

Министерство сельского хозяйства Российской Федерации

ИРКУТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ А.А. ЕЖЕВСКОГО

ОСНОВЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

*Учебно-методическое пособие по дисциплине
«Основы автоматического управления» для студентов очной и заочной форм
обучения направления подготовки 13.03.02 Электроэнергетика и электротех-
ника (уровень бакалавриата), профиль «Электроснабжение»*

Молодежный 2021

УДК 681.51(075.8)
О-753

Учебное пособие рекомендовано к печати научно-методическим советом Иркутского ГАУ (Протокол № 1 от 29 ноября 2021г.)

Составители: Г. С. Кудряшев, А. Н. Третьяков

Рецензенты:

Доцент кафедры теплоэнергетики Иркутского национального исследовательского технического университета, канд. техн. наук, доцент В.А. Бочкарев.

Доцент кафедры электрооборудования и физики Иркутского государственного аграрного университета имени А.А. Ежевского, канд. техн. наук, доцент Логинов А.Ю.

Основы автоматического управления : учебно-методическое пособие по дисциплине «Основы автоматического управления» для студентов очной и заочной форм обучения направления подготовки 13.03.02 Электроэнергетика и электротехника (уровень бакалавриата), профиль «Электроснабжение» / Иркут. гос. аграр. ун-т им. А. А. Ежевского ; сост.: Г. С. Кудряшев, А. Н. Третьяков. – Молодежный : Изд-во ИрГАУ, 2021. – 129 с. – Текст : электронный.

Учебно-методическое пособие предназначено для изучения курса «Основы автоматического управления». Основной целью пособия является оказание помощи студентам при выполнении контрольной работы.

© Кудряшев Г.С., Третьяков А.Н., 2021
© Иркутский ГАУ им. А. А. Ежевского, 2021

1. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ИЗУЧЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ

Учебно-методическое пособие составлено в соответствии с Федеральными государственными образовательными стандартами высшего образования по направлению подготовки 13.03.02 Электроэнергетика и электротехника (уровень бакалавриата), утвержденного приказом Минобрнауки РФ №144 от 28.02.2018 г.

Дисциплина «Основы автоматического управления» является одной из базовых в системе подготовки инженеров и её научной основой является высшая математика, теория вероятности, теоретическая механика и электроника и поэтому она базируется на знании дисциплин: «Математика», «Физика», «Механика», «Электротехника и электроника».

В этой дисциплине рассматриваются конкретные конструкции АС, а изучаются общие закономерности происходящих в них процессов и методы, на которых основываются исследование и расчет подобных систем. В свою очередь, сведения, полученные студентами из курса автоматики, необходимы для изучения ими дисциплин профессионального цикла по профилю направления подготовки, а также для будущей профессиональной деятельности.

Цель курса состоит в формировании у студентов теоретических знаний управлению (регулированию), анализу и синтезу автоматических систем (АС) и применению систем автоматизации в сельском хозяйстве.

Предметом изучения являются виды и типы схем автоматики, функциональная и структурная схемы автоматизации технологических процессов, объект управления, датчик, элемент сравнения, усилитель, исполнительный механизм, регулирующий орган, регулятор, контроллер.

В результате освоения дисциплины «Основы автоматического управления» студент должен:

иметь представление:

- о принципах построения и управления систем автоматического регулирования (САР) и управления (САУ);
- о перспективах развития теории автоматического управления, оценивания и идентификации.

знать:

- методы математического описания и исследования элементов и систем регулирования и управления;
- инженерные методы анализа различных классов АС при детерминированных и стохастических воздействиях;
- методы синтеза различных классов АС;
- методы исследования точности и динамических характеристик систем с помощью ЭВМ.

владеть:

- классическими методами исследования и синтеза различных классов САУ и САР.

иметь навыки:

- решения конкретных прикладных инженерных задач;

- анализа процессов в системах автоматического регулирования и управления, оптимизации их параметров;
- применения вычислительной техники при проведении экспериментальных исследований.

1.1. Содержание дисциплины «Основы автоматического управления»

Таблица 1. Основные разделы дисциплины

№ п.п.	Наименование разделов и тем	Распределение часов по видам занятий (очное обучение)				Формы текущего контроля
		Л	ПЗ	ЛР	СРС	
1	<p>Управление. Принципы управления САУ и САР: принцип обратной связи, принцип управления по возмущению. Принцип построения САУ и САР.</p> <p>Автоматическая система (АС). Элементы АС. Входные и выходные сигналы АС. Пространство состояния. Алгоритмы функционирования АС (САУ) – оператор, математическая модель АС. Линейные и нелинейные АС. Стационарные и нестационарные АС. Одномерные и многомерные АС. Непрерывные и дискретные АС.</p>	4		6	10	контр. вопросы, опрос, тесты, решение задач
2	<p>Математический аппарат САУ и САР: оператор ЛСС, задаваемый линейным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами, две формы его представления. Оператор постоянного запаздывания. Моделирование ЛСС на вычислительных машинах.</p>	2		4	12	
3	<p>Определение передаточной функции одномерной ЛСС, преобразование Лапласа, передаточная функция рационального вида. Передаточная функция звена постоянного запаздывания. Структурная схема САУ. Передаточные функции соединений звеньев. Параллельное соединение звеньев.</p>	2		4	12	

	Встречно - параллельное соединение звеньев. Эквивалентные структурные преобразования ЛСС. Элементы автоматики – функционально полный набор элементарных динамических звеньев САУ и САР, их математический аппарат.				
4	Типовые входные сигналы: единичный импульс и единичная ступенчатая функция. Весовая функция одномерной ЛСС: определение; интеграл Дюамеля; аналитическое представление; общие свойства. Переходные процессы одномерной ЛСС: определение, аналитическое представление, общие свойства. Весовые и переходные функции элементарных динамических звеньев.	2	4	10	
5	Реакция ЛСС на гармонический входной сигнал, заданный в комплексном виде. Определение амплитудно-фазовой частотной характеристики (АФЧХ). Вещественная, мнимая, амплитудная и фазовая частотные характеристики. Логарифмические частотные характеристики (ЛЧХ). Частотные характеристики элементарных динамических звеньев. Частотные характеристики соединений звеньев.	2	6	10	
6	Определение устойчивости ЛСС. Основное (необходимое и достаточное) условие устойчивости ЛСС. Необходимый критерий устойчивости ЛСС. Признак структурной неустойчивости ЛСС. Критерий устойчивости Рауса-Гурвица. Графоаналитический критерий устойчивости А.В. Михайлова. Частотный критерий устойчивости Найквиста (1932 г.). Запасы устойчивости ЛСС.	2	6	10	
	Итого	14	30	64	

2. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ ДЛЯ ВЫПОЛНЕНИЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

2.1. Передаточные функции и структурные преобразования ЛСС. Операторы ЛСС.

1. Что называется оператором АС?

Оператором АС называется правило, однозначно связывающее выходной сигнал АС $y(t)$ с совокупностью входных сигналов $x(t), f_i(t)$:

$$y(t) = F[x(t), f_1(t) \dots f_n(t)].$$

2. Какой оператор называется линейным?

Оператор называется линейным, если он удовлетворяет принципу суперпозиции, который выражается равенством:

$$A[c_1x_1(t) + c_2x_2(t)] = c_1A[x_1(t)] + c_2A[x_2(t)] = c_1y_1(t) + c_2y_2(t).$$

Характерными свойствами линейных систем являются:

1. $A[x_1(t) + x_2(t)] = A[x_1(t)] + A[x_2(t)];$

2. $A[cx(t)] = cA[x(t)];$

3. $A[-x(t)] = -A[x(t)];$

4. $A[0] = 0.$

Если оператор не удовлетворяет хотя бы одному из этих свойств, то он является нелинейным.

3. Какой оператор называется стационарным?

Оператор называется стационарным, если при сдвиге входного сигнала на время t_0 выходной сигнал сдвигается на t_0 при неизменной форме.

$$y(t) = A[x(t)], \text{ тогда } A[x(t - t_0)] = A[x(t - t_0)].$$

4. Какие виды операторов АС вы знаете?

1. Функциональные;

2. Операторы задаваемые ДУ с заданными н.у.;

3. Интегральные;

4. Операторы постоянного запаздывания.

5. Какие типы операторов ЛСС вы знаете?

а) ЛДУ с постоянными коэффициентами при нулевых н.у. Данный оператор может быть представлен в двух формах:

- форма I (справедлива для входного сигнала, дифференцируемого m раз)

$$a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \dots + a_0 y(t) = \epsilon_m x^{(m)}(t) + \epsilon_{m-1} x^{(m-1)}(t) + \epsilon_0 x(t).$$

- форма II (справедлива для кусочно-непрерывного выходного сигнала)

$$\begin{cases} a_n u^{(n)}(t) + a_{n-1} u^{(n-1)}(t) + \dots + a_0 u(t) = x(t) & \text{Дифференциальное уравнение} \\ y(t) = \epsilon_m u^{(m)}(t) + \epsilon_{m-1} u^{(m-1)}(t) + \dots + \epsilon_0 u(t) & \text{Функциональное уравнение} \end{cases}$$

Этот оператор примем для более широкого круга входных сигналов и на практике является более предпочтителен.

Для технически реализуемых систем данные операторы удовлетворяют условию $n \geq m$

б) оператор постоянного запаздывания

$$y(t) = K(t-\tau).$$

Задача №1. Задан оператор АС

$$y(t) = A[x(t)] = 3 - 2x(t).$$

Исследовать линейность данного оператора.

Решение:

1. Введем сигналы $x_1(t)$ и $x_2(t)$ и запишем соответствующие реакции на эти сигналы:

$$y_1(t) = A[x_1(t)] = 3 - 2x_1(t)$$

$$y_2(t) = A[x_2(t)] = 3 - 2x_2(t)$$

2. Введем сигнал $x_3(t) = x_1(t) + x_2(t)$ и найдем реакцию АС на этот сигнал

$$y_3(t) = A[x_1(t) + x_2(t)] = 3 - 2[x_1(t) + x_2(t)] = 3 - 2x_1(t) - 2x_2(t)$$

$$\text{где } y_1(t) = 3 - 2x_1(t); \quad y_2(t) = 3 - 2x_2(t)$$

Следовательно:

$$y_3(t) = A[x_1(t) + x_2(t)] \neq y_1(t) + y_2(t).$$

Не выполняется первое свойство линейного оператора, значит оператор нелинейный.

