнение плоскости, проходящей через заданную точку M_0

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0 \qquad (5.27)$$

Рассмотрим геометрическую интерпретацию данного уравнения. Пусть имеется некоторая плоскость π в пространстве. На рисунке эта плоскость представлена в декартовой системе координат. Введем вектор

$$\vec{n}=\bar{i}A+\bar{j}B+\bar{k}C$$

$$\overline{M_0M}=\bar{i}(x-x_0)+\bar{j}(y-y_0)+\bar{k}(z-z_0)$$

перпендикулярный этой плоскости.

Определим так же вектор $\overrightarrow{M_0M}$ от заданной точки на плоскости $M_0(x_0;y_0;z_0)$ до текущей точки $M(x;y;z)$ тоже принадлежащей этой плоскости.

Так как вектор перпендикулярен плоскости, то он будет перпендикулярен любому вектору лежащему в этой плоскости. Поэтому должно выполняться $\left(\vec{n},\overrightarrow{M_0M}\right)=0$ IV (5.28)

Отсюда получаем уравнение плоскости $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$. Данное выражение является векторным уравнением плоскости. Таким образом числа $A,$ B и C являются компонентами вектора перпендикулярного данной плоскости. Вектор $\vec{n}=\{A;B;C\}$ называют нормальным вектором плоскости.

Приведем частные случаи неполных уравнений плоскости:

1. $A\neq 0,\ B\neq 0,\ C\neq 0,\ \mathrm{D}=0$ - плоскость, проходящая через начало координат.
2. $A\neq 0,\ By+Cz+D=0$ - уравнение плоскости параллельной оси *OX*., если же и $D=0$, то это совокупность плоскостей содержащих ось *OX.*
3. $B=0,\ Ax+Cz+D=0$

Получим ***уравнение плоскости в отрезках***. Из общего вида уравнения плоскости после элементарных преобразований получаем

$$\frac{x}{-\frac{D}{A}}+\frac{y}{-\frac{D}{B}}+\frac{z}{-\frac{D}{C}}=1 \Rightarrow \frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1\ . \quad \text{IV} \qquad (5.29)$$

Видно, что плоскость пересекает оси координат в точках

$A(a,o,o),\ B(o,b,o),\ C(o,o,c).$

Обьем пирамиды образованной плоскостью с координатными плоскостями легко определяется как $V=\frac{1}{6}a\cdot b\cdot c$.

Рассмотрим задачу о нахождении угла между двумя заданными плоскостями. Каждая плоскость характеризуется нормальным вектором $\bar{n}$.

Пересечение плоскостей образует прямую в пространстве

π_1

$$\pi_1:\ A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$$

$$\pi_2:A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\ .$$

Тогда угол между данными плоскостями будет определяться углом между нормальными векторами плоскостей $\bar{n}_1$ и $\bar{n}_2$

$$\cos\varphi = \frac{(\bar{n}_1, \bar{n}_2)}{|\bar{n}_1||\bar{n}_2|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}. \qquad (5.30)$$

Для $\varphi = \frac{\pi}{2}$, условием перпендикулярности плоскостей будет:

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0. \qquad (5.31)$$

Для $\varphi = 0$, условием параллельности плоскостей будет:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \qquad (5.32)$$

соответствующее условию коллинеарности векторов $\bar{n}_1$ и $\bar{n}_2$.

Получим ***уравнение плоскости проходящей через три точки,*** не лежащие на_одной прямой. Пусть имеем три различные точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2 z_2)$ и $M_3(x_3; y_3 z_3)$. Составим векторы $\overline{M_1M_2}$, $\overline{M_1M_2}$, $\overline{M_1M}$,где $\overline{M_1M} = \{(x - x_1); (y - y_1); (z - z_1)\}$, а $M(x; y; z)$ - текущая точка на плоскости. Так как все эти векторы находятся в одной плоскости по построению, то они компланарны и их смешанное произведение должно равняться нулю $\left(\overline{M_1M}, \left[\overline{M_1M_2}, \overline{M_1M_3}\right]\right) = 0$.

Получаем
$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x & y_2 - y & z_2 - z \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0 \qquad (5.33)$$

или $\quad A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0,$

где $A = \begin{vmatrix} y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix}$, $B = -\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix}$ $C = +\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}$.

Заметим, что если три точки лежат на одной прямой, то две последние строчки в определителе пропорциональны и он тождественно равен нулю, то есть уравнение плоскости не определяется.

Получим нормированное уравнение плоскости. Выразим нормальный вектор плоскости через направляющие косинусы $\bar{n} = \{\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma\}$, то есть сделаем его единичным $|\bar{n}| = 1$.

Образуем радиус вектор $\overline{OM} = \{x, y, z\}$, где точка M лежит на плоскости π. Тогда непосредственно из рисунка видно, что $(\bar{n}, \overline{OM}) = p$, где p наикратчайшее расстояние от начала координат до плоскости π. Получаем искомое уравнение

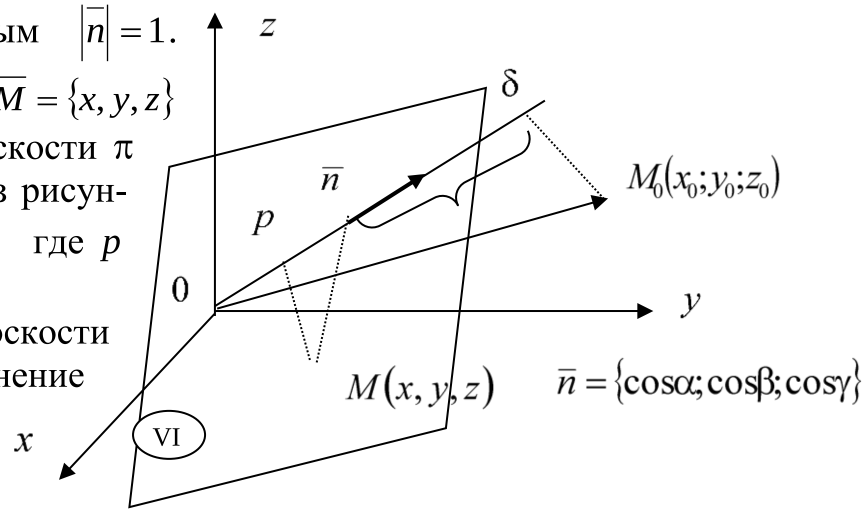


Рис. 5.24

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0 \qquad (5.34)$$

Поставим задачу определить наименьшее расстояние от заданной плоскости до некоторой заданной точки $M_0(x_0;y_0;z_0)$. лежащей вне плоскости. Из рисунка следует $\left(\bar{n},\overline{OM_0}\right)=p+\delta$

Отсюда получаем правило нахождения наименьшего расстояния точки до плоскости $\qquad x_0\cos\alpha+y_0\cos\beta+z_0\cos\gamma-p=\delta \qquad (5.35)$

Таким образом, для получения величины отклонения δ точки от плоскости следует в левую часть нормированного уравнения подставить координаты точки. Заметим, что если $\delta>0$, то точку M_0 от начала координат отделяет плоскость. Если же $\delta<0$, то они находятся по одну сторону от плоскости.

Пример. Задана плоскость $3x+4y+12z+5=0$ и точка $M_0(-1;0;2)$.

Найти наикратчайшее расстояние до плоскости от этой точки.

Решение. Переходим к нормированному виду плоскости

$$\bar{n}=\frac{\overline{N}}{\left|\overline{N}\right|}=\frac{3\bar{i}+4\bar{j}+12\bar{k}}{\sqrt{9+16+144}}=\frac{3}{13}\bar{i}+\frac{4}{13}\bar{j}+\frac{12}{13}\bar{k},\ \ \cos\alpha=\frac{3}{13},\cos\beta=\frac{4}{13},\cos\gamma=\frac{12}{13},$$

$$\delta=\frac{3}{13}\cdot(-1)+\frac{4}{3}\cdot(0)+\frac{12}{13}\cdot 2+\frac{5}{13}=2. \qquad \textit{Ответ}:\ \delta=2.$$

5.3. Прямая линия в пространстве

Существует четыре способа задания прямой линии в пространстве R_3.

Пересечением двух плоскостей

$$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{cases}. \quad \text{I} \qquad (5.36)$$

В этом случае имеем два уравнения с тремя неизвестными. Получается бесконечное множество решений,т.е.

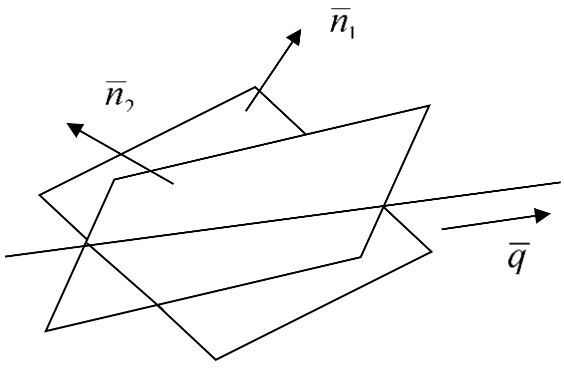


Рис. 5.25

решение не определено. Исследуем расширенную матрицу системы M_1 M_1

$$=\begin{pmatrix}A_1 & B_1 & C_1 & -D_1\\ A_2 & B_2 & C_2 & -D_2\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}, \quad RgM_1=2,\ \ RgM=2,\ \ \bar{x}=\begin{Bmatrix}x\\ y\\ z\end{Bmatrix}, \quad n=2,\ m=3.$$ Совместное решение дает уравнение прямой в пространстве.

Если плоскости параллельны, то $\overline{N_1}=\lambda\overline{N_2}$ и $\left(\begin{array}{ccc|c}A_1 & B_1 & C_1 & -D_1\\ 0 & 0 & 0 & -D_2+\lambda D_1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$;

$RgM_1=2,\ \ RgM=1$. Уравнения не совместны, решения нет.

Каноническое уравнение прямой. Пусть точка $M_0(x_0,y_0,z_0)$ лежит на прямой, текущая точка $M(x;y;z)$ также лежит на прямой. Образуем вектор

$\overline{M_0M} = \{x - x_0; y - y_0; z - z_0\}$. Если дан некоторый вектор $\bar{q} = \{l; m; n\}$ параллельный данной прямой, то эти вектора колинеарны, поэтому имеем

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n} \quad \text{II} \tag{5.37}$$

Причем вектор $\bar{q}$ можно образовать из векторов $\bar{n}_1$ и $\bar{n}_2$ с помощью векторного произведения $\bar{q} = [\bar{n}_1, \bar{n}_2]$. Заметим, что если, например $l = 0$, то поскольку на ноль делить нельзя, то уравнение данной прямой записывается в следующем виде $\begin{cases} \dfrac{y - y_0}{m} = \dfrac{z - z_0}{n} \\ x = x_0 \end{cases}$

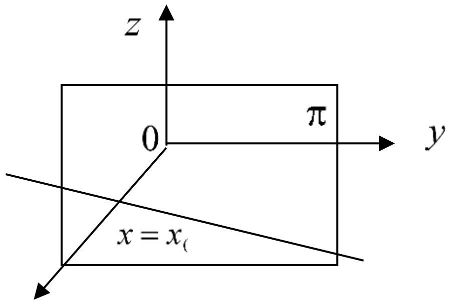


Рис. 5.26

Уравнение прямой, проходящей через две точки. Образуем два вектора из заданных точек $M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$ и точки $M(x; y; z)$ текущей на прямой. Так как вектора $\overline{M_1M_2}$ и $\overline{M_1M}$ колинеарны, то получаем

$$\overline{M_1M_2} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}$$

$$\overline{M_1M} = \{x - x_1; y - y_1; z - z_1\} \text{ и}$$

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} \quad \text{Ш} \qquad (5.38.)$$

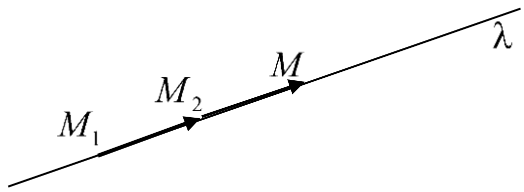


Рис. 5.27

Пример. Даны координаты вершин пирамиды $A_1(3;5;4)$, $A_2(8;7;4)$, $A_3(5;10;4)$ и $A_4(4;7;8)$. Найти уравнение прямой A_1A_2, уравнение плоскости $A_1A_2A_3$, уравнение высоты опущенной из A_4 на грань $A_1A_2A_3$. Сделать чертеж.

Решение. Уравнение прямой A_1A_2 находим с помощью формулы (5.38)

$$A_1A_2 : \frac{x - 3}{5} = \frac{y - 5}{2} = \frac{z - 4}{3}.$$

Уравнение плоскости $A_1A_2A_3$ находим с помощью формулы (5.33)

$$\begin{vmatrix} x - 3 & y - 5 & z - 4 \\ 5 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 5 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -5(x - 3) - 19(y - 5) + 21(z - 4) = 0.$$

Уравнение плоскости $A_1A_2A_3$ имеет вид: $-5(x - 3) - 19(y - 5) + 21(z - 4) = 0$. Здесь $\bar{N} = \{-5; -19; 21\}$. Уравнение высоты A_4M определяем как $\dfrac{x - 4}{-5} = \dfrac{y - 7}{-19} = \dfrac{z - 8}{21}$.

Параметрическое задание кривой. Непосредственно из канонической формы прямой следует $\dfrac{x - x_0}{l} = \dfrac{y - y_0}{m} = \dfrac{z - z_0}{n} = t$, где t некоторый параметр меняющийся произвольно. Получаем систему

$$\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt \end{cases} \qquad \text{IV} \qquad (5.39)$$

Если представить $S = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ как путь, вектор скорости как $\bar{V} = \bar{i}l + \bar{j}m + \bar{k}n$ и t –как время, тогда данная система описывает равномерное движение материальной точки по прямой в пространстве со скоростью $V = \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}$.

Рассмотрим задачу о вычислении величины угла между заданными прямыми. Прямые характеризуются направляющими векторами $\bar{q}_1$ и $\bar{q}_2$.

$$L_1: \ \bar{q}_1 = \{l_1; m_1; n_1\}$$

$$L_2: \ \bar{q}_2 = \{l_2; m_2 n_2\}$$

Тогда $\cos\varphi = \dfrac{(\bar{q}_1, \bar{q}_2)}{|\bar{q}_1||\bar{q}_2|} = \dfrac{l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2}\sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}}$ (5.40.)

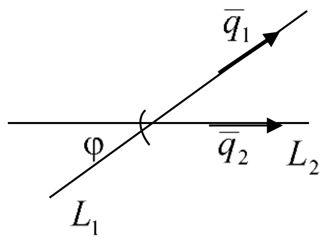


Рис. 5.28

Условие перпендикулярности прямых: $l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0$. (5.41)

Условие параллельности прямых: $\dfrac{l_1}{l_2} = \dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{n_1}{n_2}$. (5.42)

Получим так же условие принадлежности двух прямых одной плоскости. Две прямые в пространстве могут пересекаться, скрещиваться и быть параллельными. Пусть прямые пересекаются, тогда через них можно провести одну плоскость. Пусть $M_1(x_1; y_1; z_1)$ на прямой L_1, точка $M_2(x_2; y_2; z_2)$ на прямой L_2. Тогда три вектора $\overline{M_1 M_2}$, $\bar{q}_1$ и $\bar{q}_2$ будут компланарны, и условие принадлежности двух прямых плоскости будет иметь вид :

$$\left(\overline{M_1 M_2}, [\bar{q}_1, \bar{q}_2]\right) = 0 \text{ или}$$

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0. \quad (5.43)$$

В заключение этого параграфа рассмотрим типовые задачи в приложении плоскости и прямой в пространстве и дадим некоторые алгоритмы решений.

1. Даны три плоскости. Найти точку их пересечения. Решаем систему $\begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 z = -D_1 \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z = -D_2 \\ A_3 x + B_3 y + C_3 z = -D_3 \end{cases}$ трех уравнений с тремя неизвестными. Если нет параллельных плоскостей, то получаем единственную точку пересечения.

2. Найти уравнение плоскостей, являющихся биссектрисными для данных двух пересекающихся плоскостей. На рисунке 5.30. представлен вид с торца пересекающихся плоскостей π_1 и π_2. Так как

точка на биссектрисной плоскости должна равноотстоять от данных плоскостей,

то используя формулу $\delta_1 = \delta_2$,

где $\delta_1 = x\cos\alpha_1 + y\cos\beta_1 + z\cos\gamma_1 - p_1$

и $\delta_2 = x\cos\alpha_2 + y\cos\beta_2 + z\cos\gamma_2 - p_2$,

получаем две биссектрисные плоскости

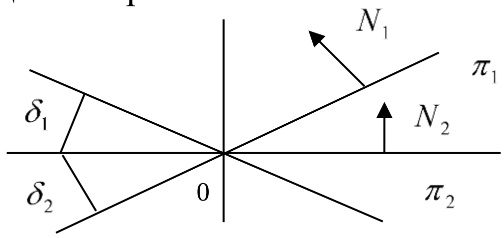
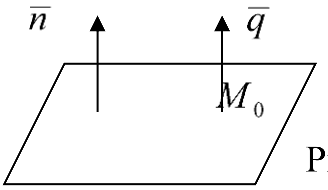


Рис. 5.30

$$x(\cos\alpha_1 \pm \cos\alpha_2) + y(\cos\beta_1 \pm \cos\beta_2) + z(\cos\gamma_1 \pm \cos\gamma_2) - (p_1 \pm p_2) = 0$$

3. Найти уравнение прямой проходящей через заданную точку M_0 и перпендикулярно плоскости, задаваемой нормальным вектором $\bar{n} = \{A; B; C\}$



Ответ: $\dfrac{x - x_0}{A} = \dfrac{y - y_0}{B} = \dfrac{z - z_0}{C}$.

Рис. 5.31

4. Найти точку M_1' симметричную точке M_1 относительно плоскости π. Схема решения такова.

Находим координаты точки M_0 пересечения прямой

$$\frac{x - x_1}{A} = \frac{y - y_1}{B} = \frac{z - z_1}{C}$$

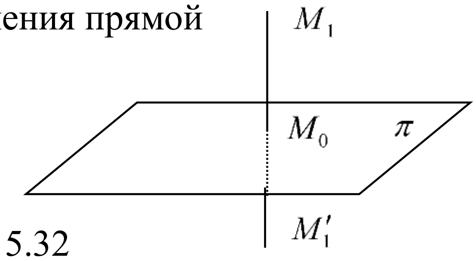


Рис. 5.32

с плоскостью $\pi : Ax + By + Cz = 0$. Затем из условий деления отрезка пополам $\dfrac{x_1 + x_1'}{2} = x_0$, $\dfrac{y_1 + y_1'}{2} = y_0$ и $\dfrac{z_1 + z_1'}{2} = z_0$ находим координаты точки M_1'

5. Найти точку M_1 симметричную точке M_1' относительно прямой. Находим плоскость перпендикулярную данной прямой $\bar{n} = \{l, m, n\}$ и содержащей в себе точки M_1 и M_1'. Находятся координаты точки пересечения прямой и плоскости, которая и является точкой отражения. Затем, так же как и в предыдущей задаче из условий деления отрезка пополам определяем искомую точку M_1'.

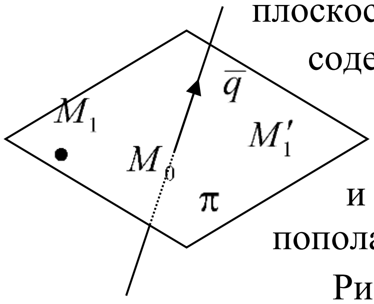
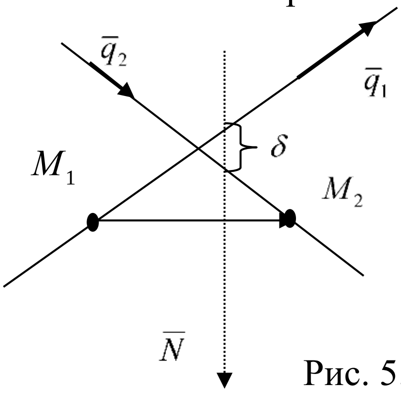


Рис. 5.33

6. Найти наименьшее расстояние между двумя скрещивающимися прямыми.



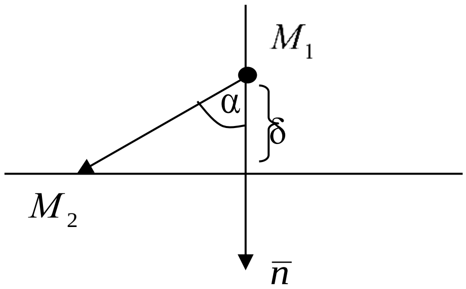


Рис. 5.34 Рис. 5.35

Решение. $\bar{N} = \bar{q}_1 \times \bar{q}_2$, $\overline{M_1M_2} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}$. Тогда находим

$$\delta = \frac{\left(\bar{N} \bullet \overline{M_1M_2}\right)}{\left|\bar{N}\right|\left|\overline{M_1M_2}\right|} \cdot \left|\overline{M_1M_2}\right|.$$

$$\text{Ответ: } \delta = \frac{\left(\bar{N}, \overline{M_1M_2}\right)}{\left|\bar{N}\right|}.$$

Используя данные алгоритмы решения, рассмотрим несколько конкретных задач.

Пример 1. Написать уравнение плоскости, параллельной плоскости $2x - 2y + z - 8 = 0$ и удаленной от нее на расстояние $d = 4$

Решение. Перейдем к нормированному виду $\frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}z - \frac{8}{3} = 0$

По правилу (5.35.) поиска отклонения плоскости от точки находим множество точек плоскостей удаленных на $d = 4$: $\frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}z - \frac{8}{3} = \pm 4$

$\pi_1 : \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}z - \frac{20}{3} = 0$. Ответ: $2x + 2y + z - 20 = 0$

$\pi_2 : \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}z + \frac{4}{3} = 0$ и $2x + 2y + z + 4 = 0$.

Пример 2. Найти расстояние от точки $M(2;-1;3)$ до прямой $\lambda : \frac{x+1}{3} = \frac{y+2}{4} = \frac{z-1}{5}$.

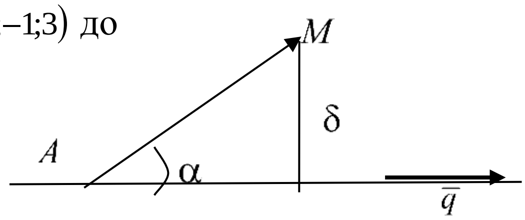


Рис. 5.36

*Решение***.** $A(-1;-2;1)$ точка на прямой $\overline{AM} = \{3;1;2\}$. Видно, что $\delta = \left|\overline{AM}\right| \sin\alpha$ образуется векторное произведение

$$\bar{q} \times \overline{AM} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = +3\left(\bar{i} + 3\bar{j} - 3\bar{k}\right), \qquad \sin\alpha = \frac{\left|\bar{q} \times \overline{AM}\right|}{\left|\bar{q}\right|\left|\overline{AM}\right|} = \frac{3\sqrt{19}}{\sqrt{50}\sqrt{14}}.$$

Ответ: $\delta = \sqrt{14} \cdot \dfrac{3\sqrt{19}}{\sqrt{50}\sqrt{14}} = 0{,}3\sqrt{38} = 1{,}85.$

Пример 3. Найти следы прямой $\dfrac{x-4}{1} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z}{-2}$ на координатных плоскостях.

Решение. Положим $z = 0$, тогда

$$\begin{cases} \dfrac{x-4}{1} = \dfrac{y-2}{2} \\ \dfrac{x-4}{1} = \dfrac{z}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x-4}{1} = \dfrac{y-2}{2} \\ x = 4 \end{cases},$$

откуда получаем $M_1(4;2;0)$

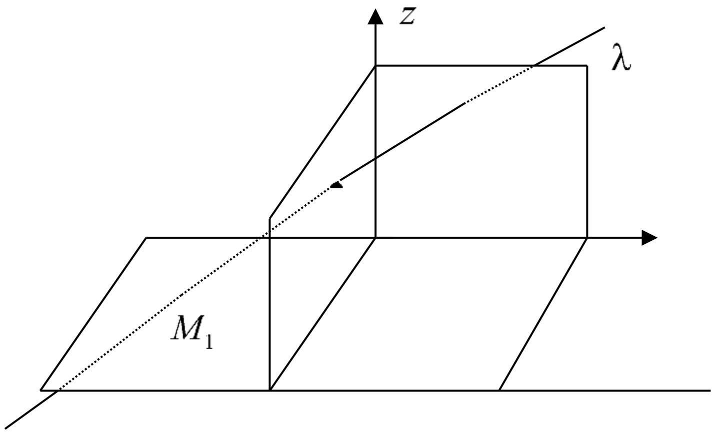


Рис. 5.37

Далее полагаем $x = 0$ и получаем $\begin{cases} -4 = \dfrac{y-2}{2} \\ -4 = \dfrac{z}{-2} \end{cases} \Rightarrow M_2(0;-6;8).$.

Полагаем $y = 0$, $\begin{cases} x - 4 = -1 \\ x - 4 = -\dfrac{7}{2} \end{cases} \Rightarrow M_3(3;0;2).$

Ответ: $\begin{matrix} M_1(4;2;0) \\ M_2(0;-6;8). \\ M_3(3;0;2) \end{matrix}$

Пример 4. Даны плоскости $3x + 4y + 2 = 0$ и $x + y + z - 1 = 0$. Найти одну из биссектрисных плоскостей.

Решение. Перейдем к нормированной записи данных плоскостей

$$\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y + \frac{2}{5} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{1}{\sqrt{3}}x + \frac{1}{\sqrt{3}}y + \frac{1}{\sqrt{3}}z - \frac{1}{\sqrt{3}} = 0.$$

Отсюда искомое уравнение есть: $\left(\dfrac{3}{5} - \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)x + \left(\dfrac{4}{5} - \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)y - \dfrac{z}{\sqrt{3}} + \left(\dfrac{2}{5} - \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right) = 0.$

*Пример 5***.** Составить уравнение круговой цилиндрической поверхности, если известно уравнение ее оси $\begin{cases} x = 7 + 3t \\ y = 1 + 4t \\ z = 3 + 2t \end{cases}$ и точка на поверхности $M_0(2;-1;0)$

Решение. $M_2(7;1;3)$. В плоскости $\pi: 3x + 4y + 2z + d = 0$, где $d = -2$ (определяется точкой M_0). Пересечение с цилиндрической поверхностью дает окружность $(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = R^2$

Найдем R и координаты x_1 и y_1

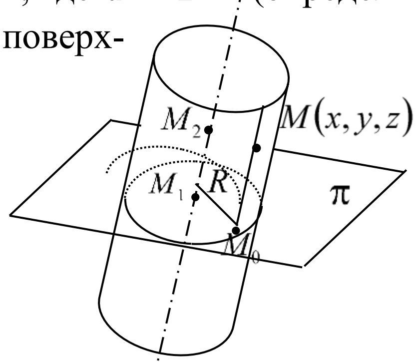


Рис. 5.38

$$\begin{cases} \dfrac{x-7}{3}=\dfrac{y-1}{4} \\ \dfrac{y-1}{4}=\dfrac{z-3}{2} \\ 3x+4y+2z-2=0 \end{cases} \Rightarrow A_1=\begin{pmatrix} 4 & -3 & 0 & 25 \\ 0 & 1 & -2 & -5 \\ 3 & 4 & 2 & 2 \end{pmatrix} \sim \propto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow M_1(4;-3;1).$$

Определяем радиус R $\quad R=\sqrt{(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2+(z_1-z_0)^2}=3$

Таким образом, $(x-4)^2+(y+3)^2=3^2$ есть уравнение окружности на плоскости π. Образующие цилиндрической поверхности проходят через точку M_0

$\begin{cases} x=x_0+3t \\ y=y_0+4t \\ z=2t \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} x_0=x-\dfrac{3}{2}z \\ y_0=y-2z \end{array}$. Тогда уравнение цилиндрической круговой поверхности будет иметь вид: $\left(x-\dfrac{3}{2}z-4\right)^2+(y-2z+3)^2=3^2$.

Пример 6. Доказать, что прямая $\begin{cases} x=3t-2 \\ y=-4t+1 \\ z=4t-5 \end{cases}$ параллельна плоскости $4x-3y-6z-5=0$.

Решение. $\begin{array}{l} \bar{q}=\{3;-4;4\} \\ \bar{n}=\{4;-3;-6\} \end{array}$, $\cos\varphi=\dfrac{\bar{n}\cdot\bar{q}}{|\bar{n}||\bar{q}|}=\dfrac{12+12-24}{\sqrt{41}\sqrt{59}}=0$.

Ответ: $\varphi=\dfrac{\pi}{2}$, плоскость параллельна прямой.

Пример 7. Перейти к каноническому виду прямой $\begin{cases} 3x+y-z+2=0 \\ x+2y-2z-3=0 \end{cases}$.

Решение. $\bar{q}=\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix}=5\bar{j}+5\bar{k}$. Находим точку на прямой. Полагая, что

$z=0$, $\begin{cases} 3x+y=-2 \\ x+2y=3 \end{cases}$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & -5 & -11 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0{,}6 \\ 0 & 1 & 1{,}2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x=0{,}6 \\ y=1{,}2 \end{cases}.\ M(0{,}6;1{,}2;0)$$

Ответ: $\begin{cases} x=0{,}6 \\ \dfrac{y-1{,}2}{5}=\dfrac{7}{5} \end{cases}$.

Пример 8. найти точку пересечения прямой $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z+1}{2}$ и плоскости $x+2y+3z-29=0$.

Решение. $\begin{cases} x-2y+2=0 \\ x-z-1=0 \\ x+2y+3z-29=0 \end{cases}$; $A_1=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 29 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 5 & 25 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 14 \end{array}\right) \sim$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 14 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right);$$ *Ответ*: $M(6;4;5)$.

Пример 9. Найти точку симметричную точке $M(1;2;-1)$ относительно плоскости $x-2y+z-1=0$.

Решение. Дано $\bar{q}=\{1;-2;1\}$, прямая проходящая через M перпендикулярно плоскости π (рис. 5.36.) имеет вид:

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z+1}{1}.$$

Найдем точку пересечения данной прямой и нашей плоскости

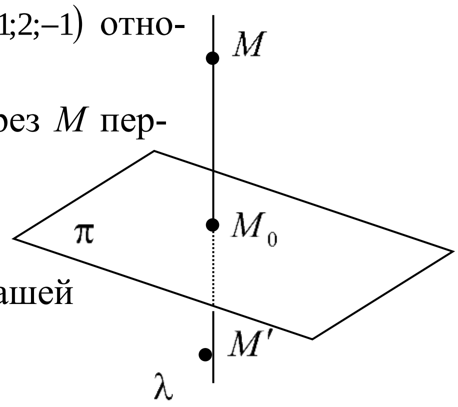


Рис. 5.39

$$\begin{cases} \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{-2} \\ \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{z+1}{1} \\ x-2y+z-1=0 \end{cases}; A_1=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & -1 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0{,}3 \\ 1 & 0 & 0 & 1{,}85 \\ 0 & 0 & 1 & -0{,}15 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} x_0=1{,}85 \\ y_0=0{,}3 \\ z_0=-0{,}15 \end{cases}.$$

Далее используем: $\begin{array}{ll} \dfrac{x+x'}{2}=x_0, & x'=2x_0-x_1=2{,}7 \\ \dfrac{y+y'}{2}=y_0, & y'=2y_0-y_1=-1{,}4 \\ \dfrac{z+z'}{2}=z_0, & z'=2z_0-z_1=0{,}7 \end{array}$. *Ответ*: $M'(2{,}7;-1{,}4;0{,}7)$.

6. ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Все понятия математики при всей их абстрактности, так как или иначе отражают действительность, так как были созданы для получения количественных соотношений определяющих какие-либо явления и процессы в природе. Одним из методов исследования природы является математическое моделирование.

Модель – это материальный или мысленно представляемый объект, который в процессе исследования замещает объект-оригинал, сохраняя его типичные свойства. С помощью модели можно проанализировать исследуемое явление и научиться прогнозировать (планировать) эти явления при других условиях или при других параметрах.

Математическая модель – это знаковая модель, приближенно описывающая явление, выраженное с помощью математических понятий и символов. На основе математических моделей вырабатывается оптимальное управление производственным процессом, и принимаются управляющие решения.

Из всего многообразия методов моделирования ограничимся рассмотрением метода математического программирования и, кроме того, ограничимся методом линейного программирования, который целиком опирается на методы линейной алгебры.

Математическое программирование – это область математики, разрабатывающая теорию и численные методы решения многомерных экстремальных задач с ограничениями.

Функцию, экстремальное значение которой надо найти называют ***целевой*** или показателем эффективности или критерием оптимальности. Экономические и физические возможности формализуются в виде систем ограничений. Математическая модель включает в себя целевую функцию, равенства и неравенства. Совокупность неизвестных величин $\bar{x} = \{x_1, x_2, ..., x_n\}^T$, действуя на которые систему ограничений и целевую функцию оптимизируют, называется ***планом задачи, вектором управления*** *или* ***стратегией.***

Значения $\bar{x}$ определяют область допустимых решений, из которых надо выбрать оптимальное. Постановка задачи линейного программирования для организации производственных процессов и некоторые методы решения (метод разрешающего множителя) принадлежат Л.В.Канторовичу, который за ряд работ в 30-е годы получил Нобелевскую премию. В 50-е годы исследование теории линейного программирования продолжил Дж. Данциг.

В настоящее время теория линейного программирования одна из самых востребованных в экономике, в производстве, в военном деле и во многих других областях человеческой деятельности.

6.1. Основная задача линейного программирования. Графический и матричный способы решения задач оптимизации

Рассмотрим одно из важнейших приложений линейной алгебры, а именно метод оптимизации. Основная задача линейного программирования формируется в виде m линейных алгебраических уравнений с n неизвестными x_i $\left(i = \overline{1, n}\right)$, причем $x_i \geq 0$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \leq b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \leq b_n \end{cases} \tag{6.1}$$

и линейной формы $$F(\bar{x}) = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \geq 0, \tag{6.2}$$

$\left(F(\bar{x})=\bar{c}\cdot\bar{x}\right)$, где $\bar{c}$ - вектор цены, $\bar{c}=\{c_1,c_2,...,c_n\}$.

Требуется среди всех неотрицательных решений данной системы выбрать такое, при которых форма $F(\bar{x})$ принимает наименьшее значение. Решение системы $\bar{x}=\{x_1,x_2,...,x_n\}^T$, которое минимизирует F, называется оптимальным.

Задача имеет смысл, когда система неравенств – ограничений совместна $(RgA=RgA_1)$. При $r=n=m$ решение единственно и не представляет интереса, так как оптимизировать нечего. Нас интересует случай, когда $n>r$ и $m>r$ и среди нескольких решений можно выбрать оптимальное.

Отметим, что можно решить задачу, как на максимум, так и на минимум. Для этого необходимо произвести замену целевой функции $\Phi(\bar{x})=-F(\bar{x})$. Отметим так же, что методы оптимизации с помощью производных здесь не применимы, так как, во-первых, $F(\bar{x})$ линейная функция, а, во-вторых, поиск решения в задаче линейного программирования идет на границе области допустимых решений, тогда как метод дифференциального исчисления определяют экстремумы внутри областей допустимых решений.

Постановка задачи линейного программирования имеет три формы.

1. Общая постановка задачи

$$\max(\min)F(\bar{x})=\sum_{i=1}^{n}c_i x_i \tag{6.3}$$

$$\begin{cases}\sum\limits_{j=1}^{k}a_{ij}x_i\le b_i\\ \sum\limits_{j=k+1}^{n}a_{ij}x_i=b_i\quad x_i\ge 0,\text{ где } i=\overline{1,n}\text{ и } j=\overline{1,m}\end{cases}.$$

Напомним, что n – количество неизвестных, m - количество уравнений – ограничений и r - количество независимых уравнений-ограничений.

2. Симметричная постановка задачи

А. $\min F(\bar{x})=\sum\limits_{i=1}^{n}c_i x_i$ или Б. $\max F(\bar{x})=\sum\limits_{i=1}^{n}c_i x_i$ (6.4)

$\sum\limits_{i=1}^{n}a_{ij}x_i\ge b_j$ $\qquad$ $\sum\limits_{i=1}^{n}a_{ij}x_i\le b_j$

$x_i\ge 0,\ i=\overline{1,n};\ j=\overline{1,m}$ $\qquad$ $x_i\ge 0,\ i=\overline{1,n};\ j=\overline{1,m}$.

3. Каноническая постановка задачи

$$\max F(\bar{x})=\sum_{i=1}^{n}c_i x_i+0\cdot\sum_{j=1}^{m}x_{n+j} \tag{6.5}$$

$$\sum_{i=1}^{n}a_{ij}x_i+x_{j+n-m}=b_j,\quad x_i\ge 0,\ i=\overline{1,n};\ j=\overline{1,m}$$

В векторной форме $\max F(\bar{x})=\bar{c}\bar{x}$,

$$A\bar{x} = \bar{b}, \ x \geq 0. \qquad (6.6)$$

Переход к канонической форме от других форм происходит с помощью введения дополнительных балансовых неотрицательных переменных $x_{n+j} \geq 0$, $\left(i = \overline{1,m}\right)$. При этом неравенства-ограничения оказываются равенствами. Переменные $x_1, x_2, ..., x_n$ называют базисными, а $x_{n+1}, x_{n+2}, ..., x_m$ - свободными.

Рассмотрим две классические задачи линейного программирования.

1. Задача об оптимальном использовании сырья или максимальной прибыли. На фабрике выпускают два вида продукции $П_1$ и $П_2$, для этого используется четыре вида сырья S_1, S_2, S_3 и S_4. Составим конкретную и общую таблицы.

Виды сырья	Запасы	Виды продукции $П_1$	$П_2$	Виды сырья	Запасы	Виды продукции $П_1$	$П_2$
S_1	19	2	3	S_1	b_1	a_{11}	a_{12}
S_2	13	2	1	S_2	b_2	a_{21}	a_{22}
S_3	15	0	3	S_3	b_3	a_{31}	a_{32}
S_4	18	3	0	S_4	b_4	a_{41}	a_{42}
$F(\bar{x})$	$\bar{b}$	7	5	доходы		c_1	c_2

Здесь $F(\bar{x}) = c_1 x_1 + c_2 x_2$ - доход от продажи продукций $П$, c_1 - цена единицы продукции $П_1$ и c_2 цена продукции $П_2$, x_1- количество изделий продукции $П_1$ и x_2 - количество изделий продукции $П_2$. Задано: c_1=7 и c_2=5.

Математическая модель выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 19 \\ 2x_1 + x_2 \leq 13 \\ 3x_2 \leq 15 \\ 3x_1 \leq 18 \end{cases} \qquad F(x) = 7x_1 + 5x_2, \quad \Rightarrow \max.$$

Перейдем к канонической форме. Введем новые переменные:

$$\begin{cases} x_3 = 19 - 2x_1 - 3x_2 \geq 0 \\ x_4 = 13 - 2x_1 - x_2 \geq 0 \\ x_5 = 15 - 3x_2 \geq 0 \\ x_6 = 18 - 3x_1 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 19 \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 13 \\ 3x_2 + x_5 = 15 \\ 3x_2 + x_6 = 18 \end{cases}.$$

В матричной форме $A\bar{x} = \bar{b}$, где A_1 есть расширенная матрица, где добавлена ещё строка функции цены.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 19 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 13 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 15 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 18 \end{pmatrix}.$$

F(x) 7 5 0 0 0 0 0

Поскольку переменных всего две x_1 и x_2, то задача допускает графическое решение на плоскости X_1OX_2. На рис. 6.1 изображен вектор цены $\bar{c} = \{7;5\}$ функции цели $F(\bar{x})$,которая представлена как прямая $F(\bar{x}) = 7x_1 + 5x_2 = const$. Задавая различные значения константы, получаем серию параллельных прямых. Допустимые решения не заштриховываются, а область недопустимых значений $\bar{x}$ заштриховываем. Прямые, определяемые уравнениями-нера-венствами определяют область допустимых значений (показано стрелочками на прямых). Из построения видно, что пересечения прямых $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 19 \\ 2x_1 + x_2 = 13 \end{cases}$ дает точку $Q(5,3)$, которая является крайней при перемещении прямой $7x_1 + 5x_2 = const$ параллельно самой себе. Видно, что максимальный доход

$$F_{\max} = 7 \cdot 5 + 5 \cdot 3 = 50 \text{ при } \begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = 3 \end{cases}.$$

Для получения максимального дохода необходимо выпустить 5 изделий продукции $П_1$ и 3 изделия продукции $П_2$, при этом сырье S_1 и S_2 будет использовано полностью, а сырье S_3 и S_4 останется в запасе $\Delta S_3 = 15 - 9 = 6$ и $\Delta S_4 = 18 - 15 = 3$.

