Министерство сельского хозяйства Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
ИРКУТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ А.А. ЕЖЕВСКОГО

ИНЖЕНЕРНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

Учебное пособие по дисциплине «Инженерный эксперимент» для студентов очной и заочной форм обучения для направлений подготовки 13.04.01 Теплоэнергетика и теплотехника (уровень магистратура), 13.04.02 Электроэнергетика и электротехника (уровень магистратуры)

Иркутск, 2018

УДК 621.1.001.4.: 001.891.5(075.8)
УДК 621.3.001.4.: 001.891.5(075.8)

Р е ц е н з е н т:
Доцент кафедры теплоэнергетики Иркутского национального исследовательского государственного технического университета, канд. техн. наук, доцент В.А. Бочкарев
Доцент кафедры электрооборудования и физики
ФГБОУ ВО ИрГАУ им. А.А. Ежевского А.Ю. Логинов

Инженерный эксперимент: учебное пособие по дисциплине «Инженерный эксперимент» для студентов очной и заочной форм обучения для направлений подготовки 13.04.01 Теплоэнергетика и теплотехника (уровень магистратуры), 13.04.02 Электроэнергетика и электротехника (уровень магистратуры) / Авт.-сост. Г.С. Кудряшев, А.Н. Третьяков. – Иркутск: ФГБОУ ВО Иркутский ГАУ, 2018. – 128 с.

Учебное пособие предназначено для изучения курса «Инженерный эксперимент». Основной целью учебного пособия является оказание помощи студентам при выполнении контрольной работы.

Печатается по решению научно-методического совета Иркутского ГАУ (протокол №5 от 25 июня 2018г.)

1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ ДЛЯ ИЗУЧЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

1.1. Основные понятия теории вероятностей. Случайные события и их классификация. Пространство элементарных событий. Элементы комбинаторики. Классическая вероятность. Статистическая и геометрическая вероятности.

Теория вероятности имеет свои, присущие только ей, понятия и определения.

Основные понятия.

Теория вероятностей – это раздел математики изучающий закономерности в случайных явлениях и процессах.

Случайное явление – это явление, которое при повторении опыта протекает каждый раз по иному.

Случайный процесс можно представить как цепочку связанных каким-либо образом случайных явлений.

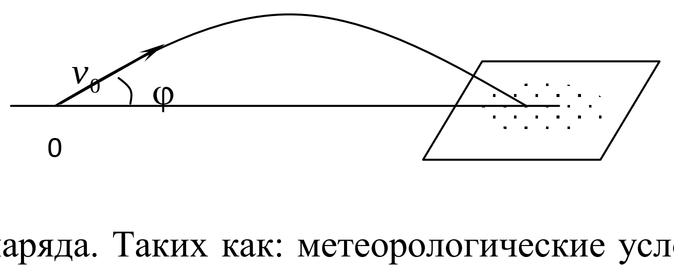
Опыт (испытание) – целенаправленная, запланированная деятельность человека, как правило, неоднократно повторяемая, с целью изучения законов природы.

Событие (исход) – всякий факт, который может произойти в результате некоторого опыта.

Случайное событие – событие, которое в результате опыта может произойти, а может не произойти.

Например, стрельба по цели из орудия. Такой выстрел можно трактовать как опыт; событие здесь – попадание снаряда в цель; случайное событие – попадание или непопадание в цель.

С чем связана случайность? Если производится несколько выстрелов, то можно увидеть, что снаряды ложатся в так называемый эллипс рассеяния вокруг цели. Происхождение этого эллипса связано с множеством факторов, влияющих на траекторию полета снаряда.



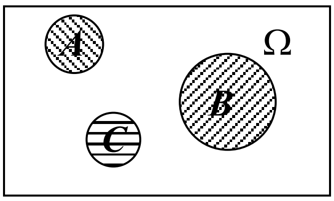
Таких как: метеорологические условия, различие в заряде, различие в массе снаряда и их аэродинамических характеристиках, в небольшом смещении орудия после каждого выстрела, в неточности приборов наведения на цель и т.д. Эти факторы малы по величине, но их много. Основные условия опыта – пара чисел v_0 (начальная скорость снаряда) и φ (угол наклона ствола орудия) – остаются неизменными, а второстепенные факторы меняются от опыта к опыту. Возможны две постановки задачи по уничтожению цели. Первая – сделать точный расчет для полета конкретного снаряда с учетом всех условий. Такое решение, несмотря на кажущуюся простоту связано с огромными материальными затратами и, по-видимому, в принципе невозможно. Вторая – рассчитать, сколько снарядов необходимо, чтобы с определенной надежностью поразить цель. Такая постановка задачи более реальна. У каждого офицера-артиллериста есть таблица, составленная на основе теории вероятностей, где указано, сколько снарядов надо использовать, чтобы с определенной надежностью подавить или уничтожить определенную цель в различных условиях.

Заметим, что случайные явления неизбежно сопутствуют любому закономерному явлению. Иногда ими на практике пренебрегают, например, когда размер цели сравним с эллипсом рассеяния, но зачастую случайные факторы играют определяющую роль. Подчеркнем особенности теории вероятностей. Она имеет дело с массовыми случайными явлениями, то есть или много объектов исследования или опыт повторяется неоднократно. Именно в массовых случайных явлениях проявляется закономерность в виде устойчивости определенных характеристик. Свойство устойчивости лежит в основе теории вероятностей. Отдельные особенности опыта в массе взаимно погашаются, нивелируются, и средний результат оказывается практически не случайным. Например, при большом числе бросаний монеты отношение случаев выпадения герба к количеству бросков стремится к 0,5.

Таким образом, теория вероятностей не может предсказать исход отдельного опыта, он остается случайным, но дает возможность предсказать средний результат многократно повторяемых опытов.

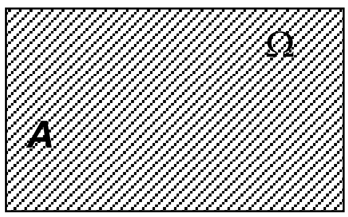
Случайные события обозначаются большими буквами *A, B, C*. События бывают простыми элементарными, когда их нельзя разделить на более простые, и сложными, состоящими из композиции простых событий. Для каждого опыта можно указать некоторую совокупность альтернативных (взаимно исключающих друг друга) элементарных исходов. Причем в результате опыта должен обязательно реализоваться один из них. Такая совокупность называется ***пространством элементарных событий*** и обозначается Ω. Элементарные события обозначаются $w_i\ (w \in \Omega)$, где $i = \overline{1, n}$. Пространство элементарных событий может быть конечномерным или бесконечномерным. Пример конечномерного пространства: бросают две монеты разного достоинства, имеется четыре альтернативных исхода: $\Omega = \{w_1(Г, Г); w_2(Г, Р); w_3(Р, Г); w_4(Р, Р).\}$. Примером бесконечномерного пространства является, стрельба в мишень конечно-го размера, если попадание рассматривать как математическую точку. Пронумеровать все исходы в этом случае невозможно.

Из элементарных событий можно составить более сложные события. Элементарные события, входящие в состав случайного события A являются благоприятными событиями появлению события A. Дадим определение благоприятствующим событиям поскольку они важны для подсчета вероятностей событий. ***Благоприятствующими событиями*** событию A называют такие события, в результате появления которых появляется и это событие A. Например, при бросании двух монет событию A – выпадению одного герба – благоприятны два события w_2 и w_3 и неблагоприятны w_1 и w_4. Событию B – выпадение хотя бы одного герба – благоприятны три элементарных события w_1, w_2, w_3. Заметим, что благоприятные события представляют собой сложные события вероятностей событий. Для наглядной иллюстрации простанства элементарных событий служат диаграмма Венна в виде прямоугольника, где события изображаются как некоторые области или просто круги Эйлера. На рисунке представлена диаграмма Венна с тремя событиями A, B и C. Элементарный исход изображается как точка в пределах прямоугольника. События A, B и C заключаются в попадании точки в данные области.



Введем понятие вероятности события. Различные события, как известно, отличаются различной степенью возможности их реализации. Поэтому для количественного сравнения степени возможности реализации события необходимо ввести некоторое число, которое тем больше, чем больше возможность реализации этого события. ***Вероятность события*** – это численная мера степени возможности реализации этого события. Обозначается $P(A)$ или P_A. Здесь под скобками подразумевается не функциональная зависимость, а просто указание, что вероятность относится к событию A. Каким же образом подсчитывается вероятность того или иного события? Прежде чем ответить на этот вопрос введем классификацию событий и нормируем вероятность, то есть договоримся о численных значениях вероятности события.

1. Достоверное событие – событие, которое при всех испытаниях в данном опыте обязательно наступает. Например, при бросании игральной кости, на каждой из сторон которой обозначено разное количество очков от 1 до 6, событие A – выпадение не более 6 очков – является достоверным. В этом

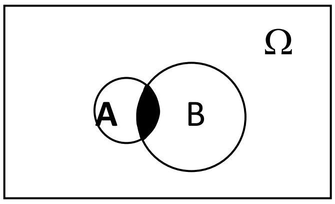


случае $P(A)$=1, A=Ω и событие A заполняет всю диаграмму Венна. Практически достоверное событие – это событие, которое не реализуется очень редко.

2. ***Невозможное событие*** – событие, которое в данном опыте никогда не наступает. Например, при бросании кости событие B – выпадение 12 очков – невозможное событие. В этом случае полагаем A=0, $P(A)$=0. Практически невозможное событие характеризуется значениями $P(A)$ близкими к нулю. Таким образом все значения вероятностей заключены в интервале чисел $0 \le P(A) \le 1$.

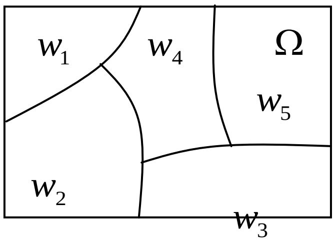
3. ***Несовместные события*** – это события, которые никогда не появляются совместно в одном опыте. Они взаимно исключают друг друга. Например, выпадение герба и решки при одном бросании монеты. Такие события обозначаются на диаграмме Венна непересекающимися кругами Эйлера.

4. Совместные события – это такие события, когда появление одного события A не исключает появление другого события B в одном опыте. Например, при вынимании из колоды карт туза – событие A, не исключает, что туз может быть пиковым – событие B. Совместные события на диаграмме Венна могут быть представлены в виде перекрывающихся кругов Эйлера.



5. Равновозможные события – ни одно из событий не является более возможным, чем остальные. Такие события обладают одинаковой степенью реализации и обусловлены наличием симметрии исходов опыта. Например, кости должны быть однородными с правильными гранями, карты не крапленые, рулетка без тормоза и т.д. На диаграмме Венна площадь кругов Эйлера в этом случае одинакова.

6. Полная группа событий. События образуют полную группу событий, если в результате опыта одно из них обязательно реализуется. То есть, они в совокупности занимают все пространство элементарных событий.



7. Противоположные события можно рассматривать как частный случай полной группы событий с $n = 2$. Событие $\overline{A}$ состоит в том, что событие A не произошло.

Для классического определения вероятности введем понятие случая. События называются ***случаями,*** если они несовместны, равновозможны и образуют полную группу событий. Характерным примером случая является результат азартных игр. Если в опытах есть симметрия исходов (равновозможность событий), то говорят, что они сводятся к “схеме случаев”. Для таких опытов, можно непосредственно подсчитать вероятность того или иного случая. Подсчет вероятности основан на оценки доли благоприятствующих случаев в общем числе случаев. Если m – число благоприятствующих случаев событию A, n – общее число случаев, то вероятность события A определяется как

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{mesA}{mes\Omega},$$

где $mesA$ мера события А. Очевидно, должно выполняться $0 \le P(A) \le 1$.

Примеры:

1. При бросании игральной кости возможны 6 случаев, найти вероятность выпадания четной цифры.

Благоприятствующих событий выпаданию четной цифры 3 – это 2, 4 и 6, поэтому $P(A)=3/6=0{,}5$.

2. В урне 5 красных, 3 синих, 7 желтых и 10 белых шаров. Найти вероятность, что случайно вытащенный из урны шар является цветным.

Так как событию появления цветного шара благоприятны $m=15$ шаров, а всего $n=25$ шаров, то $P(A)=15/25=0{,}6$.

Математическим аппаратом вычисления вероятностей для “схемы случаев” является комбинаторика – один из разделов дискретной математики. Существуют два основных правила комбинаторики:

- Если два альтернативных (взаимно исключающих) действия могут быть выполнены n и m способами, то выполнение одного из них возможно $n+m$ способами. Например, в вазе пять груш и два яблока, то способов выбрать один фрукт – семь.

- Если первое действие можно сделать n способами, а второе – m способами, то два действия можно сделать $n \times m$ способами.

Например, сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, если:

а) цифры могут повторяться;

б) ни одна из цифр не повторяется больше одного раза;

в) число должно быть нечетным и цифры могут повторяться.

Решение. а) Имеем три позиции. На первую позицию (сотни) претендуют 6 цифр, а не семь, поскольку 0 исключается (иначе будет двухзначное число); на вторую позицию претендуют уже 7 цифр, так как 0 уже можно использовать (цифры могут повторяться); на третью позицию (единицы) опять претендуют 7 цифр. Таким образом, получаем $6 \times 7 \times 7 = 294$ трехзначных чисел.

б) В этом случае на первую позицию претендует, очевидно, 6 цифр; на вторую (десятки) претендует уже 6 цифр, поскольку одна из цифр уже использована; на третье место претендует уже 5 цифр, поскольку две использовали. Таким образом, имеем $6 \times 6 \times 5 = 180$ трехзначных чисел.

в) В этом случае имеем $6 \times 7 \times 3 = 126$ чисел, поскольку нечетное число должно оканчиваться на нечетную цифру, а их три - 1, 3, 5.

Количество способов организации заданных подмножеств данного множества определяется известными комбинаторными коэффициентами.

Перестановки. Пусть упорядоченное множество $\overline{A}$ состоит из n элементов. Тогда количество способов различных размещений этих элементов на n мест (или по-другому, количеством способов выбора n элементов из n) называется перестановкой и определяется $N = P_n = n!$. Здесь $\boldsymbol{n!} = \boldsymbol{n}(\boldsymbol{n}-1)(\boldsymbol{n}-2)\boldsymbol{...}3 \cdot 2 \cdot 1$, символ (!) - знак факториала. Действительно, берем один из элементов множества и размещаем в любом месте упорядоченного множества. Способов это сделать $\boldsymbol{n}$. Берем второй элемент и способов его размещения уже $\boldsymbol{n}-1$, так как одно место уже занято, и т.д. Последний элемент можно разместить только одним способом, так как остается незанятым только одно свободное место. Отметим, что операция размещения учитывает порядок выбора элемента, при этом если выбранный элемент в дальнейшем выборе не участвует, то ее называют размещениями без повторений.

Примеры.

1**.** Сколькими способами можно расставить 5 книг на полке.

Решение. $P_5 = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$.

2. Сколькими способами можно переставить $\boldsymbol{n}$ элементов так, чтобы данные два элемента не стояли рядом ?

Решение. Всего различных перестановок $\boldsymbol{n!}$. Количество способов, когда данные элементы стоят рядом, равно $2(\boldsymbol{n}-1)(\boldsymbol{n}-2)\boldsymbol{!}$. Так как двумя способами их можно переставить между собой, $\boldsymbol{n}-1$ способами разместить среди $\boldsymbol{n}$ элементов и $(\boldsymbol{n}-2)\boldsymbol{!}$ способами можно переставить оставшиеся $\boldsymbol{n}-2$ элементов, которые нас не интересуют. Таким образом, количество способов перестановки, учитывающих условие того, что заданные два элемента не стоят рядом, равно $\boldsymbol{N} = \boldsymbol{n!} - 2(\boldsymbol{n}-1)(\boldsymbol{n}-2)\boldsymbol{!} = (\boldsymbol{n}-2)(\boldsymbol{n}-1)\boldsymbol{!}$.

Размещения. Рассмотрим задачу о количестве способов выбора $\boldsymbol{k}$ элементов из $\boldsymbol{n}$ элементов множества. Всего способов размещения этого множества, как мы уже знаем, $\boldsymbol{n!}$. Нас интересует упорядоченное размещение только $\boldsymbol{k}$ элементов из $\boldsymbol{n}$, остальные $\boldsymbol{n}-\boldsymbol{k}$ элементов нас не интересуют, а способов их размещений $(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{k})\boldsymbol{!}$. Таким образом, количество способов такого выбора, которое собственно и называется размещением $\boldsymbol{k}$ элементов среди $\boldsymbol{n}$, определяется как

$$N_k(n) = A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Заметим, что для случая $k = n$, выполняется соотношение $A_n^n = P_n$.

Пример. Сколькими способами можно рассадить 3 человек на 10 мест.

Решение. $A_{10}^3 = \frac{10!}{7!} = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$. Или по-другому: количество способов разместить первого человека на 10 мест, очевидно, равно 10, второго 9, поскольку одно место уже занято, ну а третьего уже только 8. Итак, получаем $N = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$.

Сочетания. Рассмотрим задачу о числе способов выбора k элементов среди n элементов, когда нам не важен порядок выбора k элементов. Если нас не интересует взаимные размещения k элементов на k мест (а их $k!$), а интересует только их сочетание, то количество способов выбрать k элементов из n элементов, определяется как

$$N_k(n) = C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

и называется числом сочетаний k элементов из n элементов. Порядок выбора не важен, когда элементы множества для нас неразличимы (например, одноцветные бильярдные шары) или их различия для решения каких-то задач нам не интересны (например, разделения людей по полам). Отметим, что выполняется соотношение $P_m C_n^m = A_n^m$.

Примеры.

1. Сколькими способами можно выбрать 3 книги из 12 ?

Решение. Нас не интересует последовательность выбора этих трех книг, а только их сочетание, поэтому $C_{10}^3 = \frac{10!}{3!\ 7!} = 120$.

2. В турнире принимают участие шахматисты и каждые два из них встречаются между собой только один раз. Сколько партий будет сыграно?

Решение. $C_n^2 = \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2}$.

Из формулы для определения числа сочетаний k элементов из n следует симметрия этого числа по индексам:

$$C_n^k = C_n^{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!\ k!}.$$

Числа C_n^k являются коэффициентами бинома Ньютона и определяют постоянные в сумме

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}.$$

Так, для $n=2$, $C_2^0 = C_2^2 = 1$, $C_2^1 = 2$ и для $n=3$, $C_3^0 = C_3^3 = 1$, $C_3^1 = C_3^2 = 3$.
Умножая бином Ньютона на $(a+b)$, легко получить такое свойство:

$$C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k+1}.$$

Умножая бином Ньютона на $(a+b)^m$ можно получить еще одно свойство:

$$C_{n+m}^k = \sum_{i=0}^{k} C_n^i + C_m^{k-i}.$$

Задавая различные значения a и b в биноме, можно получить следующие биноминальные тождества:

для $a=b=1$, $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n = 2^n$;

для $a=-b=1$, $C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \ldots + (-1)^n C_n^n = 0$.

Предпоследнее тождество определяет количество всех подмножеств множества A из n элементов, включая пусто множество.

Например. Пусть дано множество $A = \{a, b, c\}$. Определить количество всех подмножеств, образующихся из этого множества.

Решение. $M(A) = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}, \varnothing\}$. $N(M) = 2^3 = 8$.

Перестановки с повторением. Рассмотрим выборку элементов с повторениями, когда выбранный элемент множества возвращается в этоже множество и участвует в дальнейшем выборе. Если множество A имеет одинаковые или повторяющиеся элементы, то их перестановка между собой не приводит к новому упорядоченному множеству. Поэтому надо исключить способы, когда меняются местами одинаковые элементы, число которых пусть будет $k_1, k_2, \ldots, k_m$, причем $n = k_1 + k_2 + k_3 + \ldots + k_m$. Тогда количество способов перестановки элементов множества между собой так, чтобы при этом все комбинации были различными, определяется по формуле

$$P_n(k_1, k_2, \ldots, k_m) = \frac{n!}{k_1!\,k_2!\ldots k_m!}$$

и являются полиномиальными коэффициентами, которые определяют постоянные в сумме

$$(a+b+\ldots+d)^n = \sum_{k_1+k_2+\ldots+k_m=n} P_n(k_1, k_2, \ldots, k_m) a^{k_1} b^{k_2} \ldots d^{k_m}.$$

В частном случае, когда $k_1 + k_2 = n$ полиномиальные коэффициенты являются биноминальными.

Например, сколькими способами можно переставить буквы в слове “математика”?

Решение. Видно, что буквы “м” и “т” встречаются по два раза, а буква "а" три раза. Поэтому количество способов получить различные перестановки равно

$$N = P_{10}(2{,}2{,}3) = \frac{10!}{2!\cdot 2!\cdot 3!} = 151200\cdot$$

Размещения с повторением. Рассмотрим размещение k элементов с повторением из n элементов. Очевидно, что таких способов $\overline{A}_n^k = n^k$.

Поясним на примере. Сколькими способами можно составить пятизначный номер из девяти цифр от 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, причем цифры в номере могут повторяться? Так как $m = 5$, и $n = 9$, то на все 5 позиций претендуют по 9 цифр: $N = \overline{A}_9^5 = 9^5 = 6561$.

Сочетание с повторением. Пусть имеются n различных элементов множества и из них надо образовать k комбинаций, не принимая во внимание порядок в комбинации. Образуемые комбинации должны отличаться хотя бы одним элементом. В этом случае число сочетаний с повторением определяется

$$\overline{C}_n^k = C_{n+k-1}^k = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}.$$

Действительно, если n элементов расположить по типам и их перенумеровать, а затем еще раз перенумеровать, прибавляя последовательно по единице к номеру каждого типа, то получим сочетание уже без повторений, состоящее из неповторяющихся чисел 1, 2, 3, …, $n + k - 1$. Заметим, что все они различны, и при этом в каждое сочетание входят k элементов.

Примеры.

1**.** В магазине продаются пирожные 4 сортов. Сколькими способами можно купить 7 пирожных ?

Решение. Очевидно, что сорта пирожных среди купленных будут повторяться. Обозначим $k = 7$, $n = 4$.

$$\overline{C}_4^7 = C_{4+7-1}^7 = C_{10}^7 = C_{10}^3 = 120.$$

2**.** Сколько костей домино, если на каждой из костей по две из 7 цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 ?

Решение. $N = \overline{C}_7^2 = C_8^2 = 28$.

3**.** Дано множество $A = \{a, b, c\}$. Образовать множество по 2 элемента с повторением и определить количество элементов этого множества.

Решение. $B = \{ac, bc, ab, aa, bb, cc\}$; $N(B) = \overline{C}_3^2 = C_4^2 = 6$.

Статистическая вероятность и частота событий. Если опыт не сводится к “схеме случаев”, например, кость со смещенным центром тяжести, то вероятность события определить так просто, как мы делали выше невозможно. Однако есть другой способ подсчета применяемый на практике. Производится n опытов, в каждом из которых заданное событие A появляется или не появляется. ***Относительной частотой события A*** в данной серии опытов называется отношение числа опытов, в которых событие A происходит, к числу всех опытов. Если m число опытов, где появилось A и n число опытов, то частота события A определяется

$$P^*(A) = \frac{m}{n}.$$

В отличие от классического определения вероятности частоту событий будем отмечать звездочкой.

Статистической вероятностью называют предел к которому стремится относительная частота события ***A***, при неограниченном увеличении числа опытов (n $\rightarrow \infty$). Так как на практике число опытов всегда конечно, то относительная частота события будет только приближенной оценкой его вероятности

Очевидны два свойства относительной частоты событий:

1. $0 \le P^* < 1$, так как относительная частота невозможного события $P^* = 0$ $(m = 0)$, а достоверного события $P^* = 1$ $(m = n)$;

2. при увеличении числа опытов $(n \to \infty)$ частота события A стремится к некоторому пределу, который и будет вероятностью события A. Говорят, что частота сходится по вероятности к вероятности события и обозначается $P^* \xrightarrow{P} P$. Под этой записью подразумевают, что событие, заключающееся в том, что абсолютная разность относительной частоты и вероятности события A меньше наперед заданного положительного сколь угодно малого числа, достоверно.

$$P\left(\left|P^* - P\right| < \varepsilon\right) \cong 1.$$

Заметим, что между P^* и P имеется глубокая диалектическая связь и различие. Связь обусловлена тем, что чем чаще событие наблюдается, тем больше его вероятность и наоборот. Отличие же заключается в том, что вероятность события определяется до опытов, а частота события после опытов. Приведем таблицу частоты появления герба при различных числах бросания монеты. Видно, что при увеличении числа бросков частота стремится к вероятности выпадения герба.

n	m	P^*	P
4040	2048	0,5069	
12000	6019	0,5016	0,5
24000	12012	0,5005	

Геометрическая вероятность. В ряде практических задач число возможных исходов бесконечно (пространство элементарных событий несчетно), что делает невозможным применение классического определения вероятностей. Однако, если остается в силе понятие равновозможности событий, то применяется так называемый геометрический метод подсчета вероятности. Задача сводится к бросанию математической точки на конечный участок прямой или плоскости или пространства и делается подсчет его доли. Так если есть отрезок длины ℓ и отрезок длины L, который содержится в отрезке $L > \ell$, то вероятность попасть математической точки в отрезок ℓ, находится как $P = \ell / L$. Пусть имеем на плоскости область S и в ней область S_d $(S > S_d)$, то вероятность попадания математической точки при бросании в область S_d в области S будет определяться $P = S_d / S$. Здесь вероятность попадания не зависит от формы областей S_d и S, а определяется их площадью. Аналогично для вероятности попадания математической точки в элемент объема V_d, находящегося в объеме V определяется как $P = V_d / V$.

Примеры.

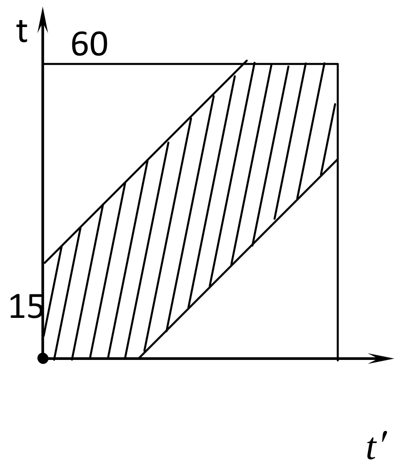
1.Вращается диск, на котором имеется черный сектор с площадью 1/5 всего диска. Найти вероятность попадания математической точки в черный сектор.

Решение: $P = S_d / S = \dfrac{1}{5} = 0{,}2$.

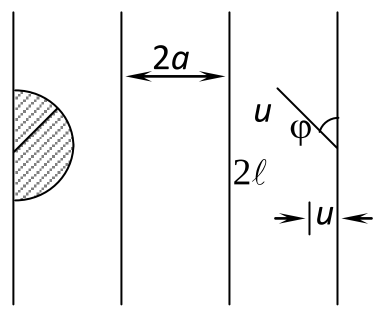
2. Задача о встрече. Два товарища договорились встретиться с 13^{00} до 14^{00} в условленном месте и договорились ждать не более 15 минут. Найти вероятность их встречи.

Для решения построим вспомогательный чертеж. По оси ординат отложим время ожидания одного из них, а по оси абсцисс время ожидания другого. Видно, что встреча произойдет, если время их совместного прихода попадет в заштрихованную область. Тогда

$$P = \frac{S_d}{S} = \frac{60^2 - 45^2}{60^2} = 0{,}45.$$



3. Задача Бюффона. Плоскость стола расчерчена прямыми параллельными линиями, расстояние между которыми $2a$. Наудачу на стол бросают иглу длиной 2ℓ, причем $(a > \ell)$. Найти вероятность того, что игла пересечет какую-либо прямую.



Решение. Обозначим u – расстояние от центра иглы до ближайшей прямой. Тогда условие пересечения иглы прямой будет $u \le \sin\varphi$, где $0<\varphi<\pi$. Введем условную плоскость в координатах a и φ.

Тогда

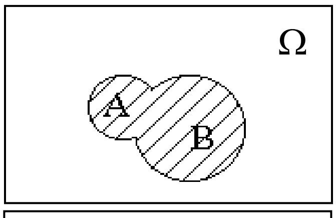
$$P=\frac{S_d}{S}=\frac{\int_0^{\pi}\ell\sin\varphi\,d\varphi}{\pi a}=\frac{2\ell}{\pi a}\ .$$

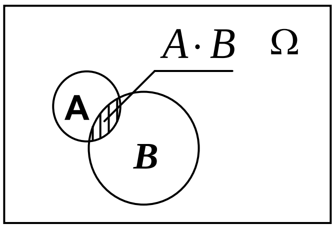
Такое решение задачи позволило решить обратную задачу об определении числа π. Бросают иглу n раз и определяют m – количество бросков, когда игла пересекает прямую. Отсюда $\pi=\frac{2\ell}{a}\cdot\frac{n}{m}$. Как известно $\pi=3{,}1416...$ Из таблицы видно как на эксперименте определялось число π.

	ℓ/a	n	m	π
Вольф	0,8	5000	2532	3,1596
Рейна	0,542	2520	859	3,1795

1.2. Основные теоремы теории вероятностей. Алгебра событий. Теоремы сложения и умножения вероятностей. Условная вероятность. Независимые события. Вероятность хотя бы одного события.

Если событие, вероятность которого необходимо определить, достаточно сложное (затруднителен подсчет числа благоприятствующих событий), то его представляют в виде композиции элементарных событий или более простых событий, вероятность которых известна или может быть определена из опыта. Композиции составляются с помощью операций сложения и умножения. Таким образом, для подсчета вероятностей сложных событий или таких, которые не сводятся к “схеме случаев”, применяют косвенные методы, позволяющие по известным вероятностям одних событий найти вероятности других событий, с ними связанных. Суть этих методов сводится к применению двух теорем о сложении и умножении вероятностей и большого числа их следствий. Обе теоремы строго доказываются только для “схемы случаев”. Для событий, не сводящихся к “схеме случаев” эти теоремы принимаются как аксиомы.

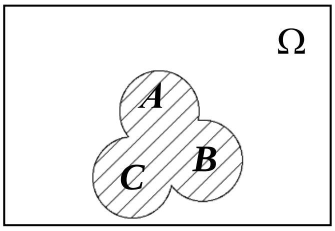




Рассмотрим алгебру событий.

Объединением двух событий *A и B* называют событие C, состоящее в выполнении события A или B или обоих сразу, если события совместны (хотя бы одного их них). Логическая сумма двух событий называется объединением и обозначается $A\cup B$ или $A+B=C$, где подразумевается логиче-

ское сложение. Причем, если $A \subset \Omega$ и $B \subset \Omega$, то $C \subset \Omega$.
На диаграмме Венна сумма событий A и B интерпретируется, как общая площадь кругов Эйлера. На рисунке $A \cup B$ проиллюстрирована заштрихованной областью. Поясним на примере. Пусть $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $B = \{4, 5, 6, 7\}$, то $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Все элементы множества A и B входят в $A \cup B$ только один раз. Другой пример, событие A – попадание в мишень при первом выстреле, а событие B – попадание в мишень при втором выстреле, то $A \cup B$ – событие хотя бы одного попадания. Приведем еще один пример, из



колоды карт вынимают две карты. Событие A – попалась карта червовой масти, событие B – попалась карта бубновой масти, тогда $A \cup B$ – событие появления хотя бы одной карты красного цвета. Суммирование событий можно обобщить на любое их количество. Суммой, допустим, трех событий называется событие, состоящее в выполнении хотя бы одного из них. На рисунке представлено событие $D = A \cup B \cup C$ в виде заштрихованной области. Если события несовместны, то $C = A \cup B$ есть событие появления только одного из них или A или B. Заметим, что $A \cup A = A$. Приведем пример построения сложного события из более простых. Пусть произведено 4 выстрела. Обозначим события: A_0 – все промахи; A_1 – одно попадание в 4 выстрелах; A_2 – два попадания; A_3 – три попадания; A_4 – четыре попадания в 4 выстрелах. Тогда сложные события конструируются как

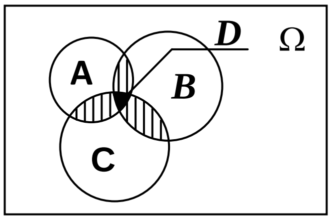
– не более двух попаданий $B = A_0 + A_1 + A_2$

– не менее трех попаданий $C = A_3 + A_4$

– хотя бы два попадания $D = A_2 + A_3 + A_4$

– хотя бы одно попадание $F = A_1 + A_2 + A_3 + A_4$.

Пересечением двух событий A и B называется событие C, состоящее в совместном выполнении событий A и B. Логическое умножение – это пересечение множеств A и B. Обозначается $A \cap B$



или $A \cdot B = C$. На диаграмме Венна произведение событий A и B интерпретируется, как область пересечения кругов Эйлера. На рисунке $A \cap B$ представлена заштрихованной областью. Поясним на примере. Пусть $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $B = \{4, 5, 6, 7\}$, то $A \cap B = \{4, 5, 6\}$. Можно обобщить на произведение нескольких событий, например трех. Произведение трех событий A, B и C есть событие, состоящее в их совместном появлении $D = A \cap B \cap C$. На рисунке D представляет собой область пересечения совместных событий A, B и С. Рассмотрим несколько примеров.

1. Из колоды карт вынимают наугад карту. Если это валет, то обозначим событием A. Если это карта бубновой масти, то обозначим событие B. Тогда событие $A \cap B$ – это не что иное, как бубновый валет.

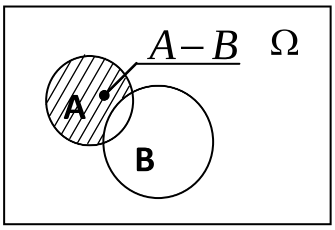
2**.** По мишени сделано три выстрела. Составить событие B, состоящее в том, что после трех выстрелов в мишени есть хотя бы одно попадание.

Решение. Обозначим элементарные события: A_1 – попадание при первом выстреле, A_2 – попадание при втором выстреле, A_3 – попадание при третьем выстреле, $\overline{A}_1$ – промах при первом выстреле, $\overline{A}_2$ – промах при втором выстреле и $\overline{A}_3$ – промах при третьем выстреле. Тогда событие хотя бы одного попадания в мишень можно записать в виде $B = B_1 + B_2 + B_3$, где B_1 событие одного попадания в трех выстрелах, а B_2 и B_3 – события, что в мишень попали два и три раза, соответственно. События B_1, B_2 и B_3 можно выразить через элементарные события следующим образом

$$B_1 = A_1\overline{A}_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1A_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1\overline{A}_2A_3 \ ,$$
$$B_2 = A_1A_2\overline{A}_3 + A_1\overline{A}_2A_3 + \overline{A}_1A_2A_3 \ ,$$
$$B_3 = A_1A_2A_3 \ .$$

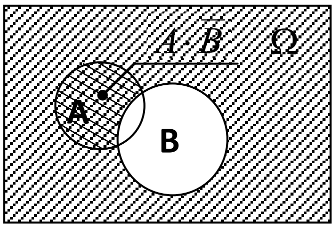
Заметим, что промах при трех выстрелах описывается $B_0 = \overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3$. Заметим так же, что события B_0, B_1, B_2, B_3 несовместны и образуют полную группу событий.

3**.** Стреляют по воздушному шарику. При попадании он лопается. Составить событие B, заключающееся в том, что по шарику стреляли три раза и он лопнул. Кроме того, составить событие C, состоящее в том, что по шарику стреляли не более трех раз прежде чем он лопнул.



Решение. Как и в предыдущей задаче обозначим A_1, A_2 и A_3 – элементарные события попадания в шарик при первом, втором и третьем выстреле, а $\overline{A}_1$, $\overline{A}_2$ и $\overline{A}_3$ – соответствующие промахи. Тогда $B = \overline{A}_1\overline{A}_2A_3$, а событие $C = A_1 + \overline{A}_1A_2 + \overline{A}_1\overline{A}_2A_3$.

Заметим, что наряду с операциями сложения и умножения можно ввести операцию ***логического вычитания (исключения)*** $A - B = C$ или $A/B = C$, состоящее в том, что происходит событие A, а событие B не происходит. Однако, эта операция не самостоятельная и может быть заменена операцией умножения событий $A \cdot \overline{B}$. Таким образом, выполняется соотношение $A - B = A \cdot \overline{B}$.



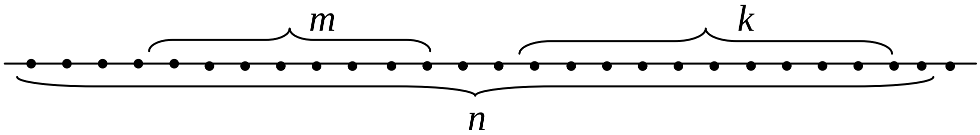
Действительно, это видно из сравнения двух диаграмм Венна. Здесь событие $A \cdot \overline{B}$ является пересечением событий A и $\overline{B}$ и соответствующая область показана на диаграмме двойной штриховкой.

Итак, давайте перейдем от алгебры событий к алгебре вероятностей и сформулируем две теоремы.

Теорема сложения вероятностей. Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий

$$P(A+B) = P(A) + P(B).$$

Докажем это, представив элементарные события точками на линии



Пусть событию A благоприятны m – элементарных событий, то есть соответствуют m точек. Событию B благоприятны k – элементарных и соответствуют k точек на линии. Поскольку события несовместны, то подмножества m и k точек не пересекаются. Тогда, очевидно, событию $A+B$ благоприятны $m+k$ элементарных событий, то есть $m+k$ точек. Так как $P(A) = \frac{m}{n}$ и $P(B) = \frac{k}{n}$, то

$$P(A+B) = \frac{m+k}{n} = \frac{m}{n} + \frac{k}{n} = P(A) + P(B).$$

Следствие 1. Можно обобщить формулу на произвольное число несовместных событий

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

Следствие 2. Если несовместные события A_i образуют полную группу событий $\sum_{i=1}^{n} P(A_i) = \Omega$, то есть одно из них обязательно реализуется, то выполняется $P(\Omega) = 1$ и отсюда следует $P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) = 1$,

$$\sum_{i=1}^{n} P(A_i) = 1.$$

Таким образом, сумма вероятностей от событий, образующих полную группу, равна единице. Это правило имеет большое значение для контроля правильности решения задач по теории вероятностей.

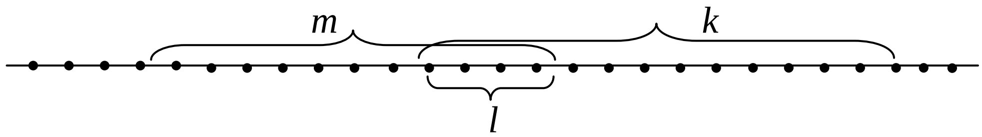
Следствие 3. *Если* A *и* $\overline{A}$ *противоположные события, то* $P(A)+P(\overline{A})=1$. *Отсюда можно получить простую и удобную формулу для подсчета вероятности противоположного события* $P(A)=1-P(\overline{A})$.

Например, сделано четыре выстрела по мишени. Обозначим A *–событие хотя бы одного попадания, тогда* $\overline{A}$ *будет событием, описывающим промах при четырех выстрелах* $\overline{A}=\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3\overline{A}_4$, *где* A_i *есть события попадания в мишень при одном из выстрелов. Тогда вероятность хотя бы одного попадания в мишень будет определяться* $P(A)=1-P(\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3\overline{A}_4)$.

Следствие 4. *Вероятность появления хотя бы одного из совместных событий равна сумме их вероятностей без вероятности их совместного появления (*правило сложения совместных событий*)*

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

Докажем это, представив элементарные события точками на линии.

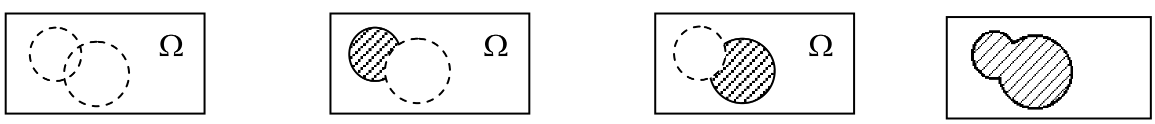


Всего на линии n *точек. Пусть событию* A *благоприятны* m *элементарных событий, то есть соответствуют* m *точек, а событию* B *соответствуют* k *точек. Событию* AB *благоприятны* l *элементарных событий и стало быть соответствуют* l *точек. Тогда событию* $A+B$ *благоприятны* $m+k-l$ *элементарных событий. Отсюда непосредственно следует*

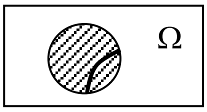
$$P(A+B)=\frac{m+k-l}{n}=\frac{m}{n}+\frac{k}{n}-\frac{l}{n}=P(A)+P(B)-P(AB).$$

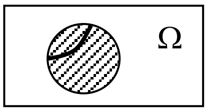
Докажем это же другим способом с помощью диаграмм Венна. Используем теорему о сложении вероятностей несовместных событий. Для этого сконструируем из данных совместных событий несовместные –

AB $\quad A\overline{B}=A-B \quad \overline{A}B=B-A$, *где* $A+B$.



Видно, что при сложении событий AB, $A\overline{B}$ *и* $\overline{A}B$ *получаем событие* $A+B$. *Заметим, что* $A=A\overline{B}+AB$ *и* $B=AB+\overline{A}B$

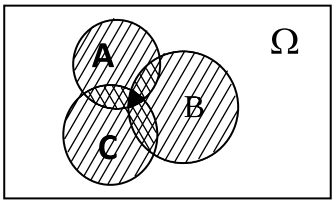




Поскольку события AB, $A\overline{B}$ *и* $\overline{A}B$ *несовместны, то по теореме сложения вероятностей несовместных событий получаем* $P(A+B)=P(\overline{A}B)+P(A\overline{B})+P(AB)$ *и исключаем* $P(\overline{A}B)=P(B)-P(AB)$ *и* $P(A\overline{B})=P(A)-P(AB)$. *Получаем* $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$, *что и требовалось доказать.*

Следствие 5. *Обобщим доказанную теорему на случай трех и более совместных событий.*

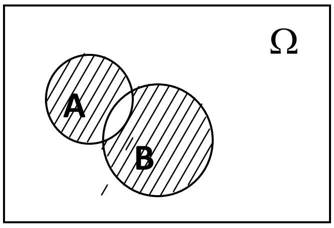
$$P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC).$$



Здесь область ABC *добавляется, поскольку необходимо, что бы все элементы множеств* A, B *и* C *входили только один раз. Для но- сти суммы нескольких совместных событий можно получить*

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i)-\sum_{i<j}^{n} P(A_iA_j)+\sum_{i<j<k}^{n} P(A_iA_jA_k)-\cdots(-1)^{n-1}P(A_1A_2\ldots A_n).$$

Следствие 6. *Вероятность появления только одного из совместных событий (или* A *или* B*) можно определить как*



$$P=P(A+B)-P(AB)=P(A)+P(B)-2P(AB).$$

Пример. *Вероятность попадания в цель из первого и второго орудия равна* $P=0{,}7$ *и* $P=0{,}8$, *соответственно. Найти вероятность хотя бы одного попадания в цель при одновременном залпе из двух орудий. Кроме того, найти вероятность одного попадания при залпе.*

Решение. Поскольку стрельба из двух орудий независима, то, как покажем далее, $P(A_1\cdot A_2)=P(A_1)\cdot P(A_2)=P_1P_2$. *Тогда вероятность хотя бы одного попадания будет определяться*

$$P(A_1+A_2)=P_1+P_2-P_1P_2=0{,}7+0{,}8-0{,}7\cdot 0{,}8=0{,}94.$$

Вероятность же одного попадания определяется

$$P=P_1+P_2-2P_1P_2=0{,}7+0{,}8-2\cdot 0{,}7\cdot 0{,}8=0{,}38.$$

Теорема умножения вероятностей. *Прежде, чем ее сформулировать, введем два новых понятия о зависимых и независимых событиях.*

Событие A *называют* **независимым (зависимым)** *от события* B, *если вероятность события* A *не зависит (зависит) от того, произошло событие* B *или нет. События* A *и* B, *как правило, относятся к разным временным интервалам и интерпретируются как звенья причинно-следственной цепочки. Одно из событий предшествует другому. Например, в урне 5 белых и 3 черных шара. Наугад вынимают последовательно один за другим два шара. Вероятность того, что первый вынутый шар белый будет* $P(A)=\frac{5}{8}$. *Вероятность же того, что второй шар будет белый равна* $P(B)=\frac{4}{7}$, *так как в урне после извлечения первого шара их осталось только 7. Если же первый шар сразу вернуть в урну, то вероятность того, что второй, вынутый наугад шар белый, будет* $P(B)=\frac{5}{8}$. *Таким образом, вероятность события* B *существенным образом зависит от уже произошедшего события* A. *Вероятность таких событий определяется как условная вероятность и обозначается* $P(B/A)$ *или* $P_A(B)$.

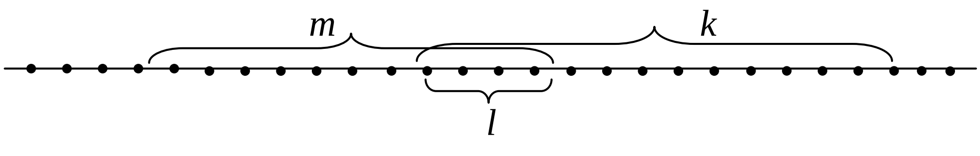
Условной вероятностью события B *называют вероятность события* B, *вычисленную при условии того, что имело место событие* A. *Условие независимости событий* A *и* B *будет определяться* $P(B/A)=P(B)$. *Заметим, что если события* A *и* B *независимы, то они независимы попарно* $P(A/B)=P(A)$.

Теорема. *Вероятность произведения двух совместных событий равна произведению вероятности одного из событий на условную вероятность другого при условии, что первое имело место.*

$$P(AB)=P(A)\cdot P(B/A)=P(B)\cdot P(A/B).$$

Заметим, что для несовместных событий $P(AB)=0$, *так как* $AB=0$.

Доказательство. Представим на линии точками все исходы опыта.



Всего точек n. *Событию* A *соответствует* m *точек, событию* B – k *точек, а событию* AB *соответствует* l *точек. Пусть событие* A *произошло, тогда событию* B *будет благоприятно уже не* k *элементов множества точек, а только* l *из реализованных* m *элементов. Образуем произведение*

$$P(A)\cdot P(B/A)=\frac{m}{n}\cdot\frac{l}{m}=\frac{l}{n}=P(AB),$$

что и требовалось доказать.

Следствие 1. *Если события* A *и* B *независимы, то теорема упрощается и гласит – вероятность произведения независимых событий равна произведению их вероятностей,* $P(AB) = P(A)\cdot P(B)$. *Можно легко обобщить на произведение* n *независимых событий*

$$P\left(\prod_{i=1}^{n} A_i\right) = \prod_{i=1}^{n} P(A_i).$$

Следствие 2. *Обобщим формулу на* n *зависимых событий*

$$P(A_1 A_2 A_3 \ldots A_n) = P(A_1)\cdot P(A_2/A_1)\cdot P(A_3/A_1A_2)\cdots P(A_n/A_1A_2A_3\ldots A_{n-1}).$$

Рассмотрим несколько примеров на использование теорем сложения и умножения вероятностей.

1. *Студент знает 20 вопросов из 25. Для получения зачета необходимо ответить на три вопроса. Найти вероятность получения зачета.*

Решение. Событие получения зачета $\mathrm{A} = A_1A_2A_3$, *где* A_i, $i=\overline{1,3}$, *событие одного правильного ответа. Тогда*

$$P(A) = P(A_1A_2A_3) = P(A_1)\cdot P(A_2/A_1)\cdot P(A_3/A_1A_2) = \frac{20}{25}\cdot\frac{19}{24}\cdot\frac{18}{23} = 0{,}49.$$

Эту же задачу можно решить с помощью комбинаторики, поскольку она не очень сложная. $P(A) = \dfrac{C_{20}^3\cdot C_5^0}{C_{25}^3} = 0{,}49$.

Заметим, что вероятность получения зачета после 4 правильных ответа на 4 вопроса будет $P(A) = 0{,}37$, *а на 5 из 5* $P(A) = 0{,}3$.

2. *В урне 10 белых и 5 черных шаров. Из урны наугад вынимают последовательно 3 шара. Найти вероятность, что а) все они белые, б) первый белый, а остальные черные.*

Решение. *а)* $P(A_1A_2A_3) = \dfrac{10}{15}\cdot\dfrac{9}{14}\cdot\dfrac{8}{13} = \dfrac{3\cdot 8}{7\cdot 13}$.

С помощью комбинаторики $P = \dfrac{C_{10}^3\cdot C_5^0}{C_{15}^3} = \dfrac{3\cdot 8}{7\cdot 13}$.

б) $P(A_1\overline{A}_2\overline{A}_3) = \dfrac{10}{15}\cdot\dfrac{5}{14}\cdot\dfrac{4}{13} = \dfrac{5\cdot 4}{21\cdot 13}$.

С помощью комбинаторики $P = \dfrac{C_{10}^1\cdot C_5^2}{C_{15}^3} = \dfrac{5\cdot 4}{21\cdot 13}$.

3. *В механизме три одинаковых узла. Работа механизма нарушается, если при сборке поставлено три бракованных узла. У сборщика 15 узлов из них 5 бракованных. Найти вероятность отказа механизма.*

Решение. *Обозначим событие* B – *отказ механизма. Построим* B *из элементарных событий* $B = A_1A_2A_3$, *где* A_1 *– событие отказа первого узла и так далее. Тогда* $P(B) = P(A_1)\cdot P(A_2/A_1)\cdot P(A_3/A_1A_2) = \frac{5}{15}\cdot\frac{4}{14}\cdot\frac{3}{13} = \frac{2}{91}$.

С помощью комбинаторики $P(B) = \frac{C_5^3\cdot C_{10}^0}{C_{15}^3} = \frac{2}{91}$.

4. Произведено три выстрела по мишени. Вероятности попаданий равны $P_1 = 0{,}4$; $P_2 = 0{,}5$; $P_3 = 0{,}7$. *Найти вероятность а) одного попадания после трех выстрелов, б) хотя бы одного попадания, в) промаха в трех выстрелах.*

Решение. *Построим алгебру событий. Событие* A *– попадание при первом выстреле* $(P(A_1) = 0{,}4$, *а событие* $\overline{A}_1$ *– промах при первом выстреле* $P(\overline{A}_1) = 1 - P(A_1) = 0{,}6)$. *Аналогично для второго и третьего выстрелов. Тогда событие одного попадания в мишень после трех выстрелов* $A = A_1\overline{A}_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1A_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1\overline{A}_2A_3$. *Вероятность одного попадания*

а) $P(A) = P_1q_2q_3 + q_1P_2q_3 + q_1q_2P_3 = 0{,}36$.

б) Построим алгебру события D *– хотя бы одного попадания* $D = A + B + C$, *где* $B = A_1A_2\overline{A}_3 + A_1\overline{A}_2A_3 + \overline{A}_1A_2A_3$ *– событие двух попаданий в трех выстрелах. Событие трех попаданий в трех выстрелах обозначено* $C = A_1A_2A_3$. *Легко подсчитать, что* $P(C) = P_1P_2P_3 = 0{,}14$, *а* $P(B) = P_1P_2q_3 + P_1q_2P_3 + q_1P_2P_3 = 0{,}41$. *Тогда вероятность хотя бы одного попадания* $P(D) = 0{,}91$.

в) Вероятность промаха при трех выстрелах $P(\overline{D}) = q_1q_2q_3 = 0{,}09$. *Видно, что события* A, B, C *и* D *образуют полную группу*

$$P(A + B + C + \overline{D}) = 1.$$

Рассмотрим подробнее вычисление вероятности появления хотя бы одного события. На практике часто возникают задачи об определении вероятности появления хотя бы одного из нескольких независимых событий. В этом случае удобно пользоваться следующей теоремой.

Теорема. *Вероятность появления хотя бы одного из независимых событий* $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ *равна разности между единицей и произведением вероятностей событий противоположных данным.*

$$P(A) = 1 - q_1q_2q_3\cdots q_n\ ,$$

где $P(A_1) = P_1$ *и* $P(\overline{A}_1) = q_1$, $P(A_2) = P_2$ *и* $P(\overline{A}_2) = q_2$, *и так далее. Причем выполняется* $P(A_i) + P(\overline{A}_i) = 1\ \ (i = \overline{1,n})$.

Доказательство. Событие A *появления хотя бы одного события из* $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ *строится следующим образом*

$$A = A_1\overline{A}_2\overline{A}_3 \ldots \overline{A}_n + \overline{A}_1 A_2\overline{A}_3 \ldots \overline{A}_n + \overline{A}_1\overline{A}_2 A_3 \ldots \overline{A}_n + \overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3 \ldots A_n + \cdots$$

$$\cdots + A_1 A_2\overline{A}_3 \ldots \overline{A}_n + \overline{A}_1 A_2 A_3 \ldots \overline{A}_n + \overline{A}_1\overline{A}_2 A_3 A_4 \ldots A_n + \cdots + A_1 A_2 A_3 \ldots A_n .$$

Вероятность такого события найти просто технически трудно. Можно решить по-другому и значительно проще. Образуем событие $\overline{A}$ *– ни одного из событий* $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ *не произошло. Очевидно,* $P(A) + P(\overline{A}) = 1$*. Составим событие* $\overline{A} = \overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3\overline{A}_4 \ldots \overline{A}_n$*. Тогда следует*

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)\cdots P(\overline{A}_n) = 1 - q_1 q_2 \cdots q_n .$$

В частном случае, когда $q_1 = q_2 = q_3 = \cdots = q_n = q$*, то вероятность появления хотя бы одного из равновозможных событий определится* $P(A) = 1 - q^n$.

Примеры.

1**.** *Два орудия стреляют залпом по мишени. Вероятность попадания орудий* $P = 0{,}7$ *и* $P = 0{,}8$*, соответственно. Найти вероятность хотя бы одного попадания. Напомним, что мы решали эту задачу. Покажем другие способы решения.*

Решение. *а) Событие* A_1 *и* A_2 *попадания в мишень при стрельбе залпом независимы, но совместны, поэтому вероятность хотя бы одного попадания определится* $P(A) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 A_2) = P_1 + P_2 - P_1 P_2 = 0{,}94$.

б) Образуем несовместные независимые события

$B = A_1\overline{A}_2 + \overline{A}_1 A_2$ *– событие одного попадания*

$C = A_1 A_2$ *– событие двух попаданий*

Тогда $P(A) = P(B + C) = P_1 q_2 + q_1 P_2 + P_1 P_2 = 0{,}94$.

в) Образуем событие $\overline{A} = \overline{A}_1\overline{A}_2$ *– оба орудия сделали промах. Тогда* $P(A) = 1 - P(A) = 1 - q_1 q_2 = 1 - 0{,}3 \cdot 0{,}2 = 0{,}94$.

2. Три электрические лампочки последовательно включены в цепь. Вероятность того, что одна из лампочек перегорит, если напряжение в сети превысит номинальное, равно 0,6. Найти вероятность того, что при повышенном напряжении в сети, тока в цепи не будет.

Решение. Пусть A *– событие, что хотя бы одна из лампочек перегорит. Тогда* $\overline{A} = \overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3$*. По условию* $P(\overline{A}_i) = 0{,}4$ $\left(i = \overline{1,3}\right)$*. Получаем искомую вероятность* $P(A) = 1 - q^3 = 0{,}936$.

1.3. Случайные величины. Дискретные и непрерывные случайные величины. Законы распределения случайных величин. Ряд распределения. Функция и плотность распределения случайной величины. Метод моментов.