Задача №2. Задан оператор АС

$$y(t) = A[x(t)] = 2tx(t) + 5 \int_0^t x(\tau) d\tau$$

Исследовать линейность оператора.

Решение:

1. Введем сигналы $x_1(t)$ и $x_2(t)$ и определим реакции АС на них $y_1(t)$ и $y_2(t)$:

$$y_1(t) = A[x_1(t)] = 2tx_1(t) + 5 \int_0^t x_1(\tau) d\tau$$

$$y_2(t) = A[x_2(t)] = 2tx_2(t) + 5 \int_0^t x_2(\tau) d\tau$$

2. Определим реакцию АС $y_3(t)$ на входной сигнал $x_3(t) = c_1x_1(t) + c_2x_2(t)$:

$$y_3(t) = A[x_3(t)] = A[c_1x_1(t) + c_2x_2(t)] = 2tx_3(t) + 5 \int_0^t x_3(\tau) d\tau =$$

$$= 2t[c_1x_1(t) + c_2x_2(t)] + 5 \int_0^t c_1x_1(\tau) + c_2x_2(\tau) d\tau =$$

$$= c_1[2tx_1(t) + 5 \int_0^t x_1(\tau) d\tau] + c_2[2tx_2(t) + 5 \int_0^t x_2(\tau) d\tau].$$

$$\text{Где } 2tx_1(t) + 5 \int_0^t x_1(\tau) d\tau = y_1(t); \quad 2tx_2(t) + 5 \int_0^t x_2(\tau) d\tau = y_2(t).$$

3. Следовательно $y_3(t) = c_1y_1(t) + c_2y_2(t)$, что доказывает выполнение равенства

$$A[c_1x_1(t) + c_2x_2(t)] = c_1A[x_1(t)] + c_2A[x_2(t)],$$

Т.е. для заданного оператора это равенство справедливо, поэтому оператор – линейный.

Задача №3 Задан оператор АС

$$y(t) = A[x(t)] = 5 \int_0^t x(\alpha) d\alpha$$

Исследовать стационарность оператора.

Решение:

1. Определим смещенный на τ выходной сигнал системы

$$y(t - \tau) = 5(t - \tau) \int_0^{t-\tau} x(\alpha) d\alpha.$$

2. Определим реакцию АС $y_c(t)$ на смещенный на время τ входной сигнал $x_c(t) = x(t - \tau)$

$$y_c(t) = A[x_c(t)] = A[x(t - \tau)] = 5t \int_0^t x(\alpha - \tau) d\alpha$$

Введем новую переменную $\beta = \alpha - \tau$, тогда

$$y_c(t) = 5t \int_{-\tau}^{t-\tau} x(\beta) d\beta.$$

Если $\beta = 0$, то $x(\beta) = 0$, следовательно

$$y_c(t) = 5t \int_0^{t-\tau} x(\alpha) d\alpha.$$

3. Проверяем справедливость равенства

$$y(t - \tau) = A[x(t - \tau)] \quad (*)$$

Из сравнения $y(t - \tau)$ и $y_c(t)$ видим, что

$$y(t - \tau) \neq y_c(t),$$

т.е. для данного оператора равенство (*) несправедливо, т.е. заданный оператор – нестационарный.

Передаточные функции ЛСС.

Передаточной функцией ЛСС с одним входом называется отношение изображения по Лапласу выходного сигнала к изображению по Лапласу входного сигнала при нулевых н.у.:

$$Y(p) = L[y(t)] = \int_0^{\infty} y(t) e^{-pt} dt,$$

$$\Phi(p) = \frac{Y(p)}{X(p)}, \quad \text{где } X(p) = L[x(t)] = \int_0^{\infty} x(t) e^{-pt} dt,$$

$$p = \alpha \pm j\beta;$$

2. Какие типы передаточных функций вы знаете?
– для ЛСС, оператором которой является ЛДУ с нулевыми н.у.:

$$\Phi(p) = \frac{\varepsilon_m p^m + \varepsilon_{m-1} p^{m-1} + \dots + \varepsilon_1 p + \varepsilon_0}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0} = \frac{B(p)}{A(p)}$$

Многочлен $A(p) = \sum_{i=0}^n a_i p^i$ называется характеристическим полиномом системы. Корни $A(p)$, т.е. комплексные числа $p_1, p_2 \dots p_n$, удовлетворяющие равенствам:

$$A(p_i) = 0, \quad i = \overline{1, n}$$

$$\Phi(p_i) = \infty, \quad i = \overline{1, n}$$

называются полюсами передаточной функции.

Корни $B(p)$, т.е. комплексные числа $p_1^*, p_2^* \dots p_m^*$,

$$B(p_i^*) = 0; \quad i = \overline{1, m}$$

$$\Phi(p_i^*) = 0; \quad i = \overline{1, m}$$

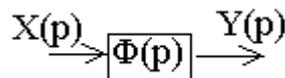
называются нулями передаточной функции.

– для ЛСС, задаваемых оператором постоянного запаздывания:

$$\Phi(p) = Ke^{-p\tau}$$

II. Решение задач.

Задача №4. На вход ЛС АС



действует входной сигнал $x(t) = 2 \cdot I(t)$, при этом $y(t) = 10e^{-0,5t}$.

Определить $\Phi(p)$ и представить её в виде произведения элементарных динамических звеньев.

Решение:

1. Определим изображение по Лапласу входного и выходного сигналов АС:

$$\Phi(p) = \frac{Y(p)}{X(p)}$$

$$X(p) = L[x(t)] = L[2 \cdot I(x)] = 2L[I(t)] = \frac{2}{p};$$

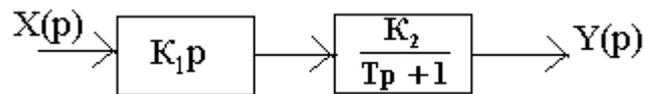
$$Y(p) = L[y(t)] = L[10e^{-0,5t}] = \text{по табл.} = \frac{10}{p+0,5} = \frac{20}{2p+1}.$$

2. Определяем $\Phi(p)$

$$\Phi(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{20p}{(2p+1)2} = \frac{10p}{2p+1} = K_1 p \cdot \frac{K_2}{Tp+1}$$

$$K_1 = 10; \quad K_2 = 1; \quad T = 2.$$

Эквивалентная структурная схема имеет вид:



Задача №5 Задан оператор АС

$$0,5y^{(2)}(t) + 2y^{(1)}(t) + 2y(t) = 2x^{(1)}(t) + 0,1x(t),$$

$$y_0 = y_0^{(1)} = y_0^{(2)} = 0.$$

Определить передаточную функцию АС и представить её в виде произведения элементарных динамических звеньев.

Решение:

1. Определим оператор АС в изображениях по Лапласу:

$$0,5p^2Y(p) + 2pY(p) + 2Y(p) = 2pX(p) + 0,1X(p)$$

2. Определим $\Phi(p)$:

$$\Phi(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{2p + 0,1}{0,5p^2 + 2p + 2} = \frac{0,1(20p + 1)}{2(0,25p^2 + p + 1)}$$

$$= 0,05 \cdot (20p + 1) \cdot \frac{1}{0,25p^2 + p + 1} \Rightarrow$$

$$K_1(T_1p + 1) \cdot \frac{K_2}{T_2^2 + 2\xi T_2p + 1} =: \xi = 1 := K_1(T_1p + 1) \frac{K_2}{(T_2p + 1)^2},$$

где $K_1 = 0,05$; $K_2 = 1$; $T_1 = 20$; $T_2 = 0,5$.

Задача №6 Угловое движение самолета относительно его продольной оси ОХ описывается уравнением:

$$J\ddot{\gamma}(t) = -M_x^{\dot{\gamma}}\dot{\gamma}(t) + K_{\delta}\delta_{\delta}(t),$$

где $\gamma(t)$ - угол крена самолета – выходной сигнал.

$\delta_{\delta}(t)$ - угол отклонения элеронов – входной сигнал.

$J, K_{\delta}, M_x^{\dot{\gamma}}$ - постоянные коэффициенты, определяемые физическими свойствами самолета в окружающей среде.

Определить передаточную функцию ЛА.

Решение:

1. Определим оператор системы

$$J\ddot{\gamma}(t) + M_x^{\dot{\gamma}}\dot{\gamma}(t) = K_{\delta}\delta_{\delta}(t),$$

2. Определим $\Phi(p)$ самолета:

$Jp^2\gamma(p) + M_x^{\dot{\gamma}}p\gamma(p) = K_{\delta}\delta_{\delta}(t)$ - оператор системы в изображениях по Лапласу

$$\text{б) } \Phi(p) = \frac{\gamma(p)}{\delta_{\delta}(p)} = \frac{K_{\delta}}{Jp^2 + M_x^{\dot{\gamma}}p} = \frac{K_{\delta}}{p(Jp + M_x^{\dot{\gamma}})}$$

Приведем $\Phi(p)$ к стандартному виду:

$$\Phi(p) = \frac{K_1}{p} \cdot \frac{K_2}{(Tp + 1)},$$

где $K_1 = \frac{K_{\delta}}{M_x^{\dot{\gamma}}}$; $K_2 = 1$; $T = \frac{J}{M_x^{\dot{\gamma}}}$.

2.2. Передаточные функции и структурные преобразования ЛСС

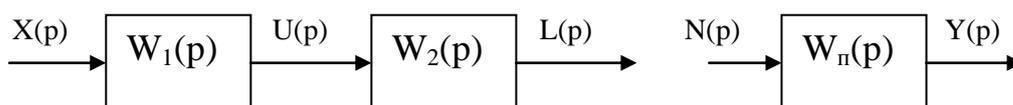
Определение передаточных функций непрерывных АС методом преобразования структурных схем.

1. Что называется передаточной функцией АС?

$$W(p) = \frac{Y(p)}{X(p)}$$

Отношение изображения по Лапласу выходного сигнала $Y(p)$ к изображению по Лапласу входного сигнала при нулевых н.у. и отсутствии возмущений.