Покажем, как эта же задача решается другим способом с помощью введения новых переменных (метод Канторовича).

Идея оптимизации заключается в том, чтобы в функции цели перейти к свободным переменным от базисных и затем свободные переменные положить равными нулю.

$F(\bar{x}) = c_1x_1 + c_2x_2 = A - \alpha x_3 - \beta x_4 - \gamma x_5 - \mu x_6$, где $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\gamma > 0$, $\mu > 0$.

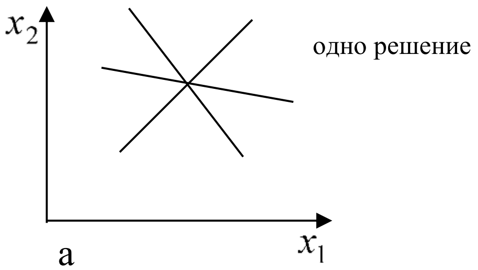
При $x_3 = x_4 = x_5 = x_6 = 0$, получаем максимальное значение $F_{\max} = A$. Покажем это на том же примере. Выразим переменные x_1 и x_2 через x_3 и x_4: $x_1 = \dfrac{20 - 3x_4 + x_3}{4}$, $x_2 = \dfrac{6 - x_3 + x_4}{2}$.

Тогда $F(\bar{x}) = 7x_1 + 5x_2 = 7\dfrac{20 - 3x_4 + x_4}{4} + 5\dfrac{6 - x_3 + x_4}{2}$.

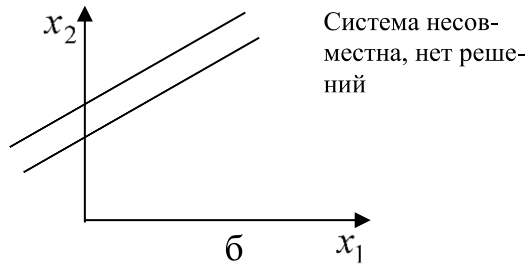
Задавая $x_4 = x_3 = 0$, получаем $F_{\max}(\bar{x}) = 7 \cdot 5 + 5 \cdot 3 = 50$. Ответ совпадает.

Заметим, что линейное программирование это раздел выпуклого программирования. Область допустимых решений должна быть выпуклой, то есть любая секущая эту область пересекает границы области только в двух точках.

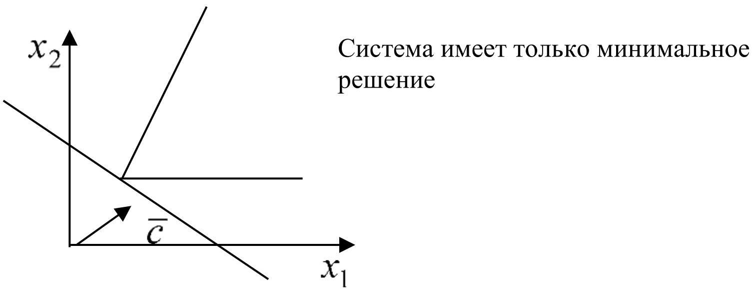
Рассмотрим возможные варианты решений на плоскости, $n = 2$:



а



б



в Рис. 6.2

Для получения оптимального решения надо перебирать базисные решения. План (решение) улучшается, если переходим от одной угловой точки (базисные решения) к другой более близкой к оптимальному решению.

Решим ту же самую задачу матричным способом (методом Гаусса). Приводим матрицу к диагональному виду, выбирая базисными векторами первый и второй столбцы матрицы.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 19 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 13 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 15 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 18 \\ -7 & -5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1{,}5 & 0{,}5 & 0 & 0 & 0 & 9{,}5 \\ 1 & 0{,}5 & 0 & 0{,}5 & 0 & 0 & 6{,}5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 6 \\ -7 & -5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1{,}5 & 0{,}5 & 0 & 0 & 0 & 9{,}5 \\ 0 & -1 & -0{,}5 & 0{,}5 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 5 \\ 0 & -1{,}5 & -0{,}5 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 3{,}5 \\ 0 & -5{,}5 & -0{,}5 & 0 & 0 & 0 & -66{,}5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & . & . & . & . & 5 \\ 0 & 1 & 0{,}5 & -0{,}5 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -0{,}5 & 0{,}5 & \frac{1}{3} & 0 & 2 \\ 0 & 0 & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & . & . & -50 \end{pmatrix}$$

Точками отмечены элементы матрицы не представляющие интереса, т.к. $x_3 = x_4 = x_5 = x_6 = 0$. Получаем тот же ответ: $x_1 = 5, x_2 = 3$ и $F_{\max}(\bar{x}) = 50$.

2. Транспортная задача. На двух складах A_1 и A_2 содержится a_1 и a_2 единиц однородного груза. Этот груз следует доставить в три магазина B_1, B_2 и B_3 в количестве b_1, b_2 и b_3, соответственно. Стоимость перевозки груза из A_i в B_j задана матрицей стоимости c_{ij}. Рассмотрим закрытую задачу, когда общее количество груза на складах и в пунктах назначения равны $a_1 + a_2 = b_1 + b_2 + b_3$.

Отметим , что транспортная задача, когда выполняются условия $a_1 + a_2 \geq b_1 + b_2 + b_3$ называется задачей открытого типа.

Требуется составить такой план перевозки, чтобы общая стоимость их была наименьшей

$$F(x) = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + c_{13}x_{13} + c_{21}x_{21} + c_{22}x_{22} + c_{23}x_{23} \to \min .$$

Здесь x_{ij} - количество груза со склада i в пункт назначения j.

Должно выполняться: $\begin{cases} x_{11}+x_{21}=10 \\ x_{12}+x_{22}=30 \\ x_{13}+x_{23}=10 \end{cases}$ и $\begin{cases} x_{11}+x_{12}+x_{13}=20 \\ x_{21}+x_{22}+x_{23}=30 \end{cases}$.

Кроме того $x_{ij} \geq 0$.

В данной задаче имеем пять уравнений и шесть неизвестных. Примем в качестве основных базисных переменных x_{11}, x_{12} и выразим через них остальные.

$$x_{21}=10-x_{11}\geq 0, \quad x_{22}=30-x_{12}\geq 0, \quad x_{13}=20-x_{11}-x_{12}\geq 0,$$

$$x_{23}=10-x_{13}=-10+x_{11}+x_{12}\geq 0 \text{ и } F(\bar{x})=330-2x_{11}-x_{12}.$$

Видно, что базисные переменные x_{11} и x_{12} не являются оптимальными, так как при $x_{11}=x_{12}=0$ получаем $x_{23}=-10<0$, что противоречит положению x > 0 (количество груза не может быть отрицательным числом).

Рассмотрим графическое решение на плоскости.

Вектор цели имеет компоненты

$$\vec{n}=\{2,1\}.$$

$x_{11}\leq 10$,

$x_{12}\leq 30$ -уравнение не работает

$x_{11}+x_{12}\leq 20$,

$x_{11}+x_{12}\geq 10$.

Самая удаленная точка для линии $F(\bar{x})=const$ является $Q(10;10)$. Таким образом наименьшие затраты на перевозку груза будут составлять $F_{\min}=330-20-10=300$, при этом $x_{11}=10$ и $x_{12}=10$, а $x_{21}=0$, $x_{22}=20$, $x_{13}=0$ и $x_{23}=10$.

Решим эту же задачу методом Гаусса. Ранг данной системы $RgA = RgA_1 = 4$

$$A_1 = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{21} & x_{22} & x_{23} & \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 30 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 10 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 30 \\ 4 & 9 & 3 & 4 & 8 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

так как сумма трех первых строк равна сумме четвертой и пятой строчек.

Если выбрать базисными столбцы x_{11} и x_{12}, то получаем

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 30 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 30 \\ 0 & 9 & 3 & 0 & 8 & 1 & -40 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & . & . & . & . & 10 \\ 0 & 1 & . & . & . & . & 30 \\ 0 & 0 & . & . & . & . & 10 \\ 0 & 0 & . & . & . & . & -20 \\ 0 & 0 & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & . & . & -310 \end{pmatrix}.$$

Видно, что решение не оптимально, $F_{\min} = 310$, так как x_{11} и x_{12} не образуют базис. Графический способ решения дал $F_{\min} = 300$. Возьмем за базисные переменные столбцы x_{12} и x_{13}, тогда:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 30 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 10 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 30 \\ 4 & 9 & 3 & 4 & 8 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 30 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 10 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 30 \\ 4 & 0 & 3 & 4 & -1 & 1 & -270 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 30 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 10 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -20 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 30 \\ 4 & 0 & 0 & 4 & -1 & -1 & -300 \end{pmatrix}.$$

Видно, что $F_{\min} = 300$ является оптимальным решением, и мы угадали с выбором базисных переменных. Способов организовать базис из двух столбцов в данной задаче достаточно много $N = C_6^2 = 15$ и поэтому необходимо выработать правило, по которому можно было бы выделять базисные переменные, чем и займемся в следующем параграфе.

6.2. Метод жордановых исключений. Симплекс-метод

Представим систему равенств ограничений, как разложение m- мерного вектора столбца $\overline{b}$, по векторам – столбцам $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n$

$$\overline{a}_1 x_1 + \overline{a}_2 x_2 + ... + \overline{a}_n x_n = \overline{b}, \qquad (6.8)$$

где $x_1, x_2, ..., x_n$ - можно рассматривать как коэффициенты разложения, а векторы столбцы $\overline{a}_i$ $\left(i = \overline{1,n}\right)$, например для $\overline{a}_1$, имеют вид $\overline{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ . \\ a_{m1} \end{pmatrix}$

Напомним, что в четвертой главе мы уже решали подобную задачу, когда раскладывали трехмерный вектор $\overline{d}$ по базису линейно независимых (некомпланарных) векторов $\overline{a}, \overline{b}$ и $\overline{c}$, где $\left(\overline{a}, \left[\overline{b}, \overline{c}\right] \neq 0\right)$

$$\bar{d} = \alpha\bar{a} + \beta\bar{b} + \gamma\bar{c} \Rightarrow \bar{d} = \{\alpha, \beta, \gamma\}$$ в базисе векторов $\bar{a}, \bar{b}$ и $\bar{c}$.

Здесь та же самая ситуация, но m- мерный вектор $\bar{b}$ раскладывается по n m- мерным векторам. Переход к другому базису совершается следующим образом с помощью метода Гаусса.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} & b_2 \\ .. & .. & ... & .. & .. \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} & b_m \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 & a'_{1r+1} & ... & a'_{1n} & b'_1 \\ 0 & 1 & ... & 0 & a'_{2r+1} & ... & a'_{2n} & b'_2 \\ .. & .. & ... & .. & .. & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 1 & a'_{mr+1} & ... & a'_{mn} & b'_m \end{pmatrix}$$

.(6.9)

Напомним, что $x_1, x_2, ..., x_n$ называется базисными переменными и их $N = C_n^r$, а переменные $x_{r+1}, x_{r+2}, ..., x_n$ называются свободными.

Покажем, что не все решения x_i являются базисными на примере.

Пример. Найти все базисные решения системы $\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 14 \\ 2x_1 - 3x_3 = 7 \\ 2x + x_3 = 7 \end{cases}$.

Решение. $RgA = RgA_1 = r = 2$. Имеем два линейно независимых уравнения $\begin{cases} x_1 = 14 - 3x_2 \\ x_3 = 7 - 2x_2 \end{cases}$

Полагая $x_1 = 0$, получаем $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{14}{3}$, $x_3 = -\frac{7}{3}$, которое не является базисным решением, так как x_3 отрицательно.

Полагая $x_2 = 0$, получаем базисное решение $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 7$.

Полагая $x_3 = 0$, получаем базисное решение $x_1 = \frac{7}{2}$, $x_2 = \frac{7}{2}$, $x_3 = 0$.

Видно, что для данной системы существуют всего два базисных решения. Неотрицательные базисные решения называются ***опорными решениями*** или ***планами.***

Симплекс-метод заключается в переходе от одного опорного решения к другому с целью поиска оптимального опорного решения, когда целевая функция оптимизируется. В основе симплекс-метода лежит принцип жордановых исключений. Рассмотрим на примере переход $(y_1 y_2) \Rightarrow (y_1, x_3)$, где $\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + b_1 \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + b_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = f_1(x_1, x_2, y_2) \\ x_3 = f_2(x_1, x_2, y_2) \end{cases}.$

Разрешим второе уравнение в системе относительно x_3

$$x_3 = \frac{y_2}{a_{23}} - \frac{a_{21}}{a_{23}}x_1 - \frac{a_{22}}{a_{23}}x_2 - \frac{b_2}{a_{23}}.$$

Назовем величину a_{23} - разрешающим элементом. Тогда система перепишется

$$\begin{cases} y_1 = \dfrac{a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21}}{a_{23}}x_1 + \dfrac{a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}}{a_{23}}x_2 + \dfrac{a_{13}}{a_{23}}y_2 + \dfrac{b_1a_{23} - b_2a_{13}}{a_{23}} \\ x_3 = -\dfrac{a_{21}}{a_{23}}x_1 - \dfrac{a_{22}}{a_{23}}x_2 + \dfrac{y_2}{a_{23}} - \dfrac{b_2}{a_{23}} \end{cases} \qquad (6.10)$$

Все это можно оформить в матричном виде в форме жордановых таблиц.

	x_1	x_2	x_3	1
y_1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	b_1
y_2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	b_2

(6.11)

	x_1	x_2	1
	$\dfrac{a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21}}{a_{23}}$	$\dfrac{a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}}{a_{23}}$	$\dfrac{b_1a_{23} - b_2a_{13}}{a_{23}}$
	…………………	………………	……………
.	$-\dfrac{a_{21}}{a_{23}}$	$-\dfrac{a_{22}}{a_{23}}$	$-\dfrac{b}{a_{23}}$

(6.12)

Видно, что своя строка и свой столбец разрешающего элемента делятся на него, а строка меняют знак. Все остальные элементы находят по правилу прямоугольника

$$\begin{matrix} a_{11}^{-} & a_{13} \\ a_{21}^{+} & a_{23} \end{matrix} \Rightarrow \frac{a_{11}a_{23} - a_{21}a_{13}}{a_{23}},$$

$$\begin{matrix} a_{13} & b_1 \\ a_{23} & b_2 \end{matrix} \Rightarrow \frac{b_1 a_{23} - b_2 a_{13}}{a_{23}}.$$

В общем случае системы $\bar{m}$ уравнений и n неизвестных таблица будет иметь вид

$$\begin{array}{c|cccccccccc}
 & x_1 & x_2 & \dots & x_j & \dots & x_s & \dots & x_n & 1 \\
\hline
y_1 & a_{11} & a_{12} & \dots & . & & . & \dots & a_{1n} & b_1 \\
y_2 & a_{21} & a_{22} & \dots & . & & . & \dots & a_{2n} & b_2 \\
. & & & & . & & . & & . & . \\
y_i & . & . & \dots & a_{ij} & \dots & a_{is} & \dots & a_{in} & b_i \\
. & & & & . & & . & & .. & . \\
y_k & . & . & \dots & a_{kj} & \dots & a_{ks} & \dots & a_{kn} & b_k \\
. & & & & . & & . & & .. & . \\
y_m & . & . & \dots & a_{mj} & \dots & a_{ms} & \dots & a_{mn} & b_m
\end{array}$$

Правило прямоугольника: $\begin{matrix} a_{ij} & a_{is} \\ a_{kj} & a_{ks} \end{matrix}$

и дает замену переменной y_k на x_s при этом элементы таблицы преобразуются как

$$y_i' = \sum_{\substack{i=1 \\ j \neq s}}^{m} \frac{a_{ij} a_{ks} - a_{is} a_{kj}}{a_{ks}} x_j + \frac{a_{is}}{a_{ks}} y_s + \frac{b_i a_{ks} - b_k a_{is}}{a_{ks}}.$$

(6.13)

Сформулируем правила преобразования симплекс таблицы:

1. Все элементы своей строки и своего столбца разрешающего элемента a_{ks} делятся на него и строка к тому же меняет знак. При этом выполняется

$$a_{ks} \Rightarrow \frac{1}{a_{ks}}$$

2. Остальные элементы a_{ij}', включая свободные члены b_i', находятся по правилу прямоугольников.

Переходя от одного опорного решения к другому, находим оптимальный план. Важно не совершать лишний вычислений и делать такой переход в сторону оптимального решения за наименьшее количество таких переходов. Это называется методом улучшения плана. Для этого должны выполняться следующие два требования.

Прежде всего, разрешающий элемент должен быть положительным, $a_{ks} > 0$ и свободный член этой строки тоже $b_k > 0$, очевидно, что $a_{ks} \neq 0$.

Кроме того, чтобы при жордановых исключениях не появлялось отрицательных свободных членов, необходимо выполнение условия

$$\frac{b_k}{a_{ks}} \leq \frac{b_i}{a_{is}}, \tag{6.14}$$

следующему непосредственно из правила прямоугольников. Отсюда получаем правило выбора разрешающей строки

$$\min \frac{b_k}{a_{ks}}, \tag{6.15}$$

которое называется симплекс – отношением. То есть отношение свободного члена этой строки к разрешающему элементу должно быть минимальным среди других отношений. В этом случае переход к оптимальному плану осуществляется наиболее коротким способом.

Систему ограничений представляют в виде модифицированной жордановой таблицы, так, чтобы свободные члены b_i были не отрицательны. Исходное опорное решение находится приравниванием верхних (свободных) переменных нулю, а базисных (боковых) свободным членам. Суть идеи такова

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 1 & 0 & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 1 & b_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & a'_{13} & a'_{14} & b'_1 \\ 0 & 1 & a'_{23} & a'_{24} & b'_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = b'_1 \\ x_2 = b'_2 \end{cases}.$$

Посмотрим, как работать с жордановыми модифицированными таблицами на примере о максимальном доходе.

Итак, имеем

Базисные перемен-ные	1	Свободные переменные $-x_1$	$-x_2$
x_3	19	2	3
x_4	13	2	1

$$x_3 = 19 - 2x_1 - 3x_2$$
$$x_4 = 13 - 2x_1 - x_2 \quad \mathrm{I}$$
$$x_5 = 15 - 3x_2$$
$$x_6 = 18 - 3x_1$$
$$F = 7x_1 + 5x_2$$

x_5	15	0	3
x_6	18	3	0
F	0	-7	-5

Свободные переменные переводим в базисные с помощью правила прямоугольника. Получаем несколько последовательных жордановых таблиц. Давайте, например, перебросим x_2 в базисные переменные. Выберем разрешающий элемент. В данном случае удобно выбрать элемент равный единице (обведем кружком) так как вычисления по правилу прямоугольника существенно упрощается. Получаем следующую таблицу.

II

Базис.		Свобод.
		$-x_1$
x_3	30	4
x_2	13	2
x_5	24	6
x_6	18	3
F	65	3

III

Базисные переменные	1
x_1	5
x_2	3
x_5	-6
x_6	4
F	50

Очевидно, что записывать x_4 в свободные переменные не имеет смысла, так как, в конце концов, все дополнительные переменные положим равными нулю. Опять выбираем разрешающий элемент для переброски свободной переменной x_1 в базисные переменные. Получаем следующую окончательную таблицу, где считываем ответ $F_{\max} = 50$ при оптимальном плане выпуска $x_1 = 5$ и $x_2 = 3$.

Отметим, что в данной задаче имеется 6 базисных опорных решений и одно из них оптимальное, поэтому выбор минимального симплекс отношения не принципиален.

Таким образом, для решения задачи линейного программирования симплекс-метода необходимо перейти к её канонической форме, вводя дополнительные переменные, которые в этом случае будут базисными. Затем разрешим систему равенств-ограничений относительно этих дополнительных переменных и составляем модифицированную жорданову таблицу, где сбоку располагаем (базисные) переменные, а сверху свободные. Добавляем в таблицу функции цели и начинаем поиск оптимального решения, переводя свободные переменные в базисные и соответственно наоборот.

Пример. Решить $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 84 \\ 3x_1 + 13x_2 - x_4 = 150 \end{cases}$ $x_i \geq 0 \quad \left(i = \overline{1,4}\right)$

$$F = 2x_1 + 3x_2 \to \min .$$

Решение. Задача имеет канонический вид.

$x_б$	1	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	$-x_4$
0	84	3	2	-1	0
0	150	3	13	0	1
F	0	-2	-3	0	0

I

$x_б$	1	$-x_2$	$-x_3$	$-x_4$
x_1	26	2/3	-1/3	0
0	66	11	1	-1
F	-56	-5/3	-2/3	0

II

	1	$-x_3$	$-x_4$
x_1	24	-13/33	2/33
x_2	6	1/11	-1/11
F	-66	-17/33	-5/33

III

	1	$-x_2$	$-x_4$
x_1	50	13/3	-1/3
x_3	66	11	-1
F	100	17/3	-2/3

IV

Если $F_2 < 0$ и весь столбец имеет отрицательные элементы, то F неограниченно и имеет только $F_{\min} = -100$ при $x_1 = 50$, $x_3 = 66$, $x_2 = 0$.

6.3. Транспортная задача. Метод потенциалов

Транспортная задача имеет несколько способов решения. Рассмотрим только стандартный метод потенциалов, так как он аналогичен симплекс методу.

Пусть в пунктах направлений (склады) $A_1, A_2, ..., A_n$ сосредоточены запасы однородного груза в количестве $a_1, a_2, ..., a_n$ единиц. В пункты назначения $B_1, B_2, ..., B_m$ (магазины) надлежит доставить $b_1, b_2, ..., b_m$ единиц груза. Если выполняется условие

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{m} b_m , \tag{6.16}$$

то транспортная задача, как уже отмечалось, называется задачей закрытого типа. Стоимость задается матрицей $c = \{c_{ij}\}$, где c_{ij} стоимость перевозки из пункта A_i в пункт B_j, причем $c_{ij} \geq 0$.

Требуется составить такой план перевозок груза, при котором общая стоимость перевозок

$$L = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_{ij} x_{ij} \tag{6.17}$$

была бы наименьшей, и все заявки были бы выполнены. Здесь x_{ij} называется тарифом и обозначает количество груза перевезенного из A_i в B_j. План перевозок задается тарифной матрицей $X = \{x_{ij}\}$, причем должно выполнятся $x_{ij} \geq 0$. Составим таблицу перевозок в виде таблицы.

склад	магазины				запас
	B_1	B_2	$\dots$	B_m	
A_1	c_{11}	c_{21}		c_{1n}	a_1
	x_{11}	x_{21}		x_{1n}	
A_2	c_{21}	c_{22}		c_{2n}	a_2
	x_{21}	x_{22}		x_{2n}	
$\dots$	$\dots$	$\dots$		$\dots$	$\dots$
$\dots$	$\dots$	$\dots$		$\dots$	$\dots$
A_n	c_{n1}	c_{n2}		c_{nm}	
	x_{n1}	x_{n2}		x_{nm}	a_n
потребности	b_1	b_2		b_m	

Здесь в каждой клетке вверху в кружке обозначена стоимость этой перевозки. Математическая модель задачи

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \end{cases}, \ c_{ij} \geq 0, \ x_{ij} \geq 0 \tag{6.18}$$

$$L = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_{ij} x_{ij} \ \to \ \min$$

Решение задачи ищется среди опорных решений путем их целенаправленного перебора и проверки каждого на оптимальность.

Итак, имеется $n+m$ уравнений. Число занятых клеток в таблице равно $r = n+m-1$. Опорный план имеет $r = m+n-1$ неизвестных. В этом случае задача ***невырождена.*** Если же $n+m-1 > r$, то задача ***вырожденная***.

Существуют два способа построения начального опорного плана.

1. Метод северо-западного направления, когда основное количество груза распределяют по главной диагонали таблицы.
2. Метод двойного предпочтения, когда основное количество груза распределяют в клетки с минимальной стоимостью по строке и столбцу таблицы.

Как правило, первоначальный опорный план не оптимален. Тогда проводится улучшение плана.

Идея метода заключается в следующем. Если имеется любое первоначальное допустимое решение, то его можно улучшить (оптимизировать) путем, распределения груза в те транспортные артерии, где тариф перевозок минимален. Первоначальный опорный план проверяется на оптимальность методом потенциалов. Стоимость перевозок представляют в виде суммы потенциалов u_i (строка) и v_j (столбец)

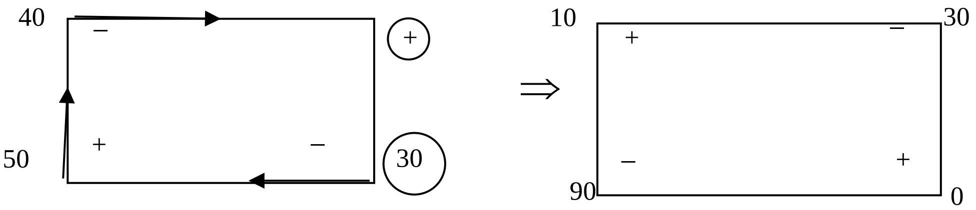
$$c_{ij} = u_i + v_j \quad \left(i = \overline{1,n},\ \ j = \overline{1,m}\right) \tag{6.19}$$

Значения потенциалов находят для занятых клеток таблицы перевозок груза. Поскольку число потенциалов равно $n+m$, а уравнений для их определения только $n+m-1$, то такая система имеет бесконечное множество решений. Поэтому, как правило, полагают $u_1 = 0$, тогда все потенциалы определятся однозначно. Заметим еще раз, что потенциалы определяются только для занятых перевозками груза клетками таблицы перевозок. Затем определяются, так называемые, оценки потенциалов свободных клеток. Для этого вводится понятие оценки свободных клеток

$$\Delta_{ij} = u_i + v_j - c_{ij} \tag{6.20}$$

и если все $\Delta_{ij} \le 0$, то опорное решение является оптимальным. Если же хотя бы одно из $\Delta_{ij} > 0$, то опорное решение не является оптимальным и его можно улучшить, перейдя к другому опорному плану. Значение оценок свободных клеток называется еще теневыми ценами, которые показывают, на сколько уменьшится (увеличится) общая стоимость транспортных расходов, если в свободную клетку таблицы поместить одну единицу перевозимого груза (тариф).

Алгоритм поиска оптимального решения следующий. Для свободной клетки таблицы стоится цикл (многоугольник), все вершины которого кроме одной (данная свободная клетка с $\Delta_{ij} > 0$) находятся в занятых клетках. Углы цикла должны быть прямыми и число вершин четным. Около свободной клетки цикла ставится знак $(+)$, а затем поочередно ставятся знаки $(-)$ и $(+)$ у всех вершин цикла. У вершины со знаком $(-)$ с минимальным грузом убирают этот груз в свободную клетку. Так как количество груза при этом сохраняется, то этот груз прибавляется к грузам стоящим у вершин со знаком $(+)$ и отнимается от всех грузов вершин со знаком $(-)$. *Например,*



Полученное опорное решение опять проверяется на оптимальность расчетом потенциалов по занятым клеткам и оценками Δ_{ij} свободных клеток. Получают так же значение целевой функции. Итак, до тех пор, пока все оценки свободных клеток не будут $\Delta_{ij} \leq 0$. Это и будет обозначать, что опорное решение оптимально, а целевая функция минимальна.

1. Рассмотрим другой пример. Дана таблица перевозок и их стоимость. Определить оптимальный план перевозок.

Решение. По условию $n+m-1=6$. Составляем допустимое опорное решение. Видно, что решение вырожденно, так как занято только 5 клеток таблицы. В этом случае записывают нулевые перевозки (0) в одну из свободных клеток с наименьшим тарифом так, чтобы образовался, какой либо цикл.

	B_1	B_2	B_3	B_4	Запасы
A_1	6	4	4	5	80
A_2	3	6	5	4	50
A_3	4	5	5	6	10
заявки	30	50	20	40	140

Нуль рекомендуется помещать в такую клетку, чтобы в каждой строке и каждом столбце таблицы было не менее одной занятой клетки. Только в этом случае появляется возможность организовать цикл перемещения грузов с целью поиска оптимального решения. В этом случае записывают нулевые перевозки в одну из свободных клеток с наименьшим тарифом так, чтобы образовался какой-либо цикл.

В данном примере удобно заполнить нулевой перевозкой клетку (3,1). Далее по схеме вычислений определяем потенциалы занятых клеток.

6 30	4 50	4 *	5	u_i 0
3	6	5 20	4 30	-4

Полагаем $u_1 = 0$ и получаем

$c_{11} = u_1 + v_1 = 6, \;\; v_1 = 6;$

$c_{12} = u_1 + v_2 = 4, \;\; v_2 = 4;$

	0 [4]	[5]	[5]	10 [6]	-2
v_i	6	4	9	8	

$$c_{31} = u_3 + v_1 = 4, \;\; u_3 = -2.$$

Теперь можно определить v_4.

Действительно для занятой клетки (3,4) $c_{34} = u_3 + v_4 = 6$, следует что $v_4 = 6 - (-2) = 8$. Далее для $c_{24} = u_2 + v_4 = 4$ следует, что $u_2 = 4 - 8 = -4$. Последняя занятия клетка $c_{23} = u_2 + v_3 = 5$ дает значение $v_3 = 5 - (-4) = 9$.

Вычисляем оценки свободных клеток

$\Delta_{13} = u_1 + v_3 - c_{13} = 0 + 9 - 4 = 5 > 0$ *- отмечаем клетку звездочкой.

$\Delta_{14} = u_1 + v_4 - c_{14} = 0 + 8 - 5 = 3 > 0$

$\Delta_{21} = u_2 + v_1 - c_{21} = -4 + 6 - 3 = -1 < 0$

$\Delta_{22} = u_2 + v_2 - c_{22} = -4 + 4 - 6 = -6 < 0$

$\Delta_{32} = u_3 + v_2 - c_{32} = -2 + 4 - 5 = -3 < 0$ и $\Delta_{33} = u_3 + v_3 - c_{33} = 1 > 0$

Видно, что опорный план не оптимален $(\Delta_{13} > 0, \Delta_{14} > 0, \Delta_{33} > 0)$.

30 -	50	+ *	
		-20	+30
0			-10
+			

Для улучшения плана образуем цикл для клетки (1,3). Здесь минимальный груз цикла находится в клетки (3,4) и имеет значение 10.

Новый опорный план опять невырожден, так как опять заняты только 5 клеток из 6. Проверяем этот план на оптимальность. Опять полагаем $u_1 = 0$ и по занятым клеткам определяем потенциалы.

$c_{11} = u_1 + v_1 = 6, \;\; v_1 = 6$

$c_{12} = u_1 + v_2 = 4, \;\; v_2 = 4$

$c_{13} = u_1 + v_3 = 4, \;\; v_3 = 4$

$c_{23} = u_2 + v_3 = 5, \;\; u_2 = 1$

$c_{24} = u_2 + v_4 = 4, \;\; v_4 = 3$

$c_{31} = u_3 + v_1 = 4, \;\; u_3 = -2$

II

					u_i
	20 [6]	50 [4]	10 [4]	[5]	0
	* [3]	[6]	10 [5]	40 [4]	1
	10 [4]	[5]	[5]	[6]	-2
v_i	6	4	4	3	

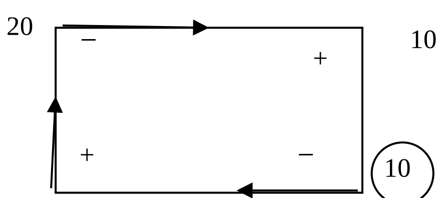
Определяем оценки свободных клеток таблицы перевозок.

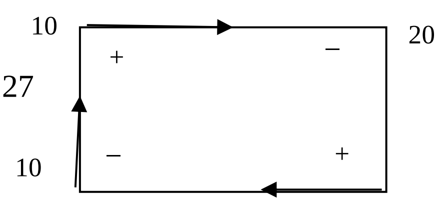
$\Delta_{14} = u_1 + v_4 - c_{14} = -2 < 0$, $u_{21} = u_2 + v_1 - c_{21} = 4 > 0$ *- обозначаем звездочкой.

$\Delta_{22} = u_2 + v_2 - c_{22} = -1 < 0,$ $\qquad \Delta_{32} = u_3 + v_2 - c_{32} = -4 < 0$

$\Delta_{33} = u_3 + v_3 - c_{33} = -3 < 0,$ $\qquad \Delta_{34} = u_3 + v_4 - c_{34} = -5 < 0$

Видно, что план не оптимален, так как $\Delta_{21} > 0$. Образуем, цикл для этой клетки и получаем новый опорный план. Он опять невырожден.





$$\Rightarrow$$

$$X = \begin{pmatrix} 10 & 50 & 20 & \\ 10 & 0 & 0 & 40 \\ 10 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Снова проверяем этот план на оптимальность. $u_1 = 0$

$c_{11} = u_1 + v_1 = 6,\ \ v_1 = 6$ III

$c_{12} = 4,\ \ v_2 = 4$

$c_{13} = 4,\ \ v_3 = 4$

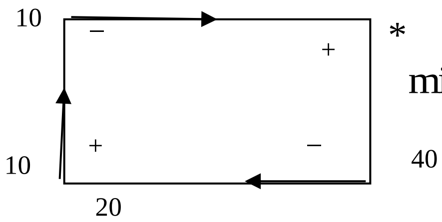
$c_{21} = 3,\ u_2 = -3,\ c_{24} = 4,$

$v_4 = 7;\ \ c_{31} = 4,\ u_3 = -2$

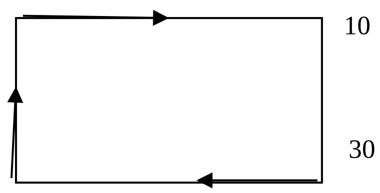
					u_i
	(6) 10	(4) 50	(4) 20	(5) *	0
	(3) 10	(6)	(5)	(4) 40	-3
	(4) 10	(5)	(5)	(6)	-2
v_i	6	4	4	7	

Получаем оценки пустых клеток $\Delta_{14} = u_1 + v_4 - c_{14} = 7 - 5 > 0$*, $\Delta_{22} = -3 < 0$, $\Delta_{23} = -2 < 0$, $\Delta_{32} = -7 < 0$, $\Delta_{33} = -7 < 0$, $\Delta_{34} = -1 < 0$

Так как план не оптимален $(\Delta_{14} > 0)$, образуем цикл перемещения груза для клетки (1,4).



$$\min\{10{,}40\} = 10 \quad \Rightarrow$$



Получаем новый опорный план, который теперь невырожден. Повторяем всю процедуру снова. Выбираем $u_1 = 0$ и для занятых клеток определяем потенциалы

$c_{12} = u_1 + v_2 = 4,\ \ v_2 = 4$

$c_{13} = 4,\ \ v_3 = 4;\ c_{14} = 5,\ \ v_4 = 5;$

$c_{24} = 4,\ u_2 = -1,\ c_{21} = 3,\ v_1 = 4;$

$c_{31} = 4,\ \ u_3 = 0.$

					u_i
	(6)	(4) 50	(4) 20	(5) 10	0
	(3) 20	(6)	(5)	(4) 30	-1
	(4) 10	(5)	(5)	(6)	0
v_i	4	4	4	5	

Делаем оценки свободных клеток

$\Delta_{11} = u_1 + v_1 - c_{11} = -2 < 0,$

$\Delta_{22} = u_2 + v_2 - c_{22} = -1 < 0,$

$\Delta_{23} = u_2 + v_3 - c_{23} = 0,\ \ \Delta_{32} = -1 < 0,\ \ \Delta_{33} = -1 < 0,\ \Delta_{34} = -1 < 0.$

Наконец, получаем все оценки отрицательными $(\Delta_{ij} \le 0)$, что означает оптимальность данного плана.

Ответ: Оптимальным планом перевозок является $X = \begin{pmatrix} 0 & 50 & 20 & 10 \\ 20 & 0 & 0 & 30 \\ 10 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

при этом стоимость перевозок определяется $F_4 = 50 \cdot 4 + 20 \cdot 4 + 10 \cdot 5 + 20 \cdot 3 + 30 \cdot 4 + 10 \cdot 4 = 550$ и меньше быть не может. Для примера, на третьем шаге стоимость перевозок определялась как $F_3 = 10 \cdot 6 + 50 \cdot 4 + 20 \cdot 4 + 10 \cdot 3 + 40 \cdot 4 + 10 \cdot 4 = 570$

Цена третьего цикла $Ц_3 = -6 + 5 - 4 + 3 = -2$. По циклу перемещалось 10 единиц груза, поэтому стоимость перевозки уменьшилась на $\Delta F = 10(-2) = -20$.

Рассмотрим открытую транспортную задачу. Здесь возможны два случая.

1. Если объем запасов больше и некоторое количество запасов остается на складах. Потребность магазинов, тем не менее, удовлетворена: $\sum_{i=1}^{n} a_i > \sum_{j=1}^{m} b_j$

2. Потребность магазинов неудовлетворенна, так как на складах груз уже закончился: $\sum_{i=1}^{n} a_i < \sum_{j=1}^{m} b_j$.

Для решения первой задачи вводится фиктивный $(n+1)$ потребитель $b_{n+1} = \sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{j=1}^{m} b_j \ge 0$ и решается математическая модель транспортной задачи закрытого типа:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n+1} x_{ij} = a_i \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \end{cases} \qquad (6.20)$$

$$L = \sum_{i}^{m} \sum_{j}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \min .$$

Для решения второй задачи вводится фиктивный $(m+1)$ поставщик (склад) $a_{n+1} = \sum_{j=1}^{m} b_j - \sum_{i=1}^{n} a_i \ge 0$.

Модель имеет вид: $\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \\ \sum\limits_{i=1}^{m+1} x_{ij} = b_j \end{cases}$, (6.21)

$$L = \sum_{i}^{m} \sum_{j}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \min ,$$

которая также является моделью закрытого типа. Далее решается стандартно, как рассмотрено выше. Очевидно, что тарифы фиктивных потребителей полагают равными нулю или устанавливают очень большую стоимость перевозки. В целевой функции фиктивные потребители и поставщики не учитываются.

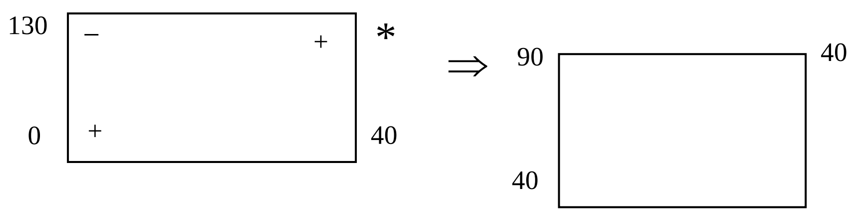
Пример. Найти оптимальный план перевозки от трех поставщиков с объёмом 240, 40 и 110 тонн к четырем потребителям с запросами в 90, 190, 40 и 130 тонн со стоимостью перевозок $C = \begin{pmatrix} 7 & 13 & 9 & 8 \\ 14 & 8 & 7 & 10 \\ 3 & 15 & 20 & 6 \end{pmatrix}$

Решение. $\sum\limits_{i=1}^{3} a_i = 390$ и $\sum\limits_{j=1}^{4} b_j = 450$. $a_{4ф} = 450 - 390 = 60$ т. Цену фиктивной перевозки назначим по имеющемуся максимуму $c_{4j} = 20$. Составим первоначальный план перевозок по методу двойного предпочтения.

a_i	b_j	90 1	190 2	40 3	130 4	u_i
240	1	7	13 130	9	8 110	0
40	2	14	8 0	7 40	10	-5
110	3	3 90	15	20	6	-2
60	4	20 60	20	20	20	15
	v_j	5	13	12	8	

Так как $m+n-1=7$, а занятых клеток 6, то задача вырождена. Ставим 0 перевозок в клетку (2,3), для исключения вырождения. Итак, $\Delta_{11} = -2$, $\Delta_{13} = 3*$, $\Delta_{21} = 14*$, $\Delta_{24} = -7$, $\Delta_{32} = -4$, $\Delta_{33} = -10$, $\Delta_{41} = -8$, $\Delta_{43} = -1$, $\Delta_{44} = -5$.