Случайной величиной *называется величина, которая в результате опыта может принять то или иное значение, неизвестно заранее какое именно. Случайная величина сопоставляется случайному событию. Понятие случайной величины играет важную роль в теории вероятностей. Если классическая теория вероятностей оперирует с событиями, то современная теория вероятностей и математическая статистика оперирует только со случайными величинами.*

Обозначаются случайные величины как X, У, Z, *..., а их значения как* x, y, z, *... Приведем пример типичного приема перехода от события* A *к случайной величине, характеризующей это событие. Пусть производится опыт, в результате которого может появиться или не появиться событие* A. *Если ввести индикатор случайного события, сопоставив появлению события* A *единицу (1), а не появлению с события* A *ноль (0), то общее число появлений; события* A *в опытах равно сумме характеристик этого события во всех опытах*

$$P^* = \frac{m}{n} = \left(\underbrace{1+1+\cdots+1}_{m} + \underbrace{0+0+\cdots+0}_{n-m} \right) \Big/ n .$$

Заметим, что мы сразу определили частоту события A.

Случайные величины бывают **дискретными** *и* **непрерывными**. *Примером непрерывной случайной величины может быть время безотказной работы радиолампы, ошибка взвешивания тела на весах, абсцисса точки попадания математической точки в некоторый интервал и так далее. В этих примерах возможные значения случайной величины не отделены друг от друга. Они непрерывно заполняют некоторый промежуток. Число возможных значений непрерывной случайной величины бесконечно. Примером дискретной случайной величины может служить число попаданий в мишень при трех выстрелах* $-0, 1, 2, 3$.

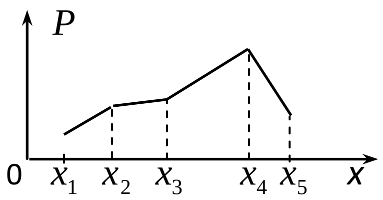
Рассмотрим основные формы закона распределения для случайной величины. **Законом распределения случайной величины** *называют всякое соотношение, устанавливающее связь между возможными значениями случайной величины и соответствующими им вероятностями. Случайная величина будет полностью описана с вероятностной точки зрения, если мы зададим закон распределения вероятностей.*

Существуют три формы законов распределения:

1. *Ряд распределения для дискретных случайных величин.*
2. *Функция распределения как для дискретных, так и для непрерывных случайных величин.*
3. *Плотность функции распределения только непрерывных случайных величин.*

***1.* Ряд распределения.** *Рассмотрим прерывную случайную величину* X, *которая принимает значения* $x_1, x_2, \cdots, x_n$ *с возможными значениями вероятности* $P(x_1) = p_1$, $P(x_2) = p_2, \cdots, P(x_n) = p_n$. *События, которые характеризуются* x_i *– несовместны и образуют полную группу, поэтому* $\sum_1^n P(x_i) = 1$. *Ряд распределения оформляется в виде таблицы или на плоскости* (x, P) *виде многоугольника.*

x_i	x_1	x_2		x_n
P_i	p_1	p_2		p_n



Пример. *Стрелок производит три выстрела. Вероятность попадания в мишень при каждом выстреле равна 0,4. За каждое попадание стрелку засчитывается 5 очков. Построить ряд распределения числа взбитых очков.*

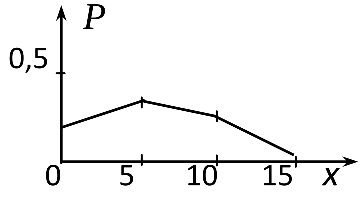
Решение. *В данном случае распределение биноминальное. Случайная величина набранных очков принимает следующие значения* X*:* $x_1 = 0$*;* $x_2 = 5$*;* $x_3 = 10$*;* $x_4 = 15$. *Вероятности их получения* $P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}$ *:*

$$p_1 = P_3(0) = 0{,}216;\; p_2 = P_3(1) = 0{,}432;\; p_3 = P_3(2) = 0{,}288;\; p_4 = P_3(3) = 0{,}06.$$

Составим ряд распределения и построим многоугольник распределения

x_i	0	5	10	15
P_i	0,216	0,432	0,288	0,06

, $\sum_0^3 P_i = 1$.



***2.* Функция распределения**. *Для количественной характеристики непрерывных и прерывных случайных величин удобно пользоваться вероятностью события* $X < x$. *Таким образом, суммируются все предыдущие вероятности. Итак, функция распределения определяется как вероятность события* $X < x$

$$F(x) \equiv P(X < x) = \sum_{X < x_i} P(x_i) \ .$$

Свойства функции распределения:

– *функция* $F(x)$ *есть неубывающая функция своего аргумента. То есть* $F(x_2) \geq F(x_1)$ *для* $x_2 > x_1$.

– $F(-\infty) = 0$. *Характеризует невозможное событие.*

– $F(\infty) = 1$. *Достоверное событие.*

Пример. *Дискретная случайная величина задана рядом распределения. Построить функцию распределения.*

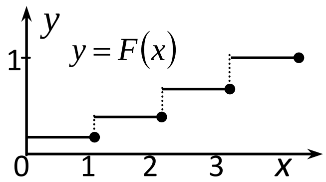
x_i				
P_i	,1	,2	,4	,3

Решение. $0 < x \leq 1, \quad F(x) = 0{,}1$

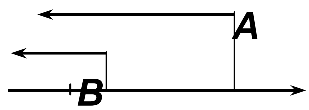
$1 < x \leq 2, \quad F(x) = 0{,}3$

$2 < x \leq 3, \quad F(x) = 0{,}7$

$x > 3, \qquad F(x) = 1$

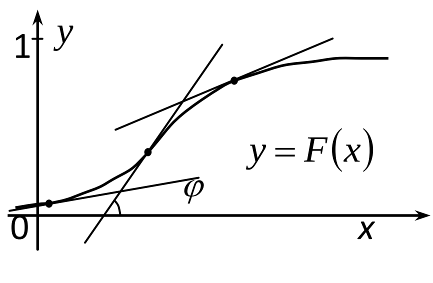


Найдем вероятность попадания случайной величины в заданный интервал оси x, $\alpha < x \leq \beta$.



Свяжем вероятность этого события с функцией распределения. Назовем событием A – *попадание в* $x \leq \beta$, *событием* B – $x < \alpha$ *и событием* C $-\alpha \leq x < \beta$. *Видим, что* $A = B + C$. *События* B *и* C *несовместны. Тогда следует* $P(A) = P(B + C)$, *отсюда* $P(A) = P(B) + P(C)$, *а так как по определению* $P(x < \beta) = F(\beta)$, *а* $P(x < \alpha) = F(\alpha)$, *то* $P(\alpha < x \leq \beta) = F(\beta) - F(\alpha)$. *Вероятность попадания случайной величины в заданный участок равна приращению функции распределения на этом участке.*

Заметим, что для непрерывной функции при $\alpha \to \beta$, $P(\alpha \leq x < \beta) \to 0$. *Таким образом, нулевой вероятностью могут обладать и достоверные события. Кажущийся парадокс легко объяснить. Например, масса тела распределена на участке числовой оси. Очевидно, что в одной точке этого участка масса равна нулю. Понятие массы может относиться только к конечному интервалу. Тоже самое и для вероятности.*



3. Плотность распределения *или дифференциальная функция распределения. Иногда называют просто* – **плотность вероятности**. *Определяется только для непрерывных случайных величин. Итак, пусть* $F(x)$ *непрерывна и дифференцируема (гладкая). Вычислим ве-*

роятность попадания случайной величины X *в интервала* Δx

$$P(x < X \le x + \Delta x) = \Delta P(x) = F(x + \Delta x) - F(x),$$

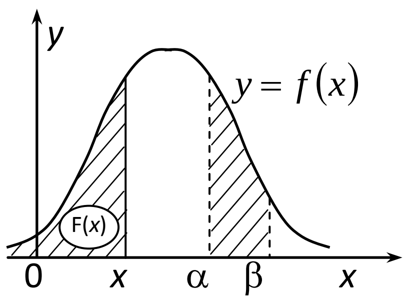
$$F'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta P(x)}{\Delta x} \equiv f(x)$$

$f(x)$ *и есть плотность вероятности.*

Отсюда следует $P(\alpha \le x < \beta) = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x)dx.$

Поскольку $p \le 1$, *то должно выполняться*

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1.$$



Таким образом, вероятность попадания X *в интервал* $\alpha < x \le \beta$ *определяется*

$$P(\alpha < x \le \beta) = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = F(\beta) - F(\alpha).$$

Функция распределения интерпретируется как площадь под линией $y = f(x)$, *расположенная левее* x, $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(x)dx$.

Перечислим основные свойства $f(x)$:

– $f(x) \ge 0$, *поскольку* $F(x)$ *неубывающая функция,*

– $f(\pm\infty) = 0$,

– *если* $F(x)$ *безразмерна, то* $[f(x)] = 1/[x]$, *то есть имеет размерность обратную размерности случайной величины,*

– $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$, *так как* $F(\infty) = 1$.

Перейдем к моментному описанию случайных величин. Для этого введем числовые характеристики случайной величины. Закон распределения случайной величины является исчерпывающей характеристикой и полностью ее определяет. Однако во многих практических задачах удобнее и проще пользоваться набором параметров, характеризующих распределение случайной величины. **Числовыми характеристиками случайной величины** *называют параметры, характеризующие самые существенные черты закона распределения этой величины. Очевидно, что самым первым параметром является среднее значение случайной величины, около которого и группируются ее значения.*

Математическое ожидание *случайной величины – это ее среднее значение, которое определяется как средневзвешенное или среднеарифметическое. Пусть* X *принимает значения* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *с вероятностями* $P_1, P_2, \ldots, P_n$. *Тогда математическое ожидание*

$$M[x] \equiv m_x = \left(\sum_{1}^{n} x_i P_i \right) \Big/ \sum_{1}^{n} P_i = \sum_{1}^{n} x_i P_i \,, \qquad \sum_{1}^{n} P_i = 1$$

является суммой произведений всех возможных значений случайной величины на соответствующие им вероятности. Отметим, что это постоянная величина. Для непрерывных случайных величин математическое ожидание определяется как несобственный интеграл I рода

$$m_x = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx.$$

Обратим внимание на то, что математическое ожидание можно определить не у всех случайных величин, а только у тех, у которых сумма или интеграл сходятся. Заметим также, что аналогами математического ожидания могут являться мода и медиана. **Модой** *называется наибольшее вероятное значение случайной величины.* **Медианой** *называется такое значение случайной величины, при котором выполняется соотношение*

$$P(x < M_e) = P(x > M_e).$$

Моментное (приближенное) описание случайной величины широко используется в механике, физике, математической статистике и так далее. Моменты подразделяются на два вида:

– начальные моменты (приложены к началу координат),

– центральные моменты.

Начальным моментом порядка s *называется математическое ожидание степени* s *этой случайной величины и определяется как*

$$M[x^s] \equiv \alpha_s[x], \quad \begin{array}{l} \alpha_s[x] = \sum\limits_{1}^{n} x_i^s P_i \quad \text{– для дискретной,} \\ \alpha_s[x] = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^s f(x) dx \text{ – для непрерывной случайной величины.} \end{array}$$

Очевидно, что первый начальный момент и есть математическое ожидание $m_x = \alpha_1[x]$.

Центральным моментом порядка s *случайной величины* X *называется математическое ожидание* s *степени соответствующей центрированной величине* $\overset{\circ}{x} = x - m_x$

$$M\left[\overset{\circ}{x}{}^{s}\right] \equiv \mu_s[x], \qquad \begin{array}{ll} \mu_s[x] = \sum_{1}^{n} \overset{\circ}{x}{}_i^{s} P_i & \text{– для дискретной,} \\ \mu_s[x] = \int_{-\infty}^{\infty} \overset{\circ}{x}{}^{s} f(x)dx & \text{– для непрерывной величины.} \end{array}$$

Очевидно, что центральный момент первого порядка равен нулю:

$$\mu_1[x] = M\left[\overset{\circ}{x}\right] = \sum_{1}^{n}(x_i - m_x)P_i = \sum_{1}^{n} x_i P_i - m_x \sum_{1}^{n} P_i = m_x - m_x = 0.$$

Рассмотрим второй центральный момент, который называется **дисперсией** *и играет важную роль в статистике.*

$$D_x \equiv \mu_2[x] = \sum_{1}^{n}(x_i - m_x)^2 P_i \quad \textit{для дискретных случайных величин;}$$

$$D_x = \int_{-\infty}^{\infty}(x - m_x)^2 f(x)dx \quad \textit{для непрерывных случайных величин.}$$

Величина дисперсии характеризует разбросанность значений X *вокруг* m_x. *На примере дискретной случайной величины выразим дисперсию через начальные моменты*

$$D_x = \sum_{1}^{n}(x_i - m_x)^2 P_i = \sum_{1}^{n} x_i^2 P_i - 2m_x \sum_{1}^{n} x_i P_i + m_x^2 \sum_{1}^{n} P_i =$$

$$= \sum_{1}^{n} x_i^2 P_i - 2m_x^2 + m_x^2 = \alpha_2[x] - \alpha_1^2[x].$$

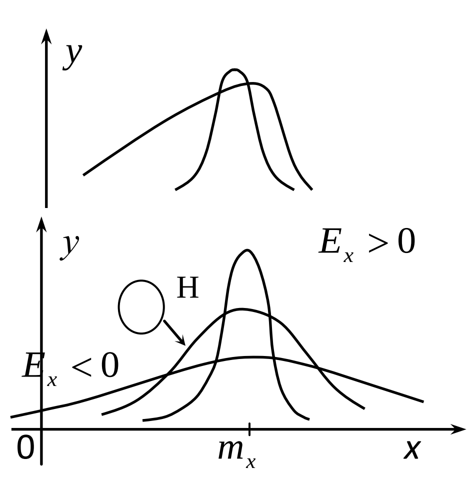
$$D_x = \alpha_2[x] - \alpha_1^2[x] = M\left[x^2\right] - M^2[x].$$

Эта формула удобна для практического подсчета значения дисперсии. Другой характеристикой, связанной с дисперсией, является **среднеквадратичное отклонение**

$$\sigma_x = \sqrt{D_x}\,,$$

которое имеет размерность случайной величины и может быть наглядно представлено графически.

Для более подробного и точного описания закона распределения случайной величины применяют моменты и более высокого порядка. Центральный момент третьего порядка называют **асимметрией***, которая служит характеристикой симметрии распределения случайной величины относитель-*



но точки $x = m_x$*:* $$S_k = \frac{\mu_3}{\sigma_x^3}.$$

Заметим, что все нечетные моменты характеризуют асимметрию распределения. Величина асимметрии, представленная в такой форме, является величиной безразмерной. Центральный момент четвертого порядка называется **эксцессом**

$$E_x = \frac{\mu_4}{\sigma_x^4} - 3$$

и служит характеристикой островершинности или крутости распределения случайной величины. Значение 3 *в формуле характерно для нормального закона распределения, для которого* $E_x = 0$.

Таким образом, закон распределения заменяют на некоторую аппроксимационную кривую $f(x)$, *более простую по форме с переменными несколькими параметрами. Подбирая эти параметры – числовые характеристики случайной величины, можно приближенно отразить особенности закона распределения.*

Рассмотрим свойства математического ожидания и дисперсии:

– $M[c] = c$. *Действительно, будем рассматривать* c *как дискретную величину, у которой одно значение принимается с вероятностью* $P = 1$. $M[c] = c \cdot 1 = c$. *Для непрерывной случайной величины*

$$M[c] = \int_{-\infty}^{\infty} c \cdot f(x)dx = c \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = c \cdot$$

$M[cx] = cM[x]$. *Обусловлено свойствами сумм и интегралов.*

$M\left[\overset{\circ}{x}\right] = 0$. $D[c] = 0$. *Так как* $D[c] = M\left[(c - m_c)^2\right] = M\left[(c - c)^2\right] = M[0] = 0$.

$D[cx] = c^2 D[x]$. *Действительно,* $D[cx] = M\left[(cx - M[cx])^2\right] =$

$$= M\left[c^2 (x - m_x)^2\right] = c^2 M\left[(x - m_x)^2\right] = c^2 D[x].$$

1.4. Математическая статистика. Задачи математической статистики. Генеральная совокупность объектов и выборка. Вариационный ряд. Эмпирическая функция распределения. Статистический ряд. Гистограмма

Как уже отмечалось ранее, теория вероятностей есть набор косвенных методов нахождения вероятностей сложных событий, позволяющий свести эксперимент к минимуму. Однако эксперимент ни в коем случае не исключается полностью. Получение новых данных об исследуемом явлении возможно только в результате проведения экспериментов. Возникает проблема получения и обработки данных эксперимента, того первичного материала, на кото-

ром в дальнейшем строятся какие-либо гипотезы и делаются какие-либо выводы.

Предметом математической статистики как раз и является разработка методов регистрации, описания и анализа экспериментальных данных, получаемых в результате наблюдения массовых случайных явлений. Теория, вероятностей и математическая статистика взаимно дополняют друг друга, так как последняя базируется на основных теоремах теории вероятностей, а та в свою очередь использует данные математической статистики для получения вероятностей этих событий.

Математической статистикой называют раздел математики, занимающийся разработкой методов получения, описания и обработки опытных данных с целью изучения закономерностей случайных массовых явлений. Типичные задачи статистики сводятся к следующим.

1. Оценка закона распределения случайной величины X *на основе наблюдаемых данных* $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$. $F^*_{(x)} \xrightarrow{P} F(x)$.

2. Оценка неизвестных параметров известного распределения случайной величины X. *По данным* $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ *и при известном распределении оцениваются параметры* $\bar{x}, \sigma, \mathrm{As}, E_x$ *и т.д. Различают точечные и интервальные оценки для больших и малых выборок, соответственно. Существуют два метода получения точечных оценок – метод моментов и метод наибольшего правдоподобия.*

3. Задача о проверке статистических гипотез. Проверяется совместность выдвинутой гипотезы с наблюдаемыми данными. Гипотезы могут быть как о параметрах известного распределения, так и о виде неизвестного распределения. К этим задачам относится и дисперсионный и корреляционный анализ.

Введем основные понятия математической статистики.

Генеральной совокупностью *называется совокупность значений признака всех изделий (опытов, испытаний) данного типа. Такая совокупность характеризуется числом* N *изделий (опытов).*

Выборочной совокупностью *или* **выборкой** *называют совокупность случайно отобранных изделий из генеральной совокупности. Выборка характеризуется числом* n *изделий (опытов). Как правило, выполняется* $\mathrm{n} << N$. *По выборке определяют характеристики самой выборки, которые принимаются в качестве приближенных значений соответствующих значениям характеристик генеральной совокупности. Например, по небольшой партии изделий сделать вывод о качестве всей партии изделий. Выборка должна быть представительной или, как говорят, репрезентативной, то есть правильно отражать* *все особенности генеральной совокупности. Способы организации выборки делятся на требующие расчленения генеральной совокупности на части и не требующие этого. Выборки бывают повторные (отобранные изделия после проверки возвращаются в генеральную совокупность) и бесповторные.*

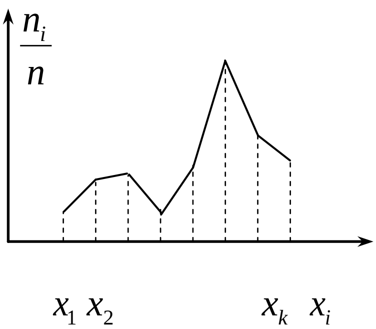
Рассмотрим основные способы описания и обработки статистических данных.

*1***. Простое статистическое распределение**. *Пусть измеряется случайная величина* X. *Ее значения наблюдаются:* $x_1 - n_1$ *раз,* $x_2 - n_2$ *раз, ... ,* $x_k - n_k$ *раз. Причем* $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$ *составляют весь объем выборки. Наблюдаемые значения* $x_1, x_2, \ldots, x_k$ *называют* **вариантами**. *Если варианты расположить в порядке их возрастания, то получим* **вариационный ряд**. *Число наблюдений* n_i *(кратность) называют частотами наблюдений случайной величины со значением* x_i. *Отношение данных частот к объему выборки* $n_i / n = P_i^*$ *называют относительными частотами.*

Простым статистическим распределением выборки называют перечень вариант и соответствующих им относительных частот. Оформляется в виде таблицы.

x_i	x_1	x_2	x_3		x_k
n_i	n_1	n_2	n_3		n_k

Простое статистическое распределение можно представить графически в виде ломаной линии. График называется полигоном относительных частот. На рисунке приведен пример некоторого простого статистического распределения.



*2.***Эмпирическая функция распределения**. *Статистической или эмпирической функцией распределения случайной величины называют закон изменения относительной частоты события* $X < x_i$ *в данном статистическом материале.*

$$F^*(x) = P^*(X < x_i) = \sum_{X < x_i} P^*(x_i) = \sum_{X < x_i} \frac{n_i}{n}.$$

Заметим, что в математической статистике все обозначения будут такими же, как в теории вероятностей только со звездочкой, а при их чтении необходимо добавлять слово "статистическое". Для того, чтобы построить

$F^*(x)$, *необходимо найти в выборке наименьшую варианту* x_1, *определить ее частоту и по мере возрастания* x_i *суммировать значения* n_i. *Заметим, что* $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$. *Таким образом,* $0 \le F^*(x) \le 1$. *Очевидно, что* $F^*(x)$ *независимо от того, какая случайная величина – непрерывная или дискретная, всегда представляет собой ступенчатую функцию. Распределение генеральной совокупности* $F(x)$ *называют теоретической функцией распределения* $F(x) = P(X < x)$. *Очевидно, по закону больших чисел, при увеличении объема выборки* $n \to N$ *относительная частота* P^*, *а значит, и* $F^*(x)$ *стремятся по вероятности к вероятности этого события и, соответственно, к теоретической функции распределения* $F^*(x) \xrightarrow{P} F(x)$.

Перечислим основные свойства эмпирической функции распределения:

- $0 \le F^*(x) \le 1$
- $F^*(x)$ *неубывающая функция своего аргумента (если* $x_2 > x_1$, *то* $F^*(x_2) \ge F^*(x_1)$*).*

Пример. *Построить эмпирическую функцию распределения* $F^*(x)$ *данным выборки.*

	x_i		*0*
	n_i		

, $\sum_{i=1}^{3} n_i = n = 60$.

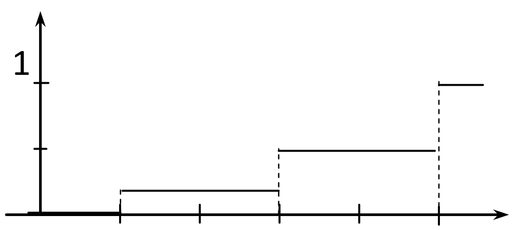
Решение: *Данные представлены простым статистическим рядом. Наименьшая варианта равна 2. Полагаем* $F^*(x) = 0$ *для* $x \le 2$. *Таким образом,*

$F^*(x) = 0$ *при* $x \le 2$ $F^*(x)$

$F^*(x) = 12/60$ *при* $2 < x \le 6$

$F^*(x) = 30/60$ *при* $6 < x \le 10$

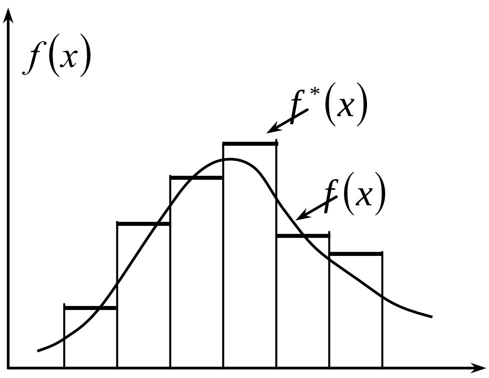
$F^*(x) = 1$ *при* $x > 10$



3. **Статистический ряд. Гистограмма**. *При большом числе наблюдений простой статистический ряд перестает быть удобной формой записи статистического материала. Он становится громоздким и мало наглядным. Поэтому такой ряд подвергается дополнительной обработке. Обычно данные группируют по признаку их попадания в какие-либо интервалы, разряды. Составляют таблицу, в которой указывают не саму случайную величину, а группу, куда ее те или иные значения входят. Соответственно, указывается отно-*

сительная частота появления наблюдаемых значений случайной величины, относящихся к этой группе.

Совокупность групп, на которые разбиваются результаты наблюдений, и относительных частот результатов наблюдений для каждой группы, называют статистическим рядом. Графическим изображением статистического ряда является **гистограмма**. *По оси абсцисс откладываются интервалы групп, и на каждом таком интервале строят прямоугольник высотой* n_i/nh, *где* h – *длина интервала. Его площадь будет равна относительной частоте. Площадь под всей гистограммой будет близка к единице. Таким образом, гистограмма представляет собой некоторую ступенчатую фигуру.*



Сама кривая гистограммы называется статистической (эмпирической) плотностью распределения, которая является аналогом плотности функции распределения случайной величины X. *Очевидно, что при* $n \to N$, $f^*(x) \xrightarrow{P} f(x)$ *по вероятности.*

Для построения гистограммы необходимо в статистическом материале выбрать 10-20 групп. Проще группировать наблюдаемые с одинаковым интервалом h, *хотя это и не обязательное условие. Значение относительной частоты в каждой группе (усреднение частоты в группе) делят на длину интервала (шаг) и откладывают по оси ординат в качестве высоты прямоугольника.*

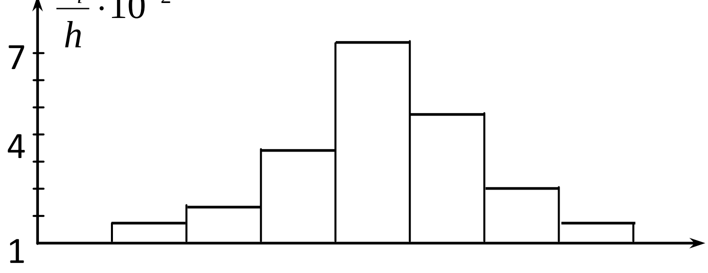
Пример. *Построить гистограмму для статистического ряда.*

Решение.

x_i	5-10	10-15	15-20	20-25	25-30	30-35	35-40
n_i	4	6	16	36	24	10	4
n_i/n	0,04	0,06	0,16	0,36	0,24	0,1	0,04
$n_i/n \cdot h$	0,008	0,012	0,032	0,072	0,048	0,02	0,008

$$\sum_{i=1} n_i = n = 100$$

$$5 \le x \le 40$$



Заметим, что зачастую совсем не надо знать закона распределения наблюдаемых, иногда достаточно знать их основные характеристики, например, m_x^* и D_x^* – статистических математического ожидания и дисперсии. Из предыдущего примера видно, что их подсчет представляет определенную трудность, поскольку требуется делать громоздкие вычисления. Вычисления можно значительно упростить, введя условные варианты

$$Z_i = \frac{x_i - a}{h},$$

где a *– ложный нуль и* h *– шаг интервала. Покажем на* **примере**, *как это делается. Пусть будет дан некоторый простой статистический ряд*

x_i	23,6	28,6	33,6	38,6	43,6
n_i	5	20	50	15	10

Выделим ложный нуль при наибольшем n_i, $a = 33{,}6$ *и перепишем данные в виде*

Z_i	-2	-1	0	1	2
n_i	5	20	50	15	10

В этом случае подсчет m_z^* *и* D_z^* *действительно прост*

$$m_z^* = \sum_1^5 Z_i P_i^* = 0{,}05 \quad и \quad D_z^* = \sum_1^5 Z_i^2 P_i - m_z^{*2} \approx 0{,}95.$$

Пересчет к старым вариантам осуществляется следующим образом

$$m_x^* = a + h \cdot m_z^*, \quad D_x^* = h^2 \cdot D_z^*.$$

Действительно $M^*[Z] = M^*[(x-a)/h] = \dfrac{m_x^* - a}{h}$ *и*

$$D^*[Z] = D^*[(x-a)/h] = D^*[(x-a)]/h^2 = M^*\left[x - a^2 - m_x^* + a^2\right]/h^2 = D_x^*/h^2.$$

Таким образом, для данного примера получаем: $m_x^* \approx 33{,}8$ *и* $D_x^* \approx 23{,}7$.

Итак, по наблюдаемым данным выборки $x_1, x_2, \ldots, x_n$, *где* $n << N$, *в результате их статистической обработке делаются выводы о законе распределения выборки, по которым, в свою очередь, делаются некоторые выводы о законе распределения генеральной совокупности измеряемой случайной величины,* $F^*(x) \xrightarrow{P} F(x)$. *Если же из каких-либо общетеоретических положений, даваемых теорией вероятностей, закон распределения генеральной совокупности известен, то по наблюдаемым данным делаются оценки параметров этого закона.*

1.5. Статистические оценки параметров генеральной совокупности при относительно больших выборках. Метод моментов. Точечные оценки и требования к ним. Исправленная выборочная дисперсия. Метод наибольшего правдоподобия. Примеры

Итак, по данным эксперимента имеем n *чисел* $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$. *При условии, что известен закон распределения генеральной совокупности случайной величины* X, *требуется найти параметры (числовые характеристики) этого закона распределения. Существуют два метода решения этой задачи. Метод моментов и метод наибольшего правдоподобия.*

1. **Метод моментов**. *Введем понятие статистических начальных и центральных моментов. Ранее были определены начальные и центральные моменты* α_s *и* μ_s, *теперь рассмотрим их статистические аналоги. Аналогом математического ожидания является среднее арифметическое наблюдаемых*

$$M^*[x] \equiv m_x^* \equiv \bar{x} = \frac{\sum_1^n x_i}{n}.$$

Если среди наблюдаемых, есть кратные значения, то аналогом математического ожидания убудет средневзвешенное наблюдаемых

$$M^*[x] \equiv \bar{x} = \frac{\sum_1^n x_i n_i}{n}, \quad \text{где} \quad \sum_{i=1}^n n_i = n$$

Определим статистическую дисперсию как

$$D_x^* = \frac{\sum_1^n (x_i - \bar{x})^2}{n} \qquad \text{и} \qquad D_x^* = \frac{\sum_1^n n_i (x_i - \bar{x})^2}{n}$$

для кратных наблюдаемых. В общем случае начальные и центральные статистические моменты определяются следующим образом:

$$\alpha_s^* = \sum_1^n x_i^s \frac{n_i}{n} \qquad \text{и} \qquad \mu_x^* = \frac{\sum_1^n (x_i - \bar{x})^s}{n} \qquad \text{соответственно.}$$

Сколько параметров в законе распределения, столько же определяется статистических моментов.

Введем понятие генеральной средней $\bar{x}_Г = \frac{\sum_1^N x_i}{N}$ *и для кратных значений*

$\bar{x}_Г = \sum_1^M x_i \frac{N_i}{N}$, *где* $N = \sum_1^M N_i$.

Опираясь на опыт и здравый смысл, положим, что средняя генеральной совокупности при достаточно больших значениях N *равна математическому ожиданию случайной величины, представляющей какой-либо из признаков генеральной совокупности:* $\bar{x}_{Г} \equiv m_x$.

Покажем, что это так, на простом примере. Действительно, если имеются N *изделий, то вероятность извлечь изделие с признаком* x_i *будет равна* $1/\mathrm{N}$. *Пусть детали будут возвращаться в генеральную совокупность. Достаем следующую и так далее. Пусть для простоты все* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *различны, тогда*

$$M[x] = x_1 \frac{1}{N} + x_2 \frac{1}{N} + x_3 \frac{1}{N} + \cdots + x_n \frac{1}{N} = \frac{\sum_1^N x_i}{N} = \bar{x}_{Г}.$$

Положим также, что статистическая дисперсия генеральной совокупности равна дисперсии случайной величины $D_x \equiv D_{Г}^*$. *Введем понятие выборочной средней* $(n << N)$

$$\bar{x}_B = \sum_1^n \frac{x_i}{n} \quad \text{или} \quad \bar{x}_B = \sum_1^k \frac{n_i}{n} x_i\,, \quad \sum_1^k n_i = n$$

и выборочной дисперсии

$$D_B^* = \sum_1^n \frac{(x_i - \bar{x}_B)^2}{n} \quad \text{или} \quad D_B^* = \sum_1^n \frac{n_i}{n}(x_i - \bar{x}_B)^2\,.$$

Эти величины характеризуют как саму выборку, так и генеральную совокупность. Предположим, что полученные значения и являются, оценками соответствующих значений генеральной совокупности $\bar{x}_{Г} = m_x$ *и* $D_{Г}^* = D_x$. *Таким образом возможно по выборке оценить какой-либо параметр генеральной совокупности.*

Пусть a *является истинным значением искомого параметра. Полученная оценка этого параметра сама является случайной величиной, зависящей от законов распределения* x_i *и объема выборки* $\bar{a}(x_1, x_2, \ldots, x_n; n)$. *Обозначим оценку как* $\bar{a}$. *Поскольку оценка относится к конкретному значению случайной величины* X *на числовой оси, то ее называют* **точечной.**

Перечислим свойства точечных оценок и требования, предъявляемые к ним:

– **Несмещенность оценки**. *Несмещенными оценками называют такие оценки, математическое ожидание которых равно оцениваемому параметру* $M[\bar{a}(x_1, x_2, \ldots, x_n; n)] = a$. *Чтобы найти математическое ожидание оценки, необходимо определить ряд оценок* $M[\bar{a}] = \frac{\sum_1^m \bar{a}_i}{m}$, *где* m – *количество серий* *опытов. Если* $M[\bar{a}] \neq a$*, то оценка смещенная, и в процессе оценки генеральной совокупности будет совершаться систематическая ошибка.*

–**Состоятельность оценки**. *Оценка* $\bar{a}$ *для параметра* а *называется* состоятельной*, если она сходится по вероятности к оцениваемому параметру при* $n \to N$, $\bar{a} \xrightarrow{P} a$ *или* $P(|\bar{a}-a| \le \varepsilon) \ge 1 - \dfrac{D[\bar{a}]}{\varepsilon^2} = 1 - \delta$*, где* δ *и* ε *бесконечно малые. Из неравенства Чебышева видно, что для этого требуется* $D[\bar{a}] \to 0$*. Поскольку для независимых наблюдаемых*

$$D[\bar{x}_B] = D\left[\frac{\sum_1^n x_i}{n}\right] = \frac{\sum_1^n D_x}{n^2} = \frac{D_x}{n},$$

то требование состоятельности сводится к выполнению $\lim\limits_{n \to N} D[\bar{a}] = 0$.

– **Эффективность оценки**. *При малом объеме выборки* $D[\bar{a}] \neq a$*. Эффективной называют оценку с минимальной дисперсией* $D[\bar{a}] = D_{\min}$*. Делают ряд оценок* $\bar{a}$ *и выбирают из них те оценки, у которых дисперсия наименьшая.*

Применим перечисленные выше требования к точечным оценкам параметров $\bar{x}_Г$ *и* $D_Г^*$ *генеральной совокупности по выборкам. Имеем измерения* Х, $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$*. Для простоты будем считать все измерения: а) независимыми, б) одинаково распределенными (т.е.* $m_{x_1} = m_{x_2} = \cdots$; $\sigma_1 = \sigma_2 = \cdots$*), в) некратными.*

Итак, оценим сначала по $\bar{x}_B$ *генеральную среднюю* $\bar{x}_Г$*. Может ли* $\bar{x}_B$ *быть оценкой* $\bar{x}_Г$*? Поэтому, прежде всего, проверяем на несмещенность оценки:*

$$M[\bar{x}_B] = M\left[\frac{\sum_1^n x_i}{n}\right] = \frac{1}{n}\sum_1^n M[x_i] = \frac{nmx}{n} = m_x \equiv \bar{x}_Г.$$

Таким образом, оценка $\bar{x}_Г$ *по выборке является несмещенной.*

Проверим оценку на состоятельность. Оценка оказывается состоятельной, поскольку подпадает под действие теоремы Бернулли

$$P\left(\left|\sum_1^n x_i/n - m_x\right| \le \varepsilon\right) \ge 1 - \delta, \quad где \ \ \delta = \frac{D_x}{n\varepsilon^2} \to 0 \ \ при \ \ n \to N.$$

К тому же оценка эффективна, так как $D[\bar{x}_B] = \dfrac{D_x}{n}$*, то выбираем серию измерений с большим объемом выборки. Таким образом, можно сделать вывод* *о том, что по средней выборочной $\bar{x}_B$ можно оценить среднюю генеральной совокупности $\bar{x}_Г$, и чем больше выборка, тем точнее оценка.*

Перейдем к оценке дисперсии генеральной совокупности по выборочной дисперсии, но прежде получим удобную для вычислений формулу:

$$D^* = \sum_1^n (x_i - \bar{x})^2 / n = \left(\sum_1^n x_i^2 - 2\bar{x} \sum_1^n x_i + \bar{x}^2 \sum_1^n 1 \right) \Big/ n = \sum_1^n x_i^2 \Big/ n - \bar{x}^2 = \overline{x^2} - \bar{x}^2 .$$

Итак, проверяем на несмещенность оценки. Отметим, что $M\left[x_i x_j\right] = 0$, $i \neq j$, *так как измерения независимы. Кроме того, для простоты доказательства выберем систему координат так, что* $m_x = 0$

$$M[D_B] = M\left[\sum_1^n x_i^2 / n - \left(\sum_1^n x_i / n \right)^2 \right] = M\left[\sum_1^n x_i^2 / n - \sum_1^n x_i^2 / n^2 - 2\sum_{i \neq j}^n x_i x_j / n \right] =$$

$$= \frac{n-1}{n^2} \sum_1^n M\left[x_i^2\right] - 2\frac{1}{n^2} \sum_{i \neq j}^n M\left[x_i x_j\right] = \frac{n-1}{n^2} \sum_1^n D_x = \frac{n-1}{n} D_x ,$$

$$M[D_B] = \frac{n-1}{n} D_x = \frac{n-1}{n} D_Г^* .$$

Видно, что оценка смещенная. Особенно заметные ошибки в оценке, дисперсии будут при малых выборках. Поэтому необходимо ввести **исправленную выборочную дисперсию**

$$S^2 \equiv \overline{D} = \frac{n}{n-1} D_B^* .$$

Тогда $M\left[S^2\right] = D_x$ *оценка уже будет несмещенной.*

Проверим на состоятельность

$$P\left(\left|D_B - D_x\right| \le \varepsilon\right) \ge 1 - \frac{D[D_B]}{\varepsilon^2}, \text{ где } D[D_B] = \frac{2}{n-1} D_x^2 .$$

Видно, что при $n \to \infty$ *условие состоятельности, оценки дисперсии выполняется. Таким образом, определяя по данным выборки исправленную выборочную дисперсию, мы достаточно хорошо оцениваем дисперсию генеральной совокупности.*

2. **Метод наибольшего правдоподобия**, *является более общим методом, приводящим всегда к состоятельным оценкам, но, к сожалению, не всегда несмещенным.*

Итак, пусть закон распределения генеральной совокупности известен. Задана плотность распределения случайной величины $f(x,a)$, *где* a – *неизвестный параметр. Требуется на основании опытных данных* $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ *определить параметр* a.

Составим функцию правдоподобия $L(x_1, x_2, \dots, x_n; a) = P_1(a) \cdot P_2(a) \cdot \dots \cdot P_n(a)$, *где* $P_i(a) = P(x_i, a)$ *для дискретных случайных величин. Для непрерывных случайных величин* $L(x_1, x_2, \dots, x_n; a) = f(x_1, a) \cdot f(x_2, a) \cdot \dots \cdot f(x_n, a)$.

Сущность метода правдоподобия заключается в том, что в качестве оценки a *выбирают значение, для которого функция правдоподобия экстремальна. Так как* $0 \le P \le 1$, *то находится ее максимальное значение. Таким образом, решается уравнение* $\frac{dL}{da} = 0$ *при условии* $\frac{d^2 L}{da^2} < 0$. *Удобно ввести логарифмическую функцию правдоподобия. В этом случае решают уравнение* $\frac{d \ln L}{da} = 0$ *для одного параметра. Если плотность распределения зависит от двух параметров* $f(x; a_1, a_2)$, *то решают систему уравнений:*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \ln L}{\partial a_1} = 0 \\ \dfrac{\partial \ln L}{\partial a_2} = 0 \end{cases}$$

При этом должно выполнятся достаточное условие экстремума:

$$\left(\frac{\partial^2 \ln L}{\partial a_1 \partial a_2} \right)^2 - \frac{\partial^2 \ln L}{\partial a_1^2} \cdot \frac{\partial^2 \ln L}{\partial a_2^2} < 0$$

и условие максимума $\frac{\partial^2 \ln L}{\partial a_1^2} < 0, \ \frac{\partial^2 \ln L}{\partial a_2^2} < 0.$

Примеры

1. Оценить величину вероятности P *по данному числу* m *появлений события* A *в* n *независимых испытаниях. (Ответ мы знаем* $\overline{P} = \frac{m}{n}$*.)*

Решение. X-*дискретная случайная величина с законом распределения.*

	x_i	
	P_i	

Составляем функцию правдоподобия $L = P^m (1-P)^{n-m}$.

Логарифмируем $\ln P = m \ln P + (n-m) \ln(1-P)$.

Исследуем на экстремум

$$\frac{d \ln L}{dP} = \frac{m}{P} - \frac{n-m}{1-P} = 0, \quad P \ne 0.$$

Получаем ожидаемый ответ $\overline{P} = \frac{m}{n}$ *– оценкой числа появления, события* A *в нескольких опытах является относительная частота этого события.*

2. Пусть X *– дискретная случайная величина подчиняется закону редких событий с неизвестным параметром* a. *По выборке* $x_1, x_2, \dots, x_n$ *оценить этот параметр.*

Решение. *Генеральная совокупность распределена по закону Пуассона* $P_{x_i}(a) = \dfrac{a^{x_i}}{(x_i)!}e^{-a}$, *где* $x_i = 0, 1, 2, 3, \ldots$ *и* $a = n \cdot P$. *Составляем функцию правдоподобия* $L = \prod_1^n \dfrac{a^{x_i}}{(x_i)!}e^{-a}$, $\ln L = \sum_1^n \left[x_i \ln a - \ln(x!) - a\right]$.

Исследуем на экстремум $\dfrac{d \ln L}{da} = \sum_1^n \left[\dfrac{x_i}{a} - 1\right] = 0 \Rightarrow a = \sum_1^n x_i / n = \bar{x}_B$. *В результате параметр* а *определяется, как среднеарифметическое наблюдаемых. Для Пуассоновского распределения оценкой* а *будет* $\bar{x}_B$.

3**.** *Генеральная совокупность распределена по нормальному закону. По выборке оценить два неизвестных, параметра* m**,** σ**.**

Решение. *По условию* $f(x_i) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x_i - m)^2}{2\sigma^2}}$,

тогда $L = \dfrac{1}{(2\pi)^{n/2}\sigma^n}e^{-\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{(x_i - m)^2}{2\sigma^2}}$; $\ln L = -\dfrac{n}{2}\ln\left(2\pi\sigma^2\right) - \sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{(x_i - m)^2}{2\sigma^2}$.

Исследуем на экстремум

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \ln L}{\partial m} = -\dfrac{2}{2\sigma^2}\sum\limits_{i=1}^{n}(-1)(x_i - m) = 0 \qquad \Rightarrow m = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i}{n} = \bar{x}_B \\ \dfrac{\partial \ln L}{\partial \sigma^2} = -\dfrac{n}{2} \cdot \dfrac{1}{\sigma^2} + \dfrac{2}{2\sigma^4}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - m)^2 = 0 \ \Rightarrow \sigma^2 = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - m)^2}{n} = D_B^* \end{cases}$$

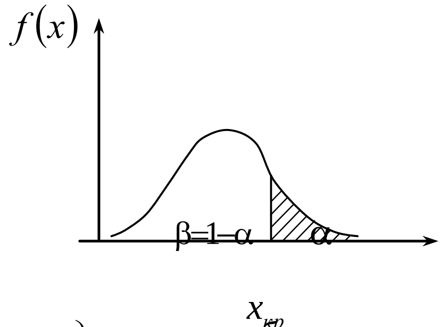
Оценка параметров по выборке дает для генеральной совокупности, распределенной по нормальному закону, выборочное среднее и выборочную неисправленную дисперсию.

1.6. Статистическая проверка гипотез. Простые и сложные гипотезы. Нулевая и конкурирующая гипотезы. Ошибки первого и второго рода. Критерии проверки. Мощность критерия. Выбор альтернативной гипотезы. Правило статистической проверки гипотез. Примеры.

Переходим к рассмотрению третьей задачи математической статистики, а именно, статистической проверки гипотез, выдвинутых после первичной обработки экспериментальных данных. **Статистической гипотезой** *называют гипотезу о виде неизвестного распределения или о параметрах известного распределения. В последнем случае говорят о параметрических гипотезах. Например, гипотеза о равенстве средних двух различных генеральных* *совокупностей по их выборкам. Данная лекция посвящена методики проверки именно параметрических гипотез.*

Принцип идеи статистической проверки гипотез можно сформулировать следующим образом. Для того, чтобы ответить на вопрос о правильности или ложности гипотезы, выбирают границы допустимых (толерантных) для нее отклонений. Необходимо назначить такие критические отклонения исследуемого параметра, превышение которых при данной гипотезе было бы настолько маловероятным событием, что его можно считать невозможным.

Например, для случайной величины, распределенной по нормальному закону, отклонение от средней на 3σ *дает ее вероятность меньше 0,03%. Если же такие отклонения исследуемого параметра наблюдаются, то это указывает на несовместимость данной гипотезы с наблюдениями, и ее следует отбросить как несостоятельную. Если же таких отклонений нет, то говорят, что данные наблюдений не противоречат этой гипотезе, а имеющие место отклонения в сравниваемых значениях можно объяснить случайностью при формировании выборок. Обычно в качестве практически невозможных отклонений принимают те, вероятностью которых не превышает значения* $\alpha = 0{,}05;\ 0{,}01$. *Такую вероятность называют* **уровнем значимости**, *область таких отклонений –* **критической областью** *(на рисунке критическая область заштрихована).*



Различают нулевую гипотезу (основная) – H_0 *и конкурирующую (альтернативную) –* H_1*, причем одна из них обязательно реализуется.*

Пример, $H_0:\ a_1 = a_2$, $H_1:\ a_1 \neq a_2$ *или* $H_1:\ a_1 > a_2$.

Гипотезы могут быть простыми и сложными. Гипотезу называют простой*, если она содержит только одно предположение и* сложной*, если несколько предположений. Например, сложной гипотезой является предположение, что в 3 независимых испытаниях некоторое событие произойдет хотя бы дважды* $H = 3\bar{A}AA + AAA$.

В итоге статистической проверки гипотез могут быть приняты два верных решения:

1. гипотезу принимают и она правильная,

2. гипотезу отвергают и она неправильная, ложная.

Кроме того, могут быть приняты два неверных решения:

3. отвергают правильную гипотезу – **ошибка I рода**,

4. принимают неправильную гипотезу – **ошибка II рода**.

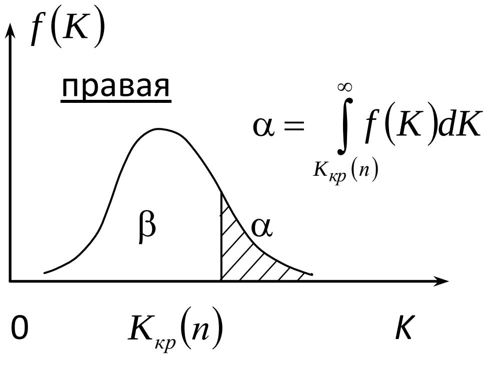
Вероятность ошибки I рода контролируется уровнем значимости при условии, что гипотеза верна $\alpha = \int\limits_{x_{кр}}^{\infty} f(x)dx$.

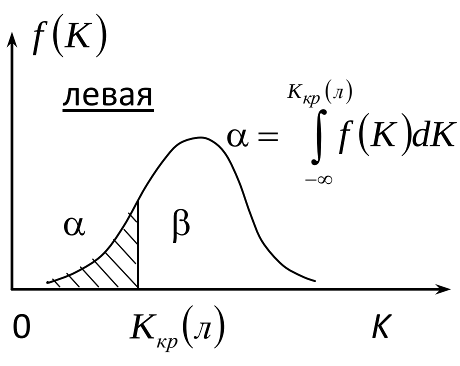
Для проверки гипотезы используют специально подобранную случайную величину, точное распределение которой известно и которая зависит только от объема выборки. Эту случайную величину называют **статистическим критерием проверки**. *Обозначают ее как* K. *В зависимости от постановки задачи (что сравнивается)* K *может быть следующим:*

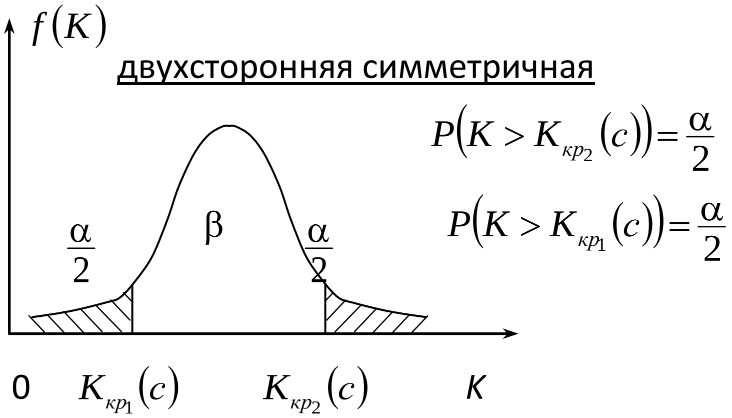
- Z, *если случайная величина распределена по нормальному закону с* $N(Z,0,1)$, *где* $m_Z = 0$ *и* $\sigma_Z = 1$. *Сравниваются средние.*
- V, *если случайная величина распределена по закону* χ^2. *Сравниваются дисперсии.*
- t, *если случайная величина распределена, по закону Стьюдента* $t = Z/V$, *где* V *распределена по* χ^2.
- F, *если случайная величина распределена по закону Фишера-Снедекера* $F = u/V$, *где* u *и* V *распределены по* χ^2, *и другиеболее специальные. Ограничимся приведенными.*

Получаемые значения статистического критерия проверки по выборкам называют **наблюдаемыми значениями –** $K_{набл}$**.**

После выбора критерия проверки множество всех его значений разбива-

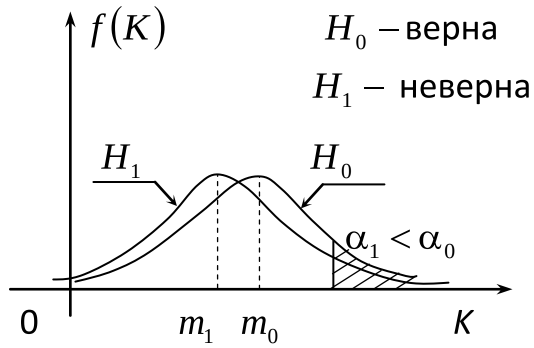




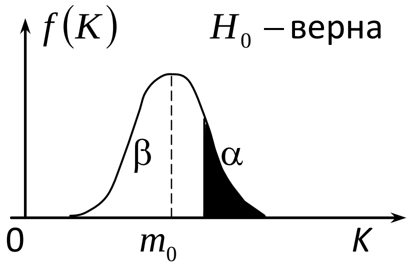


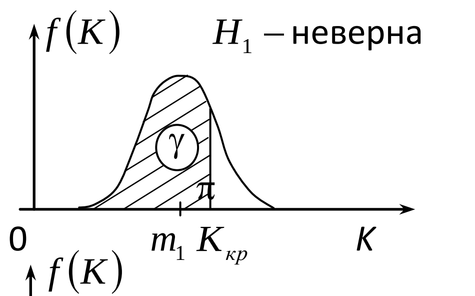
ется на два непересекающихся подмножества. Одно из них содержит значения критерия, при которых нулевая гипотеза принимается (область принятия гипотезы) и другое при котором нулевая гипотеза отвергается (критическая область). Точка $K_{кр}$ разделяет эти области. Если $K_{набл} < K_{кр}$, то гипотеза принимается как не противоречащая наблюдаемым данным. Если же $K_{набл} > K_{кр}$, то гипотезу отвергают как несостоятельную. Различают одностороннюю критическую область (левая, правая) и двустороннюю симметричную область.
Выбор области критических значений обусловлен выбором конкурирующей гипотезы. Для каждого критерия K *имеется таблица значений для различных задаваемых значений α и числа элементов выборки* n.

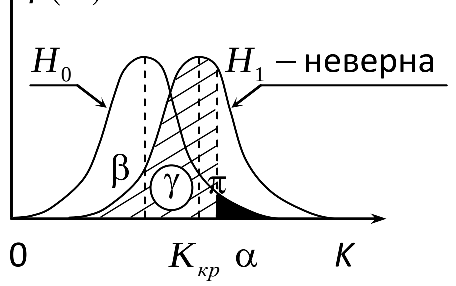
Очевидно, что чем меньше мы выбираем α, тем меньше возможность совершить ошибку I рода – отбросить правильную гипотезу. Однако с уменьшением α увеличивается вероятность допустить ошибку II рода – принять неправильную гипотезу. В самом деле, если конкурирующая неправильная гипотеза обеспечивает меньшие α, то мы можем ее принять за верную гипотезу. Из рисунка видно, что H_1 обеспечивает меньшие α, хотя она неверна. Чтобы контролировать ситуацию необходимо ввести еще одно понятие – мощность критерия π, который позволяет не допускать ошибку II рода.



Мощностью критерия *называют вероятность попадания статистического критерия проверки в критическую область при условии, что конкурирующая гипотеза верна. Здесь имеется в виду основная гипотеза. На рисунках изображены положения β, α, γ, π.*







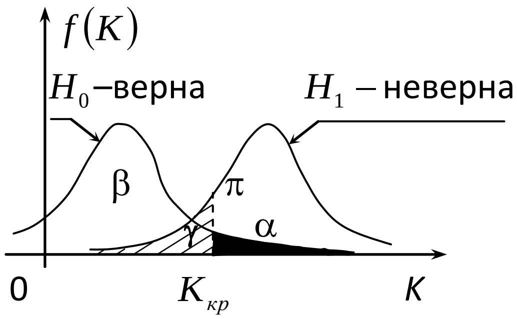
Обозначим γ вероятность ошибки II рода

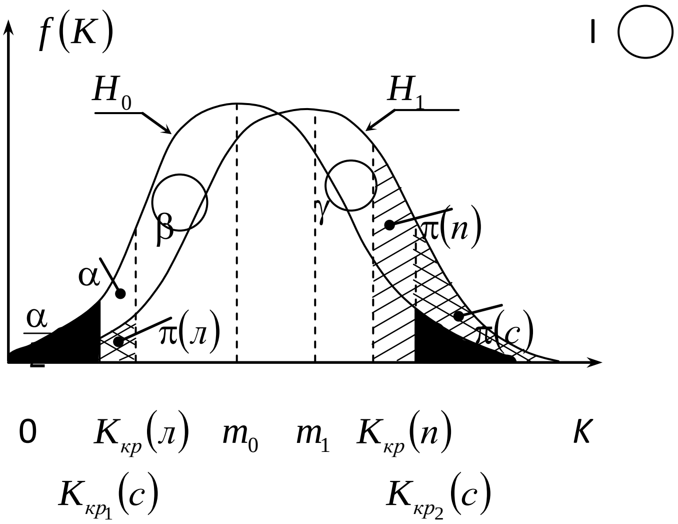
$$\gamma = \int_{-\infty}^{K_{кр}} f_{H_1}(K)dK.$$

Причем долж-

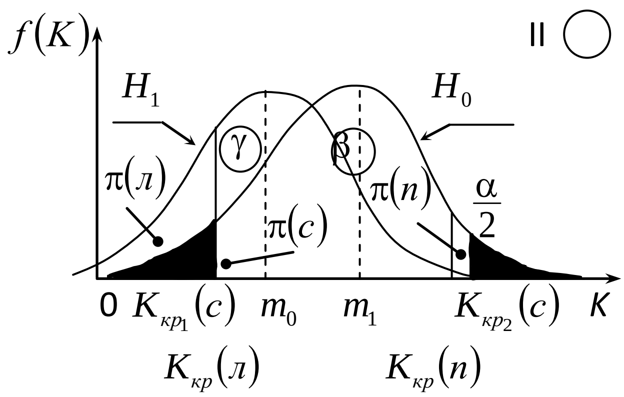
но выполняться $1-\gamma=\pi$. Совместим рисунки и покажем, как можно избежать ошибок I и II рода.