2. Чему равна ПФ последовательного соединения звеньев?



$$W_{\Sigma}(p) = \frac{Y(p)}{X(p)}; \begin{cases} U(p) = X(p)W_1(p); \\ L(p) = U(p)W_2(p); \\ \dots\dots\dots \\ Y(p) = L(p)W_n(p). \end{cases}$$

$$Y(p) = L(p)W_{n-1}(p) \cdot W_n(p) = U(p)W_2(p) \cdot \dots \cdot W_{n-1}(p)W_n(p) = X(p)W_1(p) \cdot W_2(p) \cdot \dots \cdot W_n(p);$$

$$W_{\Sigma}(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = W_1(p) \cdot W_2(p) \cdot \dots \cdot W_n(p) = \prod_{i=1}^n W_i(p).$$

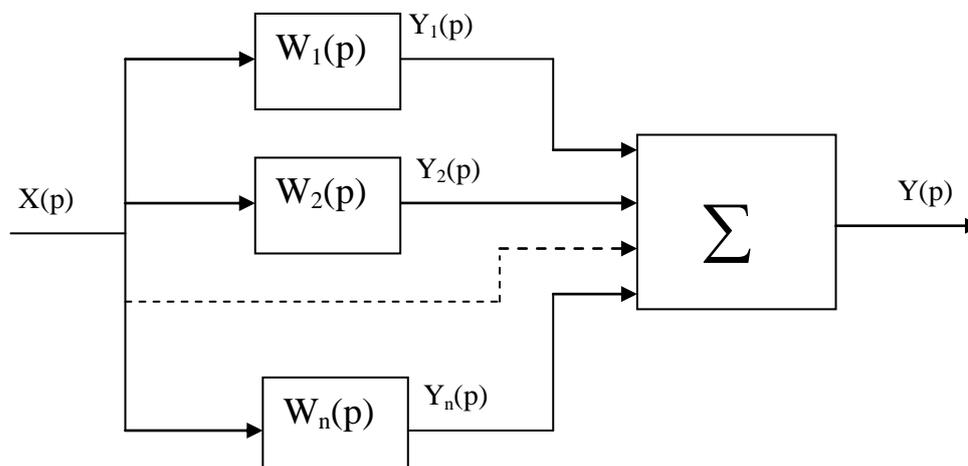
3. Чему равна ПФ параллельного соединения?

$$Y(p) = \sum_{i=1}^n Y_i(p);$$

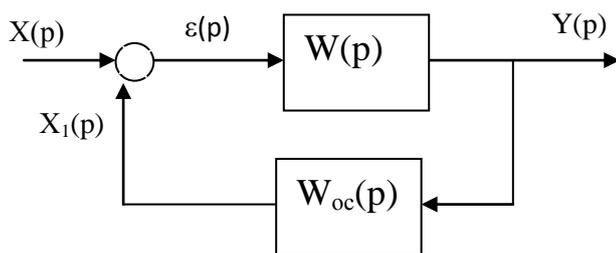
$$Y_i(p) = X(p)W_i(p);$$

$$W_{\Sigma}(p) = \frac{Y(p)}{X(p)};$$

$$W_{\Sigma}(p) = \sum_{i=1}^n W_i(p).$$



4. Чему равна ПФ встречно-параллельного соединения?



$$\begin{cases} \varepsilon(p) = X(p) + X_1(p) \\ Y(p) = \varepsilon(p)W(p) \\ X_1(p) = Y(p)W_{oc}(p) \end{cases}$$

$$Y(p) = [X(p) + Y(p)W_{oc}(p)]W(p) = X(p)W(p) + Y(p)W_{oc}(p)W(p);$$

$$Y(p)[1 - W(p)W_{oc}(p)] = X(p)W(p);$$

$$\Phi(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{W(p)}{1 - W(p)W_{oc}(p)} \quad \text{Случай с положительной ОС.}$$

$$\Phi(p) = \frac{W(p)}{1 + W(p)W_{oc}(p)} \quad \text{Случай с отрицательной ОС.}$$

Для следящих систем обычно $W_{oc}(p) = 1$, тогда в общем случае

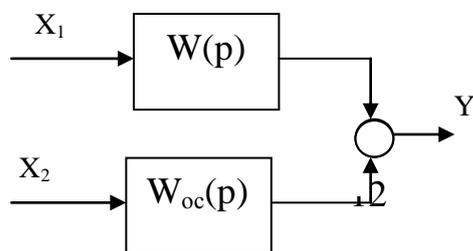
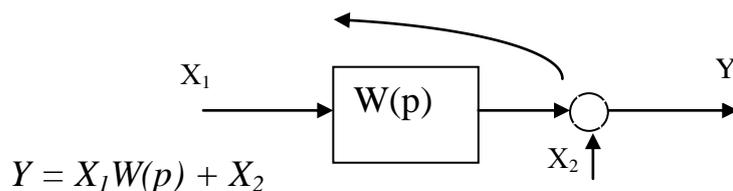
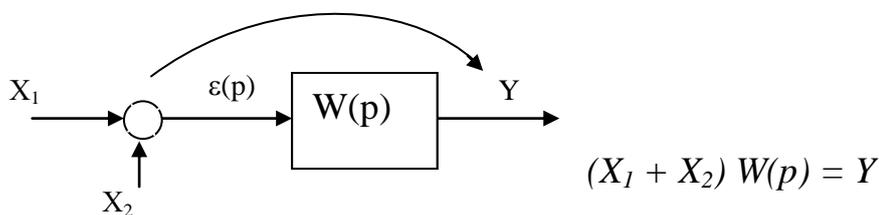
$$\Phi(p) = \frac{W(p)}{1 + W(p)}, \quad \text{где } W(p) - \text{ПФ разомкнутой АС}$$

$$\text{если } W(p) = \frac{B(p)}{A(p)} \Rightarrow \Phi(p) = \frac{B(p)}{A(p) + B(p)}.$$

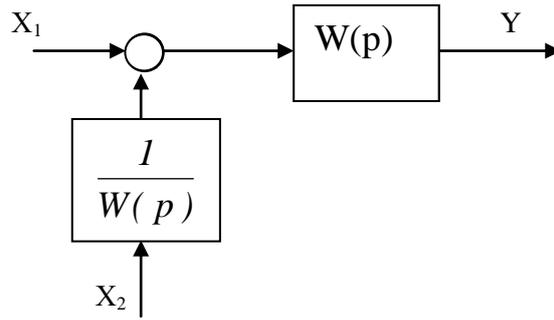
5. Правила структурных преобразований автоматических систем?

Основное правило: преобразования не должны изменять входные и выходные сигналы системы или её непреобразованной части.

а) Перенос сумматора через звено.

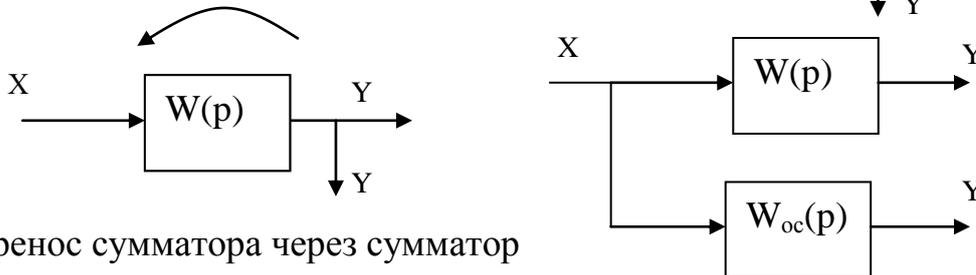
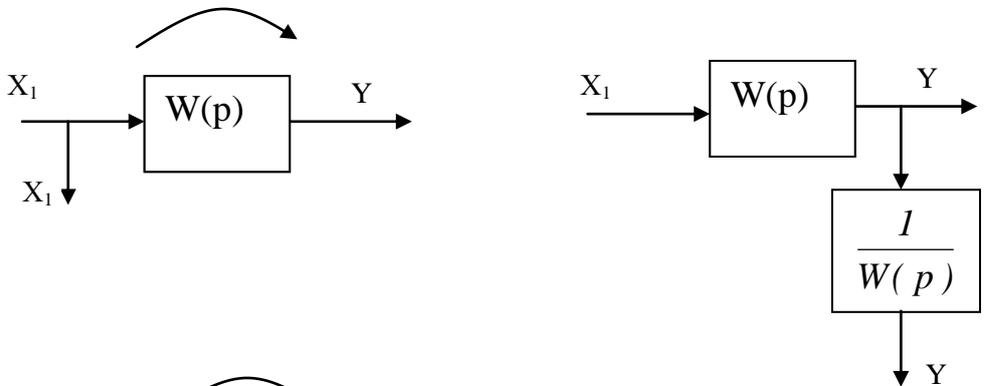


$$Y = X_1 W(p) + X_2 W(p)$$

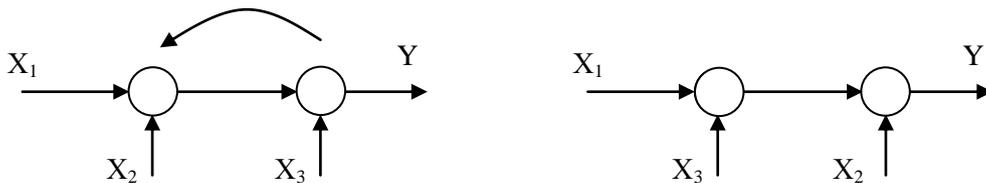


$$Y = \left[X_1 + X_2 \cdot \frac{1}{W} \right] W$$

б) Перенос узла через звено.