Организуем цикл



и получаем

	1	2	3	4	u_i
1	^{7}	^{13} 90	^{9} 40	^{8} 110	0
2	^{14}	^{8} 40	^{7}	^{10}	-5
3	^{3} 90	^{15}	^{20}	^{6} 20	-2
4	^{20} 60	^{20}	^{20}	^{20}	7
v_j	5	13	9	8	

Проверка оптимальности дает, что все $\Delta_{ij} < 0$.

Таким образом, план перевозок оптимален и дает

$$X_{опт} = \begin{pmatrix} 0 & 90 & 40 & 110 \\ 0 & 40 & 0 & 0 \\ 90 & 0 & 0 & 20 \end{pmatrix}$$

наименьшую стоимость перевозок $L = 3120$ единиц.

6.4. Метод искусственного базиса. Двойственность постановки задачи линейного программирования. Целочисленное программирование

Если в задаче линейного программирования, представленной в канонической форме, в системе равенств некоторые коэффициенты при неизвестных отрицательны, то симплекс метод может и не приводить к решению. Тогда применяется более общий, так называемый, М-метод. Вводятся искусственные переменные, а из целевой функции вычитают сумму искусственных переменных умноженных на сколь угодно большое положительное число М. Иногда, этот метод называется еще «методом больших штрафов».

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i + x_{n+i} = b_{i0} \quad \left(i = \overline{1, m}\right), \tag{6.22}$$

$$F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j - M \sum_{i=1}^{m} x_{n+i} \to \max,$$

где переменные x_{n+i} образуют искусственный базис. При $x_1 = x_2 = \ldots x_n = 0$ получаем опорный план М-задачи $\bar{x}_0 = (0, 0, \ldots, b_{10}, \ldots, b_{m0})$. Если после решения М задачи все искусственные переменные $x_{n+i} = 0$ $\left(i = \overline{1, m}\right)$, то план $\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n, 0, 0, \ldots, 0)$ будет оптимальным.

Покажем на примере потребность введения искусственных переменных.

Пример. $\begin{cases} 4x_1 + 5x_2 \geq 10 \\ 5x_1 + x_2 \geq 3 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{Переходим к каноническому виду}} \begin{cases} 4x_1 + 5x_2 - x_3 = 10 \\ 5x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0 \end{cases}.$

$F = x_1 + x_2$ $\qquad\qquad$ $F = x_1 + x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4$

Видно, что при x_1 и $x_2 = 0$ получаем $x_3 < 0$ и $x_4 < 0$. Чтобы этого не происходило необходимо добавить «компенсационные» переменные или, как говорят, искусственные переменные.

$$\begin{cases} 4x_1 + 5x_2 - x_3 + x_5 = 10 \\ 5x_1 + x_2 - x_4 + x_6 = 3 \\ x_i \geq 0 \quad \left(i = \overline{1,6}\right) \end{cases}$$

$$F = x_1 + x_2 - M\left(x_5 + x_6\right) + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 \to \max$$

Здесь M – весовой множитель (штраф), $M > 0$. Далее производятся те же действия, как и в симплекс методе. При подстановке $x_5 = x_6 = 0$ штраф уходит. Удобно ввести две функции цели – стандартную и искусственную $M\sum_{i=1}^{m} x_{n+i}$. В процессе реализации симплекс-метода исключаются искусственные переменные.

Пример. $\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 2x_3 - 5x_4 - 9x_5 = 3 \\ x_2 - 3x_3 + 4x_4 - 5x_5 = 6 \\ x_2 - x_3 + x_4 - x_5 = 1 \end{cases}$

$$F = -2x_1 - 6x_2 + 5x_3 - x_4 - 4x_5 \to \max.$$

Решение. В первом уравнении x_1 с коэффициентом единица, поэтому весовой множитель можно не вводить. Во втором и третьем уравнении вводятся x_6 и x_7, целевая функция задаётся в виде $\Phi = F - M\left(x_6 + x_7\right)$.

Переходим к задаче $\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 2x_3 - 5x_4 + 9x_5 = 3 \\ x_2 - 3x_3 + 4x_4 - 5x_5 + x_6 = 6 \\ x_2 - x_3 + x_4 - x_5 + x_7 = 1 \qquad x_i \geq 0 \ \left(i = \overline{1,7}\right) \end{cases}$

$$F = -2x_1 - 6x_2 + 5x_3 - x_4 - 4x_5 - M\left(x_6 + x_7\right)$$

Выразим Φ через x_2, x_3, x_4 и x_5.

$\Phi = -14x_2 + 9x_3 - 11x_4 + 14x_5 - 6 - M\left(-2x_2 + 4x_3 - 5x_4 + 6x_5 + 7\right)$.

Тогда модифицированная симплекс таблица запишется так

I

	1	$-x_2$	$-x_3$	$-x_4$	$-x_5$
x_1	3	-4	2	-5	9
x_6	6	1	-3	4	-5
x_7	1	1	-1	1	-1
F	-6	14	-9	11	-14
M	-7	-2	4	-5	6

II

1	$-x_2$	$-x_3$	$-x_5$

III

x_1	8	1	-3	4
x_6	2	-3	1	-1
x_4	1	1	-1	-1
F	-17	3	2	-3
M	-2	3	-1	1

	1	$-x_2$	$-x_5$
x_1	14	-8	1
x_3	2	-3	-1
x_4	3	-2	-2
F	-21	9	-1
M		0	0

Так как $x_6 = x_7 = 0$.

		$-x_2$	$-x_1$
x_5	16		
x_3	16		
x_4	31		
F	-7	1	1

IV

Ответ: оптимальный план $\bar{x} = (0;0;16;31;14)$ дает максимальные значения $F_{\max} = -7$

Рассмотрим двойственность постановки задачи линейного программирования. Действительно, с каждой такой задачей связана другая альтернативная задача.

$$\begin{array}{ccc} A\bar{x} \le \bar{b} & & A^T \bar{y} > \bar{c}^T \\ \bar{x} > \bar{0} & \Leftrightarrow & \bar{y} \ge 0 \\ L = \bar{c}\bar{x} \to \max & & L = \vec{b}^T \bar{y} \Rightarrow \min . \end{array} \qquad (6.23)$$

Заметим, что ответ должен быть одним и тем же. $L_{\min} = L_{\max}$.

Пример. Задача о прибыли (пример 1).

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 19 \\ 2x_1 + x_2 \le 13 \\ 3x_2 \le 15 \\ 3x_1 \le 18 \end{cases}$$

$$L = 7x_1 + 5x_2 \to \max$$

Пример решен и имеет ответ $F_{\max} = 50$ при плане выпуска продукта $\bar{x} = (5{,}3)$.

Рассмотрим ту же задачу, но под другим углом зрения– экономии сырья.

$$\begin{cases} 2y_1 + 2y_2 + 3y_4 \ge 7 \\ \ 3y_1 + y_2 + 3y_3 \ge 5 \end{cases}$$

$$L = 19y_1 + 13y_2 + 15y_3 + 18y_4 \text{ -- min.}$$

Здесь y_1 - доля первого вида сырья в цене продукции, а y_2 - доля второго вида сырья в цене продукции, и так далее.

Здесь $A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 2 & 1\\ 0 & 3\\ 3 & 0\end{pmatrix}$ и $A^T=\begin{pmatrix}2 & 2 & 0 & 3\\ 3 & 1 & 3 & 0\end{pmatrix}$

Приводим задачу к каноническому виду $\begin{cases}2y_1+2y_2+3y_4-y_5=7\\ 3y_1+y_2+3y_3-y_6=5\end{cases}$

$$L=19y_1+13y_2+15y_3+18y_4$$

Составляем симплексную таблицу

$y_б$	1	$-y_1$	$-y_2$	$-y_3$	$-y_4$
y_5	7	2	2	0	-1
y_6	5	3	1	3	-1
L	0	-19	-13	-15	-18

минимум

$y_б$	1	$-y_2$	$-y_3$	$-y_4$
y_5	11/3	4/3	-2	-1/3
y_1	5/3	1/3	1	-1/3
L	95/3	-20/3	4	-35/3

$y_б$	1
y_1	11/12
y_2	9/12
L	50

Видно, что ответ совпадает с ранее полученным. Причем y =15/12 и y=6/12.

Округление нецелочисленного решения зачастую даёт принципиально неправильный результат. Среди достаточно большого количества способов целочисленного программирования рассмотрим только метод правильных отсечений Гомори. Этот метод основывается на симплекс-методе. Вначале решается стандартная задача линейного программирования. Если получается целочисленное решение $\left(x_i=b_i' \text{ - целые}\right)$, то это и есть решение. Если не целочисленное, то присоединяются дополнительные линейные равенства - ограничения, которые получаются методом правильных отсечений. Затем опять решается симплекс методом. И так, до целочисленного результата.

Оптимальный план не обязательно будет находиться в вершине выпуклого многоугольника образованного равенствами-ограничениями, а в точке близкой к вершине, но обязательно на одной из сторон этого многоугольника.

Принцип ***правильных отсечений*** заключается в том, что среди нецелых свободных членов равенств-ограничений выбирают тот, у которого наибольшая дробная часть.

Напомним, что дробной частью $\{a\}$ называют разность этого числа с его наибольшей целой частью $|a|$ его не превосходящей $\{a\}=a-|a|$.

Например, для числа $a=3\frac{2}{5}$, имеем результат: $\left\{3\frac{2}{5}\right\}=\frac{2}{5}$.

Например, для числа $a = -5{,}7$, получаем $\{-5{,}7\} = -5{,}7 + 6 = 0{,}3$

Сформулируем правило отсечений. Пусть b_k - имеет наибольшую дробную часть, тогда

$$\{a_{km+1}\}x_{j_{m+1}} + \{a_{km+r}\}x_{j_{m+2}} + \ldots + \{a_{kn}\}x_{j_n} \geq \{b_k\}. \qquad (6.24)$$

Вводится новая переменная

$$\{a_{km+1}\}x_{j_{m+1}} + \{a_{km+r}\}x_{j_{m+2}} + \ldots + \{a_{kn}\}x_{j_n} - x_{j_{n+1}} = \{b_k\}. \qquad (6.25)$$

Решение проводится симплекс- методом.

Пример. Решить в целых числах $\begin{cases} 3x_1 + x_2 \leq 7 \\ x_1 + 3x_2 \leq 7, \quad x_1 \geq 0, \; x_2 \geq 0 \end{cases}$,

$$F = x_1 + 2x_2.$$

Решение. В канонической форме

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = 7 \\ x_1 + 3x_2 + x_4 = 7, \quad x_1 \geq 0, \; x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$F = x_1 + 2x_2$$

Первоначальное решение получаем симплекс-методом

	1	$-x_1$	$-x_2$
x_3	16	3	1
x_4	31	1	3
F	0	-1	-2

$\Rightarrow$

	1	$-x_2$
x_1	7/3	1/3
x_4	14/3	8/3
F	7/3	-5/3

	1
x_1	14/8
x_2	14/8
F	21/4

Однако, для составления правильных отсечений необходима полная симплекс - таблица.

	1	$-x_3$	$-x_4$
x_1	7/4	3/8	-1/8
x_2	7/4	-1/8	3/8
F	21/4	1/8	5/8

Решение оптимально: $F_{опт} = \dfrac{21}{4}$ при $x_1 = \dfrac{7}{4}$ и $x_2 = \dfrac{7}{4}$, но нецелочисленно.

Выбираем первое уравнение (значения b_k, одинаковы). Правильное отсечение дает следующий результат.

$$\left\{\frac{3}{8}\right\}x_3 + \left\{-\frac{1}{8}\right\}x_4 \geq \left\{\frac{7}{4}\right\},$$

где $\left\{\frac{3}{8}\right\}=\frac{3}{8}-0=\frac{3}{8}$, $\left\{-\frac{1}{8}\right\}=-\frac{1}{8}+1=\frac{7}{8}$ $\left(\left|-\frac{1}{8}\right|=-1\right)$, $\left\{\frac{7}{4}\right\}=\frac{7}{4}-1=\frac{3}{4}$. Получаем новое дополнительное равенство - ограничение

$$\frac{3}{8}x_3+\frac{7}{4}x_4-x_5=\frac{3}{4},$$

являющееся секущей многоугольника допустимых решений

$$\frac{3}{8}x_3+\frac{7}{4}x_4>\frac{3}{4}, \text{ где } \begin{cases} x_3=7-3x_1-x_2 \\ x_4=7-x_1-3x_2 \end{cases}.$$

Получаем уравнение секущей $2x_1+3x_2<8$, которое является правильным отсечением. Вводим новое равенство в симплекс-таблицу.

	1	$-x_3$	$-x_4$
x_1	7/4	3/8	-1/8
x_2	7/4	-1/8	3/8
x_5	3/4	3/8	7/8
F	21/4	1/8	5/8

$\Rightarrow$

	1	$-x_5$	$-x_4$
x_1	1		
x_2	2		
x_3	2		
F	5		

Ответ: $F_{опт}=5$ при плане $\bar{x}_{опт}=(1;2)^T$.

Заметим, что если b_k - дробное число, а все коэффициенты при x_{j_l} $\left(l=\overline{m+1,n+1}\right)$ целые, то задача линейного программирования не имеет целочисленных решений

7. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ СТРУКТУРЫ ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКИ

В математике основным начальным понятием является понятие множества. Всякую совокупность элементов объединенных по какому-нибудь признаку называют ***множеством*** этих элементов. В первой главе мы уже познакомились с множеством векторов в линейном векторном пространстве. Напомним, что сам вектор есть упорядоченное множество действительных чисел. Множества бывают бесконечномерными и конечномерными. Бесконечномерные множества лежат в основе аналитической математики, описывающей непрерывные функции (включая особые точки) непрерывного переменного, с аппаратом дифференциально-интегрального исчисления. Конечномерные множества лежат в основе дискретной математики, интенсивно развивающейся в связи с совершенствованием вычислительной техники. В данном учебном пособии, мы коснемся только теории конечномерных множеств. Для однозначного понимания математической записи вводится метаязык – набор символов, о значении которых договариваются. Вводится некоторый формализм записи облегчающей понимание научных и технических разработок для специалистов. При этом используются символы иногда не имеющие первоначального смысла.

Например, символ = «равно» означает отношение равенства. Символ = или $\equiv$ обозначает равенство по определению (тождество). Например: 1+3=4; 1!=1; 0!=1.

Введем некоторые символы заменяющие слова – «кванторы»:

$\forall$ (*Any* - любой, каждый) – квантор общности,

$\exists$ (*Existence* - существует) – квантор существования,

$\Rightarrow$ - следует (логическое следствие),

: - выполняется,

$\subset$ - символ включения, например: $\bar{x} \subset A_n$ ($\bar{x}$ подмножество A_n),

$\subseteq$ - символ включения, вплоть до совпадения,

$\not\subset$ - символ исключения ($\bar{x} \not\subset A_n$, вектор $\bar{x}$ не принадлежит A_n),

$\in$ - знак принадлежности $x_i \in \overline{X}$,

$\varnothing$ - пустое множество,

$\sum\limits_{i=1}$ - знак суммы $\left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \ldots + a_n\right)$, а $\prod\limits_{i=1}$ - знак произведения $\prod\limits_{i=1}^{n} a_i = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdots a_n$. С остальными символами мы будем знакомиться по мере их введения.

Все буквы в выражениях делятся на четыре типа.

1.Имена – символы, значения которых не меняются во всех выражениях. Например: «+»; «-»; $\sin\alpha$; 0,1,2,…, $\sqrt[3]{}$; $\Leftrightarrow$; $\forall$; π; e;…

2.Постоянные – символы, значение которых не меняется в данной задаче. Например: $P_1(x) = a_0 + a_1 x$ полином первой степени, где a_0 и a_1 постоянные.

3.Переменные (свободные переменные), которые меняются в данной задаче: $y = f(x),\quad x \in R$

4.Связанные переменные (на них накладываются некоторые условия). Например, задано $y = a^x,\quad x \in R$ и $x \le 2$;

$\int f(x)dx = \{(F(x) + C) / F'(x) = f(x)\}$ или $f(x) = \left(x^2 - a^2\right)$ при $x + b = c$.

7.1. Двоичная система счисления

Существует несколько систем счисления. Например, в основу счисления закладывают цифру 7 или 12 (Англия). Наиболее популярной является десятичная система счисления, и она принята универсальной. Любое число можно выразить по степеням числа 10 (включая отрицательные целые степени). Например, $3421{,}3 = 3 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^0 + 3.10^{-1}$.

Здесь каждая цифра стоит на своей позиции – тысячи, сотни, десятки, единицы и одна десятая. В настоящее время становится более популярной двоичная система счисления, в основу которой положены всего два числа 0 и 1. Английский математик Джордж Буль изобрел логическую систему, которая вместе с двоичной системой счисления положила начало вычислительной техники. Возникла новая наука – математическая логика. Д.Буль изобрел систему обозначений и правил (алгебру) применяемую к всевозможным объектам исследования от чисел и букв до предложений и их композиций. Пользуясь этой алгеброй можно закодировать высказывание, истинность или ложность которого можно логически исследовать. Три основные операции булевой алгебры – «И», «ИЛИ», «НЕ». Все другие операции сводятся к этим трем основным. Логика двойственна по своей сути, так как оперируют лишь с двумя сущностями – «истина» или «ложь» («да» или «нет», «открыт» или «закрыт»). Истинному значению приписывают значение I, а ложному 0. Такая система, очистив логические аргументы от словесной шелухи, может обеспечить поиск правильного заключения или решения и сделать его всегда достижимым. Такая алгебра универсальна. Сначала бинарную алгебру применяли для описания и анализа электрических переключательных схем. Затем ее успешно применили в вычислительной технике, программировании и изучении законов человеческого мышления. В настоящее время принят стандартный код информации ASC II, где вся практически полезная информация закодирована с помощью двух цифр 0 и I. Принята система 7 двоичных разрядов. Каждой прописной и строчной букве, цифре, знаку препинания и операторам ставится в соответствие цепочка из семи двоичных разрядов (0 или I), называемых битами. Восьмой разряд служит контролем правильности кода. Семь значимых битов дают, как покажем, $2^7 = 128$ всевозможных перестановок из цифр 0 и I. Рассмотрим подробнее арифметическую схему двоичной системы счисления.

Итак, число, 3421 можно переписать в двоичной системе счисления

$$3421 = 1\cdot 2^{11} + 1\cdot 2^{10} + 0\cdot 2^{9} + 1\cdot 2^{8} + 0\cdot 2^{7} + 1\cdot 2^{6} + 0\cdot 2^{5} + 1\cdot 2^{4} + 1\cdot 2^{3} +$$

$$+1\cdot 2^{2} + 0\cdot 2^{1} + 1\cdot 2^{0}.$$

Основные позиции определяются: $2^0=1$; $2^1=2$; $2^2=4$; $2^3=8$; $2^4=16$; $2^5=32$; $2^6=64$; $2^7=128$; $2^8=256$; $2^9=512$; $2^{10}=1024$; $2^{11}=2048$; $2^{12}=4096$; $2^{13}=8192$; $2^{14}=16384$;…

Связь систем счисления для чисел, например, от 1 до 25 определяется следующим образом.

Десятичная	Двоичная	Десятичная	Двоичная
0000	000000	0016	010000
0001	000001	0017	010001
0002	000010	0018	010010
0003	000011	0019	010011
0004	000100	0020	010100
0005	000101	0021	010101
0006	000110	0022	010110

0007	000111	0023	010111
0008	001000	0024	011000
0009	001001	0025	011001
0010	001010	….	
0011	001011		
0012	001100		
0013	001101		
0014	001110		
0015	001111		

Пример. 10110 $\Rightarrow 1\cdot 2^4 + 0\cdot 2^3 + 1\cdot 2^2 + 1\cdot 2^1 + 0\cdot 2^0 = 16+4+2 = 22$.
Пример. 10000 $\Rightarrow 1\cdot 2^4 + 0\cdot 2^3 + 0.2^2 + 0.2^1 + 0.2^0 = 16$.

Правило сложения: $\begin{array}{r}0\\ +0\\ \hline 0\end{array}\quad \begin{array}{r}1\\ +0\\ \hline 1\end{array}\quad \begin{array}{r}0\\ +1\\ \hline 1\end{array}\quad \begin{array}{r}1\\ +1\\ \hline 10\end{array}$,

так как $2^1 + 2^1 = 2^2$ осуществляет переход в другую позицию

$$\begin{array}{rrrrr}0&0&0&1&0\\ +0&0&0&1&0\\ \hline 0&0&1&0&0\end{array} \Rightarrow \begin{array}{r}2\\ +2\\ \hline 4\end{array}.$$

Разряды

$$\text{Пример}\ \begin{array}{rrr}2&1&9\\ +&1&9\\ \hline 2&3&8\end{array} \Rightarrow \begin{array}{rrrrrrrr}128&64&32&16&8&4&2&1\\ 1&1&0&1&1&0&1&1\\ +0&0&0&1&0&0&1&1\\ \hline 1&1&1&0&1&1&1&0\end{array},$$

где 11101110 и есть число 238 в двоичной системе счисления.

Рассмотрим операции умножения и деления в двоичной системе счисления

Десятичная

x	0	1	2	3	…
0	0	0	0	0	
1	0	1	2	3	
2	0	2	4	6	
3	0	3	6	9	

Двоичная

x	0	1
0	0	0
1	0	1

Пример.

$$\begin{array}{r}\times\ 1110101\\ 110010\\ \hline 0000000\\ 1110101\end{array}$$

$$\begin{array}{r}
0000000\\
0000000\\
1110101\\
1110101\\
\hline
1011011011010
\end{array}$$

Расшифруем и проверим $2^6 + 2^5 + 2^4 + 2^2 + 2^0 = 64 + 32 + 16 + 4 + 1 = 117$ и $2^5 + 2^4 + 2^1 = 32 + 16 + 2 = 50$. После умножения числа 117 на 50 в двоичной системе счисления получим число 1011011011010 или $2^{12} + 2^{10} + 2^9 + 2^7 + 2^6 + 2^4 = 4096 + 1024 + 512 + 128 + 64 + 16 = 5850$.

*Проверк**а***: $\begin{array}{r} 117\\ \times 50\\ \hline 5850 \end{array}$.

Операцию деления продемонстрируем на примере: $\begin{array}{r|l} 75 & 25\\ \cline{2-2} 75 & 3\\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$

$$\begin{array}{r|l}
1001011 & 011001\\
\cline{2-2}
011001 & \quad 11\\
011001 & \\
011001 & \\
\hline
0000000 &
\end{array}$$

Ответ: $3/_2$ = 000011.

Таким образом, в двоичной системе счисления, как и десятичной, над числами можно производить любые арифметические действия.

7.2. Множества и действия с ними. Элементы комбинаторики. Нечеткие множества

Рассмотрим конечные множества и их алгебру. Множество считается определенным, если указаны все его элементы с помощью какого-либо признака или с помощью полного перечисления элементов множества. Например, $A = \{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$ или $A = \{x \in z,\ |x| \le 3\}$ - ограниченное множество целых чисел.

Множества обозначаются большими латинскими буквами $A,\ B,\ C,\ldots$, а их элементы малыми буквами $a,\ b,\ c,\ldots$ Запись $a \in A$ обозначает, что a элемент принадлежит A, а запись $b \notin B$ - b не принадлежит B. Исходное множество называется универсальным и обозначается U. Количество элементов конечного множества называется мощностью множества A и обозначается как $|A|$ или $N(A)$. Множество, содержащее один элемент, называется единичным, а множество, не содержащее ни одного элемента, называется пустым множеством и обозначается $\varnothing$. Два множества считаются равными $A = B$, если элементы первого множества являются элементами второго множества, и наоборот $a \in A,\ a \in B \implies A = B$. Если каждый элемент множества B принадлежит множеству A, но не каждый элемент множества A принадлежит множеству B, то B называют подмножеством множества A и обозначают $B \subset A$. Принято считать, что $A \subset A$, каково бы ни было множество A. Пустое множество считается подмножеством каждого множества $\varnothing \subset A$. Множество называется упорядоченным (пример, вектор $\bar{x} \subset A_n$), если каждому его элементу поставлено в соответствие некоторое число – номер элемента от 1 до n, где n натуральное число $(n \subset N)$, так что различным элементам множества соответствуют различные числа. Всякое множество можно упорядочить, если переписать все его элементы в некоторый список и пронумеровать его элементы. Так, например, студенты какой-либо учебной группы являются просто множеством. Записанные в учебный журнал посещаемости занятий и успеваемости они становятся уже упорядоченным множеством. Упорядоченное множество обозначается $\overline{A}$. Возможно, рассмотрение упорядоченного подмножества $\overline{B}$ данного неупорядоченного множества A.

Комбинаторикой называется раздел дискретной математики. Основной задачей комбинаторики является задача о размещении элементов множества в соответствии со специальными правилами и выяснения того факта сколькими способами это можно сделать. Например, сколькими способами можно составить команду из трех учеников, состоящую из двух мальчиков и одной девочки, если в классе 15 девочек и 12 мальчиков. Если два альтернативных действия (взаимно исключающих) могут быть выполнены m и n способами, то выполнения одного из них (хотя бы одного из них) возможно $n+m$ способами. Например, если в вазе 10 груш и 5 яблок, то выбрать и съесть один из фруктов можно 15 способами.

Если требуется выполнить одно за другим два действия и если первое действие можно сделать n способами, а второе m способами, то действия можно выполнить $n \times m$ способами.

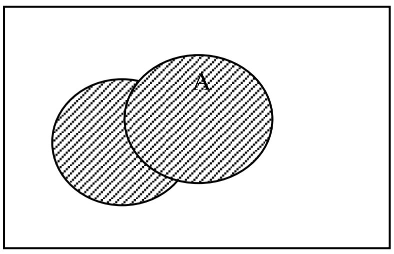
Например. Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, если в записи этих цифр: *а)* цифры могут повторяться; *б)* ни одна цифра не повторяется; *в)* полученное число делится на 5?

Решение. *а)* $\underline{6} \times \underline{7} \times \underline{7} = 294$ - три позиции заполняются количеством способов и способы перемножаются,

б) $6 \times 6 \times 5 = 180$; в) $6 \times 6 \times 2 = 72$.

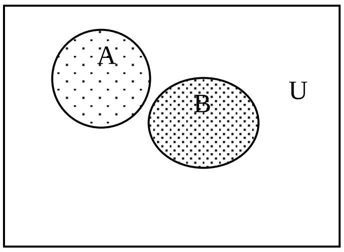
Рассмотрим алгебру множеств.

Если A и B два множества, то множество C, состоящее из элементов либо множества A, либо множества B называется объединением $A \cup B$ или просто логической суммой множеств A и B. Обозначается $C = A \cup B = A + B$, $x \in C$, $C = \{x \setminus x \in A \text{ или } x \in B\}$



Например, $A = \{1,2,3,4,5\}$ и $B = \{4,5,6,7,8\}$, то $C = A \cup B = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$.

Видно, что элементы множеств A и B входят в множество Столько один раз. Рис. 7.1



Можно проиллюстрировать объединение множеств на диаграмме Вьена с помощью кругов Эйлера. Вся площадь диаграммы Вьена является универсальным множеством $(A \subset U,\ B \subset U)$.Множество C изображается как общая площадь этих кругов. (Рис. 7.1).

Рис. 7.2

Если множества A и B не имеют общих элементов, то они изображаются в виде не пересекающихся кругов Эйлера. Определим $\overline{B}$ как дополнение множества B $(\overline{B} \cup B = U)$.

Операция логического сложения удовлетворяет коммутативному и ассоциативному законам: $A \cup B = B \cup A$, $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$.

Легко увидеть, что $A \cup A = A$ и $A \cup \varnothing = A$.

Если A и B два множества, то множество C, которому принадлежат только те элементы, которые являются общими для множеств A и B, называется пересечением множеств A и B или логическим произведением этих множеств и обозначается $C = A \cap B = A \cdot B$. Таким образом $C = A \cap B = A \cdot B = \{x \mathrm{I} x \in A,\ x \in B\}$. Логическое умножение подчиняется коммутативному ($A \cap B = B \cap A$), ассоциативному ($A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$), дистрибутивному ($A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$) законам. Пересечение множеств можно проиллюстрировать на диаграмме Вьена,

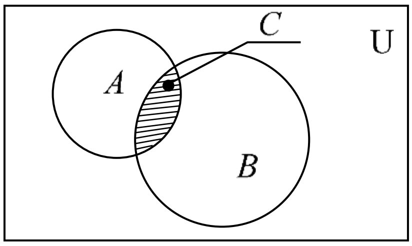


Рис. 7.3

как общую площадь пересечения кругов Эйлера. Очевидно, что если общих элементов у множеств A и B нет, то $A \cap B = \varnothing$. Логическое умножение можно легко обобщить на любое количество множеств. Покажем это на примере трех множеств (на рисунке 7.4 показано расположение соответствующих пересечений).

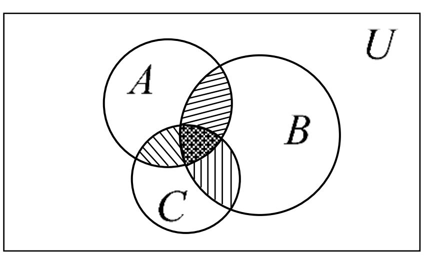


Рис. 7.4

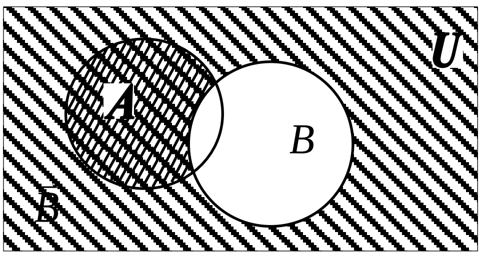
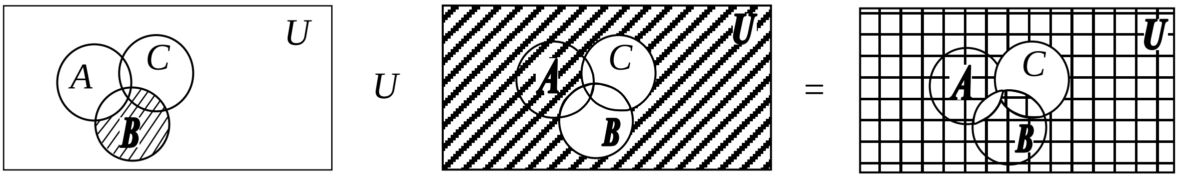


Рис. 7.5

Можно ввести операцию разности множеств или логического вычитания (исключения) $A/B = A - B = C,\ \ x \in C,\ C = \{x / x \in A,\ x \notin B\}$. Для выше приведенного примера $C = A/B = \{1{,}2{,}3\}$ и $B/A = \{6{,}7{,}8\}$. Однако эта операция не самостоятельная и её можно заменить композицией предыдущих операций. Действительно, прямо из рисунка 7.5 видно, что $A/B = A \cap \overline{B}$.

Пример. Построить диаграмму Эйлера-Вьена для множества $\left(\overline{A} \cap B\right) \cup \left(\overline{C} \setminus B\right)$.

Решение.



Поставим задачу определить число элементов суммы множеств. Пусть N(A) - количество элементов множества A, а N(B) - множества B, тогда непосредственно из диаграммы Вьена (Рис. 7.3) следует, что

$$N(A \cup B) = N(A) + N(B) - N(AB) \qquad (7.1)$$

Здесь учитывается, что все элементы в логическую сумму входят только один раз. Для суммы трех множеств получаем (см. рис. 7.4)

$$N(A \cup B \cup C) = N(A) + N(B) + N(C) - N(A \cap B) - N(B \cap C) - N(A \cap C)$$
$$+ N(A \cap B \cap C). \qquad (7.2)$$

Можно обобщить на любое конечное количество слагаемых множеств

$$N(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} N(A_i) - \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}}^{n} N(A_i \cap A_j) + \ldots + (-1)^n N\left(\mathop{\Pi}_{i=1}^{n} A_i\right) \qquad (7.3)$$

Пример. В классе 15 девочек, из них 7 блондинок и одна блондинка любит математику. Всего в классе 12 блондинов и из них 5 любят математику. Любящих математику учеников 10 их них 3 девочки. Сколько учеников в классе?

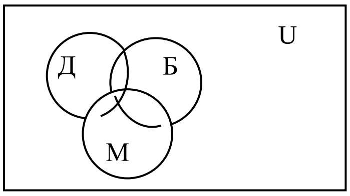
Решение. Имеем три пересекающиеся множества – девочки, блондины, ученики, любящие математику (обозначим Д, Б и М).

$N(Д) = 15,\ N(Б) = 12,\ N(М) = 10$

$N(Д \cap Б) = 7,\ N(Б \cap М) = 5,\ N(М \cap Д) = 3$

$N(Б \cap Д \cap М) = 1$

$N(Д \cup Б \cup М) = 15 + 12 + 10 - 7 - 5 - 3 + 1 = 23$



Ответ: В классе 23 ученика.

Элементы комбинаторики. Рассмотрим основные формулы подсчета количества способов различных преобразований множеств, так называемые комбинаторные коэффициенты. Прежде всего, определим, сколько перестановок можно сделать в данном множестве.

Пусть множество A имеет n элементов, тогда количество различных подстановок между собой определяется формулой

$$N \equiv P_n = n! \tag{7.4}$$

Напомним, что знак факториала определяет запись $n! = n \cdot (n-1)(n-2)...3 \cdot 2 \cdot 1$, где $0! = 1$ и $1! = 1$. Формула (7.4) легко получается, если вспомнить, что способы действий перемножаются.

Пусть имеем n позиций. На первую позицию претендует n элементов, на вторую $n-1$ элементов и так далее. В конце концов, на последнюю позицию претендует только один оставшийся элемент.

Пример. Сколькими способами можно расставить пять книг на полке?

Решение. $N = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5! = 120$.

Пример. Сколькими способами можно переставить n элементов так, чтобы данные два элемента не стояли рядом?

Решение. Всего имеется $n!$ различных перестановок. Количество способов, когда данные элементы стоят рядом, равно $2(n-1)(n-2)!$, так как двумя способами их можно переставить между собой, $(n-1)$ способами разместить среди n элементов и $(n-2)!$ способами можно переставить оставшиеся $(n-2)$ элемента, которые нас не интересуют. Таким образом, количество способов перестановок, когда заданные два элемента не стоят рядом, равно $N = n! - 2(n-1)(n-2)! = (n-2)(n-1)!$.

Рассмотрим задачу о размещении k элементов из данных n элементов множества. Пусть само множество неупорядочено. Всего способов перестановок этого множества, как мы уже знаем, $n!$. Нас интересует упорядоченное распределение только k элементов из n, остальные $n-k$ элементов нас не интересуют, способов же их перестановки будет $(n-k)!$. Удаляя эти способы, получим количество перестановок k -элементов из n, которое называется размещением k элементов среди n элементов и обозначается

$$N \equiv A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} \tag{7.5}$$

Пример. Сколькими способами трех человек можно рассадить на десять стульев?

Решение: $N = A_{10}^3 = \dfrac{10!}{7!} = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$. Действительно, количество способов поместить первого человека на 10 стульев равно 10, второго – 9 способами, поскольку одно место уже занято, а третьего – уже только 8 способами. Получаем $N = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$.

Рассмотри задачу о числе сочетаний k элементов из n элементов. Если нас не интересует взаимная перестановка k элементов, а способов её сделать равно $k!$, а интересуют только их сочетания, то количество способов выбрать k элементов из n определяется формулой

$$N \equiv C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} \tag{7.6}$$

и называется числом сочетаний k элементов из n элементов.
Пример. Сколькими способами можно выбрать 3 книги из 12?
Решение. Нас не интересует последовательность выбора этих трех книг, а только их сочетания, поэтому имеем $N = C_{10}^{3} = \frac{10!}{3!7!} = 120$.
Пример. В турнире принимают участие n- шахматистов, и каждые два из них встречаются между собой только один раз. Сколько шахматных партий будет сыграно?
Решение. $N = C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$.

Из формулы для определения числа сочетаний k элементов из n, следует симметрия этого числа по индексам

$$C_n^k = C_n^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \tag{7.7}$$

Числа C_n^k являются биномиальными коэффициентами бинома Ньютона $(a+b)^n$ и определяются как постоянные в сумме

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}. \tag{7.8}$$

Так, для $n=2$ имеем $C_2^0 = C_2^2 = 1$, $C_2^1 = 2$; для $n=3$ имеем $C_3^0 = C_3^3 = 1$, $C_3^1 = C_3^2 = 3$.
Умножая бином $(a+b)^n$ на $(a+b)$, легко получить свойство:

$$C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k-1} \tag{7.9}$$

Умножая бином $(a+b)^n$ на $(a+b)^m$, можно получить ещё одно свойство:

$$C_{n+m}^k = \sum_{i=0}^{n} C_n^i C_m^{k-i} \tag{7.10}$$

Задавая различные a и b в биноме, можно получить следующие биномиальные тождества:

$$\text{для } a=b=1,\ C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + ... + C_n^n = 2^n, \tag{7.11}$$

$$\text{для } a=-b=1,\ C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - .... + (-1)^n C_n^n = 0. \tag{7.12}$$

Предпоследнее тождество определяет количество всех подмножеств множества A из n элементов, включая пустое множество.
Пример. Пусть дано множество $A = \{a,b,c\}$. Определить количество всех подмножеств, образующихся из этого множества. *Решение*: имеем $A = \{\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},\{a,b,c\},\varnothing\}$. $N(M) = 8 = 2^3$.

Если множество A имеет одинаковые повторяющиеся элементы, то их перестановка между собой не приводит к новому множеству. Поэтому надо исключить способы, когда меняются местами одинаковые элементы; число последних пусть будет $k_1, k_2, ..., k_m$, причем $k_1 + k_2 + k_3 + ... + k_m = n$. Тогда количество способов переставить элементы между собой при условии, чтобы все комбинации были различны, определяется формулой

$$N \equiv P_n(k_1, k_2, ..., k_m) = \frac{n!}{k_1! k_2! ... k_m!} \ . \qquad (7.13)$$

Пример. Сколькими способами можно переставить буквы в слове «мама»?

Решение: В данном слове буквы «м» и «а» встречаются два раза, поэтому число способов получить различные перестановки равно $N = P_4(2,2) = \frac{4!}{2!2!}$

Выражение (7.13) определяет коэффициенты полиноминальной формулы

$$(x_1 + x_2 + ... + x_n)^m = \sum_{m_1 + m_2 + .. m_n = m} \frac{m!}{m_1! m_2! ... m_n!} x_1^{m_1} \cdot x_2^{m_2} \cdot ... x_n^{m_n} \qquad (7.14)$$

Как частный случай, для двух слагаемых получаем бином Ньютона

$$(x_1 + x_2)^n = \sum_{m_1 + m_2 = m} \frac{n!}{m_1! m_2!} x_1^{m_1} \cdot x_2^{m_2} = \sum_{m=0}^{n} C_n^m x_1^m x_2^{n-m}, \text{ где } m_1 = m \text{ и}$$

$$m_2 = n - m.$$

Пример. Найти коэффициент при x^{12} в разложении $(1 - x^2 + 2x^3)^8$.

Решение: Исходя из целочисленности показателя степени, получаем 12=6+6, где $m_2 = 3$, а $m_3 = 2$. Тогда $P_{12} = (-1)^3 \frac{8!}{3!2!} \cdot 2^2$.

Рассмотрим размещения k элементов с повторением из n элементов. Очевидно, что таких способов $N \equiv \overline{A}_n^k = n^k$ (7.15)

Поясним на *примере*. Сколькими способами можно составить пятизначный номер из девяти цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 так, чтобы цифры в номере могли повторяться?

Решение: На каждую из 5 позиций претендуют по 9 цифр, поэтому $N = \overline{A}_9^5 = 9^5 = 6561$.

Пусть имеются n различных элементов множества и из них надо образовать k комбинаций, не принимая во внимание порядок элементов в каждой комбинации. Образуемые различные комбинации должны отличаться хотя бы одним элементом. В этом случае число сочетаний с повторением определяется формулой

$$N \equiv \overline{C}_n^k = C_{n+k-1}^k \qquad (7.16)$$

Действительно, если n элементов расположить по типам и затем их перенумеровать, а затем ещё раз перенумеровать, прибавляя последовательно по единице к номеру каждого типа, то получим сочетание уже без повторений, состоящее из неповторяющихся чисел 1, 2, 3, …., *n+k-1*. Заметим, что все эти сочетания различны и в каждое сочетание входит k элементов.

Пример. В магазине продают пирожные 4 сортов. Сколькими способами можно купить 7 пирожных?

Решение. Очевидно, что сорта пирожных, среди купленных, будут повторяться. Имеем $k = 7$ и $n = 4$, поэтому $N = \overline{C}_4^7 = C_{4+7-1}^7 = C_{10}^7 = C_{10}^3 = 120$.