Теорема Неймана-Пирсона*: Критическая область выбирается таким образом, чтобы мощность критерия была максимальной. То есть требуется чтобы выполнялось $\alpha \to 0,\ \pi \to 1$. На рисунке представлено такое положение гипотез, когда ошибка очевидна, так как все наблюдаемые значения H_1 лежат в критической области.*



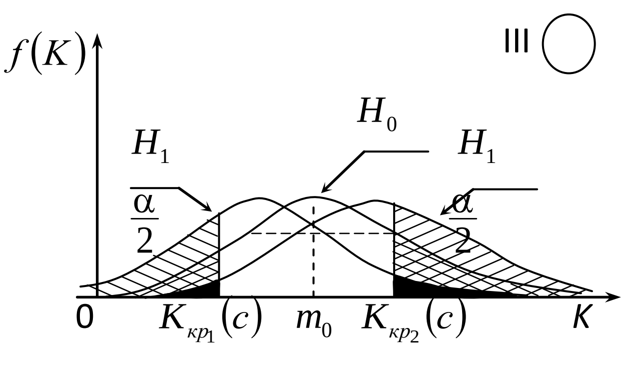


Рассмотрим, как, в зависимости от конкурирующей гипотезы, выбрать критическую область, обеспечив максимальность мощности критерия. Пусть H_0 – верна: $m_1=m_0$, а H_1 – неверна: $m_1>m_0$. Из рисунка I видно, что $\pi(n)>\pi(c)>\pi(л)$. Таким образом, выбор правосторонней критической области при гипотезе H_1: $m_1>m_0$ приводит к максимально возможной мощности критерия. В этом случае критические значения критерия проверки $K_{кр}$ определяются из соотношения $P(K>K_{кр}(n))=\alpha$.



Пусть теперь H_0 – верна: $m_0=m_1$, H_1 – неверна: $m_1<m_0$. Из рисунка II видно, что выбор левосторонней области при конкурирующей гипотезе H_1: $m_1<m_0$ также обеспечивает максимальный критерий мощности. Критические значения $K_{кр}$ обусловлены $P(K<K_{кр}(л))=\alpha$.

Наконец, при выборе конкурирующей гипотезы H_1 (неверна):



$m_0 \neq m_1$ только двухсторонняя симметричная область (рисунок III) обеспечивает максимальные значения мощности π. Критические значения $K_{кр}$ определяются из $P\left(K > K_{кр}(c)\right) = \frac{\alpha}{2}$.

Сформируем стандартную последовательность действий для практического применения статистической проверки параметрических гипотез.

Правило проверки статистических гипотез.

1. *Формулируем H_0 и H_1.*
2. *Назначаем уровень значимости α.*
3. *Выбираем статистику критерия K для проверки H_0.*
4. *Определяем $K_{набл}$ по выборке при условии, что H_0 верна.*
5. *В зависимости от H_1 определяем критическую область (левую, правую или двухстороннюю).*
6. *Из таблицы определяем $K_{кр}$.*
7. *Делаем выбор. Если $K_{набл} > K_{кр}$, то H_0 неверна и ее отбрасываем, если же $K_{набл} < K_{кр}$, то H_0 оставляем, как непротиворечивую наблюдаемым данным.*

Примеры

1. Сравнение центров рассеяния (математических ожиданий двух генеральных совокупностей). По выборкам n_1 и n_2 получаем выборочные средние $\bar{x}_B$ и $\bar{y}_B$. Если среднеквадратичные отклонения σ_x и σ_y известны, то выбираем критерий проверки

$$Z = \left(\bar{x}_B - \bar{y}_B\right) / \sigma_{\bar{x}-\bar{y}} ,$$

который распределен по нормальному закону $N\left(Z, m_Z, \sigma_Z\right)$,где $m_Z = m_x - m_y$ и $\sigma_{\bar{x}-\bar{y}} = \left(\sigma_x^2/n_1 + \sigma_y^2/n_2\right)^{1/2}$, так как $D[\bar{x}_B] = D_x/n_1$, $D[\bar{y}_B] = D_y/n_2$ и $D[\bar{x} \pm \bar{y}] = D[\bar{x}] + D[\bar{y}]$. В качестве основной гипотезы (нулевой) H_0 выберем предположение, что $m_x = m_y$.

Итак, имеются данные об испытаниях на разрыв образцов проволоки от двух выборок по 50 мотков из продукции двух заводов

Завод А: $\bar{x}_B = 120{,}8$ кг/мм^2

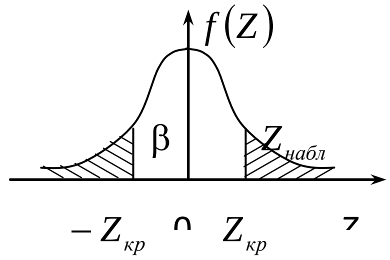
Завод В: $\bar{y}_B = 128{,}2$ кг/мм^2

При этом получено, что $\sigma_x = 8$ кг/мм^2, $\sigma_y = 9{,}4$ кг/мм^2.

Требуется определить, имеются ли реальные различия в механических качествах проволоки или это объясняется случайными отклонениями в выборках. Проверить при уровне значимости α.

Решение*:* $\alpha = 0{,}05$*;* $\sigma_{\bar{x}-\bar{y}} = \sqrt{\dfrac{8^2}{50} + \dfrac{9{,}4^2}{50}} \approx 1{,}7$ кг/мм^2,

H_0: $m_x = m_y$, H_1: $m_x \neq m_y$. Выбираем двухстороннюю область. Выбираем статистический критерий проверки $Z = (\bar{x}_B - \bar{y}_B)/\sigma_{\bar{x}-\bar{y}}$ с $N(Z, 0, 1)$. Получаем наблюдаемые значения критерия $Z_{набл} = \dfrac{7{,}4}{1{,}7} = 4{,}35$. Из таблицы функции Лапласа для $n = 50$ $(n > 20)$ из соотношения



$$P(|Z| > Z_{кр}) = \alpha \quad \textit{или} \quad P(|Z| < Z_{кр}) = \beta$$

получаем $\quad \Phi\left(\dfrac{\varepsilon}{\sigma_{\bar{x}-\bar{y}}}\right) - \Phi\left(\dfrac{-\varepsilon}{\sigma_{\bar{x}-\bar{y}}}\right) = \beta$, $2\Phi(Z_{кр}) = \beta$, $Z_{кр} = \dfrac{\varepsilon}{\sigma_{\bar{x}-\bar{y}}} = 1{,}96$.

Сравниваем $Z_{кр}$ и $Z_{набл}$, видно, что $Z_{набл} > Z_{кр}$. Следовательно, нулевую гипотезу H_0: $m_x = m_y$ следует отбросить. Значит, механические качества проволоки заводов А и В существенно различны. На одном из заводов нарушена технология, изготовления проволоки.

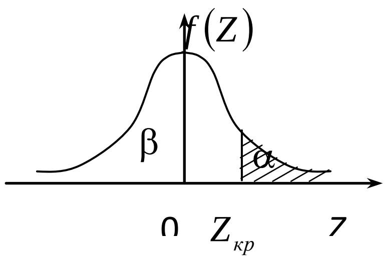
*2**.** До переоборудования технологической цепочки срок службы ламп был $\bar{x}_1 = 500$ час. После модернизации оборудования, срок службы ламп возрос. По выборкам получили $\bar{x}_2 = 560$ час. В обоих случаях среднеквадратичное в выборках составило $\sigma_{\bar{x}} = \dfrac{\sigma_x}{\sqrt{n}} = 45$ час. Будет ли новый способ производства ламп изменять их долговечность? Повысится ли качество ламп?*

Решение*:* H_0: $m_1 = m_2$, $\alpha = 0{,}05$

H_1: $m_2 > m_2$. Выбираем правостороннюю область. Выбираем статистический критерий проверки $Z = (\bar{x}_1 - \bar{x}_2)/\sigma_{\bar{x}}$. Для $n > 20$ он имеет нормальное распределение. Так как $P(Z > Z_{кр}) = \alpha$, тогда $P(|Z| > Z_{кр}) = 2\alpha$,

$P(|Z| < Z_{кр}) = 1 - 2\alpha$, $\Phi\left(\dfrac{\varepsilon}{\sigma_x}\right) - \Phi\left(-\dfrac{\varepsilon}{\sigma_x}\right) = 1 - 2\alpha$,

$$\Phi(Z_{кр}) = \frac{1 - 2\alpha}{2} = 0{,}45.$$



Из таблицы функции Лапласса при заданном уровне значимости 0,45 получаем $Z_{кр} = 1{,}65$. *Так как наблюдаемое значение параметра* $Z_{набл} = \frac{560-500}{45} \approx 1{,}33$, *то видно, что* $Z_{набл} < Z_{кр}$, *т.е.* H_0 *не противоречит наблюдаемым данным. Долговечность ламп не изменилась радикально с изменением технологии производства, а наблюдаемое увеличение продолжительности срока службы ламп по выборкам связан со случайными отклонениями в выборках.*

Заметим, что если бы было получено $\bar{x}_2 = 605$ *час, то* $Z_{набл} = 2{,}3$ *и* $Z_{набл} > Z_{кр}$, *то тогда можно было бы отбросить нулевую гипотезу, как несоответствующую наблюдаемым. В этом случае смена технологии изменило бы срок службы ламп.*

3. *Проверка гипотезы о дисперсиях. Такая проверка играет очень важную роль в технике, так как с дисперсиями непосредственно связана точность изделий, машин и приборов. Как правило, нулевую гипотезу выбирают как* H_0: $M[S_x^2] = M[S_y^2]$, *где* S^2 *– исправленная выборочная дисперсия. Критерием проверки служит статистический критерий Фишера-Снедекера* F. *Наблюдаемое значение критерия проверки определяется* $F_{набл} = S_x^2 / S_y^2$, *причем в числитель ставят наибольшее значение из значений* S_x^2, S_y^2. *Критические значения критерия проверки определяются следующим образом:* $F_{кр} = (u/K_1)/(v/K_2)$, *где* K_1 *и* K_2 *– степени свободы, определяются из таблицы для пункции Фишера-Снедекера.*

Одна и та же втулка делается на двух станках. Делаются выборки изделий от этих двух станков объемами $n_1 = 10$ *и* $n_2 = 15$, *соответственно. Получают среднеквадратичные отклонения* $S_x^2 = 9{,}6$; $S_y^2 = 5{,}7$, *соответственно. Оценить сравнительное качество втулок сделанных на этих станках. Будут ли для уровня значимости* $\alpha = 0{,}1$ *изделия, сделанные на этих двух станках, одинокого точные?* $[S^2] = \text{мм}^2$.

Решение: H_0: $M[S_x^2] = M[S_y^2]$

H_1: $M[S_x^2] \neq M[S_y^2]$. *Выбираем правостороннюю область.*

$$F_{набл} = 9{,}6/5{,}7 \approx 1{,}68.$$

Из соотношения $P(F > F_{кр}) = \alpha/2$ *для степеней свободы* $K_1 = n_1 - 1 = 9$, $K_2 = n_2 - 1 = 14$ *по таблице функции Фишера-Снедекера определяем*

$$F_{кр}(0{,}05; 9; 14) = 2{,}65.$$

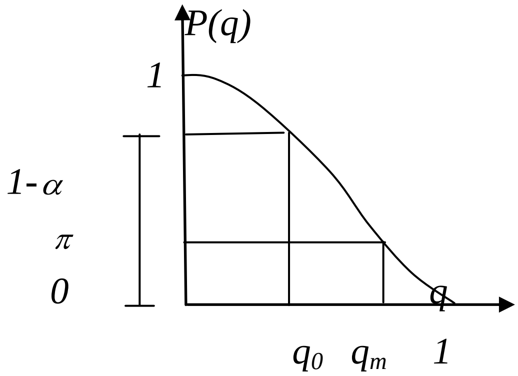
Так как $F_{набл} < F_{кр}$, то нулевая гипотеза H_0 о равенстве среднеквадратичных отклонений не противоречит наблюдаемым данным. Таким образом, изделия двух разных станков имеют одинаковую точность изготовления, а наблюдаемые различия связаны со случайностями в организации выборок.

4. Пусть генеральная совокупность распределена нормально и пусть каким-то способом определено σ_0. Сделана выборка и получено S^2 с $K = n-1$ степенями свободы. Требуется при заданном α, проверить нулевую гипотезу $H_0 : M[S^2] = \sigma_0^2$, то есть определить значимо или незначимо различаются выборочная и генеральная дисперсии. К таким задачам относятся проверка точности станков, инструментов, приборов, устойчивость технологических процессов и так далее. Задача проверить точность инструмента после его использования. Пусть сделано 13 измерений и определено $S^2 = 14{,}6$. Проверить при уровне значимости $\alpha = 0{,}01$ гипотезы $H_0 : M[S^2] = \sigma_0^2 = 12$ и $H_1 : M[S^2] > 12$. Критерием проверки является величина $\chi^2 = (n-1)\dfrac{S^2}{\sigma_0^2}$. Так как $\chi^2_{набл} = 14{,}6$, а $\chi^2_{кр}(0{,}01;12) = 26{,}2$, то делаем вывод: точность существенно не изменилась.

Для дискретных случайных величин, проверка параметрических гипотез находит применение в задачах приемочного контроля партии изделия или контроля эффективности режима технического обслуживания и ремонта и так далее.

Статистический контроль по альтернативному признаку применяется, когда решение принимается по принципу «годен» - «негоден», «эффективно»-«неэффективно». Формулируется основная гипотеза, которая предполагает положительное решение по результатам контроля, и альтернативная. Назначается уровень значимости, который контролирует не допущение ошибки первого рода (партия изделий бракуется, хотя эта партия должна быть принята) и мощность критерия принятия конкурирующей гипотезы, который контролирует не допущение ошибки второго рода (партия изделий принята, хотя она не качественная). Для формирования модели статистического контроля по альтернативному признаку используется оперативная характеристика контроля с привлечением биноминального закона или закона Пуассона. Для организации контроля предварительно должен быть определен план контроля, который определяет объем выборки, приемочного q_0 и браковочного q_m чисел. Оперативная характеристика, выраженная уравнением, графиком или таблицей, определяет зависимость вероятности приема партии от величины, характеризующей уровень качества принимаемой продукции. Характе-

ристикой качества партии изделий служит доля нестандартных деталей $q=\dfrac{M}{N}$*, где* N *-общее число изделий в партии и* M *-число нестандартных (дефектных) изделий в партии. Для репрезентативной выборки объемом* n *уровень дефектности определяется как* $q=\dfrac{m}{n}$*, где* m *-число дефектных изделий в выборке. Устанавливаются два уровня качества, а именно, приемочный уровень, при котором* $q=q_0$ *и браковочный уровень качества при* $q=q_m$*, причем должно выполняться* $q_m>q_0$*. Партия изделий принимается, когда проверка выборки дает значения* $q<q_0$ *и бракуется, если* $q>q_m$*. Стандартный график оперативной характеристики имеет следующий вид. Если* $q=0$ *(бездефектная партия), то с вероятностью 1 партия принимается. Если* $q=1$ *(вся партия состоит из дефектных изделий), то вероятность ее принятия равна 0. Значение* $P(q)$ *при* $q=q_0$ *равно* $1-\alpha$*, а при* $q=q_m$*, равно* $P(q)=\pi$.



Величина α *есть риск поставщика, означающий вероятность забраковать партию изделий с приемлемым уровнем качества. Величина* π *есть риск заказчика, означающий вероятность приема партии с бракованным уровнем качества. Как правило, на практике предполагают, что задан допустимый уровень брака k=0 (в выборке не должно быть дефектных изделий) и заданы приемочный уровень качества* q_0 *и риски* α *и* π*. Требуется определить объем выборки* n *и браковочный уровень качества* q_m*.*

Из биноминального распределения при $k=0$*, получаем* $P(q)=(1-q)^n$*.*
Риск поставщика α *тогда определится при* $q=q_0$ *как* $\alpha=1-(1-q_0)^n$*. Для риска заказчика получаем при* $q=q_m$ $\pi=(1-q_m)^n$*. Прологарифмировав оба выражения можно получить следующие соотношения*

$$n=\frac{\ln(1-\alpha)}{\ln(1-q_0)} \quad и \quad n=\frac{\ln\pi}{\ln(1-q_m)}.$$

Кроме того, определяется браковочный уровень качества $q_m=1-\beta^{\frac{1}{n}}$.

1.7. Элементы теории планирования экспериментов. Полный и дробный факторные эксперименты. Проверка адекватности модели. Оптимизация методом крутого восхождения

Как известно, источником знаний об окружающем нас мире является эксперимент. По данным эксперимента строятся и проверяются различные теории и модели интересующих нас явлений и процессов в природе и технике. Статистические методы планирования появились в начале 20 века, когда Р. Фишер показал целесообразность одновременного варьирования всеми факторами (активный эксперимент) в противовес распространенному однофакторному эксперименту, с поочередным варьированием каждого из факторов (пассивный эксперимент). Предлагалось ставить последовательно небольшие серии опытов, в каждом из которых, одновременно варьируются по определенным правилам все факторы. Серии опытов организуются таким образом, что после математической обработки предыдущей можно было выбрать условия проведения (планировать) следующую серию опытов. Так последовательно достигается область оптимума с экономией времени и материальных средств.

Планирование эксперимента – это процедура выбора числа и условий проведения опытов, необходимых и достаточных для решения поставленной задачи с требуемой точностью.

Задачами статистического планирования эксперимента является:

-поиск оптимальных условий; построение интерполяционных формул;

-выбор существенных факторов; оценка и уточнение констант теоретических моделей; выбор наиболее приемлемых из некоторого множества гипотез о механизме явления, и так далее. Так задача поиска оптимальных условий является одной из наиболее распространенных научно-технических задач.

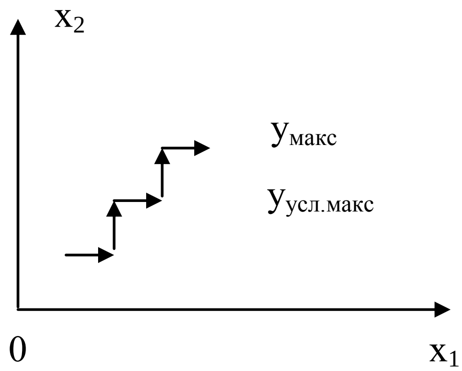
Эксперимент, который ставится для решения задач оптимизации, называется экстремальным.

При решении задачи будем использовать математические модели объекта исследования. Под математической моделью будем понимать уравнение, связывающее параметр оптимизации (У) с факторами, на него влияющими (х). Такое уравнение можно записать в виде

$$У = f(x_1, x_2, x_3, ..., x_n),$$

где У называется функцией отклика или поверхностью отклика, а $x_i(i = \overline{1,n})$ - факторами, координатное гиперпространство с x_i называется факторным пространством. Если опыты и их математическая обработка осуществляются путем варьирования сначала одного фактора, а затем другого, и так далее, то возникает большая вероятность выявления условного экстремума У.

Метод планирования опыта позволяет варьированием одновременно всеми факторами быстро найти оптимальные (экстремум) значения функции отклика. Так, например, для функции отклика двух факторов, возможна геометрическая иллюстрация поиска экстремума.



Здесь поверхность отклика изображена методом уровней $f(x_1, x_2) = const$ с максимумом $y_{\max}$ и условным максимумом $y_{cond.\max}$. В случае активного эксперимента поиск экстремума идет по ломаной линии АВ, тогда как в пассивном эксперименте функция отклика определяется во всех узлах пересечения $x_1 = const, x_2 = const.$

В связи с тем, что в реальном процессе всегда существуют неуправляемые и неконтролируемые переменные, изменение значений У носит случайный характер.

При использовании статистических методов математическая модель представляется в виде полинома – отрезка ряда Тейлора, в который разлагается неизвестная зависимость.

$$Y = \beta_0 + \sum_{i=1}^{n} \beta_i x_i + \sum_{i \neq j=1}^{n} \beta_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^{n} \beta_{ii} x_i^2 + ...,$$

$$\beta_0 = f(x_{10}, x_{20}, ..., x_{n0}), \beta_i = \frac{\partial f}{\partial x_i} / x_i = x_{i0}, \beta_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} / x_i = x_{i0},$$

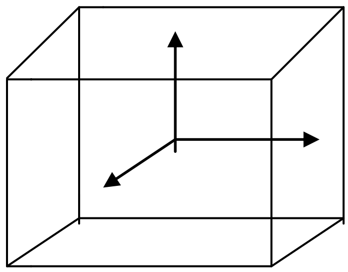
где n число факторов. При математической обработки эксперимента получаем выборочные коэффициенты регрессии определяющие линейные эффекты (b_i), квадратичные эффекты (b_{ii}), эффекты взаимодействия факторов (b_{ij}), которые являются оценками теоретических коэффициентов модели ($b \to \beta$). Коэффициенты b_i определяются методом наименьших квадратов и, полученное на основании опытов, уравнение регрессии имеет вид $\widehat{Y} = b_0 + \sum_{i=1}^{n} b_i x_i + \sum_{i \neq j=1}^{n} b_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^{n} b_{ii} x_i^2 + ...$.

Разность между объемом выборки N и числом связей, наложенных на эту выборку (определяется числом факторов $l = n + 1$, то есть равно числу коэффициентов в уравнении регрессии), называется числом степеней свободы $k = N - l.$

Методы планирования экспериментов позволяют свести к минимуму число необходимых опытов и одновременно выявить оптимальное значение функции отклика. Ограничимся рассмотрением двухуровневых факторов, то есть каждый фактор принимает только два значения x_i^- и x_i^+, соответственно, нижнее и ерхнее. Для исследования функции отклика в этом случае не-обходимо провести, при всевозможных сочетаниях уровней, N= 2^n опытов.

Для упрощения записи условий эксперимента и обработки экспериментальных данных необходимо перейти к кодированной системе координат, которая обеспечивает верхнему уровню каждого фактора значение +1, а нижнему – значение - 1. Обозначим

$x_i^0 = \frac{x_i^- + x_i^+}{2}$ - нулевой уровень фактора,



$\Delta x_i = x_i^+ - x_i^0 = x_i^0 - x_i^-$ - интервал варьирования. Введем новую переменную

$$\tilde{x}_i = \frac{x_i - x_i^0}{\Delta x_i}.$$

На рисунке представлена геометрическая иллюстрация кодированного плана для n=3 .

Обратный переход к натуральным переменным осуществляется по формуле $x_i = x_i^0 + \tilde{x}_i \cdot \Delta x_i$. Тогда имеет место следующая таблица значений

$$\frac{x_i .....x_i^- ....x_i^+}{\tilde{x}_i ..-1...+1}$$

Договоримся, для простоты записи, все рассуждения проводить только для кодированных факторов и будем их обозначать без волны и опускать запись единицы, как для нижнего так и для верхнего уровней фактора.

Рассмотрим ***полный факторный эксперимент*** 2^2 **(**ПФЭ). Пусть имеются два фактора, каждый из которых фиксируется на двух уровнях. Опыты по схеме ПФЭ 2^2 проводят в следующем порядке:

№ опыта	x_1	x_2
1	-	-
2	-	+
3	+	-
4	+	+

Последовательность проведения опытов с их результатами оформляется в виде специальной таблицы, которая называется ***матрицей планирования*** **.**

№ опыта	x_0	x_1	x_2	y
1	+	-	-	y_1
2	+	-	+	y_2
3	+	+	-	y_3

4	+	+	+	y_4
	0	1	2	y

Здесь для удобства введен фиктивный столбец $x_0 = +1$ и обозначение столбцов таблицы. Напомним, что имеем пока два фактора (n=2).

Рассмотрим линейную модель процесса $У = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2$, где выборочные коэффициенты регрессии находятся по методу наименьших квадратов из системы нормальных уравнений. Здесь обозначено (m,j)=$\sum_{i=1}^{n} x_{mi} x_{ij}$

$$\begin{cases} (0,0)b_0 + (0,1)b_1 + (0,2)b_2 = (0,y) \\ (1,0)b_0 + (1,1)b_1 + (1,2)b_2 = (1,y) \\ (2,0)b_0 + (2,1)b_1 + (2,2)b_2 = (2,y) \end{cases},$$

коэффициенты и правые части, которой являются скалярными произведениями соответствующих вектор-столбцов матрицы планирования.

План ПФЭ 2^2 обладает свойством ортогональности, поэтому все недиагональные коэффициенты

$$\sum_{i=1}^{N} x_{mi} x_{ji} = 0, (i = \overline{1, N}), (j \neq m = 0,1,2); \quad \sum_{i=1}^{N} x_{ij} = 0; \quad \sum_{1}^{N} x_{ij}^2 = N.$$

системы равны нулю (0,1)=(1,0)=(0,2)=(2,0)=(1,2)=(2,1)=0, а диагональные равны числу опытов (0,0)=(1,1)=(2,2)=4. Система приобретает вид $\begin{cases} 4b_0 = (0,y) \\ 4b_1 = (1,y) \\ 4b_2 = (2,y) \end{cases}$,

откуда $b_0 = \dfrac{y_1 + y_2 + y_3 + y_4}{4}$, $b_1 = \dfrac{-y_1 - y_2 + y_3 + y_4}{4}$,

$$b_2 = \frac{-y_1 + y_2 - y_3 + y_4}{4}.$$

Подставляя эти значения в функцию отклика, получаем уравнение линейной модели исследуемого процесса. Коэффициенты в уравнении указывают на силу влияния факторов. Величина коэффициента соответствует вкладу данного фактора в величину параметра оптимизации при переходе фактора с нулевого уровня на нижний или верхний. Вклад фактора равен удвоенному коэффициенту. Знаки коэффициентов говорят либо об увеличении, либо об уменьшении параметра оптимизации У с изменением значения фактора.

Отметим, что коэффициенты b являются несмещенными оценками для соответствующих генеральных коэффициентов $\beta (b \to \beta)$.

Оценка значимости коэффициентов линейной регрессии проверяется по критерию Стьюдента, причем делается N опытов и каждый опыт повторяется m раз, $t_i = \dfrac{|b_i|}{S_{b_i}}$, где S_{b_i} −среднее квадратичное отклонение коэффициента. Последнее находится по закону накопления ошибок $S_{b_i} = \sqrt{\sum_{j=1}^{N}\left(\dfrac{\partial b_j}{\partial y_i}\right)^2 S_j^2}$, где выборочные дисперсии S_j^2 определяются из m параллельных опытов ($j = \overline{1,N}$):

$$S_j^2 = \frac{\sum_{i=1}^{m}(y_{ij} - \bar{y}_i)^2}{m-1} \quad \text{и} \quad \bar{y}_j = \frac{\sum_{i=1}^{m} y_{ij}}{m}.$$

Если выборочные дисперсии однородны, рассчитывается дисперсия воспроизводимости S_B^2 по формуле:

$$S_B^2 = \frac{\sum_{i-1}^{N} S_i^2}{N}$$ с числом степеней свободы N(m-1).

Для множественной регрессии в случае диагональной матрицы планирования используют следующую формулу вычисления $S_{b_j}^2$:

$$S_{b_j}^2 = \frac{S_B^2}{N}.$$

При значениях $t_i > t_{кр}(\alpha, k)$ для выбранного уровня значимости α и k-числа степеней свободы ($k = N - l$, l -число коэффициентов в уравнении регрессии) коэффициент b_i значимо отличается от нуля. Если выполняется обратное неравенство, то коэффициент незначим и влиянием данного фактора можно пренебречь. В уравнении регрессии данный фактор исключается.

Затем проверяется адекватность полученной модели экспериментальным данным, то есть проверяется ее пригодность. Пусть для построения модели проведено N опытов, по результатам которых получили уравнение регрессии с l значимыми коэффициентами

$$Y = b_0 + b_1 x_1 + ... + b_{l-1} x_{l-1}.$$

Для некоторого набора значений факторов $x_1^0, x_2^0, ..., x_{l-1}^0$, например, в центре плана проделали к параллельных опытов и получили значения $y_1^0, y_2^0, ..., y_к^0$. Находится дисперсия адекватности или остаточная дисперсия по формуле

$$S_A^2 = \frac{к\sum_{1}^{N}(y_i - \hat{y}_i)^2}{N - l},$$

где y_i - результат отдельного опыта, а $\hat{y}_i$ - «модельные» значения, полученные при тех же значениях факторов, что и y_i. Далее, сравним дисперсии адекватности и воспроизводимости, используя критерий Фишера-Снедекора $F_{набл} = \frac{S_A^2}{S_B^2}$.

Если $F_{набл} < F_{кр}(\alpha; N-l, \kappa-1)$, то гипотеза об адекватности принимается. Кроме того, модель считается адекватной и в случае выполнения неравенства $S_B^2 > S_A^2$.

Напомним, что теснота связи определяется корреляционным соотношением $\eta = \frac{S_B^2}{S_B^2 + S_A^2}$ и для значений $\eta > 0{,}8$ считается тесной.

Пример 1. Пусть x_1 –количество органических удобрений, внесенных на один гектар, а x_2 –количество минеральных удобрений. Обозначим урожайность некоторой сельскохозяйственной культуры как У (в центнерах с гектара). Пусть даны $x_1^- = 1ц/га, x_1^+ = 2ц/га, x_2^- = 2ц/га, x_2^+ = 4ц/га.$ Требуется построить модель $Y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2$.

Решение. Пусть по результатам опытов матрица планирования имеет вид:

№ опыта	x_0	x_1	x_2	y
1	+	-	-	16
2	+	-	+	17
3	+	+	-	18
4	+	+	+	21

Получаем $b_0 = \frac{(0,y)}{4} = \frac{16+17+18+21}{4} = 18$,

$$b_1 = \frac{(1,y)}{4} = \frac{-16-17+18+21}{4} = 1{,}5$$

$$b_2 = \frac{(2,y)}{4} = \frac{-16+17-18+21}{4} = 1$$

Таким образом, получаем линейную модель в кодированных переменных

$$У = 18 + 1{,}5x_1 + x_2.$$

В натуральных переменных ($x_1^0 = \frac{x_1^- + x_1^+}{2} = 1{,}5; x_2^0 = 3; \Delta x_1 = 0{,}5; \Delta x_2 = 1$)

$$У=10{,}5+3x_1+x_2.$$

Видно, что урожайность в значительной степени зависит от внесения в почву органических удобрений. Можно прогнозировать урожай и при других вариациях внесения органических и минеральных удобрений.

Рассмотрим случай *нелинейной* модели вида

$$Y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_{12}x_1x_2.$$

Здесь учитывается совместное влияние двух факторов, их взаимодействие. То есть, эффект одного фактора зависит от уровня, на котором находится другой фактор. Тогда в матрицу планирования добавляют столбец $x_1 x_2$,, заполненный формальным перемножением элементов столбцов x_1 и x_2. Коэффициент b_{12} вычисляется как скалярное произведение столбца $x_1 x_2$ на столбец y.

№ опыта	x_0	x_1	x_2	x_1x_2	y
1	+	-	-	+	y_1
2	+	-	+	-	y_2
3	+	+	-	-	y_3
4	+	+	+	+	y_4

$$b_{12} = \frac{y_1 - y_2 - y_3 + y_4}{4}.$$

Рассмотрим ***полный факторный эксперимент** 2^3*. Теперь имеются уже три фактора x_1, x_2 и x_3. Каждый из них задается на двух уровнях. План ПФЭ 2^3 строится по следующему правилу:

1.) для факторов x_1 и x_2 строится план ПФЭ 2^2; при этом фактор x_3 берется каждый раз на нижнем уровне (4 опыта);
2.) для тех же факторов еще раз строится план ПФЭ 2^2, но фактор x_3 уже берется на верхнем уровне (4 опыта).

Матрица планирования ПФЭ 2^3 имеет вид

№ опыта	x_0	x_1	x_2	x_3	y
1	+	-	-	-	y_1
2	+	-	+	-	y_2
3	+	+	-	-	y_3
4	+	+	+	-	y_4
5	+	-	-	+	y_5
6	+	-	+	+	y_6
7	+	+	-	+	y_7
8	+	+	+	+	y_8
	0	1	2	3	

Получаем по аналогии с ПФЭ 2^2 следующие формулы для подсчета коэффициентов регрессии.

Для *линейной модели* $Y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3$ коэффициенты определяются по стандартной формуле

$$b_i = \frac{(i, y)}{8}, (i = 0,1,2,3).$$

Для *нелинейной модели с учетом взаимовлияния факторов* между собой

$$Y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 + b_{12} x_1 x_2 + b_{13} x_1 x_3 + b_{23} x_2 x_3 + b_{123} x_1 x_2 x_3,$$

где последнее слагаемое определяет совместное влияния трех факторов на функцию отклика, коэффициенты определяются тоже стандартным способом. Как правило, одновременное совместное влияние трех и более факторов мало, поэтому коэффициенты при них достаточно малы в сравнении с линейными и парными коэффициентами.

Матрица планирования эксперимента будет иметь вид

№ опыта	x_0	x_1	x_2	x_3	x_1x_2	x_1x_3	x_2x_3	$x_1x_2x_3$	y
1	+	-	-	-	+	+	+	-	y_1
2	+	-	+	-	-	+	-	+	y_2
3	+	+	-	-	-	-	+	+	y_3
4	+	+	+	-	+	-	-	-	y_4
5	+	-	-	+	+	-	-	+	y_5
6	+	-	+	+	-	-	+	-	y_6
7	+	+	-	+	-	+	-	-	y_7
8	+	+	+	+	+	+	+	+	y_8

Коэффициенты такой модели считаются обычным способом. Например,

$$b_{13} = \frac{y_1 + y_2 - y_3 - y_4 - y_5 - y_6 + y_7 + y_8}{8}$$

$$b_{123} = \frac{-y_1 + y_2 + y_3 - y_4 + y_5 - y_6 - y_7 + y_8}{8}.$$

Заметим, что аналогично строятся ПФЭ $2^n c..n > 3$.

Пример 2. Пусть каждый из трех факторов фиксируется на двух уровнях. Причем, дано: $x_1^- = 3, x_1^+ = 5, x_2^- = 1, x_2^+ = 2, x_3^- = 4, x_3^+ = 6$. Получены значения линейной функции отклика: y_1=2, y_2=4, y_3=3, y_4=8, y_5=11, y_6=8, y_7=2, y_8=12. В центре эксперимента ($x_1^0 = 4,..x_2^0 = 1{,}5,..x_3^0 = 5$), опыт повторен три раза и дал результаты $y_1^0 = 6,..y_2^0 = 9,..y_3^0 = 4$. Требуется:

1). получить уравнение линейной регрессии;

2).проверить его на адекватность опытным данным при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$;

3). проверить значимость полученных коэффициентов;

4). перейти в полученной модели к натуральным переменным и посчитать «модельные» значения переменной $\hat{y}^0$ в центре эксперимента.

Решение.

1.) Используя матрицу планирования ПФЭ 2^3 и опытные данные, получаем

$$b_0 = \frac{2+4+3+8+11+8+2+12}{8} = 6{,}25$$

$$b_1 = \frac{-2-4+3+8-11-8+2+12}{8} = 0$$

$$b_2 = \frac{-2+4-3+8-11+8-2+12}{8} = 1{,}75 .$$

$$b_3 = \frac{-2-4-3-8+11+8+2+12}{8} = 2$$

В результате получаем уравнение регрессии в кодированных переменных

$$\hat{y} = 6{,}25 + 1{,}75x_2 + 2x_3,$$

которое является моделью исследуемого процесса.

2). Проверим полученную модель на адекватность опытным данным. Для этого вычислим «модельные» значения $\hat{y}_i$, используя значения x_i из матрицы планирования.

$$\hat{y}_1 = 6{,}25 - 1{,}75 - 2 = 2{,}5 \ldots\ldots \hat{y}_2 = 6{,}25 + 1{,}75 - 2 = 6 \ldots\ldots \hat{y}_3 = 6{,}25 - 1{,}75 - 2 = 2{,}5$$

$$\hat{y}_4 = 6{,}25 + 1{,}75 - 2 = 6 \ldots\ldots \hat{y}_5 = 6{,}25 - 1{,}75 + 2 = 6{,}5 \ldots\ldots \hat{y}_6 = 6{,}25 + 1{,}75 + 2 = 10$$

$$\hat{y}_7 = 6{,}25 - 1{,}75 + 2 = 6{,}5 \ldots\ldots \hat{y}_8 = 6{,}25 + 1{,}75 + 2 = 10$$

Находим остаточную дисперсию (адекватности)

$$S_A^2 = \frac{1}{N-l}\sum_1^8 (y_i - \hat{y}_i)^2 = \frac{1}{4}[(2-2{,}5)^2 + (4-6)^2 + (3-2{,}5)^2 + (8-6)^2 + (11-6{,}5)^2 +$$

$$+ (8-10)^2 + (2-6{,}5)^2 + (12-10)^2] = 14{,}25.$$

$$\bar{y}^0 = \frac{1}{3}(6+9+4) = 6{,}33$$

так как опыт повторен три раза. Находим дисперсию воспроизводимости

$$S_B^2 = \frac{1}{m-1}\sum_{j=1}^{m}(y_j^0 - \bar{y}_j^0)^2 = \frac{1}{2}[(6-6{,}33)^2 + (9-6{,}33)^2 + (4-6{,}33)^2] = 11{,}85.$$

Так как $F_{набл} = \frac{S_A^2}{S_B^2} = \frac{14{,}25}{11{,}85} \approx 1{,}3$, а $F_{кр}(\alpha; N-l, k-1) = F_{кр}(0{,}05;4;2) = 19{,}25$,

то гипотеза об адекватности модели опытным данным принимается как рабочая.

3).Оценим значимость коэффициентов по критерию Стьюдента:

Так как $S_B = \sqrt{11{,}85} \approx 3{,}4$, то $S_{b0} = S_{b1} = S_{b2} = S_{b3} = \frac{S_B}{\sqrt{N}} \approx \frac{3{,}4}{\sqrt{8}} \approx 1{,}2.$

$$t_0 = \frac{b_0}{S_{b0}} = \frac{6{,}25}{1{,}2} \approx 5{,}2; t_1 = 0; t_2 = \frac{b_2}{S_{b2}} = \frac{1{,}75}{1{,}2} \approx 1{,}5; t_3 = \frac{b_3}{S_{b3}} = \frac{2}{1{,}2} \approx 1{,}6.$$

Для уровня значимости $\alpha = 0{,}05$ и степени свободы $k = 3-1$ из таблицы получаем $t_{кр}(0{,}05;2) = 4{,}3$. Видно, что значим только первый коэффициент. Зависимость функции отклика от всех факторов слабая.

4.)Перейдем к натуральным переменным. Так как $x_1^0 = 4, \Delta x_1 = 2, x_2^0 = 1{,}5,$ $\Delta x_2 = 1, x_3^0 = 5, \Delta x_3 = 2$, то искомое уравнение имеет вид

$$\hat{y} = 6{,}25 + 1{,}75\frac{x_2 - 1{,}5}{1} + 2\frac{x_3 - 5}{2} = -1{,}37 + 1{,}75x_2 + x_3.$$

«Модельное» значение $\hat{y}$ в центре эксперимента равно:

$$\hat{y}/_0 = -1.37 + 1{,}75 \cdot 1{,}5 + 5 = 6{,}25.$$

Видно, что значение $\hat{y}/_0$ совпадает со значением b_0.

Рассмотрим ***дробный факторный эксперимент*** (ДФЭ). Количество опытов в ПФЭ значительно превосходит число определяемых коэффициентов модели линейного типа (N>l). Сократить число опытов за счет удаления несущественной информации при построении линейной модели помогает использование дробных реплик.

Полуреплики. Пусть требуется получить уравнение регрессии вида

$$. \; Y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3$$

Поскольку линейное уравнение содержит три фактора, то для построения модели по схеме ПФЭ 2^3 надо провести 8 опытов. При этом необходимо определить только 4 коэффициента, остальные 4 опыта оказываются лишними. Сократим число опытов, проведя их по следующей схеме:

- уровни факторов x_1 и x_2 будем фиксировать в соответствии с планом ПФЭ 2^2,

- фактор x_3 зафиксируем на уровнях, полученных из соотношения $x_3=x_1x_2$, которое называется ***генерирующим соотношением***.

Матрица планирования эксперимента будет представлена

№ опыта	x_0	x_1	x_2	$x_3=x_1x_2$	y
1	+	-	-	+	y_1
2	+	-	+	-	y_2
3	+	+	-	-	y_3
4	+	+	+	+	y_4

Такой сокращенный план называется полурепликой от ПФЭ 2^3 и обозначается 1/2ПФЭ 2^3 или ДФЭ 2^{3-1}. Такой план так же обладает свойством ортогональности, а значит, коэффициенты модели могут быть получены стандартными методами. Однако, поскольку смешали линейный эффект x_3 с эффектом взаимодействия x_1x_2, то смешались и другие эффекты. Действительно, умножая генерирующее соотношение на x_3 ($x_3x_3=1$), получаем равенство, называемое определяющим контрастом

$$x_1x_2x_3=1,$$

умножая которое последовательно на x_1, x_2 и x_3, получаем систему смешанных эффектов $\begin{cases} x_1 = x_2x_3 \\ x_2 = x_1x_3 \\ x_3 = x_1x_2 \end{cases}$.

Эта система показывает, что коэффициент b_1 линейной модели есть смешанная оценка генеральных коэффициентов $\beta_1 + \beta_{23}$ теоретического уравнения регрессии. Точно так же $b_2 \to \beta_2 + \beta_{13}$ и $b_3 \to \beta_3 + \beta_{12}$.

Если эффекты взаимозависимости факторов малы, то мы получаем хорошую, адекватную линейную модель исследуемого процесса.

Если же взаимодействие каких либо факторов значимо, то из системы смешанных эффектов выбирают факторы, связи которых нас интересуют, и соответственно, строится матрица планирования дробного эксперимента. Таким образом, при использование дробного факторного эксперимента необходимо иметь ясные представления о коэффициентах, которые являются несмешанными оценками генеральных коэффициентов модели.

Возможность выделить несмешанные факторы называется разрешающей способностью ДФЭ. Тогда в зависимости от поставленной задачи подбирается дробная реплика, с помощью которой можно извлечь максимальную информацию при меньшем количестве опытов.

Покажем, что в рассмотренном примере ДФЭ 2^{3-1} можно построить полуреплику с генерирующим соотношением $x_3=-x_1x_2$, которая приводит к оценкам $b_1 \to \beta_1 - \beta_{23}, b_2 \to \beta_2 - \beta_{13}, b_3 \to \beta_3 - \beta_{12}$. Таким образом, проведя эксперименты по двум полурепликам, можно выделить линейные эффекты и эффекты взаимодействия как и в ПФЭ 2^3 (8 опытов).

Построим ДФЭ 2^{4-1}. Для этого уровни факторов x_1, x_2 и x_3 будем фиксировать по плану ПФЭ 2^3 , а уровень фактора x_4 возьмем из любого генерирующего соотношения

$$x_4=x_1x_2, \quad x_4=x_1x_3, \quad x_4=x_2x_3, \quad x_4=x_1x_2x_3.$$

Для последнего соотношения получим матрицу планирования

№ опыта	x_0	x_1	x_2	x_3	$x_4=x_1x_2x_3$	y
1	+	-	-	-	-	y_1
2	+	-	+	-	+	y_2
3	+	+	-	-	+	y_3
4	+	+	+	-	-	y_4
5	+	-	-	+	+	y_5
6	+	-	+	+	-	y_6
7	+	+	-	+	-	y_7
8	+	+	+	+	+	y_8

По данным таблицы легко найти коэффициенты линейной модели

$$Y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_4x_4.$$

Определяющий контраст имеет вид $x_1x_2x_3x_4=1$ и система смешанных эффектов запишется следующим образом

$$\begin{cases} x_1 = x_2x_3x_4 \\ x_2 = x_1x_3x_4 \\ x_3 = x_1x_2x_4 \\ x_4 = x_1x_2x_3 \\ x_1x_2 = x_3x_4 \\ x_1x_3 = x_2x_4 \\ x_2x_3 = x_1x_4 \end{cases}$$

Видно, что линейные эффекты смешаны только с тройными взаимодействием факторов, которые, как правило, считаются незначимыми, поэтому $b_1 \to \beta_1, b_2 \to \beta_2, b_3 \to \beta_3, b_4 \to \beta_4$.

Заметим, что если выбрать другие генерирующие соотношения, то линейные эффекты завяжутся с эффектами двойного взаимодействия факторов и поэтому эти полуреплики будут хуже первой, если только заранее не известно, что парные взаимодействия незначимы.

Рассмотрим ***четвертьреплики***. Построим 1/4 ПФЭ 2^5=ДФЭ 2^{5-2}. Для этого уровни факторов x_1, x_2, x_3 возьмем по схеме ПФЭ 2^3, а уровни факторов x_4, x_5 из генерирующих соотношений $x_4=x_1x_3$, $x_5=x_1x_2x_3$.

План ДФЭ 2^{5-2} будет иметь вид

№ опыта	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
1	+	-	-	-	+	-

2	+	-	+	-	+	+
3	+	+	-	-	-	+
4	+	+	+	-	-	-
5	+	-	-	+	-	+
6	+	-	+	+	-	-
7	+	+	-	+	+	-
8	+	+	+	+	+	+

Из выбранных генерирующих соотношений получим определяющие контрасты $x_1x_3x_4=1$ и $x_1x_2x_3x_5=1$. Перемножив их, получим еще один $x_2x_4x_5=1$. Линейные эффекты связаны с эффектами взаимодействия следующим образом:

$$x_1=x_3x_4=x_2x_3x_5=x_1x_2x_4x_5$$

$$x_2=x_4x_5=x_1x_3x_5=x_1x_2x_3x_4$$

$$x_3=x_1x_4=x_1x_2x_5=x_2x_3x_4x_5.$$

Как правило, взаимодействием трех и более факторов пренебрегают. Видно, что четвертьреплики смешивают линейные эффекты с парными. Если последними нельзя пренебречь, то придется построить еще одну четвертьреплику с отрицательными генерирующими соотношениями и выделить отдельно линейные эффекты и эффекты двойного взаимодействия факторов.

Дробную реплику, в которой p линейных эффектов приравнены к эффектам взаимодействия, обозначают как ДФЭ 2^{n-p}.

Пример 3. Требуется построить дробный план ДФЭ 2^{5-2} двухуровневого эксперимента в предположении слабого взаимодействия факторов.

Решение. При построении четвертьреплики ПФЭ 2^5 будем опираться на ПФЭ 2^3 . Так как взаимодействие факторов неоговорено, то фактор x_4 выберем следующим образом: $x_4=x_1x_2$, а $x_5=x_1x_2x_3$, чтобы пренебречь эффектами взаимодействия двух и более факторов.

Матрица планирования ДФЭ 2^{5-2} будет иметь вид

№ опыта	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
1	+	-	-	-	+	-
2	+	+	-	-	-	+
3	+	-	+	-	-	+
4	+	+	+	-	+	-
5	+	-	-	+	+	+
6	+	+	-	+	-	-
7	+	-	+	+	-	-
8	+	+	+	+	+	+

План ортогонален, в чем можно убедиться, перемножая скалярно столбцы матрицы планирования, и что позволяет легко определить коэффициенты линейной регрессии Рекомендуется: во втором столбце (при x_1) знаки чередовать через один, в третьем чередовать через два знака, в третьем через четыре, и так далее.

В заключение лекции рассмотрим ***оптимизацию методом крутого восхождения*** по поверхности функции отклика. Отметим, что этот метод был развит Боксом и Уилсоном в 50-х годах 20 века. Итак, необходимо определить экспериментально координаты экстремальной точки ($x^*_1, x^*_2,\ldots,x^*_n$), в которой функция $y=f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ принимает наибольшее значение. Для этого выбирается точка $M_1(x_1^1, x_2^1,..., x_n^1)$. В окрестности этой точки ставится, например, ПФЭ 2^n для локального описания исследуемой функции линейным уравнением регрессии

$$Y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + ... + b_nx_n.$$

Коэффициенты $b_i\,(i = \overline{1,n})$ можно интерпретировать как координаты вектора градиента функции y. Действительно,

$$gradY = \{\frac{\partial Y}{\partial x_1}, \frac{\partial Y}{\partial x_2},..., \frac{\partial Y}{\partial x_n}\} = \{b_1, b_2,..., b_n\}.$$

Как известно, градиент указывает локально направление наибольшего возрастания функции y, а значит, надо двигаться от точки M_1 в направлении grad f с определенным шагом h , каждый раз проверяя, возрастает функция или нет (проверка осуществляется постановкой опытов в точках, расположенных в направлении градиента, а ее надо выбрать из 2^{n-1}точек). В выбранной точке опять делается ПФЭ $2^{n,}$ и опять определяется градиент, и по нему опять выбирается точка в направлении нового градиента. Вычисления повторяются. На определенном этапе, когда значения функции перестанут возрастать или пойдут на убыль, определяются экстремальные координаты (оптимальные значения факторов). Затем берут новую точку M_2 в стороне от точек M_1 и полученной экстремальной точки и процесс вычисления повторяется. Если экстремальные значения функции отклика и экстремальных значений факторов близки к повторно вычисленным, то вычисления сделаны правильно.

Пример 4. Определить оптимальные значения минерального состава питательной среды по компонентам $KCl, NaCl, MgCl$ (в условных единицах) при культивировании микрообъектов. Пусть имеем

	x^-_i	x^+_i	x^0_i	Δx_i
KCl (x_1)	8	12	10	2

NaCl (x_2)	15	25	20	5
MgCl (x_3)	10	14	12	2

Матрица планирования ПФЭ 2^3 после проведенных опытов имеет вид

№ опыта	x_0	x_1	x_2	x_3	y
1	+	-	-	-	120
2	+	-	+	-	300
3	+	+	-	-	270
4	+	+	+	-	500
5	+	-	-	+	200
6	+	-	+	+	420
7	+	+	-	+	350
8	+	+	+	+	620

Кроме того, в центре эксперимента проведено 4 параллельных опыта, которые дали следующие результаты: $y^0{}_1$=300, $y^0{}_2$=360, $y^0{}_3$=380 и $y^0{}_4$=280.

$$\bar{y}^0 = \frac{300+360+380+280}{4} = 330.$$

Решение. Получим коэффициенты уравнения линейной регрессии

$$Y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3$$

$$b_0 = \frac{120+300+270+500+200+420+350+620}{8} = 348,$$

$$b_1 = \frac{-120-300+270+500-200-420+350+620}{8} = 88\ .$$

Опуская громоздкие аналогичные вычисления, сразу приведем результат:

$$b_2 = 112, b_3 = 50.$$

Таким образом, уравнение примет вид: У=348+88x_1+112x_2 +50x_3 .

Проверим адекватность полученной модели. Для этого подсчитаем

$$\hat{Y}_1 = 348-88-112-50 = 98, \hat{Y}_2 = 348-88+112-50 = 322, \hat{Y}_3 = 348+88-112-50 = 274,$$

$$\hat{Y}_4 = 348+88+112-50 = 498, \hat{Y}_5 = 348-88-112+50 = 198, \hat{Y}_6 = 348-88+112+50 = 422,$$

$$\hat{Y}_7 = 348+88-112+50 = 374, \hat{Y}_8 = 348+88+112+50 = 598.$$

Подсчитаем дисперсию адекватности

$$S_A^2 = \frac{1}{N-l}\sum_1^N (y_i - \hat{y}_i)^2 = \frac{1}{8-4}[(120-98)^2 + (300-322)^2 + (270-274)^2 + (500-498)^2 +$$

Под-

$$+(200-198)^2 + (420-422)^2 + (350-374)^2 + (620-598)^2] = 514.$$

считаем дисперсию воспроизводимости

$S_B^2 = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}(y_i^0 - \bar{y}^0)^2 = \frac{1}{4-1}[(300-330)^2 + (360-330)^2 + (380-330)^2 + (280-330)^2] = 2267.$ Так как $S_B^2 > S_A^2$, то гипотеза об адекватности модели принимается. Бокс и Уилсон показали, что если поставить серию опытов, в которой в каждом последующем варианте содержание $x_1, x_2, \ldots x_n$ менять пропорционально произведению коэффициента регрессии данного фактора на величину его единицы варьирования, то такое движение по поверхности отклика и будет кратчайшим путем к зоне оптимума. Имеем

$$b_1\Delta x_1 \approx 180.....b_2\Delta x_2 \approx 550......b_3\Delta x_3 \approx 100.$$

В качестве шага движения по поверхности отклика выберем величину h_i =0,001 $b_i\Delta x_i$. Тогда план крутого восхождения будет выглядеть следующим образом:

	серии					
№ опыта	1	2	3	4	5	6
x_1	x^0_1	x^0_1+0,01 $b_1\Delta x_1$	x^0_1+0,02 $b_1\Delta x_1$	.	.	.
x_2	x^0_2	x^0_2+0.01 $b_2\Delta x_2$	x^0_2+0,02 $b_2\Delta x_2$	.	.	.
x_3	x^0_3	x^0_3+0,01 $b_3\Delta x_3$	x^0_3+0,02 $b_3 x_3$	.	.	.

Пересчитаем кодированные факторы в натуральные серии:

№ опыта	1	2	3	4	5	6
x_1	10,0	11,8	13,6	15,4	17,2	19,0
x_2	20,0	25,5	31,0	36,5	42,0	47,5
x_3	12,0	13,0	14.0	15,0	16,0	17,0
y	340	560	810	1020	900	860

По результатам последней строки таблицы делаем вывод о том, что оптимальное значение факторов: x_1=15,4 ; x_2=36.5 ; x_3=15.

Для надежности, требуется сделать еще одну контрольную серию опытов.

1.7. Элементы теории массового обслуживания. Классификация систем массового обслуживания. Поток случайных событий. Система с отказом. Система с ожиданием

Одним из важных приложений теории вероятностей является теория систем массового обслуживания (СМО) или теория очередей. Многие реально *существующие и функционирующие системы можно отнести к системам массового обслуживания. Такие системы предназначены для обслуживания какого-то потока случайных и однотипных заявок (требований). Например, справочные бюро, авиадиспетчерские, телефонные станции, коммунальные службы быта, парикмахерские и тому подобное. Как уже отмечалось, каждая такая система характеризуется числом каналов обслуживания, которыми являются рабочие места операторов, точки приема, приборы регистрации и так далее. Заявки поступают на вход каждой системы массового обслуживания случайно во времени и обслуживаются в течение тоже случайного промежутка времени. Системы могут работать с недогрузкой и перегрузкой, когда заявки не успевают выполняться, и образуются очереди. Системы массового обслуживания могут быть двух видов.*

1. Системы с отказом, когда заявка, заставшая все каналы обслуживания занятыми, покидает систему.

2. Системы с ожиданием: если все каналы обслуживания заняты, то заявка становится в очередь и ожидает освобождения одного из каналов. Системы с очередью могут быть как с ограниченным (конец рабочего дня), так и с неограниченным ожиданием, когда длина очереди не устанавливается.

Как следует из практической деятельности человека системы массового обслуживания (например, автозаправка) имеют определенную пропускную способность, под которой обычно понимают среднее число заявок, которое система может обслужить в единицу времени.

Задача теории массового обслуживания состоит в установлении зависимости между потоком заявок, числом каналов и пропускной способностью системы.