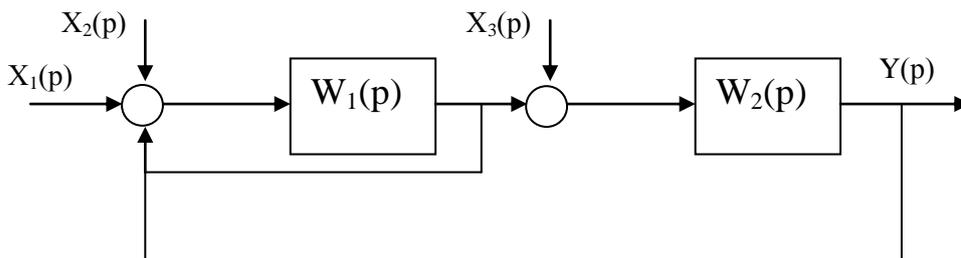


в) Перенос сумматора через сумматор



$$Y = X_1 + X_2 + X_3$$

6. Чему равна передаточная функция АС при воздействии на нее нескольких входных сигналов?



$$Y(p) = X_1(p) \Phi_{X_1Y}(p) + X_2(p) \Phi_{X_2Y}(p) + X_3(p) \Phi_{X_3Y}(p);$$

$$\text{Где } \Phi_{X_1Y}(p) = \frac{Y(p)}{X_1(p)} \Big|_{X_2(p)=X_3(p)=0};$$

$$\Phi_{X_2Y}(p) = \frac{Y(p)}{X_2(p)} \Big|_{X_1(p)=X_3(p)=0};$$

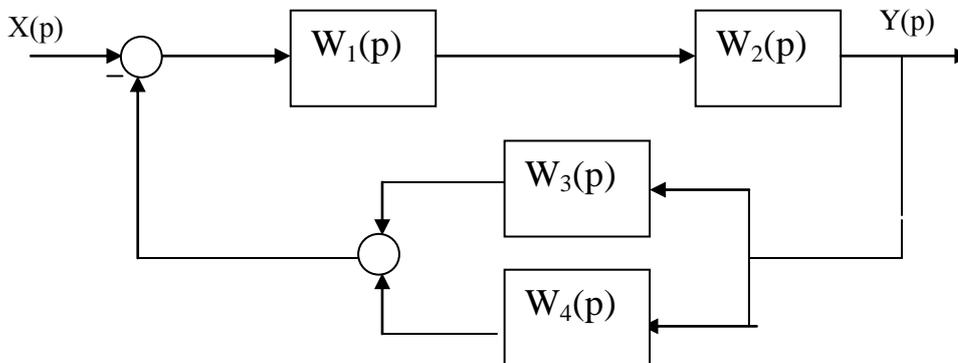
$$\Phi_{X_3Y}(p) = \frac{Y(p)}{X_3(p)} \Big|_{X_1(p)=X_2(p)=0}.$$

Задача №1.

Для АС, структурная схема которой имеет вид (рис.1):

$$\text{где } W_1(p) = \frac{5}{p}; \quad W_2(p) = \frac{2}{2p+1}; \quad W_3(p) = 2; \quad W_4(p) = \frac{5}{p};$$

Определить передаточные функции разомкнутой и замкнутой АС.



Решение:

1. Определим ПФ прямого тракта АС.

Передаточная функция прямого тракта АС представляет собой последовательное соединение W_1 и W_2 :

$$W_{1,2}(p) = W_1 \cdot W_2 = \frac{10}{p(2p+1)};$$

2. Определим ПФ разомкнутой АС:

ПФ разомкнутой АС представляет собой последовательное соединение $W_{1,2}(p)$ и $W_{oc}(p)$

$$W(p) = W_{1,2} W_{oc} = W_1 W_2 (W_3 + W_4)$$

$$W(p) = \frac{10}{p(2p+1)} \left(2 + \frac{1}{p} \right) = \frac{10(2p+1)}{p^2(2p+1)} = \frac{10}{p^2}$$

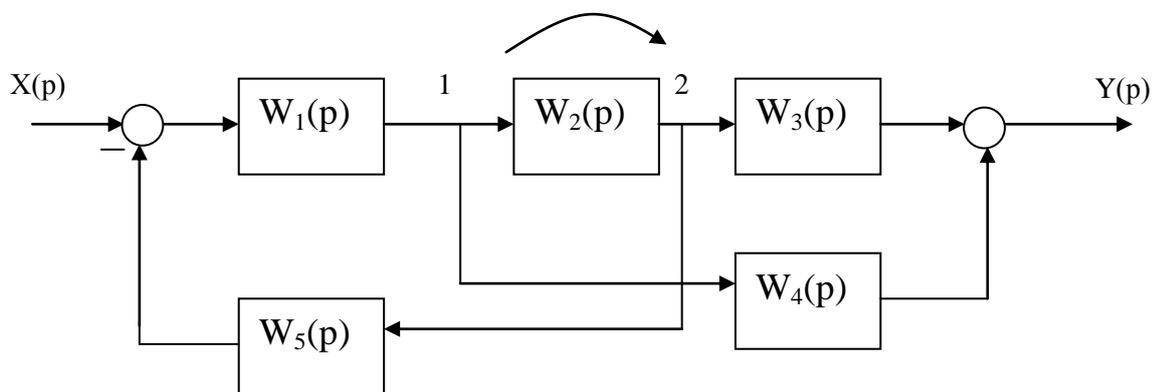
3. Определим ПФ замкнутой АС:

$$\Phi(p) = \frac{W_{1,2}(p)}{1+W(p)} = \frac{\frac{10}{p(2p+1)}}{1+\frac{10}{p^2}} = \frac{10p}{(p^2+10)(2p+1)} = \frac{10p}{2p^3+p^2+20p+10} =$$

$$= \frac{p}{0,2p^3+0,1p^2+10p+1}$$

Задача №2

Для АС, заданной структурой

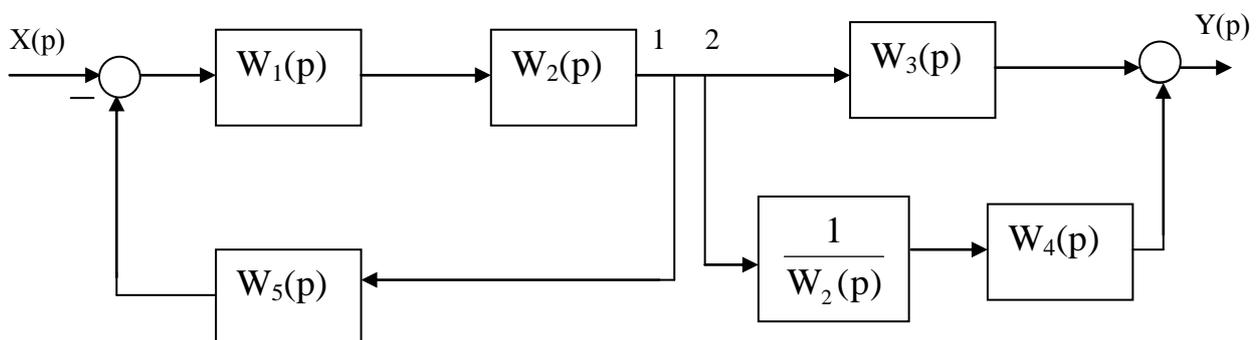


где $W_1(p) = 5$; $W_2(p) = \frac{2}{p}$; $W_3(p) = \frac{2}{p}$; $W_4(p) = 2$; $W_5(p) = 0,5$,

Определить передаточную функцию для выходного сигнала.

Решение:

1. Преобразуем структурную схему перенеся узел 1 через звено $W_2(p)$ и узел 2:



2. Определяем передаточные функции:

а) последовательного соединения $W_1(p)$, $W_2(p)$ и $W_2^{-1}(p)W_4(p)$:

$$W_{1,3}(p) = W_1(p)W_2(p) = \frac{10}{p};$$

$$W_{3\text{э}}(p) = W_2^{-1}(p)W_4(p) = p;$$

б) встречно-параллельного соединения $W_{1\text{э}}(p)$ и $W_5(p)$

$$W_{2\text{э}}(p) = \frac{W_{1\text{э}}(p)}{1 + W_{1\text{э}}(p)W_5(p)} = \frac{10/p}{1 + \frac{10}{p} \cdot 0,5} = \frac{10}{p+5};$$

в) параллельного соединения $W_3(p)$ и $W_{3\text{э}}(p)$:

$$W_{4\text{э}} = W_3(p) + W_{3\text{э}}(p) = \frac{4}{p} + p = \frac{p^2 + 4}{p};$$

г) передаточную функцию АС как последовательное соединение $W_{2\text{э}}(p)$ и $W_{4\text{э}}(p)$:

$$\Phi_{XY}(p) = W_{2\text{э}}(p)W_{4\text{э}}(p) = \frac{10}{p+5} \cdot \frac{4+p^2}{p} = \frac{10p^2 + 40}{p(p+5)}.$$

Задача №3

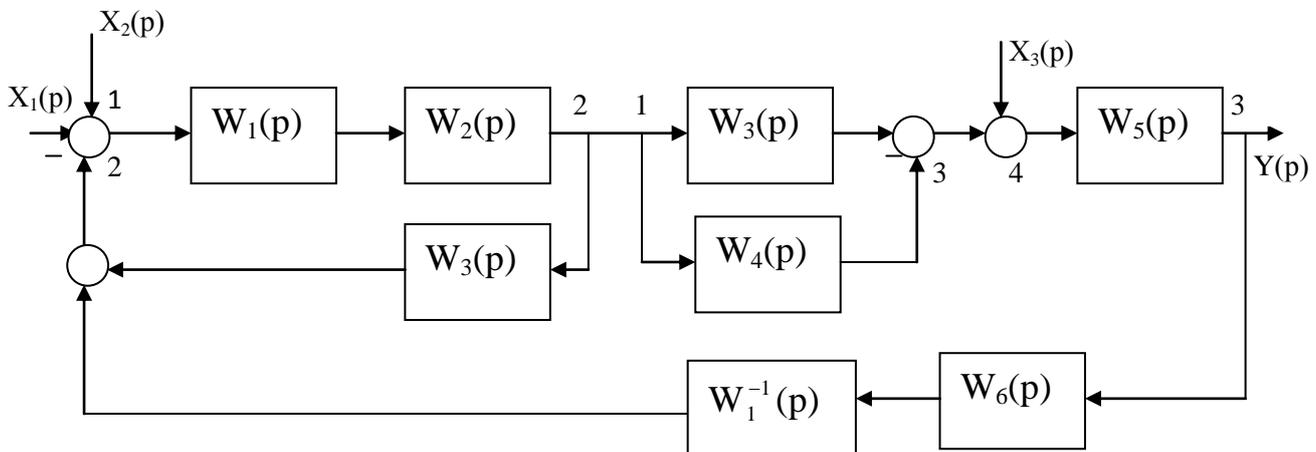
Структурная схема АС имеет вид (рис.2):

где $W_1(p) = 2$; $W_2(p) = \frac{5}{p}$; $W_3(p) = 2$; $W_4(p) = \frac{2}{p}$; $W_5(p) = 0,2$; $W_6(p) = 2$.

Определить передаточные функции АС от каждого входа к выходу.

Решение.

1. Преобразуем структурную схему путем переноса узла 2 через звено $W_3(p)$ и узел 1, а также сумматора 2 через звено $W_1(p)$ и сумматор 1.



2. Определим $\Phi_{X1Y}(p)$ при $X_2(p) = X_3(p) = 0$.