Пример. Сколько костей имеется в домино, если на каждой из костей изображено по две из 7 цифр: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 и возможны повторения-дубли?

Решение: $N = \overline{C}_7^2 = C_8^2 = 28$.

Пример. Дано множество $A = \{a, b, c\}$. Образовать множество по 2 элемента с повторением и определить количество элементов этого множества.

Решение. $B = \{ac, bc, ab, aa, bb, cc\}$, $N(B) = \overline{C}_3^2 = C_4^2 = 6$.

Мы рассмотрели задачи на перестановки, размещения и сочетания, как с повторением, так и без них. Однако во многих задачах приходится иметь дело с комбинациями различного типа. В этом случае трудно дать общие рекомендации к решению таких конкретных задач, но надо помнить, что число способов совершения действий будет только перемножаться.

Пример. Имеются n различных флагов. Найти число способов распределения их по k различным флагштокам $(n \geq k)$.

Решение. Здесь важно учесть перестановку n флагов по флагштокам с повторением $N = n! C_{n+k-1}^{k-1} = A_{k+n-1}^n = \overline{A}_k^n$.

Пример. Для патрулирования необходима группа из 2 солдат и одного офицера. В патрульной роте 300 солдат и 20 офицеров. Сколькими способами можно составить патруль?

Решение. $N = C_{300}^2 \cdot C_{20}^1$.

Пример. Найти число различных в главном исходов первенства страны по футболу, когда участвуют 17 команд, а главными исходами нужно считать три первых места и 4 последних, когда команды переходят в низшую лигу.

Решение. Заметим, что важна расстановка только 3 первых мест, поэтому

$$N = A_{17}^3 \cdot C_{14}^4 = 4084080 .$$

Пример. В классе 20 мальчиков и 20 девочек. Для участия в вечере художественной самодеятельности нужно выделить танцевальный дуэт, дуэт певцов и гимнастический дуэт, каждый из которых состоит из мальчика и девочки. Сколькими способами можно это сделать, если все участники поют, танцуют и гимнасты? *Решение*. $N = \left(A_{20}^3\right)^2$.

Пример. Сколькими способами можно составить трехзначное число из цифр от 0 до 9 с повторениями?

Решение. $N = \overline{A}_{10}^3 - \overline{A}_{10}^2 = 10^3 - 10^2 = 900$, или по-другому

$N = 9 \cdot 10 \cdot 10 = 900$.

Пример. Даны натуральные числа от 1 до 30. Сколькими способами можно выбрать из них три числа так, чтобы их сумма была четной?

Решение. Сумма трех чисел будет четной, если все слагаемые – четные числа или одно слагаемое – четное, а два других – нечетные. Таким образом, имеем $N = C_{15}^3 + C_{15}^2 \cdot C_{15}^1 = 2030$.

Пример. Сколькими способами на первой горизонтали шахматной доски можно расставить следующие одноцветные фигуры: две ладьи, два коня, два слона, одного ферзя и одного короля?

Решение. $P_8(2,2,2) = \dfrac{8!}{2!2!2!}$.

Пример. Для автомобильных номеров используется 10 цифр и 28 букв. Каждый номер состоит из трех букв и четырех цифр. Какое максимальное число машин может получить при такой системе нумерации?

Решение. Исключая номер вида 00-00, получим

$N = \left(\overline{A}_{10}^4 - 1\right) \cdot \overline{A}_{28}^3 = \left(10^4 - 1\right) \cdot 28^3$.

Пример. На полке стоят 7 книг разных авторов и трехтомник одного автора. Сколькими способами можно расставить эти книги на полке так, чтобы книги одного автора стояли рядом?

Решение. Представим себе три книги одного автора, как одну книгу, тогда

$$N = P_8 \cdot P_3 = 8! \cdot 3!.$$

В заключение этого параграфа рассмотрим нечеткие множества. В определении множества есть неоднозначность, связанная с неопределенностью объекта исследования. Допустим, имеем множество домов. Считать ли землянку домом? Здания больше 10 этажей, как правило, используют под офисы, считать ли их домами? Можно оговорить, что здания с 1 этажа по 10 есть дома и в них живут примерно 90% всех людей. Степень принадлежности элемента a множеству A может быть представлена дробным числом из интервала $[0;1]$. Теория нечетких множеств была развита американским математиком Л. Задэ и обобщает теорию множеств Кантора, когда функции принадлежности принимают значения 0 или 1. Степень принадлежности или функция принадлежности выбирается на основе статистических данных либо интуитивно. Например, множество японских легковых автомобилей в России фирмы «Тойота» характеризуется числом 0,4; «Хонда» – 0,2; «Нисан»– 0,2; «Мазда» – 0,1 и т.д.

Обозначают нечеткие множества, как $\widetilde{A}$ и задаются, как пара чисел

$$\widetilde{A} = \{(\mu / x) / x \in H \subset M\}, \qquad (7.17)$$

где M – канторовское базовое множество, H – нечеткое множество и $\mu \in [0{,}1]$ есть степень принадлежности $x \in H$.

Пример. $\widetilde{D} = \{(1/1);(0{,}95/2);(0{,}9/3);(0{,}8/4);(0{,}51/5)\}$, где $H = \{1,2,3,4,5\} \subset M = \{x / x \in N\}$ и $1;0{,}95;0{,}9;0{,}8;0{,}51$ значения функции принадлежности этих элементов.

Рассмотрим алгебру нечетких множеств.

В объединении нечетких множеств, входят элементы с наибольшей степенью принадлежности среди всех входящих элементов.

Пример. $\tilde{A}=\{(0{,}3/3);(0{,}8/4)\}$, $\tilde{B}=\{(0{,}5/3);(0{,}7/4);(0{,}2/5)\}$, то $\tilde{A}\bigcup\tilde{B}=\{(0{,}5/3);(0{,}8/4);(0{,}2/5)\}$.

В пересечении нечетких множеств, входят общие элементы с наименьшей степенью их принадлежности.

Для того же примера $\tilde{A}\bigcap\tilde{B}=\{(0{,}3/3);(0{,}7/4)\}$.

Если нечеткие множества не имеют общих элементов, то и для них выполняется $\tilde{A}\bigcap\tilde{B}=\varnothing$.

Итак, можно сформулировать следующие правила:

$$\tilde{A}\bigcup\tilde{B}=\{(\max\mu/x)/x\in H\subset M,\ x\in A \text{ или } x\in B\} \quad (7.18)$$

$$\tilde{A}\bigcap\tilde{B}=\{(\min\mu/x)/x\in H\subset M,\ x\in A \text{ и } x\in B\} \quad (7.19)$$

Можно определить разность нечетких множеств

$$\tilde{A}/\tilde{B}=\tilde{A}-\tilde{B}=\tilde{A}\bigcap\overline{\tilde{B}} \quad (7.20)$$

и их симметричную разность

$$\tilde{A}\oplus\tilde{B}=\left(\tilde{A}/\tilde{B}\right)\bigcup\left(\tilde{B}/\tilde{A}\right)=\left(\tilde{A}\bigcap\overline{\tilde{B}}\right)\bigcup\left(\tilde{B}\bigcap\overline{\tilde{A}}\right), \quad (7.21)$$

которая на диаграмме Вьена будет представлена рисунком 7.6. Количество элементов множества определяется $N\left(\tilde{A}\oplus\tilde{B}\right)=N(A)+N(B)-2N(A\bigcap B)$.

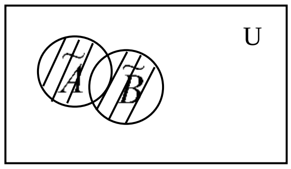


Рис. 7.6

Перечислим основные свойства операций над нечеткими множествами.

1. Инволюция, когда дополнение дополнения нечетного множества $\tilde{A}$ есть само множество $\tilde{A}$, $\overline{\overline{\tilde{A}}}=\tilde{A}$.
2. Идемпотентность пересечения и объединения, $\tilde{A}\bigcap\tilde{A}=\tilde{A}$, $\tilde{A}\bigcup\tilde{A}=\tilde{A}$.
3. Коммутативность, $\tilde{A}\bigcap\tilde{B}=\tilde{B}\bigcap\tilde{A}$, $\tilde{A}\bigcup\tilde{B}=\tilde{B}\bigcup\tilde{A}$.
4. Ассоциативность, $\left(\tilde{A}\bigcap\tilde{B}\right)\bigcap\tilde{C}=\tilde{A}\bigcap\left(\tilde{B}\bigcap\tilde{C}\right)$ и $\left(\tilde{A}\bigcup\tilde{B}\right)\bigcup\tilde{C}=\tilde{A}\bigcup\left(\tilde{B}\bigcup\tilde{C}\right)$
5. Дистрибутивность, $\tilde{A}\bigcap\left(\tilde{B}\bigcup\tilde{C}\right)=\left(\tilde{A}\bigcap\tilde{B}\right)\bigcup\left(\tilde{A}\bigcap\tilde{C}\right)$.
6. Законы де Моргана, $\overline{\tilde{A}\bigcap\tilde{B}}=\overline{\tilde{A}}\bigcup\overline{\tilde{B}}$ и $\overline{\tilde{A}\bigcup\tilde{B}}=\overline{\tilde{A}}\bigcap\overline{\tilde{B}}$.
7. Разное: $\tilde{A}\oplus\tilde{B}=\tilde{B}\oplus\tilde{A}$, $\tilde{A}\bigcup\varnothing=\tilde{A}$, $\tilde{A}\bigcap\varnothing=\varnothing$, $\tilde{A}\bigcup M=M$, $\tilde{A}\bigcap M=\tilde{A}$, где M – базовое множество.

7.3. Булева алгебра высказываний

Практическая деятельность человека показала, что для реализации идей надо принимать решения, то есть делать выводы из исходных данных и по некоторым законам. Как правило, это делается субъективно и интуитивно, опираясь на прошлый опыт. Однако во многих сложных и жизненно важных случаях необходимо принимать решения осознанно. Для этого существует наука – логика. Наука о правильных рассуждениях и доказательствах. Как из верных посылок посредством правильных выводов получить верные заключения. Ограничимся рассмотрением двухзначной логики, когда вывод может принимать одно из двух значений «истина» или «ложь».

Введем понятие высказывания. ***Высказывание*** – это повествовательное предложение, которое либо ложно, либо истинно. Пример истинного высказывания «Волга впадает в Каспийское море». Заметим, что вопросительные и восклицательные предложения к высказываниям не относятся. Высказывания обозначаются как $A, B, C...$

Простое высказывание состоит из одного предложения имеющего подлежащее и сказуемое. Например, «Идет снег».

Составное высказывание конструируется из простых высказываний при помощи связок «и», «или» и «не», которые являются тремя основными логическими операциями булевой логики. Логические операции определяются однозначно, чтобы не возникли смысловые недоразумения.

Ложному высказыванию приписывается значение - 0(Л), а истинному приписывается значение - 1(И).

Рассмотрим подробнее основные операции над высказываниями.

Дизъюнкция (разъединение) – логическое объединение высказываний. Обозначается как $A \vee B = (A + B)$ и читается как «А или В». Она ложна, когда оба высказывания ложны. Заметим, что союз «или» имеет два смысла:

а.) включающий, например, «вода в реке или озере пресная»,

б.) исключающий, например, «дождь или снег».

Аксиомы операции логического объединения высказываний записываются в таблицу истинности

A	B	AVB
Л	Л	Л
Л	И	И
И	Л	И
И	И	И

0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

	A B	A + B

Отметим, что для двух высказываний, число исходов равно $2^2=4$.

Конъюнкция (соединение) – логическое пересечение высказываний. Обозначается как $A \& B = A \wedge B = A \cdot B$ и читается как «А и В». Операции конъюнкции подчиняются следующим аксиомам.

A	B	A∧B
Л	Л	Л
Л	И	Л
И	Л	Л
И	И	И

$0 \cdot 0 = 0$

$0 \cdot 1 = 0$

$1 \cdot 0 = 0$

$1 \cdot 1 = 1$

Видно, что конъюнкция двух истинных высказываний истинна.

Инверсия (отрицание). Обозначается, как $\overline{A} = \neg A$.

Аксиомы: $\overline{0} = 1$, $\overline{1} = 0$, $\overline{\overline{0}} = 0$, $\overline{\overline{1}} = 1$.

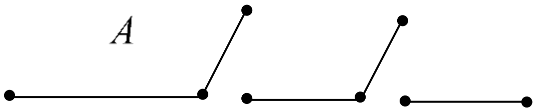
Например, A - на улице идет дождь, $\overline{A}$ - на улице дождь не идет.

Физическая иллюстрация этих операций может быть представлена с помощью электрических схем с переключателями.

$\overline{A}$:

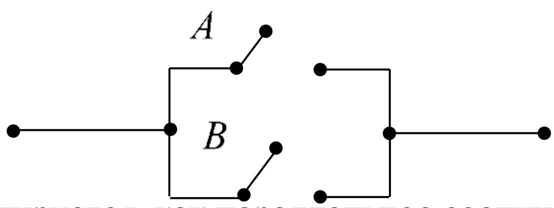
A интерпретируем, как отсутствие контакта.

$A \cdot B$:



интерпретируем, как последовательное соединение двух контактов.

$A + B$:



интерпретируется, как параллельное соединение двух контактов.

Эта схема замкнута, когда хотя бы один контакт замкнут. Приведем ещё две операции, применяемые в традиционной логике. Это операции отношения высказываний.

Импликация (логическое продолжение). Обозначается как $A \Rightarrow B$ и читается «если А, то и В». Здесь высказывание A называется ***посылкой***, а B - следствием или заключением. Таблица истинности для этой операции имеет вид:

A	B	A⇒B
И	И	И
И	Л	Л
Л	И	И
Л	Л	И

Эту операцию можно заменить на основные три операции следующим образом:

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\overline{A} \vee B).$$

Эквиваленция (логическое равенство) обозначается, как $A \Leftrightarrow B$ и читается «если и только если A, то B». Она тоже может быть исключена с помощью трех основных операций $(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (\overline{A} \wedge \overline{B})$.

Задача логики, это изучение зависимости между истинностью и ложностью простых и сложных высказываний.

Порядок следования операций по степени строгости (приоритетности) следующий - $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$.

Комбинации следует читать «изнутри наружу». Если сложное высказывание всегда истинно, вне зависимости от истинности составляющих его высказываний, то оно называется ***тавтологией*** (повторением). Например, $P \vee \overline{P}$ - тавтология, т.к.

P	$\overline{P}$	$P \vee \overline{P}$
И	Л	И
Л	И	И

Если сложное высказывание всегда ложно, вне зависимости от истинности или ложности его составляющих, то оно называется ***противоречием.***

Например, выражение $(\overline{p} \wedge \overline{q}) \wedge (p \wedge q)$ - противоречие. Покажем это на таблице истинности.

p	q	$\overline{p} \wedge \overline{q}$	$p \wedge q$	$(\overline{p} \wedge \overline{q}) \wedge (p \wedge q)$
И	И	Л	И	Л
Л	И	Л	Л	Л
Л	Л	И	Л	Л
И	Л	Л	Л	Л

Приведем основные схемы доказательств традиционной логики.

1. Цепь импликаций $\dfrac{A \Rightarrow B \Rightarrow C \Rightarrow ...H}{\therefore\ A \Rightarrow H}$,

где A - посылка, а H - заключение. Здесь обозначено $\therefore$ - «таким образом» или «следовательно».

2. Закон контрапозиции $A \Rightarrow B \Leftrightarrow \overline{B} \Rightarrow \overline{A}$.

Пример: «Погода является хорошей, если не идет дождь» эквивалентно «Если погода плохая, то идет дождь».

3. Доказательство от противного (сведение к абсурду)

$\dfrac{(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (A \wedge \overline{B}) \Rightarrow \overline{A}}{\therefore\ A \Rightarrow \overline{A}}$, отсюда следует, что А $\neq >$ В.

4. Эквивалентность, когда высказывание ассоциируется с другим высказыванием, про которое известно, что оно истинно или ложно

$$\frac{(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)}{\therefore\ A \Leftrightarrow B}.$$

Аргументация называется правильной, когда из правильных посылок делается правильный вывод (заключение).

Например, A -«драматург велик, если его пьесы популярны», B - «пьесы У.Шекспира часто ставятся в театрах», то можно сделать заключение по схеме доказательств № 4 «У.Шекспир - великий драматург».

Имеется две формы правильной аргументации

1. $P \Rightarrow Q$

   P - истина

   $\therefore Q$ -истина

2. $P \Rightarrow Q$

   $\overline{Q}$ - ложь

   $\therefore \overline{P}$ - ложь

и две формы неправильной аргументации

3. $P \Rightarrow Q$

   Q -истина

   $\therefore$ P -истина

4. $P \Rightarrow Q$

   $\overline{P}$ - ложь

   $\therefore \overline{Q}$ - ложь.

Например. P - «У.Уитмен писал стихи без рифм», Q - «хорошие стихи рифмованы». Следует неправильный вывод – «У.Уитмен плохой поэт».

Приведем таблицу истинности для четырех операций традиционной логики.

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
И	И	И	И	И	И
И	Л	Л	И	Л	Л
Л	И	Л	И	И	Л
Л	Л	И	Л	И	И

Свойства операций дизъюнкции и конъюнкции.

Коммутативность: $A+B=B+A$, $A \cdot B = B \cdot A$.

Ассоциативность: $(A+B)+C = A+(B+C)$,

$$(A \cdot B)\cdot C = A \cdot (B \cdot C).$$

Дистрибутивность: $A(B+C) = AB + AC$, $AB(C+D) = ABC + ABD$, $A + BC = (A+B)(A+C)$, $A + BCD = (A+B)(A+C)(A+D)$.

Идемпотентность: $A + A = A$, $A \cdot A = A$.

Отметим, что для удобства логического анализа вводят дополнительные композиционные операции, например:-штрих Шеффера (A I B) = ¬ (A $\wedge$ B), который читается как антиконъюнкция;

-стрелка Пирса или антидизъюнкция (A$\downarrow$B) = ¬(A$\vee$B);

-кольцевая сумма (A$\oplus$B) = ¬(A$\Rightarrow$B).

Приведем таблицу истинности для этих операций.

A	B	A I B	A$\downarrow$B	A$\oplus$B
0	0	1	1	0
0	1	1	0	1
1	0	1	0	1
1	1	0	0	0

7.4. Булевы функции. Дизъюнктивная и конъюнктивные формы булевых функций

Сложные высказывания рассматривают, как функции простых составляющих высказываний. Аргументами являются независимые переменные (простые высказывания), которые могут приобрести любые значения либо 0, либо 1. Функция же $f(A, B, C, ...)$ есть зависимая переменная и её значения либо 0, либо 1, полностью определяются значениями переменных и логическими связями между ними.

Операцией отношения во множестве n высказываний $M = \{A, B, C...\}$ называют всякую функцию $f(A, B, C, ...)$

n-переменных, со значениями в этом же множестве. Если переменная одна, то функцию называют ***унарной.*** Например, $f = A$, если переменных две, то функция называется ***бинарной***, например, $f = A \vee B$. Каждой паре значений A и B ставится в соответствие значение $f(A, B)$.

Булева функция называется тождественно истинной или тавтологией, если при любом наборе значений её аргументов, она принимает только одно значение –1(И) и тождественно ложной или противоречием, если при разном наборе значений переменных она принимает только одно значение 0(Л).

Заметим, что в силу идентичности операций конъюнкции и дизъюнкции по свойству идемпотентности

$$A + A = A \text{ и } A \cdot A = A$$

в булевых функциях нет коэффициентов и нет степеней.

Бинарные и более сложные булевы функции могут быть представлены в двух формах дизъюнктивной и конъюнктивной.

Если булева функция записана в виде дизъюнкции выражений, каждое из которых является либо отдельным аргументом, либо конъюнкцией некоторых аргументов, то эта функция представлена в дизъюнктивной нормальной форме (Д.Н.Ф.).

Например, $f(A, B, C, D) = AB + C\overline{D}$ и $f(A, B, C, D, E) = AB + CDE$.

Если булева функция записана в виде конъюнкций выражений, каждое из которых представлено или отдельным аргументом или дизъюнкцией отдельных аргументов, то она представлена в конъюнктивной, нормальной форме (К.Н.Ф.).

Например, $f = (A + B)(C + \overline{A} + D)$ и $f = AB(C + D + \overline{E})$.

Приведем примеры, когда булева функция представлена не в ДНФ и не в КНФ

$$f = A + B(C + \overline{D}) \quad \text{(не ДНФ)},$$

$$f = (A + B\overline{C})(D + E) \quad \text{(не КНФ)}.$$

Действия над булевыми функциями осуществляют с помощью следующих теорем.

1. Теорема поглощения в двух формах.

D: $A + AB = A$.

K: $A(A+B) = A$. (7.21)

2. Теорема склеивания тоже в двух формах

D: $AB + A\overline{B} = A$ (7.22)

K: $(A+B)(A+\overline{B}) = A$, где $B + \overline{B} = 1$ всегда истинна.

3. Теоремы де Моргана, связывающие операции конъюнкции, дизъюнкции и отрицания (инверсии) определяются

$$\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B} \tag{7.23}$$

-инверсия конъюнкции есть дизъюнкция инверсий,

$$\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B} \tag{7.24}$$

-инверсия дизъюнкций есть конъюнкция инверсий.

Заметим, что инвертирование сложных событий считается законченным, если знак отрицания стоит только над переменными, а не над их комбинациями.

Рассмотрим действия над булевыми функциями, представленными в дизъюнктивной форме. Например, возьмем функции трех аргументов $f = A \cdot \overline{B} + C$, где переменные пробегают $N = 2^3 = 8$ значений.

Пусть $A = 1$, то $f = \overline{B} + C$. Пусть $B = 1$, то $f = 0 + C = C$ и если $C = 0$, то $f = 0$. Таким образом при наборе значений $A = 1$, $B = 1$, $C = 0$ получаем $f = 0$. Набор значений аргументов это последовательность нулей и единиц, где первая цифра соответствует первому аргументу, вторая второму и так далее.

Для нашего примера $f(1,1,0) = 0$.

Принято аргументы строить в алфавитном порядке

$A, B, C, D, \dots, P, Q, X, Y$

Например, для функции $f = XY + P\overline{Q}$ дан набор 1001 и это значит, что $P = 1$, $Q = 0$, $X = 0$, $Y = 1$.

Получаем $f = XY + P\overline{Q} = 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 1$.

Можно связать наборы значений переменных в двоичной системе со значениями в десятичной системе счисления (см. 7.1). Так, например, если $A = 0$, $B = 1$, $C = 0$, $D = 1$, то набор 0101 можно представить, как число в десятичной системе счисления $0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 5$

Так числу 15 будет соответствовать набор 001111 и так далее.

Очевидно, что число наборов значений будет определяться числом $N = 2^n$, где n - число переменных булевой функции.

Итак, булева функция может быть задана двумя способами. Это аналитически как, например, $f(A, B, C) = A\overline{B} + C$ или таблично

N	A	B	C	f
0	0	0	0	0

1	0	0	1	1
2	0	1	0	1
3	0	1	1	1
4	1	0	0	1
5	1	0	1	1
6	1	1	0	0
7	1	1	1	0

Здесь $n=3$, $N=2^3=8$. Значение f определяется таблицами истинности для входящих в них переменных.

Отметим, что если булева функция принимает значение 1 только при одном наборе значений аргументов, а на всех остальных равна 0, то её называют ***минитермом***. Каждая из этих функций состоит из одной конъюнкции n-аргументов с инверсией или без.

Минитермом n - переменных называется такая конъюнкция их, в которую переменные входят один раз прямо или инвертировано.

Пример, для $n=3$

$m_0=\overline{A}\overline{B}\overline{C},\ m_1=\overline{A}\overline{B}C,\ m_2=\overline{A}B\overline{C},...$

Конструкция дизъюнктивной булевой функции состоит из дизъюнкции минитермов.

Например, $f=m_1+m_2=\overline{A}B\overline{C}+A\overline{B}C=(2{,}5)$. Здесь введено обозначение минитермов в десятичной системе. Для конечного набора переменных представить булеву функции в виде дизъюнкции минитермов можно единственным образом, поэтому булеву функцию в такой форме называют СДНФ – Совершенная Дизъюнктивная Нормальная Функция или канонической.

Булеву функцию можно разложить по любому её переменному. Например,

$$f(A_1,A_2,A_3...A_n)=A_1 f(0,A_1,A_2,A_3,...A_n)+\overline{A}f(1,A_1,A_2,...,A_n)\quad(7.25)$$

Булеву функцию удобно представить в так называемой матричной форме в виде карты Вейча (иногда называют диаграммой Карно). С помощью карты Вейча очень просто преобразовывать булевы функции в совершенную форму и минимизировать. Отметим, что карты Вейча удобны, когда число переменных $n\le 5$. Покажем принцип составления карт Вейча.

Для $n=2$, $A=1$ и $B=1$, тогда $11/_2=1\cdot 2^1+1\cdot 2^0=3$;

$A=0$ и $B=1$, то $01/_2=0\cdot 2^1+1\cdot 2^0=1$;

$A=1$ и $B=0$, то $10/_2=1\cdot 2^1+0\cdot 2^0=2$;

$A=0$ и $B=0$, то $^{00}\!/_{2}=0$.

	A	$\bar{A}$
B	AB	$\bar{A}B$
$\bar{B}$	$A\bar{B}$	$\bar{A}\bar{B}$

3	1
2	0

соответствует карте
в десятичной системе

Для $n=3$

	A	A	$\bar{A}$	$\bar{A}$
B	$AB\bar{C}$	ABC	$\bar{A}BC$	$\bar{A}B\bar{C}$
$\bar{B}$	$A\bar{B}\bar{C}$	$A\bar{B}C$	$\bar{A}\bar{B}C$	$\bar{A}\bar{B}\bar{C}$
		C	C	

Соответствует карта

6	7	3	2
4	5	1	0

Советуем самостоятельно это проверить.

Для $n=4$

	A	A			
B					
B					D
					D
		C	C		

12	14	6	4
13	15	7	5
9	11	3	1
8	10	2	0

Посмотрим, как наносится булева функция на карту Вейча и как она считывается с неё. Если булева функция представлена в виде суммы минитермов, то пишутся единицы в те клетки, где эти минитермы находятся.

Например. Дана $f=\bar{A}B\bar{C}+\bar{A}BC+A\bar{B}\bar{C}+ABC$. Изобразить соответствующую карту Вейча.

Решение. $n=3$.

	A	A		
B		ABC	$\bar{A}BC$	$\bar{A}B\bar{C}$
	$A\bar{B}\bar{C}$			
		C	C	

По структуре f сразу записываем эти термы в соответствующие клетки. Можно перевести все представленные наборы значений переменных в десятичную систему. Например, для первого минитерма имеем $A=0$, $B=1$, $C=0$

следует, что $010/_2 = 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = 2$.

Для второго минетерма: $A = 0$, $B = 1$, $C = 1 \Rightarrow 011/_2 = 3$.

Для третьего: $A = 1$, $B = 0$ и $C = 0$, то $100/_2 = 4$ и последнего $A = 1$, $B = 1$ и $C = 1$ следует, что $111/_2 = 7$.

Тогда ту же f можно записать в форме

$f = (2,3,4,7)$.

Заметим, что на карту Вейча можно нанести булеву функцию не только в СДНФ, но и в произвольной форме, так называемой тупиковой форме.

Например, $f = AB + \bar{A}C + A\bar{B}C$. Видно, что $n = 3$. Преобразуем её к СДНФ.

	A	A		
B		1	1	1
	1			
		C	C	

Таким образом, применяя теоремы склеивания и поглощения, всегда можно перейти от одной формы булевой функции к другой. Кроме этого, оказывается возможным ещё минимизировать булеву функцию.

Под упрощением (минимизацией) булевых функций понимают такие тождественные преобразования её формулы, которые приводят к уменьшению числа входящих аргументов. Поясним на примере.

Дана $f = A\bar{B} + \bar{A}\bar{C}D$ четырех аргументов, но входят они в неё 5 раз.

Другой пример. Дана $f = A + \bar{A}B + BC + AC$. Здесь аргументов $n = 3$, но 7 раз они входят в функцию. Давайте минимизируем с помощью теорем поглощения и склеивания. Так как $A + AC = A$, то $f = A + \bar{A}B + BC$ и осталось уже только 5 вхождений. Далее представим её как $f = AB + A\bar{B} + \bar{A}B + BC = B + A\bar{B} + BC = B + A\bar{B} = A + B$. Окончательно имеем только два вхождения. Видно, что от аргумента C булева функция вообще не зависит.

$$f(A,B,C) = f(A,B)$$

Рассмотрим конъюнктивную форму булевых функций. Всякая булева функция помимо ДНФ может быть представлена в КНФ. Так, например, $f = AB + AC$ в ДНФ можно представить в КНФ как $f = A(B + C)$.

Другой пример**,** $f = AB + \bar{B}CD$ можно представить как

$$f = (B + C)(B + D)(A + \bar{B}).$$

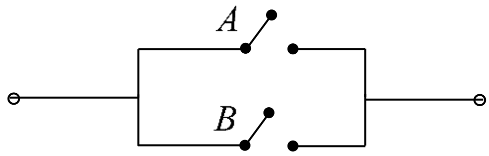
Покажем это, используя $(B + C)(B + D) = B + BC + BD + CD$ и $(A + \bar{B})(B + BC + BD + CD) = AB + ABC + ABD + ACD + \bar{B}B + \bar{B}BD + \bar{B}CD = AB(1 + C) + ABD + ACD + \bar{B}CD = AB(1 + D) + ACD + \bar{B}CD = AB + (A + \bar{B})CD = AB + \bar{B}CD$, так как $A + \bar{B} = \bar{B}$.

Конъюнктивные булевы функции тоже могут быть, как в нормальной форме, так и в СКНФ и, кроме того, в минимальной форме. Переход к КНФ из ДНФ осуществляется путем двойного инвертирования и использования теорем де Моргана. Первое инвертирование делается на уровне минитермов, затем преобразуется в зависимости от задачи и результат ещё раз инвертируется.

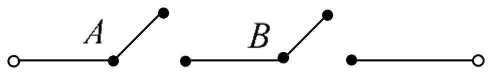
Макситермом называют булеву функцию, принимающую единичные значения на всех наборах переменных кроме одного, где она 0. Очевидно, что $\overline{M} = m$ и $\overline{m} = M$.

7.5. Приложение булевых функций к контактным схемам

Высказываниям можно сопоставить контакты в электрических цепях. Всякую булеву функцию можно представить сложной контактной схемой, поэтому иногда булеву функцию называют переключательной функцией. Термом называют только сумму или только произведение контактов - (A+B):



$-(A \cdot B)$:



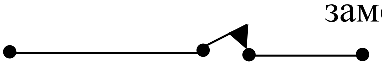
Булевы функции (контактные схемы) называются равными или эквивалентными, если при одних и тех же значениях входящих в неё высказываний (контактов) они будут одновременно равны 0 (контакт разомкнут) или 1 (контакт замкнут). Говорят, что в этом случае булевы функции изоморфны. Арифметика контактных схем совпадает с арифметикой высказываний.

•	0	1
0	0	0
1	0	1

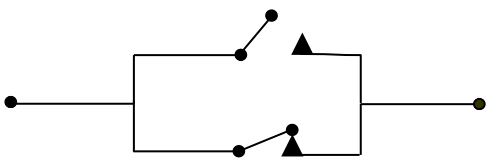
+	0	1
0	0	1
1	1	1

=	0	1
0	1	0
1	0	1

Любая контактная схема может быть представлена по-разному.
Например, можно схему

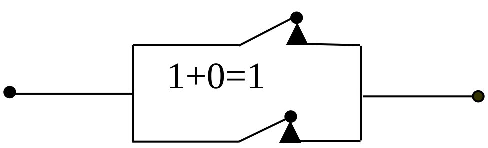


заменить на

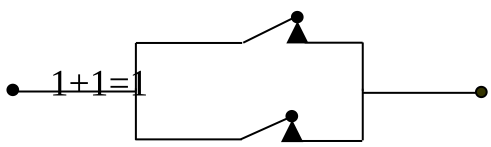


0+1=1

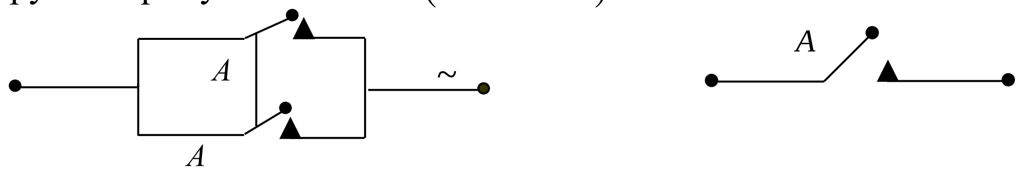
или



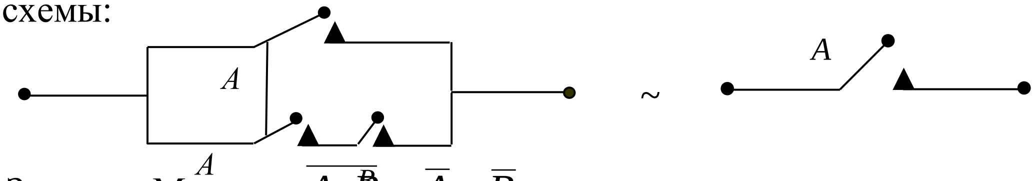
или



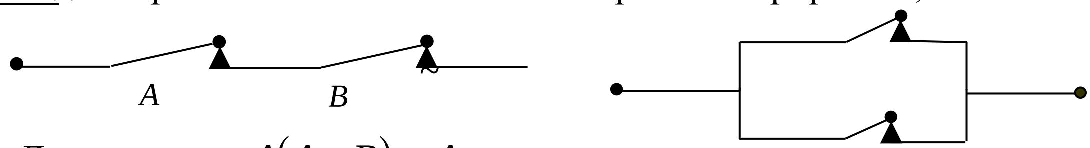
Одна и та же переключательная функция может быть выражена бесконечно большим числом способов. Эквивалентность следующих схем контактов демонстрирует теорему склеивания $(A + A = A)$.



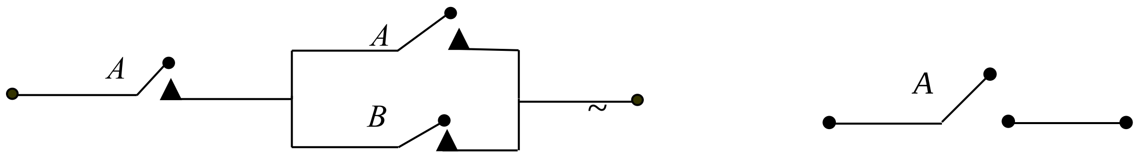
Теорему поглощения $A + AB = A$ демонстрируют следующие контактные схемы:



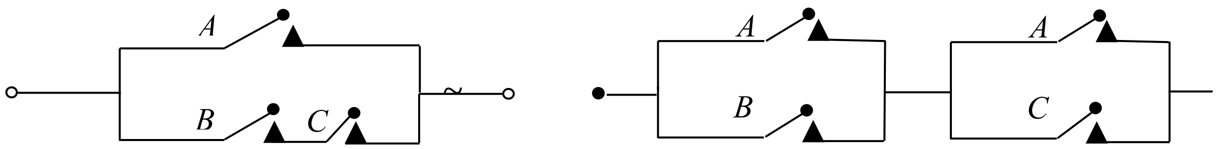
Закон де Моргана $\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$ можно проиллюстрировать, как



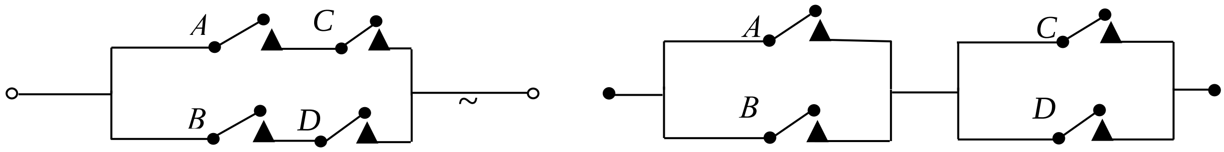
*Пример***.** Доказать, что $A(A + B) = A$.
Решение, $AA = A$, $A + AB = A$ по теореме поглощения. На языке контактных схем

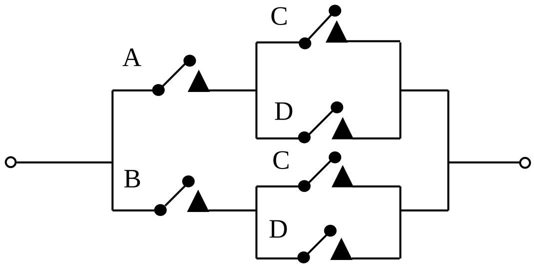


Переход от дизъюнктивной к конъюнктивной форме можно продемонстрировать на следующей схеме
$A + BC = (A + B)(A + C)$

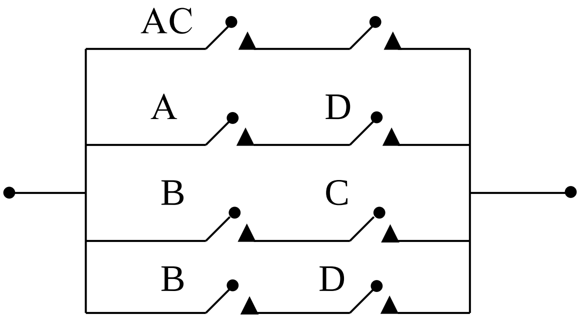


Очевидно, что целесообразно найти самую простую схему среди множества эквивалентных, чтобы количество переключателей было минимальным. Это означает, что булева функция, описывающая эту схему, будет иметь меньшее число входящих аргументов.
Пример. Преобразовать $f = (A + B)(C + D)$ и найти минимальную булеву функцию.
Решение. $f = A(C + D) + B(C + D) = AC + AD + BC + BD$.
На языке контактных схем





~

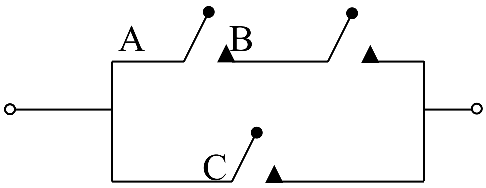


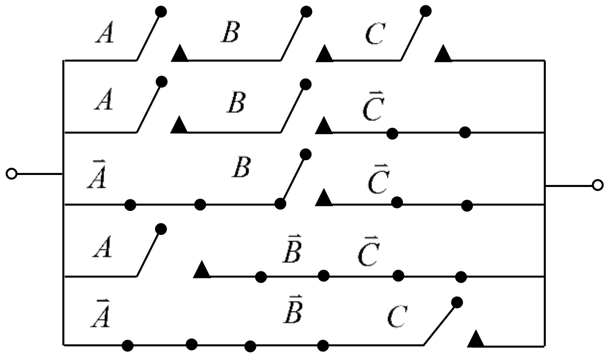
Видно, что наиболее простой по числу переключателей является самая первая схема. Минимальной булевой функцией является исходная, так как $n = 4$ и число входящих в нее аргументов тоже равно 4.

Совершенная Дизъюнктивная Нормальная Функция (СДНФ), которая представлена суммой произведений всех аргументов, как самих, так и инвертированных, может быть представлена, как параллельное соединение последовательных контактных схем.

Пример. $f = AB + C$. Перевести в СДНФ и построить таблицу истинности.

Решение. С помощью карты Вейча для $n = 3$, получаем $f = ABC + AB\overline{C} + \overline{A}B\overline{C} + A\overline{B}\overline{C} + \overline{A}\overline{B}C$, здесь $n = 3$, а число входящих аргументов равно 15. Начальная функция имела всего 3 входящих аргумента и являлась минимальной. Продемонстрируем это на схеме контактов.





Составим таблицу истинности для данной функции $n = 3$, $N = 8$.

A	*B*	*C*	*AB*	*f=AB+C*
0	0	0	0	0
0	0	1	0	1
0	1	0	0	0
1	0	0	0	0
0	1	1	0	1
1	0	1	0	1
1	1	0	1	1
1	1	1	1	1

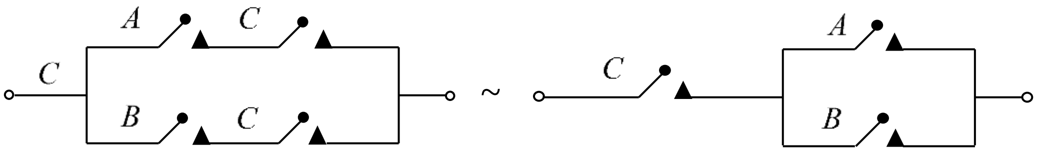
Самостоятельно составить таблицу истинности для СДНФ.