В системах с дискретными состояниями и непрерывным временем рассматриваются потоки событий. **Потоком случайных событий** *называют последовательность однотипных событий, следующих одно за другим в случайные моменты времени. Например, поток автомашин по шоссе, поток вызовов машины скорой помощи или поток вызовов по ремонту электрических сетей и тому подобное. Из всего разнообразия потоков событий, рассмотрим только простейшие, а именно стационарные, ординарные и без последствий. Напомним их определение.*

Простейший поток с дискретными состояниями и непрерывным временем называется **пуассоновским потоком**. *Если интенсивность такого потока равна* λ *то, как показано в лекции 5, вероятность появления на интервале длиной* $\mathrm{t}\,\mathrm{m}$ *событий определяется по формуле*

$$P(m)=\frac{(t\lambda)^m}{m!}\mathrm{e}^{-\lambda t},\qquad m=0,1,2,\dots$$

Интервал времени Т *между двумя последовательными событиями в простейшем потоке есть случайная величина. Рассмотрим функцию и плотность распределения для величины* Т.

$$F(t)=P(T<t).$$

Вероятность того, что на участке времени (t_0,t) *не появится ни одного события* $(T\ge t-t_0)$*, будет определятся*

$$P_0=\mathrm{e}^{-\lambda t}.$$

Противоположное событие $(T<t)$ *описывается функцией, плотность распределения которой имеет вид* $(F'(t)=f(t))$*:*

$$f(t)=\lambda e^{-\lambda t}.$$

Видно, что промежуток времени между событиями в простейшем потоке распределен по показательному закону. Среднее значение Т *определяется как математическое ожидание*

$$M[T]=\frac{1}{\lambda},\qquad где\qquad \frac{1}{\lambda}=\bar{t}_{обсл.}\ .$$

Отметим свойство линейности потоков. При наложении нескольких простейших потоков с интенсивностями λ_i *в результате получается снова простейший поток с интенсивностью* $\lambda=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i$.

Перейдем к рассмотрению системы массового обслуживания с отказом. Сначала рассмотрим одноканальную систему, на вход которой поступает простейший поток заявок с интенсивностью λ *и временем обслуживания одной заявки* t*, распределенной по показательному закону:*

$$f(t)=\mu e^{-\mu t},$$

где μ *– интенсивность обслуживания заявки в данном канале.*

Необходимо определить абсолютную и относительную пропускную способность системы массового обслуживания. Для этого изобразим такую систему в виде графа

$$\boxed{S_0}\ \underset{\mu}{\overset{\lambda}{\rightleftarrows}}\ \boxed{S_1}\qquad ,$$

где состояние S_0 *– канал обслуживания свободен, а* S_1 *– занят. Видно, что граф состояний аналогичен графу “гибели-рождения”. Пусть вероятности состояний* S_0 *и* S_1 *равны* $P_0(t)$ *и* $P_1(t)$ *соответственно. Должно выполняться со-*

отношение $P_0(t)+P_1(t)=1$. *Составим систему дифференциальных уравнений Колмогорова по правилам, сформулированным в предыдущей лекции:*

$$\begin{cases} \dfrac{dP_0}{dt} = -\lambda P_0 + \mu P_1 \\ \dfrac{dP_1}{dt} = \lambda P_0 - \mu P_1 \end{cases}.$$

Пусть в начальный момент времени $t=0$ *канал свободен, тогда* $P_0(0)=1$, $P_1(0)=0$ *и* $\dfrac{dP_0}{dt} = -(\lambda+\mu)P_0 + \mu$, *решением которого является функция*

$$P_0(t) = \frac{\mu}{\lambda+\mu} + \frac{\lambda}{\lambda+\mu} e^{-(\lambda+\mu)t}.$$

В стационарном режиме при $t \to \infty$ *вероятности финальных состояний определяются как* $P_0 = \dfrac{\mu}{\lambda+\mu}$ *и* $P_1 = \dfrac{\lambda}{\lambda+\mu}$.

Видно, что P_0 *есть относительная пропускная способность системы массового обслуживания (одного канала), так как определяет число обслуженных заявок к числу поступивших:*

$$q \equiv P_0 = \frac{\mu}{\lambda+\mu}.$$

При этом вероятность отказа обслуживания заявки есть

$$P_{отк} = 1 - q = \frac{\lambda}{\lambda+\mu} = P_1.$$

Абсолютную пропускную способность определим как среднее число заявок, которое система может обслужить в единицу времени:

$$A = \lambda q = \frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu}.$$

Пример. *В справочном бюро работает только один оператор. Интенсивность запросов справок* $\lambda = 40$ *вызовов в час. Средняя продолжительность обслуживания* $\bar{t}_{обс} = 2$ *минуты. Определить относительную и абсолютную пропускную способность данного справочного бюро. Найти вероятность отказа в выдаче справки.*

Решение. *Определяем интенсивность обслуживания как*

$$\mu = \frac{1}{\bar{t}_{обс}} = \frac{60}{2} = 30 \text{ справок в час.}$$

Относительная пропускная способность такого справочного бюро будет

$$q = \frac{30}{30+40} = 0{,}428.$$

Видно, что обслуживаются только 43% заявок на получение справки. Абсолютная пропускная способность $A = \lambda q = 40 \cdot 0{,}43 = 17{,}2$. *То есть оператор может обслужить только 17 клиентов в час. Вероятность отказа в выдаче справки равна* $P_{отк} = 1 - q = 0{,}572$. *Сравним абсолютную пропускную способность с номинальной пропускной способностью, когда заявки поступают регулярно и каждая обслуживается 2 минуты.*

$$A_{ном} = \frac{1}{\bar{t}_{обс}} = \frac{60}{2} = 30 \text{ клиентов в час.}$$

Видно, что из-за случайности процесса поступления заявок и времени их обслуживания, число обслуживаемых клиентов уменьшается с 30 до 17.

Обобщим понятие эффективности систем массового обслуживания с отказом на многоканальные. Пусть система имеет n *каналов. Состояния будем нумеровать по числу занятых (или свободных) каналов:* S_0 *– все каналы свободны,*

S_1 *– один канал занят,*

S_2 *– два канала заняты,*

… … … … … … …

S_n *– все каналы заняты.*

Заявка, поступившая в момент, когда все n *каналов заняты, покидает систему. Размеченный граф состояний будет иметь вид:*

$$\boxed{S_0} \underset{\mu}{\overset{\lambda}{\rightleftarrows}} \boxed{S_1} \underset{2\mu}{\overset{\lambda}{\rightleftarrows}} \boxed{S_2} \underset{3\mu}{\overset{\lambda}{\rightleftarrows}} \quad \cdots \quad \underset{n\mu}{\overset{\lambda}{\rightleftarrows}} \boxed{S_{n-1}}$$

Видно, что интенсивность освобождения одного k*-го канала будет равна* $k\mu$ *(следствие наложения потоков), так как каждый канал освобождается с интенсивностью* μ*. Для получения вероятностей состояний системы необходимо составить* n *дифференциальных уравнений Колмогорова с соответствующими начальными условиями. Давайте ограничимся рассмотрением установившегося режима работы такой системы. По графу состояний получаем*

$$P_k = \frac{\lambda^k}{\mu \cdot 2\mu \cdot 3\mu \cdots k\mu} P_0 = \frac{(\lambda/\mu)^k}{k!} P_0, \qquad k = \overline{1,n}$$

и

$$P_0 = \left(1 + \frac{\lambda}{\mu} + \frac{1}{2!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \right)^{-1}.$$

Этот результат получен нами в последнем примере предыдущей лекции. Величину $\rho = \lambda/\mu$ *называют* **приведенной интенсивностью потока заявок**. *Как уже отмечалось, данные формулы называются* **формулами Эрланга**.

$$\begin{cases} P_k = \dfrac{\rho^k}{k!} P_0, \quad k = \overline{1,n} \\ P_0 = \left(1 + \dfrac{\rho}{1!} + \dfrac{\rho^2}{2!} + \cdots + \dfrac{\rho^n}{n!}\right)^{-1}. \end{cases}$$

Вероятность отказа системы определится как

$$P_{отк} = P_n = \frac{\rho^n}{n!} P_0.$$

Относительная пропускная способность системы (вероятность поступившей заявки быть обслуженной) будет

$$q = 1 - P_n = 1 - \frac{\rho^n}{n!} P_0.$$

Абсолютная пропускная способность системы равна

$$A = \lambda q = \lambda\left(1 - \frac{1}{n!}\rho^n P_0\right).$$

Среднее число занятых каналов $\bar{k} = M[k]$ *определяется*

0	1	..	n
P_0	P_1	..	P_n

$$\bar{k} = \frac{A}{\mu} = \frac{\lambda(1 - P_n)}{\mu} = \rho(1 - P_n) = \rho q.$$

Пример. *В справочном бюро работают три оператора. Параметры потока заявок и время их обслуживания даны в предыдущей задаче. Определить вероятность отказа в обслуживании и среднее число операторов, занятых в единицу времени.*

Решение. *Пусть состояние* S_0 *– все операторы не заняты,* S_1 *– один из трех операторов занят,* S_2 *– заняты двое и* S_3 *– все операторы в работе. По формулам Эрланга вычисляем вероятность состояний при* $\rho = \lambda/\mu = \dfrac{40}{30} = 1{,}3(3)$.

$$P_0 = \left(1 + \frac{1{,}3}{1} + \frac{1{,}3^2}{2} + \frac{1{,}3^3}{3 \cdot 2}\right)^{-1} \approx 0{,}285;$$

$$P_1 = \frac{\rho}{1} P_0 \approx 0{,}37; \quad P_2 = \frac{\rho^2}{2!} P_0 \approx 0{,}24; \quad P_3 = \frac{\rho^3}{3!} P_0 \approx 0{,}1.$$

Видно, что выполняется $P_0 + P_1 + P_2 + P_3 = 1$.

Вероятность отказа определяется $P_{отк} = P_3 = 0{,}1$, *то есть всего 10%. Значит, будут обслуживаться 90% клиентов вместо 43% для одного работающего оператора. Относительная пропускная способность равна* $q = 1 - P_3 = 0{,}9$. *Абсолютная пропускная способность составляет* $A = \lambda q = 40 \cdot 0{,}9 = 36$ *клиентов в час. Среднее число занятых операторов* $\bar{k} = \frac{A}{\mu} = \frac{36}{30} = 1{,}2$, *то есть постоянно работает какой-либо один из трех.*

Перейдем к рассмотрению систем массового обслуживания с ожиданием. Сначала рассмотрим одноканальную систему. Заявки, поступившие в систему в момент, когда она занята обслуживанием, встают в очередь и ожидают освобождения какого-либо из каналов. Пусть число мест в очереди – m, *и если заявка приходит, когда все* m *мест в очереди заняты, то ей отказывают.*

Состояния системы: S_0 *– канал свободен,*

S_1 *– канал занят,*

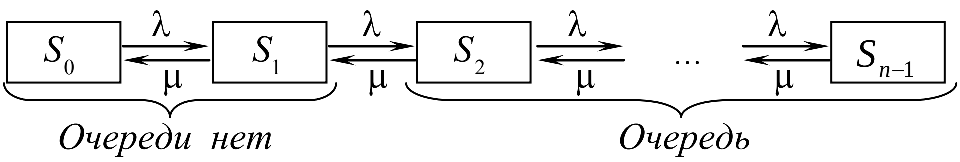
S_2 *– канал занят и одна заявка в очереди,*

S_3 *– канал занят и две заявки в очереди,*

S_k – … … … … … … …

S_{m+1} *– канал занят и* m *заявок в очереди.*

Граф состояний имеет вид:



В стационарном режиме предельные вероятности состояний вычисляются по формулам Эрланга: $P_1 = \rho P_0$, $P_2 = \rho^2 P_0$, …, $P_{m+1} = \rho^{m+1} P_0$

и $$P_0 = \left(1 + \rho + \rho^2 + \dots + \rho^{m+1}\right)^{-1} = \frac{1-\rho}{1-\rho^{m+2}},$$

поскольку это геометрическая прогрессия.

Вероятность отказа такой системы в выполнении заявки определится как $P_{отк} = P_{m+1} = \frac{\rho^{m+1}(1-\rho)}{1-\rho^{m+2}}$ *– все места в очереди заняты.*

Относительная пропускная способность $q = 1 - P_{отк} = \frac{1-\rho^{m+1}}{1-\rho^{m+2}}$.

Абсолютная пропускная способность $A = \lambda q = \lambda \dfrac{1-\rho^{m+1}}{1-\rho^{m+2}}$.

Среднее число заявок $\bar{r}$, *ожидающих очереди, находится как математическое ожидание* k – *числа заявок в очереди. Закон их распределения*

1	2	..	m
P_2	P_3	..	P_{m+1}

, *поэтому*

$$\bar{r} = M[k] = \frac{\rho^2\left[1-\rho^m(m+1-m\rho)\right]}{(1-\rho)\left(1-\rho^{m+2}\right)}.$$

Среднее число заявок $\overline{\omega}$, *находящихся на обслуживании, будет* $\overline{\omega} = 0 \cdot P_0 + 1(1-P_0) = \rho \dfrac{1-\rho^{m+1}}{1-\rho^{m+2}}$.

Среднее число заявок, находящихся в обслуживании всей системой с учетом очереди, определяется как $\bar{z} = \bar{r} + \overline{\omega}$.

Определим среднее время ожидания $\bar{t}_{ож}$ *заявки в очереди. Случайная величина* t – *время ожидания заявки в очереди, распределена по закону*

0	$\frac{1}{\mu}$	$\frac{2}{\mu}$	…	$\frac{m}{\mu}$
P_0	P_1	P_2	…	P_m

, $\bar{t}_{ож} = M[t]$.

После несложных преобразований, которые рекомендуется сделать самостоятельно, можно получить

$$\bar{t}_{ож} = \frac{\rho\left[1-\rho^m(m+1-m\rho)\right]}{\mu(1-\rho)\left(1-\rho^{m+2}\right)} = \frac{1}{\rho\mu}\bar{r} = \frac{\bar{r}}{\lambda}.$$

Наконец, определим среднее время обслуживания одной заявки. Вероятность того, что заявка обслуживается в течение $1/\mu$ *времени будет* $q = 1 - P_{отк}$. *Пусть* θ *– случайная величина, равная времени обслуживания заявки, тогда*

$$\bar{t}_{обс} = M[\theta] = \frac{q}{\mu}.$$

При этом можно еще ввести среднее время пребывания заявки в данной системе с ограниченной очередью, равное сумме средних времен обслуживания и ожидания $\bar{t} = \bar{t}_{обс} + \bar{t}_{ож}$.

Примеры.

1. *На автозаправочной станции (АЗС) работает только одна колонка. На площадке перед АЗС могут разместиться только три автомобиля. Поток автомашин на заправку составляет в среднем 60 единиц в час, а время одной заправки в среднем составляет 1,25 минут.*

Определить вероятность отказа в заправке автомобиля горючим, пропускную способность АЗС, среднее число машин в очереди и среднее время пребывание автомашин на АЗС.

Решение. *Из условий задачи* $\lambda = \frac{60}{60} = 1\,мин,$ $\mu = \frac{1}{1,25} = 0,8\,мин,$ $\rho = 1,25$.

По формулам Эрланга

$$P_0 = \frac{1-1,25}{1-3,05} = 0,122, \quad P_1 = 1,25 \cdot 0,122 = 0,152, \quad P_2 = 1,25^2 \cdot 0,122 = 0,191,$$

$$P_3 = 1,25^3 \cdot 0,122 = 0,239, \quad P_4 = 1,25^4 \cdot 0,122 = 0,297.$$

Вероятность отказа $P_{отк} = P_4 = 0,297$ *(30%).*

Абсолютная пропускная способность $A = \lambda q = 1 - 0,297 = 0,703$ *(70%).*

Относительная пропускная способность $q = 1 - P_{отк} = 0,703$.

Среднее число машин в очереди $\bar{r} = 1,56$ *и* $\bar{\omega} = 0,88$.

Среднее число машин на АЗС $\bar{z} = \bar{r} + \bar{\omega} = 2,44$.

Среднее время ожидания в очереди $\bar{t}_{ож} = \frac{\bar{r}}{\mu} = 1,56\,мин$ *и среднее время обслуживания автомобиля по заправке его горючим* $\bar{t}_{обс} = \frac{q}{\mu} = 0,88\,мин.$

И., наконец, среднее время, которое автомобили проводят на АЗС:

$$\bar{t} = 1,56 + 0,88 = 2,44 \text{ минуты.}$$

2. Дана одноканальная система массового обслуживания с неограниченной очередью. Получить среднее число заявок в системе и среднее время ожидания заявки в очереди.

Решение.

$$\underbrace{\boxed{S_0} \underset{\mu}{\overset{\lambda}{\rightleftarrows}} \boxed{S_1}}_{\textit{Очереди нет}} \; \underbrace{\underset{\mu}{\overset{\lambda}{\rightleftarrows}} \boxed{S_2} \underset{\mu}{\overset{\lambda}{\rightleftarrows}} \boxed{S_3} \underset{\mu}{\overset{\lambda}{\rightleftarrows}} \cdots}_{\textit{Очередь}}$$

Полученные ранее формулы Эрланга надо взять в пределе $m \to \infty$. *Следует иметь в виду, что установившийся режим работы такой системы может быть только при выполнении условия* $\rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1$, *когда интенсивность потока заявок меньше интенсивности их обслуживания.*

Используем формулу для бесконечно убывающей геометрической прогрессии, тогда получаем вероятности финальных состояний:

$$P_0 = 1-\rho,\;\; P_1 = \rho(1-\rho),\;\; P_2 = \rho^2(1-\rho),\;\; \ldots,\;\; P_k = \rho^k(1-\rho).$$

Так как все заявки рано или поздно будут обслужены, то отсюда следует, что $P_{отк} = 0$ *и* $q = 1$.

Абсолютная пропускная способность такой системы $A = \lambda q = \lambda$.

Среднее число заявок при $m \to \infty$ $\bar{r} = \dfrac{\rho^2}{1-\rho}$, $\overline{\omega} = \rho$, $\bar{z} = \dfrac{\rho^2}{1-\rho} + \rho = \dfrac{\rho}{1-\rho}$.

Среднее время ожидания в очереди $\bar{t}_{ож} = \dfrac{\rho^2}{\lambda(1-\rho)}$ *и среднее время пребывания заявки в системе* $\bar{t} = \dfrac{1}{\mu}\cdot\dfrac{1}{1-\rho}$.

В заключении лекции рассмотрим работу многоканальной системы массового обслуживания с ожиданием. Пусть на n*-канальную систему поступает простейший поток заявок с интенсивностью* λ. *Интенсивность обслуживания для одного канала* μ *и число мест в очереди* m. *Будем нумеровать состояния системы по числу заявок в системе:*

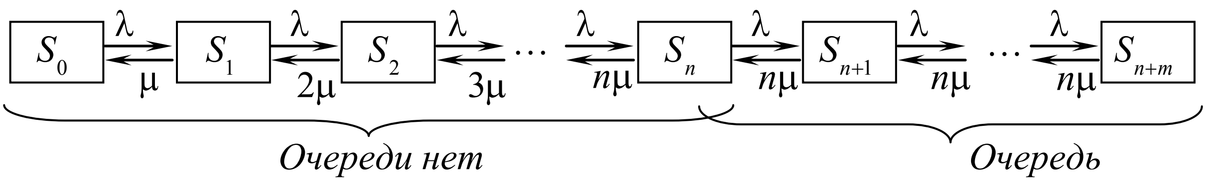
$$\left.\begin{array}{l} S_0 \text{ – все каналы свободны,} \\ S_1 \text{ – занят один канал,} \\ \ldots\;\ldots\;\ldots\;\ldots\;\ldots\;\ldots\;\ldots, \\ S_n \text{ – заняты n каналов,} \end{array}\right\} \text{нет очере-}$$

S_{n+1} *– заняты* n *каналов и одна заявка в очереди,*

… … … … … … …

S_{n+m} *– заняты* n *каналов и* m *заявок в очереди.*

Граф состояний имеет вид:



Для установившегося режима работы системы $(t \to \infty)$

$$P_0=\left[1+\frac{\rho}{1!}+\frac{\rho^2}{2!}+\dots+\frac{\rho^n}{n!}+\frac{\rho^n}{n!}+\frac{\rho^{n+1}}{n\cdot n!}+\dots+\frac{\rho^{n+m}}{n^m n!}\right]^{-1}=$$

$$=\left[1+\frac{\rho}{1!}+\frac{\rho^2}{2!}+\dots+\frac{\rho^n}{n!}+\frac{\rho^n}{n!}\frac{\frac{\rho}{n}-\left(\frac{\rho}{n}\right)^{m+1}}{1-\frac{\rho}{n}}\right]^{-1}$$

$$\begin{cases} P_1=\dfrac{\rho}{1!}P_0, \quad P_2=\dfrac{\rho^2}{2!}P_0, \ \dots, \ P_n=\dfrac{\rho^n}{n!}P_0 \\ P_{n+1}=\dfrac{\rho^{n+1}}{n\cdot n!}P_0, \quad P_{n+2}=\dfrac{\rho^{n+2}}{n^2 n!}P_0, \ \dots, \ P_{n+m}=\dfrac{\rho^{n+m}}{n^m n!}P_0 \end{cases}.$$

Приведем формулы, характеризующие эффективность обслуживания данной системой, аналогичные полученным для одноканальной системы.

Вероятность отказа, когда все места в очереди заняты, $P_{отк}=P_{n+m}=$

$$=\frac{\rho^{n+m}}{n^m n!}P_0.$$

Относительная и абсолютная пропускные способности системы соответственно $q=1-P_{отк}$, $A=\lambda q$.

Среднее число занятых каналов определится как $\bar{k}=\dfrac{A}{\mu}=\rho q$.

Среднее число заявок в очереди $\bar{r}=M[k]$,

$$\bar{r}=\frac{\rho^{n+1}}{n\cdot n!}P_0=\frac{1-(m+1)æ+mæ}{(1-æ)^2}, \quad \text{где} \ æ=\frac{\rho}{n}.$$

Среднее число заявок, находящихся в данной системе, $\bar{z}=\bar{r}+\bar{k}$.

Среднее время ожидания заявки в очереди

$$\bar{t}_{ож}=\frac{1}{n\mu}P_n+\frac{2}{n\mu}P_{n+1}+\dots+\frac{m}{n\mu}P_{n+m-1}=\frac{\rho^n P_0}{n\mu n!}\left[1+\frac{2\rho}{n}+\frac{3\rho^2}{n^2}+\dots+\frac{m\rho^{m-1}}{n^{m-1}}\right]=\frac{\bar{r}}{\lambda}.$$

Среднее время пребывания заявки в системе $\bar{t}=\bar{t}_{ож}+\dfrac{q}{\mu}$.

Пример. *На АЗС работают две колонки с интенсивностью обслуживания* $\mu=0{,}5$ *автомобиля в минуту для каждой. Интенсивность потока автомашин на заправку горючим составляет 8 машин в течение 10 минут. Очередь на заправку не ограничивается. Найти основные характеристики эффективности работы данной АЗС.*

Решение. *Граф состояний неограничен* $(m \to \infty)$. *Установившейся режим в такой системе возможен только при выполнении условия* $æ = \frac{\rho}{n} < 1$, *тогда для вычислений можно опять воспользоваться формулой для бесконечно убывающей геометрической прогрессии. По данным задачи* $\lambda = 0{,}8$; $\mu = 0{,}5$; $n = 2$; $\rho = \frac{\lambda}{\mu} = 1{,}6$; $æ = \frac{\rho}{n} = \frac{1{,}6}{2} = 0{,}8 < 1$, *значит процесс стационарный. Тогда*

$$P_0 = \left[1 + \frac{\rho}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \cdots + \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^{n+1}}{n!(n-\rho)}\right]^{-1} = \left[1 + 1{,}6 + \frac{1{,}6^2}{2} + \frac{1{,}6^3}{2!(2-1{,}6)}\right]^{-1} \approx 0{,}110,$$

$$P_1 = 1{,}6P_0 = 0{,}178, \quad P_2 = \frac{1{,}6^2}{2}P_0 = 0{,}142.$$

Тогда $A = \lambda = 0{,}8$; $\bar{k} = \frac{A}{\mu} = \frac{0{,}8}{0{,}5} = 1{,}6$.

Вероятность отсутствия очереди у АЗС $P = P_0 + P_1 + P_2 = 0{,}431$ *(43%).*

Среднее число автомашин в очереди $\bar{r} = 0{,}71$. *Среднее число автомашин на АЗС* $\bar{z} = 0{,}71 + 1{,}6 = 2{,}31$. *Среднее время ожидания в очереди* $\bar{t}_{ож} = \frac{\bar{r}}{\lambda} = \frac{0{,}71}{0{,}8} = 0{,}89$ *минут и среднее время пребывания автомашин на АЗС* $\bar{t} = \bar{t}_{ож} + \frac{1}{\mu} = 2{,}89$ *минут.*

1.8. Основные понятия теории информации. Энтропия и информация. Информация для систем с непрерывным множеством состояний. Кодирование сообщений. Пропускная способность канала связи с помехами.

Важным и перспективным приложением теории вероятностей является теория информации, задача которой состоит в изучении закономерностей передачи, обработке и хранении информации. Сама информация может передаваться различными способами, например, с помощью низкочастотной модуляции высокочастотных электромагнитных волн, голосовой модуляцией звуковых волн, световыми сигналами, механическими перемещениями (флажками) и тому подобное. Как правило, информация кодируется, то есть переводится на язык символов, сигналов. Любое сообщение (информация) составляет совокупность сведений о некоторой физической системе, состояние которой нам неизвестно.

Пусть имеется некоторая система X, которая случайным образом может быть в том или ином состоянии. Каждому состоянию приписывают числовое значение x_1, x_2, x_3, …, x_n (дискретные состояния). Чем больше состояний системы, тем больше информации о ней надо знать. Каждое состояние характеризуется вероятностью $P(x_i) = P_i$, $i = \overline{1,n}$. При этом должно выполняться $\sum_1^n P_i = 1$. Мерой неопределенности состояния системы является энтропия. **Энтропией системы** *называют сумму произведений вероятностей различных состояний системы на логарифмы этих вероятностей, взятых с обратным знаком:*

$$H(x) = -\sum_{i=1}^{n} P_i \log P_i, \qquad H(x) > 0.$$

Для дальнейших выкладок удобно пользоваться определением энтропии как математического ожидания случайной величины

$$H(x) = M[-\log P(x)].$$

Заметим, что удобно пользоваться логарифмами с основанием 2 и измерять энтропию в двоичных единицах, что хорошо согласуется с двоичной системой счисления, применяемой в ЭВМ.

Рассмотрим свойства энтропии.

1. $H(x) = 0$, если одно состояние системы достоверно, а остальные невозможны. (Например $P_3 = 1$, $P_1 = P_2 = P_4 = 0$, тогда $\log P_3 = 0$ и $\lim\limits_{P_i \to 0} P_i \log P_i = 0$, $i = 1,2,4$.)

2. При увеличении числа состояний системы ее энтропия $H(x)$ увеличивается. Действительно, если все состояния равновероятны $P(x) = \frac{1}{n}$ и $\sum_{i=1}^{n} P_i = 1$, то $H(x) = \log n$.

3. Величина $H(x)$ имеет максимум, когда все состояния равновероятны и $H_{\max}(x) = \log n$. Это легко показать, исследуя на условный экстремум функцию Лагранжа $F = -\sum_{i=1}^{n} P_i \log P_i + \lambda\left(\sum_{i=1}^{n} P_i - 1\right)$,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial P_i} = -\log P_i - \log \mathrm{e} + \lambda = 0, \quad i = \overline{1,n}; \\ \sum_{i=1}^{n} P_i = 1. \end{cases}$$

Видно, что все P_i *равны и* $P_i = \frac{1}{n}$, *отсюда следует* $H_{\max}(x) = \log n$.

4. Если несколько независимых систем объединить в одну, то их энтропии складываются.

$$H(x, y) = H(x) + H(y)$$

Это легко понять, если вспомнить, что энтропию можно представить как математическое ожидание случайной величины $\log P(x)$.

Таким образом, если сложная система состоит из более простых систем (независимых), то ее энтропию можно определить суммой энтропий входящих в нее систем.

Пример. *Определить максимально возможную энтропию системы, состоящей из трех элементов, каждый из которых может быть в пяти возможных состояниях.*

Решение. *Поскольку* $N = \overline{A}_3^5 = 5^3$, *то* $H(x) = -\log 5^3 \approx 6{,}9$ *или, по-другому,* $H = H(X) + H(Y) + H(Z) = -\log 5 - \log 5 - \log 5 \approx 6{,}9$.

Для зависимых систем введем понятие условной энтропии *системы* Y, *при условии, что система* X *находится в состоянии* x_i*:*

$$H(Y|x_i) = -\sum_{j=1}^{m} P(y_j|x_i) \log P(y_j|x_i).$$

Введем также **полную условную энтропию** *системы* Y *относительно системы* X*:*

$$H(Y|X) = \sum_{i=1}^{n} P_i H(Y|x_i),$$

которая характеризует степень неопределенности системы Y *после того, как состояние системы* X *полностью определилось.*

Покажем, что если две зависимые системы X *и* Y *объединяются в одну, то ее энтропия будет определяться как*

$$H(X,Y) = H(X) + H(Y|X) = H(Y) + H(X|Y).$$

Действительно,

$$H(X,Y) = M[-\log P(X,Y)] = M[-\log P(X)P(Y|X)] =$$
$$= M[-\log P(X)] + M[-\log P(Y|X)],$$

что и требовалось доказать. Если же системы X *и* Y *независимы, то получаем* $H(X,Y) = H(X) + H(Y)$.

Видно, что $H(Y|X) \le H(Y)$ *– степень неопределенности системы не может увеличиться из-за того, что состояние другой системы стало известно.*

Итак, энтропия служит мерой неопределенности физической системы. По мере получения сведений (информации) об этой системе, ее энтропия должна уменьшаться. Введем понятие количества информации, приобретаемого при полном выяснении состояния системы X, *которое равно энтропии этой системы:*

$$I_X \equiv H(X) = -\sum_{i=1}^{n} P_i \log P_i, \quad i = \overline{1,n} \quad \text{или} \quad I_X = \sum_{i=1}^{n} I_i P_i,$$

где $I_i = -\log P_i$ *– средняя информация, поучаемая от всех возможных отдельных сообщений. Заметим, что* $I_X \geq 0$, $I_i \geq 0$.

Наблюдая за системой, можно получить о ней информацию. Приведем стандартный **пример**. *Один из приятелей задумал одно из чисел от 1 до 16, а другой пытается угадать это число, задавая вопросы. Найти наименьшее число вопросов, требуемое для определения задуманного числа, и примерную схему вопросов.*

Решение. *Будем считать, что все числа равновероятны:* $P_i = \dfrac{1}{16}$, $i = \overline{1,16}$. *Тогда число вопросов будет не менее 4, так как* $I_X = \log 16 = 4$. *Пусть было задумано число 10.*

Первый вопрос: число менее 9? Ответ: нет. Следует, что 9, 10, ..., 16.

Второй вопрос: число меньше 12? Ответ: да. Следует, что 9, 10, 12.

Третий вопрос: число больше 10? Ответ: нет. Следует, что 9, 10.

Четвертый вопрос: Число меньше 10? Ответ: нет. Следует, что задуманное число является 10.

Если системы Y *и* X *связаны между собой, и за системой* X *ведется наблюдение, то информация о системе* Y *определиться как*

$$I_{X \to Y} = H(Y) - H(Y|X).$$

При получении информации о системе X, $H(Y) = H(Y|X)$ *и* $I_{X \to Y} = 0$. *Легко показать, что выполняется* $I_{X \to Y} = I_{Y \to X}$.

Введем понятие взаимной информации $I_{Y \leftrightarrow X}$. *Нормируем ее так, что если системы* X *и* Y *независимы, то* $I_{Y \leftrightarrow X} = 0$. *Если из двух систем подчиненной является система* X, *то* $H(X|Y) = 0$ *и*

$$I_{Y \leftrightarrow X} = H(X),$$

то есть информация о системе Y *равна энтропии подчиненной системы.*

Получим общее выражение для полной взаимной информации, содержащейся в двух связанных друг с другом системах. Поскольку $H(X|Y) = H(X,Y) - H(Y)$, *то получаем*

$$I_{X\leftrightarrow Y}=H(Y)+H(X)-H(X,Y)$$

или через математические ожидания

$$I_{X\leftrightarrow Y}=M[-\log P(X)]+M[-\log P(Y)]-M[-\log P(X,Y)];$$

$$I_{X\leftrightarrow Y}=M\left[\log\frac{P(X,Y)}{P(X)P(Y)}\right].$$

Для подсчета информации более удобна формула

$$I_{X\leftrightarrow Y}=\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}P_{ij}\log\frac{P_{ij}}{P_iP_j},$$

где $P_{ij}=P(X=x_i,Y=y_i)$, $P_i=P(x_i)$, $P_j=P(y_j)$.

Введем, там же понятие частной информации, содержащейся в отдельном сообщении (система находится в конкретном состоянии x_i*). При этом очевидно, что полная информация состоит из частных информаций:*

$$I_{X\to Y}=\sum_{j=1}^{m}P_jI_{x_i\to Y}\ge 0$$

Сравнивая с предыдущими формулами и учитывая $P_{ji}=P(x_i)\,P(y_j|x_i)$*, получаем количество частной информации*

$$I_{x_i\to Y}=\sum_{i=1}^{n}P(x_i|y_j)\log\frac{P(x_i|y_j)}{P_i}$$

или

$$I_{x_i\to Y}=M_{x_i}\left[\log\frac{P(Y|x_i)}{P(Y)}\right].$$

Можно определить еще один тип частной информации о событии y_j*, содержащейся в событии* x_i*.*

$$I_{x_i\to y_j}=\log\frac{P(y_j|x_i)}{P_j},$$

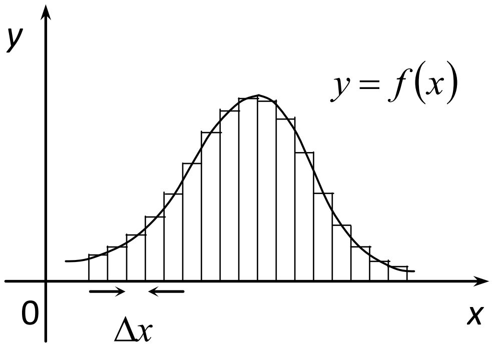
где $P(y_j|x_i)$ *– вероятность первого события после сообщения* x_i*,* P_j *– вероятность события до сообщения. Такая частная информация может быть как положительной, так и отрицательной. Она положительна, если* $P(y_j|x_i)>P_j$*, то есть вероятность события* y_j *увеличивается в результате сообщения* x_i*. Если события* x_i *и* y_j *несовместимы, то* $I_{x_i\to y_j}=-\infty$*.*

Пример. *В урне 4 белых и 5 черных шаров. Из урны вынимают 3 шара (2 черных и 1 белый). Какая информация заключена в событии, что следующий вынутый шар будет белый по отношению к предыдущему состоянию?*

Решение. *Здесь* $P(X) = C_5^2 \cdot C_4^1 / C_9^3$ *и* $P(Y|X) = \frac{4}{6}$.

$$I_{X \to Y} = \log \frac{P(Y|X)}{P(X)} = \log \frac{2 \cdot 21}{3 \cdot 10} \approx \log 1{,}4 \approx 0{,}6$$

(дв.ед).



Мы рассмотрели системы с дискретными состояниями. Если же имеется физическая система с непрерывным спектром состояний, то состояние такой системы задается плотностью вероятности $f(x)$. *Разобьем площадь под кривой* $f(x)$ *на отдельные площадки со сторонами* Δx *и* $f(x_i)$, $i = \overline{1,n}$. *Тогда энтропия может быть примерно определена следующим образом:*

$$H(x) \approx -\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x \log\ (f(x_i)\Delta x) = -\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \log f(x_i)\Delta x - \log \Delta x \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x .$$

Увеличивая число элементарных площадок ($n \to \infty$, $\Delta x \to 0$*) и учитывая, что* $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$, *получаем*

$$H_{\Delta x}(x) = -\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \log\ f(x)dx - \log \Delta x \equiv H(x) - \log \Delta x .$$

Видно, что при $\Delta x \to 0$, $n \to \infty$, $\log \Delta x \to -\infty$. *Здесь* Δx *– можно рассматривать, как степень точности определения состояния системы. Чем точнее задается состояние системы, тем большую степень неопределенности (энтропии) необходимо преодолеть. Величина* Δx *характеризует точность измерений. Например, измерение расстояния между городами осуществляется с точностью до* $\Delta x = 1$ *километра.*

Итак, определим энтропию такой системы как

$$H(x) = -\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \log f(x)dx \equiv M[-\log f(x)] .$$

От точности измерений состояния системы зависит только начало отсчета величины энтропии.

По аналогии с предыдущими результатами можно ввести частную условную энтропию системы X, Y*:*

$$H(Y|X) = -\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(y|x) \log f(y|x) dy - \log \Delta y$$

и полную условную энтропию

$$H(Y|X) = -\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_1(x) f(y|x) \log f(y|x) dxdy - \log \Delta y =$$

$$= -\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \log f(y|x) dxdy - \log \Delta y \ .$$

Энтропия сложной системы определяется, как и раньше:

$$H(X, Y) = H(X) + H(Y|X)$$

и для независимых систем

$$H(X, Y) = H(X) + H(Y).$$

Количество информации о состоянии системы вычисляется как разность двух энтропий до и после получения информации, поэтому исчезает слагаемое $\log \Delta x$. *Количество полной взаимной информации, содержащейся в двух системах* X *и* Y, *определяется*

$$I_{Y \to X} = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \log \frac{f(x, y)}{f_1(X) f_2(Y)} dxdy = M\left[\log \frac{f(x, y)}{f_1(X) f_2(Y)}\right].$$

Видно, что если системы независимы, то $I_{X \leftrightarrow Y} = 0.$

Пример. *Задана нормально распределенная случайная величина* X *с* $m_x = 0$ *и* $\sigma_x = 3$. *Величина* X *измеряется с ошибкой* Z, *тоже распределенной нормально с* $m_z = 0$ *и* $\sigma_z = 1$. *Ошибки* Z *не зависят от* X. *Результат измерений* $Y = X + Z$. *Определить количество информации о величине* X, *которое содержит случайная величина* Y.

Решение.

$$f_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}}, \quad f_2(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_z^2}} e^{-\frac{y^2}{2\left(\sigma_x^2 + \sigma_z^2\right)}} \quad \text{и} \quad f(y|x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_z} e^{-\frac{(y-x)^2}{2\sigma_z^2}}$$

.

Тогда

$$\log \frac{f(x, y)}{f_1(x) f_2(y)} = \log \frac{\cancel{f_1(x)} f(y|x)}{\cancel{f_1(x)} f_2(y)} = \log \frac{\sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_x^2}}{\sigma_z} + \frac{1}{\ln 2}\left[\frac{(y - x)^2}{2\sigma_z^2} - \frac{y^2}{2\left(\sigma_x^2 + \sigma_z^2\right)}\right]$$

и

$$I_{Y\leftrightarrow X} = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\log\frac{\sqrt{\sigma_x^2+\sigma_z^2}}{\varsigma_z}dxdy + \frac{1}{\ln 2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\frac{z^2}{2\sigma_z^2}dxdy -$$

$$-\frac{1}{\ln 2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\frac{y^2}{2\left(\sigma_x^2+\sigma_z^2\right)}dxdy = \log\frac{\sqrt{\sigma_x^2+\sigma_z^2}}{\sigma_z} + \frac{1}{2\ln 2} - \frac{1}{2\ln 2}\cdot\frac{\sigma_y^2}{\sigma_x^2+\sigma_z^2} =$$

$$= \log\frac{\sqrt{\sigma_x^2+\sigma_z^2}}{\sigma_z}\ .$$

Окончательно получаем $I_{Y\leftrightarrow X} = \log\sqrt{10} = \frac{3{,}4}{2} = 1{,}7$ *(дв. ед.).*

Далее рассмотрим способы передачи информации и эффективность этой передачи. Как известно, для передачи информации пользуются кодом – условными сигналами. Например, азбука Морзе, где только три символа: точка, тире и длинная пауза (пробел между буквами). Другим примером кодирования является кодирование голосового сообщения низкочастотной модуляцией высокочастотной электромагнитной волны, которая переносит это сообщение на многие сотни километров. Все приказы во время военных действий зашифровываются для того, чтобы противник не владел боевой инициативой.

Пусть имеется некоторая система X *(например, буквы русского алфавита), которая случайным образом принимает конечное число состояний* n *(32 буквы), которые можно закодировать с помощью другой системы* Y *(азбука Морзе) с числом состояний* m. *Возникает вопрос об оптимальном выборе кодирования с помощью наименьшего числа символов, чтобы на передачу сообщения затрачивалось наименьшее время, и не было потери и искажения информации.*

Наиболее распространенным кодом является двоичный код только с двумя символами 0 и 1. Именно двоичный код применяется при вводе и выводе информации из ЭВМ, работающей по двоичной системе счисления. В двоичной системе любую цифру можно записать, разбив ее на разряды степени 2. Например, число 25

$$25 = 1\cdot 2^4 + 1\cdot 2^3 + 0\cdot 2^2 + 0\cdot 2^1 + 1\cdot 2^0$$

запишется, как 11001. Приведем таблицу цифр в двоичной системе счисления

0	*00000*		
1	*00001*	*11*	*001011*
2	*00010*	*12*	*001100*
3	*00011*	*1*	*001101*

		3	
4	*00100*	*14*	*001110*
5	*00101*	*15*	*001111*
6	*00110*	*16*	*010000*
7	*00111*	*17*	*010001*
8	*001000*	*18*	*010010*
9	*001001*	*19*	*010011*
10	*001010*	*20*	*010100*

Буквы алфавита можно распределить по 5 разрядам, так как $2^5 = 32$. *Можно просто обозначить каждую букву комбинацией из пяти 0 и 1 или по вероятности их появления в тексте определить их разряды. В более простые разряды будут входить чаще других употребляемые буквы. Например, как в коде Шеннона-Фэно, который приведем в таблице:*

	000		*10111*		*111100*
	001		*11000*		*1111010*
	0100		*110010*		*1111011*
	0101		*110011*		*1111100*
	0110		*110100*		*1111101*
	0111		*110110*		*11111100*
	1000		*110111*		*11111101*
	1001		*111000*		*11111110*
	10100	*,ь*	*111001*		*111111110*
	10101		*111010*		*11111111*
	10110		*111011*		

С помощью этих таблиц можно легко закодировать и раскодировать любое текстовое и цифровое сообщение.

Возникает вопрос о передачи кодированной информации между респондентами. Очевидно, что производительность источника информации $H(X)$ *(средняя энтропия сообщения в единицу времени) должна быть меньше пропускной способности* С *канала связи (максимальное количество информации, которую способен передать канал), чтобы информация шла без задержек.*

Кроме того, в каждом канале всегда существуют случайные помехи, затрудняющие понимание переданной информации. Помехи могут быть как в источниках кодирования и раскодирования, так и в канале связи (гроза, наводки от передачи другой информации и так далее). Необходимо, чтобы передаваемое сообщение имело избыточную информацию, что достигается, например, дублированием информации. **Мерой избыточности информации** *служит величина*

$$V = 1 - \frac{H}{\log n},$$

где H *– средняя энтропия, приходящаяся на один передаваемый символ смыслового сообщения,* n *– число принимаемых символов кода,* $\log n$ *– максимально возможная в данных условиях энтропия на один передаваемый символ, если бы все символы сообщения были бы равновероятны и независимы.*

Учтем потерю информации в канале при наличии помех. Пусть из системы X *по каналу* K *передается информация в систему* Y. *Количество информации на один символ* $H(X) = \sum_{i=1}^{n} P_i \log P_i$ *, тогда*

$$I_{X\to Y} = H(X) - H(Y|X),$$

где $H(Y|X)$ *можно рассматривать как потерю информации. Пусть канал передает в единицу времени* m *символов. В отсутствии помех пропускная способность канала определится произведением максимального количества информации, содержащейся в одном символе* $\log n$ *на количество символов:*

$$C = m \log n \ .$$

Пропускная способность канала с помехами определим как

$$C = mI_{X\to Y}^{\max} \ ,$$

где $I_{X\to Y}^{\max}$ *– максимальная информация на один символ. Пусть через канал передаются элементарные символы* $0(q)$ *и* $1(p)$ *в количестве* m *символов в единицу времени. Каждый символ может быть искажен с вероятностью* α. *Максимальная энтропия такого источника будет*

$$H(X) = -p \log p - (1-p)\log(1-p).$$

Определим частные условные энтропии): $H(Y|x_1)$ *и* $H(Y|x_2)$. *Здесь* x_1 *– это 0,* x_2 *– это 1. Тогда* $P(y_1|x_1)=1-\alpha$ *(символ не искажен) и* $P(y_2|x_1)=\alpha$ *(сигнал перепутан). Тогда условная энтропия определится*

$$H(Y|x_1)=\sum P(y_i|x_1)\log P(y_i|x_1)=-(1-\alpha)\log(1-\alpha)-\alpha\log\alpha\ .$$

Аналогично $P(y_1|x_2)=\alpha$ *и* $P(y_2|x_2)=1-\alpha$*:*

$$H(Y|x_2)=-\alpha\log\alpha-(1-\alpha)\log(1-\alpha)\ .$$

Видно, что $H(Y|x_1)=H(Y|x_2)$. *Полная условная энтропия определится как среднее*

$$H(Y|X)=[H(Y|x_1)+H(Y|x_2)]\cdot\frac{1}{2}=-\alpha\log\alpha-(1-\alpha)\log(1-\alpha)\ ,$$

которое зависит только от величины вероятности ошибки. Тогда информация такой системы будет иметь вид:

$$I_{X\to Y}=-p\log p-(1-p)\log(1-p)+\alpha\log\alpha+(1-\alpha)\log(1-\alpha).$$

Так как информация максимальна, когда $p=q=0{,}5$*, то*

$$I_{X\to Y}^{\max}=1+\alpha\log\alpha+(1-\alpha)\log(1-\alpha)\ ,$$

и пропускная способность канала определится

$$C=m(1+\alpha\log\alpha+(1-\alpha)\log(1-\alpha))\ .$$

Пример. *По каналу связи передается 60 символов 0 и 1 в секунду. Каждый символ может быть искажен (0 меняется на 1 и наоборот) помехами в канале с вероятностью с* $\alpha=0{,}02$. *Определить пропускную способность канала.*

Решение.

$$C=60(1+0{,}02\cdot\log 0{,}02+0{,}98\cdot\log 0{,}98)=60(1-0{,}12-0{,}03)=60\cdot 0{,}85=51.$$

Пропускается по каналу только 51 символ вместо 60. Видно, что на один символ за счет помех теряется 0,13 (дв.ед.) информации.

Заметим, что если вероятности символов 0 и 1 разные, то пропускная способность канала также будет уменьшаться.

1.9. Надежность технических устройств. Плотность распределения времени безотказной работы. Интенсивность отказов. Надежность не резервированной и резервированной систем. Надежность системы с восстановлением.

Под **надежностью технических устройств** *понимают их способность выполнять свои функции без отказов в течение заданного интервала времени в определенных условиях. В связи с тем, что сложность технических устройств* *постоянно увеличивается, а требования к их надежности возрастают, то встает задача о количественной оценке надежности таких устройств.*

Отказы или неисправности бывают **внезапными и постепенными**. *Постепенный отказ связан с ухудшением (старением) работы технического устройства. Постепенные отказы устраняются профилактическим техническим обслуживанием или просто регулировкой. Внезапные отказы происходят в случайные моменты времени. Например, пробой конденсатора, перегорание радиолампы и так далее. Будем рассматривать только внезапные отказы.*

Технические устройства, как правило, представляют из себя систему (композицию) из более простых элементов. Например, блок развертки телевизора состоит из сопротивлений, катушек индуктивностей, конденсаторов, диодов, транзисторов и других элементов. Надежность технического устройства будет определяться надежностью самих элементов системы и способами их объединения в систему. Надежности элементов системы будем считать заданными.

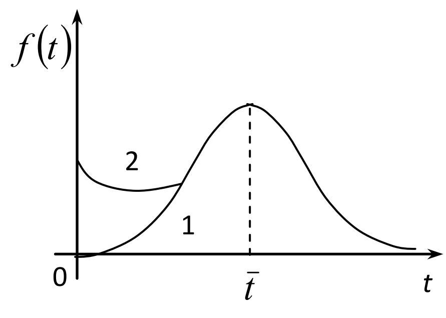
Напомним, что **надежностью** *называют вероятность* $P(t)$ *того, что данный элемент будет работать безотказно в течение интервала времени* t. *Иногда функцию* $P(t)$ *называют* **"законом надежности".** *Функцию распределения непрерывной случайной величины* t *(вероятность того, что за время* t *элемент откажет)* $F(t) = P(T < t) = 1 - P(t) = \mathrm{Q}(t)$ *можно рассматривать как ненадежность элемента. Введем плотность распределения времени безотказной работы (плотность отказов)*

$$f(t) = F'(t) = \mathrm{Q}'(t), \quad \text{причем} \quad \int_0^\infty f(t)dt = 1.$$

Практический опыт показывает, что часть элементов технического устройства отказывает в момент их включения, что связано с динамикой выхода элементов в рабочий режим. На рисунке представлен типичный график плотности отказов. Здесь $\bar{t} = M[T] = \int_0^\infty t f_1(t)dt$*, для* $f_1(t)$ *(кривая 1). Если же некоторые элементы отказали в момент включения (кривая 2), то* $\bar{t} = \int_0^\infty t f_2(t)dt = \int_0^\infty tQ'(t)dt = -\int_0^\infty tP'(t)dt$. *После интегрирования по частям получаем*

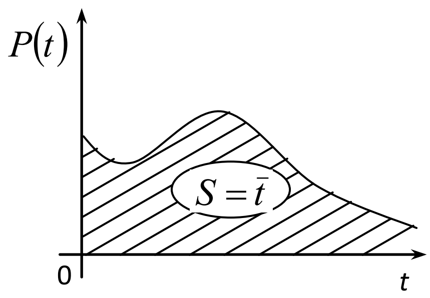
$$\bar{t} = \int_0^\infty P(t)dt.$$

Среднее время работы элемента



равно полной площади ограниченной кривой надежности и осями координат.

В общем случае, как следует из опыта, непрерывная случайная величина t *распределена по показательному закону* $P(t)=\mathbf{e}^{-\lambda t}$, $\lambda>0$, *тогда*



$$F(t)=Q(t)=1-\mathbf{e}^{-\lambda t} \quad и \quad f(t)=\lambda\mathbf{e}^{-\lambda t}$$
$$(t>0).$$

Привлекая теорию случайных процессов, можно последовательность случайных моментов отказов интерпретировать, как простейший поток событий, где интервалы между отказами являются независимыми случайными величинами, распределенными по показательному закону.

Интенсивность отказов – *отношение плотности распределения времени безотказной работы к ее надежности*

$$\lambda(t)=\frac{f(t)}{P(t)}$$

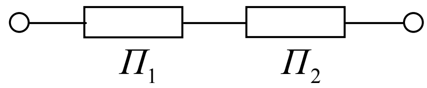
может быть интерпретирована как среднее число отказов в единицу времени, приходящихся на один работающий элемент. Если известна интенсивность отказов, то, решая дифференциальное уравнение $\lambda(t)=-P'(t)/P(t)$,

получаем $P(t)=\mathbf{e}^{-\int\limits_0^{\infty}\lambda(t)dt}$. *Если* $\lambda=const$, *то* $P(t)=\mathbf{e}^{-\lambda t}$ *– получаем показательный закон надежности. Если закон распределения не показательный, например, Вейбулла, альфа или гамма распределение, то его можно приближенно заменить на показательный с* $\lambda=1/\bar{t}$, *где* $\bar{t}$ *определяется площадью под кривой надежности. Такая замена оправдывается тем, что надежность элементов падает с увеличением времени их работы (*$P(t\to 0)$ *при* $t\to\infty$*).*

Таким образом, с момента включения на элемент действует пуассоновский поток отказов. Для показательного закона надежности это будет поток с $\lambda=const$. *Для других законов надежности это будет поток с переменной интенсивностью* $\lambda(t)$. *Отметим, что в процессе работы отказавший элемент не заменяется и может отказать только один раз (не восстанавливается).*

Рассмотрим надежность системы, состоящей из n *элементов, надежность которых известна. Если система состоит из последовательно соединенных элементов* Π_1, Π_2, *то отказ любого из элементов будет равносильно отказу всей системы. Если отказы элементов независимы, то, очевидно, надежность системы равна произведению надежностей ее элементов:*

$$P=\prod_{i=1}^{n}P_i\ .$$



Видно, что надежность такой системы уменьшается с увеличением числа элементов. Заметим, что при последовательном соединении независимых элементов, интенсивности отказов складываются и интенсивность отказа системы определяется как $\Lambda=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i$.

Примеры.

1**.** *Прибор состоит из 4-х независимых элементов, соединенных последовательно. Надежность каждого из них* $P=0{,}8$. *Определить надежность системы.*

Решение. $P=(0{,}8)^4\approx 0{,}41$.

2**.** *Система состоит из двух элементов соединенных последовательно. Плотности распределения времени безотказной работы этих элементов даны* $f_1=2t$ *и* $f_2=1$ *при* $0<t<1$. *Найти интенсивность отказов всей системы.*

Решение. *Ненадежность данных элементов определяется, как* $Q_1(t)=t^2$, $Q_2(t)=t$. *Откуда надежность определяется*

$$P_1=1-t^2,\quad P_2=1-t,\ (0<t<1).$$

Интенсивность отказов элементов определяется из формулы $\lambda(t)=-\dfrac{P'(t)}{P(t)}$*:*

$$\lambda_1(t)=\frac{2t}{1-t^2},\qquad \lambda_2(t)=\frac{1}{1-t}\ .$$

Тогда интенсивность отказов системы будет $\Lambda=\lambda_1+\lambda_2=\dfrac{3t+1}{1-t^2}$.

Рассмотрим надежность системы из параллельно соединенных элементов. Такие соединения называют **дублирующими** *или* **резервными**. *Отказ такой системы происходит, когда выходят из строя оба элемента* $\overline{S}=\overline{A}_1\cdot\overline{A}_2$*, поэтому* $\mathrm{Q}=Q_1\cdot Q_2$.

При параллельном соединении независимых элементов их ненадежности перемножаются. Надежность такой системы тогда определится как

$$P=1-\prod_{i=1}^{n}(1-P_i).$$

Видно, что с увеличение числа дублирующих элементов надежность системы повышается.

Пример. *Надежность каждого предохранителя* $P = 0{,}9$. *Найти надежность двух дублирующих предохранителей.*

Решение. $P = 1 - (1 - 0{,}9)^2 = 0{,}99$.

Перейдем к рассмотрению нестационарного процесса, когда дублирующий элемент включается автоматически после отказа основного элемента (холодное резервирование) или работает параллельно с основными, но с меньшей интенсивностью отказа (облегченное резервирование). Для этого, очевидно, необходимо проанализировать весь случайный процесс работы системы. Это достаточно трудная задача, особенно для сложных систем. Однако эту же задачу можно решить относительно просто в рамках теории случайных процессов. Предположим, что потоки неисправностей, действующие на все элементы системы, представляют собой простейшие потоки с постоянной интенсивностью (показательный закон). Тогда надежность системы может быть вычислена путем решения дифференциальных уравнений для вероятностей ее состояний.