а) $W_{1\text{э}}(p) = \frac{W_1(p)W_2(p)}{1 + W_1(p)W_2(p)W_3(p)} = \frac{10}{p+20};$

б) $W_{3\text{э}}(p) = W_3(p) - W_4(p) = \frac{2(p-1)}{p};$

в) $W_{5\text{э}}(p) = W_{1\text{э}}(p)W_{3\text{э}}(p)W_5(p) = \frac{4(p-1)}{p(p+20)};$

г) $W_{oc}(p) = W_1^{-1}(p)W_6(p) = 1;$

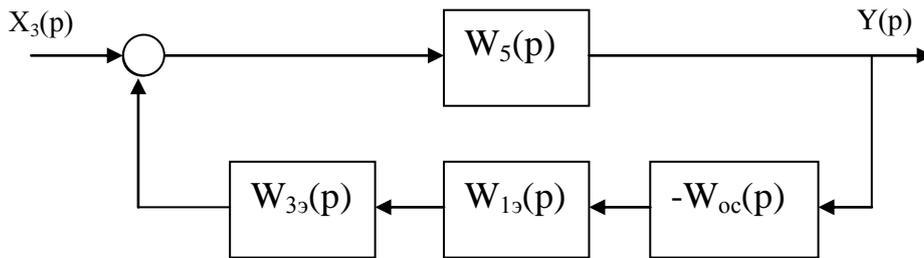
д) $\Phi_{X_1Y}(p) = \frac{W_{53}(p)}{1 + W_{53}(p)W_{oc}} = \frac{4(p-1)}{p(p+20) + 4(p-1)} = \frac{4p-4}{p^2 + 24p - 4}.$

3. Определим $\Phi_{X_2Y}(p)$ при $X_1(p) = X_3(p) = 0.$

Так как сигнал $X_2(p)$ воздействует на АС в том месте, что и $X_1(p)$, то

$$\Phi_{X_2Y}(p) = \Phi_{X_1Y}(p).$$

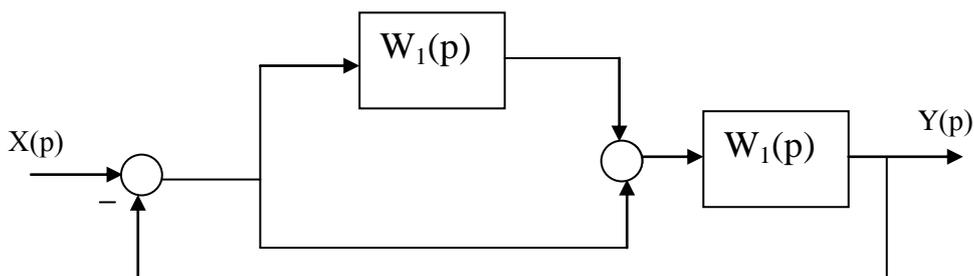
4. Определим $\Phi_{X_3Y}(p)$ при $X_1(p) = X_2(p) = 0.$



$$\begin{aligned} \Phi_{X_3Y}(p) &= \frac{W_5(p)}{1 - W_{33}(p)W_{13}(p) \cdot [-W_{oc}(p)]W_5(p)} = \frac{0,2}{1 + \frac{2(p-1)}{p} \cdot \frac{10}{p+20} \cdot 0,2} = \\ &= \frac{0,2p(p+20)}{p(p+20) + 4(p-1)} = \frac{0,2p^2 + 4}{p^2 + 24p - 4}. \end{aligned}$$

Задача №4

Структурная схема АС имеет вид:



где $W_1(p) = 2; W_2(p) = \frac{25}{p^2(2p+1)}.$

Определить $\Phi(p)$, какому элементарному звену она соответствует и определить его параметры.

$$\Phi(p) = \frac{[W_1(p)+1]W_2(p)}{1+[W_1(p)+1]W_2(p)} = \frac{\frac{25(2p+1)}{p^2(2p+1)}}{1+\frac{25(2p+1)}{p^2(2p+1)}} = \frac{25}{p^2+25};$$

Апериодическое звено второго порядка с параметрами:

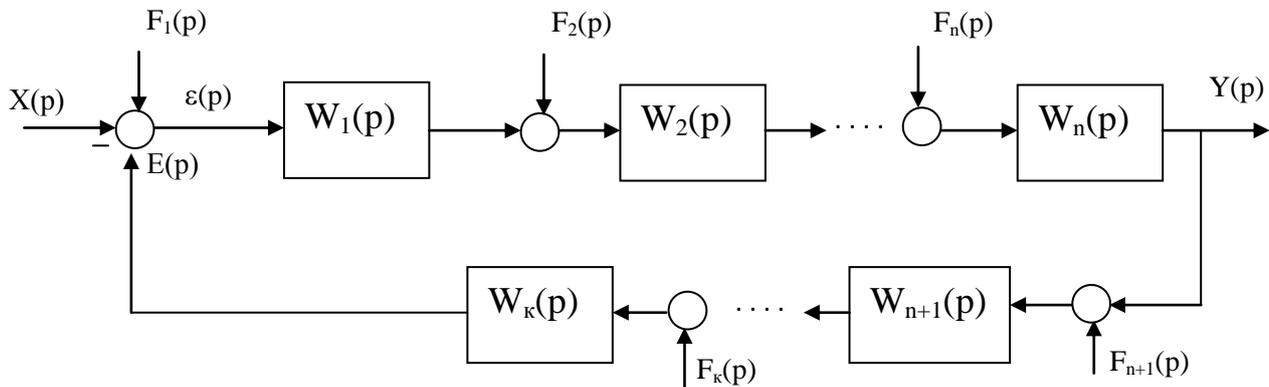
$$\frac{25}{p^2+25} = \frac{K}{T^2 p^2 + 2T\xi p + 1} = \frac{1}{\frac{1}{25} p^2 + 1};$$

$$K = 1; T^2 = \frac{1}{25}; T = \frac{1}{5}; 2T\xi = 0; \xi = 0;$$

Полюса этой ПФ будут $p_1 = j5; p_2 = -j5$.

2.3. Передаточные функции по возмущению

1. Что называется передаточной функцией по возмущению?



$$\Phi_{Fi}(p) = \frac{Y(p)}{F_i(p)}, \text{ при } X(p) = F_{j \neq i}(p) = 0; j = 1 \div K;$$

$$Y(p) = X(p)\Phi_{XY}(p) + \sum_{i=1}^K F_i(p)\Phi_{Fi}(p);$$

2. Что называется ПФ для ошибки от полезного входного сигнала?

$$\Phi_{XE}(p) = \frac{E(p)}{X(p)}, \text{ при } F_i(p) = 0;$$

$E(p) = Y(p) - Y_{\text{жс}}(p)$, но $Y_{\text{жс}}(p) = X(p)$ для следящей системы

$$E(p) = Y(p) - X(p).$$

$$\text{Тогда } \Phi_{XE}(p) = \frac{Y(p) - X(p)}{X(p)} = \Phi_{XY}(p) - 1 = \frac{W(p)}{1+W(p)} - 1 = -\frac{1}{1+W(p)};$$

3. Чему равна ПФ для ошибки от возмущающего воздействия?

$$\Phi_{FiE}(p) = \frac{E(p)}{F_i(p)} = \frac{Y(p) - Y_{\text{жс}}(p)}{F_i(p)}.$$

Но $Y_{\text{жс}}(p) = 0$, т.к. $F_i(p)$ – помеха. Тогда $\Phi_{FiE}(p) = \Phi_{FiY}(p)$;

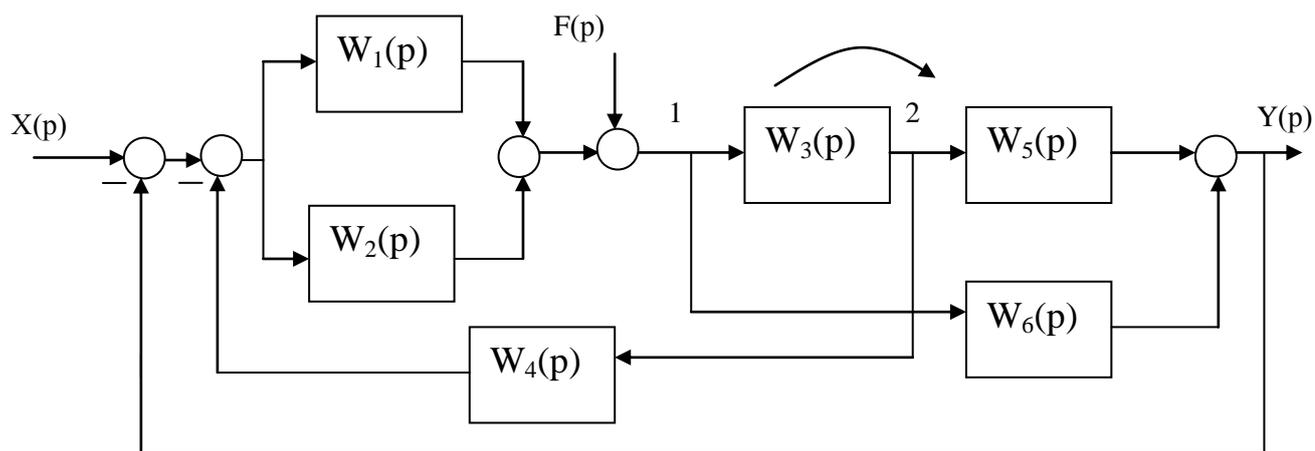
4. Что называется ПФ для рассогласования?

$$\Phi_{x\varepsilon}(p) = \frac{\varepsilon(p)}{X(p)}; \quad \varepsilon(p) = X(p) - Y(p) = -E(p);$$

$$\text{Тогда } \Phi_{x\varepsilon}(p) = -\Phi_{xY}(p) = \frac{1}{1+W(p)};$$

Задача №1

Структурная схема системы имеет вид:



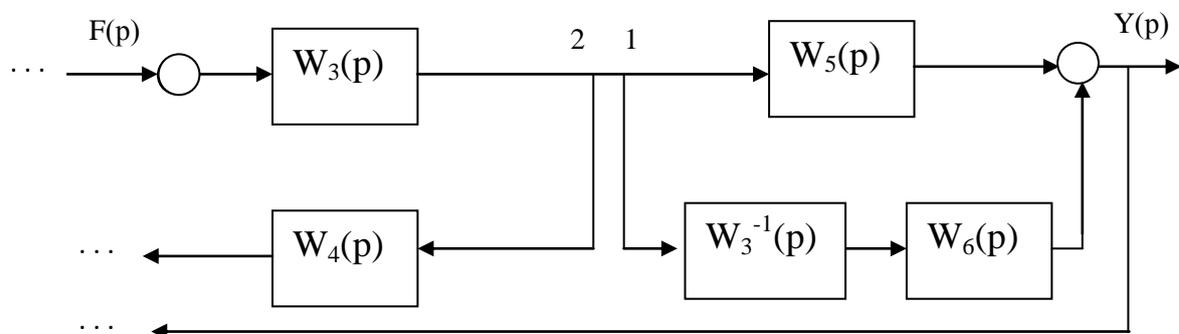
где $W_1(p) = \frac{2}{p}$; $W_2(p) = 1$; $W_3(p) = 0,5$; $W_4(p) = 2$; $W_5(p) = \frac{1}{p}$; $W_6(p) = \frac{2}{p}$.