Булеву функцию в форме СКНФ можно представить к схеме последовательному соединению параллельных схем контактов.

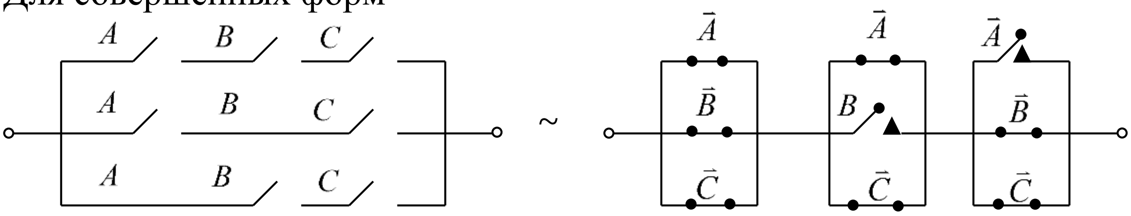
Например. $f = AC + BC = C(A+B)$. Переведем её в совершенную форму (СДНФ).

$$f = AC + BC = ABC + A\overline{B}C + \overline{A}BC.$$

Ей соответствует СКНФ f = (A + B + C)(A + B +C)(A + B +C).
На языке контактных схем



Для совершенных форм



1. Если некоторые выражения входят в строку термов, как в виде отдельного терма, так и в виде части каких либо других термов, то все эти другие термы могут быть отброшены. Если какой-либо участок схемы входит в схему самостоятельно и как часть других участков, то схема может быть заменена только этим участком.
2. В любой сумме можно отбросить все члены, равные нулю. В любой схеме, составленной из параллельных контактов, можно отбросить постоянно разомкнутые контакты.
3. В любом произведении можно отбросить все члены равные единице. В любой схеме, составленной их последовательных контактов, можно отбросить постоянно замкнутые контакты.
4. Если какой либо член суммы равен единице, то и вся сумма равна единице. Если в схеме из параллельных соединений контактов входит постоянно замкнутый контакт, то эту схему можно заменить постоянно замкнутым контактом.
5. Если какой либо член произведения равен нулю, то и все произведение равно нулю. Если в схему из последовательных контактов входит постоянно разомкнутый контакт, то схему можно заменить только на этот контакт.

Пример. Упростить $(A+B)(A+\overline{B})$.

Решение. $(A+B)(A+\overline{B}) = A + AB + A\overline{B} + 0 = A + A(B+\overline{B}) = A$.

В заключении отметим, что любая булева функция может быть представлена в виде формул, содержащих операции $\vee$, $\vee$ и $\neg$.
Однако возможно представление булевых функций с помощью и других композиций операций, например, { $\wedge$, $\neg$ }, { $\vee$, $\neg$ }, { $\rightarrow$, $\neg$}, { $\downarrow$ }, { I }, { $\leftrightarrow$, $\vee$ }, { $\oplus$, $\wedge$, $\leftrightarrow$ } и так далее.
Такие наборы операций так же позволяют построить полную и замкнутую алгебру высказываний.

ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

1. Матрицы. Определители

А. Выполнить действия над матрицами

1. а) $3\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

2. а) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

3. а) $-4\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

4. а) $3\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

5. а) $3\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

6. а) $-3\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -7 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

7. а) $-3\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

8. а) $2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

9. а) $-\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} + 6\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

10. а) $6\begin{pmatrix}-2 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-7 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix}5 & 3 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 2\\ -4 & 5\\ 3 & 0\end{pmatrix}$.

11. а) $\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & -3\end{pmatrix}$.

12. а) $2\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}-4\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix}-3 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 5 & 0 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\ -1\\ 2\end{pmatrix}$.

13. а) $5\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}0 & -1\\ 2 & 2\\ 0 & 0\end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ -4 & 1 & 3\\ -1 & 2 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$.

14. а) $-5\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 1 & 3\end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & -5\\ 1 & 3\end{pmatrix}$.

15. а) $4\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-8 & 2\\ -3 & 4\end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix}2 & -1\\ 0 & 1\\ 3 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2\\ -3 & 2\end{pmatrix}$.

16. а) $3\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & -4\\ 0 & 1\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}2 & -1\\ 2 & 2\\ 5 & 0\end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-4 & 0 & 1\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}$.

17. а) $2\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 2\\ 1 & 0\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 3 & -5\\ 2 & 0\end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 0\\ 3 & 4\\ 2 & 1\end{pmatrix}$.

18. а) $2\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 2 & 0 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ -5 & 0 & 4\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & -1\\ 0 & 2\\ 0 & -1\end{pmatrix}$.

19. а) $-2\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 0\\ -1 & 2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2 & 3\\ 2 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0 & 2\\ 2 & -1 & 1 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 1\\ 1 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$.

20. а) $\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\ -1 & 3 & 5\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}3 & 1 & -1\\ -1 & 0 & 0\end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & 2\\ 1 & 3 & 2 & 1\end{pmatrix}$

21. а) $-2\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

22. а) $-3\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

23. а) $2\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

24. а) $-2\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \\ 7 & 2 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$.

25. а) $3\begin{pmatrix} 1..7..4 \\ 4..0..7 \\ 4..5..1 \end{pmatrix} - 5\begin{pmatrix} 2..6..1 \\ 0..3..1 \\ 4..7..1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 2..7..0 \\ 3..1..8 \\ 4..0..5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Б. Найти значение матричного многочлена

1. $A^2 - 2A + 5E$, если $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 7 \end{pmatrix}$

2. $A^2 + 3A - 2E$, если $A = \begin{pmatrix} 6 & 1 & -5 \\ 3 & 2 & -3 \\ 7 & 1 & -6 \end{pmatrix}$

3. $3A - A^2 + 2E$, если $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -3 & 5 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

4. $2A^2 - 3A + 5E$, если $A = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

5. $3A^2+2A-4E$, если $A=\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \\ -4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

6. $2A^2-7A+3E$, если $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \\ 6 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

7. $5A+2E-4A^2$, если $A=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

8. $3A^2+6A-5E$, если $A=\begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 5 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

9. $6E-3A^2+5A$, если $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & -4 & 5 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

10. $5E+4A-3A^2$, если $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 4 & 6 & 1 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$

11. $4E-A^2+3A$, если $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \\ 5 & 6 & 3 \end{pmatrix}$

12. $4A-2E-3A^2$, если $A=\begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -1 & 3 & 4 \\ -3 & 8 & 5 \end{pmatrix}$

13. $4A^2-2A+3E$, если $A=\begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \\ 3 & -4 & 1 \end{pmatrix}$

14. $3A-4E-A^2$, если $A=\begin{pmatrix} -4 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

15. $2A+3A^2-A^3+2E$, если $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 2 & -1 & 0\\ 3 & 1 & 1\end{pmatrix}$

16. $4A+5E-2A^2$, если $A=\begin{pmatrix}5 & 0 & -3\\ 2 & -2 & 1\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}$

17. $-2A^2+3A-5E$, если $A=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 3\\ 1 & -1 & 1\\ 4 & 0 & 2\end{pmatrix}$

18. $A^3-2A^2+3A-5E$, если $A=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 2\\ 2 & 1 & -1\\ 3 & -1 & 2\end{pmatrix}$

19. $4A^2-3A-E$, если $A=\begin{pmatrix}3 & 1 & 4\\ -1 & 0 & 2\\ 2 & 3 & -1\end{pmatrix}$

20. $A^2-7A+2E-A^3$, если $A=\begin{pmatrix}4 & 1 & -1\\ 3 & 6 & 0\\ -2 & 3 & 1\end{pmatrix}$

21. $5A\ -2A^2+3E$, если $A=\begin{pmatrix}4 & 1 & 2\\ 1 & -1 & 2\\ 2 & 0 & 3\end{pmatrix}$

22. $3A^2+4A-5E$, если $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 4\\ 3 & -1 & 1\\ 0 & 5 & -1\end{pmatrix}$

23. A^3-3A^2+5A-E, если $A=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 2 & -1 & 2\\ 3 & 1 & -1\end{pmatrix}$

24. $-A^2+5A-4E$, если $A=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 4\\ 4 & -3 & 1\\ 0 & 5 & 2\end{pmatrix}$

25. $3A^2+4A-5E$, если $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 1 & -3\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}$

В. Даны два линейных преобразования. Средствами матричного исчисления найти преобразования, выражающие x_1, x_2, x_3 через x_1'', x_2'', x_3''.

1. $\begin{cases} x_1' = x_1 + 2x_2 + 4x_3 \\ x_2' = 5x_1 + x_2 + 2x_3; \\ x_3' = 3x_1 - x_2 + x_3 \end{cases}$ $\begin{cases} x_1'' = 3x_1' - x_2' + 5x_3' \\ x_2'' = x_1' + 2x_2' + 4x_3' \\ x_3'' = 3x_1' + 2x_2' - x_3' \end{cases}$

2. $\begin{cases} x_1' = x_1 - 4x_2 - 2x_3 \\ x_2' = 3x_1 + x_2 + x_3 \\ x_3' = 3x_1 - 5x_2 - 6x_3 \end{cases}$; $\begin{cases} x_1'' = x_2' \\ x_2'' = 2x_1' + 3x_2' + 2x_3' \\ x_3'' = 4x_1' - x_2' + 5x_3' \end{cases}$

3. $\begin{cases} x_1' = x_1 + x_2 - x_3 \\ x_2' = 8x_1 + 3x_2 - 6x_3; \\ x_3' = 4x_1 + x_2 - 3x_3 \end{cases}$ $\begin{cases} x_1'' = x_2' - 6x_3' \\ x_2'' = 3x_1' + 7x_3' \\ x_3'' = x_1' + x_2' - x_3' \end{cases}$

4. $\begin{cases} x_1' = 7x_1 - 5x_2 \\ x_2' = 4x_1 + 11x_3 \\ x_3' = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \end{cases}$; $\begin{cases} x_1'' = -x_1' + x_3' \\ x_2'' = 2x_2' + x_3' \\ x_3'' = -x_2' + 3x_3' \end{cases}$

5. $\begin{cases} x_1' = 2x_1 - x_2 - x_3 \\ x_2' = 3x_1 + 4x_2 - 2x_3; \\ x_3' = 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 \end{cases}$ $\begin{cases} x_1'' = 9x_1' + 3x_2' + 5x_3' \\ x_2'' = 2x_1' + 3x_3' \\ x_3'' = x_2' - x_3' \end{cases}$

6. $\begin{cases} x_1' = 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \\ x_2' = 2x_1 - x_2 - 3x_3 \\ x_3' = 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 \end{cases}$; $\begin{cases} x_1'' = 7x_1' + 4x_3' \\ x_2'' = 4x_2' - 9x_3' \\ x_3'' = 3x_1' + x_2' \end{cases}$

7. $\begin{cases} x_1' = 3x_1 + x_2 + 2x_3 \\ x_2' = 2x_1 + 2x_2 - 3x_3; \\ x_3' = x_1 - 5x_2 - 8x_3 \end{cases}$ $\begin{cases} x_1'' = 9x_1' + 3x_2' + 5x_3' \\ x_2'' = 2x_1' + 3x_3' \\ x_3'' = x_2' - x_3' \end{cases}$

8. $\begin{cases} x_1' = x_1 + x_2 + 2x_3 \\ x_2' = 2x_1 - x_2 - 2x_3 \\ x_3' = x_1 + x_2 + 4x_3 \end{cases}$; $\begin{cases} x_1'' = x_1' - x_2' - x_3' \\ x_2'' = -x_1' + 4x_2' + 7x_3' \\ x_3'' = 8x_1' + x_2' - x_3' \end{cases}$

9. $\begin{cases} x_1' = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \\ x_2' = x_1 + x_2 + x_3 \\ x_3' = 3x_1 - 2x_2 + x_3 \end{cases}$; $\begin{cases} x_1'' = x_1' + 2x_2' + 2x_3' \\ x_2'' = -3x_2' + x_3' \\ x_3'' = 2x_1' + 3x_3' \end{cases}$

10. $\begin{cases} x_1' = 3x_1 + x_2 - 2x_3 \\ x_2' = 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 \\ x_3' = 4x_1 - 2x_2 - 3x_3 \end{cases}$; $\begin{cases} x_1'' = 3x_1' + x_2' \\ x_2'' = x_1' - 2x_2' - x_3' \\ x_3'' = 3x_2' + 2x_3' \end{cases}$

11. $\begin{cases} x_1' = 4x_1 - 3x_2 + x_3 \\ x_2' = x_1 + x_2 - x_3 \\ x_3' = 2x_1 + x_2 \end{cases}$; $\begin{cases} x_1'' = 3x_1' + 5x_3' \\ x_2'' = x_1' + x_2' + x_3' \\ x_3'' = 3x_2' - 6x_3' \end{cases}$

12. $\begin{cases} x_1' = 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 \\ x_2' = x_1 + 2x_2 + x_3 \\ x_3' = x_1 - 7x_2 - 2x_3 \end{cases}$; $\begin{cases} x_1'' = 5x_1' - 19x_2' - x_3' \\ x_2'' = 2x_1' - 5x_2' - x_3' \\ x_3'' = 8x_1' - 31x_2' - 4x_3' \end{cases}$

13. $\begin{cases} x_1' = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \\ x_2' = 4x_2 + 11x_3 \\ x_3' = 7x_1 - 5x_2 \end{cases}$; $\begin{cases} x_1'' = 12x_1' - 13x_2' - 4x_3' \\ x_2'' = 7x_1' - 9x_2' - 11x_3' \\ x_3'' = 12x_1' - 17x_2' - 15x_3' \end{cases}$

14. $\begin{cases} x_1' = 2x_1 - x_2 + 5x_3 \\ x_2' = 5x_1 - 2x_2 + 13x_3 \\ x_3' = 3x_1 - x_3 \end{cases}$; $\begin{cases} x_1'' = 8x_1' - x_2' + 3x_3' \\ x_2'' = 4x_1' - x_2' + 6x_3' \\ x_3'' = 13x_1' + x_2' + 16x_3' \end{cases}$

15. $\begin{cases} x_1' = -x_1 + 5x_3 \\ x_2' = 2x_1 - 4x_2 + x_3 \\ x_3' = 2x_1 + x_2 - 7x_3 \end{cases}$; $\begin{cases} x_1'' = 2x_1' - x_2' + 7x_3' \\ x_2'' = 2x_1' + x_2' - 2x_3' \\ x_3'' = 5x_1' - 2x_2' + x_3' \end{cases}$

16. $\begin{cases} x_1' = -3x_1 + 2x_2 + 4x_3 \\ x_2' = 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 \\ x_3' = x_1 + x_2 - 3x_3 \end{cases}$; $\begin{cases} x_1'' = x_1' - 3x_2' + 3x_3' \\ x_2'' = -3x_1' + 7x_2' + x_3' \\ x_3'' = 2x_1' - 2x_2' + 5x_3' \end{cases}$

17. $\begin{cases} x_1' = -x_1 + x_2 + 2x_3 \\ x_2' = 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 \\ x_3' = x_1 + 2x_2 - 3x_3 \end{cases}$; $\begin{cases} x_1'' = x_1' - 3x_2' + 7x_3' \\ x_2'' = 3x_1' + 2x_2' - 7x_3' \\ x_3'' = 2x_1' - x_2' + 3x_3' \end{cases}$

18. $\begin{cases} x_1' = 7x_1 + x_3 \\ x_2' = 5x_1 - 3x_2 + x_3 \\ x_3' = x_1 + 9x_2 + 2x_3 \end{cases}$; $\begin{cases} x_1'' = 3x_1' - 2x_2' + 8x_3' \\ x_2'' = -x_1' + 2x_2' - 2x_3' \\ x_3'' = 7x_1' - 2x_2' + x_3' \end{cases}$

19. $\begin{cases} x_1' = -5x_1 + 3x_2 + x_3 \\ x_2' = x_1 - 3x_2 + 4x_3 \\ x_3' = 4x_1 + x_2 - 3x_3 \end{cases}$; $\begin{cases} x_1'' = x_1' + 7x_2' + x_3' \\ x_2'' = -3x_1' + 4x_2' - x_3' \\ x_3'' = 2x_1' - 2x_2' + 6x_3' \end{cases}$

20. $\begin{cases} x_1' = -7x_1 + 3x_3 \\ x_2' = 4x_1 - 2x_2 + x_3 \\ x_3' = 5x_1 + x_2 + 3x_3 \end{cases}$; $\begin{cases} x_1'' = x_1' + 5x_2' + 5x_3' \\ x_2'' = -x_1' + 3x_2' - 4x_3' \\ x_3'' = 2x_1' - 2x_2' + 5x_3' \end{cases}$

21. $\begin{cases} x_1' = x_1 + 9x_3 \\ x_2' = 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 \\ x_3' = 7x_1 + 3x_2 - x_3 \end{cases}$; $\begin{cases} x_1'' = 7x_1' - 3x_2' + 4x_3' \\ x_2'' = -2x_1' + x_2' - 2x_3' \\ x_3'' = 3x_1' + 7x_2' + 3x_3' \end{cases}$

22. $\begin{cases} x_1' = 7x_1 + 2x_2 + x_3 \\ x_2' = x_1 - 2x_2 + 2x_3 \\ x_3' = x_1 + x_2 - 3x_3 \end{cases}$; $\begin{cases} x_1'' = 2x_1' - 4x_2' + 5x_3' \\ x_2'' = -x_1' + x_2' - 2x_3' \\ x_3'' = 5x_1' - 2x_2' + x_3' \end{cases}$

23. $\begin{cases} x_1' = -3x_1 + x_3 \\ x_2' = x_1 - 2x_2 + x_3 \\ x_3' = 2x_1 + x_2 - x_3 \end{cases}$; $\begin{cases} x_1'' = 2x_1' - 3x_2' + 4x_3' \\ x_2'' = -3x_1' + x_2' - 2x_3' \\ x_3'' = x_1' - 2x_2' + 3x_3' \end{cases}$

24. $\begin{cases} x_1' = -x_1 + 2x_2 + 2x_3 \\ x_2' = x_1 - 2x_2 + 3x_3 \\ x_3' = 2x_1 + x_2 - 4x_3 \end{cases}$; $\begin{cases} x_1'' = 2x_1' - x_2' + 5x_3' \\ x_2'' = -3x_1' + x_2' - x_3' \\ x_3'' = 5x_1' - 2x_2' + 3x_3' \end{cases}$

25. $\begin{cases} x_1' = -3x_1 + 5x_3 \\ x_2' = 2x_1 - 3x_2 + x_3; \\ x_3' = x_1 + 4x_2 - x_3 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1'' = x_1' - 2x_2' + 5x_3' \\ x_2'' = -3x_1' + 2x_2' - 2x_3' \\ x_3'' = 3x_1' - 2x_2' + 4x_3' \end{cases}$

Г. Для данного определителя Δ найти миноры и алгебраические дополнения элементов a_{i2}, a_{3j}. Вычислить определитель Δ: а) разложив его по элементам i-ой строки: б) разложив его по элементам j-го столбца: в) получив предварительно нули в i-ой строке.

1. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & 6 & -2 & 5 \\ 1 & 0 & 6 & 4 \\ 2 & 3 & 5 & -1 \end{vmatrix}$; $i = 4, \quad j = 1$

2. $\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 & 3 \\ 6 & 3 & -9 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & 0 & 6 \end{vmatrix}$; $i = 3, \quad j = 3$

3. $\begin{vmatrix} 2 & 7 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & -1 & -3 \end{vmatrix}$; $i = 4, \ j = 1$

4. $\begin{vmatrix} 4 & -5 & -1 & - -5 \\ -3 & 2 & 8 & -2 \\ 5 & 3 & 1 & 3 \\ -2 & 4 & -6 & 8 \end{vmatrix}$ $i = 1, \ j = 3$

5. $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & -2 & 4 \end{vmatrix}$ $i = 2, \ j = 4$

6. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & -5 \\ 4 & 3 & -5 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \end{vmatrix}$ $i = 1, \ j = 2$

7. $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & -2 \end{vmatrix}$ $i = 2, \ j = 3$

8. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & -3 \end{vmatrix}$ $i = 3, \ j = 1$

9. $\begin{vmatrix} 0 & 4 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & 4 & -3 \end{vmatrix}$ $i=4,\quad j=3$

10. $\begin{vmatrix} 0 & -2 & 1 & 7 \\ 4 & -8 & 2 & -3 \\ 10 & 1 & -5 & 4 \\ -8 & 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}$ $i=4,\quad j=2$

11. $\begin{vmatrix} 5 & -3 & 7 & -1 \\ 3 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & -6 \\ 3 & -2 & 9 & 4 \end{vmatrix},$ $i=3,\quad j=4$

12. $\begin{vmatrix} 4 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & -2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 1 & -2 \end{vmatrix}$ $i=1,\quad j=2$

13. $\begin{vmatrix} 1 & 8 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & 0 & 4 \\ 5 & -3 & 7 & -1 \\ 3 & 2 & 0 & 2 \end{vmatrix},$ $i=1,\quad j=4$

14. $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$ $i=2,\quad j=4$

15. $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 2 & 5 \end{vmatrix},$ $i=1,\quad j=3$

16. $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & -6 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ $i=3,\quad j=2$

17. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix},$ $i=3,\quad j=1$

18. $\begin{vmatrix} 5 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ $i=2,\quad j=4$

19. $\begin{vmatrix} 6 & 2 & -10 & 4 \\ 5 & -7 & -4 & 1 \\ 2 & 4 & -2 & -6 \\ 3 & 0 & -5 & 4 \end{vmatrix}$, 20. $\begin{vmatrix} -1 & -2 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 6 \\ 2 & -2 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & -2 & -1 \end{vmatrix}$

$i = 2,\ \ j = 3$ $\qquad$ $i = 4,\ \ j = 3$

21. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & -4 & 3 \\ 3 & -4 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -2 & -1 \end{vmatrix}$, 22. $\begin{vmatrix} -1 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -2 & 0 \end{vmatrix}$

$i = 1,\ \ j = 2$ $\qquad$ $i = 3,\ \ j = 2$

23. $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 & 4 \\ 2 & -3 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$, 24. $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & 4 & 2 \end{vmatrix}$

$i = 4,\ \ j = 4$ $\qquad$ $i = 3,\ \ j = 2$

25. $\begin{vmatrix} 4 & 3 & -2 & -1 \\ -2 & 1 & -4 & 3 \\ 0 & 4 & 1 & -2 \\ 5 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$

$i = 2,\ \ j = 3$

Д. Даны две матрицы A и B. Найти: а.) AB, б.) BA-AB, в.) A^{-1}, г.) AA^{-1}, д.) $A^{-1}A$

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 8 & -7 & -6 \\ -3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 3 & -5 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

2. $A=\begin{pmatrix} 3 & 5 & -6 \\ 2 & 4 & 3 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 8 & -5 \\ -3 & -1 & 0 \\ 4 & 5 & -3 \end{pmatrix}$

3. $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 2 & 4 & -6 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

4. $A=\begin{pmatrix} -6 & 1 & 11 \\ 9 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 7 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 7 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$

5. $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & 1 \end{pmatrix}$

6. $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

7. $A=\begin{pmatrix} 6 & 7 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 4 & -1 & -2 \\ 4 & 3 & 7 \end{pmatrix}$

8. $A=\begin{pmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & -4 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 0 & 6 & 2 \\ 1 & 9 & 2 \end{pmatrix}$

9. $A=\begin{pmatrix} 1 & 7 & 3 \\ -4 & 9 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 6 & 5 & 2 \\ 1 & 9 & 2 \\ 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$

10. $A=\begin{pmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 \\ -4 & 0 & 5 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}$

11. $A=\begin{pmatrix} 6 & 9 & 4 \\ -1 & -1 & 1 \\ 10 & 1 & 7 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \\ 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}$

12. $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 7 \\ 2 & 1 & 8 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 3 & 5 & 4 \\ -3 & 0 & 1 \\ 5 & 6 & -4 \end{pmatrix}$

13. $A=\begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 8 & 4 & -1 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 3 & 5 & 5 \\ 7 & 1 & 2 \\ 1 & 6 & 0 \end{pmatrix}$

14. $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 5 \\ 3 & 3 & 6 \\ 4 & 3 & 4 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

15. $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 3 & 0 & 6 \\ 4 & 3 & 4 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

16. $A=\begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & 5 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 5 & 4 & -5 \\ 3 & -7 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

17. $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & -7 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 2 & 7 & 0 \\ 5 & 3 & 1 \\ 1 & -6 & 1 \end{pmatrix}$

18. $A=\begin{pmatrix} 8 & -1 & -1 \\ 5 & -5 & -1 \\ 10 & 3 & 2 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

19. $A=\begin{pmatrix} 3 & -7 & 2 \\ 1 & -8 & 3 \\ 4 & -2 & 3 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 0 & 5 & -3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & -5 \end{pmatrix}$

20. $A=\begin{pmatrix}3 & -1 & 0\\ 3 & 5 & 1\\ 4 & -7 & 5\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 2\\ 1 & -8 & 5\\ 3 & 0 & 2\end{pmatrix}$

21. $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & -4\\ 4 & -9 & 3\\ 2 & -7 & -1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}0 & 0 & -4\\ 5 & -6 & 4\\ 7 & -4 & 1\end{pmatrix}$

22. $A=\begin{pmatrix}8 & 5 & -1\\ 1 & 5 & 3\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}4 & -7 & -6\\ 3 & 2 & -1\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}$

23. $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 2 & -4 & 1\\ 4 & -3 & 1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1 & 0 & -4\\ 2 & 5 & -3\\ 4 & -3 & 2\end{pmatrix}$

24. $A=\begin{pmatrix}5 & -8 & -4\\ 7 & 0 & -5\\ 4 & 1 & 0\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1 & 5 & 5\\ 1 & 2 & 1\\ 2 & -1 & -3\end{pmatrix}$

25. $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 1 & -2 & 4\\ 3 & -5 & 3\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}7 & 5 & 1\\ 5 & 3 & -1\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}$

Е. Определить ранг матрицы: а). методом окаймляющего минора и б): диагонализируя матрицу.

1. $A=\begin{pmatrix}2 & -5 & 1 & 3\\ -4 & 5 & 1 & 0\\ -2 & 0 & 3 & 1\end{pmatrix}$; 2. $A=\begin{pmatrix}-1 & -4 & 3\\ 0 & -2 & 1\\ 1 & 3 & 4\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$;

3. $A=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ -3 & -1 & 3\\ 4 & 1 & 1\\ 0 & 0 & -5\end{pmatrix}$; 4. $A=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 2 & 1\\ -2 & 1 & 2 & 3\\ -3 & 2 & 1 & 0\end{pmatrix}$;

5. $A=\begin{pmatrix}-1 & -2 & -1\\ 2 & -3 & -1\\ 2 & -7 & -5\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$; 6. $A=\begin{pmatrix}-1 & -1 & 1\\ -4 & -2 & 3\\ -2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$;

7. $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & -4\\ 3 & 5 & -1 & -5\\ -3 & -1 & 1 & 0\end{pmatrix}$; 8. $A=\begin{pmatrix}-2 & 3 & 2 & -2\\ 1 & 2 & 1 & 0\\ 1 & 2 & -2 & 3\end{pmatrix}$

9. $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 3\\ 4 & 4 & -1\\ 1 & -5 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$; 10. $A=\begin{pmatrix}2 & -4 & 3\\ 1 & -2 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ 3 & -6 & 4\end{pmatrix}$;

11. $A=\begin{pmatrix}4 & -6 & 3 & 0\\ 2 & 8 & 2 & -2\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$; 12. $A=\begin{pmatrix}3 & 2 & -3 & 0\\ 3 & 1 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 1 & 1\end{pmatrix}$;

13. $A=\begin{pmatrix}-2 & 3 & 1 & 0\\ -2 & 1 & 2 & -2\\ 1 & 4 & 0 & 1\end{pmatrix}$; 14. $A=\begin{pmatrix}2 & 3 & 0 & -3\\ 1 & 1 & 5 & -4\\ 0 & 7 & 1 & -2\end{pmatrix}$;

15. $A=\begin{pmatrix}2 & -5 & 1 & 3\\ -4 & 5 & 1 & 0\\ -2 & 0 & 3 & 1\end{pmatrix}$; 16. $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 2 & 1\\ 5 & -3 & 2 & 2\\ -1 & 0 & -2 & -1\end{pmatrix}$;

17. $A=\begin{pmatrix}3 & -2 & -5 & 1\\ 2 & 3 & -4 & 5\\ 1 & -2 & 3 & -1\end{pmatrix}$; 18. $A=\begin{pmatrix}2 & 3 & 4 & 7\\ 7 & -5 & 0 & -5\\ 4 & 0 & 11 & 11\end{pmatrix}$;

19. $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 1\\ 1 & 3 & 1\\ 3 & 4 & 2\end{pmatrix}$; 20. $A=\begin{pmatrix}2 & 3 & -1\\ 5 & 6 & 2\\ -1 & 1 & 1\\ 3 & 4 & 1\end{pmatrix}$;

21. $A=\begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 3 & 4 & - \\ 2 & -1-1 & 2 \end{pmatrix}$; 22. $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$;

23. $A=\begin{pmatrix} 1 & 5 & -6 \\ 3 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$; 24. $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 7 & -5 & 0 \\ 4 & 0 & 11 \end{pmatrix}$;

25. $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & -3 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

Ж. Найти собственные значения и векторы матриц:

1. а) $A=\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$; б) $B=\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$.

2. а) $A=\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$; б) $B=\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

3. а) $A=\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$; б) $B=\begin{bmatrix} 19/3 & 2/3 & -2/3 \\ 2 & 5 & -2 \\ 2/3 & -2/3 & 11/3 \end{bmatrix}$.

4. а) $A=\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$; б) $B=\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2/3 & 7/3 & -4/3 \\ 2/3 & -2/3 & 5/3 \end{bmatrix}$.

5. а) $A=\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$; б) $B=\begin{bmatrix} 3 & -2 & -2/3 \\ -2/3 & 5/3 & -2/3 \\ -2/3 & 2/3 & -13/3 \end{bmatrix}$.

6. а) $A=\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$; б) $B=\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 2/3 & 13/3 & -4/3 \\ 2/3 & -2/3 & 11/3 \end{bmatrix}$.

7. а) $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}$; б) $B=\begin{bmatrix} 4 & -3 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

8. а) $A=\begin{bmatrix}5 & 3\\ 0 & -1\end{bmatrix}$; б) $B=\begin{bmatrix}7 & -4 & 4\\ 2 & 3 & 2\\ 2 & 0 & 5\end{bmatrix}$.

9. а) $A=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 0 & -4\end{bmatrix}$; б) $B=\begin{bmatrix}7 & -4 & -2\\ -2 & 5 & -2\\ 0 & 0 & 9\end{bmatrix}$.

10. а) $A=\begin{bmatrix}5 & -2\\ 0 & -3\end{bmatrix}$; б) $B=\begin{bmatrix}3 & -2 & -2/3\\ -2/3 & 5/3 & -2/3\\ -2/3 & 2/3 & -13/3\end{bmatrix}$.

11. а) $A=\begin{bmatrix}-4 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}$; б) $B=\begin{bmatrix}5/3 & -2/3 & -4/3\\ 0 & 1 & 0\\ -2/3 & 2/3 & 7/3\end{bmatrix}$.

12. а) $A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -3 & -6\end{bmatrix}$; б) $B=\begin{bmatrix}13 & 2 & -2\\ 6 & 9 & -6\\ 2 & -2 & 5\end{bmatrix}$.

13. а) $A=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 2 & -3\end{bmatrix}$; б) $B=\begin{bmatrix}3 & 0 & 0\\ 1 & 2 & -1\\ 1 & -1 & 2\end{bmatrix}$.

14. а) $A=\begin{bmatrix}3 & 5\\ 0 & -2\end{bmatrix}$; б) $B=\begin{bmatrix}7/5 & 2/3 & -2/3\\ 4/3 & 5/3 & -2/3\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$.

15. а) $A=\begin{bmatrix}2 & -2\\ 0 & -4\end{bmatrix}$; б) $B=\begin{bmatrix}7 & -6 & 6\\ 2 & 3 & 2\\ 2 & 2 & 3\end{bmatrix}$.

16. а) $A=\begin{bmatrix}1 & -1\\ -5 & -3\end{bmatrix}$; б) $B=\begin{bmatrix}5 & 0 & 4\\ 1 & -3 & 2\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}$.

17. а) $A=\begin{bmatrix}-1 & -2\\ 3 & 4\end{bmatrix}$; б) $B=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ -4 & 4 & 0\\ -2 & 1 & 2\end{bmatrix}$.

18. а) $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 4 & -5\end{bmatrix}$; б) $B=\begin{bmatrix}2 & -1 & 2\\ 5 & -3 & 2\\ -1 & 0 & -2\end{bmatrix}$.

19. а) $A=\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 4 & -3\end{bmatrix}$; б) $B=\begin{bmatrix}-1 & 3 & 0\\ 0 & 5 & 0\\ -3 & 3 & 1\end{bmatrix}$.

20. а) $A=\begin{bmatrix}-1 & -2\\ 3 & 4\end{bmatrix}$; б) $B=\begin{bmatrix}2 & 0 & -15\\ 1 & 1 & -5\\ 0 & 0 & -6\end{bmatrix}$.

21. а) $A=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 3 & 2\end{bmatrix}$; б) $B=\begin{bmatrix}2 & -3 & 1\\ 1 & 5 & 2\\ 4 & 1 & 1\end{bmatrix}$.

22. а) $A=\begin{bmatrix}1 & 5\\ 1 & 3\end{bmatrix}$; б) $B=\begin{bmatrix}5 & -7 & 0\\ -3 & 1 & 0\\ 12 & 6 & 3\end{bmatrix}$.

23. а) $A=\begin{bmatrix}0 & 2\\ -2 & -5\end{bmatrix}$; б) $B=\begin{bmatrix}3 & -1 & 1\\ -1 & 5 & -1\\ 1 & -1 & 3\end{bmatrix}$.

24. а) $A=\begin{bmatrix}3 & -9\\ 2 & -8\end{bmatrix}$; б) $B=\begin{bmatrix}3 & 1 & 0\\ -4 & -1 & 0\\ 4 & -8 & -2\end{bmatrix}$.

25. а) $A=\begin{bmatrix}2 & 1\\ -6 & 3\end{bmatrix}$; б) $B=\begin{bmatrix}0 & 2 & 2\\ 2 & 3 & -1\\ 2 & -1 & 3\end{bmatrix}$.

2. Векторная алгебра

А. По координатам точек A, B и C для указанных векторов найти:

а.) модуль вектора $\boldsymbol{a}$; б.) скалярное произведение векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$; в.) проекцию вектора c на вектор $\bar{d}$; г.) координаты точки M, делящий отрезок l в отношении $\alpha : \beta$.

1.
$A(4,6,3),\ B(-5,2,6),\ C(4,-4,-3),\ \ a = 4\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{AC}, \bar{b} = \overrightarrow{AB}, \bar{c} = \overrightarrow{CB}, \bar{d} = \overrightarrow{AC}$
$l = AB,\ \ \alpha = 5,\ \beta = 4.$

2.
$A(4,3,-2),\ B(-3,-1,4),\ C(2,2,1),\ \ a = -5\overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{CB}, \bar{b} = \overrightarrow{AB}, \bar{c} = \overrightarrow{AC}, \bar{d} = \overrightarrow{CB},$
$l = BC,\ \ \alpha = 2,\ \beta = 3$

3.
$A(-2,-2,4),\ B(1,3,-2),\ C(1,4,2),\ \ \bar{a} = 2\overrightarrow{AC} - 3\overrightarrow{BA}, \bar{b} = \overrightarrow{BC}, \bar{c} = \overrightarrow{BC}, \bar{d} = \overrightarrow{AC},$
$l = BA,\ \ \alpha = 2,\ \beta = 1$

4.
$A(2,4,3),\ B(3,1,-4),\ C(-1,2,2),\ \ \bar{a} = 2\overrightarrow{BA} + 4\overrightarrow{AC}, \bar{b} = \overrightarrow{BA}, \bar{c} = \bar{b}, \bar{d} = \overrightarrow{AC},$
$l = BA,\ \ \alpha = 1,\ \beta = 4$

5.
$A(2,4,5),\ B(1,-2,3),\ C(-1,-2,4),\ \ \bar{a} = 3\overrightarrow{AB} - 4\overrightarrow{AC}, \bar{b} = \overrightarrow{BC}, \bar{c} = \bar{b}, \bar{d} = \overrightarrow{AB},$
$l = AB,\ \ \alpha = 2,\ \beta = 3$

6.
$A(-1,-2,4),\ B(-1,3,5),\ C(1,4,2),\ \ \bar{a} = 3\overrightarrow{AC} - 7\overrightarrow{BC}, \bar{b} = \overrightarrow{AB}, \bar{c} = \bar{b}, \bar{d} = \overrightarrow{AC},$
$l = AC,\ \ \alpha = 1,\ \beta = 7$

7.
$A(1,3,2),\ B(-2,4,-1),\ C(1,3,-2),\ \ \bar{a} = 2\overrightarrow{AB} + 5\overrightarrow{CB}, \bar{b} = \overrightarrow{AC}, \bar{c} = \bar{b}, \bar{d} = \overrightarrow{AB},$
$l = AB,\ \ \alpha = 2,\ \beta = 4$

8.
$A(2,-4,3),\ B(-3,-2,4),\ C(0,0,-2),\ \ \bar{a} = \overrightarrow{AC} - 4\overrightarrow{CB}, \bar{b} = \bar{c} = \overrightarrow{AB},, \bar{d} = \overrightarrow{CB},$
$l = AC,\ \ \alpha = 2,\ \beta = 1$

9.
$A(3,4,-4),\ B(-2,1,2),\ C(2,-3,1),\ \ \bar{a} = 5\overrightarrow{CB} + 5\overrightarrow{AC}, \bar{b} = \bar{c} = \overrightarrow{BA},, \bar{d} = \overrightarrow{AC},$
$l = BA,\ \ \alpha = 2,\ \beta = 5$

10.
$A(0,2,5),\ B(2,-3,4),\ C(3,2,-5),\ \ \bar{a} = -3\overrightarrow{AB} + 4\overrightarrow{CB}, \bar{b} = \bar{c} = \overrightarrow{AC},, \bar{d} = \overrightarrow{AB},$
$l = AC,\ \ \alpha = 3,\ \beta = 2$

11.
$A(-2,-3,-4),\ B(2,-4,0),\ C(1,4,5),\ \ \bar{a}=4\overrightarrow{AC}-8\overrightarrow{BC}, \bar{b}=\bar{c}=\overrightarrow{AB},, \bar{d}=\overrightarrow{BC},$
$l=AB,\ \ \alpha=4,\ \beta=2$
12.
$A(-2,-3,-2),\ B(1,4,2),\ C(1,-3,3),\ \ \bar{a}=2\overrightarrow{AC}-4\overrightarrow{BC}, \bar{b}=\bar{c}=\overrightarrow{AC},, \bar{d}=\overrightarrow{AC},$
$l=BC,\ \ \alpha=3,\ \beta=1$
13.
$A(5,6,1),\ B(-2,4,-1),\ C(3,-3,3),\ \ \bar{a}=3\overrightarrow{AB}-4\overrightarrow{BC}, \bar{b}=\bar{c}=\overrightarrow{AC},, \bar{d}=\overrightarrow{AB},$
$l=BC,\ \ \alpha=3,\ \beta=2$
14.
$A(10,6,3),\ B(-2,4,5),\ C(3,-4,-6),\ \ \bar{a}=5\overrightarrow{AC}-2\overrightarrow{CB}, \bar{b}=\bar{c}=\overrightarrow{BA},, \bar{d}=\overrightarrow{AC},$
$l=CB,\ \ \alpha=1,\ \beta=5$
15.
$A(3,2,4),\ B(-2,1,3),\ C(2,-2,-1),\ \ \bar{a}=4\overrightarrow{BC}-3\overrightarrow{AC}, \bar{b}=\overrightarrow{BA}, \bar{c}=\overrightarrow{AC}, \bar{d}=\overrightarrow{BC},$
$l=AC,\ \ \alpha=2,\ \beta=4$
16.
$A(-2,3,-4),\ B(3,-1,2),\ C(4,2,4),\ \ \bar{a}=7\overrightarrow{AC}+4\overrightarrow{CB}, \bar{b}=\bar{c}=\overrightarrow{AB},, \bar{d}=\overrightarrow{CB},$
$l=AB,\ \ \alpha=2,\ \beta=5$
17.
$A(4,5,3),\ B(-4,2,3),\ C(5,-6,-2),\ \ \bar{a}=9\overrightarrow{AB}-4\overrightarrow{BC}, \bar{b}=\bar{c}=\overrightarrow{AC},, \bar{d}=\overrightarrow{AB},$
$l=BC,\ \ \alpha=5,\ \beta=1$
18.
$A(2,4,6),\ B(-3,5,1),\ C(4,-5,-4),\ \ \bar{a}=-6\overrightarrow{BC}+2\overrightarrow{BA}, \bar{b}=\bar{c}=\overrightarrow{CA}, \bar{d}=\overrightarrow{BA},$
$l=BC,\ \ \alpha=1,\ \beta=3$
19.
$A(-4,-2,-5),\ B(3,7,2),\ C(4,6,-3),\ \ \bar{a}=9\overrightarrow{BA}+3\overrightarrow{BC}, \bar{b}=\bar{c}=\overrightarrow{AC},, \bar{d}=\overrightarrow{BC},$
$l=BA,\ \ \alpha=4,\ \beta=3$
20.
$A(5,4,4),\ B(-5,2,3),\ C(4,2,-5),\ \ \bar{a}=11\overrightarrow{AC}-6\overrightarrow{AB}, \bar{b}=\overrightarrow{BC}, \bar{c}=\overrightarrow{AC}, \bar{d}=\overrightarrow{AC},$
$l=BC,\ \ \alpha=3,\ \beta=1$
21.
$A(3,4,6),\ B(-4,6,4),\ C(5,-2,-3),\ \ \bar{a}=-7\overrightarrow{BC}+4\overrightarrow{CA}, \bar{b}=\overrightarrow{BC}, \bar{c}=\overrightarrow{CA}, \bar{d}=\overrightarrow{BC}$
$l=BA,\ \ \alpha=5,\ \beta=3$
22.
$A(-5,-2,-6),\ B(3,4,5),\ C(2,-5,4),\ \ \bar{a}=8\overrightarrow{AC}-5\overrightarrow{BC}, \bar{b}=\bar{c}=\overrightarrow{AB},, \bar{d}=\overrightarrow{BC},$
$l=AC,\ \ \alpha=3,\ \beta=4$

23.