Пусть имеется система с “холодным резервом”, состоящая из основного элемента $П_1$ *и одного резервного* $П_2$. *При отказе* $П_1$ *включается в работу* $П_2$. *Интенсивность отказа основного элемента* λ_1, *а интенсивность отказа резервного* λ_2. *Представим процесс протекания в системе* S, *как марковский случайный процесс с непрерывным временем и с дискретными состояниями:* S_1 *– работает основной элемент* $П_1$, S_2 *– работает резервный элемент* $П_2$, S_3 *– не работает ни один из элементов. Граф состояний изображен на рисунке.*

$$\boxed{S_1} \xrightarrow{\lambda_1} \boxed{S_2} \xrightarrow{\lambda_2} \boxed{S_3}$$

Система уравнений Колмогорова для вероятностей состояний будет иметь вид

$$\begin{cases} \dfrac{dP_1}{dt} = -\lambda_1 P_1 \\ \dfrac{dP_2}{dt} = -\lambda_2 P_2 + \lambda_1 P_1 \\ \dfrac{dP_3}{dt} = \lambda_2 P_2 \end{cases} \qquad \text{и} \qquad P_1 + P_2 + P_3 = 1.$$

Решаем первое уравнение $P_1 = \mathbf{e}^{-\lambda_1 t}$ *с начальным условием* $P_1(0) = 1$. *Методом вариации постоянных решаем второе уравнение при* $P_2(0) = 0$:

$$P_2 = C\mathbf{e}^{-\lambda_2 t}; \qquad C'(t) = \lambda_1 \mathbf{e}^{(\lambda_2 - \lambda_1)t}, \qquad C(t) = C + \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}\mathbf{e}^{(\lambda_2 - \lambda_1)t},$$

$$P_2 = \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} \mathbf{e}^{(\lambda_2 - \lambda_1)t} + C \right) \mathbf{e}^{-\lambda_2 t}, \qquad C = -\frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}.$$

Окончательно получаем

$$P_2 = \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} \mathbf{e}^{-\lambda_1 t} - \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} \mathbf{e}^{-\lambda_2 t}.$$

Последнее дифференциальное уравнение можно не решать, а воспользоваться тем фактом, что все состояния системы образуют полную группу. Вероятность отказа всей системы определяется

$$P_3 = 1 - P_1 - P_2 = 1 - \mathbf{e}^{-\lambda_1 t} - \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} \left(\mathbf{e}^{-\lambda_1 t} - \mathbf{e}^{-\lambda_2 t} \right).$$

Надежность равна сумме вероятностей всех состояний, при которых система работает:

$$P(t) = P_1(t) + P_2(t) = \mathbf{e}^{-\lambda_1 t} + \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} \left(\mathbf{e}^{-\lambda_1 t} - \mathbf{e}^{-\lambda_2 t} \right).$$

Теперь рассмотрим систему с “облегченным резервом”. Пусть система состоит из основного и двух дублирующих. На основной элемент действует простейший поток отказов с интенсивностью λ_1, *на каждый из резервных до их включения действует поток отказов с интенсивностью* λ_2. *После включения (отказ основного элемента) эта интенсивность возрастает и становится* $\overline{\lambda}_2$.

Состояния системы:

S_{12} *– основной элемент работает и два резервных исправны,*

S_{11} *– основной исправен, а один резервный отказал,*

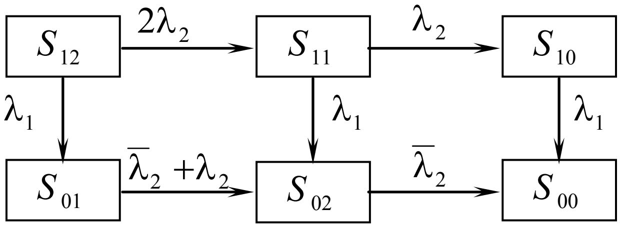
S_{10} *– основной исправен, а два резервных отказали,*

S_{01} *– основной отказал, работает резервный и один резервный исправен,*

S_{02} *– основной отказал, один резервный отказал и один резервный работает,*

S_{00} *– все элементы отказали,*

Граф состояний выглядит следующим образом:



Система уравнений Колмогорова

$$\begin{cases} \dfrac{dP_{12}}{dt} = -(2\lambda_2 + \lambda_1)P_{12}, & \dfrac{dP_{11}}{dt} = 2\lambda_2 P_{12} - \lambda_2 P_{11} - \lambda_1 P_{11}, \\ \dfrac{dP_{10}}{dt} = \lambda_2 P_{11} - \lambda_1 P_{10}, & \dfrac{dP_{01}}{dt} = \lambda_1 P_{12} - (\overline{\lambda}_2 + \lambda_2)P_{01}, \\ \dfrac{dP_{02}}{dt} = (\overline{\lambda}_2 + \lambda_2)P_{01} + \lambda_1 P_{11} - \overline{\lambda}_2 P_{02}, & \dfrac{dP_{00}}{dt} = \overline{\lambda}_2 P_{02} + \lambda_1 P_{10}. \end{cases}$$

$P_{12} = \mathbf{e}^{-2(2\lambda_2+\lambda_1)t}$. *Так как* $P_{12}(0) = P_{11}(0) = P_{10}(0) = 1$, $P_{01}(0) = P_{02}(0) = P_{00}(0) = 0$. *Последовательно решая все уравнения, можно определить надежность системы, как сумму вероятностей всех состояний, при которых система работает*

$$P(t) = P_{12} + P_{11} + P_{10} + P_{01} + P_{02} = 1 - P_{00}.$$

Видно, что процесс функционирования таких систем нестационарен, так как при $t \to \infty$, $P(t) \to 0$ *и по истечению некоторого времени система все равно откажет.*

В заключение лекции рассмотрим системы, где отказавший элемент восставливается (или заменяется новым или ремонтируется в течение некоторого времени). Сделаем опять предположение, что поток отказов простейший. Заметим, что в такой постановке задачи, возможен стационарный режим работы системы (предельный режим, при $t \to \infty$*).*

Предположим также, что законы надежности и законы распределения времени восстановления близки к показательным. Решим конкретные примеры.

Примеры.

1. *Система состоит из одного элемента, который подвергается простейшему потоку отказов с интенсивностью λ. При отказе элемент мгновенно заменяют таким же элементом. В запасе* n *элементов. Определить надежность системы.*

Решение. $P_m = \dfrac{(\lambda t)^m}{m!}\mathbf{e}^{-\lambda t}$, $m = 0, 1, 2, \ldots, n$.

Надежность системы определяется $P(t) = \sum\limits_{m=0}^{n} P_m = \mathbf{e}^{-\lambda t}\sum\limits_{m=0}^{n}\dfrac{(\lambda t)^m}{m!}$.

Для конкретной задачи с $\lambda = 2$ *(два отказа в час) и для трех запасных элементов надежность равна* $P(t) = \mathbf{e}^{-2t}\left(1 + 2t + 2t^2 + \dfrac{2}{3}t^3\right)$.

Окончательная оценка дает $P(2) = \mathbf{e}^{-4}(1 + 4 + 8 + 5{,}3) \approx 0{,}2$.

2. Система состоит из одного элемента с задержанным восстановлением (время ремонта $\bar{t}_p = 1/\mu$). На элемент действует простейший поток отказов с интенсивностью λ.. Отказавший элемент ремонтируют, и поток восстановления тоже является простейшим с интенсивностью μ. Ремонт гарантированный. Определить надежность системы в момент времени t *и предельные значения надежности. Найти также вероятность того, что система до определенного времени* t *будет работать безотказно и ремонта вообще не понадобиться.*

Решение. *Состояния системы всего два: S_0 – система работает, S_1 – система восстанавливается. Граф состояние имеет вид*

$$\boxed{S_0} \underset{\mu}{\overset{\lambda}{\rightleftarrows}} \boxed{S_1} \quad .$$

Используя решение из лекции 19 для таких графов, получаем

$$P_0(t) = \frac{\mu}{\lambda+\mu} + \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\mathbf{e}^{-(\lambda+\mu)t},$$

$$P_1(t) = 1 - P_0(t) = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\left(1 - \mathbf{e}^{-(\lambda+\mu)t}\right).$$

Надежность определяется как $P(t) = P_0(t) = \dfrac{\mu}{\lambda+\mu}\left(1 + \dfrac{\lambda}{\mu}\mathbf{e}^{-(\lambda+\mu)t}\right).$

Предельная надежность при $t \to \infty$ *будет* $P = \dfrac{\mu}{\lambda+\mu}.$

Вероятность безотказной работы определяется из графа

$$\boxed{S_1} \xrightarrow{\lambda_1} \boxed{S_2} \qquad \text{и} \qquad \overline{P}(t) = \mathbf{e}^{-\lambda t} \quad \text{при} \quad \overline{P}(0) = 1.$$

3. Система состоит из n *элементов с задержанным восстановлением (ремонт). При отказе система отключается и восстанавливается. При неработающей системе элементы, очевидно, отказывать не могут. Даны интенсивности потока отказов λ и интенсивность восстановления μ. Найти надежность системы $P(t)$, предельную надежность и вероятность того, что за время* t *отказов больше не будет.*

Решение. *Граф состояний*

$$\boxed{S_0} \underset{\mu}{\overset{n\lambda}{\rightleftarrows}} \boxed{S_1} \quad .$$

S_0 – система работает, S_1 – система не работает, восстанавливается. Тогда

$$P(t)=\frac{\mu}{n\lambda+\mu}+\frac{n\lambda}{n\lambda+\mu}\mathbf{e}^{-(n\lambda+\mu)t}, \qquad P=\frac{\mu}{n\lambda+\mu}, \qquad \overline{P}(t)=\mathbf{e}^{-n\lambda t}.$$

4. *Система состоит из* n *элементов, через каждый проходит поток отказов с интенсивностью* λ*. При отказе элемент начинает восстанавливатся с интенсивностью* μ*, а остальные элементы продолжают работу. Определить предельную надежность такой системы и среднее число исправно работающих элементов в стационарном режиме.*

Решение. *Состояния системы:*

S_0 *– все элементы исправны,*

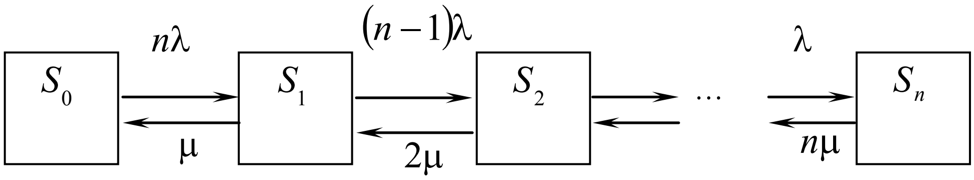
S_1 *– один восстанавливается, остальные исправны,*

S_2 *– два восстанавливаются, остальные исправны,*

… … … … … … …

S_n *– все* n *элементов восстанавливаются.*

Граф состояний имеет вид



Начальные условия $P_0(0)=1$, $P_1(0)=P_2(0)=\dots=P_n(0)=0$. *Предельные вероятности определяются при* $\frac{dP_i}{dt}=0 \quad \left(i=\overline{1,n}\right)$.

$$\begin{cases} -n\lambda P_0+\mu P_1=0 \\ -[(n-1)\lambda+\mu]P_1+n\lambda P_0+2\mu P_2=0 \\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots \\ -n\mu P_n+\lambda P_{n-1}=0 \end{cases}$$

Кроме того, выполняется $\sum_{i=1}^{n}P_i=1$. *Поучаем* $P_0=\frac{1}{(1+\rho)^n}$*, где* $\rho=\frac{\lambda}{\mu}$*. Предельная надежность* $P=P_0$.

Среднее число исправно работающих элементов будет равно числу элементов n, *умноженному на вероятность того, что отдельный элемент работает исправно* $\left(P=\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)$*:*

$$\overline{n}=\frac{n\mu}{\lambda+\mu}=\frac{n}{1+\rho}\ .$$

1.10. Матричные игры. Платежная матрица. Цена игры в чистых и смешанных стратегиях. Игры с природой.

Теория игр – *это раздел математики, занимающийся исследованием правил поведения игроков в конфликтных ситуациях для достижения поставленных целей. Теория игр разрабатывает в рамках заданных правил стратегию поведения игроков, помогает принять правильное решение и планировать дальнейшие действия в ситуациях, когда оказывается противодействие. Например, ценовая политика предприятия зависит не только от издержек производства и спроса покупателей, но и от решений конкурирующих предприятий. Теория игр находит широкое применение в экономике, военном деле, в конструировании систем управления и т.д.*

*Под игрой понимают совокупность предварительно оговоренных правил и условий. Игроков называют партнерами, а саму реализацию игры – партией***.** *Если партнеров только двое, то игру называют парной***.** *Если партнеров больше двух, то – множественной.*

Совокупность правил, однозначно определяющих последовательность действий конкурирующих сторон в конкретной ситуации, называют стратегией. Оптимальной *называют такую стратегию, которая обеспечивает при многократном повторении игры игроку максимально возможный средний выигрыш.*

Рассмотрим лишь парные игры с ограниченным числом стратегий, когда выигрыш одного из игроков означает проигрыш другого. Такие игры называет парными с нулевой суммой. Задачей каждого из игроков является поиск наилучшей стратегии (максимальный выигрыш или минимальный проигрыш) в предположении, что действия противника разумны и направлены тоже на получение максимального выигрыша. В конце партии каждый игрок получает сумму выигрыша v_i $(i=1,2)$. *Очевидно, что, если* $v_i > 0$, *то партия является выигрышей, если* $v_i < 0$, *то это проигрыш и если* $v_i = 0$ *– ничейный исход. Должно выполнятся* $v_1 + v_2 = 0$. *Например, первый игрок ставит на игру 5 рублей, а другой 3 рубля. В процессе игры выиграл первый игрок, и его выигрыш составил* $v_1 = 3$ *рубля (*$v_2 = -3$*).*

Принятие игроком решения в процессе игры и его реализация называется ходом. *Ходы бывают личные, когда их выбирают сознательно (шахматы) и случайные, определяемые, например, подбрасыванием монеты. Теория игр занимается анализом только таких игр, где есть личные ходы. Игру можно представить в виде платежной матрицы, в которой строки определяют* *стратегии первого игрока, а столбцы – стратегии второго игрока. Элементами этой матрицы могут быть выигрыши, например, первого игрока. Рассмотрим типичную игру в "три пальца". Два игрока одновременно и независимо показывают 1, 2 и 3 пальца. Размер выигрыша определяется общим количеством показанных пальцев. По договору, если число всех показанных пальцев четное, то выигрывает первый игрок, если нечетное, то выигрывает второй игрок.*

Очевидно, что у каждого игрока по три стратегии (по числу показанных пальцев), и платежная матрица может быть представлена в виде

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -3 & 4 & -5 \\ 4 & -5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Знак минус говорит о проигрыше этой суммы первым игроком.

В общем случае любая парная игра описывается прямоугольной матрицей размерности $(n \times m)$, *где количество строк и столбцов определяются числом имеющихся у игроков стратегий.*

$$A = \{a_{ij}\} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix},$$

где каждый элемент является действительным числом. Каждый из игроков выбирает выгодную стратегию. Для противников эти стратегии альтернативны, так как если один желает максимально выиграть, то второму остается желать минимального проигрыша.

Введем понятие верхней и нижней чистой цены игры. Верхней чистой ценой (минимаксом) называется число β, *определяемое по формуле*

$$\beta = \min_i \max_j a_{ij},$$

а нижней α *(максимином) – по формуле*

$$\alpha = \max_j \min_i a_{ij}, \quad \left(i = \overline{1,n};\ \mathrm{j} = \overline{1,\mathrm{m}}\right).$$

Пример. *Найти* α *и* β *для игры с платежной матрицей*

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & 7 & 3 \\ 5 & 8 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Решение. *Выбираем по строчкам минимальные элементы. Видно, что из них наибольший* $\alpha = \max_j \min_i a_{ij} = \max(-1, 1, 2) = 2$.

Затем по столбцам выбираем наибольшие элементы и из них выбираем наименьший

$$\beta=\min_i \max_j a_{ij} = \min(5,8,7,3)=3.$$

Таким образом, получаем ответ:

$$\alpha=2,\ \beta=3.$$

$$\begin{array}{c|cccc|c} & & & & & \alpha \\ & \multicolumn{4}{c|}{\begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & 7 & \boxed{3} \\ 5 & 8 & 1 & \boxed{2} \end{pmatrix}} & \begin{array}{l} -1 \\ 1 \Rightarrow \alpha=2 \\ 2 \end{array} \\ \hline \beta & 5 & 8 & 7 & 3 & \Rightarrow \beta=3 \end{array}$$

Оптимальной стратегией первого игрока здесь является стратегия, задаваемая последней строкой, которая гарантирует максимальный выигрыш, равный 2. Для второго игрока в данной игре оптимальной стратегией является стратегия, задаваемая последним столбцом, при этом минимальный проигрыш не превысит 3. Видно, что крупный проигрыш для второго игрока может быть равен 8. Ответим, что минимаксные стратегии устойчивы. Если один из игроков придерживается минимаксной стратегии, то другой игрок не может никак улучшить свое положение, отступая от своей максиминной стратегии. Любое отступление от оптимальной стратегии приводит его к более крупному проигрышу. Принцип осторожности заложен в теорию игр и называется **принципом минимакса.**

Очевидно, что должно выполнятся соотношение $\beta \ge \alpha$ (теорему не приводим). Если $\alpha=\beta=v$, то это число называется **седловой точкой игры**. *Такие игры занимают особое место в теории игр и называются играми с седловой точкой. Они могут быть решены в чистых стратегиях. Игрок, владеющий минимаксной стратегией и обладающий полной информацией, всегда будет выигрывать у новичка в этой игре.*

К таким играм относятся и игры с полной информацией обо всех предыдущих ходах. Примером таких игр могут быть шахматы, шашки, нарды, крестики-нолики и другие. Такие игры всегда имеют седловую точку и могут быть решены в чистых стратегиях. Чистой стратегией называется стратегия, когда возможные ходы выбираются с вероятностью равной 1.

Отметим, что решение шахматной игры пока не найдено только потому, что число стратегий (комбинация ходов) очень велико и поэтому достаточно трудно получать платежные матрицы и определять по ним седловые точки игры.

Пример. *Найти нижнюю и верхнюю чистые цены игры с платежной матрицей*

Решение. $\alpha=\beta=v=5$. *Элемент $a_{21}=5$ является седловой точкой игры. Он*

$$\begin{array}{c|cccc|c} & & & & & \alpha \\ & \multicolumn{4}{c|}{\begin{pmatrix} 6 & \boxed{5} & 9 & 8 \\ 1 & 3 & 3 & 7 \\ 9 & 4 & 2 & -4 \end{pmatrix}} & \begin{array}{l} 5 \\ 1 \Rightarrow \alpha=5 \\ 3 \end{array} \\ \hline \beta & 9 & 5 & 9 & 8 & \Rightarrow \beta=5 \end{array}$$

называется **ценой игры**. *Оптимальной стратегией первого игрока является стратегия, задаваемая первой строчкой, с седловой точкой, равной выигрышу* $v = 5$. *Отклонение от оптимальной стратегии только уменьшит выигрыш. Отклонение от стратегии, даваемой вторым столбцом, только увеличит проигрыш второго игрока.*

Если $\beta > \alpha$, *то платежная матрица не имеет очевидной седловой точки, поэтому необходимо применять для ее отыскания сложную стратегию, состоящую из нескольких стратегий, применяемых с определенной вероятностью* $(0 < P_i < 1)$. *Такая стратегия называется смешанной. Набор стратегий в этом случае задается набором вероятностей* $\overline{P} = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$, *с которыми игрок применяет свои чистые стратегии. При этом должно выполняться* $P_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^{n} P_i = 1$. *Аналогично для противника стратегия определяется*

$$\overline{\mathrm{Q}} = \{q_1, q_2, \ldots, q_m\},\ \sum_{j=1}^{m} q_j = 1.$$

Поскольку игроки выбирают свои стратегии независимо и случайно, то игра имеет случайный характер, и выигрыш (проигрыш) также становится случайной величиной.

Можно ввести понятие среднего выигрыша, определив его как математическое ожидание:

$$f(\overline{p}, \overline{q}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{ij} p_i q_j,$$

которое называется **платежной функцией игры**. *Стратегия будет оптимальной* $\overline{p}^*$ *и* $\overline{q}^*$, *если выполняется* $f(\overline{p}, \overline{q}^*) \leq f(\overline{p}^*, \overline{q})$.

Совокупность оптимальных стратегий и цены игры называется решением игры, при этом цена игры определяется как $f(\overline{p}^*, \overline{q}^*) = v$.

Заметим, что в смешанных стратегиях любая конечная игра всегда имеет седловую точку. Применение первым игроком оптимальной стратегии $\overline{p}^*$ *обеспечивает ему при любых действиях второго игрока гарантированный выигрыш не меньший цены игры. При этом должны выполняться*

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} p_i \geq v, \qquad \sum_{j=1}^{m} a_{ij} q_j \leq v.$$

Законно поставить вопрос – как найти оптимальную стратегию? Для этого введем новые определения. Если выигрыш при другой стратегии больше, то эту стратегию называют доминирующей. Кроме того, если в платежной матрице имеются одинаковые строки или столбцы, то их называют дублирующими. Не доминирующие (заведомо не выгодные) и дублирующие строки для первого игрока можно вычеркнуть из платежной матрицы, и это не повлияет *на решение игры. Для второго игрока вычеркиваются доминирующие и дублирующие столбцы.*

Например. *Выполнить упрощения для платежной матрицы*

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 & 2 & 8 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 5 & 7 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 8 & 9 & 5 \\ 1 & 1 & 3 & 5 & 7 & 3 \\ \hline 1 & 2 & 1 & 6 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Решение. *Вторые и четвертые строки дублируются, поэтому одну из них можно вычеркнуть. Видно, что все элементы 3-й строки больше элементов 5-й строки, поэтому 5-ю строку вычеркиваем. Аналогично для второй и третьей строк – оставляем третью строчку. Получаем*

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 & 2 & 8 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 8 & 9 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 8 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Упростим матрицу относительно второго игрока. Для него вычеркиваются уже сами доминирующие столбцы. Это 3 и 5 по сравнению с первым столбцом. Получаем более простую схему игры. При этом платежная матрица дает тот же выигрыш $\beta = 3,\ \alpha = 2,\ 2 \le v \le 3.$

Рекомендуется также, чтобы в платежной матрице не было отрицательных элементов (легче сравнивать). Для этого к платежной матрице прибавляют матрицу, состоящую из одинаковых элементов, равных наибольшему отрицательному элементу данной матрицы.

Например. *Упростить матричную игру.*

$$\begin{array}{c|c|c} & & \alpha \\ & \begin{pmatrix} 7 & 6 & 5 & 4 & 2 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 3 \\ \hline 5 & 6 & 6 & 3 & 5 \\ 2 & 3 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 2 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{matrix} \Rightarrow \alpha = 3 \\ \hline \beta & \begin{matrix} 7 & 6 & 6 & 4 & 5 \end{matrix} & \Rightarrow \beta = 4 \end{array}$$

Решение.

$\begin{pmatrix} 7 & 6 & 5 & 4 & 2 \\ 5 & 6 & 6 & 3 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ *Здесь* $\alpha = 3$ *и* $\beta = 4$ *те же самые.*

Рассмотрим графическое решение игр вида $(2 \times n)$ *и* $(2 \times m)$, *когда один из игроков имеет только две стратегии.*

		Стратегии второго игрока			
		q_1	q_2	……………	q_n
Стратегии первого игрока	p_1	q_{11}	q_{12}	……………	q_{1n}
	$1-p_1$	a_{21}	a_{22}	……………	a_{2n}

Ожидаемый выигрыш первого игрока при применении противником

первой стратегии $a_{11}p_1 + a_{21}(1-p_1) = (a_{11}-a_{21})p_1 + a_{21} = v_1$

второй стратегии $a_{12}p_1 + a_{22}(1-p_1) = (a_{12}-a_{22})p_1 + a_{22} = v_2$

……………………. . . . .

n-*ой стратегии* $a_{1n}p_1 + a_{2n}(1-p_1) = (a_{1n}-a_{2n})p_1 + a_{2n} = v_n$.

Видно, что это прямые в координатах (p_1, v). *Оптимальная стратегия по* p_1 *определяется точкой пересечения этих прямых, максимизирующих его минимальный ожидаемый выигрыш. Здесь же определяется цена игры.*

Примеры.

1. Найти оптимальную стратегию и цену игры, задаваемой платежной матрицей

$$\begin{pmatrix} 7 & 6 & 5 & \underline{4} & \underline{2} \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 6 & \underline{3} & \underline{5} \\ 2 & 3 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

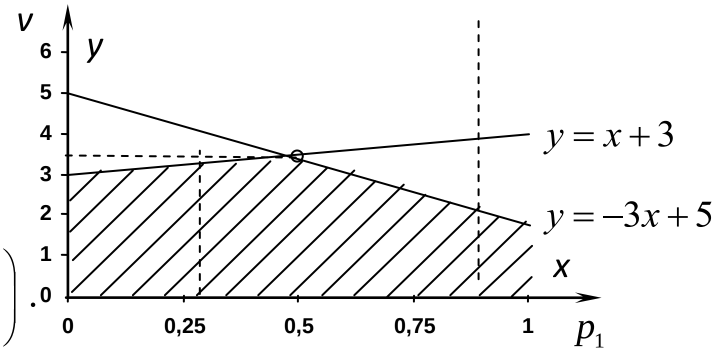
Решение. *Как было показано выше, для этой матрицы* $\alpha = 3$, $\beta = 4$ *и* $3 \le v \le 4$. *После упрощений платежная матрица сводится к матрице* $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$.

Составим вспомогательную таблицу

Стратегии второго игрока	*Ожидаемый выигрыш первого игрока*
1	$(4-3)p_1 + 3 = v_1$
2	$(2-5)p_1 + 5 = v_2$

Видно, что $p_2 = p_4 = 0$, $p_1 \ne 0$, $p_3 \ne 0$ *и* $q_1 = q_2 = q_3 = 0$, $q_4 \ne 0$, $q_5 \ne 0$

Строим график

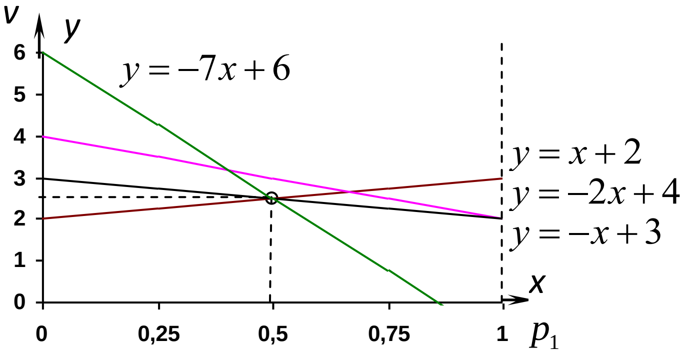


Из графического решения следует, что цена игры $v = 3{,}5$ *и оптимальная стратегия определяются как* $\overline{p}^* = \{0{,}5; 0; 0{,}5; 0\}$.

2. Найти решение игры с платежной матрицей $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & -1 \\ 4 & 3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$.

Решение. $\alpha = \max(-1, 2) = 2$, $\beta = \min(4, 3, 3, 6) = 3$, $2 \le v \le 3$.

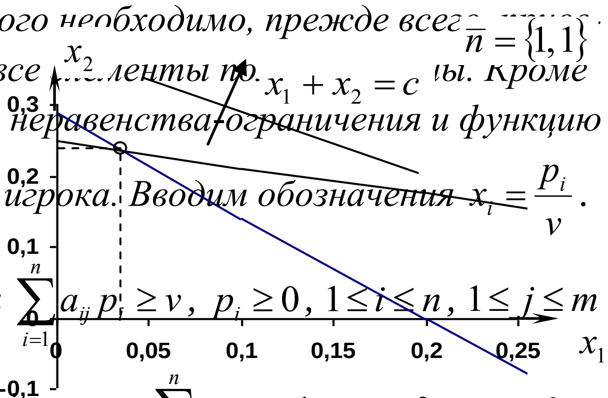
Стратегии второго игрока	*Ожидаемый выигрыш первого игрока*
1	$(2-4)p_1 + 4 = v_1$
2	$(2-3)p_1 + 3 = v_2$
3	$(3-2)p_1 + 2 = v_3$
4	$(-1-6)p_1 + 6 = v_4$



Ответ. *Цена игры* $v = 2{,}5$ *и стратегия первого игрока* $\overline{p}^* = \{0{,}5; 0{,}5\}$.

Отметим, что можно решать игру относительно второго игрока и ответ будет тот же самый. В этом заключается двойственность игровых задач.

Можно заметить, что решение матричных игр сводится к решению задач линейного программирования. Для этого необходимо, прежде всего, привести платежную матрицу к виду, где ее все элементы положительны. Кроме того, для удобства вычисления делят все неравенства-ограничения и функцию цели на максимальный выигрыш первого игрока. Вводим обозначения $x_i = \dfrac{p_i}{v}$.



Тогда $F(\overline{p}) = p_1 + p_2 + \dots + p_n \Rightarrow \max$ *при* $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} p_i \ge v$, $p_i \ge 0$, $1 \le i \le n$, $1 \le j \le m$

$$\Rightarrow \quad F(\overline{x}) = x_1 + x_2 + \dots + x_n = \frac{1}{v} \Rightarrow \min \quad \text{при} \quad \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i \ge 1, \ x_i \ge 0, \ a_{ij} \ge 0.$$

Пример. *Два завода A и B выделяют денежные средства на строительство двух спортивных объектов. Прибыль от эксплуатации объектов, зависящая от объема финансирования, определяется платежной матрицей*

$\begin{pmatrix} 5{,}0 & 1{,}5 \\ 2{,}5 & 4{,}0 \end{pmatrix}$ *в условных денежных единицах. Причем убыток в прибыли завода В равен увеличению прибыли завода А. Найти оптимальную стратегий финансирования заводом А данных спортивных объектов.*

Решение. $\alpha = \max\limits_j \min\limits_i a_{ij} = 2{,}5$; $\beta = \min\limits_i \max\limits_j a_{ij} = 4$; $2{,}5 \le v \le 4$.

Составим задачу линейного программирования для первого игрока. Надо найти минимум для $F(\bar{x}) = x_1 + x_2$, *где* $x_i = \dfrac{p_i}{v}$, $(i = 1{,}2)$ *при*

$$\begin{cases} 5x_1 + 3{,}5x_2 \ge 1, & x_1 \ge 0, \\ 1{,}5x_1 + 4x_2 \ge 1, & x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Графическое решение дает $F_{\min} = 0{,}26$ *и* $x_1 = 0{,}04$; $x_2 = 0{,}22$. *Цена игры определяется как* $v = \dfrac{1}{F_{\min}} = 3{,}8$ *и* $\bar{p} = \{0{,}16;\, 0{,}84\}$. *Итак, завод А для получения максимальной прибыли должен финансировать объекты в соотношениях 16% и 84%. При этом завод А будет иметь гарантированную прибыль в 3,8 условных денежных единиц.*

Таким образом, матричные игры можно решать методами линейного программирования: симплекс-методом, двойным симплекс-методом, методом потенциалов, методом обратной матрицы и так далее.

Правоверна и другая постановка вопроса, а именно: любую задачу линейного программирования можно свести к матричной игре. Если задача линейного программирования имеет вид $F(\bar{x}) = \sum\limits_{i=1}^{n} c_i x_i \Rightarrow \max$ *при* $\sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij} x_i \le b$; $x_i \ge 0$, $\left(i = \overline{1,n},\ j = \overline{1,m}\right)$, *то матричная игра будет определяться блочной платежной матрицей размерностью* $n + m + 1$:

$$\begin{pmatrix} 0 & A & -B \\ -A^T & 0 & C^T \\ B^{-T} & -C & 0 \end{pmatrix}$$

где А *– матрица коэффициентов при неизвестных,* В *– матрица свободных членов неравенств-ограничений и* С *– матрица коэффициентов в целевой функции.* A^T, B^T, C^T *те же, но транспонированные матрицы.*

Пример. *Дана задача линейного программирования*

$$F = 2x_1 + 3x_2 \Rightarrow \max \quad при \quad \begin{cases} 5x_1 + x_2 \le 15, \\ -x_1 + 3x_2 \le 12, & x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Найти платежную матрицу соответствующей матричной игры.

Решение. $A=\begin{pmatrix}5 & 1\\ -1 & 3\end{pmatrix}$; $A^T=\begin{pmatrix}5 & -1\\ 1 & 3\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}15\\ 12\end{pmatrix}$; $C=\begin{pmatrix}2 & 3\end{pmatrix}$.

Тогда искомая матрица имеет вид $\begin{pmatrix}0 & 0 & 5 & 1 & -15\\ 0 & 0 & -1 & 3 & -12\\ -5 & 1 & 0 & 0 & 2\\ -1 & -3 & 0 & 0 & 3\\ 15 & 12 & -2 & -3 & 0\end{pmatrix}$.

Ясно что, разнообразные задачи линейного программирования и, в частности, управление производственными процессами, можно свести к игре двух игроков с противоположными интересами.

*Если же действия одного из игроков случайны, то такие игры называют “***играми с природой***”. Случайность выбора хода связана с отсутствием полной информации о некоторых условиях, в которых идет игра (погода, покупательский спрос, ...). Принятие решения в этом случае связано с риском. Необходимо учитывать степень риска, и здесь лицо, принимающее решение (ЛПР), вступает в игровые отношения с “природой”. ЛПР должно располагать вероятностными характеристиками состояний “природы”. В общем смысле под “природой” понимают совокупность неопределенных факторов, влияющих на эффективность принимаемых решений. Задачей ЛПР, например, директора предприятия или экономиста, является принятие наилучшего управленческого решения в каждой конкретной ситуации. Очевидно, что качество решения зависит от владения ЛПР информацией. Оказывается, можно, даже не владея полной информацией, принимать обоснованные решения, обладающие наименьшим риском.*

Множество состояний природы обозначим П *и отдельные ее состояния* Π_j $\left(j=\overline{1,m}\right)$. *Множество решений (стратегий) обозначим* С *и определенные решения* C_i $\left(i=\overline{1,n}\right)$. *Для* i-*го решения* C_i *игрока* А *и* j-*го состояния природы* Π_j *введем функцию потерь* $F(C_i,\Pi_j)$, *которая является случайной величиной. Игрок (ЛПР) должен выбрать решение с минимальными потерями, при этом он может пользоваться как чистыми, так и смешанными стратегиями. Пусть по некоторой информации можно оценить величиной* a_{ij} *эффективность каждой комбинации* (C_i,Π_j), *то есть качество решения* C_i. *Тогда можно построить платежную матрицу игры размерности* $(n\times m)$:

$$A=\{a_{ij}\},\ \left(i=\overline{1,n},\ j=\overline{1,m}\right),$$

на основе которой и вырабатывается оптимальная стратегия. Элемент a_{ij} *называется выигрышем игрока, если он использует стратегию* C_i *при со-*

стоянии природы $П_j$. Заметим, что влияние дублирующих и доминирующих строк производится только у игрока. Стратегии природы отбрасывать не рекомендуется, поскольку она не имеет умысла навредить игроку. Более того, природа случайно может создать условия, выгодные игроку, чем необходимо воспользоваться. Как правило, информация о вероятностных характеристиках природы и эффективности стратегии получается из данных статистики, поэтому такие игры иногда называют **статистическими**.

Для решения статистических игр, как правило, пользуются матрицей рисков. Элементы матрицы рисков равны разности между максимально возможным выигрышем и тем выигрышем, который игрок получит в тех же условиях $П_j$, применяя стратегию C_i:

$$r_{ij} = \beta_i - a_{ij}, \quad \text{где} \quad \beta_i = \max_j a_{ij}.$$

Оптимальную стратегию можно определить, используя ряд критериев.

Если известно распределение вероятностей различных состояний природы $П_j$ $(q_1, q_2, q_3, \ldots, q_m)$, то можно пользоваться критерием Бейеса. Критерием служит величина среднего выигрыша

$$\bar{a} = \max_i \bar{a}_i, \quad \text{где} \quad \bar{a}_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} q_j \quad \left(i = \overline{1, n}\right).$$

Если вероятности состояний природы неизвестны, то для решения статистических игр пользуются следующими критериями.

1. Максимальный критерий Вальдэ. За оптимальную принимают чистую стратегию, которая в наихудших природных условиях гарантирует максимальный выигрыш $\alpha = \max_i \min_j a_{ij}.$

2. Критерий минимального риска Сэвиджа. При этом минимизируется величина максимального риска в наихудших условиях

$$r = \min_i \max_j r_{ij}.$$

Заметим, что эти критерии ориентированы на неблагоприятные состояния природы и дают пессимистическую оценку ситуации.

3. Критерий Гурвица. $g = \max_i \left(\lambda \min_j a_{ij} + (1 - \lambda) \max_j a_{ij} \right)$, *где* $0 \le \lambda \le 1.$

При $\lambda = 0$ получаем критерий крайнего оптимизма, а при $\lambda = 1$ критерий пессимизма Вальда. Значения λ выбираются из субъективных соображений или интуитивно из продолжительного опыта наблюдений.

Пример. *Условия игры с природой задаются матрицей выигрышей*

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 7 & 6 \\ 2 & 4 & 5 & 12 \\ 9 & 7 & 6 & 11 \end{pmatrix}.$$

Сделать выбор действия по критериям Вальдэ, Севиджа и Гурвица при $\alpha = 0{,}6$.

Решение. *Применим критерий Вальдэ*

$$W = \max_i \min_j a_{ij} = \max\{4, 2, 6\} = 6.$$

Значит, следует выбрать действие $i = 3$.

Применим критерий Севиджа. Для этого вычислим матрицу рисков

$$r_{ij} = \beta_i - a_{ij} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 & 6 \\ 7 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \textit{где} \quad \beta_i = \begin{pmatrix} 9 & 7 & 7 & 12 \\ 9 & 7 & 7 & 12 \\ 9 & 7 & 7 & 12 \end{pmatrix}, \quad \textit{т.к.} \quad \beta_i = \max_j a_{ij}.$$

$$S = \max_i \min_j r_{ij} = \{3, 2, 1\} = 3.$$

Значит, следует выбрать действие $i = 1$.

Применим критерий Гурвица.

$$H = \max_i \left(\alpha \min_j a_{ij} + (1 - \alpha) \max_j a_{ij} \right), \quad \textit{для} \quad \alpha = 0{,}6.$$

$$H = \max_i (0{,}6 \cdot \{2, 4, 5, 6\} + 0{,}4 \cdot \{9, 7, 7, 12\}) = \max_i \{1{,}56;\ 2{,}68;\ 3{,}28;\ 4{,}08\} = 4{,}08.$$

Значит, следует выбрать действие $i = 3$.

В заключение отметим, что мы рассмотрели обоснованием принятия только одного решения. Однако, на практике результат одного решения приводит к необходимости принятия следующего решения, и так далее.

Графически подобные процессы представляют в виде “дерева” решений. Ветви “деревьев” обозначают альтернативные решения, которые оканчиваются соответствующими исходами. Когда все решения и их исходы указаны, проводится анализ на выявление оптимальной стратегии проведения игры.

2. ЗАДАНИЯ ДЛЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ И УКАЗАНИЯ ПО ЕЕ ВЫПОЛНЕНИЮ

2.1. Общие указания по выполнению контрольной работы

Контрольная работы должна выполняться студентом после изучения теоретического курса.

Контрольная работа состоит из 5 задач, задания к каждой их них представлены в 18 вариантах. Студент выбирает в таблицах 2-6 тот вариант задания, который соответствует сумме двух последних цифр его учебного шифра.

При выполнении контрольной работы необходимо соблюдать следующие требования:

– записать условие задачи;

– решение сопровождать кратким пояснительным текстом, в котором должно быть указано, какая величина определяется и по какой формуле, какие величины подставляются в формулу (из условия задачи, из справочника, определена ранее и т.д.);

– вычисления давать в развернутом виде;

– проставлять размерности всех заданных и расчетных величин в международной системе СИ;

– графический материал должен быть выполнен четко в масштабе на миллиметровой бумаге.

После решения задачи должен быть произведен краткий анализ полученных результатов и сделаны соответствующие выводы.

В конце работы дать перечень использованной литературы.

2.2. Комбинаторика

Вариант 1

1. На вершину ведут 8 дорог. Сколькими способами турист может подняться на гору и спуститься с нее, не повторяя маршрута?
2. Доказать: $(A \bigcup B) - B = A - B$.
3. Сколькими способами из 30 учащихся можно выбрать команду на математическую олимпиаду в составе 3-х учеников?
4. Сколькими способами можно упорядочить множество 1, 2, 3, 4, … так, чтобы числа 1, 2, 3 стояли рядом в порядке возрастания?
5. Сколько различных “слов” можно составить, переставляя буквы слова “математика”?
6. Вычислить сумму: $C_n^0 - 2C_n^1 + 3C_n^2 - \ldots + (-1)^n (n+1) C_n^n$.
7. Напишите все сочетания с повторениями из четырех элементов a, b, c, d по три.
8. Сколькими способами можно обозначить треугольник, отмечая его вершины большими латинскими буквами?
9. Сколькими способами можно разменять монету в 50 рублей монетами в 1 рубль, 5 рублей, 10 рублей, и 20 рублей?
10. Сколькими способами 3 человека могут разделить между собой 6 яблок, 1 грушу, 1 лимон, 1 сливу, 1 апельсин, 2 банана и 1 финик?

Вариант 2

1. Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5?
2. Доказать, что $A - B = \emptyset$ тогда и только тогда, когда $A \bigcap B = A$.
3. В комнате n лампочек. Сколькими способами можно осветить комнату k лампочками? Сколько способов освещения данной комнаты?
4. Сколькими способами могут разместиться 6 покупателей в очередь в кассу универмага?
5. Сколькими способами можно разделить $n + m + s$ предметов на 3 группы так, чтобы в одной группе было n предметов, в другой – m, а в последней – s предметов?
6. Указать наибольшее среди чисел C_{10}^k $\left(k = \overline{0{,}10}\right)$.
7. Хор состоит из 10 участников. Сколькими способами можно выбрать в течение 3 дней по 6 участников так, чтобы каждый день были различные составы хора?
8. Сколькими способами можно составить 6 слов из 32 букв, если в совокупности этих 6 слов каждая буква используется лишь раз?
9. Сколькими способами можно разделить колоду из 52 тасованных карт пополам так, чтобы в одной половине оказалось три туза?
10. Сколько нулей в конце числа 49! ?

Вариант 3

1. Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, если каждую из этих цифр использовать не более одного раза?
2. Пусть A – множество корней уравнения $x^2-3x+2=0$, а $B=\{0;2\}$. Найти $A\bigcap B$, $A\bigcup B$, $B-A$, $A-B$.
3. Дано n точек, никакие 3 из которых не лежат на одной прямой. Сколько прямых можно провести, соединяя точки попарно?
4. Сколько существует перестановок из n элементов, в которых между двумя данными элементами стоят r элементов?
5. Решить уравнение $C_{x+4}^{x+1}-C_{x+3}^{x}=15(x+2)$.
6. Сколькими способами можно разделить $3n$ предметов между 3 людьми так, чтобы каждый получил по n предметов?
7. Сколько можно сделать костей домино, используя числа от 0 до 9?
8. Найти n, если известно, что в разложении $(1+x)^n$ коэффициенты при x^5 и x^{12} равны.
9. Продаются открытки 10 сортов. Сколькими способами можно купить 12 открыток?
10. Из 10 различных книг выбирают 4 для посылки. Сколькими способами это можно сделать?

Вариант 4

1. Сколькими способами можно организовать очередь из 7 человек?
2. Пусть A – множество значений функции $\operatorname{sign} x=\begin{cases}1, & x>0;\\ 0, & x=0;\\ -1, & x<0\end{cases}$

   а B – множество корней уравнения $x(x-1)(x-2)=0$. Найти $A\bigcap B$, $A-B$.
3. Сколько имеется четырехзначных чисел, у которых каждая следующая цифра больше предыдущей?
4. На собрании должны выступать ораторы A, B, C, D. Сколькими способами их можно разместить в списке выступающих так, чтобы B выступал после оратора A?
5. Сколько пятибуквенных слов можно составить из букв a, b и c, если a встречается не более 2 раз, b – не более 1 раза, а c – не более 3 раз?
6. Решить уравнение: $5C_x^3=C_{x+2}^4$.
7. В профком избрано 9 человек. Из них надо выбрать председателя, заместителя и секретаря. Сколькими способами это можно сделать?

8. Сколькими способами можно разложить 14 одинаковых шаров по 8-ми ящикам?
9. Сколько пятизначных чисел можно составить из цифр от 1 по 9?
10. Четыре стрелка должны поразить 8 мишеней, каждый по две. Сколькими способами они могут распределить мишени между собой?

Вариант 5

1. Школьники в классе изучают 10 предметов. В понедельник у них 6 уроков, причем все разные. Сколькими способами можно составить расписание на понедельник?
2. На экскурсии были семиклассники и восьмиклассники: все либо с комсомольскими значками, либо в пионерских галстуках. Мальчиков было 16, а комсомольцев 24. Пионерок было ровно столько, сколько мальчиков комсомольцев. Сколько учащихся было на экскурсии?
3. Сколькими способами можно рассадить 8 гостей за круглым столом так, чтобы два известных гостя сидели рядом.
4. Сколько существует четырехзначных чисел, у которых каждая следующая цифра меньше предыдущей?
5. Сколько различных “слов” можно составить, переставляя буквы слова “комбинаторика”?
6. В цехе работают 6 токарей. Сколькими способами можно поручить трем их них изготовить 3 различные вида деталей по одному виду на каждого?
7. Решить уравнение: $\dfrac{P_{x+5}}{P_{x-k}} = 240A_{x+3}^{k+3}, \ (x \geq k).$
8. Сколько существует треугольников, длины сторон которых принимают одно из следующих значений: 4, 5, 6, 7 см?
9. Сколькими способами можно опустить 5 писем в 11 почтовых ящиков, если опускать в один ящик не более одного письма?
10. Бросают одновременно 3 монеты и наблюдают за выпадением герба и цифры на верхних гранях. Сколько различных исходов возможно?

Вариант 6

1. Сколько имеется пятизначных чисел, которые делятся на 5?
2. Бросают одновременно 2 игральные кости и наблюдают за числом очков на верхних гранях. Сколько возможно исходов броска?

3. В классе 34 учащихся. Из них 20 посещают математический кружок, 11 – физический, 10 учащихся не посещают ни одного из этих кружков. Сколько учеников посещают оба кружка?
4. Международная комиссия состоит из 9 человек. Материалы комиссии хранятся в сейфе. Сколько замков должен иметь сейф и сколько ключей надо изготовить и как их распределить между членами комиссии, чтобы доступ к сейфу был возможен, когда соберутся не менее 2/3 членов комиссии?
5. Если повернуть лист бумаги на 180°, то цифры 0, 1, 8 не изменят значения, 6 и 9 переходят друг в друга, а остальные теряют смысл. Сколько существует семизначных чисел, величина которых не изменится при повороте листа и сколько чисел при этом не потеряют смысл?
6. Решить уравнение: $\frac{1}{C_4^x} = \frac{1}{C_5^x} + \frac{1}{C_6^x}$.
7. Для освещения зала может быть включена каждая из имеющихся 10 ламп. Сколькими способами зал может быть освещен?
8. Сколькими способами могут расположиться в турнирной таблице 10 команд, если известно, что никакие две из них не набрали половины очков?
9. Сколькими способами можно составить команду по биатлону из 4-х человек (2 бегуна и 2 стрелка), если имеются 7 бегунов и 6 стрелков?
10. Сколькими способами можно заполнить карточку “Спортлото” (6 из 49)?

Вариант 7

1. Сколько есть трехзначных чисел, у которых все цифры четные?
2. Сколькими способами 10 человек могут организовать очередь в кассу?
3. В розыгрыше первенства по хоккею участвуют 12 команд. Команды, занявшие первые три места, награждаются золотой, серебряной и бронзовой медалями, а две последние команды покидают первенство. Сколько результатов первенства может быть?
4. Пять учеников следует распределить по трем параллельным классам. Сколькими способами это можно сделать?
5. Сколькими способами из колоды в 36 карт можно извлечь 6 карт так, чтобы среди них было 2 туза?
6. Решить неравенство: $C_{10}^{x-1} > 2C_{10}^x$.
7. Сколько шестизначных чисел, кратных 5, можно составить из цифр от 1 до 6 при условии, что цифры не повторяются?
8. Сколько “слов” можно получить, переставляя буквы в слове “Миссисипи”?

9. Сколькими способами члены комиссии могут распределить между собой обязанности, если комиссия состоит из председателя, секретаря и еще 5 человек?
10. Сколькими способами можно заполнить карточку “Спортлото” (5 из 36)?

Вариант 8

1. Сколько существует пятизначных чисел, у которых все цифры нечетные?
2. Из 100 студентов английский язык знают 28 студентов, немецкий – 30, французский – 10, немецкий и французский – 5, а все три языка знают 3 студента. Сколько студентов не знают ни одного из трех языков?
3. Имеется p белых и q черных шаров. Сколькими способами можно выложить в ряд все шары так, чтобы никакие 2 черных шара не лежали рядом?
4. Сколько “слов” можно получить, переставляя буквы в слове “абракадабра”?
5. В вазе стоят 10 красных и 3 розовых гвоздики. Сколькими способами можно выбрать одну красную и две розовые гвоздики?
6. Решить неравенство: $\dfrac{A_{x+n}^{n}}{(x+2)!} < \dfrac{143}{4P_x}$.
7. Сколькими способами 12 одинаковых монет можно разместить по пяти отделениям кошелька, чтобы ни одно из отделений не осталось пустым?
8. Лифт останавливается на десяти этажах. Сколькими способами можно распределить между этими остановками 8 пассажиров лифта?
9. Сколько различных перестановок можно образовать из букв вашего имени, фамилии?
10. Сколько существует перестановок из элементов от 1 до n, в которых 1 элемент находится на 1-м месте?

Вариант 9

1. В забеге участвуют 6 бегунов. Сколькими способами могут быть распределены два первых места?
2. Сколько четырехзначных чисел можно написать с помощью цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5 с учетом повторений и без повторений?
3. В классе 42 ученика. Из них 16 занимаются в легкоатлетической секции, 24 – в футбольной, 15 – в шахматной, 11 занимаются одновременно легкой атлетикой и футболом, 8 – легкой атлетикой и шахматами, 12 – футболом и шахматами, а 6 – участвуют во всех трех секциях. Остальные увлекаются туризмом. Сколько их?
4. В вазе стоят 10 красных и 5 розовых гвоздик. Сколькими способами можно выбрать из вазы 5 гвоздик одного цвета?
5. Просуммировать: $C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + \ldots + nC_n^n$.

6. Сколько можно построить различных параллелепипедов, длины ребер которых выражаются натуральными числами от 1 до 10?
7. Сколькими способами можно переставить буквы слова “перешеек”, чтобы буквы “е” не шли подряд?
8. Сколькими способами можно рассовать 10 одинаковых шариковых ручек по 4-м карманам пиджака так, чтобы ни один карман не пустовал?
9. Сколькими способами могут поразить 5 мишеней 3 стрелка (6 стрелков)?
10. Сколькими способами можно разложить 10 одинаковых деталей по 4-м ящикам стола?

Вариант 10

1. Сколькими способами можно выбрать на конкурс 2-х юношей и одну девушку из 15-ти юношей и 20-ти девушек?
2. Сколько существует пятизначных чисел, которые начинаются цифрой 2, а оканчиваются цифрой 4?
3. В отделе НИИ работают специалисты, каждый из которых знает хотя бы один иностранный язык, при этом 6 человек знают английский, 6 – немецкий, 7 – французский, 4 знают английский и немецкий, 3 – немецкий и французский, 2 – французский и английский и один сотрудник знает все эти языки. Сколько сотрудников работают в отделе?
4. Сколько “слов” можно получить, переставляя буквы в слове “барабан”?
5. Сколькими способами можно рассадить 8 человек за круглый стол или в ряд так, чтобы данные два человека не сидели рядом?
6. С помощью бинома Ньютона оценить с точностью 10^{-3} значение $\sqrt{30}$.
7. Сколькими способами можно распределить 6 разных книг между 3-мя студентами?
8. Сколькими способами можно купить 12 открыток, если в почтовом отделении продают открытки 10-ти видов?
9. Двадцать человек разбиты на две группы по десять человек. Сколько может быть различных составов групп?
10. Три почтальона должны разнести 20 телеграмм. Сколькими способами они смогут это сделать?

Вариант 11

1. Сколькими способами могут сесть два человека на десять кресел?
2. Сколько существует трехзначных чисел, записывающихся с помощью цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5 и делящихся на 5?

3. Сколько чисел среди первых 100 натуральных чисел не делятся ни на 2, ни на 3, ни на 5?
4. Найти наибольший член разложения $\left(1+\sqrt{2}\right)^{30}$.
5. Сколькими способами можно положить 28 различных открыток в 4 одинаковых конверта так, чтобы в каждый попало по 7 открыток?
6. Сколькими способами можно разделить 10 белых грибов, 15 подберезовиков и 8 подосиновиков между 4-мя ребятами, их собравшими?
7. Лифт останавливается на 15-ти этажах. Сколькими способами могут выйти на этих этажах три пассажира лифта?
8. В колоде 52 карты. Сколькими способами можно извлечь 6 карт, чтобы среди них было 2 туза?
9. Из 10 роз и 8 георгинов нужно составить букет, состоящий из 2-х роз и 3-х георгинов. Сколько можно составить различных букетов?
10. Из 12 слов мужского рода, 9 женского и 10 среднего рода надо выбрать по одному слову каждого рода. Сколькими способами может быть сделан этот выбор?

Вариант 12

1. Сколько чисел, находящихся между 1000 и 9999, содержат цифру 3?
2. На 10 расположенных в ряд стульев садятся 5 мальчиков и 5 девочек, причем мальчики – на четные, а девочки – на нечетные номера. Сколькими способами это можно сделать?
3. Староста одного класса дал следующие сведения об учащихся: “В классе 45 учеников, в том числе – 25 мальчиков. Тридцать школьников учатся на 4 и 5, в том числе – 16 мальчиков. Спортом занимаются 28 учеников, в том числе – 18 мальчиков и 17 учащихся на 4 и 5, а 15 мальчиков учатся на 4 и 5 и занимаются спортом”. Покажите, что в сведениях имеется ошибка.
4. Имеются 20 шаров черного цвета и 10 шаров белого цвета. Сколькими способами можно выбрать 3 шара одного цвета?
5. На книжной полке стоит собрание сочинений в 30-ти томах. Сколькими различными способами их можно поставить, чтобы тома 1-й и 2-й стояли рядом?
6. Решить уравнение: $\dfrac{P_{x+5}}{P_{x-k}}=240A_{x+3}^{k+3},\ \ (x\geq k)$.
7. Трое ребят собрали 40 яблок. Сколькими способами они могут их разделить?
8. Сколькими способами выбрать из колоды в 52 карты 6 карт так, чтобы среди них были все 4 масти?

9. У отца есть 5 различных по размеру апельсинов, которые он выдает 8 сыновьям так, что каждый получает либо один апельсин, либо ничего. Сколькими способами можно это сделать?
10. В селении проживают 2000 жителей. Доказать, что, по крайней мере, двое из них имеют одинаковые инициалы.

Вариант 13

1. Бросают одновременно 3 игральные кости и наблюдают за числом выпавших очков. Сколько исходов опыта возможно?
2. Сколько чисел от 1 до 100 не делятся ни на 2, ни на 3, ни на 7?
3. Пассажир оставил вещи в автоматической камере хранения и забыл номер кода, который состоит из 5-ти цифр. Помнит только, что были комбинации 23 и 47. Сколькими способами можно найти нужную комбинацию кода?
4. Студенческое расписание занятий одного дня содержит 3 предмета. Определить количество таких расписаний при выборе из 8-ми дисциплин.
5. Сколько “слов” можно получить, переставляя буквы в слове “параллелизм”?
6. На книжной полке помещаются 18 томов. Сколькими способами их можно расставить так, чтобы два данных тома не стояли рядом?
7. Решить систему уравнений: $\begin{cases} C_x^y = C_x^{y+2}, \\ C_x^2 = 66. \end{cases}$
8. Хоккейная команда состоит из 2-х вратарей, 7-ми защитников и 10-ти нападающих. Сколькими способами тренер может образовать стартовую пятерку, состоящую из 1-го вратаря, 2-х защитников и 3-х нападающих?
9. Сколькими способами можно разделить 6 конфет между 3-мя детьми?
10. Сколько наборов из 9 карандашей можно составить, если в продаже имеются карандаши 5 цветов?