Определить все основные ПФ АС.

Решение:

1. Определение ПФ разомкнутой системы $W(p)$:

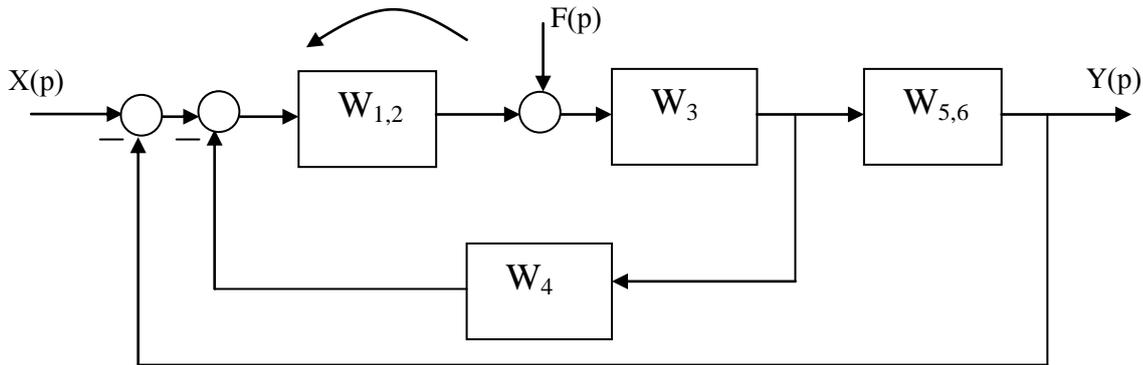
- а) по правилам структурных преобразований приведем данную структуру к одноконтурному виду:
- перенесем узел 1 через звено $W_3(p)$ и узел 2;



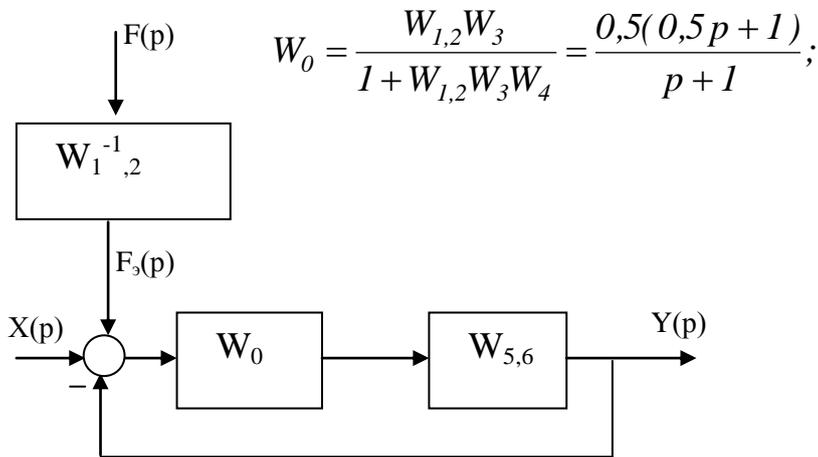
- определим ПФ параллельных соединений:

$$W_{1,2}(p) = W_1(p) + W_2(p) = \frac{2}{p} + 1 = \frac{2(0,5 + 1)}{p},$$

$$W_{5,6}(p) = W_5(p) + \frac{W_6(p)}{W_3(p)} = \frac{1}{p} + \frac{4}{p} = \frac{5}{p}.$$



- перенесем возмущение $F(p)$ через $W_{1,2}(p)$ и определим ПФ встречно-параллельного соединения $W_0(p)$:



б) определим $W(p)$:

$$W(p) = W_0(p)W_{5,6}(p) = \frac{0,5(0,5p + 1)}{p + 1} \cdot \frac{5}{p} = \frac{2,5(0,5p + 1)}{p(p + 1)}.$$

2. Определим ПФ для задающего сигнала $\Phi(p)$:

$$\Phi(p) = \frac{W(p)}{1 + W(p)} = \frac{2,5(0,5p + 1)}{2,5(0,5p + 1) + p(p + 1)} = \frac{0,5p + 1}{0,4p^2 + 0,9p + 1}.$$

3. Определим ПФ от возмущения $\Phi_{FY}(p)$:

$$W_{FY}(p) = \frac{1}{W_{1,2}(p)} \Phi(p) = \frac{p}{2(0,5p + 1)} \cdot \frac{0,5p + 1}{(0,4p^2 + 0,9p + 1)} = \frac{0,5p}{0,4p^2 + 0,9p + 1}.$$

4. Определим ПФ для ошибки от задающего воздействия $\Phi_{XE}(p)$ или $S(p)$, помехи $\Phi_{FE}(p)$ и для рассогласования $\Phi_{XE}(p)$ и для рассогласования $\Phi_{X\varepsilon}(p)$:

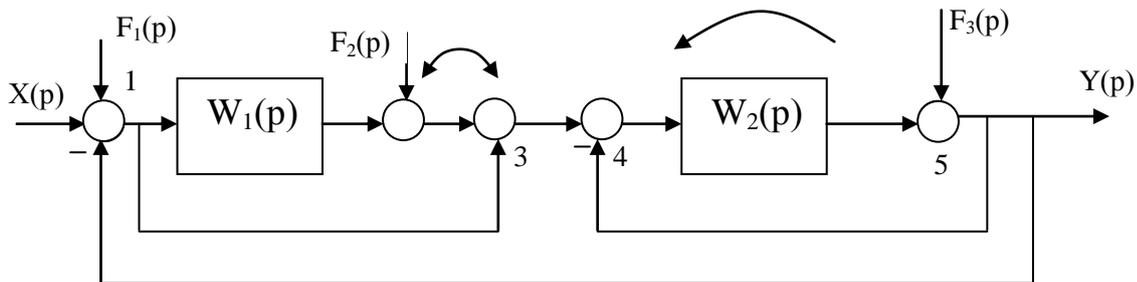
$$W_{XE}(p) = -\frac{1}{1 + W(p)} = \Phi(p) - 1 = -\frac{0,4p(p + 1)}{0,4p^2 + 0,9p + 1};$$

$$W_{FE}(p) = \Phi_{FY}(p) = -\frac{0,5p}{0,4p^2 + 0,9p + 1};$$

$$\Phi_{Xe}(p) = -\Phi_{XE}(p) = \frac{0,4p(p+1)}{0,4p^2 + 0,9p + 1};$$

Задача №2

Структурная схема АС имеет вид:



где $W_1(p) = 2$; $W_2(p) = \frac{1}{p}$.

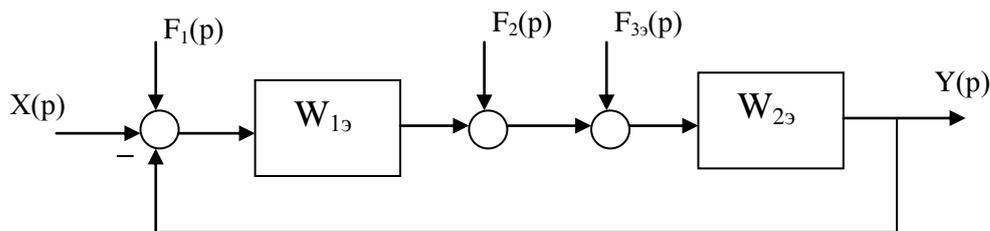
Определить изображение выходного сигнала $Y(p)$ и ошибки $E(p)$.

Решение:

1. Определим $Y(p)$

$$Y(p) = X(p) \Phi(p) + \sum_{i=1}^3 F_i(p) \Phi_{FiY}(p).$$

Для нахождения $\Phi(p)$ и $\Phi_{FiY}(p)$ преобразуем структуру АС, поменяв сумматоры 2, 3 местами и сумматор 5 перенесем через звено $W_2(p)$ и сумматор 4



$$\text{Где } W_{13}(p) = W_1(p) + 1; \quad W_{23} = \frac{W_2(p)}{1 + W_2(p)};$$

$$F_{33}(p) = F_3(p) \cdot W_2^{-1}(p).$$

а) Определим $\Phi(p)$:

$$\begin{aligned} \Phi(p) &= \left. \frac{Y(p)}{X(p)} \right|_{F_1=F_2=F_3=0} = \frac{W_{13} \cdot W_{23}}{1 + W_{13} \cdot W_{23}} = \frac{(W_1 + 1) \cdot \frac{W_2(p)}{1 + W_2(p)}}{1 + (W_1 + 1) \cdot \frac{W_2(p)}{1 + W_2(p)}} = \\ &= \frac{(1 + W_1)W_2}{1 + W_2 + W_2(1 + W_1)} = \frac{3}{p + 4}, \end{aligned}$$

$$\Phi(p) = \frac{0,75}{0,25p+1};$$

б) Определим $\Phi_{FiY}(p)$:

$$i = 1; \quad \Phi_{F_1Y}(p) = \frac{Y(p)}{F_1(p)} \Big|_{X=F_2=F_3=0} = \frac{W_{13}W_{23}}{1+W_{13}W_{23}} = \Phi(p) = \frac{0,75}{0,25p+1};$$

$i = 2$;

$$\Phi_{F_2Y}(p) = \frac{Y(p)}{F_2(p)} \Big|_{X=F_1=F_3=0} = \frac{W_{23}}{1+W_{23}W_{13}} = \frac{W_2}{1+2W_2+W_1W_2} = \frac{1}{p+4} = \frac{0,25}{0,25p+1};$$