$A(3,4,1),\ B(5,-2,6),\ C(4,2,-7),\ \ \bar{a}=-7\overrightarrow{AC}+5\overrightarrow{AB}, \bar{b}=\bar{c}=\overrightarrow{BC},, \bar{d}=\overrightarrow{AC},$
$l=AB,\ \ \alpha=2,\ \beta=3$

24.

$A(4,3,2),\ B(-4,-3,5),\ C(6,4,-3),\ \ \bar{a}=8\overrightarrow{AC}-5\overrightarrow{BC}, \bar{b}=\bar{c}=\overrightarrow{BA},, \bar{d}=\overrightarrow{AC},$
$l=BC,\ \ \alpha=2,\ \beta=5$

25.

$A(-5,4,3),\ B(4,5,2),\ C(2,7,-4),\ \ \bar{a}=3\overrightarrow{BC}+2\overrightarrow{AB}, \bar{b}=\bar{c}=\overrightarrow{CA}, \bar{d}=\overrightarrow{AB},$
$l=BC,\ \ \alpha=3,\ \beta=4$

Б. Решить задачи

Вариант 1

1. Разложить вектор $\bar{d}=\{5;7;8\}$ по базису векторов $\bar{a}=\{4;5;8\}$, $\bar{b}=\{3;0;1\}$ и $\bar{c}=\{-1;4;2\}$.

2. На оси ординат найти точку M равноудаленную от точек $A(1;-4;7)$ и $B(5;6;-5)$.

3. Найти работу силы $\bar{F}=\{1;2;1\}$ по перемещению тела из точки $A(1;2;3)$ в точку $B(3;3;8)$ вдоль прямой.

4. Упростить $[\bar{a}+\bar{b}+\bar{c},\bar{c}]+[\bar{a}+\bar{b}+\bar{c},\bar{b}]+[\bar{b}-\bar{c},\bar{a}]$.

5. Показать, что точки $A(1;2;-1)$, $B(0;1;5)$, $C(-1;2;1)$ и $D(2;1;3)$ лежат в одной плоскости.

6. Найти площадь треугольника ABC, где $A(1;2;7)$, $B(8;3;0)$ и $C(-1;-1;-1)$. Найти величину высоты AM.

Вариант 2

1. Доказать, что векторы $\bar{a},\bar{b}$ и $\bar{c}$ образуют базис и найти координаты вектора $\bar{d}\{7;23;4\}$ в этом базисе, где $\bar{a}=\{5;4;1\}$, $\bar{b}=\{-3;5;2\}$ и $\bar{c}=\{2;-1;3\}$.

2. Дано $|\bar{a}|=|\bar{b}|=3$, $(\bar{a},\bar{c})=60^o$, $(\bar{b},\bar{c})=120^o$. Найти проекцию $(\bar{a}-2\bar{b})$ на ось параллельную вектору $\bar{c}$.

3. Даны три последовательные вершины параллелограмма $A(2;1;-4)$, $B(1;3;5)$ и $C(7;2;3)$. Найти координаты вершины D.

4. Найти единичный вектор перпендикулярный векторам $\bar{a}=\{1;1;2\}$ и $\bar{b}=\{2;1;1\}$.

5. Сила $\bar{F}=3\bar{i}+2\bar{j}-4\bar{k}$ приложена к точке $M(2;-1;1)$. Найти величину момента силы относительно точки $A(-3;2;4)$.

6. Выяснить, лежат ли точки $A(1;0;7)$, $B(-1;-1;2)$, $C(2;-2;2)$ и $D(0;1;9)$ в одной плоскости.

Вариант 3

1. Доказать, что векторы $\bar{a}, \bar{b}$ и $\bar{c}$ образуют базис и найти координаты вектора $\bar{d}\{16;6;15\}$ в этом базисе, где $\bar{a} = \{3;1;2\}$, $\bar{b} = \{-7;-2;-4\}$ и $\bar{c} = \{-4;0;3\}$.

2. Доказать тождество $\left[\bar{a}, \bar{b}\right]^2 + \left(\bar{a}, \bar{b}\right)^2 = a^2 b^2$.

3. Компланарны ли векторы $\bar{a} = 2\bar{i} - \bar{j} + 2\bar{k}$, $\bar{b} = \bar{i} + 2\bar{j} - 3\bar{k}$ и $\bar{c} = \{3;-4;7\}$.

4. Даны вершины четырехугольника $A(1;2;3)$, $B(7;4;2)$, $C(-3;0;6)$ и $D(9;2;4)$. Доказать, что его диагонали перпендикулярны.

5. Найти площадь параллелограмма, построенного на вершинах $\bar{a} = \bar{p} + 2\bar{q}$ и $\bar{b} = 2\bar{p} + \bar{q}$, где $\bar{p}$ и $\bar{q}$ - единичные векторы и угол между ними равен $\dfrac{\pi}{3}$.

6. Даны вершины тетраэдра $O(-5;-4;8)$, $A(2;3;1)$, $B(4;1;-2)$ и $C(6;3;7)$. Найти длину высоты опущенной на грань *ABC* из вершины *O*.

Вариант 4

1. Разложить вектор $\bar{d} = \{8;-16;17\}$ по базису векторов $\bar{a} = \{3;4;-3\}$, $\bar{b} = \{-5;5;0\}$ и $\bar{c} = \{2;1;-4\}$.

2. Построить параллелограмм на векторах $\overline{OA} = \bar{i} + 2\bar{j}$ и $\overline{OB} = 2\bar{k} - \bar{j}$. Определить длину его диагоналей и угол между ними.

3. Найти площадь треугольника *ABC* с вершинами $A(7;3;4)$, $B(1;0;6)$ и $C(4;5;-2)$. Найти величину высоты *AM*.

4. Компланарны ли векторы $\bar{a} = \bar{i} + \bar{j} + \bar{k}$, $\bar{b} = \bar{i} + \bar{j} - \bar{k}$ и $\bar{c} = \bar{i} - \bar{j} + \bar{k}$.

5. Найти работу равнодействующей сил $\bar{F}_1 = \{1;2;-3\}$ и $\bar{F}_2 = \{-3;1;1\}$ по перемещению тела из точки $A(4;1;-3)$ в точку $B(-1;2;1)$ по прямой.

6. Упростить $2\left(\bar{i}, \left[\bar{j}, \bar{k}\right]\right) + 3\left(\bar{j}, \left[\bar{i}, \bar{k}\right]\right) + 4\left(\bar{k}\left[\bar{i}, \bar{j}\right]\right)$.

Вариант 5

1. Найти вектор $\bar{x}$, удовлетворяющий условиям $\left(\bar{x}, 3\bar{i} - 3\bar{j} + 2\bar{k}\right) = 2$, $\left(\bar{x}, 4\bar{i} - 5\bar{j} + 2\bar{k}\right) = 1$ и $\left(\bar{x}, 5\bar{i} - 6\bar{j} + 4\bar{k}\right) = 3$.

2. Разложить вектор $\bar{d} = \{-4;2;-12\}$ по базису векторов $\bar{a} = \{1;0;5\}$, $\bar{b} = \{3;2;7\}$ и $\bar{c} = \{5;0;9\}$.

3. Найти площадь параллелограмма построенного на диагоналях параллелограмма построенного на векторах $\bar{a} = \{1;3;4\}$ и $\bar{b} = 2\bar{i} + 5\bar{j} + 8\bar{k}$.

4. Найти работу силы $\bar{F} = \{1;0;2\}$ по перемещению по прямой тела из точки $A(1;-3;-2)$ в точку $B(0;-5;-4)$ а затем в точку $C(3;2;8)$.

5. Найти объём пирамиды $A(0;1;1)$, $B(2;4;1)$, $C(3;6;3)$ и $D(5;-3;2)$. Найти величину высоты *AM.*

6. Раскрыть скобки и упростить $\left[\bar{i}, \bar{j} - \bar{k}\right] + \left[\bar{j}, \bar{i} + \bar{k}\right] + \left[\bar{k}, \bar{i} - \bar{j} - \bar{k}\right]$.

Вариант 6

1. Проверить, что четыре точки $A(3;-1;2), B(1;2;-1), C(-1;1;-3)$ и $D(3;-5;3)$ служат вершинами трапеции. Найти угол при вершине *C*.

2. Разложить вектор $\overline{d}=\{1;20;1\}$ по базису векторов $\overline{a}=\{-2;3;5\}$, $\overline{b}=\{1;-3;4\}$ и $\overline{c}=\{7;8;-1\}$.

3. Найти единичный вектор, перпендикулярный векторам $\overline{a}=\overline{i}+3\overline{j}+2\overline{k}$ и $\overline{b}=\{2;1;0\}$.

4. Определить объём параллелепипеда построенного на векторах $\overline{a}=3\overline{i}+4\overline{j}$, $\overline{b}=\{0;-3;1\}$ и $\overline{c}=2\overline{j}+5\overline{k}$. Определить длину главной диагонали.

5. Найти внутренний угол $\Delta\ ABC$ из вершины *A*, если $A(3;1;2)$, $B(1;1;1)$ и $C(5;8;3)$. Найти длину высоты *AM* и медианы AN.

6. Определить работу силы $\overline{F}=\{3;-2;4\}$ по перемещению по прямой тела из точки $A(1;2;-1)$ в точку $B(-2;5;4)$ а затем в точку $C(3;8;2)$.

Вариант 7

1. Найти разложение вектора $\overline{d}=\{14;6;3\}$ по базису векторов $\overline{a}=\overline{i}+\overline{j}+\overline{k}$, $\overline{b}=\{2;1;1\}$ и $\overline{c}=3\overline{i}+\overline{j}$.

2. Даны точки: $A(-1;5;-10)$, $B(5;-7;8), C(2;2;-7)$ и $D(5;-4;2)$. Проверить, какие векторы, построенные с помощью этих точек, колинеарны.

3. Найти проекцию $(\overline{a}-\overline{b})$ на $(\overline{a}+\overline{b})$, если $\overline{a}=\{-1;2;1\}$ и $\overline{b}=-4\overline{i}-\overline{j}+2\overline{k}$.

4. Найти работу сил $\overline{F_1}=\{-1;1;4\}$ и $\overline{F_2}=3\overline{i}+2\overline{j}+4\overline{k}$ по перемещению тела из точки $A(1;1;1)$ в точку $B(3;-2;2)$.

5. Даны: $A(3;5;4)$, $B(8,7,4)$, $C(5;10;4)$. Найти $\left|[\overline{AB},\overline{BC}]\right|$.

6. Вычислить длину высоты тетраэдра, опущенной на грань *ABC,* если $A(4;4;10)$, $B(4;10;2)$, $C(2;8;4)$, $D(9,6,4)$.

Вариант 8

1. Даны три последовательные вершины параллелограмма $A(1;1;4)$, $B(2;3;-1)$ и $C(-2;2;0)$. Найти координаты вершины D.

2. Даны $\overline{a}=\{2;0;-1\}$, $\overline{b}=3\overline{i}-4\overline{j}$ и $\overline{c}=\{1;1;2\}$. Найти орт вектора $(\overline{b}+\overline{c}-\overline{a})$ и его направляющие косинусы.

3. Найти вектор $\overline{x}$, если он перпендикулярен вектору $\overline{a}=\{2;-3;1\}$ и вектору $\overline{b}=\{1;-2;3\}$ и удовлетворяет условию $(\overline{x},\overline{i}+2\overline{j}-7\overline{k})=-10$.

4. Разложить вектор $\overline{d}=2\overline{i}-2\overline{j}+\overline{k}$ по базису векторов $\overline{a}=\{2;3;1\}$, $\overline{b}=\{-1;2;-2\}$ и $\overline{c}=\overline{i}+2\overline{j}+\overline{k}$.

5. Определить объём пирамиды $O(0;0;0), A(5;2;0), B(2;5;0), C(1;2;4)$ и площадь грани *ABC*, а также высоту *AM.*

6. Даны $A(2;-1;2), B(1;2;-1), C(3;2;1)$. Найти $\left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right|$ и вектор биссектрисы из вершины A. Определить площадь $\Delta\ ABC$.

Вариант 9

1. Найти разложение вектора $\bar{d} = 8\bar{i} + 11\bar{j} + \bar{k}$ по базису векторов $\bar{a} = \{3;2;4\}$, $\bar{b} = \{2;4;-3\}$ и $\bar{c} = \{-4;-5;2\}$.

2. Даны вершины Δ ABC $A(-1;-2;4), B(-4;-2;0), C(3;-2;1)$. Найти смежный угол при вершине *B*. Найти высоту *AM* и площадь треугольника.

3. Что за фигура $A(2;1;-4), B(1;3;5), C(7;2;3)$ и $D(8;0;-6)$.

4. Доказать, что точки $A(1;0;7), B(-1;-1;2), C(2;-2;2), D(0;1;9)$ лежат в одной плоскости.

5. Найти единичный вектор, перпендикулярный векторам $\bar{a} = \{1;-2;1\}$ и $\bar{b} = \bar{i} - 2\bar{k}$.

6. Может ли некоторая ось l составлять с координатными осями углы $\alpha = 90^0, \beta = 150^0, \gamma = 60^0$.

Вариант 10

1. Дано $|\bar{a}| = 1$, $|\bar{b}| = 2$, $(\bar{a},\bar{b}) = \dfrac{2\pi}{3}$. Определить $\left|\left[\bar{a} + 3\bar{b}, 3\bar{a} - \bar{b}\right]\right|$.

2. Разложить вектор $\bar{d} = \{14;6;3\}$ по базису векторов $\bar{a} = \{1;1;1\}$, $\bar{b} = 2\bar{i} + \bar{j} + \bar{k}$ и $\bar{c} = \{3;1;0\}$.

3. При каких значениях m векторы $\bar{a} = 2\bar{i} - 3m\bar{j} + 3\bar{k}$ и $\bar{b} = 3\bar{i} + 3\bar{j} + 5m\bar{k}$ взаимно перпендикулярны.

4. Найти объём пирамиды $A(2;3;4), B(7;6;9), C(4;9;3), D(3;6;7)$ и определить высоту *AM*.

5. Доказать, что вектор $\bar{p} = \bar{b} - \dfrac{\bar{a}(\bar{a},\bar{b})}{\bar{a}^2}$ перпендикулярен к вектору $\bar{a}$.

6. Найти вектор $\bar{x}$ удовлетворяющий условиям $(\bar{x},\bar{a}) = 36$, $(\bar{x},\bar{b}) = 7$ и $(\bar{x},\bar{b}) = -17$, где $\bar{a} = \bar{i} + \bar{j} + \bar{k}$, $\bar{b} = 2\bar{i} - 3\bar{k}$ и $\bar{c} = 6\bar{i} - 5\bar{k}$.

Вариант 11

1. Разложить вектор $\bar{d} = \{0;4;16\}$ по базису векторов $\bar{a} = \{1;3;5\}$, $\bar{b} = \{0;2;0\}$ и $\bar{c} = \{5;7;9\}$.

2. Найти орт и направляющие косинусы $\overline{AB}$, где $A(1;0;-1), B(3;1;-3)$.

3. На оси ординат найти точку *M*, равноудаленную от точек $A(3;-8;2), B(-2;5;6)$.

4. Упростить $\left(2\bar{i}\left[\bar{j},\bar{k}\right] + 3\left(\bar{j},\left[\bar{i},\bar{k}\right]\right) + 4\left(\bar{k},\left[\bar{i},\bar{j}\right]\right)\right)$.

5. Даны $A(3;4;3), B(7;6;3), C(4;9;3), D(3;6;7)$. Найти объём тетраэдра $ABCD$, площадь грани ACD, длину медианы *AM*, где *M* точка на ребре *AB*. Найти угол между ребром *AC* и гранью CBD.

6. Может ли вектор составлять с координатными осями углы $\alpha = 45^0, \beta = 30^0, \gamma = 60^0$.

Вариант 12

1. Разложить вектор $\bar{d} = \{2;10;4\}$ по базису векторов $\bar{a} = \{1;3;4\}$, $\bar{b} = 2\bar{i} + 2\bar{j} + 3\bar{k}$ и $\bar{c} = \{1;1;-2\}$.

2. Вычислить $\left(\bar{a} - \bar{b}\right)^2$, если $|\bar{a}| = 2\sqrt{2}$, $|\bar{b}| = +4$ и $\left(\bar{a}, \bar{b}\right) = 135^0$.

3. Вычислить момент силы $\bar{F} = \{2;8;1\}$ приложенной к точке $A(3;-2;5)$ относительно точки $B(-2;1;3)$.

4. Показать, что точки $A(5;7;-2), B(3;1;-1), C(9;4;-4), D(1;5;0)$ лежат в одной плоскости.

5. Может ли вектор составлять с координатными осями углы $\alpha = 90^0, \beta = 150^0, \gamma = 60^0$.

6. Даны вершины треугольника *ABC* $A(3;2;-3), B(1;-3;4), C(-1;5;1)$. Определить угол при вершине *A*, длину медианы *AM* и высоту AN.

Вариант 13

1. На оси OZ найти точку равноудаленную от точек $A(4;-1;2)$ и $B(0;2;-1)$.

2. Даны точки $A(1;2;0), B(3;-1;2), C(5;4;4)$. Найти точку D, если точки принадлежат параллелограмму.

3. Установить компланарны ли векторы $\bar{a} = \bar{i} + \bar{j} + \bar{k}$, $\bar{b} = \{1;1;-1\}$ и $\bar{c} = \bar{i} - \bar{j} + \bar{k}$.

4. Даны $\bar{a} = 2\bar{i} - 3\bar{j} + \bar{k}$, $\bar{b} = -3\bar{i} + \bar{j} + 2\bar{k}$ и $\bar{c} = \{1;2;3\}$. Найти вектор $\left[\left[\bar{a}, \bar{b}\right], \left[\bar{a}, \bar{c}\right]\right]$.

5. Найти разложение вектора $\bar{d} = -4\bar{i} + 5\bar{j} - 16\bar{k}$ по базису векторов $\bar{a} = 3\bar{i} - 5\bar{j} + 2\bar{k}$, $\bar{b} = 4\bar{i} + 5\bar{j} + \bar{k}$ и $\bar{c} = -3\bar{i} - 4\bar{k}$.

6. Найти проекцию вектора $\left(\bar{a} + 2\bar{b}\right)$ на вектор $\bar{c}$, если $|\bar{a}| = 2, |\bar{b}| = 1$, $\left(\bar{a}, \bar{c}\right) = 45^0$ и $\left(\bar{b}, \bar{c}\right) = 30^0$.

Вариант 14

1. Найти проекцию $\bar{a} - 2\bar{b}$ на $\bar{a} + \bar{b}$, если $\bar{a} = \{-1;2;1\}$ и $\bar{b} = -4\bar{i} - \bar{j} + 2\bar{k}$.

2. Найти работу сил $\bar{F}_1 = \{-2;3;1\}$ и $\bar{F}_2 = 3\bar{i} - 4\bar{j} + \bar{k}$ по перемещению тела из точки $A(1;0;2)$ в точку $B(2;-3;4)$.

3. Найти разложение вектора $\bar{d} = -4\bar{i} + 3\bar{j} - 16\bar{k}$ по базису векторов $\bar{a} = 3\bar{i} - 5\bar{j} - 2\bar{k}$, $\bar{b} = 4\bar{i} + 5\bar{j} + \bar{k}$ и $\bar{c} = -\bar{i} + 2\bar{k}$.

4. Найти единичный вектор, перпендикулярный векторам $\bar{a} = \{1;3;2\}$ и $\bar{b} = 2\bar{i} + \bar{j}$.

5. Даны вершины треугольника *ABC* $A(1;2;0), B(-1;-3;5), C(5;0;2)$. Найти высоту AN и величину медианы *AM*.

6. Даны вершины пирамиды $A(3;3;9), B(6;9;7), C(1;7;3), D(8;5;8)$. Найти объём пирамиды и высоту AN.

Вариант 15

1. Показать, что точки $A(3;-1;2), B(1;2;-1), C(-1;1;-1), D(3;-5;3)$ служат вершинами трапеции.

2. Разложить вектор $\bar{d}=\{3;7;-7\}$ по базису векторов $\bar{a}=\{2;1;0\}$, $\bar{b}=\{1;-1;2\}$ и $\bar{c}=\{1;-15;20\}$.

3. Найти работу силы $\bar{F}=\{1;2;1\}$ при перемещении тела из точки $A(-1;2;0)$ в точку $B(2;1;3)$, а также момент этой силы относительно точки *B*.

4. Даны вершины пирамиды $A(3;3;9), B(6;9;1), C(1;7;3), D(8;5;8)$. Найти площадь грани *ABC*, угол между гранью *ABC* и ребром CD, высоту DN.

5. Вектор $\bar{a}$ составляет с координатными осями углы $\alpha=120^0$ и $\beta=30^0$. Найти координаты, если $|\bar{a}|=4$.

6. Построить параллелограмм на вершинах $\bar{a}=\bar{i}+\bar{j}$ и $\bar{b}=\bar{i}-3\bar{j}+\bar{k}$. Определить его площадь и диагонали.

Вариант 16

1. Разложить вектор $\bar{d}=\{1;20;1\}$ по базису векторов $\bar{a}=\{-2;3;5\}$, $\bar{b}=\bar{i}-3\bar{j}+4\bar{k}$ и $\bar{c}=\{7;8;-1\}$.

2. Найти вектор $\bar{c}$ если он перпендикулярен векторам $\bar{a}=\{2;3;-1\}$ и $\bar{b}=\{1;-2;3\}$ и удовлетворяет условию $(\bar{c},2\bar{i}-\bar{j}+\bar{k})=-6$.

3. При каких α и β вектора $\bar{a}=\{3\alpha;2;5\}$ и $\bar{b}=\{9;6;\beta\}$ колинеарны.

4. Упростить $[\bar{i},\bar{j}-\bar{k}]+[\bar{j},\bar{i}+\bar{k}+\bar{j}]+[\bar{k},\bar{i}-\bar{j}-2\bar{k}]$.

5. В тетраэдре $A(1;1;1), B(2;0;2), C(2;2;2), D(3;4;-3)$ вычислить высоту DM и угол между ребрами AD и гранью DBC.

6. Найти момент силы $\bar{F}=\{1;2;-1\}$ приложенной к точке $A(4;-1;3)$ относительно $O(0;0;0)$.

Вариант 17

1. Доказать, что четырехугольник $A(2;1;-4), B(1;3;5), C(7;2;3), D(8;0;-6)$ есть параллелограмм. Найти длины диагоналей и углы между ними.

2. Разложить вектор $\bar{d}=\{14;6;3\}$ по базису векторов $\bar{a}=\{1;1;1\}$, $\bar{b}=\{2;1;1\}$ и $\bar{c}=\{3;1;0\}$.

3. Найти работу силы $\bar{F}=\{2;0;8\}$ по перемещению тела из точки $A(2;0;0)$ в точку $B(1;0;2)$, а затем в точку $C(3;5;9)$.

4. Найти площадь треугольника *ABC* с вершинами $A(7;3;4), B(1;0;2), C(4;5;-2)$. Найти высоту *AM*.

5. Проверить компланарность векторов $\bar{a}=3\bar{i}+3\bar{j}$, $\bar{b}=\bar{i}-\bar{j}+2\bar{k}$, $\bar{c}=5\bar{i}+3\bar{j}+4\bar{k}$.

6. Найти проекцию $\bar{a}+\bar{b}-\bar{c}$ на $(\bar{a}-\bar{b}+\bar{c})$, если $\bar{a}=\{2;1;-4\}$, $\bar{b}=\{-3;4;1\}$ и $\bar{c}=\{2;1;3\}$.

Вариант 18

1. Найти острый угол между диагоналями параллелограмма построенного на векторах $\bar{a}=\{2;1;0\}$ и $\bar{b}=\{0;-1;1\}$. Найти наименьшие расстояния между его сторонами.

2. Дан треугольник *ABC* с вершинами $A(2;-1;2), B(1;2;-1), C(3;2;1)$. Найти высоту AN, медиану *AM* и угол при вершине *C*.

3. Даны векторы $\bar{a}=3\bar{i}-\bar{j}-2\bar{k}$ и $\bar{b}=\bar{i}+2\bar{j}-\bar{k}$. Найти $\left[2\bar{a}-\bar{b},\bar{a}+2\bar{b}\right]$

4. Найти разложение вектора $\bar{d}=\{-3;0;3\}$ по базису векторов $\bar{a}=\{1;1;-1\}$, $\bar{b}=\{-2;3;4\}$ и $\bar{c}=\{-3;-5;1\}$.

5. Найти момент силы $\bar{F}=\{-1;3;-4\}$ приложенной к точке $A(2;1;1)$ относительно $B(-4;3;-2)$.

6. . При каких значениях α и β векторы $\bar{a}=\{1;\alpha;\beta\}$ и $\bar{b}=\{3;6;-6\}$ колинеарны.

Вариант 19

1. Разложить вектор $\bar{d}=\{3;2;7\}$ по базису векторов $\bar{a}=\{5;0;0\}$, $\bar{b}=\{1;0;5\}$ и $\bar{c}=\{-4;2;-12\}$.

2. Найти единичный вектор перпендикулярный векторам $\bar{a}=-\bar{i}+3\bar{j}+\bar{k}$ и $\bar{b}=2\bar{i}-\bar{j}-\bar{k}$.

3. Компланарны ли векторы $\bar{a}=\bar{i}+\bar{j}-2\bar{k}$, $\bar{b}=2\bar{i}-\bar{j}+3\bar{k}$ и $\bar{c}=\bar{i}-2\bar{j}+\bar{k}$

4. Найти работу сил $\bar{F}_1=\{1;3;5\}$ и $\bar{F}_2=\{2;-1;3\}$ по перемещению тела из точки $A(1;2;-1)$ в точку $B(5;6;7)$.

5. Найти направление вектора, заданного проекциями $x=7$, $y=4$, $z=-4$.

6. Даны вершины треугольника *ABC* $A(-3;1;2), B(5;2;5), C(0;-3;-2)$. Найти его площадь, высоту AN и медиану *AM*.

Вариант 20

1. Проверить, что точки $A(3;-1;2), B(1;2;-1), C(-1;1;-3), D(3;-5;3)$ являются вершинами трапеции. Найти угол при вершине *C*.

2. Найти вектор $\bar{x}$ если он перпендикулярен $\bar{a}=\bar{i}-2\bar{j}+3\bar{k}$ и $\bar{b}=\{2;-3;1\}$ и удовлетворяет условию $(\bar{x},\bar{c})=10$, если $\bar{c}=\bar{i}+2\bar{j}-7\bar{k}$.

3. Даны точки $A(2;-1;2), B(1;2;-1), C(3;2;1)$. Найти $\left|\left[\overline{AB},\overline{AC}\right]\right|$ и угол между векторами $\overline{BC}$ и $\overline{CA}$.

4. Показать, что точки $A(5;7;-2), B(3;1;-2), C(9;4;-4), D(1;5;0)$ лежат в одной плоскости.

5. Дано $|\bar{a}|=1$, $|\bar{b}|=3$ и $(\bar{a},\bar{b})=\dfrac{2\pi}{3}$. Вычислить $\left|\left[\bar{a}+3\bar{b},3\bar{a}-\bar{b}\right]\right|$.

6. Сила $\bar{F}=\bar{i}-\bar{k}$ приложена к точке $M(1;2;2)$. Найти момент силы относительно точки $A(0;3;5)$.

Вариант 21

1. Разложить вектор $\bar{d}=\{5;0;3\}$ по базису векторов $\bar{a}=\{3;1;4\}$, $\bar{b}=\{2;1;-1\}$ и $\bar{c}=\{1;-1;5\}$.

2. На оси OX найти точку равноудаленную от точки $A(-3;2;4)$и $B(2;1;-3)$.

3. Найти работу сил $\bar{F}_1=\{1;-2;5\}$, $\bar{F}_2=3\bar{i}-\bar{j}-2\bar{k}$ и $\bar{F}_3=\{0;2;1\}$ по перемещению тела из точки $A(1;-1;2)$ в точку $B(3;5;7)$.

4. Упростить $[\bar{a}+\bar{b},2\bar{c}-\bar{a}]+[\bar{c}+\bar{b},\bar{b}-\bar{a}]$.

5. Найти объём пирамиды, площадь грани BCD, высоту AN, если $A(9;5;5), B(-3;7;1), C(5;7;8), D(6;9;12)$.

6. Найти координаты вектора $\bar{b}$, колинеарного вектору $\bar{a}=\{2;-3;5\}$ и удовлетворяющему условию $(\bar{a},\bar{b})=5$.

Вариант 22

1. Определить при каких α и β векторы $\bar{a}=\alpha\bar{i}-2\bar{j}-3\bar{k}$ и $\bar{b}=8\bar{i}-4\bar{j}+\beta\bar{k}$ колинеарны.

2. Дано $|\bar{a}|=3$, $|\bar{b}|=4$ $(\bar{a},\bar{c})=\dfrac{\pi}{4}$ и $(\bar{b},\bar{c})=150^0$. Найти проекцию вектора $(\bar{a}-\bar{b})$ на вектор $\bar{c}$.

3. Определить смешанное произведение векторов $\bar{a}+2\bar{b}, \bar{a}+\bar{c}$ и $\bar{b}-\bar{c}$, если $\bar{a}=\{1;2;3\}$, $\bar{b}=\{2;-1;1\}$ и $\bar{c}=\{-3;4;-1\}$.

4. В тетраэдре с вершинами $A(1;1;1), B(2;0;2), C(2;2;2), D(3;4;-3)$ вычислить высоту DM.

5. Найти вектор перпендикулярный векторам $\bar{a}=-\bar{i}+3\bar{j}+\bar{k}$ и $\bar{b}=2\bar{i}-\bar{j}-\bar{k}$.

6. Найти координаты разложения вектора $\bar{d}=\{0;12;-6\}$ по базису векторов $\bar{a}=\{4;3;-1\}$, $\bar{b}=\{5;0;4\}$ и $\bar{c}=\{2;1;2\}$.

Вариант 23

1. В треугольнике с вершинами $A(-1;-1;2), B(5;-6;2), C(1;3;-1)$. Найти высоту BD.

2. При каких значениях m векторы $\bar{a}=m\bar{i}-5\bar{j}+7\bar{k}$ и $\bar{b}=3\bar{i}-m\bar{j}+2\bar{k}$ взаимно перпендикулярны.

3. Компланарны ли векторы $\bar{a}=\bar{i}+\bar{j}+2\bar{k}$, $\bar{b}=\{1;3;-1\}$ и $\bar{c}=\bar{i}-\bar{j}+3\bar{k}$.

4. Даны $\bar{a}=2\bar{i}+\bar{k}$ и $\bar{b}=-\bar{i}+\bar{j}+3\bar{k}$. Найти векторное произведение $\bar{a}-2\bar{b}$ на $3\bar{a}+\bar{b}$.

5. Вычислить объём тетраэдра, если $\overline{OA} = 3\bar{i} + 4\bar{j}$, $\overline{OB} = -3\bar{i} + \bar{k}$ и $\overline{OC} = 2\bar{i} + 5\bar{k}$.

6. Проверить, что точки $A(2;4;1), B(3;7;5), C(4;10;9)$ лежат на одной прямой.

Вариант 24

1. Разложить вектор $\bar{d} = \{12;-10;6\}$ по базису векторов $\bar{a} = \{1;3;2\}$, $\bar{b} = \{3;2;5\}$ и $\bar{c} = \{-6;5;-3\}$.

2. В ромбе $ABCD$ даны диагонали $\overline{AC} = \bar{a}$ и $\overline{BD} = \bar{b}$. Разложить по этим двум векторам векторы сторон ромба.

3. Даны векторы $\bar{a} = 3\bar{i} - \bar{j} + \bar{k}$, $\bar{b} = 2\bar{i} + \bar{j} + 3\bar{k}$. Найти орт вектора $\bar{c} = 2\bar{a} + \bar{b}$, модуль вектора $-\bar{a} + 3\bar{b}$ и проекцию вектора $\bar{a} - 2\bar{b}$ на ось OY.

4. Даны вершины пирамиды $A(-1;-3;-4), B(3;2;1), C(1;5;4)$ и $D(-5;0;2)$. Найти высоту пирамиды AN.

5. Векторы $\bar{a}, \bar{b}$ и $\bar{c}$ составляют с осью l $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{6}$ и $\frac{\pi}{4}$, соответственно. Найти проекцию на ось l вектора $(2\bar{a} - \bar{b} - \bar{c})$ если $|\bar{a}| = |\bar{b}| = |\bar{c}| = 2$.

6. Найти площадь треугольника с вершинами $A(1;3;-5), B(5;-1;2)$ и $C(-1;0;-1)$.

Вариант 25

1. Может ли вектор составлять с координатными осями углы $\alpha = 90^0$, $\beta = 150^0$ и $\gamma = 60^0$.

2. Даны векторы $\bar{a} = 2\bar{i} - \bar{j}$, $\bar{b} = 5\bar{i} + 3\bar{k}$ и $\bar{c} = 5\bar{i} + \bar{j} + 6\bar{k}$. Найти вектор $[[\bar{a}, \bar{b}], [\bar{b}, \bar{c}]]$.

3. Силы и $\bar{F}_1 = 3\bar{i} + \bar{k}$ и $\bar{F}_2 = 2\bar{i} - \bar{j} + 3\bar{k}$ приложены к точке $M(2;0;-1)$. Найти момент сил относительно точки $A(1;3;-2)$.

4. Найти высоту AN в треугольнике с вершинами $A(7;7;3), B(6;5;8)$ и $C(3;5;8)$. Найти величину медианы AM.

5. Проверить, лежат ли точки $A(6;6;-5), B(4;9;5), C(4;6;11)$ и $D(-1;3;10)$ в одной плоскости.

6. Вычислить длину высоты тетраэдра, опущенную на грань ABC из точки D, если $A(4;4;10), B(4;10;2), C(2;8;4)$ и $D(9;6;4)$.

В. Вершины пирамиды находятся в точках A, B, C и D. **Вычислить**: а) площадь указанной грани; б) площадь сечения, проходящего через середину ребра l и две вершины пирамиды; в) объём пирамиды $ABCD$; г) высоту, опущенную на данную грань.

1. $A(3;4;5), B(1;2;1), C(-2;-3;6), D(3;-6;-3)$; а) ACD; б) $l = AB$, C и D

2. $A(-7;-5;6), B(-2;5;-3), C(3;-2;4), D(1;2;2)$ а) BCD; б) $l = CD$, A и B

3. $A(1;3;1), B(-1;4;6), C(-2;-3;4), D(3;4;-4)$ а) ACD; б) $l=BC,\ A$ и D

4. $A(2;4;1), B(-3;-2;4), C(3;5;-2), D(4;2;-3)$ а) ABD; б) $l=AC,\ B$ и D

5. $A(-5;-3;-4), B(1;4;6), C(3;2;-2), D(8;-2;4)$ а) ACD; б) $l=BC,\ A$ и D

6. $A(3;4;2), B(-2;3;-5), C(4;-3;6), D(6;-5;3)$ а) ABD; б) $l=BD,\ A$ и C

7. $A(-4;6;3), B(3;-5;1), C(2;6;-4), D(2;4;-5)$ а) ACD; б) $l=AD,\ B$ и C

8. $A(7;5;8), B(-4;-5;3), C(2;-3;5), D(5;1;-4)$ а) BCD; б) $l=BC,\ A$ и D

9. $A(3;-2;6), B(-6;-2;3), C(1;1;-4), D(4;6;-7)$ а) ABD; б) $l=BD,\ A$ и C

10 $A(-5;-4;-3), B(7;3;-1), C(6;-2;0), D(3;2;-7)$а) BCD; б) $l=AD,\ B$ и C

11. $A(3;-5;-2), B(-4;2;3), C(1;5;7), D(-2;-4;5)$а) ACD; б) $l=BD,\ A$ и C

12. $A(7;4;9), B(1;-2;-3), C(-5;-3;0), D(1;-3;4)$ а) ABD; б) $l=AB,\ C$ и D

13. $A(-4;-7;-3), B(-4;-5;7), C(2;-3;3), D(3;2;1)$а) BCD; б) $l=BC,\ A,\ D$

14. $A(-4;-5;-3), B(3;2;1), C(5;7;-6), D(6;-1;5)$ а) ACD; б) $l=BC,\ A$ и D

15. $A(5;2;4), B(-3;5;-7), C(1;-5;8), D(9;-3;5)$ а) ABD; б) $l=BD,\ A$ и C

16. $A(-6;4;5), B(5;-7;3), C(4;2;-8), D(2;8;-3)$ а) ACD; б) $l=AD,\ B$ и C

17. $A(5;3;6), B(-3;-4;4), C(5;-6;8), D(4;0;-3)$ а) BCD; б) $l=BC,\ A$ и D

18. $A(5;-4;4), B(-4;-6;5), C(3;2;-7), D(6;2;-9)$а) ABD; б) $l=BD,\ A$ и C

19. $A(-7;-6;-5), B(5;1;-3), C(8;-4;0), D(3;4;-7)$а) BCD; б) $l=AD,\ B\ ,\ C$

20. $A(7;-1;-2), B(1;7;8), C(3;7;9), D(-3;-5;2)$ а) ACD; б) $l=BD,\ A$ и C

21. $A(5;2;7), B(7;-6;-9), C(-7;-6;3), D(1;-5;2)$ а) ABD; б) $l=AB,\ C$ и D

22. $A(-2;-5;-1), B(-6;-7;9), C(4;-5;1), D(2;1;4)$а) BCD; б) $l=BC,\ A,\ D$

23. $A(-6;-3;-5), B(5;1;7), C(3;5;-1), D(4;-2;9)$ а) ACD; б) $l=BC,\ A$ и D

24. $A(7;4;2), B(-5;3;-9), C(1;-5;3), D(7;-9;1)$ а) ABD; б) $l = BD,\ A$ и C

25. $A(-8;2;7), B(3;-5;9), C(2;4;-6), D(4;6;-5)$ а) ACD; б) $l = AD,\ B$ и C

3. Аналитическая геометрия

А. Даны вершины треугольника $ABC: (x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3)$.
Найти:
а) уравнение стороны *AB*:
б) уравнение высоты *CH*;
в) уравнение медианы *AM*;
г) точку *N* пересечения медианы *AM* и высоты *CH*;
д) уравнение прямой, проходящей через вершину *C* параллельно стороне *AB*;
е) расстояние от точки *C* до прямой *AB*.