Вариант 14

1. Группу из 15-ти студентов нужно разделить на две группы так, чтобы в одной группе было 4 студента, а в другой – 11. Сколькими способами это можно сделать?
2. В международном отделе аэропорта работают 67 человек. Из них 47 человек знают английский язык, 35 – немецкий и 23 – оба языка. Сколько человек в отделе не знают ни одного иностранного языка?
3. Сколькими способами можно выбрать из колоды карт либо туза, либо козыря?

4. В некотором сказочном государстве не было двух человек с одинаковым набором зубов. Каково могло быть наибольшее число жителей этого государства, если у человека 32 зуба?
5. Сколько различных перестановок можно образовать из букв фамилии вашей бабушки?
6. Найти наибольший элемент C_{12}^{x}, если $x=\overline{0;12}$.
7. Сколько существует различных семизначных телефонных номеров, если в каждом номере нет повторяющихся цифр?
8. Сколькими способами можно составить список студентов группы, в которой 20 человек, среди которых имеется 3 однофамильца?
9. Комплексная бригада состоит из 2-х маляров, 3-х штукатуров и 1-го столяра. Сколько различных бригад можно создать из рабочего коллектива, в котором 15 маляров, 10 штукатуров и 5 столяров?
10. Сколькими способами можно разложить 19 разных предметов по 5-ти ящикам так, чтобы в 4-х ящиках было по 4 предмета, а в оставшемся – 3 предмета?

Вариант 15

1. Металлург, изучающий сплавы, при проведении исследования использовал 2 различных температурных режима, 6 режимов остывания, 4 различные присадки. Сколько экспериментов он сделал?
2. В таможне работают 55 человек. Из них английским владеют 30 человек, французским – 20, английским и французским – 7, немецким и французским – 7, английским и немецким – 6; все эти языки знают 5 человек. Сколько человек в таможне знают немецкий язык?
3. Сколько можно составить различных сигналов из 7-ми цветов радуги, взятых по 2?
4. В вазе лежат 10 бананов, 20 груш и 10 плодов красной хурмы. Сколькими способами можно выбрать 5 фруктов одного цвета?
5. Сколькими способами можно выбрать 2 стандартные и 1 нестандартную детали из 40 деталей, среди которых имеются 10 нестандартных?
6. Решить уравнение: $(x+2)!=132A_x^k P_{x-k}$.
7. Десять групп занимаются в 10 расположенных подряд аудиториях. Сколько существует вариантов расписаний, при которых группы A и B находились бы в соседних аудиториях?
8. Сколькими способами можно посадить за круглый стол 7 мужчин и 7 женщин так, чтобы никакие 2 женщины не сидели рядом?
9. Сколькими способами могут поразить три мишени пять стрелков?

10. Сколькими способами 10 одинаковых монет можно разложить по 5-ти различным отделениям кошелька так, чтобы ни одно из отделений не было пустым?

Вариант 16

1. Из 20 солдат необходимо выделить наряд из 3-х солдат. Сколькими способами это можно сделать?
2. Сколько чисел среди первой тысячи натуральных чисел не делятся ни на 2, ни на 3, Сколько чисел от 1 до 100 не делятся ни на 2, ни на 3, ни на 5, ни на 7?
3. Из группы в 12 человек ежедневно в течение 6-ти суток выбирают 2 дежурных. Определить количество различных списков дежурных, если каждый человек дежурит только один раз?
4. Из группы в 15 бегунов выбирают 4 участников эстафеты 4×400. Сколькими способами можно расставить спортсменов по этапам?
5. Хозяйка желает рассадить гостей (20 супружеских пар) за круглым столом так, чтобы мужчины и женщины чередовались, но чтобы ни один мужчина не сидел рядом со своей женой. Сколькими способами это можно сделать?
6. Доказать: $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k = 0$.
7. Порядок выступления 8-ми участников конкурса певцов определяется жребием. Сколько может быть списков состава конкурса?
8. Сколько шестизначных чисел можно составить из цифр от 1 до 9, если каждое число должно состоять из 3-х четных и 3-х нечетных цифр, причем никакие цифры не повторяются?
9. Из 21-й различной книги выбирают 3 для посылки. Сколькими способами это можно сделать?
10. Сколькими способами можно разложить 12 одинаковых деталей по 3-м ящикам?

Вариант 17

1. Сколько “слов” можно получить, переставляя буквы в слове “уравнение”?
2. Двадцать пассажиров собираются совершить поездку в поезде. В кассе есть 12 билетов на нижнюю полку и 8 – на верхнюю. При этом 4 пассажира не желают ехать внизу, а 5 – наверху. Сколькими способами их можно разместить, если порядок размещения важен?
3. Сколько имеется трехзначных чисел, у которых каждая следующая цифра меньше предыдущей?

4. Известно, что крокодил имеет не более 63-х зубов. Доказать, что среди 16^{17} крокодилов может не оказаться двух крокодилов с одинаковым набором зубов.
5. Сколькими способами можно выбрать 2 детали из ящика, содержащего 10 деталей?
6. Решить неравенство: $8C_{105}^{x} < 3C_{105}^{x+1}$.
7. Сколькими способами можно разделить 36 карт пополам так, чтобы в каждой половине было по два туза?
8. Сколькими способами можно составить трехцветный флаг, если имеются ткани пяти различных цветов? Решить эту же задачу при условии, что одна из полос должна быть красной.
9. Сколько различных четырехзначных чисел, делящихся на 4, можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, если цифры могут повторяться?
10. Сколькими способами можно выбрать 12 человек из 17-ти, если данные два человека не могут быть выбраны вместе?

Вариант 18

1. В селе живут 1500 жителей. Доказать, что, по крайней мере, у двоих из них одинаковые инициалы.
2. В научно исследовательском институте работают 50 сотрудников, имеющих физико-математическое образование, 10 имеют гуманитарное образование и 20 имеют инженерное образование. Гуманитарное и физико-математическое образование имеют 3 сотрудника, а инженерное и физико-математическое – лишь 1 сотрудник, и ни одного, имеющего одновременно инженерное и гуманитарное образование. Сколько сотрудников работают в институте?
3. Два почтальона должны разнести 10 писем по 10-ти адресам. Сколькими способами они могут это сделать?
4. Буквы азбуки Морзе образуются как последовательность точек и тире. Сколько различных букв можно образовать, если использовать 5 символов?
5. Сколько можно составить сигналов из 6-ти флажков разного цвета, взятых по 2?
6. Доказать: $\sum\limits_{r=0}^{m} C_k^r C_n^{m-r} = C_{k+n}^{m}$.
7. Сколько существует различных шестизначных телефонных номеров?
8. Сколько “слов” можно получить, переставляя буквы в слове “парабола” и сколько из них можно сделать “слов” из трех букв?
9. Сколькими способами можно выбрать две стандартные детали из 10-ти, содержащих одну нестандартную?

10. В девятиэтажном доме имеется лифт. Сколькими способами 8 пассажиров лифта могут выйти на этажах?

Вариант 19

1. Как и сколькими способами можно разделить наполовину воду, налитую в 8-литровую канистру, используя две пустые канистры по 5 и 3 литра?
2. Из 80-ти студентов английский язык знают 30, немецкий – 20, французский – 5, немецкий и французский – 3, один студент знает все три языка. Сколько студентов не знают ни одного иностранного языка?
3. Сколько различных аккордов можно взять на десяти выбранных клавишах рояля, если каждый аккорд содержит от 3-х до 9-ти звуков?
4. Сколько упорядоченных пар можно составить из 32-х букв, если в каждой паре обе буквы различны?
5. Сколько шестизначных телефонных номеров можно составить из цифр от 1 до 9?
6. Решить уравнение: $20A_{x-2}^{3} = A_{x}^{5}$.
7. У одного студента есть 11 книг из серии “Научная фантастика”, а у другого – 15 книг. Сколькими способами они могут выбрать по 3 книги каждый для обмена?
8. Сколько существует перестановок из элементов $1, 2, 3, \ldots, n$, в которых элемент n находится не на последнем месте?
9. Шесть ящиков различных материалов доставляют на 5 этажей стройки. Сколькими способами их можно распределить по этажам?
10. Команда из 5-ти человек выступает на соревнованиях по плаванию, в которых участвуют еще 20 спортсменов. Сколькими способами могут распределиться места, занятые членами этой команды?

Вариант 20

1. Сколько существует трехзначных чисел, которые делятся на 5?
2. В одном из городов Узбекистана 90% жителей говорят на узбекском языке, а 80% – на русском. Сколько процентов населения говорят на обоих языках?
3. Сколько существует четырехзначных чисел, у которых каждая следующая цифра: а) меньше предыдущей? б) больше предыдущей?
4. Из цифр 2, 4, 8, 9, 0 составляются пятизначные числа. Сколькими способами их можно составить, чтобы в записи каждого из них каждая цифра встречалась только один раз?
5. Сколько “слов” можно получить, переставляя буквы в слове “метаморфоза”?
6. Решить уравнение: $C_{x+3}^{x+1} - 5C_{3x}^{2} + 19x^{2} = 6$.

7. Из 8-ми шахматистов нужно составить команду, в которую бы входили 3 шахматиста. Сколькими способами это можно сделать?
8. Двадцать деталей раскладываются в три ящика, причем в первый ящик кладут 3 детали, во второй – 5, а в третий – все остальные. Сколькими способами это можно сделать?
9. Сколькими способами из 10-ти различных предметов можно выбрать нечетное число предметов?
10. Команда для ЭВМ записывается в виде набора из восьми цифровых знаков: нулей и единиц. Каково максимальное количество различных команд?

Вариант 21

1. Имеются 5 видов конвертов без марок и 4 вида марок. Сколькими способами можно выбрать конверт с маркой для отправки письма?
2. На загородную прогулку поехали 92 человека. Бутерброды с колбасой взяли 47 человек, с сыром – 38, с ветчиной – 42, с колбасой и с сыром – 28, с колбасой и с ветчиной – 31, с сыром и с ветчиной – 26. Все три вида бутербродов взяли 25 человек. Сколько человек взяли пирожки?
3. Четверо студентов сдают экзамен. Сколькими способами могут быть поставлены оценки, если известно, что никто из них не получил неудовлетворительной оценки?
4. Сколькими способами можно раздать колоду в 52 карты поровну 13-ти игрокам?
5. Сколько существует семизначных чисел, у которых 3 цифры – четные, а остальные – нечетные?
6. Решить неравенство: $C_{10}^{x-1} > 2C_{10}^{x}$.
7. Сколько “слов” можно получить, переставляя буквы в слове “водород”?
8. На студенческую конференцию избрано 9 человек. Из них надо выбрать ответственного за поездку, культорга и ответственного за покупку билетов. Сколько существует способов выбрать ответственного за поездку студентов?
9. Шесть студентов из другого вуза надо распределить по 3-м параллельным группам. Сколькими способами это можно сделать?
10. Футбольная команда состоит из 2-х вратарей, 8-ми защитников, 10-ти нападающих и 5-ти полузащитников. Сколькими способами тренер может образовать основной стартовый состав команды из 1-го вратаря, 5-ти защитников, 2-х нападающих и 3-х полузащитников?

Вариант 22

1. Автомобильные номера состоят из 3-х букв и 4-х цифр. Найти число таких номеров, если используются все 33 буквы русского алфавита?

2. Доказать равенство: $(A \cap B) \cup A = A$.
3. В сражении у Трафальгара 70% участников потеряли глаз, 75% – ухо, 80% – руку, 85% – ногу. Какой наименьший процент участников битвы, лишившихся одновременно всех этих частей тела?
4. Решить уравнение: $C_x^3 + C_x^2 = 15(x+1)$.
5. Десять участников марафонского бега разыгрывают золотую, серебряную и бронзовую медали. Сколькими способами эти награды могут быть распределены между спортсменами?
6. Найти число точек пересечения диагоналей, лежащих внутри выпуклого n-угольника ($n \geq 4$), если никакие три из них не пересекаются в одной точке.
7. Сколько натуральных чисел, меньших, чем миллион, можно написать с помощью цифр 8 и 9?
8. Сколькими способами можно разложить 9 книг в три бандероли по 3 книги?
9. Сколькими способами 12 одинаковых монет можно разложить по 5-ти различным пакетам, если ни один из пакетов не должен быть пустым?
10. Из 20-ти сотрудников лаборатории 5 человек должны выехать в командировку. Сколько может быть различных составов отъезжающих, если заведующий лабораторией и два ведущих инженера одновременно уезжать не должны?

Вариант 23

1. Метранпаж выбирает из ящика, в котором лежат (каждой по одной) литеры букв русского, латинского, греческого алфавитов, цифр и знаков препинания, одну литеру. Сколькими способами он может это сделать?
2. Доказать равенство: $(A \cup B) \cap (A \cup \overline{B}) = A$.
3. На экзамен по математике было предложено три задачи: одна по алгебре, одна по геометрии, одна по тригонометрии. Из 1000 абитуриентов задачу по алгебре решили 800, по геометрии – 700, по тригонометрии – 600. При этом задачи по алгебре и геометрии решили 600 абитуриентов, по алгебре и тригонометрии – 500, по тригонометрии и геометрии – 400, а 300 абитуриентов решили все задачи. Сколько абитуриентов не решили ни одной задачи?
4. Решить уравнение: $C_n^{n-2} + C_n^{n-1} = 55$.
5. Имеется 20 наименований товаров. Сколькими способами их можно распределить по трем магазинам, если известно, что в первый магазин должно быть доставлено 8, во второй – 7, а в третий – 5 наименований товаров?
6. Сколькими способами можно выбрать 13 из 52-х различных игральных карт?

7. Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр от 1 до 5?
8. Ювелиру принесли 5 одинаковых изумрудов, 6 одинаковых рубинов и 7 одинаковых сапфиров. Сколькими способами он может из этих камней выбрать 3 камня для кольца?
9. Поезду с n пассажирами предстоит сделать m остановок. Сколькими способами пассажиры могут выйти на этих остановках?
10. Сколькими способами можно разместить на полке 4 различных книги?

Вариант 24

1. У англичан принято давать детям несколько имен. Сколькими способами можно назвать ребенка, если общее число имен равно 300, а ему дают не более 3-х?
2. Доказать равенство: $A \cup \left(\overline{A} \cap B\right) = A \cup B$.
3. В школьной химической олимпиаде участвовало 21 учащийся, в физической – 26, в математической – 29, в химической и физической – 13, в физической и математической – 15, в химической и математической – 14. Во всех трех олимпиадах участвовало 8 человек. Сколько школьников участвовало хотя бы в одной олимпиаде?
4. Решить уравнение: $C_{3x+1}^{3x-1} = 120$.
5. Сколькими способами можно выбрать 12 человек из 17-ти, если данные двое не могут быть выбраны вместе?
6. Сколькими способами можно посадить за круглый стол 6 мужчин и 6 женщин так, чтобы никакие два лица одного пола не сидели рядом?
7. Четверо студентов сдавали экзамен. Сколькими способами могли быть поставлены оценки?
8. Сколько различных четырехзначных чисел можно составить из цифр числа 123153?
9. Сколько существует треугольников, длины сторон которых принимают одно из значений 1, 2, 3, 4?
10. В купе железнодорожного вагона имеются два расположенных напротив друг друга дивана по пять мест на каждом. Из десяти пассажиров 4 желают сидеть по ходу поезда лицом, а трое – против хода поезда, остальным трем безразлично как сидеть. Сколькими способами могут разместиться пассажиры?

Вариант 25

1. Сережа рисует знаки, состоящие из геометрических фигур (окружность, треугольник, квадрат), буквы русского алфавита и цифры. Сколько различных знаков может нарисовать Сережа?

2. Доказать равенство: $\overline{\overline{A} \cap \left(\overline{B} \cap C\right)} \cap \overline{\left(\overline{A} \cap B\right)} \cap \left(\overline{A} \cap C\right) = \emptyset$.
3. В классе 35 учащихся. Из них 20 посещают факультатив по комбинаторике, 11 – по логике, и 10 – не посещают ни один из этих факультативов. Сколько учащихся посещают оба факультатива?
4. Решить уравнение: $A_x^3 - \overline{C}_{x-2}^3 = 10C_{x-1}^3$.
5. В железнодорожном вагоне 10 мест, расположенных по ходу поезда и столько же против хода поезда. Сколькими способами можно посадить в вагон 8 пассажиров, если двое отказываются сидеть по ходу поезда лицом, а трое – против хода поезда?
6. Студенту необходимо сдать 4 экзамена на протяжении 8-ми дней. Сколькими способами это можно сделать, если деканат запрещает сдавать более одного экзамена в день?
7. Сколькими различными способами из 8-ми книг можно выбрать несколько, но не меньше одной?
8. У Оли шесть шаров: 3 черных, один красный, один синий и один белый. Сколькими способами она может составить из них ряд из 4-х шаров?
9. Сережа хочет отгадать, какие 5 монет держит Елена в руке. Она располагает достаточным количеством монет достоинством в 1, 5, 10, 20, 50 и 100 рублей. Сколько может быть дано неверных ответов?
10. Сколькими способами можно упорядочить множество 1, 2, 3, …, $2n$-1, $2n$ так, чтобы каждое четное число имело четный номер?

2.3. Классическая вероятность

Вариант 1

11. Из 15-ти билетов, отмеченных числами от 1 до 15, наудачу вынимают один. Какова вероятность того, что номер билета есть число, не делящееся ни на 2, ни на 3.
12. В цехе работают 6 мужчин и 4 женщины. По табельным нормам наугад отобраны 7 человек. Найти вероятность того, что среди отобранных лиц окажутся 3 женщины.
13. Брошены монета и игральная кость. Найти вероятность совместного появления событий: “появился герб”, “появилось 2 очка”.
14. На складе находятся 60 деталей, изготовленных тремя бригадами. Из них 30 деталей изготовлены первой бригадой, 16 – второй, 14 – третьей. Определить вероятность поступления на сборку детали, изготовленной второй или третьей бригадой.

15. В урне находится n белых и m черных шаров. Вынимаются два шара. Какова вероятность того, что: а) оба шара белые, б) оба шара черные?
16. С первого автомата на сборку поступают 20%, со второго – 30%, с третьего – 50% деталей. Первый автомат дает в среднем 0,2% брака, второй – 0,3%, третий – 0,1%. Найти вероятность того, что поступившая на сборку деталь – бракованная.
17. Один из трех стрелков вызывается на линию огня и производит выстрел. Цель поражена. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для первого стрелка равна 0,3; для второго – 0,5; для третьего – 0,8. Найти вероятность того, что выстрел произведен вторым стрелком.
18. Вероятность выигрыша по лотерейному билету будет $p = 0{,}3$. Имеется 4 билета. Определить вероятности всех возможных исходов для владельца этих билетов: а) ни один билет не выиграет; б) выиграет один билет; в) два билета выиграют; г) 3 билета выиграют; д) 4 билета выиграют.
19. При некотором технологическом процессе вероятность изготовления годной детали равна 0,8. Определить наиболее вероятное число годных деталей в партии из 135 штук.
20. При массовом производстве шестерен вероятность брака при штамповке равна 0,1. Какова вероятность того, что из 400 наугад взятых шестерен 50 будут бракованными?
21. Вероятность появления события на время испытаний $p = 0{,}8$. Найти вероятность того, что событие появится не менее 75 раз и не более 90 раз при 100 испытаниях.

Вариант 2

1. Из ящика, содержащего жетоны с номерами от 1 до 40, участники жеребьевки вытягивают жетоны. Определить вероятность того, что номер первого наудачу извлеченного жетона не содержит цифры 2.
2. Среди 25 студентов группы, в которой 10 девушек, разыгрываются 5 билетов. Определить вероятность того, что среди обладателей билетов окажутся 2 девушки.
3. Вероятность того, что студент сдаст экзамен на “отлично”, равна 0,2; на “хорошо” – 0,4; на “удовлетворительно” – 0,3; на “неудовлетворительно” – 0,1. Найти вероятность того, что студент сдаст экзамен.
4. На испытательном стенде в определенных условиях испытываются 250 приборов. Найти вероятность того, что в течение часа откажет хотя бы один из испытываемых приборов, если известно, что вероятность отказа в течение часа одного из этих приборов равна 0,04 и одинакова для всех приборов.

5. Слесарь имеет 9 конусных и 22 эллиптических валика. Наудачу он берет один валик, а затем другой. Найти вероятность того, что первый валик будет эллиптическим, а второй – конусным.
6. Характеристика материала, взятого для изготовления продукции с вероятностями 0,09; 0,16; 0,25; 0,25; 0,16; 0,09, может находиться в шести различных интервалах. В зависимости от свойств материала вероятности получения первосортной продукции соответственно равны 0,2; 0,3; 0,4; 0,4; 0,3; 0,2. Определить вероятность получения первосортной продукции.
7. В пирамиде 10 винтовок, из которых 4 снабжены оптическим прицелом. Вероятность того, что стрелок поразит мишень при выстреле из винтовки с оптическим прицелом, равна 0,95; для винтовок без оптического прицела эта вероятность равна 0,8. Стрелок поразил мишень из наудачу взятой винтовки. Найти вероятность того, что стрелок стрелял из винтовки с оптическим прицелом.
8. Прибор состоит из 10 узлов. Надежность (вероятность безотказной работы в течение времени t) для каждого узла равна $p = 0{,}4$. Узлы выходят из строя независимо один от другого. Найти вероятность того, что за время t: а) откажет хотя бы один узел; б) откажут ровно два узла; в) откажет ровно один узел; г) откажут не менее двух узлов.
9. Испытывается каждый из 16 элементов некоторого устройства. Вероятность того, что элемент выдержит испытания, равна 0,8. Найти наивероятнейшее число элементов, которые выдержат испытание.
10. Найти вероятность того, что событие A (переключение передач) наступит 70 раз на 243-километровой трассе, если вероятность переключения на каждом километре этой трассы равна 0,25.
11. Вероятность поражения мишени при одном выстреле равна 0,8. Найти вероятность того, что при 100 выстрелах мишень будет поражена не менее 75 раз и не более 90 раз.

Вариант 3

1. Какова вероятность того, что наудачу вырванный листок из нового календаря соответствует первому числу месяца? (Год считается не високосным).
2. Из 15-ти строительных рабочих – 10 штукатуров и 5 маляров. Наудачу отбирается бригада из 6-ти рабочих. Какова вероятность того, что среди них будет равное число маляров и штукатуров?
3. В пакете сложены 20 одинаковых карточек, занумерованных по порядку с №31 по №50 и тщательно перемешанных между собой. Какова вероятность того, что при взятии наудачу два раза по одной карточке, номер первой карточки окажется кратным числу 4, а номер второй карточки окажется кратным числу 7?

4. В цехе имеется 3 телефона, работающих независимо друг от друга. Вероятности занятости каждого из них соответственно следующие $q_1 = 0{,}08$; $q_2 = 0{,}15$; $q_3 = 0{,}2$. Найти вероятность того, что хотя бы один телефон свободен.
5. Из колоды (52 карты) наудачу вынута одна карта. Найти вероятность того, что это “туз” или “король”.
6. Радиолампа может принадлежать к одной из трех партий с вероятностями p_1, p_2 и p_3, где $p_1 = p_2 = 0{,}25$; $p_3 = 0{,}5$. Вероятности, того, что лампа проработает заданное число часов, равны для этих партий соответственно 0,1; 0,2; 0,4. Определить вероятность того, что радиолампа проработает заданное число часов.
7. Имеются три одинаковые по виду урны. В первой урне 20 белых шаров, во второй – 10 белых и 10 черных шаров, в третьей – 20 черных шаров. Из выбранной наугад урны вынули белый шар. Найти вероятность того, что шар вынут из первой урны.
8. В некоторых районах летом в среднем 20% дней бывают дождливыми. Какова вероятность того, что в течение одной недели: а) будет хотя бы один дождливый день; б) будет ровно один дождливый день; в) число дождливых дней будет не более четырех; г) дождливых дней не будет.
9. Вероятность нарушения точности в сборке прибора составляет 0,32. Определить наиболее вероятное число точных приборов в партии на 9 штук.
10. Определить вероятность того, что при 150 выстрелах из винтовки мишень будет поражена 70 раз, если вероятность поражения мишени при одном выстреле равна 0,4.
11. Определить вероятность того, что из 1000 родившихся детей число мальчиков будет не менее 455 и не более 555, если вероятность рождения мальчиков равна 0,515.

Вариант 4

1. В книге 335 страниц. Найти вероятность того, что наугад открытая страница имеет порядковый номер, оканчивающийся на 5.
2. Студент пришел на экзамен, зная лишь 24 из 32-х вопросов программы. Экзаменатор задал ему 3 вопроса. Найти вероятность того, что студент ответил на все вопросы.
3. Заводское здание состоит из двух корпусов. Вероятность попадания одной бомбы в первый корпус равна 0,32; в другой – 0,19. Найти вероятность того, что бомба не попадет в заводское здание.

4. К концу дня в магазине осталось 60 арбузов, среди которых 50 спелых. Покупатель выбирает 2 арбуза. Какова вероятность того, что оба арбуза спелые?
5. Стрелок стреляет по мишени, разделенной на 3 области. Вероятность попадания в первую область равна 0,55; во вторую – 0,35. Найти вероятность того, что стрелок при одном выстреле попадает либо в первую, либо во вторую область.
6. В группе спортсменов 20 бегунов, 6 прыгунов и 4 метателя молота. Вероятность того, что будет выполнена норма мастера спорта бегуном, равна 0,9; прыгуном – 0,8 и метателем – 0,75. Определять вероятность того, что наудачу вызванный спортсмен выполнит норму мастера спорта.
7. Прибор может собираться из высококачественных деталей и из деталей обычного качества; вообще, 40% приборов собирается из высококачественных деталей. Если прибор собран из высококачественных деталей, то его надежность (вероятность безотказной работы за время t) равна 0,95, если из деталей обычного качества – его надежность равна 0,7. Прибор испытывался в течение времени t и работал безотказно. Найти вероятность того, что он собран из высококачественных деталей.
8. Вероятность того, что вещь, взятая напрокат, будет возвращена исправной, равна 0,8. Определить вероятность того, что из пяти взятых вещей: а) три будут возвращены исправными; б) все пять вещей будут возвращены исправными; в) будут возвращены исправными не менее двух вещей.
9. Вероятность появления брака в партии из 500 деталей равна 0,035. Определить наивероятнейшее число бракованных деталей в этой партии.
10. При производстве электрических лампочек вероятность изготовления лампы первого сорта принимается равной 0,64. Определить вероятность того, что из 100 взятых наудачу электроламп, 70 будут первого сорта.
11. Подлежат исследованию 400 проб руды. Вероятность промышленного содержания металла в каждой пробе одинакова и равна 0,8. Найти вероятность того, что число проб с промышленным содержанием металла будет заключено между 290 и 340.

Вариант 5

1. В конверте лежат буквы разрезной азбуки: *О, П, Р, С, Т*. Буквы тщательно перемешаны. Определить вероятность того, что, вынимая эти буквы и укладывая их рядом, получится слово “*СПОРТ*”.

2. В группе 20 студентов, среди которых 12 отличников. Определить вероятность того, что из 6 наудачу вызванных студентов этой группы окажется 4 отличника.
3. В процессе эксплуатации двигателя возможны следующие неисправности: большое отложение слоя накипи и подтекание воды из радиатора. Вероятности обнаружения этих неисправностей во время эксплуатации соответственно будут: $p_1 = 0{,}8$; $p_2 = 0{,}9$. Найти вероятность того, что за время одной рабочей смены обнаружатся обе неисправности.
4. Определить вероятность извлечения друг за другом 3 белых шара из урны, содержащей 30 белых, 20 красных и 10 синих шаров, если производится отбор без возвращения.
5. События *А*, *В*, *С* и *Д* образуют полную группу событий. Вероятности событий таковы: $P(A) = 0{,}1$; $P(B) = 0{,}3$; $P(C) = 0{,}4$. Чему равна вероятность события *Д*?
6. С первого автомата на сборку поступает 20%, со второго 30%, с третьего – 50% деталей. Первый автомат дает в среднем – 0,2% брака, второй – 0,3%, третий – 1%. Найти вероятность того, что поступившая на сборку деталь бракованная.
7. Один из трех стрелков вызывается на линию огня и производит выстрел. Цель поражена. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для первого стрелка равна 0,3, для второго – 0,5, для третьего – 0,8. Найти вероятность того, что выстрел произведён вторым стрелком.
8. В цехе 6 моторов. Для каждого мотора вероятность того, что он в данный момент включен, равна 0,8. Найти вероятность того, что в данный момент: а) включено 4 мотора; б) включен хотя бы один мотор; в) включены все моторы.
9. В телевизоре стоят 12 ламп. Каждая из них с вероятностью 0,4 может выйти из строя в течение гарантийного срока. Найти наивероятнейшее число ламп, вышедших из строя в течение гарантийного срока.
10. Вероятность рождения мальчика равна 0,515. Найти вероятность того, что из 200 родившихся детей мальчиков и девочек будет поровну.
11. Вероятность того, что деталь не прошла проверку ОТК, будет $p = 0{,}2$. Найти вероятность того, что среди 400 случайно отобранных деталей окажется непроверенных от 70 до 100 деталей.

Вариант 6

1. При наборе телефонного номера абонент забыл две последние цифры и набрал их наудачу, помня лишь, что эти цифры нечетные и разные. Найти вероятность того, что номер набран правильно.
2. В партии из 50-ти деталей 5 бракованных. Из партии наугад выбираются 6 изделий. Определить вероятность того, что среди этих 6-ти изделий 2 окажутся бракованными.
3. Для разрушения моста достаточно попадания хотя бы одной авиабомбы. Найти вероятность того, что мост будет разрушен, если на него сбросить 4 бомбы, вероятности попадания которых соответственно равны 0,3; 0,4; 0,6; 0,7.
4. В урне находятся 3 черных и 2 белых шара. Из урны извлекают последовательно (без возвращения) два шара. Событие A состоит в том, что первым будет взят белый шар, а событие B – в том, что второй шар окажется черным. Найти вероятность произведения событий A и B.
5. Из колоды карт (36 шт.) вынута одна карта. Найти вероятность того, что это “дама” или “король”.
6. В лаборатории имеется 6 клавишных автоматов и 4 полуавтомата. Вероятность того, что за время выполнения расчета автомат не выйдет из строя, равна 0,95; для полуавтомата – равна 0,8. Студент производит расчет на наудачу выбранной машине. Найти вероятность того, что до окончания расчета машина не выйдет из строя.
7. Счетчик регистрирует частицы трех типов: A, B и C. Вероятности появления этих частиц таковы: $P(A)=0{,}2$; $P(B)=0{,}5$; $P(C)=0{,}3$. Частицы каждого из этих типов счетчик улавливает с вероятностями $p_1=0{,}8$; $p_2=0{,}2$; $p_3=0{,}4$. Счетчик отметил частицу. Определить вероятность того, что это была частица типа B.
8. В магазин вошли 12 покупателей. Вероятность того, что в отдельности каждый из них купит что-нибудь, равна 0,42. Найти вероятность того, что: а) все 12 покупателей совершат покупки; б) 6 покупателей совершат покупки; в) ни один покупатель не совершит покупки.
9. Для Ивана вероятность выиграть шахматную партию у Петра равна 0,8. Сыграно 12 партий. Найти наивероятнейшее число партий, выигранных Иваном.
10. Средний процент нарушения работы кинескопа телевизора в течение гарантийного срока равен 12%. Вычислить вероятность того, что из 46-ти телевизоров 36 выдержат гарантийный срок.

11. В партии из 22500 изделий каждое изделие независимо от других может быть бракованным с вероятностью $p = 0{,}2$. Найти вероятность того, что число бракованных изделий заключено между 4380 и 4560.

Вариант 7

1. Подброшены две игральные кости. Найти вероятность того, что сумма выпавших очков не превысит четырех.
2. В урне 7 белых и 5 красных шаров. Какова вероятность того, что среди наудачу вытянутых 6 шаров будут 4 белых и 2 красных шара?
3. Два стрелка производят в цель по одному выстрелу. Вероятность попадания для первого стрелка равна 0,7, для второго – 0,8. Найти вероятность того, что попадут в цель: а) оба стрелка; б) только один; в) ни один.
4. Среди 50-ти электрических лампочек имеется 3 нестандартных. Найти вероятность того, что две последовательно взятые электролампочки окажутся нестандартными.
5. При работе триода за время гарантийного срока вероятность потери эмиссии лампы равна 0,3; вероятность замыкания нитей катода и сетки равна 0,2; вероятность сгорания нити катода равна 0,1. Определить вероятность появления хотя бы одной из неисправностей лампы, если выход из строя каждого из элементов лампы является несовместным событием.
6. С первого автомата на сборку поступает 40%, со второго – 30%, с третьего – 20%, с четвертого – 10% деталей. Среди деталей первого автомата имеется 0,1% бракованных деталей, второго – 0,2%, третьего – 0,25%, четвертого – 0,5%. Найти вероятность того, что поступившая на сборку деталь будет бракованной.
7. Для участия в студенческих отборочных спортивных соревнованиях выделено из первой группы 4 студента, из второй – 6, из третьей – 5 студентов. Вероятности того, что отобранный студент из первой, второй, третьей группы попадет в сборную института, соответственно равны: 0,5; 0,4 и 0,3. Наудачу выбранный участник соревнований попал в сборную. Найти вероятность того, что это будет студент из третьей группы.
8. На автобазе имеется 12 автомашин. Вероятность выхода на линию каждой из них равна 0,8. Найти вероятность нормальной работы автобазы в ближайший день, если для этого необходимо иметь на линии не менее 8-ми автомашин.

9. В результате многолетних наблюдений установлено, что вероятность выпадения дождя 1 октября в данном городе равна 1/7. Определить наивероятнейшее число дождливых дней 1 октября в данном городе за 40 лет.
10. Определить вероятность одновременной остановки 30-ти машин из 100 работающих, если вероятность остановки одной машины равна 0,2.
11. Вероятность нарушения стандарта при штамповке карболитовых колец равна 0,3. Определить вероятность того, что из 800-т головок готовых колец число непригодных будет заключено между 225 и 255.

Вариант 8

1. Из пяти букв разрезной азбуки составлено слово “книга”. Ребенок, не умеющий читать, рассыпал эти буквы и затем собрал в произвольном порядке. Найти вероятность того, что у него снова получилось слово “книга”.
2. Среди 17-ти студентов группы, в которой 8 девушек, разыгрываются 7 билетов. Какова вероятность того, что среди обладателей билетов окажутся 4 девушки?
3. В урне имеется 100 шаров, занумерованных числами от 1 до 100. Определить вероятность того, что номер взятого наудачу шара будет кратным 25-ти или 30-ти.
4. Вероятность попадания в цель при сбрасывании бомбы равна 0,7, а вероятность того, что бомба не взорвется, равна 0,08. Найти вероятность разрушения объекта, если будет сброшена одна бомба.
5. Четырем клиентам назначена деловая встреча на 12 часов дня. Вероятности опоздания для каждого из них соответственно равны 0,2; 0,15; 0,3 и 0,1. Найти вероятность того, что хотя бы один клиент прибудет вовремя.
6. Имеются три одинаковые с виду урны. В первой a белых шаров и $в$ черных; во второй урне – c белых и d черных, а в третьей урне – только белые шары. Студент подходит наугад к одной из урн и вынимает из нее один шар. Найти вероятность того, что этот шар белый.
7. С первого автомата на сборку поступает 20%, со второго – 30%, с третьей – 50% деталей. Первый автомат дает в среднем 0,2% брака, второй – 0,3%, третий – 0,1%. Найти вероятность того, что оказавшаяся бракованной деталь изготовлена на первом автомате.

8. Вероятность попадания в цель при одном выстреле из винтовки равна 0,3. Произведено шесть выстрелов. Определить вероятность того, что: а) три пули попадут в цель, б) не менее трех пуль попадет в цель.
9. Брак при изготовлении штампованных деталей составляет 5%. Сколько нужно взять деталей, чтобы наиболее вероятное число годных деталей равнялось 150?
10. Вероятность рождения мальчика равна 0,515. Какова вероятность того, что среди 1000 новорожденных будет 480 девочек?
11. Вероятность неточной сборки прибора равна 0,2. Найти вероятность того, что среди 500 приборов окажется от 410 до 430 (включительно) точных.

Вариант 9

1. Для беспрепятственного полета над некоторой территорией самолет, приближаясь к ней, обязан послать по радио парольную кодовую группу из пяти элементов (точек и тире). Какова вероятность того, что радист, не знающий парольной группы, угадает ее, передав какую-то группу наудачу.
2. Какова вероятность того, что среди вынутых наудачу 4 карт из колоды (36 шт.) ровно две окажутся принадлежащими трефовой масти?
3. Предполагается, что для шахматиста равновероятны три исхода каждой партии (выигрыш, ничья, проигрыш). Найти вероятность того, что шахматист из четырех партий: а) не проиграет ни одной; б) проиграет хотя бы одну партию.
4. Из 60-ти вопросов, входящих в экзаменационные билеты, студент подготовил 50. Какова вероятность того, что вытянутый студентом билет, содержащий два вопроса, будет состоять из подготовленных им вопросов?
5. Вытачивается деталь прибора в виде прямоугольного параллелепипеда. Деталь считается годной, если отклонение размера каждого из ребер от заданного чертежом не превышает 0,01. Вероятность отклонений, превышающих 0,01, составляет по длине $p_1 = 0{,}08$, по ширине – $p_2 = 0{,}12$, по высоте – $p_3 = 0{,}1$. Найти вероятность непригодности детали.
6. Имеются две урны: в первой a белых паров и $в$ черных; во второй c белых и d черных. Из первой урны во вторую перекладывают, не глядя, один шар. После этого из второй урны берут один шар. Найти вероятность того, что этот шар будет белым.
7. Стрельба производится по пяти мишеням типа A, по трем – типа B и по двум – типа C. Вероятность попадания в мишень типа A равна 0,4; типа B – 0,1; типа C – 0,15. Выстрел в одну из мишеней дал попадание. Найти вероятность того, что поражена мишень типа B.

8. Наблюдениями установлено, что в некоторой местности в сентябре в среднем бывает 12 дождливых дней. Какова вероятность, что из случайно взятых в этом месяце 8-ми дней 3 дня окажутся дождливыми?
9. Вероятность того, что пассажир опоздает к отправлению поезда, равна 0,02. Найти наиболее вероятное число опоздавших из 855-ти пассажиров.
10. Вероятность появления успеха в каждом испытании равна 0,25. Какова вероятность того, что при 300-х испытаниях успех наступит ровно 75 раз?
11. Производство дает 1% брака. Какова вероятность того, что из взятых на исследование 1100 изделий выбраковано будет от 17-ти до 23-х изделий?

Вариант 10

1. Телефонный номер состоит из шести цифр. Найти вероятность того, что все цифры различны.
2. Группа из 10-ти мужчин и 10-ти женщин делится случайным образом на две равные части. Найти вероятность того, что в каждой части мужчин и женщин одинаковое число.
3. Детали проходят три операции обработки. Вероятность получения брака на первой операции равна 0,02, на второй – 0,03, на третьей – 0,02. Найти вероятность получения детали без брака после трех операций, предполагая, что получение брака на отдельных операциях являются независимыми событиями.
4. Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,2. Произведено 10 выстрелов. Найти вероятность поражения цели, то есть будет хотя бы одно попадание.
5. На карточках разрезной азбуки написаны 32 буквы русского алфавита. Пять карточек вынимаются наугад одна за другой и укладываются на стол в порядке появления. Найти вероятность того, что получится слово “конец”.
6. Стрельба производится по пяти мишеням типа A, по трем – типа B и по двум – типа C. Вероятность попадания в мишень типа A равна 0,4; типа B – 0,1; типа C – 0,15. Найти вероятность поражения мишени при одном выстреле, если неизвестно, в мишень какого типа он будет сделан.
7. Двухкаскадный электронный усилитель вышел из строя. Определить вероятность того, что не работает первый каскад, если известно, что отказы каскадов – события несовместные, а вероятности этих событий относятся друг к другу соответственно как 1:3.
8. Найти вероятность того, что в семье, имеющей 6 детей, не менее двух девочек. Предполагается, что вероятности рождения мальчика и девочки одинаковые.

9. Вероятность изготовления нестандартной детали равна 0,1. Найти наивероятнейшее число стандартных деталей среди 20-ти деталей.
10. В сосуде находится 3 белых и 4 черных шара. Шары извлекаются таким образом, что каждый извлеченный шар возвращается обратно в сосуд. Определить вероятность того, что при 250-ти извлечениях белый шар появится 100 раз.
11. При штамповке металлических клемм получается в среднем 90% годных. Найти вероятность наличия от 790-ти до 820-ти (включительно) годных в партии из 900 клемм.

Вариант 11

1. Из родившихся в городе в течение некоторого периода времени 127000 детей зарегистрировано 65024 мальчика и 61976 девочек. Какова частотность рождения детей того и другого пола? Чему равна сумма частотностей?
2. Радиотехническое устройство имеет 10 потенциометров, из которых 4 неисправны. Проверке подвергается половина потенциометров, выбираемых произвольно. Определить вероятность того, что все выбранные для проверки приборы окажутся исправными.
3. Пассажир, покупая билет для проезда по железной дороге в день отправления поезда, может только с вероятностью 0,8 рассчитывать на получение удобного для него места в вагоне. Известно, кроме того, что поезд может опоздать к станции назначения пассажира с вероятностью 0,01. Какова вероятность того, что пассажир в срок прибудет к месту назначения с желательными для него удобствами?
4. На складе находится 60 деталей, изготовленных тремя бригадами. Из них 30 наготовлено первой бригадой, 16 – второй, 14 – третьей. Определить вероятность поступления на сборку детали, изготовленной второй или третьей бригадой?
5. Три станка работают независимо друг от друга. Вероятность того, что в течение часа не потребуется наладка, равна для первого станка 0,9; для второго – 0,8; для третьего – 0,7. Вычислить вероятность того, что хотя бы один из станков не потребует наладки в течение часа.
6. В тире имеется 5 ружей, вероятности попадания из которых соответственно равны: 0,5; 0,6; 0,7; 0,8; 0,9. Определить вероятность попадания при одном выстреле, если стреляющий берет одно из ружей наудачу.

7. Среди поступающих на сборку деталей с первого автомата имеется 0,1% бракованных, со второго – 0,2%, с третьего – 0,25%, с четвертого – 0,5%. Производительности их относятся как 4:3:2:1 соответственно. Взятая наудачу деталь оказалась стандартной. Найти вероятность того, что она изготовлена: а) на втором; б) четвертом автомате.
8. Что вероятнее выиграть у равносильного противника (ничейный исход партии исключен): а) три партии из четырех или пять из восьми? б) не менее трех партий из четырех или не менее пяти партий из восьми?
9. Вероятность того, что покупатель, выписавший чек у продавца, оплатит его в кассе, равна 0,9. Чеки выписали 40 человек. Определить наиболее вероятное число чеков, которые будут оплачены.
10. Определить вероятность того, что при 150-ти выстрелах из винтовки мишень будет поражена 70 раз, если вероятность поражения мишени при одном выстреле равна 0,4.
11. Какова вероятность того, что в столбике из 100 наугад отобранных монет число монет, расположенных “гербом” вверх, будет от 45 до 55?

Вариант 12

1. Из полной колоды игральных карт (52 шт.) наудачу извлекается одна карта. Найти вероятность того, что эта карта окажется: а) тузом; б) пиковой масти; в) пиковым тузом.
2. В партии из 50-ти деталей имеется 5 нестандартных. Определить вероятность того, что среди выбранных наудачу для проверки 6-ти деталей 2 окажутся нестандартными.
3. Радиосхема состоит из пяти элементов. Схема исправна, если исправны все ее элементы. Вероятности выхода из строя этих элементов за некоторое время работы T равны: 0,2; 0,4; 0,5; 0,6 и 0,3. Определить вероятность исправного состояния схемы после T часов работы, если выходы из строя элементов являются независимыми событиями.
4. Каждое из четырех несовместных событий может произойти соответственно с вероятностями 0,012; 0,010; 0,006; 0,02. Определять вероятность того, что в результате опыта произойдет хотя бы одно из этих событий.
5. Достаточным условием сдачи коллоквиума является ответ на два из трех вопросов, предлагаемых преподавателем студенту. Студент не знает ответов на восемь вопросов из тех сорока, которые могут быть предложены. Какова вероятность сдачи коллоквиума?
6. В цехе работают 20 станков. Из них 10 станков марки A, 6 – марки B и 4 – марки C. Вероятность того, что качество детали окажется отличным, для

этих станков соответственно равна: 0,9; 0,8 и 0,7. Какой процент отличных деталей выпускает цех в целом?

7. Три автомата штампуют одинаковые детали, которые поступают на конвейер. Производительность первого, второго и третьего автоматов относятся как 2:3:5. Вероятности брака, выпускаемого автоматами, соответственно равны 0,05; 0,1; 0,02. С контейнера наугад взята деталь. Оказалось, что она не имеет брака. Найти вероятность того, что эта деталь изготовлена третьим автоматом.
8. При передаче сообщения вероятность искажения одного знака равна 0,1. Каковы вероятности того, что сообщение из 10-ти знаков содержит: а) ровно три искажения; б) не содержит более трех искажений.
9. Для данного баскетболиста вероятность забросить мяч в корзину при одном броске равна 0,4. Произведено 10 бросков. Найти наивероятнейшее число попаданий.
10. Известно, что 3/5 всего числа изготовляемых заводом телефонных аппаратов является продукцией первого сорта. Определите вероятность того, что в изготовленной партии из 200-т аппаратов окажется 140 штук первого сорта.
11. Нужно исследовать 400 проб руды. Вероятность промышленного содержания металла в каждой пробе одинакова и равна 0,8. Определить вероятность того, что число проб с промышленным содержанием металла будет заключено между 290 и 350.

Вариант 13

1. В книге 300 страниц. Какова вероятность того, что наудачу открытая страница будет иметь порядковый номер, кратный числу 7?
2. В группе 24 студента, среди которых 8 отличников. По списку наудачу отобраны 9 студентов. Найти вероятность того, что среди отобранных студентов пять отличников.
3. Двое охотников увидели зайца и одновременно выстрелили. Вероятность попадания для первого охотника $p_1 = 0{,}6$, для второго охотника $p_2 = 0{,}7$. Какова вероятность того, что заяц будет убит только одной пулей?
4. Среди 25-ти экзаменационных билетов имеется 5 “хороших”. Два студента взяли по одному билету. Найти вероятность того, что оба студента взяли “хорошие” билеты.
5. Аппаратура состоит из трех основных устройств. Вероятности отказа в работе для этих устройств соответственно равны: 0,1; 0,15; 0,2. Какова вероятность того, что аппаратура выйдет из строя, если для этого достаточно от-

каза в работе хотя бы одного устройства и устройства могут выходить из строя независимо друг от друга?

6. В тире пять пронумерованных винтовок, вероятности попадания, на которых в мишень для данного стрелка соответственно равны: 0,5; 0,6; 0,7; 0,8; 0,9. Определить вероятность того, что стрелок при данном выстреле попадет в мишень, если он берет одну из винтовок наудачу.
7. На трех дочерей – Юлю, Марину и Лену – в семье возложена обязанность мыть посуду. Поскольку Юля старшая, ей приходится выполнять 40% всей работы. Остальные 60% работы приходятся поровну на Марину и Лену. Вероятность разбить что-нибудь из посуды (в течение одного мытья) для Юли, Марины и Лены соответственно равны: 0,02; 0,03; 0,04. Родители не знают, кто дежурил вечерам, но они слышали звон разбитой посуды. Какова вероятность того, что посуду мыла: а) Юля; б) Лена?
8. Монету бросают 7 раз. Какова вероятность того, что “герб” выпадет не менее трех раз?
9. Батарея произвела шесть выстрелов по объекту. Вероятность попадания в объект при одном выстреле равна 0,3. Найти наивероятнейшее число попаданий.
10. В первые классы должно быть принято 200 детей. Определить вероятность того, что среди них окажется 100 девочек, если вероятность рождения мальчика равна 0,515.
11. Имеется 100 станков одинаковой мощности, работающих независимо друг от друга в одинаковом режиме. При этом привод станка оказывается включенным с вероятностью 0,8 в течение рабочего времени. Какова вероятность того, что в произвольно взятый момент окажутся включенными от 70-ти до 86-ти станков.

Вариант 14

1. При стрельбе из винтовки относительная частота попадания в цель оказалась равной 0,65. Определить число попаданий, если было произведено 160 выстрелов.
2. Из 10-ти лотерейных билетов два являются выигрышными. Одновременно покупаются любые пять из этих билетов. Найти вероятность того, что среди купленных билетов будет один выигрышный.
3. Имеется партия товаров, состоящая из 50-ти предметов I-го сорта, 35-ти предметов II-го сорта, 10-ти предметов III-го сорта, а 5 предметов оказались бракованными. Какова вероятность того, что наудачу взятый один предмет будет доброкачественным (то есть I-го, II-го или III-го сорта)?

4. В классе 12 мальчиков и 18 девочек. Нужно выбрать делегацию из двух человек. Какова вероятность (если считать выбор случайным), что выбраны: а) два мальчика; б) две девочки; в) девочка и мальчик?
5. В блоке коммутации поставлены три реле с вероятностью безотказной работы в течение трех месяцев: для первого реле $p_1 = 0{,}9$; для второго $p_2 = 0{,}8$ и для третьего $p_3 = 0{,}7$. Найти вероятность того, что хотя бы одно реле за три месяца работы выйдет из строя, если все реле выходят из строя независимо друг от друга.
6. В пункте проката имеется 10 телевизоров, для которых вероятность исправной работы в течение месяца равна 0,9 и 5 телевизоров с аналогичной вероятностью, равной 0,95. Найти вероятность того, что телевизор, взятый наудачу в пункте проката, будет работать исправно в течение месяца.
7. Пассажир может обратиться за получением билета в одну из трех касс. Вероятности обращения в каждую кассу зависят от их местонахождения и равны соответственно 0,3; 0,5; 0,2. Вероятности того, что к моменту прихода пассажира имеющиеся в кассе билеты будут проданы, равны для первой кассы 0,6; для второй – 0,4; для третьей – 0,5. Пассажир направился за билетом в одну из касс и приобрел балет. Найти вероятность того, что эта была вторая касса.
8. Для нормальной работы автобазы на линии должно быть не менее 8-ми автомашин, а их имеется 10. Вероятность невыхода каждой автомашин на линию равна 0,1. Найти вероятность нормальной работы автобазы в ближайший день.
9. При данном технологическом процессе 85% всей произведенной продукции – высшего сорта. Найти наивероятнейшее число изделий высшего сорта в партии из 150-ти изделий.
10. Среди коконов некоторой партии имеется 20% цветных коконов. Какова вероятность того, что среди 100 случайно отобранных из партии коконов будет 15 цветных?
11. Из урны, содержащей 1 белый и 4 черных шара, по схеме случайного выбора с возвращением производят 2500 извлечений шаров. Найти приближенное значение вероятности того, что число появлений белого шара заключено между 480 и 540.

Вариант 15

1. При стрельбе была получена частотность попадания 0,6. Сколько было сделано выстрелов, если получено 12 промахов?

2. В урне находятся 4 белых и 5 черных шаров. Из урны вынимают сразу 6 шаров. Найти вероятность того, что среди них будет ровное число белых и черных шаров.
3. Вероятность того, что в течение одной смены возникает неполадка станка, равна 0,5. Какова вероятность того, что не произойдет ни одной неполадки за три смены.
4. Общество из 10-ти мужчин и 10-ти женщин садится за круглый стол. Какова вероятность того, что никакие двое мужчин не будут сидеть рядом?
5. Для разрушения моста достаточно попадания хотя бы одной бомбы. Найти вероятность того, что мост будет разрушен, если на него сбросить четыре бомбы, вероятности попадания которых соответственно равны: 0,3; 0,4; 0,6; 0,7.
6. В ящике содержатся 12 деталей, изготовленных на заводе № 1, 20 деталей – на заводе № 2 и 18 деталей – на заводе № 3. Вероятность того, что деталь, изготовленная на заводе №1, отличного качества, равна 0,9; для деталей, изготовленных на заводах № 2 и № 3, эти вероятности соответственно равны 0,6 и 0,9. Найти вероятность того, что извлеченная наудачу деталь отличного качества.
7. В телевизионном ателье имеется 4 кинескопа. Вероятности того, что кинескоп выдержит гарантийный срок службы, соответственно равны 0,8; 0,85; 0,9; 0,95. Найти вероятность того, что взятый наудачу кинескоп выдержит гарантийный срок службы.
8. Для участия в студенческих спортивных отборочных соревнованиях выделено, из первой группы 4, из второй – 6, из третьей группы – 5 студентов. Вероятности того, что студент первой, второй и третьей группы попадет в сборную команду института, соответственно равны 0,9; 0,7; 0,8. Наудачу названный студент в итоге соревнования попал в сборную. К какой группе вероятнее всего принадлежал студент?
9. Осенью надо произвести независимые испытания с вероятностью появления события в каждом испытании, равной 0,4, чтобы наивероятнейшее число появлений события в этих испытаниях было равно 25.
10. Монета брошена $2N$ раз (N – велико). Найти вероятность того, что “герб” выпадет ровно N раз.
11. Вероятность появления события в каждом из 100 независимых испытаний постоянна и равна 0,8. Найти вероятность того, что событие появится не менее 75-ти раз и не более 90 раз.

Вариант 16

1. Из партии радиоламп, среди которых n доброкачественных и m бракованных, для контроля наудачу взято k штук, оказавшихся доброкачественными. Определить вероятность того, что следующая $(k+1)$-я радиолампа будет доброкачественной
2. Колоду из 36-ти карт наудачу разделяют на две равные части. Чему равна вероятность того, что в обеих частях окажется по разному числу черных и красных карт?
3. В урне 30 шаров: 10 красных, 13 синих и 7 белых. Найти вероятность появления цветного шара, когда их вынимают
4. Из карточек разрезной азбуки составлено слово "статистика". Затем из этих 10-ти карточек наудачу, одна за другой, выбираются 5 карточек и располагаются в ряд в порядке появления. Найти вероятность того, что получится слово "такси".
5. Охотник выстрелил три раза по удаляющейся цели. Вероятность попадания в нее в начале стрельбы равна 0,8, а после каждого выстрела уменьшается на 0,1. Найти вероятность того, что охотник: а) промахнется все три раза; б) попадет хотя бы один раз.
6. Два автомата производят детали, которые поступают на общий конвейер. Производительность первого автомата вдвое больше производительности второго. Первый автомат производит в среднем 60% деталей отличного качества, а второй 84%. Найти вероятность того, что наудачу взятая с конвейера деталь будет отличного качества.
7. В пирамиде пять винтовок, три из которых снабжены оптическим прицелом. Вероятность того, что стрелок поразит мишень при выстреле из винтовки с оптическим прицелом, равна 0,95; для винтовки без оптического прицела эта вероятность равна 0,7. Стрелок поразил мишень наудачу из взятой винтовки. Найти вероятность того, что стрелок стрелял из винтовки с оптическим прицелом.
8. Вероятность выиграть по одному билету лотереи равна 1/7. Какова вероятность, имея 6 билетов, выиграть: а) по двум билетам; б) по трем билетам?
9. Вероятность того, что автоматический денежный приемник при опускании одной монеты сработает неправильно, равна 0,03. Найти наивероятнейшее число случаев правильной работы автомата, если будет опущено 150 монет.
10. Найти вероятность того, что событие A наступит 1400 раз в 2400 испытаний, если вероятность появления этого события в каждом испытании равна 0,6.

11. Всхожесть семян данного растения равна 0,9. Найти вероятность того, что из 900 семян число проросших будет заключено между 790 и 830.