$i = 3$;

$$\Phi_{F_3Y}(p) = \frac{Y(p)}{F_3(p)} \Big|_{X=F_1=F_2=0} = \frac{W_2^{-1}W_{23}}{1+W_{13}W_{23}} = \frac{1}{1+2W_2+W_1W_2} = \frac{p}{p+4} = \frac{0,25p}{0,25p+1}.$$

$$Y(p) = [X(p) + F_1(p)] \frac{0,75}{0,25p+1} + F_2(p) \frac{0,25}{0,25p+1} + F_3(p) \frac{0,25}{0,25p+1}.$$

2. Определим $E(p)$:

$$E(p)^{\Delta} = Y(p) - X(p) = -\frac{0,25(p+1)}{0,25p+1} X(p) + F_1(p) \frac{0,75}{0,25p+1} +$$

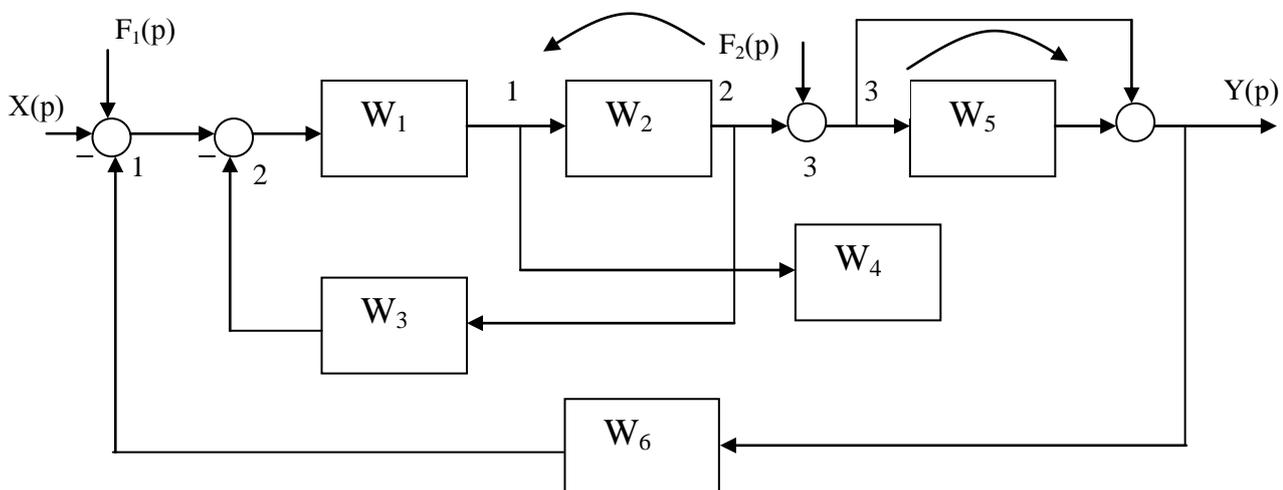
$$F_2(p) \frac{0,25}{0,25p+1} + F_3(p) \frac{0,25}{0,25p+1}.$$

Составляющие выходного сигнала АС, обусловленные действием на нее помех, полностью входят в ошибку системы.

Независимо от места ввода в АС полезного сигнала и помех характеристический полином $A(p)$ один и тот же для всех ПФ АС, т.е. он характеризует саму систему.

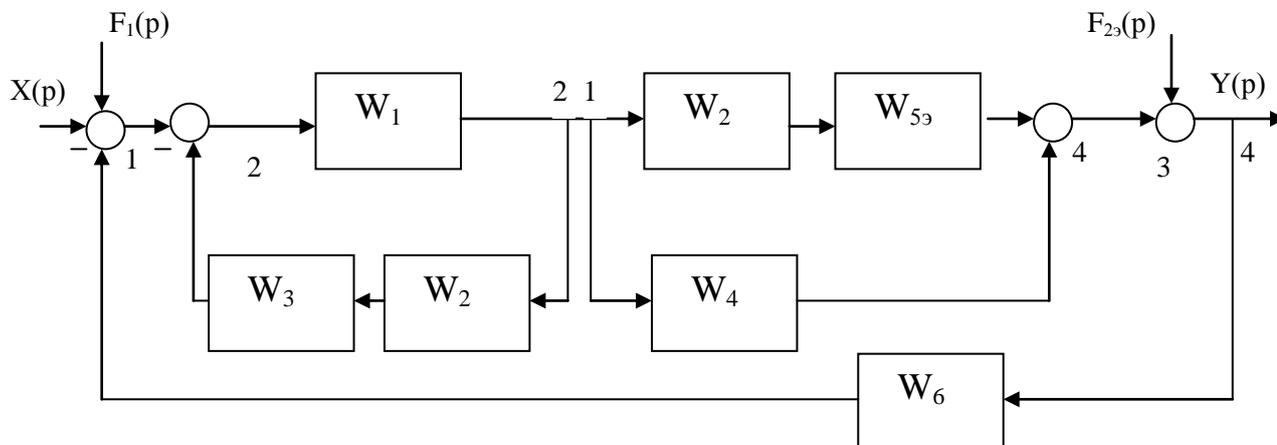
Задача №3.

Для автоматической системы с заданной структурой требуется определить все передаточные функции.

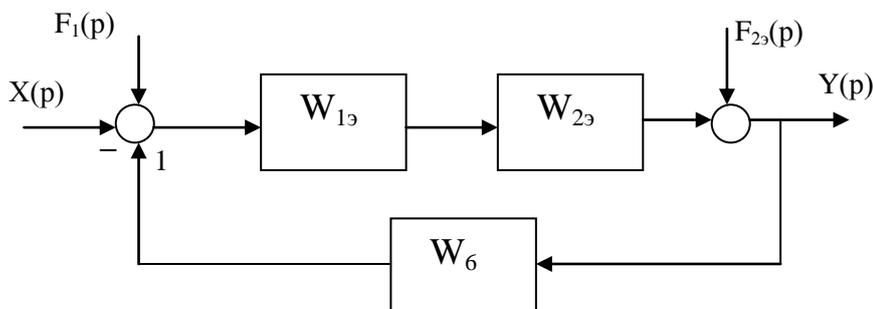


Решение:

1. Преобразуем исходную многоконтурную систему в одноконтурную, для чего перенесем узел 2 через звено $W_2(p)$ и узел 1, а сумматор 3 за сумматором 4, по ходу сигнала.



где $W_{5э} = W_5 + I$; $F_{2э}(p) = F_2(p) W_{5э}$;



где $W_{1э} = \frac{W_1}{1 + W_1 W_2 W_3}$; $W_{2э} = W_2 W_{5э} + W_4$;

$W(p) = W_{1э} W_{2э}$; $W(p)' = W_{1э} W_{2э} W_6$;

2. Определим основные ПФ АС:

а) ПФ замкнутой АС

$$\Phi(p) = \frac{W(p)}{1 + W(p)'} = \frac{W_{1э} W_{2э}}{1 + W_{1э} W_{2э} W_6};$$

б) ПФ от помехи $F_1(p)$ к выходу

$$\Phi_{F_1 Y}(p) = \Phi(p);$$

в) ПФ от помехи $F_2(p)$ к выходу

$$\Phi_{F_2 Y}(p) = \frac{W_{5э}}{1 + W(p)};$$

г) ПФ для ошибки от полезного входного сигнала (рассогласования)

$$S(p) = \Phi(p) - \frac{1}{W_6}; \quad \Phi_{X\varepsilon}(p) = -S(p);$$

д) ПФ для ошибки от помех $F_1(p)$ и $F_2(p)$

$$\Phi_{F_1 E}(p) = \Phi_{F_1 Y}(p); \quad \Phi_{F_2 E}(p) = \Phi_{F_2 Y}(p)$$

2.4. Временные характеристики ЛСС. Определение временных характеристик непрерывных АС.

К весовым характеристикам относятся весовая и переходная функции.

Переходной функцией системы называется её реакция на единичное ступенчатое воздействие.

Весовой функцией системы называется реакция её на дельта-функцию.

Изображения по Лапласу для переходной и весовой функций имеет вид:

$$H(p) = W(p) \cdot \frac{1}{p} = \frac{B(p)}{A(p) \cdot p}; \quad G(p) = W(p) \cdot 1 = \frac{B(p)}{A(p)}; \quad (1)$$

Если известна передаточная функция АС $W(p)$, то всегда можно определить изображение переходной и весовой функций $H(p)$ и $G(p)$.

Оригиналы $h(t)$ и $g(t)$ определяются по таблицам обратного преобразования Лапласа или с использованием теоремы разложения, которая формируется так:

Если известно изображение функции $F(p) = \frac{S(p)}{Q(p)}$, где степень полинома

$S(p)$ меньше или равна степени полинома $Q(p)$, то оригинал $f(t)$ может быть определен по следующим формулам:

$$\begin{cases} F(t) = L^{-1}[F(p)] = \sum_{i=1}^n C_i e^{p_i t} + C_0 \cdot \delta(t), \quad t \geq 0. \\ C_i = \frac{S(p)}{\frac{\partial Q(p)}{\partial p}} \\ C_0 = \begin{cases} \frac{b_m}{a_n} = F(\infty), (m = n); \\ 0, (m < n); \end{cases} \end{cases} \quad (2)$$

где p_i – корни знаменателя $F(p)$ (полюса).

Эта формула справедлива в том случае, когда корни p_i – простые, т.е. все различные.

Между переходной и весовой функциями существует однозначная связь:

$$h(t) = \int_0^t g(\tau) d\tau, \quad g(t) = \frac{dh(t)}{dt}.$$

Во многих случаях необходимо определить только начальные и конечные значения функции-оригинала. Для этой цели не обязательно определять сам оригинал, а достаточно воспользоваться двумя предельными теоремами

$$\begin{cases} f(0) = \lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{p \rightarrow \infty} p \cdot F(p) \\ f(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot F(p) \end{cases} \quad (3)$$

1. По известной передаточной функции $\Phi(p)$ используя формулы (1) определяются изображения временных характеристик $H(p)$ и $G(p)$.

2. Если по условию задачи необходимо определить только начальные и конечные значения временных характеристик системы, то используя теоремы (3) определяем их значения.

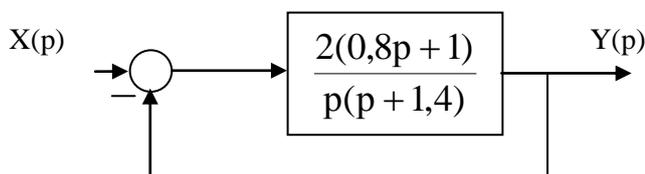
3. Если необходимо найти сами временные характеристики, то используем таблицы обратных преобразований Лапласа или теорему разложения:

3.1. Определяем корни знаменателя изображений $H(p)$ и $G(p)$.