1. $A(-2,4),\ B(3,1),\ C(10,7)$
2. $A(-3,-2),\ B(14,4),\ C(6,8)$
3. $A(1,7),\ B(-3,\text{-}1),\ C(11,-3)$
4. $A(1,0),\ B(-1,4),\ C(9,5)$
5. $A(1,-2),\ B(7,1),\ C(3,7)$
6. $A(-2,-3),\ B(1,6),\ C(6,1)$
7. $A(-4,2),\ B(-6,6),\ C(6,2)$
8. $A(4,-3),\ B(7,3),\ C(1,10)$
9. $A(4,-4),\ B(8,2),\ C(3,8)$
10. $A(-3,-3),\ B(5,-7),\ C(7,7)$
11. $A(1,-6),\ B(3,4),\ C(-3,3)$
12. $A(-4,2),\ B(8,-6),\ C(2,6)$
13. $A(-5,2),\ B(0,-4),\ C(5,7)$
14. $A(4,-4),\ B(6,2),\ C(-1,8)$
15. $A(-3,8),\ B(-6,2),\ C(0,-5)$
16. $A(6,-9),\ B(10,-1),\ C(-4,1)$
17. $A(4,1),\ B(-3,-1),\ C(7,-3)$
18. $A(-4,2),\ B(6,-4),\ C(4,10)$
19. $A(3,-1),\ B(11,3),\ C(-6,2)$
20. $A(-7,-2),\ B(-7,4),\ C(5,-5)$
21. $A(-1,-4),\ B(9,6),\ C(-5,4)$
22. $A(10,-2),\ B(4,-5),\ C(-3,1)$
23. $A(-3,-1),\ B(-4,-5),\ C(8,1)$
24. $A(-2,-6),\ B(-3,5),\ C(4,0)$
25. $A(-7,-2),\ B(3,-8),\ C(-4,6)$

Б. Решить следующие задачи.

1. Найти уравнение прямой, проходящей через точку пересечения прямых $3x - 2y - 7 = 0$ и $x + 3y - 6 = 0$ и отсекающей на оси абсцисс отрезок, равный 3.

(Ответ: $x = 3$).

2. Найти проекцию точки $A(-8,12)$ на прямую, проходящую через точки $B(2,-3)$ и $C(-5,1)$.

(Ответ: $A_1(-12,5)$.

3. Даны две вершины треугольника $ABC: A(-4;4), B(4;-12)$ и точка $M(4;2)$ пересечения его высот. Найти вершину *C*.

(Ответ: $C(8;4)$).

4. Найти уравнение прямой, отсекающей на оси ординат отрезок, равный 2, и проходящей параллельно прямой $2y - x = 3$.

(Ответ: $x - 2y + 4 = 0$).

5. Найти уравнение прямой, проходящей через точку $A(2,-3)$и точку пересечения прямых $2x - y = 5$ и $x + y = 1$

(Ответ: $x = 2$).

6. Доказать, что четырехугольник $ABCD$ - трапеция, если $A(3;6)$, $B(5;2)$, $C(-1;-3)$, $D(-5;5)$.

7. Записать уравнение прямой, проходящей через точку $A(3;1)$, перпендикулярно к прямой *BC*, если $B(2;5)$ и $C(1;0)$.

(Ответ: $x + 5y - 8 = 0$).

8. Найти уравнение прямой, проходящей через точку $A(-2;1)$ параллельно прямой MN, если $M(-3;-2), N(1;6)$.

(Ответ: $2x - y + 5 = 0$).

9. Найти точку, симметричную точке $M(2;-1)$ относительно прямой $x - 2y + 3 = 0$

(Ответ: $M_1(-4/5;23/5)$.

10. Найти уравнение высот треугольника *ABC*, проходящего через вершины *A* и *B*, если $A(-4;2), B(3;-5), C(5;0)$.

(Ответ:$3x + 5y + 2 = 0$, $9x + 2y - 28 = 0$).

11. Вычислить координаты точки пересечения перпендикуляров, проведенных через середины сторон треугольника, вершинами которого служат точки $A(2;3)$, $B(0;-3)$, $C(6,;-3)$.

(Ответ: $M(3;-2/3)$.

12. Составить уравнение высоты, проведенной через вершину *A* треугольника *ABC*, зная уравнения его сторон: $AB - 2x - y - 3 = 0$, $AC - x + 5y - 7 = 0,\ BC - 3x - 2y + 13 = 0$.

(Ответ: $2x + 3y - 7 = 0$).

13. Дан треугольник с вершинами $A(3;1)$, $B(-3;-1)$, $C(5;-12)$. Найти уравнение и вычислить длину его медианы, проведенной из вершины C. (Ответ: $2x + y + 2 = 0,\ d = 54\sqrt{17} \approx 13{,}1$).

14. Составить уравнение прямой, проходящей через начало координат и точку пересечения прямых $2x + 5y - 8 = 0$ и $2x + 3y + 4 = 0$. (Ответ: $6x + 11y = 0$).

15. Найти уравнения перпендикуляров к прямой $3x + 5y - 15 = 0$, проведенных через точки пересечения данной прямой с осями координат.

(Ответ: $5x-3y-25=0$, $5x-3y+9=0$).

16. Даны уравнения сторон четырехугольника: $x-y=0$, $x+3y=0$, $x-y-4=0$, $3x+y-12=0$. Найти уравнения его диагоналей.

(Ответ: $y=0$, $x=3$).

17. Составить уравнения медианы *CM* и высоты *CK* треугольника *ABC*, если $A(4;6)$, $B(-4;0)$, $C(-1;-4)$.

(Ответ: $7x-y+3=0$ (CM), $4x+3y+16=0$ (CK)).

18. Через точку $P(5;2)$ провести прямую а) отсекающую равные отрезки на осях координат; б) параллельную оси *Ox*; в) параллельную оси *Oy*.

(Ответ: $x+y-7=0$, $y=2$, $x=5$).

19. Записать уравнение прямой, проходящей через точку $A(-2;3)$ и составляющей с осью *Ox* угол: а) 45^0, б) 90^0, в) 0^0.

(Ответ: $x-y+5=0$, $x+2=0$, $y-3=0$).

20. Какую ординату имеет точка *C*, лежащая на одной прямой с точками $A(-6;-6)$, $B(-3;-1)$ и имеющая абсциссу, равную 3?

(Ответ: $y=9$).

21. Через точку пересечения прямых $2x-5y-1=0$ и $x+4y-7=0$ провести прямую, которая делит отрезок между точками $A(4;-3)$, $B(-1;2)$ в отношении $\lambda=2/3$.

(Ответ: $2x-y-5=0$).

22. Даны две прямые 2x +3y-5 =0 и 7x +15y +1=0. Составить уравнение прямой, проходящей через точку их пересечения и перпендикулярной к прямой 12x -6y -1=0.

(Ответ: 6x +12y+96=0).

23. Найти точку симметричную точке М(2;-1) относительно прямой x – 2y +3=0.

(Ответ: М(-0,8; 4,2).

24. Известны уравнение стороны АВ: 4x +y-12=0 треугольника АВС, его высоты ВН: 5x -4y -12=0 и высоты АМ: x +y -6 =0. Найти уравнения двух других сторон треугольника.

(Ответ: 4x +5y +7=0, x –y +3=0).

25. Через точку пересечения прямых 2x -3y +10 =0 и 3x+y-7=0 провести прямую перпендикулярно прямой 2x –y=0. (Ответ: x +2y +7=0).

В. Решить следующие задачи:

Вариант 1

1. Составить уравнение прямой:

а) проходящей через точку $A(1;-3)$ и имеющей угловой коэффициент $k=3$;

б) проходящей через точку $A(1;\sqrt{3})$ и имеющей нормальный вектор $\vec{n}=\{4;-1\}$;

в) проходящей через точки $A(1;2)$ и $B(0;-3)$;

г) проходящей через точку $A(-1;2)$ параллельно прямой $\frac{x}{4}+\frac{y}{2}=1$;

д) отсекающей на осях координат равные отрезки и проходящей через точку $A(1;-3)$.

2. Даны две вершины треугольника $A(-1;5)$, $B(3;2)$ и точка $H(5;-3)$ пересечения его высот. Составить уравнения его сторон и медианы, проведенной из вершины B.

3. Составить уравнение окружности, проходящей через точку $O(0;0)$ и имеющей центр в вершине параболы $y^2=3(x-4)$.

4. Составить каноническое уравнение эллипса, если большая полуось равна 4, а фокус $F(3;0)$.

5. Составить каноническое уравнение гиперболы, если большая полуось равна 13, а эксцентриситет равен $14/13$.

6. Составить каноническое уравнение параболы, если директриса её задана уравнением $x=-4$.

7. Дан эллипс $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$. Написать уравнение гиперболы, имеющей с этим эллипсом общие фокальные хорды.

Вариант 2

1. Составить уравнение прямой:

а) проходящей через точку $A(1;-3)$ перпендикулярно вектору $\vec{n}=\{4;1\}$;

б) проходящей через точку $A(2;2\sqrt{3})$ и составляющей с осью Ox угол 30^0;

в) проходящей через начало координат и точку $B(2;-1)$;

г) проходящей через точку пересечения прямых $8x-2y+5=0$ и $2x+y-4=0$ параллельно оси Ox;

д) отсекающей на осях координат отрезки $a=2;\ b=4$.

2. Даны две вершины $A(0;7)$ и $B(-2;3)$ треугольника, площадь которого равна 3, и прямая $x-7=0$, на которой лежит третья вершина. Составить уравнения сторон треугольника.

3. Составить уравнение окружности радиуса $r=2$, касающейся осей координат.

4. Составить каноническое уравнение эллипса, если его эксцентриситет равен 7/8 и эллипс проходит через точку $A(8;0)$.

5. Составить каноническое уравнение гиперболы, если действительная ось равна 14, а эксцентриситет равен $\sqrt{85}/7$.

6. Составить каноническое уравнение параболы, если директриса её задана уравнением $y=1$.

7. Дана равносторонняя гипербола $x^2-y^2=4$. Написать уравнение эллипса, имеющего с этой гиперболой общие фокальные хорды.

Вариант 3

1. Составить уравнение прямой:

а) проходящей через точку $A(1;-3)$ параллельно вектору $\vec{S}=\{1;-2\}$;

б) проходящей через начало координат и образующей с осью Ox угол 45^0;

в) проходящей через точки $A(2;-7)$ и $B(1;2)$;

г) проходящей через точку $A(5;10)$ перпендикулярно к прямой $x-y+1=0$;

д) проходящей через точку пересечения прямой $2x-y+1=0$ и осью Oy и отсекающей на оси Ox отрезок $a=\frac{1}{3}$.

2. Составить уравнения сторон треугольника *ABC,* зная одну из его вершин $A(3;0)$ и уравнения двух медиан $7x-5y+15=0$ и $4x+y+6=0$.

3. Составить уравнение окружности с центром в точке $C(3;0)$, касающейся оси *Oy*.

4. Написать уравнение гиперболы проходящей через точку $A(1;2)$, асимптотами которой служат прямые $y=\pm\frac{1}{2}x$.

5. Составить каноническое уравнение эллипса, если малая полуось равна 2, а фокус имеет координаты $F\left(4\sqrt{2};0\right)$.

6. Составить уравнение параболы, если директриса её задана уравнением $x=-2$.

7. Дана парабола $y=\frac{3}{4}x^2$. Написать уравнение другой параболы, имеющей с данной параболой общую фокальную хорду, т.е. хорду, проходящую через фокус параболы и перпендикулярную к её оси.

Вариант 4

1. Составить уравнение прямой:

а) проходящей через начало координат и составляющей с осью *Ox* угол 135^0;

б) проходящей через точку $P(1;2)$ и отсекающей на оси координат равные отрезки;

в) проходящей через точку $A(2;-3)$ параллельно прямой $\frac{x}{2}+\frac{y}{4}=1$;

г) проходящей через точку $A(2;-7)$ и точку пересечения прямой $2x-y+3=0$ с осью *Oy*;

д) проходящей через точку $A(-2;-1)$ перпендикулярно оси Oy.

2. Составить уравнения сторон треугольника, зная одну его вершину $A(0;2)$ и уравнения высот BM и CM: $x+y=4$ и $y=2x$, где M – точка пересечения высот.

3. Найти координаты центра и радиус окружности $x^2+y^2-12x+4y-9=0$.

4. Составить каноническое уравнение эллипса, если малая полуось равна 7, а фокус имеет координаты $(5;0)$.

5. Составить каноническое уравнение гиперболы, если действительная ось равна 12, а известны уравнения асимптот $y=\pm\frac{5}{6}x$.

6. Составить уравнение параболы, если директриса её задана уравнением $y=-3$.

7. Написать уравнение эллипса, проходящего через точку пересечения гиперболы $x^2-y^2=2$ с прямой $x+y-2=0$, если известно, что фокусы эллипса совпадают с фокусами гиперболы.

Вариант 5

1. Составить уравнение прямой:

а) проходящей через точку $A(3;5)$ параллельной оси Ox;

б) проходящей через точки $A(2;6)$ и $B(1;-6)$;

в) проходящей через начало координат и перпендикулярной вектору $\vec{n}=\{1;1\}$;

г) параллельной прямой $2x+3y-1=0$ и отсекающей на положительной полуоси абсцисс отрезок, равный 4;

д) проходящей через точку пересечения прямых $2x-y+1=0$ и $x+2y-3=0$ параллельно вектору $\vec{S}=\{2;-3\}$.

2. Даны координаты двух противоположных вершин ромба $M(-3;2)$ и $N(7;-6)$. Составить уравнения диагоналей ромба и найти внутренний угол при вершине M.

3. Записать уравнение окружности, проходящей через левую вершину гиперболы $5x^2-9y^2=45$, имеющей центр в точке $A(0;-6)$.

4. Составить каноническое уравнение эллипса, если малая полуось равна 4, а фокус имеет координаты $(9;0)$.

5. Составить каноническое уравнение гиперболы, если она проходит через точки $A(6;-1)$, $B(-8;2\sqrt{2})$.

6. Составить уравнение параболы, если ось симметрии Ox и парабола проходит через точку M(-5;15)

7. Дана гипербола $x^2-y^2=8$. Составить уравнение эллипса проходящего через точку M(4;5) и имеющего фокусы совпадающие с фокусами данной гиперболы.

Вариант 6

1. Составить уравнение прямой:

а) отсекающей на положительной полуоси *Oy* отрезок, равный 3, и образующей с осью *Ox* угол 150^0;

б) проходящей через точки $A(1;-3)$ и $B(4;6)$;

в) проходящей через точку $A(1;2)$ и отсекающую на осях координат равные отрезки;

г) проходящей через точку начало координат и точку пересечения прямых $x-6y+1=0$ и $2x-y+1=0$;

д) проходящей через точку $A(-1;0)$ параллельно вектору $\vec{S}=\{2;2\}$.

2. Составить уравнения сторон, высоты *AH* и медианы *BM* треугольника с вершинами: $A(2;6), B(-6;0), C(-3;-4)$. Найти внутренний угол при вершине *C*.

3. Составить уравнение окружности, проходящей через левый фокус эллипса $3x^2+7y^2=21$.

4. Составить каноническое уравнение эллипса, если большая ось равна 50, а эксцентриситет $\varepsilon=\dfrac{3}{5}$.

5. Составить каноническое уравнение гиперболы, если мнимая полуось равна 44, а фокус имеет координаты $(-7;0)$.

6. Найти фокус и директрису параболы $y=4x^2$.

7. Написать уравнение параболы, вершина которой находится в начале координат, а осью симметрии является ось *Ox*, если известно, что расстояние от её фокуса до центра окружности $x^2+y^2-10x-8y+25=0$ равно 5.

Вариант 7

1. Составить уравнение прямой:

а) проходящей через точку $A(-1;2)$ и имеющей угловой коэффициент $k=-1$;

б) проходящей через точку $A(7;2)$ параллельно вектору $\vec{S}=\{1;0\}$;

в) проходящей через точку $M_0(1;-3)$ перпендикулярно прямой $\dfrac{x}{1}+\dfrac{y}{-3}=1$;

г) проходящей через точку $A(-1;-9)$ и отсекающей на отрицательной полуоси *Ox* отрезок втрое меньший, чем на отрицательной полуоси *Oy*;

д) проходящей через точку пересечения прямых $2x+2y-1=0$ параллельно оси *Oy*.

2. Вершины четырехугольника имеют координаты $P(1;0)$, $Q\left(2;\dfrac{5}{3}\right)$, $R(5;2)$, $N(6;-1)$. Найти точку пересечения его диагоналей, внутренний угол при вершине *P*.

3. Записать уравнение окружности, проходящей через фокусы эллипса $9x^2+25y^2=1$ и имеющий центр в точке $A(0;6)$.

4. Написать уравнение равносторонней гиперболы, зная её фокус $F(2;0)$ и асимптоту $x=1$.

5. . Составить каноническое уравнение эллипса, если эксцентриситет равен 7/8 и эллипс проходит через точку .

6. Составить каноническое уравнение параболы, если осью симметрии является ось *Ох*, и парабола проходит через точку $A(-5;10)$.

7. Эксцентриситет гиперболы в 2 раза больше углового коэффициента её асимптоты. Гипербола проходит через точку $M(3;-1)$. Её действительная ось лежит на оси *Ох*, а центр в начале координат. Найти точки пересечения этой гиперболы с окружностью $x^2+y^2=10$.

Вариант 8

1. Составить уравнение прямой:

а) проходящей через точки $A(-1;1)$ и $B(2;5)$;

б) проходящей через точку $A(2;-3)$ и образующей с осью *Ох* угол 120^0;

в) проходящей через точку $A(-1;4)$ перпендикулярно оси *Оу*;

г) отсекающей на оси *Оу* отрезок, равный 2, и проходящей параллельно прямой $2y-x=3$;

д) проходящей через точки пересечения прямых $2x-y-1=0$ с осью *Ох* и $\frac{x}{2}-\frac{y}{3}=1$, с осью *Оу*.

2. Известны уравнения стороны *АВ* треугольника *АВС* $4x+y=12$, его высот *ВН* $5x-14y=12$ и *АМ* $x+y=6$. Найти уравнения двух других сторон треугольника.

3. Найти координаты центра и радиус окружности $x^2+y^2+4x-6y-12=0$.

4. Составить каноническое уравнение эллипса, если большая ось равна 30, а эксцентриситет его равен 15/17.

5. Составить каноническое уравнение гиперболы, если мнимая полуось равна 4, а фокус имеет координаты $(-11;0)$.

6. Записать уравнение параболы проходящей через точку $A(-45;15)$, если ось симметрии *Оу*.

7. Составить каноническое уравнение эллипса, правая вершина которого совпадает с правым фокусом гиперболы $8x^2-y^2=8$. Эллипс проходит через точки пересечения параболы $y^2=12x$ с гиперболой $8x^2-y^2=8$.

Вариант 9

1. Составить уравнение прямой:

а) проходящей через точку $A(2;-2)$ параллельно вектору $\vec{S}=\{1;-6\}$;

б) проходящей через точку $A(1;-6)$ и составляющей с осью абсцисс угол 120^0;

в) проходящей через точку $A(-1;-2)$ и отсекающей на оси абсцисс отрезок вдвое меньший, чем на оси ординат;

г) проходящей через начало координат и точку пересечения прямых $x-y-3=0$ и $2x+y-6=0$;

д) проходящей через точку $M(2;3)$ перпендикулярно прямой PQ, если $P(1;7)$, $Q(-2;-5)$.

2. Составить уравнение сторон треугольника, если $A(-3;3)$, $B(5;-1)$ - его вершины, а $M(4;3)$ - точка пересечения его высот.

3. Найти координаты центра и радиус окружности $x^2-4x+y^2+2y-4=0$.

4. Составить каноническое уравнение эллипса, проходящего через две точки $A(2;0)$ и $B(0;\sqrt{2})$.

5. Составить каноническое уравнение гиперболы, если уравнения асимптот $y=\pm\sqrt{\frac{2}{3}}x$ а эксцентриситет $\varepsilon=\frac{\sqrt{15}}{3}$.

6. Записать уравнение параболы, если её директриса задана уравнением $y=4$.

7. Директриса параболы пересекает эллипс $9x^2+20y^2=324$ в точках $(-4;3)$ и $(4;3)$, а расстояние от этих точек до фокуса параболы равно $2\sqrt{5}$. Составить уравнение параболы.

Вариант 10

1. Составить уравнение прямой:

а) проходящей через начало координат и имеющей угловой коэффициент $k=\frac{1}{2}$;

б) проходящей через точку $A(1;0)$ и отсекающей на оси Oy отрезок $b=3$;

в) проходящей через точки $A(1;3)$ и $B(-1;-1)$;

г) проходящей через точку $A(-2;4)$ параллельно вектору $\vec{S}=\{1;7\}$;

д) проходящей через начало координат и перпендикулярной прямой $3x-2y+1=0$.

2. Показать, что четырехугольник $ABCD$, где $A(-2;-2)$, $B(-3;1)$, $C\left(\frac{5}{2};\frac{5}{2}\right)$, $D(3;1)$ является трапецией. Составить уравнение средней линии и диагоналей этой трапеции. Вычислить внутренний угол при вершине A.

3. Составить уравнение окружности, для которой точки $M_1(0;0)$ и $M_2(3;3)$ являются концами её диаметра.

4. Составить каноническое уравнение гиперболы, если известно, что расстояние между вершинами равно 8, а расстояние между фокусами равно 10.

5. Составить каноническое уравнение эллипса, если известно, что расстояние между фокусами равно 6, а эксцентриситет равен $\frac{3}{5}$.

6. Составить каноническое уравнение параболы, если известно, что парабола симметрична относительно оси абсцисс и проходит через точки $O(0;0)$ и $C(1;-4)$.

7. Составить уравнение гиперболы, имеющей вершины в фокусах эллипса $\frac{x^2}{225}+\frac{y^2}{144}=1$, а фокусы в его вершинах.

Вариант 11

1. Составить уравнение прямой:

а) проходящей через точку $A(1;-6)$ параллельно вектору $\vec{S}=\{-1;-1\}$;

б) проходящей через точку $A(-2;-3)$ и имеющей угловой коэффициент $k=3$;

в) проходящей через точку $A\left(1;\frac{1}{2}\right)$ и точку пересечения прямых $\frac{x}{3}-\frac{y}{4}=1$ и $2x-y-7=0$;

г) проходящей через точку пересечения прямой $x+3y-1=0$ с осью Ox и отсекающей на оси Oy отрезок равный 3;

д) проходящей через точку $A(2;-7)$ параллельно оси Oy.

2. Составить уравнения сторон треугольника, если одна из его вершин $(1;3)$ и уравнения двух медиан $x-2y+1=0$ и $y-1=0$.

3. По каноническому уравнению гиперболы $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{64}=1$ найти её полуось, фокусы, эксцентриситет, уравнения асимптот и директрис. Сделать рисунок.

4. Составить каноническое уравнение эллипса, если малая ось равна 24, а расстояние между фокусами равно 10.

5. Составить каноническое уравнение параболы, если известно, что парабола имеет фокус $F(0;2)$ и вершину в точке $O(0;0)$.

6. Найти уравнение окружности, если концы одного из её диаметров находятся в точках $A(3;9)$ и $B(7;3)$.

7. Записать уравнение траектории движения точки если в любой момент времени она находится в 1,25 раза дальше от точки $A(5;0)$, чем от прямой $5x-16=0$.

Вариант 12

1. Составить уравнение прямой:

а) проходящей через точку $M(-1;-3)$ и имеющей угловой коэффициент $k=1$;

б) проходящей через точку $A\left(-2;\sqrt{2}\right)$ и имеющей нормальный вектор $\vec{n}=\{4;4\}$;

в) проходящей через точку пересечения прямой $x-6y+2=0$ с осью *Ox* и составляющей с этой осью угол 30^0;

г) проходящей через середину отрезка *AB,* если $A(-1;6)$, $B(9;-8)$ и параллельной прямой $2x-3y+5=0$;

д) отсекающей на осях координат равные отрезки и проходящей через точку $M(2;-1)$.

2. В ромбе $ABCD$ с острым углом 60^0 точки $A(0;-1)$ и $C(2;1)$ являются противоположными вершинами, причем *AC* меньшая диагональ. Написать уравнения сторон ромба.

3. Дана точка $A(-4;6)$. Написать уравнение окружности диаметром которой служит отрезок *OA*.

4. Написать каноническое уравнение эллипса, зная, что расстояние между фокусами равно 8, а малая полуось равна 3.

5. Написать каноническое уравнение гиперболы, зная, что расстояние между фокусами равно 10, а между вершинами $2a=8$.

6. Составить каноническое уравнение параболы, проходящей через точку $A(2;-4)$ и симметричной относительно оси *Oy*.

7. Записать уравнение окружности, проходящей через вершины гиперболы $4x^2-9y^2=36$ и имеющей центр в точке $A(0;4)$

Вариант 13

1. Составить уравнение прямой:

а) проходящей через точку $A(0;2)$ и образующей с осью *Ox* угол, вдвое больше угла, который составляет с той же осью прямая $\sqrt{3}x-y+1=0$;

б) проходящей через точки $A(2;-6)$ и $B(1;2)$;

в) проходящей через начало координат и параллельно прямой $x+y-7=0$;

г) проходящей через точку пересечения прямых $2x+6y-1=0$ и $x+y-3=0$ перпендикулярно оси абсцисс;

д) проходящей через точку $A(1;6)$ и отсекающей на оси *Ox* отрезок вдвое меньше, чем на оси *Oy*.

2. Известны уравнения сторон треугольника $x+3y-3=0$, $3x+y+11=0$, $x-y-3=0$. Найти длину высоты, которая проведена из вершины, лежащей на оси абсцисс.

3. Построить окружность $x^2+y^2+5x=0$, прямую $x+y=0$ и найти точки их пересечения.

4. Составить каноническое уравнение эллипса, если известно, что большая полуось равна 6, а эксцентриситет равен 0,5.

5. Составить уравнение параболы, симметричной относительно оси *Oy* и проходящей через точку $M(6;-2)$.

6. Написать каноническое уравнение гиперболы, проходящей через точку $M\left(6;-2\sqrt{2}\right)$ и мнимая полуось $b=2$.

7. Записать уравнение окружности, проходящей через вершины гиперболы $12x^2-13y^2=156$ и имеющей центр в точке $A(0;-2)$.

Вариант 14

1. Составить уравнение прямой:

а) проходящей через точки $K(9;-2)$ и $M(-3;-2)$;

б) проходящей через точку $A(2;-6)$ и составляющей с осью абсцисс угол 135^0;

в) отсекающей на оси *Oy* отрезок $b=2$ и имеющей угловой коэффициент $k=1$;

г) проходящей через начало координат и перпендикулярный к прямой $x-2y+3=0$;

д) проходящей через точку пересечения прямых $6x+2y-1=0$ и $2x+y-1=0$ параллельно оси *Oy.*

2. Даны уравнения $x+y-5=0$, $3x+y-7=0$ двух медиан треугольника и уравнение одной из сторон $2x+y-5=0$. Составить уравнения двух других сторон треугольника и найти его вершины.

3. Написать уравнение окружности, проходящей через точки пересечения окружности $x^2+y^2+4x-4y=0$ с прямой $y=-x$ и через точку $A(4;4)$.

4. Для эллипса $x^2+y^2=16$. Найти фокусы и эксцентриситет.

5. Написать каноническое уравнение гиперболы, зная, что вещественная полуось $a=2\sqrt{5}$, а эксцентриситет $\varepsilon=\sqrt{1,2}$.

6. Составить уравнение параболы, симметричной относительно оси *Ox* и проходящей через точку $A(-1;2)$.

7. Записать каноническое уравнение эллипса, проходящего через правый фокус эллипса $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$.

Вариант 15

1. Составить уравнение прямой:

а) проходящей через начало координат и составляющей с осью угол 30^0;

б) проходящей через точку $A(-2;5)$ и имеющей нормальный вектор $\vec{n}=\{1;-3\}$;

в) отсекающей на положительной оси *Ox*, отрезок равный 3, и проходящей через точку $B(1;2)$;

г) проходящей через точку пересечения прямой $x-2=0$ с осью Ox параллельно прямой $\frac{x}{4}-\frac{y}{1}=1$;

д) проходящей через точки $A(2;4)$ и $B(0;-7)$.

2. Даны вершины треугольника $A(1;5)$, $B(-1;2)$, $C(3;2)$. Составить уравнения высоты AM и прямой, проходящей через точку A параллельно стороне BC.

3. Даны точки $A(-3;0)$, $B(3;6)$. Написать уравнение окружности, диаметром которой служит отрезок AB.

4. На эллипсе найти точку, расстояние которой от правого фокуса в четыре раза больше расстояния её от левого фокуса. Эллипс задан уравнением $9x^2+25y^2=225$.

5. Написать каноническое уравнение гиперболы, зная, что расстояние одной из её вершин до фокусов равны 9 и 1.

6. Составить каноническое уравнение параболы, симметричной относительно оси Oy и проходящей через точку $A(-3;1)$.

7. Записать уравнение окружности, проходящей через вершину гиперболы $x^2-16y^2=24$ и имеющей центр в точке $A(0;-2)$.

Вариант 16

1. Составить уравнение прямой:

а) являющейся биссектрисой I и III координатных углов;

б) проходящей через начало координат перпендикулярно прямой $\frac{x}{4}+\frac{y}{1}=-3$;

в) отсекающей на осях координат равные отрезки и проходящей через точку пересечения прямых $x+3y-1=0$ и $x-y+3=0$;

г) проходящей через точку H, где H - середина отрезка MN $(M(-1;0), N(-3;-3))$ перпендикулярно MN;

д) проходящей через точки $A(1;-7)$ и $B\left(-\frac{1}{2};4\right)$.

2. Написать уравнения сторон квадрата, если длина стороны равна a, а за оси прямоугольной декартовой системы координат приняты его диагонали.

3. Найти центр и радиус окружности $x^2+y^2-6x+4y-23=0$.

4. Эллипс, симметричный относительно осей координат, фокусы которого находятся на оси Ox, проходит через точку $M\left(-4;\sqrt{21}\right)$ и имеет эксцентриситет $\varepsilon=\frac{3}{4}$. Написать уравнение эллипса и найти фокальные радиусы-векторы точки M.

5. Написать каноническое уравнение гиперболы, если расстояние между фокусами равно 8, а между вершинами $2a=6$.

6. Составить каноническое уравнение параболы, если известно уравнение директрисы $y = 6$.

7. Записать уравнение окружности, проходящей через точку $B(2;-5)$ и имеющей центр в вершине параболы $x^2 = -2(y+1)$.

Вариант 17

1. Составить уравнение прямой:

а) отсекающей от оси *Oy* отрезок $b = 2$ и имеющей угловой коэффициент $k = -\frac{4}{3}$;

б) проходящей через начало координат и точку пересечения прямых $x - y + 6 = 0$ и $2x - 3y + 7 = 0$;

в) проходящей через точку $B(1;9)$ и отсекающей на положительной полуоси *Ox* отрезок втрое больший, чем на положительной полуоси *Oy*;

г) проходящей через точку $M(1;-3)$ параллельно прямой $x - y + 1 = 0$;

д) проходящей через точку $C(1;-3)$ перпендикулярно оси *Oy*.

2. Даны уравнения высот треугольника *ABC* $2x - 3y + 1 = 0$, $x + 2y + 1 = 0$ и координата его вершины $A(2;3)$. Найти уравнения сторон *AB* и *AC* треугольника.

3. Найти центр и радиус окружности $x^2 + y^2 = 5x - 7y + 2{,}5 = 0$.

4. Написать каноническое уравнение эллипса, у которого расстояние одного из фокусов от концов большой оси равны 5 и 1.

5. Составить каноническое уравнение гиперболы, если известны уравнения асимптот $y = \pm\frac{3}{4}x$ и эксцентриситет $\varepsilon = \frac{5}{4}$.

6. Построить параболу, заданную уравнением $x^2 = -4y$, а также определить фокус и написать уравнение директрисы.

7. Записать уравнение окружности, проходящей через левый фокус гиперболы $9x^2 - 5y^2 = 30$ и имеющей центр в точке $A(0;1)$.

Вариант 18

а) проходящей через начало координат параллельно вектору $\vec{S} = \{2;-4\}$;

б) проходящей через точку $A(-1;-3)$ и отсекающей на отрицательной полуоси *Ox* отрезок вдвое больший, чем на отрицательной полуоси *Oy*;

в) проходящей через точку $A(2;-7)$ перпендикулярно оси *Oy*;

г) проходящей через точку пересечения прямых $3x + y - 6 = 0$ и $x - y = 1$ перпендикулярно прямой $\frac{x}{2} + \frac{y}{4} = 1$;

д) проходящей через точки $M_1\left(-\frac{1}{2};4\right)$, $M_2(1;2)$.

2. Даны две вершины треугольника $2x-3y+1=0$, $x+2y+1=0$ и координаты одной из вершин $A(2;3)$. Найти уравнения всех сторон треугольника.

3. Написать уравнение окружности, проходящей через начало координат и через точки пересечения прямой $x^2+y^2=4$.

4. Написать каноническое уравнение эллипса, зная, что расстояние между фокусами равно 5, а малая полуось равна 12.

5. Составить каноническое уравнение гиперболы, если известны уравнения асимптот $y=\pm\frac{12}{13}x$ и действительная ось $2a=26$.

6. Написать каноническое уравнение параболы, проходящей через точки $O(0;0)$ и $A(1;2)$ и симметричной относительно оси *Ox*.

7. Написать уравнение гиперболы, имеющей общие фокусы с эллипсом $\frac{x^2}{35}+\frac{y^2}{10}=1$ и проходящей через точку $M\left(4\sqrt{2};3\right)$.

Вариант 19

1. Составить уравнение прямой:

а) проходящей через точку $A(1;2)$ и имеющей угловой коэффициент $k=-3$;

б) проходящей через середину отрезка *AB*, где $A(2;4)$, $B(-6;7)$ перпендикулярно *AB*;

в) проходящей через точки $P(1;-3)$ и $Q(-1;6)$;

г) проходящей через точку $M(1;3)$ перпендикулярно оси *Oy*;

д) отсекающей на осях координат отрезки $a=-4$ и $b=2$.

2. Дана прямая $2x+y-6=0$ и на ней две точки *A* и *B* с ординатами $y_A=6$ и $y_B=-2$. Написать уравнение высоты *АД* треугольника *ОАД*, найти её длину и угол *ДАВ.*

3. Написать уравнение окружности, проходящей через точку $A(-2;3)$ и диаметром которой служит отрезок *ОА*.

4. Составить каноническое уравнение эллипса, если известно, что расстояние между директрисами равно 32, а эксцентриситет $\varepsilon=0{,}5$..

5. Составить каноническое уравнение гиперболы, если мнимая полуось равна $2b=88$, а фокус имеет координаты $F(-7;0)$.

6. Составить каноническое уравнение параболы, если известно уравнение директрисы $y=4$.

7. Написать уравнение окружности, проходящей через правую вершину гиперболы $3x^2-16y^2=48$ и имеющей центр в точке $M(1;3)$.

Вариант 20

1. Составить уравнение прямой:

а) проходящей через начало координат и наклоненной к оси *Oy* под углом 45^0;

б) проходящей через точку $M_0(2;-3)$ и образующей с прямой *Oy* под углом 45^0;

в) проходящей через точку $M(-2;2)$ и отсекающей на отрицательной полуоси *Ox* отрезок равный 3;

г) проходящей через точку пересечения прямых $2x-y+1=0$ и $x-6y=0$;

д) проходящей через две точки $A(1;-7)$ и $B(-1;3)$.

2. Даны уравнения сторон треугольника $AB: 2x+y+5=0$ и $AC: x-3y+6=0$ и точка $P(1;3)$ пересечения его медиан. Найти уравнение сторон BC.

3. Найти уравнение окружности, если концы одного из её диаметров находятся в точках $A(3;8)$ и $B(5;2)$.

4. Составить каноническое уравнение эллипса, если известно, что расстояние между фокусами равно $2c=6$, а эксцентриситет $\varepsilon=\frac{3}{5}$.

5. Составить каноническое уравнение гиперболы, если мнимая полуось равна $2b=6$, а расстояние между фокусами равно 14.

6. Составить каноническое уравнение параболы, если известно уравнение директрисы $x=-2$.

7. Через фокус параболы $y^2=-4x$ проведена прямая под углом 120^0 к оси *Ox*. Написать уравнение прямой и найти длину образовавшейся хорды.

Вариант 21

1. Составить уравнение прямой:

а) проходящей через точку $A(2;-6)$ и имеющей направляющий вектор $\vec{S}=\{4;2\}$;

б) проходящей через точку пересечения прямых $3x-2y=0$ и $x+6y-7=0$ параллельно оси *Oy*;

в) походящей через точку $B(-1;-1)$ и отсекающей на оси Оу отрезок равный 4;

г) проходящей через точку $M(1;6)$ и имеющей угловой коэффициент $k=-1$;

д) проходящей через две точки $P(-1;6)$ и $Q(1;2)$.

2. В треугольнике *ABC* даны уравнения стороны *AB* $x+7y-6=0$ и биссектрис AL $x+y-2=0$ и *BM* $x-3y-6=0$. Найти координаты вершин.

3. Даны точки $A(-2;2)$ и $B(4;6)$. Написать уравнение окружности, диаметром которой служит отрезок *AB*.

4. Написать каноническое уравнение эллипса, зная, что расстояние между фокусами равно 18, а малая ось равна 8.

5. Составить каноническое уравнение гиперболы, если известны уравнения асимптот $y = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}x$ и вещественная ось $2a = 12$.

6. Написать уравнение параболы симметричной относительно оси Oy и проходящей через точки $O(0;0)$ и $A(2;4)$.

7. Записать уравнение окружности, проходящей через левый фокус гиперболы $7x^2 - 9y^2 = 63$ и имеющей центр в точке $A(-1;-2)$.

Вариант 22

1. Составить уравнение прямой:

а) проходящей через точку А(1;7) и имеющей нормальный вектор $\overline{n} = \{1;2\}$;

б) проходящую через точку М(1;-2) параллельно прямой 2x +3y -3+0;

в) проходящей через точку М(-2;2) и отсекающей от одного из координатных углов треугольник с площадью 5,4 кв. ед.;

г) проходящей через две точки А(1;-6) и В(-3;1);

д) проходящий через точки пересечения прямых x -2=0 и y -6=0 с осями координат;

2.Даны две смежные стороны параллелограмма 2x –y +2=0 и x -2y - 2=0 и точка М(1;1) пересечения диагоналей. Найти уравнения двух других сторон.

3. Написать уравнение окружности, проходящей через начало координат и через точки пересечения прямой x +y +1 =0 с окружностью $x^2 + y^2 = 1$.

4. Составить каноническое уравнение эллипса, если большая ось равна 8, а расстояние между фокусами равно 6.

5. Гипербола проходит через точку М(6; $3\frac{\sqrt{5}}{2}$) и имеет вещественную ось 2a =8. Написать каноническое уравнение гиперболы.

6. Составить уравнение параболы, если директриса ее задана уравнением x=4.

7. Написать уравнение параболы и ее директрисы, если парабола проходит через точки пересечения прямой x + y =0 и окружности $x^2 + y^2 + 4y = 0$ и симметрична относительно оси Oy. Построить окружность, прямую и параболу.

Вариант 23

1. Составить уравнение прямой:

а) проходящей через точку пересечения прямой $x - 9 = 0$ с осью Ox и наклоненной к оси Ox под углом 120^0;

б) проходящей через точку $A(2;-2)$ и имеющей нормальный вектор $\overrightarrow{AB}$, если $B(1;3)$;

в) проходящей через точку $M\left(-2;\frac{1}{2}\right)$ и отсекающей на отрицательной полуоси *Ox* отрезок равный 3;

г) проходящей через точки $A(2;-3)$ и $B(-2;4)$;

д) проходящей через точку $N(2;-4)$ и перпендикулярный прямой $x+6y-1=0$.

2. Вычислить координаты вершин ромба, если известны уравнения двух его сторон $x+2y=4$ и $x+2y=10$ и уравнение одной из его диагоналей $y=x+2$.

3. Написать уравнение окружности, диаметром которой служит отрезок *OA*, если дана точка $A(-3;2)$.

4. Составить каноническое уравнение эллипса, если малая ось равна 5, а фокус имеет координаты $(-10;0)$.