Вариант 17

1. Среди 50-ти изготовленных шестерен имеется 4 нестандартных. Первые 8 шестерен, отобранные для контроля, оказались стандартными. Определить вероятность того, что взятая наудачу следующая шестерня окажется нестандартной.
2. Из колоды карт (52 шт.) наугад извлекают три карты. Найти вероятность того, что это будет тройка, семерка и туз.
3. Для перевозки $n+m$ изделий двух типов использовался железнодорожный состав. Получена информация о том, что в пути следования повреждены два изделия. Определить вероятность того, что повреждены изделия разных типов.
4. В ящике 10 красных и 6 синих пуговиц. Из ящика наудачу вынимаются две пуговицы. Какова вероятность того, что пуговицы будут одноцветными?
5. Два стрелка независимо друг от друга стреляют по одной и той же мишени. Вероятность попадания для первого стрелка равна 0,9, для второго – 0,8. Найти вероятность того, что хотя бы один из стрелков попадет в мишень.
6. Радиолампа принадлежит к одной из трех партий с вероятностями 0,25; 0,5; 0,25 соответственно. Вероятности того, что лампа проработает заданное число часов, для этих партий соответственно равны: 0,1; 0,2: 0,4. Определить вероятность того, что взятая наудачу лампа проработает заданное число часов.
7. В группе спортсменов 20 лыжников, 5 велосипедистов и 4 бегуна. Вероятность выполнить норму на разряд такова: для лыжника – 0,9; для велосипедиста – 0,8; для бегуна – 0,75. Спортсмен, вызванный наудачу, выполнил норму. Найти вероятность того, что он занимался велоспортом.
8. Монету бросают пять раз. Найти вероятность того, что “герб” выпадет: а) менее двух раз; б) не мене двух раз.
9. Вероятность появления события A в каждом испытании равна 0,7. Сколько нужно произвести испытаний, чтобы наивероятнейшее число появлений события A равнялось 10?
10. Вероятность поражения мишени при одном выстреле равна 0,8. Найти вероятность того, что при 100 выстрелах мишень будет поражена ровно 75 раз.
11. По данным длительной проверки качества выпускаемых запчастей брак составляет 13%. Определить вероятность того, что в непроверенной партии из 150-ти запчастей годных будет не менее 126 и не более 135.

Вариант 18

1. В ящике находятся жетоны, на которых выбиты номера от 1 до 100. Определить вероятность того, что номер наудачу вынутого жетона не будет содержать цифр 5 и 0.
2. В обществе книголюбов 5 мужчин и 10 женщин. Какова вероятность того, что произвольно названная по списку группа из 4-х человек содержит равное число мужчин и женщин.
3. Вероятность того, что студент сдаст экзамен на “отлично” равна 0,2; на “хорошо” – 0,4; на “удовлетворительно” – 0,1. Определить вероятность того, что студент сдаст экзамен.
4. На каждой из 10-ти карточек разрезной азбуки имеется одна из букв: А, А, А, Е, И, К, М, М, Т, Т. Найти вероятность того, что при произвольном расположении карточек в ряд будет получено слово “математика”.
5. Три станка работают независимо друг от друга. Вероятность того, что в течение часа не потребуется наладка, равна для первого станка 0,9, для второго – 0,8, для третьего – 0,7. Вычислить вероятность того, что хотя бы один из станков не потребует наладки в течение часа.
6. На сборочный конвейер поступают детали с четырех автоматов, работающих с различной точностью. Первый автомат дает 0,5% брака, второй – 0,44%, третий – 0,7%, четвертый – 0,6%. С первого автомата поступило 1200 изделий, со второго – 1500, с третьего – 2000, с четвертого – 1300. Определить вероятность попадания на конвейер бракованной детали.
7. Имеются три одинаковые с виду урны. В первой урне лежат a белых и b черных шаров; во второй – c белых и d черных; в третьей – только белые шары. Вынимают из урны шар. Этот шар оказался белым. Найти вероятность того, что шар вынут из третьей урны.
8. Вероятность того, что вещь, взятая в прокатном пункте, будет возвращена исправной, равна 0,8. Определить вероятность того, что из пяти взятых вещей три будут возвращены исправными.
9. На факультете 1/5 всех студентов – отличники. Определить наиболее вероятное число отличников в группе из 30-ти студентов этого факультета.
10. Производство электронно-лучевых трубок для телевизоров дает в среднем 12% брака. Определить вероятность того, что в партии из 250-ти трубок годных будет 215 штук.
11. Определить вероятность того, что событие A, вероятность наступления которого в каждом отдельном испытании равна 0,75, при 768-ти испытаниях появится число раз, заключенное между 582 и 618.

Вариант 19

1. Из полного комплекта карт домино извлекается наудачу одна карта. Чему равна вероятность того, что сумма очков на обеих половинах этой карты окажется равной 4?
2. Из 10-ти лотерейных билетов два являются выигрышными. Одновременно покупаются любые пять из этих билетов. Найти вероятность того, что среди купленных билетов будет два выигрышных.
3. В студенческой группе 25 человек. Из них отлично успевают по математике 4 человека, хорошо – 12 человек, удовлетворительно – 6 человек, не успевают 3 человека. Преподаватель, незнакомый с группой, вызывает по списку одного из студентов. Определить вероятность того, что вызванный студент будет успевающим.
4. В сосуде 4 цветных и 7 белых шаров. Определить вероятность двукратного извлечения из сосуда цветного шара, если: а) вынутый шар возвращается обратно в сосуд; б) вынутый шар обратно не возвращается.
5. В магазине имеются фотоаппараты различных систем, причем вероятность того, что будет продан фотоаппарат “Зоркий”, равна 0,2. Определить вероятность того, что из 6-ти проданных аппаратов будет хотя бы один “Зоркий”.
6. На трех станках при одинаковых и независимых условиях изготавливают детали одного наименования. На первом станке изготавливают 10%, на втором – 30%, на третьем – 60% всех деталей. Вероятность детали быть стандартной равна 0,7, если она изготовлена на первом станке; 0,8 – если на втором станке; 0,9 – если на третьем станке. Найти вероятность того, что наугад взятая деталь окажется стандартной.
7. В группе спортсменов 20 лыжников, 6 конькобежцев, 4 горнолыжника. Вероятность выполнения нормы мастера спорта для лыжников равна 0,9, для конькобежца – 0,8, для горнолыжника – 0,75. Наудачу вызванный спортсмен выполнил норму мастера спорта. Найти вероятность того, что он занимался горнолыжным спортом.
8. Монету подбрасывают 6 раз. Какова вероятность того, что она упадет вверх “гербом” не более трех раз?
9. Число длинных волокон в партии хлопка составляет в среднем 0,7 общего количества волокон. При каком общем числе волокон наивероятнейшее число длинных волокон окажется равным 25?

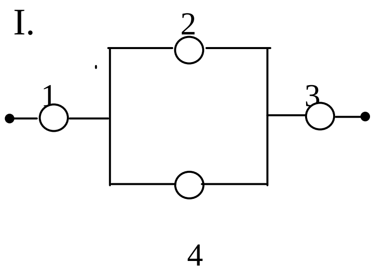
10. Вероятность того, что изготовленная деталь окажется бракованной, равна 0,04. Определить вероятность того, что в партии из 900 деталей будет 37 бракованных.
11. Определить вероятность того, что событие A, вероятность наступления которого при каждом отдельном испытании равна 2/3, при 600 испытаниях наступит не менее 372 и не более 402 раз.

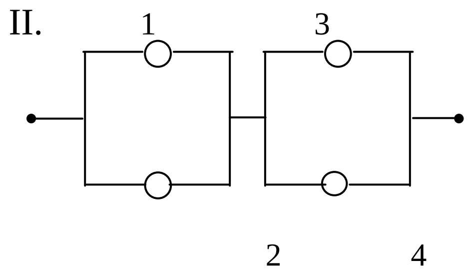
Вариант 20

1. В мастерской для ремонта поступило 17 телевизоров. Известно, что 6 из них нуждаются в общей регулировке. Мастер выбирает первые попавшиеся 3 телевизора. Какова вероятность того, что 2 из них нуждаются в регулировке?
2. Вероятность безотказной работы в течение рабочего дня для первого, второго и третьего приборов соответственно равны 0,6; 0,7 и 0,9. Какова вероятность того, что в течение дня откажет хотя бы один прибор?
3. Из 10-ти приборов 3 первого сорта, а 7 – второго. Вероятность исправности прибора первого сорта $p_1 = 0{,}9$, а второго $p_2 = 0{,}6$. Найти вероятность неисправности случайно взятого прибора.
4. Производят стрельбы из 3-х орудий по одной цели. С вероятностями попадания $p_1 = 0{,}6$; $p_2 = 0{,}7$ и $p_3 = 0{,}8$. Найти вероятность разрушения цели, если известно, что при одном попадании цель разрушается с вероятностью 0,1, при двух – 0,4 и при трех попаданиях – 0,9. Цель разрушена при залпе. Найти вероятность, что при этом было два попадания в цель.
5. Игральную кость подбрасывают 4 раза. Найти вероятность того, что при этом 5 очков выпадет два раза.
6. Устройство состоит из 1000 элементов, работающих независимо. Вероятность отказа любого элемента за время t равно 0,002. Найти вероятность того, что за время t откажет менее трех элементов.
7. Найти наивероятнейшее число годных деталей среди 19-ти проверенных, если вероятность детали быть годной равна 0,9.
8. Вероятность поражения мишени при одном выстреле $p = 0{,}8$. Найти вероятность того, что при 100 выстрелах мишень будет поражена 75 раз.
9. Вероятность появления события в каждом из 2100 независимых испытаний равна 0,7. Найти вероятность того, что данное событие появится не менее 1470 и не более 1500 раз.
10. Контролер проверяет партию деталей, среди которого 10% брака. Контролер с вероятностью 0,95 обнаруживает дефект, если он есть и с вероятностью

0,02 может признать исправную деталь дефектной. Найти вероятность того, что случайно взятое изделие признано браком.

11. Два устройства состояли из четырех элементов, соединенных по схемам I и II:





Через P_i $\left(i=\overline{1,4}\right)$ обозначим вероятность исправности i-го элемента. Для какого устройства вероятности P его исправности выражены как

$$P=\left(P_1+P_2-P_1P_2\right)\left(P_3+P_4-P_3P_4\right)\ ?$$

2.4. Случайные величины

Вариант 1

1. Дан закон распределения дискретной случайной величины X:

X	1	3	6	8
P	0,2	0,1	p_3	0,3

Найти: 1) значение вероятности p_3, соответствующее значению x_3;

2) $M[X]$, $D[X]$, $\sigma[X]$;

3) функцию распределения $F(x)$; построить ее график. Построить многоугольник распределения случайной величины X.

2. Случайные величины X и Y независимы. Найти математическое ожидание $M[Z]$ и дисперсию $D[Z]$ случайной величины $Z=3X-2Y+5$, если $M[X]=6$, $M[Y]=-9$, $D[X]=2$, $D[Y]=4$.
3. Найти математическое ожидание и дисперсию дискретной случайной величины, распределенной по биноминальному закону: $P_8(3)=C_8^3\cdot 0{,}6^3\cdot 0{,}4^5$.
4. Вероятность изготовления бракованного изделия равна 0,0002. Вычислить вероятность того, что контролер, проверяющий качество 5000 изделий, обнаружит среди них 4 бракованных.

5. В партии из N деталей имеется M стандартных. Наудачу отобраны n деталей. Составить закон распределения вероятностей дискретной случайной величины X – числа стандартных деталей среди отобранных деталей. Найти $M[X]$, $D[X]$; построить многоугольник распределения, если $N=10$, $M=8$, $n=2$.
6. Непрерывная случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\le 0,\\ x^2 & \text{при } 0<x\le 1,\\ 1 & \text{при } x>1.\end{cases}$$

Найти: 1) функцию плотности $f(x)$;

2) $M[X]$, $D[X]$, $\sigma[X]$;

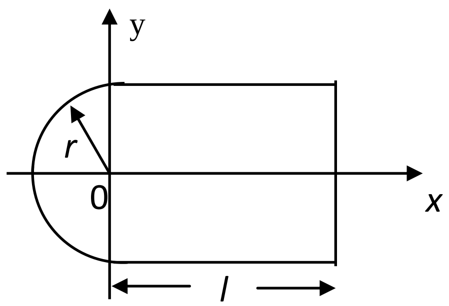
3) вероятность того, что в результате опыта случайная величина X примет значение, принадлежащее интервалу $\left(\frac{1}{4};\frac{3}{4}\right)$. Построить графики функций $F(x)$ и $f(x)$.

7. Непрерывная случайная величина X распределена равномерно с постоянной плотностью вероятностей $f(x)$, где $f(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\le -1,\\ C & \text{при } -1<x\le 1,\\ 0 & \text{при } x>1.\end{cases}$

   Найти параметр $C=const$ и записать закон распределения.
   Найти $M[X]$, $D[X]$.
   Найти вероятность того, что X примет значение, принадлежащее интервалу $(0;1)$.
8. Вероятность безотказной работы элемента распределена по показательному закону $f(x)=0{,}02e^{-0{,}02t}$ $(t>0)$. Найти вероятность того, что элемент проработает безотказно в течение 50-ти часов.
9. Непрерывная случайная величина X распределена по нормальному закону $f(x)=\frac{1}{10\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-20)^2}{200}}$. Найти $M[X]$, $D[X]$. Найти вероятность того, что в результате испытания X примет значение, заключенное в интервале $(30;50)$.
10. При взвешивании тела получен средний вес 4,36 кг. Среднее квадратическое отклонение веса равно 0,02 кг. Какой процент всех взвешиваний дает результат в пределах от 4,3 до 4,4 кг?
11. Устройство состоит из 10-ти независимо работающих элементов. Вероятность отказа каждого элемента за время T равна 0,05. С помощью неравенства Чебышева оценить вероятность того, что абсолютная величина разности между числом отказавших элементов и средним числом (математическим ожиданием) отказов за время T окажется меньше двух.

12. Рабочий изготавливает штучные изделия. Время изготовления изделий есть случайная величина, распределенная по показательному закону. Найти вероятность того, что на изготовление 100 изделий рабочему понадобится от 5-ти до 6-ти часов, если среднее время, необходимое для изготовления каждого изделия, равно 3 мин и не зависит от времени изготовления других изделий.

13. По цели (на рис. $l = 3{,}6$ м, $r = 1{,}5$ м) сделано три независимых выстрела без систематической ошибки $(m_x = m_y = 0)$ с ожидаемым разбросом попадания $\sigma_x = \sigma_y = 3$м. Найти вероятность хотя бы одного попадания в цель.



Вариант 2

1. Дан закон распределения дискретной случайной величины X:

X	2	4	5	6
P	0,3	0,1	p_3	0,4

Найти: 1) Значение вероятности p_3, соответствующее значению x_3;

2) $M[X]$, $D[X]$, $\sigma[X]$;

3) функцию распределения $F(x)$; построить ее график. Построить многоугольник распределения случайной величины X.

2. Случайные величины X и Y независимы. Найти математическое ожидание $M[Z]$ и дисперсию $D[Z]$ случайной величины $Z = 3X - 2Y + 5$, если $M[X] = -2$, $M[Y] = 4$, $D[X] = 3$, $D[Y] = 2$.

3. Найти математическое ожидание и дисперсию дискретной случайной величины, распределенной по биноминальному закону: $P_4(2) = C_4^2 \cdot 0{,}7^2 \cdot 0{,}3^2$.

4. Рукопись объемом в 1000 страниц машинописного текста содержит 100 опечаток. Найти вероятность того, что наудачу взятая страница содержит ровно 2 опечатки.

5. В партии из N деталей имеется M стандартных. Наудачу отобраны n деталей. Составить закон распределения вероятностей дискретной случайной величины X – числа стандартных деталей среди отобранных деталей. Найти $M[X]$, $D[X]$; построить многоугольник распределения, если $N = 6$, $M = 4$, $n = 3$.

6. Непрерывная случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \le 2, \\ (x/2)\text{-}1 & \text{при } 2 < x \le 4, \\ 1 & \text{при } x > 4. \end{cases}$$

Найти: 1) функцию плотности $f(x)$;

2) $M[X]$, $D[X]$, $\sigma[X]$;

3) вероятность того, что в результате опыта случайная величина X примет значение, принадлежащее интервалу $(2;3)$. Построить графики функций $F(x)$ и $f(x)$.

7. Непрерывная случайная величина X распределена равномерно с постоянной плотностью вероятностей $f(x)$, где $f(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\le 0,\\ C & \text{при } 0<x\le 4,\\ 0 & \text{при } x>4.\end{cases}$

   Найти параметр $C=const$ и записать закон распределения.

   Найти $M[X]$, $D[X]$.

   Найти вероятность того, что X примет значение, принадлежащее интервалу $(1;3)$.

8. Длительность безотказной работы элемента имеет показательное распределение $F(t)=1-e^{-0{,}02t}$ $(t>0)$. Найти вероятность того, что за $t=24$ ч элемент не откажет.

9. . Непрерывная случайная величина X распределена по нормальному закону $f(x)=\dfrac{1}{4\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-1)^2}{32}}$. Найти $M[X]$, $D[X]$. Найти вероятность того, что в результате испытания X примет значение, заключенное в интервале $(5;9)$.

10. На станке изготовляются детали, длина которых должна равняться a см. Известно, что 75% деталей отклоняются от нормы не более чем на ± 3 мм. Какой процент деталей будет отклоняться от a не более чем на ± 5 мм?

11. В осветительную сеть включено 20 ламп. Вероятность того, что за время T лампа будет включена, равна 0,8. Пользуясь неравенством Чебышева, оценить вероятность того, что абсолютная величина разности между числом включенных ламп и средним числом (математическим ожиданием) включенных ламп за время T окажется меньше трех.

12. При установившемся технологическом процессе 60% всего числа изготовляемых заводом изделий выпускается высшим сортом. Приемщик наугад берет 200 шт. изделий. Чему равна вероятность того, что среди них изделий высшего сорта окажется от 120-ти до 150-ти шт.?

13. Задано распределение вероятностей дискретной двумерной случайной величины: Найти закон распределения составляющих X и Y; их математические ожидания m_x и m_y; дисперсии $D[X]$ и $D[Y]$; коэффициент корреляции r_{xy}.

Y	X			
	0	1	2	3
–1	0,01	0,06	0,05	0,14
0	0,04	0,04	0,15	0,17
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]

Вариант 3

1. Дан закон распределения дискретной случайной величины X:

X	10	15	20	30
P	0,4	0,2	p_3	0,1

Найти: 1) значение вероятности p_3, соответствующее значению x_3;

2) $M[X]$, $D[X]$, $\sigma[X]$;

3) функцию распределения $F(x)$; построить ее график. Построить многоугольник распределения случайной величины X.

2. Случайные величины X и Y независимы. Найти математическое ожидание $M(Z)$ и дисперсию $D(Z)$ случайной величины $Z=3X-2Y+5$, если $M[X]=3$, $M[Y]=-3$, $D[X]=1$, $D[Y]=3$.
3. Найти математическое ожидание и дисперсию дискретной случайной величины, распределенной по биноминальному закону: $P_7(3)=C_7^3\cdot 0{,}8^3\cdot 0{,}2^4$.
4. Вероятность изготовления нестандартной детали равна 0,004. Найти вероятность того, что среди 1000 деталей окажется 5 нестандартных.
5. В партии из N деталей имеется M стандартных. Наудачу отобраны n деталей. Составить закон распределения вероятностей дискретной случайной величины X – числа стандартных деталей среди отобранных деталей. Найти $M[X]$, $D[X]$; построить многоугольник распределения, если $N=5$, $M=3$, $n=2$.
6. Непрерывная случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } x\le -1, \\ \dfrac{3(x+1)}{4} & \text{при } -1<x\le\dfrac{1}{3}, \\ 1 & \text{при } x>\dfrac{1}{3}. \end{cases}$$

Найти: 1) Функцию плотности $f(x)$;

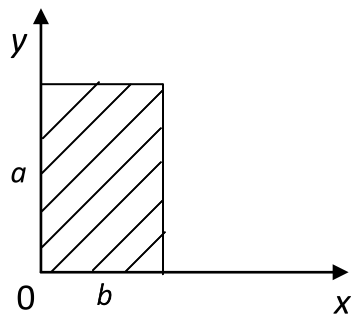
2) $M[X]$, $D[X]$, $\sigma[X]$;

3) вероятность того, что в результате опыта случайная величина X примет значение, принадлежащее интервалу $\left(0;\dfrac{1}{4}\right)$. Построить графики функций $F(x)$ и $f(x)$.

7. Непрерывная случайная величина X распределена равномерно с постоянной плотностью вероятностей $f(x)$, где $f(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } x\le 0, \\ C & \text{при } 0<x\le 5, \\ 0 & \text{при } x>5. \end{cases}$

Найти параметр $C = const$ и записать закон распределения. Найти $M[X]$, $D[X]$. Найти вероятность того, что X примет значение, принадлежащее интервалу $(2; 4)$.

8. Вероятность безотказной работы телевизора распределена по показательному закону $f(t) = 0{,}002e^{-0{,}002t}$ $(t > 0)$. Найти вероятность того, что телевизор проработает безотказно в течение 1000 ч.
9. Непрерывная случайная величина X распределена по нормальному закону $f(x) = \frac{1}{3\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-4)^2}{18}}$. Найти $M[X]$ и $D[X]$. Найти вероятность того, что в результате испытания X примет значение, заключенное в интервале $(7; 15)$.
10. Средний вес снаряда равен 12,2 кг. Вес снаряда распределен по нормальному закону. Установлено, что отклонения веса от номинала, превосходящие ± 100 г, в среднем встречаются 4 раза на каждые 100 снарядов. Найти среднее квадратическое отклонение веса снаряда.
11. Вероятность появления события A в каждом испытании равна 0,5. Пользуясь неравенством Чебышева, оценить вероятность того, что число X появлений события A заключено в пределах от 40-ти до 60-ти, если будет произведено 100 независимых испытаний.
12. На базу поступило 100 одинаковых ящиков с радиоэлементами. Математическое ожидание радиоэлементов в каждом ящике, которые пришли в негодность за время транспортировки, равно трем, а среднеквадратическое отклонение – двум. Определить границы, в которых с вероятностью не менее 0,8 будет заключено общее число радиоэлементов, пришедших в негодность за время транспортировки.
13. Производится три независимых выстрела по цели, которая представляет собой прямоугольник со сторонами $a = 3$ км, $b = 2$ км. Центр рассеивания совпадает с началом координат. Рассеивание характеризуется срединными отклонениями $\sigma_x = 1{,}25$ км, $\sigma_y = 2$ км. Определить вероятность двух попаданий в цель.



Вариант 4

1. Дан закон распределения дискретной случайной величины X:

X	3	5	7	9
P	0,2	0,3	p_3	0,2

Найти: 1) значение вероятности p_3, соответствующее значению x_3;

2) $M[X]$, $D[X]$, $\sigma[X]$;

3) функцию распределения $F(x)$; построить ее график. Построить многоугольник распределения случайной величины X.

2. Случайные величины X и Y независимы. Найти математическое ожидание $M[Z]$ и дисперсию $D[Z]$ случайной величины $Z=3X-2Y+5$, если $M[X]=4$, $M[Y]=3$, $D[X]=3$, $D[Y]=4$.
3. Найти математическое ожидание и дисперсию дискретной случайной величины, распределенной по биноминальному закону: $P_5(2)=C_5^2\cdot 0{,}9^2\cdot 0{,}1^3$.
4. Завод отправил на базу 5000 доброкачественных изделий. Вероятность того, что в пути изделие повредится, равна 0,002. Найти вероятность того, что на базу прибудет 3 негодных изделия.
5. В партии из N деталей имеется M стандартных. Наудачу отобраны n деталей. Составить закон распределения вероятностей дискретной случайной величины X – числа стандартных деталей среди отобранных деталей. Найти $M[X]$, $D[X]$; построить многоугольник распределения, если $N=8$, $M=5$, $n=2$.
6. Непрерывная случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\le 0,\\ x/4 & \text{при } 0<x\le 4,\\ 1 & \text{при } x>4.\end{cases}$$

Найти: 1) функцию плотности $f(x)$;

2) $M[X]$, $D[X]$, $\sigma[X]$;

3) вероятность того, что в результате опыта случайная величина X примет значение, принадлежащее интервалу $(1;3)$. Построить графики функций $F(x)$ и $f(x)$.

7. Непрерывная случайная величина X распределена равномерно с постоянной плотностью вероятностей $f(x)$, где $f(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\le -2,\\ C & \text{при } -2<x\le 4,\\ 0 & \text{при } x>4.\end{cases}$

   Найти параметр $C=const$ и записать закон распределения. Найти $M[X]$, $D[X]$. Найти вероятность того, что X примет значение, принадлежащее интервалу $(1;3)$.
8. Длительность времени безотказной работы элемента имеет показательное распределение $F(t)=1-e^{-0{,}03t}$ $(t>0)$. Найти вероятность того, что за время $t=100$ ч элемент не откажет.

9. . Непрерывная случайная величина X распределена по нормальному закону $f(x)=\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-2)^2}{8}}$. Найти $M[X]$, $D[X]$. Найти вероятность того, что в результате испытания X примет значение, заключенное в интервале $(4;6)$.
10. Стрельба ведется из начала координат вдоль оси $0X$. Средняя дальность полета снаряда равна 1500 м. Дальность полета снарядов распределена по нормальному закону со средним квадратическим отклонением 45 м. Найти процент снарядов, дающих перелет от 10-ти до 40-ка м.
11. Вероятность появления события в каждом испытании равна 0,25. Используя неравенство Чебышева, оценить вероятность того, что число X появлений события заключено в пределах от 150-ти до 250-ти, если будет произведено 800 испытаний.
12. При штамповке выходит 60% деталей первого сорта, 30% – второго и 10% – третьего. Определить, сколько нужно взять отштампованных деталей, чтобы с вероятностью, равной 0,8, можно было утверждать, что доля деталей первого сорта будет отличаться от вероятности изготовления детали первого сорта по абсолютной величине не более чем на 0,005.
13. Система случайных величин (x, y) имеет плотность вероятности $f(x,y)=\frac{a}{1+x^2+y^2+x^2y^2}$. Требуется: 1) найти коэффициент a; 2) найти вероятность попадания в прямоугольник $0<x<1$; $-1<y<1$; 3) определить законы распределения одномерных величин X и Y; 4) выяснить, являются ли эти величины зависимыми.

***Вариант* 5**

1. Дан закон распределения дискретной случайной величины X:

X	4	6	8	10
P	0,2	0,4	p_3	0,1

Найти: 1) значение вероятности p_3, соответствующее значению x_3;

2) $M[X]$, $D[X]$, $\sigma[X]$;

3) функцию распределения $F(x)$; построить ее график. Построить многоугольник распределения случайной величины X.

2. Случайные величины X и Y независимы. Найти математическое ожидание $M[Z]$ и дисперсию $D[Z]$ случайной величины $Z=3X-2Y+5$, если $M[X]=-2$, $M[Y]=-1$, $D[X]=1$, $D[Y]=2$.

3. Найти математическое ожидание и дисперсию дискретной случайной величины, распределенной по биноминальному закону: $P_6(3)=C_6^3\cdot 0{,}6^3\cdot 0{,}4^3$.
4. Аппаратура содержит 1000 элементов, вероятность отказа для каждого из которых в течение некоторого времени равна 0,002 и не зависит от состояния других элементов. Какова вероятность отказа аппаратуры, если он наступает при отказе хотя бы одного из элементов?
5. В партии из *N* деталей имеется *M* стандартных. Наудачу отобраны *n* деталей. Составить закон распределения вероятностей дискретной случайной величины X – числа стандартных деталей среди отобранных деталей. Найти $M[X]$, $D[X]$; построить многоугольник распределения, если $N=6$, $M=3$, $n=2$.
6. Непрерывная случайная величина *X* задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\le -2,\\ \dfrac{(x+2)}{4} & \text{при } -2<x\le 2,\\ 1 & \text{при } x>2.\end{cases}$$

Найти: 1) функцию плотности $f(x)$;
2) $M[X]$, $D[X]$, $\sigma[X]$;
3) вероятность того, что в результате опыта случайная величина X примет значение, принадлежащее интервалу $(0;1)$. Построить графики функций $F(x)$ и $f(x)$.
7. Непрерывная случайная величина *X* распределена равномерно с постоянной плотностью вероятностей $f(x)$, где $f(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\le 2,\\ C & \text{при } 2<x\le 5,\\ 0 & \text{при } x>5.\end{cases}$

   Найти параметр $C=const$ и записать закон распределения. Найти $M[X]$, $D[Y]$. Найти вероятность того, что *X* примет значение, принадлежащее интервалу $(3;4)$.
8. Испытывают два независимо работающих элемента. Длительность времени безотказной работы первого элемента имеет показательное распределение $F_1(t)=1-e^{-0{,}02t}$, второго – $F_2(t)=1-e^{-0{,}05t}$ $(t>0)$. Найти вероятность того, что за время $t=6$ ч. оба элемента не откажут.
9. . Непрерывная случайная величина *X* распределена по нормальному закону $f(x)=\dfrac{1}{4\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-8)^2}{32}}$. Найти $M[X]$, $D[X]$. Найти вероятность того, что в результате испытания *X* примет значение, заключенное в интервале $(8;16)$.
10. Автомат штампует детали. Контролируется длина детали, которая распределена нормально с математическим ожиданием (проектная длина), равным 50

мм. Фактическая длина изготовленных деталей заключается в интервале от 32-х до 68-ми мм. Найти вероятность того, что длина наудачу взятой детали больше 55-ти мм.

11. Вероятность появления события в каждом испытании равна 0,3. Используя неравенство Чебышева, оценить вероятность того, что событие будет иметь место, от 320-ти до 400 раз в серии из 1200 испытаний.
12. При установившемся технологическом процессе производится 98% изделий первого сорта и 2% – второго сорта. Какова вероятность того, что среди 10000 наугад взятых изделий не более 235-ти окажутся второго сорта?
13. Система двух случайных величин (X,Y) подчиняется нормальному закону. Рассеивание круговое. Найти радиус круга, центр которого совпадает с центром рассеивания, а вероятность попадания в который равна 0,5.

Вариант 6

1. Дан закон распределения дискретной случайной величины X:

X	2	4	6	8
p	0,12	0,28	p_3	0,3

Найти: 1) значение вероятности p_3, соответствующее значению x_3;

2) $M[X]$, $D[X]$, $\sigma[X]$;

3) функцию распределения $F(x)$; построить ее график. Построить многоугольник распределения случайной величины X.

2. Случайные величины X и Y независимы. Найти математическое ожидание $M[Z]$ и дисперсию $D[Z]$ случайной величины $Z = 3X - 2Y + 5$, если $M[X] = 3$, $M[Y] = -2$, $D[X] = 4$, $D[Y] = 1$.
3. Найти математическое ожидание и дисперсию дискретной случайной величины, распределенной по биноминальному закону: $P_9(2) = C_9^2 \cdot 0{,}7^2 \cdot 0{,}3^7$.
4. Телефонная станция обслуживает 5000 абонентов. Вероятность позвонить любому абоненту в течение часа равна 0,004. Какова вероятность того, что в течение часа позвонят два абонента?
5. В партии из N деталей имеется M стандартных. Наудачу отобраны n деталей. Составить закон распределения вероятностей дискретной случайной величины X – числа стандартных деталей среди отобранных деталей. Найти $M[X]$, $D[X]$; построить многоугольник распределения, если $N = 7$, $M = 4$, $n = 3$.
6. Непрерывная случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \le 2, \\ \dfrac{x}{2} - 1 & \text{при } 2 < x \le 4, \\ 1 & \text{при } x > 4. \end{cases}$$

Найти: 1) функцию плотности $f(x)$;

2) $M[X]$, $D[X]$, $\sigma[X]$;

3) вероятность того, что в результате опыта случайная величина X примет значение, принадлежащее интервалу $(3;4)$. Построить графики функций $F(x)$ и $f(x)$.

7. Непрерывная случайная величина X распределена равномерно с постоянной плотностью вероятностей $f(x)$, где $f(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\le 2,\\ C & \text{при } 2<x\le 8,\\ 0 & \text{при } x>8.\end{cases}$

   Найти параметр $C=const$ и записать закон распределения. Найти $M[X]$, $D[X]$. Найти вероятность того, что X примет значение, принадлежащее интервалу $(3;5)$.
8. Производится испытание трех элементов, работающих независимо один от другого. Длительность времени безотказной работы элементов распределена по показательному закону: для первого элемента $f_1(t)=0{,}1e^{-0{,}1t}$, для второго – $f_2(t)=0{,}2e^{-0{,}2t}$, для третьего элемента $f_3(t)=0{,}3e^{-0{,}3t}$ $(t>0)$. Найти вероятность того, что в интервале времени $(0;10)$ час откажет хотя бы один элемент.
9. . Непрерывная случайная величина X распределена по нормальному закону $f(x)=\dfrac{1}{20\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-40)^2}{800}}$. Найти $M[X]$, $D[X]$. Найти вероятность того, что в результате испытания X примет значение, заключенное в интервале $(40;60)$.
10. Производится измерение диаметра вала без систематических ошибок. Случайные ошибки измерения подчинены нормальному закону со средним квадратическим отклонением $\sigma=10$ мм. Найти вероятность того, что измерение будет произведено с ошибкой, не превосходящей по абсолютной величине 15 мм.
11. Вероятность наступления некоторого события в каждом из 100 испытаний равна 0,3. Используя неравенство Чебышева, оценить вероятность того, что отклонение числа наступлений этого события от математического ожидания будет более 30-ти.
12. В радиоаппаратуре, содержащей 300 ламп, применяются лампы с вероятностью годности 80%. Найти вероятность того, что 400 подобных ламп достаточно для того, чтобы полностью укомплектовать эту радиоаппаратуру.

13. Двумерная случайная величина (X,Y) задана плотностью совместного распределения $f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{6\pi} & \text{при } \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}\le 1,\\ 0 & \text{при } \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}>1.\end{cases}$. Найти плотности распределения составляющих X и Y.

***Вариант* 7**

1. Дан закон распределения дискретной случайной величины X:

X	–1	1	2	3
P	0,15	0,25	p_3	0,3

Найти: 1) значение вероятности p_3, соответствующее значению x_3;

2) $M[X]$, $D[X]$, $\sigma[X]$;

3) функцию распределения $F(x)$; построить ее график. Построить многоугольник распределения случайной величины X.

2. Случайные величины X и Y независимы. Найти математическое ожидание $M[Z]$ и дисперсию $D[Z]$ случайной величины $Z=3X-2Y+5$, если $M[X]=3$, $M[Y]=2$, $D[X]=2$, $D[Y]=5$.
3. Найти математическое ожидание и дисперсию дискретной случайной величины, распределенной по биноминальному закону: $P_6(2)=C_6^2\cdot 0{,}8^2\cdot 0{,}2^4$.
4. Вероятность того, что абонент наберет правильно номер телефона, принимается равной 0,999. Определить вероятность того, что среди 600 произведенных независимо один от другого вызовов окажется менее двух ошибочных.
5. В партии из *N* деталей имеется *M* стандартных. Наудачу отобраны *n* деталей. Составить закон распределения вероятностей дискретной случайной величины *X* – числа стандартных деталей среди отобранных деталей. Найти $M[X]$, $D[X]$; построить многоугольник распределения, если $N=6$, $M=3$, $n=2$.
6. Непрерывная случайная величина *X* задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\le -1,\\ \frac{x+1}{4} & \text{при } -1<x\le 3,\\ 1 & \text{при } x>3.\end{cases}$$

Найти: 1) функцию плотности $f(x)$;

2) $M[X]$, $D[X]$, $\sigma[X]$;

3) вероятность того, что в результате опыта случайная величина *X* примет значение, принадлежащее интервалу $(0;2)$. Построить графики функций $F(x)$ и $f(x)$.

7. Непрерывная случайная величина X распределена равномерно с постоянной плотностью вероятностей $f(x)$, где $f(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } x\le 3, \\ C & \text{при } 3<x\le 7, \\ 0 & \text{при } x>7. \end{cases}$

   Найти параметр $C=const$ и записать закон распределения. Найти $M[X]$, $D[X]$. Найти вероятность того, что X примет значение, принадлежащее интервалу $(2;4)$.
8. Испытывают три элемента, которые работают независимо один от другого. Длительность времени безотказной работы элементов распределена по показательному закону: для первого элемента $F_1(t)=1-0{,}1e^{-0{,}1t}$, для второго – $F_2(t)=1-0{,}2e^{-0{,}2t}$, для третьего элемента – $F_3(t)=1-0{,}3e^{-0{,}3t}$. Найти вероятность того, что в интервале времени $(0;5)$ час откажут все три элемента.
9. . Непрерывная случайная величина X распределена по нормальному закону $f(x)=\frac{1}{5\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-6)^2}{50}}$. Найти $M[X]$, $D[X]$. Найти вероятность того, что в результате испытания X примет значение, заключенное в интервале $(7;16)$.
10. Производится взвешивание некоторого вещества без систематических ошибок. Случайные ошибки измерения подчинены нормальному закону со средним квадратическим отклонением $\sigma=20$ г. Найти вероятность того, что взвешивание будет произведено с ошибкой, не превосходящей по абсолютной величине 10 г.
11. Принимая вероятность рождения мальчика равной 0,5, оценить с помощью неравенства Чебышева вероятность того, что среди 1200 новорожденных мальчиков будет от 550-ти до 650-ти.
12. Сколько нужно проверить деталей, чтобы с вероятностью 0,98 можно было ожидать, что абсолютная величина отклонения частоты годных деталей от вероятности 0,9 детали быть годной не превысит 0,01?
13. Задано распределение вероятностей дискретной двумерной случайной величины:

Y	X		
	3	10	12
4	0,17	0,13	0,25
5	0,10	0,30	0,05

Найти закон распределения составляющих X и Y; их математические ожидания m_x и m_y; дисперсии $D[X]$ и $D[Y]$; коэффициент корреляции r_{xy}.

Вариант 8

1. Дан закон распределения дискретной случайной величины X:

X	3	5	6	8
P	0,4	0,3	p_3	0,1

Найти: 1) значение вероятности p_3, соответствующее значению x_3;

2) $M[X]$, $D[X]$, $\sigma[X]$;

3) функцию распределения $F(x)$; построить ее график. Построить многоугольник распределения случайной величины X.

2. Случайные величины X и Y независимы. Найти математическое ожидание $M[Z]$ и дисперсию $D[Z]$ случайной величины $Z = 3X - 2Y + 5$, если $M[X] = 2$, $M[Y] = 3$, $D[X] = 2$, $D[Y] = 3$.
3. Найти математическое ожидание и дисперсию дискретной случайной величины, распределенной по биноминальному закону: $P_7(2) = C_7^2 \cdot 0{,}6^2 \cdot 0{,}4^5$.
4. Установлено, что в среднем 5% шариков, изготовленных для подшипников, оказываются бракованными. Определить вероятность того, что среди поступивших на контроль 1000 шариков бракованными окажутся 4 штуки.
5. В партии из N деталей имеется M стандартных. Наудачу отобраны n деталей. Составить закон распределения вероятностей дискретной случайной величины X – числа стандартных деталей среди отобранных деталей. Найти $M[X]$, $D[X]$; построить многоугольник распределения, если $N = 8$, $M = 4$, $n = 3$.
6. Непрерывная случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \le 2, \\ (x-2)^2 & \text{при } 2 < x \le 3, \\ 1 & \text{при } x > 3. \end{cases}$$

Найти: 1) функцию плотности $f(x)$;

2) $M[X]$, $D[X]$, $\sigma[X]$;

3) вероятность того, что в результате опыта случайная величина X примет значение, принадлежащее интервалу $(1; 2)$. Построить графики функций $F(x)$ и $f(x)$.

7. Непрерывная случайная величина X распределена равномерно с постоянной плотностью вероятностей $f(x)$, где $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \le -2, \\ C & \text{при } -2 < x \le 3, \\ 0 & \text{при } x > 3. \end{cases}$

Найти параметр $C = const$ и записать закон распределения. Найти $M[X]$, $D[X]$. Найти вероятность того, что X примет значение, принадлежащее интервалу $(0; 1)$.

8. Время T безотказной работы радиотехнической системы распределено по показательному закону. Интенсивность отказов системы $\lambda = 0{,}02$. Найти среднее время безотказной работы и вероятность безотказной работы за 80 ч.
9. . Непрерывная случайная величина X распределена по нормальному закону $f(x) = \frac{1}{5\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-10)^2}{50}}$. Найти $M[X]$, $D[X]$. Найти вероятность того, что в результате испытания X примет значение, заключенное в интервале $(15; 20)$.
10. Случайные ошибки измерения подчинены нормальному закону со средним квадратическим отклонением $\sigma = 20$ мм и математическим ожиданием $a = 0$. Найти вероятность того, что ошибка измерения не превзойдет по абсолютной величине 4 мм.
11. Вероятность появления события A в каждом испытании равна 0,2. Используя неравенство Чебышева, оценить вероятность того, что в 10000 испытаний отклонение частоты события A от его вероятности не превзойдет по абсолютной величине 0,01.
12. Сбрасывается 80 серий бомб на полосу укреплений противника. Известно, что при сбрасывании одной такой серии математическое ожидание числа попаданий равно 3, а среднее квадратическое отклонение числа попаданий равно 1,75. Какова вероятность того, что при сбрасывании указанной серии бомб в полосу укреплений попадет от 230-ти до 250-ти бомб?
13. Система двух случайных величин распределена равномерно: в прямоугольнике, ограниченном прямыми $x = 4$, $x = 6$, $y = 10$, $y = 15$, функция $f(x, y)$ сохраняет постоянное значение, а вне этого прямоугольника она равна нулю. Найти: а) плотность $f(x, y)$ совместного распределения; б) функцию распределения системы.

Вариант 9

1. Дан закон распределения дискретной случайной величины X:

X	2	3	5	6
P	0,25	0,3	p_3	0,15

Найти: 1) значение вероятности p_3, соответствующее значению x_3;

2) $M[X]$, $D[X]$, $\sigma[X]$;

3) функцию распределения $F(x)$; построить ее график. Построить многоугольник распределения случайной величины X.

2. Случайные величины X и Y независимы. Найти математическое ожидание $M[Z]$ и дисперсию $D[Z]$ случайной величины $Z=3X-2Y+5$, если $M[X]=2$, $M[Y]=1$, $D[X]=1$, $D[Y]=4$.
3. Найти математическое ожидание и дисперсию дискретной случайной величины, распределенной по биноминальному закону: $P_9(3)=C_9^3\cdot 0{,}8^3\cdot 0{,}2^6$.
4. Рабочий-сборщик, обслуживающий конвейер, за смену собирает в среднем 5000 деталей. Вероятность пропуска несобранной детали за смену равна 0,0016. Какова вероятность того, что за смену рабочий пропустит 6 несобранных деталей?
5. В партии из N деталей имеется M стандартных. Наудачу отобраны n деталей. Составить закон распределения вероятностей дискретной случайной величины X – числа стандартных деталей среди отобранных деталей. Найти $M[X]$, $D[X]$; построить многоугольник распределения, если $N=10$, $M=7$, $n=2$.
6. Непрерывная случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } x\le 0, \\ x(2-x) & \text{при } 0<x\le 1, \\ 1 & \text{при } x>1. \end{cases}$$

Найти: 1) функцию плотности $f(x)$;
2) $M[X]$, $D[X]$, $\sigma[X]$;
3) вероятность того, что в результате опыта случайная величина X примет значение, принадлежащее интервалу $(0{,}1;\ 0{,}5)$. Построить графики функций $F(x)$ и $f(x)$.

7. Непрерывная случайная величина X распределена равномерно с постоянной плотностью вероятностей $f(x)$, где $f(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } x\le 2, \\ C & \text{при } 2<x\le 4, \\ 0 & \text{при } x>4. \end{cases}$

Найти параметр $C=const$ и записать закон распределения. Найти $M[X]$, $D[X]$. Найти вероятность того, что X примет значение, принадлежащее интервалу $(1;2)$.

8. Определить время работы радиолампы с надежностью 0,8 (вероятность безотказной работы радиолампы), если среднее время ее работы равно 700 ч.
9. Непрерывная случайная величина X распределена по нормальному закону $f(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-4)^2}{8}}$. Найти $M[X]$, $D[X]$. Найти вероятность того, что в результате испытания X примет значение, заключенное в интервале $(6;8)$.

10. Деталь, изготовленная автоматом, считается годной, если отклонение X контролируемого размера от номинала не превышает 10 мм. Точность изготовления деталей характеризуется стандартным отклонением σ. Считая, что для данной технологии $\sigma = 5$ и X нормально распределена, выяснить, сколько процентов годных деталей изготовляет автомат.
11. Шестигранную кость подбрасывают 10000 раз. Оценить то, что вероятность отклонения частоты появления шести очков от вероятности появления того же числа очков меньше чем на 0,01.
12. При стрельбе из орудия отклонение снаряда от цели вызывается тремя независимыми причинами. Предполагая, что все три погрешности распределены по нормальному закону со средним значением 0 и средними квадратическими отклонениями 15 м, 5 м и 10 м, найти вероятность того, что суммарное отклонение не превзойдет 30 м.
13. Внутри прямоугольника, ограниченного прямыми $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$, $y = 0$, $y = \frac{\pi}{2}$, задана плотность распределения системы двух случайных величин $f(x, y) = C\sin(x + y)$; вне прямоугольника имеем $f(x, y) = 0$. Найти: а) величину C; б) функцию распределения системы.

Вариант **10**

1. Дан закон распределения дискретной случайной величины X:

X	1	3	5	7
P	0,3	0,2	p_3	0,2

Найти: 1) значение вероятности p_3, соответствующее значению x_3;

2) $M[X]$, $D[X]$, $\sigma[X]$;

3) функцию распределения $F(x)$; построить ее график. Построить многоугольник распределения случайной величины X.

2. Случайные величины X и Y независимы. Найти математическое ожидание $M[Z]$ и дисперсию $D[Z]$ случайной величины $Z = 3X - 2Y + 5$, если $M[X] = -3$, $M[Y] = 2$, $D[X] = 5$, $D[Y] = 2$.
3. Найти математическое ожидание и дисперсию дискретной случайной величины, распределенной по биноминальному закону: $P_8(2) = C_8^2 \cdot 0{,}7^2 \cdot 0{,}3^6$.
4. Вероятность того, что при транспортировке какой-либо телевизор будет поврежден, равна 0,001. Завод отправил потребителю 3000 доброкачественных

телевизоров. Какова вероятность того, что потребитель получил 5 телевизоров с дефектами?

5. В партии из N деталей имеется M стандартных. Наудачу отобраны n деталей. Составить закон распределения вероятностей дискретной случайной величины X – числа стандартных деталей среди отобранных деталей. Найти $M[X]$, $D[X]$; построить многоугольник распределения, если $N=8$, $M=6$, $n=2$.

6. Непрерывная случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } x\le -1, \\ \dfrac{x+1}{3} & \text{при } -1<x\le 2, \\ 1 & \text{при } x>2. \end{cases}$$

Найти: 1) функцию плотности $f(x)$;

2) $M[X]$, $D[X]$, $\sigma[X]$;

3) вероятность того, что в результате опыта случайная величина X примет значение, принадлежащее интервалу $(0;1)$.

Построить графики функций $F(x)$ и $f(x)$.

7. Непрерывная случайная величина X распределена равномерно с постоянной плотностью вероятностей $f(x)$, где $f(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } x\le 1, \\ C & \text{при } 1<x\le 2, \\ 0 & \text{при } x>2. \end{cases}$

Найти параметр $C=const$ и записать закон распределения. Найти $M[X]$, $D[X]$. Найти вероятность того, что X примет значение, принадлежащее интервалу $(1{,}5;\,2)$.

8. Радиоаппаратура за 1000 ч работы выходит из строя в среднем один раз. Определить вероятность выхода из строя радиоаппаратуры за 200 ч работы, предполагая, что срок безотказной работы радиоаппаратуры есть случайная величина, распределенная по показательному закону.

9. Непрерывная случайная величина X распределена по нормальному закону $f(x)=\dfrac{1}{10\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-40)^2}{200}}$. Найти $M[X]$, $D[X]$. Найти вероятность того, что в результате испытания X примет значение, заключенное в интервале $(50;\,60)$.

10. Коробки с шоколадом упаковываются автоматически. Их средняя масса равна 1,06 кг. Известно, что 5% коробок имеют массу, меньшую 1 кг. Какой процент коробок, масса которых превышает 940 г?

11. Суточный расход воды в населенном пункте является случайной величиной, среднее квадратическое отклонение которой равно 10000 л. Оценить вероятность того, что расход воды в этом пункте в течение дня отклонится

от математического ожидания более чем на 25000 л (по абсолютной величине).

12. Произведено 50 измерений некоторой величины. При этом среднее арифметическое результатов измерений равно 119,72. Измерения считаются равноточными со средним квадратическим отклонением $\sigma = \sqrt{2}$. Оценить с надежностью 0,95 значение измеренной величины, считая, что результаты измерений имеют нормальное распределение.
13. Плотность совместного распределения системы двух случайных величин задана функцией $f(x, y) = \dfrac{C}{(4 + x^2)(9 + y^2)}$. Найти: а) величину *C*; б) функцию распределения системы.

Вариант 11

1. Дан закон распределения дискретной случайной величины X:

X	1	2	3	4
P	0,1	0,4	p_3	0,3

Найти: 1) значение вероятности p_3, соответствующее значению x_3;
2) $M[X]$, $D[X]$, $\sigma[X]$;
3) функцию распределения $F(x)$; построить ее график. Построить многоугольник распределения случайной величины X.

2. Случайные величины X и Y независимы. Найти математическое ожидание $M[Z]$ и дисперсию $D[Z]$ случайной величины $Z = 3X - 2Y + 5$, если $M[X] = 1$, $M[Y] = -2$, $D[X] = 5$, $D[Y] = 3$.
3. Производится серия независимых испытаний, в каждом из которых событие *A* появляется с вероятностью $p = 0{,}8$. Рассматривается случайная величина *X* – число появлений события *A* в серии из $n = 5$ испытаний. Составить закон распределения вероятностей, многоугольник и функцию распределения вероятностей $F(x)$ случайной величины *X*. Найти математическое ожидание $M[X]$ и дисперсию $D[X]$.
4. Дискретная случайная величина распределена по закону Пуассона вероятностей массовых (*n* – велико) и редких (*p* – мало) событий $P_{100}(2) = \dfrac{\lambda^2}{2!} e^{-\lambda}$, $p = 0{,}01$. Найти математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины.
5. Производится ряд выстрелов из орудия с вероятностью попадания $p = 0{,}8$. Стрельба ведется до первого попадания, но не свыше $n = 5$ выстрелов.

Найти функцию распределения случайной величины X – числа выстрелов, производимых орудием до первого попадания. Найти вероятность того, что будет сделано не менее одного, но меньше 5-ти выстрелов. Определить среднее значение числа произведенных выстрелов и примерный расход снарядов на 100 подобных стрельб.

6. Непрерывная случайная величина X задана плотностью вероятности

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le 0, \\ \dfrac{x}{18} & \text{при} \quad 0 < x \le 6, \\ 0 & \text{при} \quad x > 6. \end{cases}$$

Найти: 1) функцию распределения $F(x)$;

2) $M[X]$, $D[X]$, $\sigma[X]$;

3) вероятность того, что в результате опыта случайная величина X примет значение, принадлежащее интервалу $(1;3)$. Построить графики функций $F(x)$ и $f(x)$.

7. Цена деления шкалы амперметра равна 0,1 А. Показания округляются до ближайшего целого деления. Найти вероятность того, что при отсчете будет сделана ошибка, превышающая 0,02 А.
8. Непрерывная случайная величина X распределена по показательному закону с функцией плотности $f(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } x \le 0, \\ 4e^{-4x} & \text{при } x > 0. \end{cases}$ Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины X. Найти вероятность того, что в результате испытания X попадет в интервал $(0,2;0,5)$.
9. Непрерывная случайная величина X распределена по нормальному закону $f(x)=\dfrac{1}{20\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-30)^2}{800}}$. Найти $M[X]$, $D[X]$. Найти вероятность того, что в результате испытания X примет значение, заключенное в интервале $(50;70)$.
10. Случайная величина X распределена нормально с математическим ожиданием $a=10$. Вероятность попадания X в интервал $(10;20)$ равна 0,3. Чему равна вероятность попадания X в интервал $(0;10)$?
11. Суточная потребность в электроэнергии в населенном пункте является случайной величиной, математическое ожидание которой равно 2000 квт/ч, а дисперсия составляет 20 000. Оценить вероятность того, что в ближайший день расход электроэнергии в этом населенном пункте будет от 1500 до 2500 кВт/ч.
12. Вероятность события A при каждом испытании равна 0,7. Сколько раз достаточно повторить испытания, чтобы с вероятностью 0,9 можно было ожи-

дать, что частота появления события A будет отклоняться от вероятности не больше чем на 0,05?

13. Найти вероятность попадания случайной точки (X,Y) в прямоугольник, ограниченный прямыми $x=\frac{\pi}{4}$, $x=\frac{\pi}{2}$, $y=\frac{\pi}{6}$, $y=\frac{\pi}{3}$, если известна функция распределения $F(x,y)=\sin x \sin y$ $\left(0\le x\le\frac{\pi}{2};\ 0\le x\le\frac{\pi}{2}\right)$.

Вариант 12

1. Дан закон распределения дискретной случайной величины X:

X	5	10	15	20
P	0,2	0,3	p_3	0,3

Найти: 1) значение вероятности p_3, соответствующее значению x_3;

2) $M[X]$, $D[X]$, $\sigma[X]$;

3) функцию распределения $F(x)$; построить ее график. Построить многоугольник распределения случайной величины X.

2. Случайные величины X и Y независимы. Найти математическое ожидание $M[Z]$ и дисперсию $D[Z]$ случайной величины $Z=3X-2Y+5$, если $M[X]=2$, $M[Y]=-3$, $D[X]=4$, $D[Y]=2$.
3. Производится серия независимых испытаний, в каждом из которых событие A появляется с вероятностью 0,6. Рассматривается случайная величина X – число появления событий A в серии из $n=5$ испытаний. Составить закон распределения вероятностей, многоугольник и функцию распределения вероятностей $F(x)$ случайной величины X. Найти математическое ожидание $M[X]$ и дисперсию $D[X]$.
4. Дискретная случайная величина распределена по закону Пуассона вероятностей массовых (n – велико) и редких (p – мало) событий $P_{100}(8)=\frac{\lambda^8}{8!}e^{-\lambda}$, $p=0{,}02$. Найти математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины.
5. Производится ряд выстрелов из орудия с вероятностью попадания $p=0{,}6$. Стрельба ведется до первого попадания, но не свыше $n=4$ выстрелов. Найти функцию распределения случайной величины X – числа выстрелов, производимых орудием до первого попадания. Найти вероятность того, что будет сделано не менее одного, но меньше 4-х выстрелов. Определить среднее значение числа произведенных выстрелов и примерный расход снарядов на 100 подобных стрельб.

6. Непрерывная случайная величина X задана дифференциальной функцией распределения:

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le 0, \\ \dfrac{3x^2}{18} & \text{при} \quad 0 < x \le 2, \\ 1 & \text{при} \quad x > 2. \end{cases}$$

Найти:

1) функцию распределения $F(x)$;

2) $M[X]$, $D[X]$, $\sigma[X]$;

3) вероятность того, что в результате опыта случайная величина X примет значение, принадлежащее интервалу $(1; 2)$. Построить графики функций $F(x)$ и $f(x)$.

7. Цена деления шкалы измерительного прибора равна 0,2. Показания округляются до ближайшего целого деления. Найти вероятность того, что при отсчете будет сделана ошибка, меньшая 0,04.