5. Написать каноническое уравнение гиперболы, проходящей через две точки $A(\sqrt{8};0)$ и $B\left(\frac{\sqrt{20}}{3};2\right)$.

6. Написать уравнение параболы симметричной относительно оси *Ox* и проходящей через точки $O(0;0)$ и $A(-1;2)$.

7. Найти общие точки эллипса $x^2+4y^2=4$ и окружности, проходящей через фокусы эллипса и имеющей центр в его верхней вершине.

Вариант 24

1. Составить уравнение прямой:

а) проходящей через точки $A(-1;6)$ и $B\left(\frac{1}{3};7\right)$;

б) проходящей через точку $M(2;3)$ и отсекающей на оси *Ox* отрезок равный 2;

в) проходящей через начало координат и образующей с прямой $2x-y+1=0$ угол 45^0;

г) проходящей через точку пересечения прямых $x-6y+1=0$ и $2x-y-3=0$ параллельно оси *Ox*;

д) проходящей через точку $A(2;-6)$ параллельно вектору $\vec{S}=\{4;2\}$.

2. Дана прямая $x+2y-4=0$ и точка $A(5;7)$. Найти проекцию *B* точки *A* на заданную прямую. Составить уравнение прямой, проходящей через точку *A* под углом 30^0 к данной прямой.

3. Найти центр и радиус окружности $x^2+y^2+5x=0$.

4. Составить каноническое уравнение эллипса, если эксцентриситет равен $\varepsilon=\frac{2}{3}$ и проходит через точку $A(-6;0)$.

5. Составить каноническое уравнение гиперболы, если известны уравнения асимптот $y = \pm\frac{1}{2}x$ и эксцентриситет $\varepsilon = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

6. Написать уравнение параболы симметричной относительно оси *Oy* и проходящей через точки $O(0;0)$ и $A(2;-4)$.

7. Найти точки пересечения асимптот гиперболы $x^2 3y^2 = 12$ с окружностью, имеющей центр в правом фокусе гиперболы и проходящей через начало координат.

Вариант 25

1. Составить уравнение прямой:

а) проходящей через точки $A(-3;-1)$ и $B(2;6)$;

б) проходящей через точку $M(-1;-3)$ и отсекающей на оси *Oy* отрезок равный 5;

в) проходящей через начало координат и образующей с прямой $x - 2y + 1 = 0$ угол 60^0;

г) проходящей через точку пересечения прямых $2x - 3y + 4 = 0$ и $x + y - 2 = 0$ параллельно оси *Oy*;

д) проходящей через точку $A(3;2)$ и перпендикулярно вектору $\bar{q} = \{1;2\}$.

2. Дана прямая $2x - 3y - 1 = 0$ и точка $A(7;1)$. Найти проекцию *B* точки *A* на заданную прямую. Составить уравнение прямой, проходящей через точку *A* под углом 60^0 к данной прямой.

3. Найти центр и радиус окружности $x^2 + y^2 + 5x - 3y - 1 = 0$.

4. Составить каноническое уравнение эллипса проходящего через точку $A(6;0)$ с эксцентриситетом $\varepsilon = \frac{1}{3}$.

5. Составить каноническое уравнение гиперболы, если известны уравнения асимптот $y = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}x$ и эксцентриситет $\varepsilon = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

6. Написать уравнение параболы симметричной относительно оси *Ox* и проходящей через точки $O(0;0)$ и $A(3;5)$.

7. Фокусы гиперболы совпадают с фокусами эллипса $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$. Составить уравнение гиперболы, если её эксцентриситет $\varepsilon = 2$. Построить гиперболу.

7. Комбинаторика. Булевы функции. Графы и их матрицы

A. Решить комбинаторные задачи.

Вариант 1

1. На вершину ведут 8 дорог. Сколькими способами турист может подняться на гору и спуститься с нее, не повторяя маршрута?
2. Доказать: $(A \bigcup B) - B = A - B$.
3. Сколькими способами из 30 учащихся можно выбрать команду на математическую олимпиаду в составе 3-х учеников?
4. Сколькими способами можно упорядочить множество $1, 2, 3, 4, \ldots$ так, чтобы числа $1, 2, 3$ стояли рядом в порядке возрастания?
5. Сколько различных “слов” можно составить, переставляя буквы слова “математика”?
6. Вычислить сумму: $C_n^0 - 2C_n^1 + 3C_n^2 - \ldots + (-1)^n (n+1) C_n^n$.
7. Напишите все сочетания с повторениями из четырех элементов a, b, c и d по три.
8. Сколькими способами можно обозначить треугольник, отмечая его вершины большими латинскими буквами?
9. Сколькими способами можно разменять монету в 50 рублей монетами в 1 рубль, 5 рублей, 10 рублей, и 20 рублей?
10. Сколькими способами 3 человека могут разделить между собой 6 яблок, 1 грушу, 1 лимон, 1 сливу, 1 апельсин, 2 банана и 1 финик?
11. Найти коэффициент при x^7 в разложении $(1 + 2x - 3x^3)^{10}$.

Вариант 2

1. Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр $0, 1, 2, 3, 4, 5$?
2. Доказать, что $A - B = \emptyset$ тогда и только тогда, когда $A \bigcap B = A$.
3. В комнате n лампочек. Сколькими способами можно осветить комнату k лампочками? Сколько способов освещения данной комнаты?
4. Сколькими способами могут разместиться 6 покупателей в очередь в кассу универмага?
5. Сколькими способами можно разделить $n + m + s$ предметов на 3 группы так, чтобы в одной группе было n предметов, в другой – m, а в последней – s предметов?
6. Указать наибольшее среди чисел C_{10}^k $\left(k = \overline{0,10}\right)$.

7. Хор состоит из 10 участников. Сколькими способами можно выбрать в течение 3 дней по 6 участников так, чтобы каждый день были различные составы хора?
8. Сколькими способами можно составить 6 слов из 32 букв, если в совокупности этих 6 слов каждая буква используется лишь раз?
9. Сколькими способами можно разделить колоду из 52 тасованных карт пополам так, чтобы в одной половине оказалось три туза?
10. Сколько нулей в конце числа 49! ?
11. Найти коэффициент при x^5 в разложении $(-1+x+5x^2)^{15}$.

Вариант 3

1. Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, если каждую из этих цифр использовать не более одного раза?
2. Пусть A – множество корней уравнения $x^2-3x+2=0$, а $B=\{0;2\}$. Найти $A\bigcap B$, $A\bigcup B$, $B-A$, $A-B$.
3. Дано n точек, никакие 3 из которых не лежат на одной прямой. Сколько прямых можно провести, соединяя точки попарно?
4. Сколько существует перестановок из n элементов, в которых между двумя данными элементами стоят r элементов?
5. Решить уравнение $C_{x+4}^{x+1}-C_{x+3}^{x}=15(x+2)$.
6. Сколькими способами можно разделить $3n$ предметов между 3 людьми так, чтобы каждый получил по n предметов?
7. Сколько можно сделать костей домино, используя числа от 0 до 9?
8. Найти n, если известно, что в разложении $(1+x)^n$ коэффициенты при x^5 и x^{12} равны.
9. Продаются открытки 10 сортов. Сколькими способами можно купить 12 открыток?
10. Из 10 различных книг выбирают 4 для посылки. Сколькими способами это можно сделать?
11. Найти коэффициент при x^7 в разложении $(2+x-3x^3)^{10}$

Вариант 4

1. Сколькими способами можно организовать очередь из 7 человек?
2. Пусть A – множество значений функции $\operatorname{sign} x=\begin{cases}1, & x>0;\\ 0, & x=0;\\ -1, & x<0\end{cases}$

а B – множество корней уравнения $x(x-1)(x-2)=0$. Найти $A\bigcap B$, $A-B$.

3. Сколько имеется четырехзначных чисел, у которых каждая следующая цифра больше предыдущей?
4. На собрании должны выступать ораторы A, B, C, D. Сколькими способами их можно разместить в списке выступающих так, чтобы B выступал после оратора A?
5. Сколько пятибуквенных слов можно составить из букв a, b и c, если a встречается не более 2 раз, b – не более 1 раза, а c – не более 3 раз?
6. Решить уравнение: $5C_x^3 = C_{x+2}^4$.
7. В профком избрано 9 человек. Из них надо выбрать председателя, заместителя и секретаря. Сколькими способами это можно сделать?
8. Сколькими способами можно разложить 14 одинаковых шаров по 8-ми ящикам?
9. Сколько пятизначных чисел можно составить из цифр от 1 по 9?
10. Четыре стрелка должны поразить 8 мишеней, каждый по две. Сколькими способами они могут распределить мишени между собой?
11. Найти коэффициент при x^{12} в разложении $(1+2x-5x^3)^{13}$

Вариант 5

1. Школьники в классе изучают 10 предметов. В понедельник у них 6 уроков, причем все разные. Сколькими способами можно составить расписание на понедельник?
2. На экскурсии были семиклассники и восьмиклассники: все либо с комсомольскими значками, либо в пионерских галстуках. Мальчиков было 16, а комсомольцев 24. Пионерок было ровно столько, сколько мальчиков комсомольцев. Сколько учащихся было на экскурсии?
3. Сколькими способами можно рассадить 8 гостей за круглым столом так, чтобы два известных гостя сидели рядом.
4. Сколько существует четырехзначных чисел, у которых каждая следующая цифра меньше предыдущей?
5. Сколько различных “слов” можно составить, переставляя буквы слова “комбинаторика”?
6. В цехе работают 6 токарей. Сколькими способами можно поручить трем их них изготовить 3 различные вида деталей по одному виду на каждого?
7. Решить уравнение: $\dfrac{P_{x+5}}{P_{x-k}} = 240A_{x+3}^{k+3}$, $(x \ge k)$.

8. Сколько существует треугольников, длины сторон которых принимают одно из следующих значений: 4, 5, 6, 7 см?
9. Сколькими способами можно опустить 5 писем в 11 почтовых ящиков, если опускать в один ящик не более одного письма?
10. Бросают одновременно 3 монеты и наблюдают за выпадением герба и цифры на верхних гранях. Сколько различных исходов возможно?
11. Найти коэффициент при x^9 в разложении $(3-x+2x^2)^{12}$.

Вариант 6

1. Сколько имеется пятизначных чисел, которые делятся на 5?
2. Бросают одновременно 2 игральные кости и наблюдают за числом очков на верхних гранях. Сколько возможно исходов броска?
3. В классе 34 учащихся. Из них 20 посещают математический кружок, 11 – физический, 10 учащихся не посещают ни одного из этих кружков. Сколько учеников посещают оба кружка?
4. Международная комиссия состоит из 9 человек. Материалы комиссии хранятся в сейфе. Сколько замков должен иметь сейф и сколько ключей надо изготовить и как их распределить между членами комиссии, чтобы доступ к сейфу был возможен, когда соберутся не менее 2/3 членов комиссии?
5. Если повернуть лист бумаги на $180°$, то цифры 0, 1, 8 не изменят значения, 6 и 9 переходят друг в друга, а остальные теряют смысл. Сколько существует семизначных чисел, величина которых не изменится при повороте листа и сколько чисел при этом не потеряют смысл?
6. Решить уравнение: $\dfrac{1}{C_4^x}=\dfrac{1}{C_5^x}+\dfrac{1}{C_6^x}$.
7. Для освещения зала может быть включена каждая из имеющихся 10 ламп. Сколькими способами зал может быть освещен?
8. Сколькими способами могут расположиться в турнирной таблице 10 команд, если известно, что никакие две из них не набрали половины очков?
9. Сколькими способами можно составить команду по биатлону из 4-х человек (2 бегуна и 2 стрелка), если имеются 7 бегунов и 6 стрелков?
10. Сколькими способами можно заполнить карточку “Спортлото” (6 из 49)?
11. Найти коэффициент при x^{11} в разложении $(-2+3x-x^3)^{13}$.

Вариант 7

1. Сколько есть трехзначных чисел, у которых все цифры четные?

2. Сколькими способами 10 человек могут организовать очередь в кассу?
3. В розыгрыше первенства по хоккею участвуют 12 команд. Команды, занявшие первые три места, награждаются золотой, серебряной и бронзовой медалями, а две последние команды покидают первенство. Сколько результатов первенства может быть?
4. Пять учеников следует распределить по трем параллельным классам. Сколькими способами это можно сделать?
5. Сколькими способами из колоды в 36 карт можно извлечь 6 карт так, чтобы среди них было 2 туза?
6. Решить неравенство: $C_{10}^{x-1} > 2C_{10}^{x}$.
7. Сколько шестизначных чисел, кратных 5, можно составить из цифр от 1 до 6 при условии, что цифры не повторяются?
8. Сколько "слов" можно получить, переставляя буквы в слове "Миссисипи"?
9. Сколькими способами члены комиссии могут распределить между собой обязанности, если комиссия состоит из председателя, секретаря и еще 5 человек?
10. Сколькими способами можно заполнить карточку "Спортлото" (5 из 36)?
11. Найти коэффициент при x^7 в разложении $(1+5x-3x^3)^{11}$.

Вариант 8

1. Сколько существует пятизначных чисел, у которых все цифры нечетные?
2. Из 100 студентов английский язык знают 28 студентов, немецкий – 30, французский – 10, немецкий и французский – 5, а все три языка знают 3 студента. Сколько студентов не знают ни одного из трех языков?
3. Имеется p белых и q черных шаров. Сколькими способами можно выложить в ряд все шары так, чтобы никакие 2 черных шара не лежали рядом?
4. Сколько "слов" можно получить, переставляя буквы в слове "абракадабра"?
5. В вазе стоят 10 красных и 3 розовых гвоздики. Сколькими способами можно выбрать одну красную и две розовые гвоздики?
6. Решить неравенство: $\dfrac{A_{x+n}^{n}}{(x+2)!} < \dfrac{143}{4P_x}$.
7. Сколькими способами 12 одинаковых монет можно разместить по пяти отделениям кошелька, чтобы ни одно из отделений не осталось пустым?

8. Лифт останавливается на десяти этажах. Сколькими способами можно распределить между этими остановками 8 пассажиров лифта?
9. Сколько различных перестановок можно образовать из букв вашего имени, фамилии?
10. Сколько существует перестановок из элементов от 1 до n, в которых 1 элемент находится на 1-м месте?
11. Найти коэффициенты при x^4 в разложении $(1-2x+x^3)^{15}$.

Вариант 9

1. В забеге участвуют 6 бегунов. Сколькими способами могут быть распределены два первых места?
2. Сколько четырехзначных чисел можно написать с помощью цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5 с учетом повторений и без повторений?
3. В классе 42 ученика. Из них 16 занимаются в легкоатлетической секции, 24 – в футбольной, 15 – в шахматной, 11 занимаются одновременно легкой атлетикой и футболом, 8 – легкой атлетикой и шахматами, 12 – футболом и шахматами, а 6 – участвуют во всех трех секциях. Остальные увлекаются туризмом. Сколько их?
4. В вазе стоят 10 красных и 5 розовых гвоздик. Сколькими способами можно выбрать из вазы 5 гвоздик одного цвета?
5. Просуммировать: $C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + \ldots + nC_n^n$.
6. Сколько можно построить различных параллелепипедов, длины ребер которых выражаются натуральными числами от 1 до 10?
7. Сколькими способами можно переставить буквы слова “перешеек”, чтобы буквы “е” не шли подряд?
8. Сколькими способами можно рассовать 10 одинаковых шариковых ручек по 4-м карманам пиджака так, чтобы ни один карман не пустовал?
9. Сколькими способами могут поразить 5 мишеней 3 стрелка (6 стрелков)?
10. Сколькими способами можно разложить 10 одинаковых деталей по 4-м ящикам стола?
11. Найти коэффициент при x^8 в разложении $(1+x+3x^3)^{12}$.

Вариант 10

1. Сколькими способами можно выбрать на конкурс 2-х юношей и одну девушку из 15-ти юношей и 20-ти девушек?
2. Сколько существует пятизначных чисел, которые начинаются цифрой 2, а оканчиваются цифрой 4?

3. В отделе НИИ работают специалисты, каждый из которых знает хотя бы один иностранный язык, при этом 6 человек знают английский, 6 – немецкий, 7 – французский, 4 знают английский и немецкий, 3 – немецкий и французский, 2 – французский и английский и один сотрудник знает все эти языки. Сколько сотрудников работают в отделе?
4. Сколько “слов” можно получить, переставляя буквы в слове “барабан”?
5. Сколькими способами можно рассадить 8 человек за круглый стол или в ряд так, чтобы данные два человека не сидели рядом?
6. С помощью бинома Ньютона оценить с точностью 10^{-3} значение $\sqrt{30}$.
7. Сколькими способами можно распределить 6 разных книг между 3-мя студентами?
8. Сколькими способами можно купить 12 открыток, если в почтовом отделении продают открытки 10-ти видов?
9. Двадцать человек разбиты на две группы по десять человек. Сколько может быть различных составов групп?
10. Три почтальона должны разнести 20 телеграмм. Сколькими способами они смогут это сделать?
11. Найти коэффициент при x^7 в разложении $(1+2x-x^3)^{10}$.

Вариант 11

1. Сколькими способами могут сесть два человека на десять кресел?
2. Сколько существует трехзначных чисел, записывающихся с помощью цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5 и делящихся на 5?
3. Сколько чисел среди первых 100 натуральных чисел не делятся ни на 2, ни на 3, ни на 5?
4. Найти наибольший член разложения $\left(1+\sqrt{2}\right)^{30}$.
5. Сколькими способами можно положить 28 различных открыток в 4 одинаковых конверта так, чтобы в каждый попало по 7 открыток?
6. Сколькими способами можно разделить 10 белых грибов, 15 подберезовиков и 8 подосиновиков между 4-мя ребятами, их собравшими?
7. Лифт останавливается на 15-ти этажах. Сколькими способами могут выйти на этих этажах три пассажира лифта?
8. В колоде 52 карты. Сколькими способами можно извлечь 6 карт, чтобы среди них было 2 туза?
9. Из 10 роз и 8 георгинов нужно составить букет, состоящий из 2-х роз и 3-х георгинов. Сколько можно составить различных букетов?

10. Из 12 слов мужского рода, 9 женского и 10 среднего рода надо выбрать по одному слову каждого рода. Сколькими способами может быть сделан этот выбор?
11. Найти коэффициент при x^7 в разложении $(1-2x+3x^3)^{13}$.

Вариант 12

1. Сколько чисел, находящихся между 1000 и 9999, содержат цифру 3?
2. На 10 расположенных в ряд стульев садятся 5 мальчиков и 5 девочек, причем мальчики – на четные, а девочки – на нечетные номера. Сколькими способами это можно сделать?
3. Староста одного класса дал следующие сведения об учащихся: “В классе 45 учеников, в том числе – 25 мальчиков. Тридцать школьников учатся на 4 и 5, в том числе – 16 мальчиков. Спортом занимаются 28 учеников, в том числе – 18 мальчиков и 17 учащихся на 4 и 5, а 15 мальчиков учатся на 4 и 5 и занимаются спортом”. Покажите, что в сведениях имеется ошибка.
4. Имеются 20 шаров черного цвета и 10 шаров белого цвета. Сколькими способами можно выбрать 3 шара одного цвета?
5. На книжной полке стоит собрание сочинений в 30-ти томах. Сколькими различными способами их можно поставить, чтобы тома 1-й и 2-й стояли рядом?
6. Решить уравнение: $\dfrac{P_{x+5}}{P_{x-k}} = 240A_{x+3}^{k+3}, \ \left(x \geq k\right).$
7. Трое ребят собрали 40 яблок. Сколькими способами они могут их разделить?
8. Сколькими способами выбрать из колоды в 52 карты 6 карт так, чтобы среди них были все 4 масти?
9. У отца есть 5 различных по размеру апельсинов, которые он выдает 8 сыновьям так, что каждый получает либо один апельсин, либо ничего. Сколькими способами можно это сделать?
10. В селении проживают 2000 жителей. Доказать, что, по крайней мере, двое из них имеют одинаковые инициалы.
11. Найти $\tilde{A} \cup \tilde{B}$, $\tilde{A} \cap \tilde{B}$, $\overline{\tilde{A}} \cup \tilde{B}$ и $\tilde{A} \oplus \tilde{B}$, если $\tilde{A}$ ={0,3/2;0,2/3;0,3/4;0,1/5} $\tilde{B}$={0,5/3; 0,8/4;0,3/5; 0,2/6; 0,3/7}.

Вариант 13

1. Бросают одновременно 3 игральные кости и наблюдают за числом выпавших очков. Сколько исходов опыта возможно?
2. Сколько чисел от 1 до 100 не делятся ни на 2, ни на 3, ни на 7?

3. Пассажир оставил вещи в автоматической камере хранения и забыл номер кода, который состоит из 5-ти цифр. Помнит только, что были комбинации 23 и 47. Сколькими способами можно найти нужную комбинацию кода?
4. Студенческое расписание занятий одного дня содержит 3 предмета. Определить количество таких расписаний при выборе из 8-ми дисциплин.
5. Сколько “слов” можно получить, переставляя буквы в слове “параллелизм”?
6. На книжной полке помещаются 18 томов. Сколькими способами их можно расставить так, чтобы два данных тома не стояли рядом?
7. Решить систему уравнений: $\begin{cases} C_x^y = C_x^{y+2}, \\ C_x^2 = 66. \end{cases}$
8. Хоккейная команда состоит из 2-х вратарей, 7-ми защитников и 10-ти нападающих. Сколькими способами тренер может образовать стартовую пятерку, состоящую из 1-го вратаря, 2-х защитников и 3-х нападающих?
9. Сколькими способами можно разделить 6 конфет между 3-мя детьми?
10. Сколько наборов из 9 карандашей можно составить, если в продаже имеются карандаши 5 цветов?
11. Найти коэффициент при x^{11} в разложении $(-1+2x-x^3)^{10}$.

Вариант 14

1. Группу из 15-ти студентов нужно разделить на две группы так, чтобы в одной группе было 4 студента, а в другой – 11. Сколькими способами это можно сделать?
2. В международном отделе аэропорта работают 67 человек. Из них 47 человек знают английский язык, 35 – немецкий и 23 – оба языка. Сколько человек в отделе не знают ни одного иностранного языка?
3. Сколькими способами можно выбрать из колоды карт либо туза, либо козыря?
4. В некотором сказочном государстве не было двух человек с одинаковым набором зубов. Каково могло быть наибольшее число жителей этого государства, если у человека 32 зуба?
5. Сколько различных перестановок можно образовать из букв фамилии вашей бабушки?
6. Найти наибольший элемент C_{12}^x, если $x = \overline{0;12}$.
7. Сколько существует различных семизначных телефонных номеров, если в каждом номере нет повторяющихся цифр?

8. Сколькими способами можно составить список студентов группы, в которой 20 человек, среди которых имеется 3 однофамильца?
9. Комплексная бригада состоит из 2-х маляров, 3-х штукатуров и 1-го столяра. Сколько различных бригад можно создать из рабочего коллектива, в котором 15 маляров, 10 штукатуров и 5 столяров?
10. Сколькими способами можно разложить 19 разных предметов по 5-ти ящикам так, чтобы в 4-х ящиках было по 4 предмета, а в оставшемся – 3 предмета?
11. Найти коэффициент при x^9 в разложении $(1-5x+3x^2)^7$.

Вариант 15

1. Металлург, изучающий сплавы, при проведении исследования использовал 2 различных температурных режима, 6 режимов остывания, 4 различные присадки. Сколько экспериментов он сделал?
2. В таможне работают 55 человек. Из них английским владеют 30 человек, французским – 20, английским и французским – 7, немецким и французским – 7, английским и немецким – 6; все эти языки знают 5 человек. Сколько человек в таможне знают немецкий язык?
3. Сколько можно составить различных сигналов из 7-ми цветов радуги, взятых по 2?
4. В вазе лежат 10 бананов, 20 груш и 10 плодов красной хурмы. Сколькими способами можно выбрать 5 фруктов одного цвета?
5. Сколькими способами можно выбрать 2 стандартные и 1 нестандартную детали из 40 деталей, среди которых имеются 10 нестандартных?
6. Решить уравнение: $(x+2)\,!=132A_x^k P_{x-k}$.
7. Десять групп занимаются в 10 расположенных подряд аудиториях. Сколько существует вариантов расписаний, при которых группы A и B находились бы в соседних аудиториях?
8. Сколькими способами можно посадить за круглый стол 7 мужчин и 7 женщин так, чтобы никакие 2 женщины не сидели рядом?
9. Сколькими способами могут поразить три мишени пять стрелков?
10. Сколькими способами 10 одинаковых монет можно разложить по 5-ти различным отделениям кошелька так, чтобы ни одно из отделений не было пустым?
11. Найти коэффициент при x^7 в разложении $(1+x-3x^2)^5$.

Вариант 16

1. Из 20 солдат необходимо выделить наряд из 3-х солдат. Сколькими способами это можно сделать?

2. Сколько чисел среди первой тысячи натуральных чисел не делятся ни на 2, ни на 3, Сколько чисел от 1 до 100 не делятся ни на 2, ни на 3, ни на 5, ни на 7?
3. Из группы в 12 человек ежедневно в течение 6-ти суток выбирают 2 дежурных. Определить количество различных списков дежурных, если каждый человек дежурит только один раз?
4. Из группы в 15 бегунов выбирают 4 участников эстафеты 4×400. Сколькими способами можно расставить спортсменов по этапам?
5. Хозяйка желает рассадить гостей (20 супружеских пар) за круглым столом так, чтобы мужчины и женщины чередовались, но чтобы ни один мужчина не сидел рядом со своей женой. Сколькими способами это можно сделать?
6. Доказать: $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k = 0$.
7. Порядок выступления 8-ми участников конкурса певцов определяется жребием. Сколько может быть списков состава конкурса?
8. Сколько шестизначных чисел можно составить из цифр от 1 до 9, если каждое число должно состоять из 3-х четных и 3-х нечетных цифр, причем никакие цифры не повторяются?
9. Из 21-й различной книги выбирают 3 для посылки. Сколькими способами это можно сделать?
10. Сколькими способами можно разложить 12 одинаковых деталей по 3-м ящикам?
11. Найти коэффициент при x^{12} в разложении $(-3 + x + 3x^3)^7$.

Вариант 17

1. Сколько “слов” можно получить, переставляя буквы в слове “уравнение”?
2. Двадцать пассажиров собираются совершить поездку в поезде. В кассе есть 12 билетов на нижнюю полку и 8 – на верхнюю. При этом 4 пассажира не желают ехать внизу, а 5 – наверху. Сколькими способами их можно разместить, если порядок размещения важен?
3. Сколько имеется трехзначных чисел, у которых каждая следующая цифра меньше предыдущей?
4. Известно, что крокодил имеет не более 63-х зубов. Доказать, что среди 16^{17} крокодилов может не оказаться двух крокодилов с одинаковым набором зубов.

5. Сколькими способами можно выбрать 2 детали из ящика, содержащего 10 деталей?
6. Решить неравенство: $8C_{105}^{x} < 3C_{105}^{x+1}$.
7. Сколькими способами можно разделить 36 карт пополам так, чтобы в каждой половине было по два туза?
8. Сколькими способами можно составить трехцветный флаг, если имеются ткани пяти различных цветов? Решить эту же задачу при условии, что одна из полос должна быть красной.
9. Сколько различных четырехзначных чисел, делящихся на 4, можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, если цифры могут повторяться?
10. Сколькими способами можно выбрать 12 человек из 17-ти, если данные два человека не могут быть выбраны вместе?
11. Найти коэффициент при x^{13} в разложении $(1+2x-3x^{3})^{10}$.

Вариант 18

1. В селе живут 1500 жителей. Доказать, что, по крайней мере, у двоих из них одинаковые инициалы.
2. В научно исследовательском институте работают 50 сотрудников, имеющих физико-математическое образование, 10 имеют гуманитарное образование и 20 имеют инженерное образование. Гуманитарное и физико-математическое образование имеют 3 сотрудника, а инженерное и физико-математическое – лишь 1 сотрудник, и ни одного, имеющего одновременно инженерное и гуманитарное образование. Сколько сотрудников работают в институте?
3. Два почтальона должны разнести 10 писем по 10-ти адресам. Сколькими способами они могут это сделать?
4. Буквы азбуки Морзе образуются как последовательность точек и тире. Сколько различных букв можно образовать, если использовать 5 символов?
5. Сколько можно составить сигналов из 6-ти флажков разного цвета, взятых по 2?
6. Доказать: $\sum_{r=0}^{m} C_k^r C_n^{m-r} = C_{k+n}^{m}$.
7. Сколько существует различных шестизначных телефонных номеров?
8. Сколько “слов” можно получить, переставляя буквы в слове “парабола” и сколько из них можно сделать “слов” из трех букв?
9. Сколькими способами можно выбрать две стандартные детали из 10-ти, содержащих одну нестандартную?

10. В девятиэтажном доме имеется лифт. Сколькими способами 8 пассажиров лифта могут выйти на этажах?
11. Найти коэффициент при x^{24} в разложении $(1+2x^2-x^3)^{10}$.

Вариант 19

1. Как и сколькими способами можно разделить наполовину воду, налитую в 8-литровую канистру, используя две пустые канистры по 5 и 3 литра?
2. Из 80-ти студентов английский язык знают 30, немецкий – 20, французский – 5, немецкий и французский – 3, один студент знает все три языка. Сколько студентов не знают ни одного иностранного языка?
3. Сколько различных аккордов можно взять на десяти выбранных клавишах рояля, если каждый аккорд содержит от 3-х до 9-ти звуков?
4. Сколько упорядоченных пар можно составить из 32-х букв, если в каждой паре обе буквы различны?
5. Сколько шестизначных телефонных номеров можно составить из цифр от 1 до 9?
6. Решить уравнение: $20A_{x-2}^3 = A_x^5$.
7. У одного студента есть 11 книг из серии “Научная фантастика”, а у другого – 15 книг. Сколькими способами они могут выбрать по 3 книги каждый для обмена?
8. Сколько существует перестановок из элементов $1, 2, 3, \ldots, n$, в которых элемент n находится не на последнем месте?
9. Шесть ящиков различных материалов доставляют на 5 этажей стройки. Сколькими способами их можно распределить по этажам?
10. Команда из 5-ти человек выступает на соревнованиях по плаванию, в которых участвуют еще 20 спортсменов. Сколькими способами могут распределиться места, занятые членами этой команды?
11. Найти коэффициент при x^{10} в разложении $(2-x+3x^2)^9$.

Вариант 20

1. Сколько существует трехзначных чисел, которые делятся на 5?
2. В одном из городов Узбекистана 90% жителей говорят на узбекском языке, а 80% – на русском. Сколько процентов населения говорят на обоих языках?
3. Сколько существует четырехзначных чисел, у которых каждая следующая цифра: а) меньше предыдущей? б) больше предыдущей?

4. Из цифр 2, 4, 8, 9, 0 составляются пятизначные числа. Сколькими способами их можно составить, чтобы в записи каждого из них каждая цифра встречалась только один раз?
5. Сколько “слов” можно получить, переставляя буквы в слове “метаморфоза”?
6. Решить уравнение: $C_{x+3}^{x+1} - 5C_{3x}^{2} + 19x^2 = 6$.
7. Из 8-ми шахматистов нужно составить команду, в которую бы входили 3 шахматиста. Сколькими способами это можно сделать?
8. Двадцать деталей раскладываются в три ящика, причем в первый ящик кладут 3 детали, во второй – 5, а в третий – все остальные. Сколькими способами это можно сделать?
9. Сколькими способами из 10-ти различных предметов можно выбрать нечетное число предметов?
10. Команда для ЭВМ записывается в виде набора из восьми цифровых знаков: нулей и единиц. Каково максимальное количество различных команд?
11. Найти коэффициент при x^8 в разложении $(-1 + 2x - 3x^2)^{10}$.

Вариант 21

1. Имеются 5 видов конвертов без марок и 4 вида марок. Сколькими способами можно выбрать конверт с маркой для отправки письма?
2. На загородную прогулку поехали 92 человека. Бутерброды с колбасой взяли 47 человек, с сыром – 38, с ветчиной – 42, с колбасой и с сыром – 28, с колбасой и с ветчиной – 31, с сыром и с ветчиной – 26. Все три вида бутербродов взяли 25 человек. Сколько человек взяли пирожки?
3. Четверо студентов сдают экзамен. Сколькими способами могут быть поставлены оценки, если известно, что никто из них не получил неудовлетворительной оценки?
4. Сколькими способами можно раздать колоду в 52 карты поровну 13-ти игрокам?
5. Сколько существует семизначных чисел, у которых 3 цифры – четные, а остальные – нечетные?
6. Решить неравенство: $C_{10}^{x-1} > 2C_{10}^{x}$.
7. Сколько “слов” можно получить, переставляя буквы в слове “водород”?
8. На студенческую конференцию избрано 9 человек. Из них надо выбрать ответственного за поездку, культорга и ответственного за покупку билетов. Сколько существует способов выбрать ответственного за поездку студентов?

9. Шесть студентов из другого вуза надо распределить по 3-м параллельным группам. Сколькими способами это можно сделать?
10. Футбольная команда состоит из 2-х вратарей, 8-ми защитников, 10-ти нападающих и 5-ти полузащитников. Сколькими способами тренер может образовать основной стартовый состав команды из 1-го вратаря, 5-ти защитников, 2-х нападающих и 3-х полузащитников?
11. Найти коэффициент при x^7 в разложении $(1-5x+3x^2)^8$.

Вариант 22

1. Автомобильные номера состоят из 3-х букв и 4-х цифр. Найти число таких номеров, если используются все 33 буквы русского алфавита?
2. Доказать равенство: $(A \cap B) \cup A = A$.
3. В сражении у Трафальгара 70% участников потеряли глаз, 75% – ухо, 80% – руку, 85% – ногу. Какой наименьший процент участников битвы, лишившихся одновременно всех этих частей тела?
4. Решить уравнение: $C_x^3 + C_x^2 = 15(x+1)$.
5. Десять участников марафонского бега разыгрывают золотую, серебряную и бронзовую медали. Сколькими способами эти награды могут быть распределены между спортсменами?
6. Найти число точек пересечения диагоналей, лежащих внутри выпуклого n-угольника $(n \geq 4)$, если никакие три из них не пересекаются в одной точке.
7. Сколько натуральных чисел, меньших, чем миллион, можно написать с помощью цифр 8 и 9?
8. Сколькими способами можно разложить 9 книг в три бандероли по 3 книги?
9. Сколькими способами 12 одинаковых монет можно разложить по 5-ти различным пакетам, если ни один из пакетов не должен быть пустым?
10. Из 20-ти сотрудников лаборатории 5 человек должны выехать в командировку. Сколько может быть различных составов отъезжающих, если заведующий лабораторией и два ведущих инженера одновременно уезжать не должны?
11. Найти коэффициент при x^5 в разложении $(-2+x-2x^3)^5$.

Вариант 23

1. Метранпаж выбирает из ящика, в котором лежат (каждой по одной) литеры букв русского, латинского, греческого алфавитов, цифр и знаков препинания, одну литеру. Сколькими способами он может это сделать?

2. Доказать равенство: $(A \cup B) \cap (A \cup \overline{B}) = A$.
3. На экзамен по математике было предложено три задачи: одна по алгебре, одна по геометрии, одна по тригонометрии. Из 1000 абитуриентов задачу по алгебре решили 800, по геометрии – 700, по тригонометрии – 600. При этом задачи по алгебре и геометрии решили 600 абитуриентов, по алгебре и тригонометрии – 500, по тригонометрии и геометрии – 400, а 300 абитуриентов решили все задачи. Сколько абитуриентов не решили ни одной задачи?
4. Решить уравнение: $C_n^{n-2} + C_n^{n-1} = 55$.
5. Имеется 20 наименований товаров. Сколькими способами их можно распределить по трем магазинам, если известно, что в первый магазин должно быть доставлено 8, во второй – 7, а в третий – 5 наименований товаров?
6. Сколькими способами можно выбрать 13 из 52-х различных игральных карт?
7. Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр от 1 до 5?
8. Ювелиру принесли 5 одинаковых изумрудов, 6 одинаковых рубинов и 7 одинаковых сапфиров. Сколькими способами он может из этих камней выбрать 3 камня для кольца?
9. Поезду с n пассажирами предстоит сделать m остановок. Сколькими способами пассажиры могут выйти на этих остановках?
10. Сколькими способами можно разместить на полке 4 различных книги?
11. Найти коэффициент при x^9 в разложении $(1+7x-3x^2)^8$.

Вариант 24

1. У англичан принято давать детям несколько имен. Сколькими способами можно назвать ребенка, если общее число имен равно 300, а ему дают не более 3-х?
2. Доказать равенство: $A \cup (\overline{A} \cap B) = A \cup B$.
3. В школьной химической олимпиаде участвовало 21 учащийся, в физической – 26, в математической – 29, в химической и физической – 13, в физической и математической – 15, в химической и математической – 14. Во всех трех олимпиадах участвовало 8 человек. Сколько школьников участвовало хотя бы в одной олимпиаде?
4. Решить уравнение: $C_{3x+1}^{3x-1} = 120$.
5. Сколькими способами можно выбрать 12 человек из 17-ти, если данные двое не могут быть выбраны вместе?

6. Сколькими способами можно посадить за круглый стол 6 мужчин и 6 женщин так, чтобы никакие два лица одного пола не сидели рядом?
7. Четверо студентов сдавали экзамен. Сколькими способами могли быть поставлены оценки?
8. Сколько различных четырехзначных чисел можно составить из цифр числа 123153?
9. Сколько существует треугольников, длины сторон которых принимают одно из значений 1, 2, 3, 4?
10. В купе железнодорожного вагона имеются два расположенных напротив друг друга дивана по пять мест на каждом. Из десяти пассажиров 4 желают сидеть по ходу поезда лицом, а трое – против хода поезда, остальным трем безразлично как сидеть. Сколькими способами могут разместиться пассажиры?
11. Найти коэффициент при x^{11} в разложении $(1+2x+5x^3)^5$.

Вариант 25

1. Сережа рисует знаки, состоящие из геометрических фигур (окружность, треугольник, квадрат), буквы русского алфавита и цифры. Сколько различных знаков может нарисовать Сережа?
2. Доказать равенство: $\overline{\overline{A}\cap\left(\overline{B}\cap C\right)}\cap\overline{\left(\overline{A}\cap B\right)}\cap\left(\overline{A}\cap C\right)=\emptyset$.
3. В классе 35 учащихся. Из них 20 посещают факультатив по комбинаторике, 11 – по логике, и 10 – не посещают ни один из этих факультативов. Сколько учащихся посещают оба факультатива?
4. Решить уравнение: $A_x^3-\overline{C}_{x-2}^{3}=10C_{x-1}^3$.
5. В железнодорожном вагоне 10 мест, расположенных по ходу поезда и столько же против хода поезда. Сколькими способами можно посадить в вагон 8 пассажиров, если двое отказываются сидеть по ходу поезда лицом, а трое – против хода поезда?
6. Студенту необходимо сдать 4 экзамена на протяжении 8-ми дней. Сколькими способами это можно сделать, если деканат запрещает сдавать более одного экзамена в день?
7. Сколькими различными способами из 8-ми книг можно выбрать несколько, но не меньше одной?
8. У Оли шесть шаров: 3 черных, один красный, один синий и один белый. Сколькими способами она может составить из них ряд из 4-х шаров?
9. Сережа хочет отгадать, какие 5 монет держит Елена в руке. Она располагает достаточным количеством монет достоинством в 1, 5, 10, 20, 50 и 100 рублей. Сколько может быть дано неверных ответов?

10. Сколькими способами можно упорядочить множество $1, 2, 3, \ldots, 2n\text{-}1, 2n$ так, чтобы каждое четное число имело четный номер?
11. Найти коэффициент при x^7 а разложении $(-2 + x - 3x^3)^{10}$.

Авторы-составители

Кудряшев Геннадий Сергеевич
Третьяков Александр Николаевич

Дополнительные главы математики
Учебное пособие по дисциплине «Дополнительные главы математики»
для студентов очной и заочной форм обучения направлений подготовки
13.04.01 Теплоэнергетика и теплотехника (уровень магистратура),
13.04.02 Электроэнергетика и электротехника (уровень магистратуры)

Лицензия на издательскую деятельность
ЛР №070444 от 11.03.1998 г.

Подписано в печать ___.___.2019 г.
Формат 60×86/16
Печ. л. 10,0
Тираж 50 экз.

Издательство Иркутского государственного
аграрного университета им. А.А. Ежевского
664038, Иркутская обл., Иркутский р-н,
пос. Молодежный