8. . Непрерывная случайная величина X распределена по показательному закону с функцией плотности $f(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } x \le 0, \\ \frac{1}{3}e^{-\frac{1}{3}x} & \text{при } x > 0 \end{cases}$. Найти $M[X]$, $D[X]$.

Найти вероятность того, что в результате испытания X примет значение, заключенное в интервале $(3; 6)$.

9. Непрерывная случайная величина X распределена по нормальному закону с плотностью вероятностей $f(x)$, где $f(x)=\frac{1}{5\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-1)^2}{50}}$. Найти $M[X]$, $D[X]$.

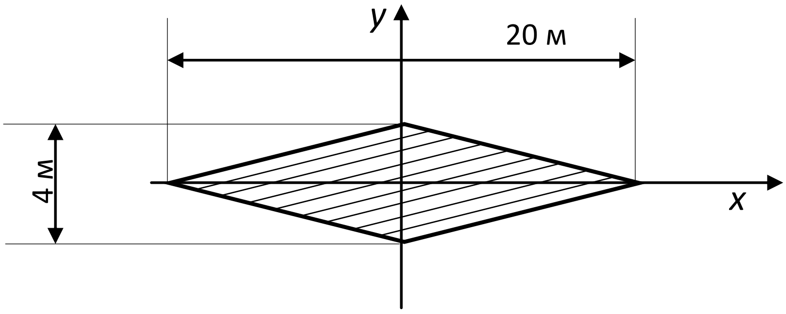
Найти вероятность того, что в результате испытания X примет значение, заключенное в интервале $(6; 11)$.

10. Разливочный автомат вливает в каждую емкость 500 см^3 молока. Погрешности в работе автомата таковы, что среднее квадратическое отклонение объема молока в упаковке равно 2 см^3. Найти вероятность того, что объем молока в упаковке будет заключаться между 497-ми и 503-х см^3.

11. В рассматриваемом технологическом процессе в среднем 75% изделий имеет допуск $\pm 5\%$. С помощью неравенства Чебышева оценить вероятность того, что среди 2000 изделий к допуску $\pm 5\%$ относится от 1450 до 1550 изделий включительно.

12. В урне 80 белых и 20 черных шаров. Сколько шаров (с возвращением) нужно вынуть из урны, чтобы с вероятностью 0,95 можно было ожидать, что частота появления белого шара будет отклоняться от вероятности меньше, чем на 0,1?

13. Цель, по которой ведется стрельба, схематически можно изобразить в виде ромба, размеры которого указаны на рисунке. По цели производится четыре одиночных выстрела. Прицеливание – по центру цели. Главные оси рассеивания совпадают с диагоналями ромба, при этом вероятные отклонения $\sigma[X]=5$м, $\sigma[Y]=2$м. Систематические ошибки отсутствуют. Чтобы поразить цель, достаточно двух попаданий. Найти вероятность того, что цель будет поражена.



Вариант 13

1. Дан закон распределения дискретной случайной величины X:

X	–1	1	2	3
P	0,19	0,51	p_3	0,05

Найти: 1) значение вероятности p_3, соответствующее значению x_3;

2) $M[X]$, $D[X]$, $\sigma[X]$;

3) функцию распределения $F(x)$; построить ее график. Построить многоугольник распределения случайной величины X.

2. Случайные величины X и Y независимы. Найти математическое ожидание $M[Z]$ и дисперсию $D[Z]$ случайной величины $Z=3X-2Y+5$, если $M[X]=-3$, $M[Y]=1$, $D[X]=5$, $D[Y]=4$.
3. Производится серия независимых испытаний, в каждом из которых событие A появляется с вероятностью $p=0{,}3$. Рассматривается случайная величина X – число появлений события A в серии из $n=4$ испытаний. Составить закон распределения вероятностей, многоугольник и функцию распределения вероятностей $F(x)$ случайной величины X. Найти математическое ожидание $M[X]$ дисперсию $D[X]$.
4. Дискретная случайная величина распределена по закону Пуассона вероятностей массовых (n – велико) и редких (p – мало) событий $P_{100}(4)=\dfrac{\lambda^4}{4!}e^{-\lambda}$, $p=0{,}02$. Найти математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины.
5. Производится ряд выстрелов из орудия с вероятностью попадания $p=0{,}7$. Стрельба ведется до первого попадания, но не свыше $n=3$ выстрелов. Найти функцию распределения случайной величины X – числа выстрелов,

производимых орудием до первого попадания. Найти вероятность того, что будет сделано не менее одного, но меньше 3-х выстрелов. Определить среднее значение числа произведенных выстрелов и примерный расход снарядов на 100 подобных стрельб.

6. Непрерывная случайная величина X задана дифференциальной функцией распределения

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } x\le 1, \\ x-\dfrac{1}{2} & \text{при } 1<x\le 2, \\ 0 & \text{при } x>2. \end{cases}$$

Найти:

1) функцию распределения $F(x)$;

2) $M[X]$, $D[X]$, $\sigma[X]$;

3) вероятность того, что в результате опыта случайная величина X примет значение, принадлежащее интервалу $(1{,}5;\,2)$. Построить графики функций $F(x)$ и $f(x)$.

7. Автобусы некоторого маршрута идут строго по расписанию с интервалом движения 5 мин. Найти вероятность того, что пассажир, пришедший к остановке, будет ожидать очередной автобус менее 3-х мин.

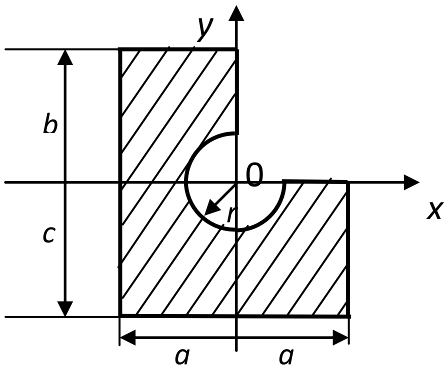
8. Непрерывная случайная величина X распределена по показательному закону $f(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } x\le 0 \\ 3e^{-3x} & \text{при } x>0 \end{cases}$. Найти математическое ожидание $M[X]$ и дисперсию $D[X]$ случайной величины X. Найти вероятность того, что в результате испытания X примет значение, заключенное в интервале $\left(\dfrac{1}{3};1\right)$.

9. Непрерывная случайная величина X распределена по нормальному закону с плотностью вероятностей $f(x)$, где $f(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-1)^2}{8}}$. Найти $M[X]$, $D[X]$. Найти вероятность того, что в результате испытания X примет значение, заключенное в интервале $(2;3)$.

10. При взвешивании тела получен средний вес 2,36 г. Среднее квадратическое отклонение веса равно 0,025 г. Какой процент всех взвешиваний дает результат в пределах от 2,3 до 2,4 г?

11. Дисперсия каждой из 3500 независимых случайных величин равна пяти. Оценить вероятность того, что отклонение средней арифметической этих случайных величин от средней арифметической их математических ожиданий не превысит 0,25.

12. Определить, с какой точностью среднее арифметическое измерений дает измеряемую величину, если сделано 400 измерений, надежность результата составляет 80% и дисперсии случайных величин равны 0,04.
13. Определить вероятность попадания в цель сложной конфигурации при одном выстреле, если известна плотность распределения точек попадания на плоскости $f(x,y)=\frac{1}{25\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{25}}$. Здесь $a=8$, $b=10$, $c=7{,}5$, $r=5$.



Вариант 14

1. Дан закон распределения дискретной случайной величины X:

X	0	1	3	4
P	0,2	0,1	p_3	0,4

Найти: 1) значение вероятности p_3, соответствующее значению x_3;

2) $M[X]$, $D[X]$, $\sigma[X]$;

3) функцию распределения $F(x)$; построить ее график. Построить многоугольник распределения случайной величины X.

2. Случайные величины X и Y независимы. Найти математическое ожидание $M[Z]$ и дисперсию $D[Z]$ случайной величины $Z=3X-2Y+5$, если $M[X]=-1$, $M[Y]=4$, $D[X]=3$, $D[Y]=5$.
3. Производится серия независимых испытаний, в каждом из которых событие A появляется с вероятностью $p=0{,}5$. Рассматривается случайная величина X – число появлений события A в серии из $n=3$ испытаний. Составить закон распределения вероятностей, многоугольник и функцию распределения вероятностей $F(x)$ случайной величины X. Найти математическое ожидание $M[X]$ и дисперсию $D[X]$.
4. Дискретная случайная величина распределена по закону Пуассона вероятностей массовых (n – велико) и редких (p – мало) событий $P_{50}(8)=\frac{\lambda^8}{8!}e^{-\lambda}$, $p=0{,}01$. Найти математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины.
5. Производится ряд выстрелов из орудия с вероятностью попадания $p=0{,}6$. Стрельба ведется до первого попадания, но не свыше $n=5$ выстрелов. Найти функцию распределения случайной величины X – числа выстрелов,

производимых орудием до первого попадания. Найти вероятность того, что будет сделано не менее одного, но меньше 5-ти выстрелов. Определить среднее значение числа произведенных выстрелов и примерный расход снарядов на 100 подобных стрельб.

6. Непрерывная случайная величина X задана дифференциальной функцией распределения

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x\le 0,\\ \dfrac{x}{2} & \text{при} \quad 0<x\le 2,\\ 0 & \text{при} \quad x>2.\end{cases}$$

Найти:

1) функцию распределения $F(x)$;

2) $M[X]$, $D[X]$, $\sigma[X]$;

3) вероятность того, что в результате опыта случайная величина X примет значение, принадлежащее интервалу $(1;2)$. Построить графики функций $F(x)$ и $f(x)$.

7. Минутная стрелка электрических часов перемещается скачком в конце каждой минуты. Найти вероятность того, что в данный момент часы покажут время, которое отличается от истинного не более чем на 20 с.

8. Непрерывная случайная величина X распределена по показательному закону $f(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\le 0\\ \dfrac{1}{4}e^{-\frac{1}{4}x} & \text{при } x>0\end{cases}$. Найти математическое ожидание $M[X]$ и дисперсию $D[X]$ случайной величины X. Найти вероятность того, что в результате испытания X примет значение, заключенное в интервале $(4;8)$.

9. Непрерывная случайная величина X распределена по нормальному закону $f(x)=\dfrac{1}{4\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-3)^2}{32}}$. Найти $M[X]$, $D[X]$. Найти вероятность того, что в результате испытания X примет значение, заключенное в интервале $(3;7)$.

10. Случайная величина X распределена нормально с математическим ожиданием $a=25$. Вероятность попадания X в интервал $(10;15)$ равна 0,2. Чему равна вероятность попадания X в интервал $(35;40)$?

11. Вероятность наступления события A в каждом испытании равна 0,4. Определить вероятность того, что в 2000 испытаний отклонение частоты события A от его вероятности не превзойдет по абсолютной величине 0,01.

12. Определить, с какой надежностью среднее арифметическое измерение дает измеряемую величину, если точность измерений равна 0,1; сделано 500 из-

мерений и дисперсии случайных величин (результатов измерений) равны 0,3.

13. Система случайных величин (X,Y) подчинена закону распределения с плотностью $f(x,y)=\begin{cases} x+y & \text{в области } D, \\ 0 & \text{вне этой области}. \end{cases}$.

Область D – квадрат, ограниченный прямыми $x=1$, $x=0$, $y=1$, $y=0$. Найти:

1) математические ожидания m_x и m_y;

2) дисперсии σ_x^2 и σ_y^2;

3) коэффициент корреляции r_{xy}.

***Вариант* 15**

1. Дан закон распределения дискретной случайной величины X:

X	–2	–1	1	2
P	0,4	0,1	p_3	0,3

Найти: 1) значение вероятности p_3, соответствующее значению x_3;

2) $M[X]$, $D[X]$, $\sigma[X]$;

3) функцию распределения $F(x)$; построить ее график. Построить многоугольник распределения случайной величины X.

2. Случайные величины X и Y независимы. Найти математическое ожидание $M[Z]$ и дисперсию $D[Z]$ случайной величины $Z=3X-2Y+5$, если $M[X]=2$, $M[Y]=-1$, $D[X]=5$, $D[Y]=1$.

3. Производится серия независимых испытаний, в каждом из которых событие A появляется с вероятностью $p=0{,}5$. Рассматривается случайная величина X – число появлений события A в серии из $n=5$ испытаний. Составить закон распределения вероятностей, многоугольник и функцию распределения вероятностей $F(x)$ случайной величины X. Найти математическое ожидание $M[X]$ и дисперсию $D[X]$.

4. Дискретная случайная величина распределена по закону Пуассона вероятностей массовых (n – велико) и редких (p – мало) событий $P_{100}(3)=\dfrac{\lambda^3}{3!}e^{-\lambda}$, $p=0{,}005$. Найти математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины.

5. Производится ряд выстрелов из орудия с вероятностью попадания $p=0{,}8$. Стрельба ведется до первого попадания, но не свыше $n=3$ выстрелов.

Найти функцию распределения случайной величины X – числа выстрелов, производимых орудием до первого попадания. Найти вероятность того, что будет сделано не менее одного, но меньше 3-х выстрелов. Определить среднее значение числа произведенных выстрелов и примерный расход снарядов на 100 подобных стрельб.

6. Непрерывная случайная величина X задана плотностью вероятности

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x\le 0, \\ \dfrac{2x}{9} & \text{при} \quad 0<x\le 3, \\ 0 & \text{при} \quad x>3. \end{cases}$$

Найти: 1) функцию распределения $F(x)$;
2) $M[X]$, $D[X]$, $\sigma[X]$;
3) вероятность того, что в результате опыта случайная величина X примет значение, принадлежащее интервалу $(1;2)$. Построить графики функций $F(x)$ и $f(x)$.

7. Автобусы некоторого маршрута идут строго по расписанию с интервалом движения 8 мин. Найти вероятность того, что пассажир, пришедший к остановке, будет ожидать очередной автобус менее 3-х мин.
8. Непрерывная случайная величина X распределена по показательному закону $f(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x\le 0 \\ e^{-x} & \text{при} \quad x>0 \end{cases}$. Найти математическое ожидание $M[X]$ и дисперсию $D[X]$ случайной величины X. Найти вероятность того, что в результате испытания X примет значение, заключенное в интервале $(2;3)$.
9. Непрерывная случайная величина X распределена по нормальному закону $f(x)=\dfrac{1}{10\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-20)^2}{200}}$. Найти $M[X]$, $D[X]$. Найти вероятность того, что в результате испытания X примет значение, заключенное в интервале $(30;40)$.
10. Случайная величина X распределена нормально с математическим ожиданием $a=10$ и средним квадратическим отклонением $\sigma=5$. Найти интервал, симметричный относительно математического ожидания, в который с вероятностью 0,9973 попадет величина X в результате испытания.
11. Сколько следует проверить деталей, чтобы с вероятностью, не меньшей 0,95, можно было утверждать, что абсолютная величина отклонения частоты годных деталей от вероятности детали быть годной, равной 0,9, не превысит 0,01?
12. Сколько измерений надо сделать, чтобы среднее арифметическое дало измеряемую с точностью до 0,05 и надежностью 90%, если дисперсии случайных величин (результатов измерений) равны 0,2.

13. Система двух случайных величин (X,Y) подчиняется нормальному закону с плотностью вероятности $f(x,y)=ae^{-\frac{(x-1)^2}{8}-\frac{(y+2)^2}{4}}$. Определить вероятность совместного выполнения двух неравенств: $-1<x<1,\ 0<y<2$.

Вариант 16

1. Дан закон распределения дискретной случайной величины *X*:

X	–4	2	3	5
P	0,2	0,1	p_3	0,4

Найти: 1) значение вероятности p_3, соответствующее значению x_3;

2) $M[X]$, $D[X]$, $\sigma[X]$;

3) функцию распределения $F(x)$; построить ее график. Построить многоугольник распределения случайной величины *X*.

2. Случайные величины *X* и *Y* независимы. Найти математическое ожидание $M[Z]$ и дисперсию $D[Z]$ случайной величины $Z=3X-2Y+5$, если $M[X]=4$, $M[Y]=2$, $D[X]=4$, $D[Y]=3$.
3. Производится серия независимых испытаний, в каждом из которых событие *A* появляется с вероятностью $p=0{,}2$. Рассматривается случайная величина *X* – число появлений события *A* в серии из $n=4$ испытаний. Составить закон распределения вероятностей, многоугольник и функцию распределения вероятностей $F(x)$ случайной величины *X*. Найти математическое ожидание $M[X]$ и дисперсию $D[X]$.
4. Дискретная случайная величина распределена по закону Пуассона вероятностей массовых (*n* – велико) и редких (*p* – мало) событий $P_{100}(12)=\dfrac{\lambda^{12}}{12!}e^{-\lambda}$, $p=0{,}01$. Найти математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины.
5. Производится ряд выстрелов из орудия с вероятностью попадания $p=0{,}8$. Стрельба ведется до первого попадания, но не свыше $n=6$ выстрелов. Найти функцию распределения случайной величины *X* – числа выстрелов, производимых орудием до первого попадания. Найти вероятность того, что будет сделано не менее одного, но меньше 6-ти выстрелов. Определить среднее значение числа произведенных выстрелов и примерный расход снарядов на 100 подобных стрельб.
6. Непрерывная случайная величина *X* задана плотностью вероятности

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{при}\quad x\le 0,\\ \dfrac{2x}{25} & \text{при}\quad 0<x\le 5,\\ 1 & \text{при}\quad x>5.\end{cases}$$

Найти: 1) функцию распределения $F(x)$;

2) $M[X]$, $D[X]$, $\sigma[X]$;

3) вероятность того, что в результате опыта случайная величина X примет значение, принадлежащее интервалу $(2;3)$. Построить графики функций $F(x)$ и $f(x)$.

7. Цена деления шкалы вольтметра 10 В. Отсчет производится с округлением до ближайшего целого деления. Определить среднеквадратичную ошибку округления σ при снятии отсчета и вероятность того, что ошибка заключена в пределах ± 2 В.
8. Непрерывная случайная величина *X* распределена по показательному закону $f(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } x \le 0 \\ 7e^{-7x} & \text{при } x > 0 \end{cases}$. Найти математическое ожидание $M[X]$ и дисперсию $D[X]$ случайной величины *X*. Найти вероятность того, что в результате испытания *X* примет значение, заключенное в интервале $\left(\frac{1}{7};1\right)$.
9. Непрерывная случайная величина *X* распределена по нормальному закону $f(x)=\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-3)^2}{8}}$. Найти $M[X]$, $D[X]$. Найти вероятность того, что в результате испытания *X* примет значение, заключенное в интервале $(4;7)$.
10. Случайная величина *X* распределена нормально со средним квадратическим отклонением $\sigma = 5$ мм. Найти длину интервала, симметричного относительно математического ожидания, в который с вероятностью 0,9973 попадет величина *X* в результате испытания.
11. Длина изготовляемых деталей является случайной величиной, среднее значение которой 50 мм. Среднее квадратическое отклонение этой величины равно 0,2 мм. Оценить вероятность того, что отклонение длины изготовленной детали от ее среднего значения по абсолютной величине не превзойдет 0,4 мм.
12. Вероятность события *A* при каждом испытании равна 0,7. Сколько раз достаточно повторить испытание, чтобы с вероятностью 0,9 можно было ожидать, что частота появления события *A* будет отклоняться от вероятности не больше, чем на 0,05?
13. Плотность распределения двумерной случайной величины определена функцией $f(x,y)=\frac{1}{\pi^2(1+x^2)(1+y^2)}$. Найти вероятность попадания случайной точки в прямоугольник с вершинами $K(1;1)$, $L(\sqrt{3};1)$, $M(1;0)$, $N(\sqrt{3};0)$.

Вариант 17

1. Дан закон распределения дискретной случайной величины X:

X	–5	2	3	4
P	0,4	0,3	p_3	0,2

Найти: 1) значение вероятности p_3, соответствующее значению x_3;

2) $M[X]$, $D[X]$, $\sigma[X]$;

3) функцию распределения $F(x)$; построить ее график. Построить многоугольник распределения случайной величины X.

2. Случайные величины X и Y независимы. Найти математическое ожидание $M[Z]$ и дисперсию $D[Z]$ случайной величины $Z = 3X - 2Y + 5$, если $M[X] = 3$, $M[Y] = 1$, $D[X] = 1$, $D[Y] = 5$.
3. Производится серия независимых испытаний, в каждом из которых событие A появляется с вероятностью $p = 0{,}4$. Рассматривается случайная величина X – число появлений события A в серии из $n = 3$ испытаний. Составить закон распределения вероятностей, многоугольник и функцию распределения вероятностей $F(x)$ случайной величины X. Найти математическое ожидание $M[X]$ и дисперсию $D[X]$.
4. Дискретная случайная величина распределена по закону Пуассона вероятностей массовых (n – велико) и редких (p – мало) событий $P_{100}(6) = \frac{\lambda^6}{6!}e^{-\lambda}$, $p = 0{,}02$. Найти математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины.
5. Производится ряд выстрелов из орудия с вероятностью попадания $p = 0{,}7$. Стрельба ведется до первого попадания, но не свыше $n = 4$ выстрелов. Найти функцию распределения случайной величины X – числа выстрелов, производимых орудием до первого попадания. Найти вероятность того, что будет сделано не менее одного, но меньше 4-х выстрелов. Определить среднее значение числа произведенных выстрелов и примерный расход снарядов на 100 подобных стрельб.
6. Непрерывная случайная величина X задана функцией плотности вероятности

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le 0, \\ \dfrac{x}{50} & \text{при} \quad 0 < x \le 10, \\ 0 & \text{при} \quad x > 10. \end{cases}$$

Найти:

1) Функцию распределения $F(x)$;

2) $M[X]$, $D[X]$, $\sigma[X]$;

3) Вероятность того, что в результате опыта случайная величина X примет значение, принадлежащее интервалу $(5;7)$. Построить графики функций $F(x)$ и $f(x)$.

7. Поезда данного маршрута городского трамвая идут с интервалом 5 мин. Пассажир подходит к трамвайной остановке в некоторый момент времени. Какова вероятность появления пассажира не ранее чем через минуту после ухода предыдущего поезда, но не позднее, чем за две минуты до отхода следующего поезда?
8. Непрерывная случайная величина *X* распределена по показательному закону $f(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } x\le 0 \\ \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x} & \text{при } x>0 \end{cases}$. Найти математическое ожидание $M[X]$ и дисперсию $D[X]$ случайной величины *X*. Найти вероятность того, что в результате испытания *X* примет значение, заключенное в интервале $(2;4)$.
9. Непрерывная случайная величина *X* распределена по нормальному закону с плотностью вероятностей $f(x)$, где $f(x)=\frac{1}{4\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-3)^2}{32}}$. Найти $M[X]$, $D[X]$. Найти вероятность того, что в результате испытания *X* примет значение, заключенное в интервале $(2;4)$.
10. Случайная величина *X* подчинена нормальному закону с математическим ожиданием $a=0$. Вероятность попадания этой случайной величины на участок от –10 до 10 равна 0,5 мм. Найти среднее квадратическое отклонение σ и написать выражение нормального закона.
11. Сколько раз надо бросить монету, чтобы с вероятностью 0,6 можно было ожидать, что отклонение относительной частоты появления герба от вероятности $p=0{,}5$ окажется по абсолютной величине не более 0,01?
12. Вероятность рождения мальчика $p=0{,}512$. Считая применимыми локальную и интегральную теоремы Моавра-Лапласа, вычислить вероятности следующих событий: $A=$ {среди 100 новорожденных будет ровно 51 мальчик}, $B=${среди 100 новорожденных будет больше мальчиков, чем девочек}, $C=$ {разница между количеством мальчиков и количеством девочек из 100 новорожденных не превысит 10}.

13. Задана функция распределения двумерной случайной величины $F(x,y)=\begin{cases}\sin x\sin y & \text{при } 0\le x\le\dfrac{\pi}{2},\ 0\le y\le\dfrac{\pi}{2}\\ 0 & \text{при } x<0 \text{ или } y<0\end{cases}$. Найти вероятность попадания случайной точки (X,Y) в прямоугольник, ограниченный прямыми $x=0$, $x=\frac{\pi}{4}$, $y=\frac{\pi}{6}$, $y=\frac{\pi}{3}$.

***Вариант* 18**

1. Дан закон распределения дискретной случайной величины X:

X	–4	0	6	10
P	0,2	0,3	p_3	0,2

Найти: 1) значение вероятности p_3, соответствующее значению x_3;
2) $M[X]$, $D[X]$, $\sigma[X]$;
3) функцию распределения $F(x)$; построить ее график. Построить многоугольник распределения случайной величины X.

2. Случайные величины X и Y независимы. Найти математическое ожидание $M[Z]$ и дисперсию $D[Z]$ случайной величины $Z=3X-2Y+5$, если $M[X]=-1$, $M[Y]=2$, $D[X]=2$, $D[Y]=1$.
3. Производится серия независимых испытаний, в каждом из которых событие A появляется с вероятностью 0,5. Рассматривается случайная величина X – число появления событий A в серии из $n=4$ испытаний. Составить закон распределения вероятностей, многоугольник и функцию распределения вероятностей $F(x)$ случайной величины X. Найти математическое ожидание $M[X]$ и дисперсию $D[X]$.
4. Дискретная случайная величина распределена по закону Пуассона вероятностей массовых (n – велико) и редких (p – мало) событий $P_{50}(3)=\frac{\lambda^3}{3!}e^{-\lambda}$, $p=0{,}02$. Найти математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины.
5. Производится ряд выстрелов из орудия с вероятностью попадания $p=0{,}9$. Стрельба ведется до первого попадания, но не свыше $n=3$ выстрелов. Найти функцию распределения случайной величины X – числа выстрелов, производимых орудием до первого попадания. Найти вероятность того, что будет сделано не менее одного, но меньше 3-х выстрелов. Определить среднее значение числа произведенных выстрелов и примерный расход снарядов на 100 подобных стрельб.

6. Непрерывная случайная величина X задана плотностью вероятности

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le 0, \\ \dfrac{x}{32} & \text{при} \quad 0 < x \le 8, \\ 0 & \text{при} \quad x > 8. \end{cases}$$

Найти: 1) функцию распределения $F(x)$;

2) $M[X]$, $D[X]$, $\sigma[X]$;

3) вероятность того, что в результате опыта случайная величина X примет значение, принадлежащее интервалу $(3; 6)$. Построить графики функций $F(x)$ и $f(x)$.

7. Автобусы идут с интервалом 5 минут. Считая, что случайная величина X – время ожидания автобуса на остановке – распределена равномерно, найти среднее время ожидания и дисперсию времени ожидания.
8. . Непрерывная случайная величина X распределена по показательному закону с функцией плотности $f(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \ x \le 0, \\ 2e^{-2x} & \text{при} \ x > 0 \end{cases}$. Найти математическое ожидание $M[X]$ и дисперсию $D[X]$ случайной величины X. Найти вероятность того, что в результате испытания X примет значение, заключенное в интервале $(1; 2)$.
9. Непрерывная случайная величина X распределена по нормальному закону с плотностью вероятностей $f(x)$, где $f(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-10)^2}{8}}$. Найти $M[X]$, $D[X]$. Найти вероятность того, что в результате испытания X примет значение, заключенное в интервале $(12; 14)$.
10. Деталь, изготовленная автоматом, считается годной, если отклонение ее контролируемого размера от проектного не превышает 10 мм. Случайные отклонения контролируемого размера от проектного, подчинены нормальному закону со средним квадратическим отклонением $\sigma = 5$ и математическим ожиданием $a = 0$. Сколько процентов годных деталей изготовляет автомат?
11. Определить необходимое число опытов, которые нужно провести, чтобы отклонение частоты появления события A от вероятности его появления в отдельном опыте, равной 0,75, не превзошло по абсолютной величине 0,01.
12. В одном из экспериментов Пирсона по моделированию, на вычислительной машине опытов с подбрасыванием монеты, из общего числа 24000 подбрасываний герб выпал 12012 раз. Какова априорная вероятность получить данный результат? Сколь вероятно при повторении эксперимента получить такое же или еще большее отклонение относительной частоты выпадения герба от вероятности его выпадения в одном опыте?

13. Система случайных величин (X,Y) подчинена закону распределения с плотностью $f(x,y)=\begin{cases} axy & \text{в области } D, \\ 0 & \text{вне этой области.} \end{cases}$ Область D – треугольник, ограниченный прямыми $x+y-1=0$, $x=0$, $y=0$. Найти: 1) коэффициент a; 2) математические ожидания m_x и m_y; 3) дисперсии σ_x^2 и σ_y^2; 4) коэффициент корреляции r_{xy}.

Вариант 19

1. Дан закон распределения дискретной случайной величины X:

X	–3	0	3	6
P	0,1	0,2	p_3	0,4

Найти: 1) значение вероятности p_3, соответствующее значению x_3; 2) $M[X]$, $D[X]$, $\sigma[X]$; 3) функцию распределения $F(x)$; построить ее график. Построить многоугольник распределения случайной величины X.

2. Случайные величины X и Y независимы. Найти математическое ожидание $M[Z]$ и дисперсию $D[Z]$ случайной величины $Z=3X-2Y+5$, если $M[X]=4$, $M[Y]=1$, $D[X]=4$, $D[Y]=5$.
3. Производится серия независимых испытаний, в каждом из которых событие A появляется с вероятностью $p=0{,}8$. Рассматривается случайная величина X – число появлений события A в серии из $n=3$ испытаний. Составить закон распределения вероятностей, многоугольник и функцию распределения вероятностей $F(x)$ случайной величины X. Найти математическое ожидание $M[X]$ и дисперсию $D[X]$.
4. Дискретная случайная величина распределена по закону Пуассона вероятностей массовых (n – велико) и редких (p – мало) событий $P_{100}(2)=\frac{\lambda^2}{2!}e^{-\lambda}$, $p=0{,}02$. Найти математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины.
5. Производится ряд выстрелов из орудия с вероятностью попадания $p=0{,}7$. Стрельба ведется до первого попадания, но не свыше $n=5$ выстрелов. Найти функцию распределения случайной величины X – числа выстрелов, производимых орудием до первого попадания. Найти вероятность того, что будет сделано не менее одного, но меньше 5-ти выстрелов. Определить

среднее значение числа произведенных выстрелов и примерный расход снарядов на 100 подобных стрельб.

6. Непрерывная случайная величина X задана дифференциальной функцией распределения
$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\le 0,\\ 2x & \text{при } 0<x\le 1,\\ 0 & \text{при } x>1.\end{cases}$$
Найти:
1) функцию распределения $F(x)$;
2) $M[X]$, $D[X]$, $\sigma[X]$;
3) вероятность того, что в результате опыта случайная величина X примет значение, принадлежащее интервалу $(0;0{,}7)$. Построить графики функций $F(x)$ и $f(x)$.

7. Азимутальный лимб имеет цену делений один градус. Какова вероятность при считывании азимута угла сделать ошибку в пределах ± 10 мин, если отсчет округляется до ближайшего целого числа градусов?

8. Непрерывная случайная величина X распределена по показательному закону $f(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\le 0\\ \frac{1}{5}e^{-\frac{1}{5}x} & \text{при } x>0\end{cases}$. Найти математическое ожидание $M[X]$ и дисперсию $D[X]$ случайной величины X. Найти вероятность того, что в результате испытания X примет значение, заключенное в интервале $(5;10)$.

9. Непрерывная случайная величина X распределена по нормальному закону с плотностью вероятностей $f(x)$, где $f(x)=\frac{1}{5\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-20)^2}{50}}$. Найти $M[X]$, $D[X]$. Найти вероятность того, что в результате испытания X примет значение, заключенное в интервале $(15;25)$.

10. Нормальная случайная величина X имеет параметры: $a=0$, $\sigma=1$. Что больше: $P(-0{,}5<X<0{,}1)$ или $P(1\le X\le 2)$?

11. Вероятность изготовления нестандартной радиолампы равна 0,04. Какое наименьшее число радиоламп следует отобрать, чтобы с вероятностью 0,88 можно было утверждать, что доля нестандартных радиоламп будет отличаться от вероятности изготовления нестандартной лампы по абсолютной величине не более чем на 0,02?

12. Проводятся последовательные испытания по схеме Бернулли. Вероятность появления события A в одном испытании $p=0{,}6$. Считая применимыми предельные теоремы Муавра-Лапласа, вычислить вероятности следующих событий: $B=$ {событие A произойдет в большинстве из 60-ти испытаний},

$C=\{$число появлений события A в 60-ти испытаниях будет заключено между 30 и 42$\}$, $D=\{$событие A появится 36 раз в 60-ти испытаниях$\}$.

13. Плотность совместного распределения непрерывной двумерной случайной величины (X,Y) задана функцией $f(x,y)=Ce^{-x^2-2xy-4y^2}$. Найти: 1) постоянный множитель *C*; 2) плотности распределения составляющих; 3) условные плотности распределения составляющих.

Вариант 20

1. Дан закон распределения дискретной случайной величины X:

X	1	3	4	5
p	0,15	0,2	p_3	0,4

Найти: 1) значение вероятности p_3, соответствующее значению x_3;
2) $M[X]$, $D[X]$, $\sigma[X]$;
3) функцию распределения $F(x)$; построить ее график. Построить многоугольник распределения случайной величины X.

2. Случайные величины *X* и *Y* независимы. Найти математическое ожидание $M[Z]$ и дисперсию $D[Z]$ случайной величины $Z=3X-2Y+5$, если $M[X]=1$, $M[Y]=3$, $D[X]=3$, $D[Y]=1$.
3. Производится серия независимых испытаний, в каждом из которых событие *A* появляется с вероятностью $p=0{,}3$. Рассматривается случайная величина *X* – число появлений события *A* в серии из $n=3$ испытаний. Составить закон распределения вероятностей, многоугольник и функцию распределения вероятностей $F(x)$ случайной величины *X*. Найти математическое ожидание $M[X]$ и дисперсию $D[X]$.
4. Дискретная случайная величина распределена по закону Пуассона вероятностей массовых (*n* – велико) и редких (*p* – мало) событий $P_{50}(4)=\dfrac{\lambda^4}{4!}e^{-\lambda}$, $p=0{,}01$. Найти математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины.
5. Производится ряд выстрелов из орудия с вероятностью попадания $p=0{,}6$. Стрельба ведется до первого попадания, но не свыше $n=6$ выстрелов. Найти функцию распределения случайной величины *X* – числа выстрелов, производимых орудием до первого попадания. Найти вероятность того, что будет сделано не менее одного, но меньше 6-ти выстрелов. Определить

среднее значение числа произведенных выстрелов и примерный расход снарядов на 100 подобных стрельб.

6. Непрерывная случайная величина X задана плотностью вероятности

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x\le 0,\\ \dfrac{x}{8} & \text{при} \quad 0<x\le 4,\\ 0 & \text{при} \quad x>4.\end{cases}$$

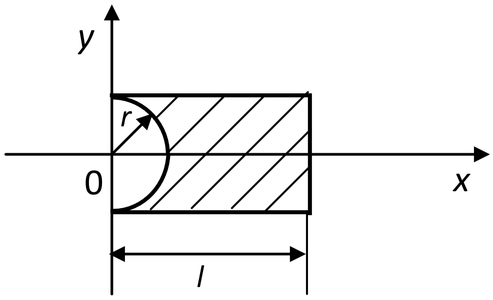
Найти: 1) функцию распределения $F(x)$;

2) $M[X]$, $D[X]$, $\sigma[X]$;

3) вероятность того, что в результате опыта случайная величина X примет значение, принадлежащее интервалу $(0;1)$. Построить графики функций $F(x)$ и $f(x)$.

7. Автобусы идут с интервалом 8 мин. Считая, что случайная величина X – время ожидания автобуса на остановке – распределена равномерно, вычислить вероятность того, что время ожидания превысит 5 мин.
8. Непрерывная случайная величина X распределена по показательному закону $f(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\le 0,\\ 5e^{-5x} & \text{при } x>0.\end{cases}$ Найти математическое ожидание $M[X]$ и дисперсию $D[X]$ случайной величины X. Найти вероятность того, что в результате испытания X примет значение, заключенное в интервале $(0;1)$.
9. Непрерывная случайная величина X распределена по нормальному закону с плотностью вероятностей $f(x)$, где $f(x)=\dfrac{1}{10\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-30)^2}{200}}$. Найти $M[X]$, $D[X]$. Найти вероятность того, что в результате испытания X примет значение, заключенное в интервале $(10;50)$.
10. Случайная величина X имеет нормальное распределение с математическим ожиданием $a=0$ и дисперсией, равной единице. Какое из двух событий $\{|X|\le 0{,}7\}$ или $\{|X|\ge 0{,}7\}$ имеет большую вероятность?
11. Среднесуточное потребление электроэнергии в населенном пункте равно 12000 кВт/ч. Оценить вероятность того, что потребление электроэнергии в этом населенном пункте в течение данных суток превзойдет 50000 кВт/ч.
12. В страховой компании застраховано 10000 автомобилей. Вероятность поломки любого автомобиля в результате аварии равна 0,006. Каждый владелец застрахованного автомобиля платит в год 12 рублей страховых и в случае поломки автомобиля в результате аварии получает от компании 1000 руб. Найти вероятности следующих событий: $A=${по истечению года работы страховая компания потерпит убыток}, $B_m=${страховая компания получит прибыль не менее, чем m руб.}, если $m=40000;\ 60000;\ 80000$.

13. Производится три независимых выстрела по цели (на рис. $l = 2$ м, $r = 1$м) без систематической ошибки $\left(m_x = m_y = 0\right)$ с ожидаемым разбросом попадания $\sigma_x = 3$м, $\sigma_y = 4$м. Определить вероятность трех попаданий в цель.



2.5. Обработка данных эксперимента

А. По статистическим данным задачи составить вариационные и интервальные ряды (рекомендация – образовать порядка 10 групп данных). Построить гистограмму плотности относительных частот. Найти выборочное среднее и исправленную выборочную дисперсию. Определить с надежностью $\beta = 0{,}95$ доверительные интервалы. Проверить гипотезу о нормальном распределении заданий случайной величины при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$.

1. Диагностика состояния трансмиссии газотурбинного двигателя осуществляется по содержанию железа в масле. Получены следующие данные по содержанию железа в граммах на 1 т масла:

18, 13, 24, 26, 22, 19, 18, 15, 8, 19, 12, 23, 27, 23, 19, 25, 10, 17, 15, 21, 24, 21, 19, 25, 14, 20, 14, 11, 22, 17, 18, 19, 13, 18, 30, 15, 23, 16, 23, 25, 15, 22, 29, 15, 21, 17, 21, 17, 13, 22, 28, 14, 16, 23, 21, 17, 13, 9, 27, 32, 16, 20, 21, 19, 16, 10, 27, 29, 24, 20, 19, 17, 19, 13, 24, 26, 25, 21, 18, 17.

2. При обследовании взлетной скорости самолетов, получены следующие данные (км/ч):

273, 280, 280, 285, 290, 298, 303, 310, 316, 320, 328, 328, 320, 320, 316, 316, 316, 310, 310, 310, 303, 303, 303, 303, 298, 298, 298, 298, 298, 285, 286, 286, 290, 292, 292, 292, 292, 298, 298, 298, 303, 303, 303, 303, 310, 310, 298, 298, 298, 298.

3. С целью увеличения пассажирских отправок, исследовался вес пассажиров. Получены следующие данные (кг):

42, 50 ,50, 56, 61, 68, 73, 80, 85, 90, 98, 56, 56, 61, 61,61, 80,80, 80, 85, 85, 85, 85, 80, 80, 68, 68, 73, 73, 80, 80.

4. При обследовании отклонения от расписания отправления судов и составов, получены следующие данные (ч):

–25, +3, +4, –7, +11, +17, +25, –13, +12, +14, +11, –13, –12, –17, +7, +7,+8, –8, +8, +7, –7, –8, –8, –1, –2, +3, +3, –1, –4, +2, +2, –1, –1, +2, +2, +1, –1, –1, +2, –3, +3, –14, –9, +3, +2, +3, –4, –7, –1, –3.

5. При обследовании количества прибывших самолетов в течение суток, получены следующие данные:

70, 65, 76, 78, 74, 56, 70, 67, 60, 71, 64, 75, 79, 75, 71, 77, 62, 69, 67, 67, 73, 75, 73, 71, 77, 66, 72, 66, 63, 74, 69, 70, 71, 65, 70, 82, 67, 68, 75, 77, 67, 74, 81, 67, 73, 69, 73, 69, 73, 69.

6. При обследовании времени занятия взлетно-посадочной полосы одним самолетом, получены следующие данные (мин):

5, 7, 8, 10, 11, 13, 15, 17, 20, 15, 13, 13, 6, 5, 6, 6, 5, 5, 6, 5, 12, 7, 7, 7, 10, 9, 12, 9, 9, 7, 7, 7, 8, 8, 8, 10, 10, 12, 8, 9, 7, 7, 7, 7, 10, 6, 5, 5, 6, 5.

7. При обследовании времени погрузки-выгрузки багажа, получены следующие данные (мин):

14, 18, 20, 22, 26, 30, 33, 14, 14, 15, 27,15, 15, 14, 19, 19, 19, 18, 22, 23, 23, 14, 14, 14, 15, 20, 19, 19, 18, 18, 21, 20, 21, 24, 24, 25, 15, 15, 15, 14, 16, 16, 16, 16, 16, 17, 17, 17, 17, 17.

8. При обследовании интервалов времени между прибытием самолетов на аэродром Кингсфорд-Смит, получены следующие данные (мин):

1, 2, 3, 2, 3, 4, 7, 10, 13, 16, 20, 22, 22, 26, 30, 1, 2, 2, 3, 2, 5, 8, 10, 4, 5, 5, 5, 4, 19, 17, 17, 2, 3, 3, 1, 2, 2, 4, 14, 15, 4, 7, 7, 7, 8, 8, 8, 10, 11, 11.

9. При обследовании интервалов между прибывающими самоходными судами в Северном речном порту Москвы, получены следующие данные (ч):

10, 15, 18, 20, 22, 15, 17, 18, 100, 110, 20, 20, 15, 12, 30, 50, 75, 80, 240, 200, 32, 32, 35, 40, 40, 42, 47, 46, 150, 150, 90, 85, 80, 85, 90, 50, 70, 60, 120, 130, 130, 140, 60, 62, 70, 65, 110, 100, 100, 100.

10. При обследовании работы билетного кассира, получены следующие данные по времени обслуживания пассажиров (мин):

6, 5, 7, 12, 6, 5, 7, 5, 8, 13, 5, 7, 10, 11, 5, 7, 9, 5, 7, 8, 5, 7, 8, 5, 7, 5, 7, 6, 12, 7, 8, 6, 5, 5, 12, 18, 6, 7, 5, 5, 10, 6, 7, 10, 11, 8, 7, 9, 5, 7, 10.

11. При исследовании степени использования пассажировместимости городских автобусов, получены следующие данные (количество пассажиров):

8, 21, 27, 31, 37, 41, 46, 51, 56, 66, 11, 12, 14, 14, 17, 18, 17, 18, 18, 21, 48, 32, 43, 42, 43, 39, 39, 38, 38, 37, 23, 24, 24, 24, 24, 32, 32, 32, 33, 31, 31, 28, 28, 27, 27, 29, 29, 29, 28, 27.

12. Из графика исполненного движения сняты следующие данные по количеству грузовых поездов в сутки:

70, 65, 76, 78, 74, 55, 70, 79, 75, 71, 77, 62, 69, 67, 77, 66, 72, 66, 63, 74, 69, 67, 68, 75, 77, 67, 74, 81, 73, 69, 64, 74, 80, 66, 68, 79, 84, 68, 72, 73, 71, 68, 71, 71, 65, 76, 78, 77, 73, 70.

13. Имеются следующие данные о размерах основных фондов предприятий (млн. руб.):

42, 24, 49, 57, 45, 27, 39, 21, 58, 40, 35, 62, 70, 81, 37, 68, 44, 56, 63, 48, 50, 49, 43, 72, 35, 56, 35, 65, 48, 63, 7, 81, 70, 62, 35, 56, 44, 73, 28, 40, 45, 57, 24, 42, 43, 50, 20, 56, 35, 65.

14. При обследовании времени задержки вылета самолета на предварительном старте при одной взлетно-посадочной полосе, получены следующие данные (мин):

4,4; 4,4; 5,0; 4,3; 5,2; 4,3; 7,3; 4,4; 4,4; 5,3; 5,7; 6,1; 6,2; 6,2; 5,6; 5,1; 5,1; 5,0; 5,4; 4,4; 5,3; 6,6; 5,6; 4,6; 5,0; 6,4; 5,9; 4,6; 5,4; 4,9; 6,2; 4,4; 4,3; 4,1; 5,0; 4,3; 5,0; 5,6; 6,8; 4,3; 5,9; 6,9; 5,7; 5,6; 4,3; 4,3.

15. При обследовании посадочной скорости самолетов, получены следующие данные (км/ч):

260, 250, 250, 245, 250, 280, 280, 250, 250, 270, 270, 275, 272, 272, 268, 268, 268, 248, 251, 255, 255, 255, 258, 258, 258, 255, 258, 255, 258, 261, 255, 261, 261, 265, 255, 258, 255, 258, 261, 255, 258, 258, 265, 255, 258, 250, 251, 255, 255, 255.

16. С целью увеличения пассажирских отправок, исследовался вес багажа одного пассажира. Получены следующие данные (кг):

6, 51, 48, 25, 25, 14, 25, 25, 18, 19, 57, 22, 23, 24, 48, 47, 22, 33, 33, 28, 28, 28, 28, 28, 12, 18, 19, 25, 42, 8, 28, 28, 37, 37, 35, 16, 15, 14, 60, 42, 28, 28, 41, 13, 25, 26, 20, 37, 28, 32.

17. При обследовании ударно-вибрационной нагрузки на аппаратуру в самолете, получены следующие данные:

7, 40, 8, 9, 10, 11, 12, 12, 18, 19, 19, 18, 18, 36, 35, 29, 28, 30, 29, 15, 14, 16, 16, 22, 21, 23, 22, 25, 26, 24, 25, 25, 19, 18, 19, 19, 18, 31, 32, 33, 15, 14, 15, 16, 19, 18, 21, 22, 22, 23.

18. При обследовании времени задержки взлета самолета на предварительном старте при работе двух взлетно-посадочных полос, получены следующие данные (мин):

1, 2, 3, 5, 1, 5, 2, 5, 1, 2, 5, 1, 2, 5, 3, 3, 9, 3, 2, 12, 4, 6, 1, 2, 2, 3, 3, 2, 18, 2, 2, 9, 3, 5, 2, 2, 14, 4, 6, 5, 5, 2, 3, 6, 6, 11, 9, 2, 4, 2, 1, 3.

19. При обследовании промежутка времени между последовательным прибытием самолетов на аэродром Дюссельдорф в течение суток, получены следующие данные:

60, 25, 25, 110, 1, 40, 20, 40, 75, 90, 5, 5, 20, 40, 20, 5, 10, 1, 5, 35, 1, 10, 25, 5, 10, 50, 5, 60, 20, 1, 5, 15, 5, 30, 5, 15, 1, 85, 5, 5, 15, 15, 5, 5, 10, 5, 50, 5, 30, 10.

20. При обследовании уровня шума в салоне самолета, получены следующие данные (дб):

87, 86, 99, 82, 82, 86, 92, 85, 87, 86, 80, 70, 92, 96, 88, 82, 80, 82, 78, 82, 80, 74, 78, 82, 64, 90, 82, 90, 82, 86, 77, 78, 74, 86, 92, 86, 82, 94, 72, 84, 72, 66, 88, 78, 60, 79, 70, 80, 99, 74.

21. При обследовании отклонения по толщине деталей, полученных горячештамповочным способом, получены следующие данные (%):

2, 2, 1, 6, 2, 3, 7, 7, 8, 3, 12, 2, 1, 8, 1, 4, 2, 4, 3, 4, 1, 2, 6, 2, 3, 3, 4, 4, 2, 2, 3, 4, 3, 9, 8, 6, 2, 4, 5, 5, 2, 5, 2, 7, 5, 6, 3, 11, 5, 9.

22. При обследовании времени обслуживания самолета, получены следующие данные (мин):

10, 10, 15, 11, 12, 12, 14, 16, 11, 10, 20, 17, 10, 10, 12, 18, 11, 11, 10, 15, 10, 15, 11, 12, 22, 14, 16, 11, 10, 10, 10, 16, 16, 21, 17, 12, 14, 11, 11, 10, 10, 11, 10, 11, 14, 12, 15,14,15,10.

23. При обследовании продолжительности интервалов между прибывающими и отправляющимися самолетами на аэродроме Орли в течение суток, получены следующие данные (мин):

10, 2, 12, 8, 2, 2, 5, 11, 6, 19, 8, 9, 9, 2, 3, 11, 6, 6, 13, 2, 7 2, 6, 4, 2, 2, 4, 13, 2, 1, 2, 20, 16, 7, 3, 1, 2, 5, 1, 6, 6, 1, 4, 1, 3, 3, 7, 4, 7, 4.

24. При обследовании крейсерской скорости самолетов, получены следующие данные (км/ч):

830, 870, 840, 850, 840, 890, 829, 855, 919, 830, 830, 855, 855, 829, 890, 840, 850, 840, 870, 830, 870, 840, 935, 830, 850, 829, 830, 870, 880, 850, 780, 890, 855, 870, 800, 935, 880, 890, 829, 935, 850, 829, 830, 800, 890, 949, 855, 830, 890, 750.

25. При обследовании времени задержки вылета самолета на предварительном старте при работе двух взлетно-посадочных полос, получены следующие данные (мин):

2, 2, 1, 1, 1, 2, 1, 11, 4, 6, 10, 7, 4, 1, 1, 5, 5, 6, 1, 4, 3, 7, 3, 9, 13, 2, 8, 1, 3, 3, 1, 1, 1, 3, 1, 3, 1, 2, 8, 3, 5, 4, 1, 1, 2, 2, 2, 1, 4, 1.

26. При обследовании времени обнаружения отказа главной ноги шасси в самолетах типа ТУ-134, получены следующие данные (ч):

42, 94, 1010, 1025, 113, 140, 206, 282, 308, 1002, 520, 400, 400, 350, 300, 280, 300, 310, 312, 310, 70, 1000, 350, 340, 300, 280, 200, 30, 350, 340, 350, 900, 600, 710, 210, 280, 280, 300, 330, 310, 800, 380, 1000, 280, 300, 290, 400, 300, 320, 340.

Б. Требуется при уровне значимости α, проверить гипотезу о том, что случайная величина *X* распределена пор закону Пуассона. Использовать критерий согласия Пирсона.

2.1. $n = 400$, $\alpha = 0{,}01$

x_i	0	1	2	3	4	5	6
n_i	140	125	85	34	10	6	0

2.2. $n = 350$, $\alpha = 0{,}05$

x_i	0	1	2	3	4	5	6
n_i	142	128	61	14	3	1	1

2.3. $n = 300$, $\alpha = 0{,}02$

x_i	0	1	2	3	4	5	6
n_i	121	110	53	12	2	1	1

2.4. $n = 250$, $\alpha = 0{,}025$

x_i	0	1	2	3	4	5	6
n_i	101	91	44	10	2	1	1

2.5. $n = 250$, $\alpha = 0{,}01$

x_i	0	1	2	3	4	5	6
n_i	125	84	31	6	2	1	1

2.6. $n = 350$, $\alpha = 0{,}02$

x_i	0	1	2	3	4	5	6
n_i	139	118	61	23	6	2	1

2.7.

x_i	0	1	2	3	4	5	6
n_i	159	135	70	26	7	2	1

$n = 400$, $\alpha = 0{,}05$

2.8.

x_i	0	1	2	3	4	5	6
n_i	178	153	77	30	9	2	1

$n = 450$, $\alpha = 0{,}01$

2.9.

x_i	0	1	2	3	4	5	6
n_i	160	134	70	25	8	2	1

$n = 400$, $\alpha = 0{,}02$

2.10.

x_i	0	1	2	3	4	5	6
n_i	98	66	26	6	2	1	1

$n = 200$, $\alpha = 0{,}05$

2.11.

x_i	0	1	2	3	4	5	6
n_i	150	102	37	8	2	1	0

$n = 300$, $\alpha = 0{,}01$

2.12.

x_i	0	1	2	3	4	5	6
n_i	162	142	74	14	5	2	1

$n = 400$, $\alpha = 0{,}02$

2.13.

x_i	0	1	2	3	4	5	6
n_i	182	118	65	18	10	5	3

$n = 400$, $\alpha = 0{,}05$

2.14.

x_i	0	1	2	3	4	5	6
n_i	98	82	41	25	2	1	1

$n = 250$, $\alpha = 0{,}01$

2.15.

x_i	0	1	2	3	4	5	6
n_i	158	132	81	43	10	6	1

$n = 500$, $\alpha = 0{,}05$

2.16.

x_i	0	1	2	3	4	5	6
n_i	112	88	37	10	1	1	1

$n = 250$, $\alpha = 0{,}025$

2.17.

x_i	0	1	2	3	4	5	6
n_i	98	82	24	6	12	1	1

$n = 204$, $\alpha = 0{,}02$

2.18.

x_i	0	1	2	3	4	5	6
n_i	171	150	59	12	6	2	0

$n = 400$, $\alpha = 0{,}05$

2.19.

x_i	0	1	2	3	4	5	6
n_i	78	61	23	10	2	1	0

$n = 176$, $\alpha = 0{,}01$

2.20.

x_i	0	1	2	3	4	5	6
n_i	122	98	25	3	1	1	0

$n = 250$, $\alpha = 0{,}02$

ПЕРЕЧЕНЬ РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Адлер Ю.П., Герман А.Д., Грановский Ю.В. Планирование экспериментов при поиске оптимальных условий. –М.: Наука, 1971, 284 с.

2. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория вероятностей и ее инженерные приложения. -М.: Наука, 1988. 480 с.

3. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория случайных процессов и ее инженерные приложения. -М.: Наука, 1991. 384 с.

4. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математической статистики. -М.: Высш. шк., 1977. 458 с.

5. Гурский Е.И. Сборник задач по теории вероятностей и математической статистике.- М.: Высш. шк., 1984. 312 с.

6. Гурский Е.И. Теория вероятностей и элементы математической статистики. -М.: Высш. шк., 1971. 238 с.

7. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. -М.: Высш. шк., 1988. Т. 2. 416 с.

8. Зайдель А.И. Ошибки измерений физических величин. -Л.: Наука,1974. 107 с.

9. Кафаров В.В. Методы кибернетики в химии и химической технологии -М.: Химия, 1971, 696 с.

10. Кассандрова О.Н., Лебедев В.В. Обработка результатов наблюдений. -М.: Наука, 1970. 154 с.

11. Колде Я.К. Практикум по теории вероятностей и математической статистике. -М.: Высш. шк., 1991. 158 с.

12 .Маталкин Л.Д. Сборник задач по теории вероятностей. -М.: Изд-во МГУ, 1972. 192 с.

13.Чепуренко В.Г., Нижник В.Г., Соколов Н.И. Вычисление погрешностей. -Киев: Высш. шк., 1978, 37 с.

14. Щиголев С.М. Математическая обработка наблюдений. -М.: Главное изд. Физ.-мат. лит., 1962. 344 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Составители
Кудряшев Геннадий Сергеевич
Третьяков Александр Николаевич

ИНЖЕНЕРНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

*Учебное пособие по дисциплине «Инженерный эксперимент»
для студентов очной и заочной форм обучения для направлений подготовки
13.04.01 Теплоэнергетика и теплотехника (уровень магистратура),
13.04.02 Электроэнергетика и электротехника (уровень магистратуры)*

Лицензия на издательскую деятельность
ЛР № 070444 от 11.03.98 г.
Подписано в печать 01.04.2018. Формат 60×86/16. Печ. л. 12,0
Тираж 100 экз.

Издательство Иркутский государственный
аграрный университет
664038, Иркутская обл., Иркутский район
пос. Молодежный