3.2. Определяем по формулам (2) коэффициенты C_0, C_i для каждой из функций и сами оригиналы $h(t)$ и $g(t)$.

Задача №1.

Структурная схема АС имеет вид:



Необходимо определить $h(0); h(\infty); g(0); g(\infty)$.

Решение:

1. Определяем передаточную функцию замкнутой системы и изображения временных характеристик $H(p)$ и $G(p)$.

$$\Phi(p) = \frac{2(0,8p+1)}{1 + \frac{2(0,8p+1)}{p(p+1,4)}} = \frac{1,6p+2}{p^2+3p+2};$$

$$H(p) = \frac{\Phi(p)}{p} = \frac{1,6p+2}{p(p^2+3p+2)}; \quad G(p) = \Phi(p) = \frac{1,6p+2}{p^2+3p+2}.$$

2. Применяем первую и вторую предельные теоремы.

$$h(0) = \lim_{p \rightarrow 0} p H(p) = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{1,6p+2}{p^2+3p+2} = 0;$$

$$h(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot H(p) = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{1,6p+2}{p^2+3p+2} = 1;$$

$$g(\infty) = \lim_{p \rightarrow \infty} p G(p) = \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{p(1,6p+2)}{p^2+3p+2} = \left. \begin{array}{l} \text{По правилу Лопиталя} \\ \text{берем отношение про-} \\ \text{изводных} \end{array} \right| =$$

$$= \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{3,2p+2}{2p+3} = \frac{3,2}{2} = 1,6;$$

$$g(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot G(p) = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p(1,6p + 2)}{p^2 + 3p + 2} = \frac{0}{2} = 0.$$

Задача № 2.

Для системы из задачи №1 определить аналитические выражения $h(t)$ и $g(t)$, набрать графики этих функций.

Решение:

1. Изображения $H(p)$ и $G(p)$ имеют вид:

$$H(p) = \frac{1,6p + 2}{p(p^2 + 3p + 2)}; \quad G(p) = \frac{1,6p + 2}{p^2 + 3p + 2}.$$

2. Определяем корни знаменателя $H(p)$ и $G(p)$

$$H(p): p(p^2 + 3p + 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \tilde{p}_1 = 0 \\ \tilde{p}_2 = -2 \\ \tilde{p}_3 = -1 \end{cases} \quad p_{1,2} = \frac{-\epsilon \pm \sqrt{\epsilon^2 - 4ac}}{2a}; \text{ при } a = 1$$

$$G(p): p^2 + 3p + 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} p_1 = -2 \\ p_2 = -1 \end{cases} \quad -\frac{\epsilon}{2} \pm \frac{\sqrt{\epsilon^2 - 4c}}{2};$$

$$p_1 + p_2 = -\frac{\epsilon}{a}; \quad p_1 p_2 = \frac{c}{a}.$$

3. Определяем коэффициент C_0, C_i разложения функций $h(t)$ и $g(t)$

$$\Phi(p) = \frac{B(p)}{A(p)};$$

$$\begin{cases} g(t) = C_0 \delta(t) + \sum_{i=1}^n C_i \cdot e^{P_i t}, \quad t \geq 0; \\ C_0 = \frac{b_m}{a_n} = \Phi(\infty), m = n \\ C_0 = 0, \quad m < n \end{cases} \quad C_i = -\frac{B(p_i)}{A'(p_i)}$$

$$\begin{cases} h(t) = \tilde{C}_0 + \sum_{i=1}^n \tilde{C}_i e^{P_i t}, \quad t > 0; \\ \tilde{C}_0 = \frac{b_0}{a_0} = \Phi(0), \\ \tilde{C}_i = \frac{B(p_i)}{p_i A'(p_i)} = \frac{C_i}{p_i}. \end{cases}$$

Производная знаменателей:

$$H(p): [p(p^2 + 3p + 2)] = 3p^2 + 6p + 2$$

$$G(p): (p^2 + 3p + 2)' = 2p + 3.$$

Определяем C_0, \tilde{C}_0, C_i и \tilde{C}_i : т.к. $m < n$, то \tilde{C}_0 и $C_0 = 0$.

$$h(t): \tilde{C}_1 = \frac{1,6 + 2}{3p^2 + 6p + 2} \Big|_{\tilde{p}_1=0} = \frac{2}{2} = 1;$$

$$\tilde{C}_2 = \frac{1,6 + 2}{3p^2 + 6p + 2} \Big|_{\tilde{p}_2=-2} = -\frac{1,2}{2} = -0,6;$$

$$\tilde{C}_3 = \frac{1,6 + 2}{3p^2 + 6p + 2} \Big|_{\tilde{p}_3=-1} = -\frac{0,4}{-1} = 0,4;$$

$$g(t): C_1 = \frac{1,6 + 2}{2p + 3} \Big|_{\tilde{p}_1=-2} = \frac{-1,2}{-1} = 1,2;$$

$$C_2 = \frac{1,6 + 2}{2p + 3} \Big|_{\tilde{p}_1=-1} = \frac{0,4}{1} = 0,4.$$

Определяем оригиналы функций $h(t)$ и $g(t)$:

$$h(t) = 1 \cdot e^{0t} + (-0,6)e^{-2t} + (-0,4)e^{-t} = 1 - 0,6e^{-2t} - 0,4e^{-t};$$

$$g(t) = 1,2e^{-2t} + 0,4e^{-t};$$

Проверка:

$$g(t) = h^{(1)}(t);$$

$$g(t) = (1 - 0,6e^{-2t} - 0,4e^{-t})' = 1,2e^{-2t} + 0,4e^{-t}.$$

Проверить $h(0)$ и $g(0)$; $h(\infty)$ и $g(\infty)$.

Добавить:

$$\Phi(p) = \frac{1,6p + 2}{p^2 + 3p + 2} 2e^{-0,5p};$$

$$\Phi(p) = \Phi_0(p)e^{-0,5p};$$

$$\Phi_0(p) = \frac{2(1,6p + 2)}{p^2 + 3p + 2}.$$

Находим $g_0(t)$, а затем сдвигаем её на величину $\tau = 0,5$: $g(t) = g_0(t - \tau)$.

Находим $h_0(t) \Rightarrow \tau \Rightarrow 0,5 \Rightarrow h(t) = h_0(t - \tau)$.

Задача №3

На вход системы

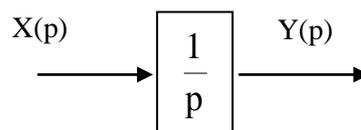
действует входной сигнал

$$x(t) = 2\delta(t - 1) - 3\delta(t - 2) + 4\delta(t - 4).$$

Изобразить график выходного сигнала.

Решение:

Если на вход системы действует δ -импульс, то, по определению, выход системы есть весовая функция $g(t)$. Если на вход ЛС АС действует комбинация



δ -импульсов, сдвинутых по времени, то в силу линейности системы её выход будет также линейная комбинация весовых функций с соответствующим сдвигом.

Т.о., выходной сигнал системы

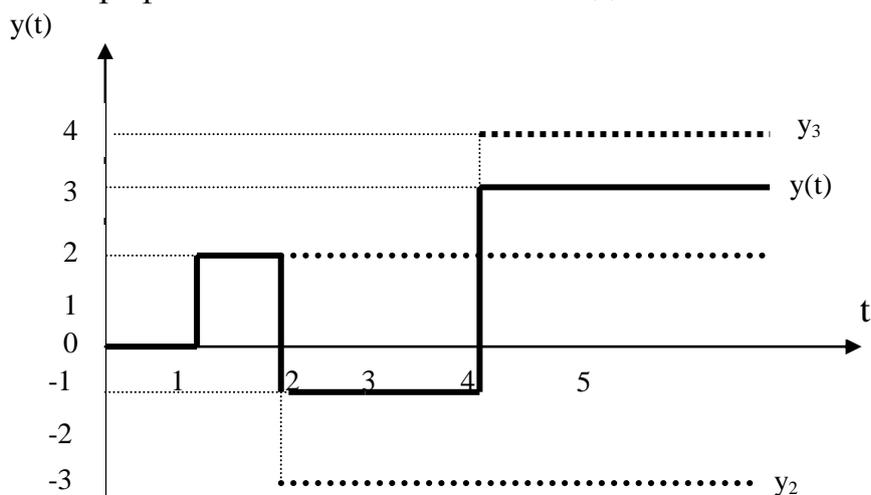
$$y(t) = 2g(t-1) - 3g(t-2) + 4g(t-4).$$

Весовая функция системы (интегрирующего звена):

$$g(t) = L^{-1}[G(p)] = L^{-1}[W(p)] = L^{-1}\left[\frac{1}{p}\right] = I(t),$$

$$\text{т.е. } y(t) = 2 \cdot I(t-1) - 3 \cdot I(t-2) + 4 \cdot I(t-4) = y_1 + y_2 + y_3$$

График такого сигнала имеет вид:

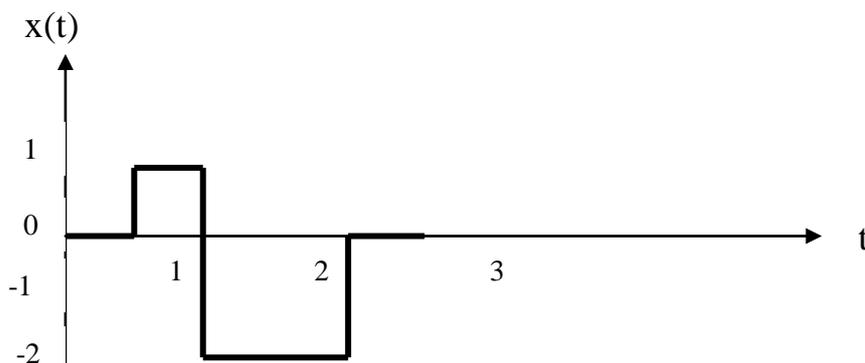


Задача №4.

Переходная функция системы имеет вид:

$$h(t) = 1 - e^{-t}$$

Определить реакцию системы в момент времени $t = 3c$ на сигнал $x(t)$ вида:



Решение:

Запишем аналитическое выражение для входного сигнала:

$$x(t) = I(t - 0,5) - 3 \cdot I(t - 1) + 2 \cdot I(t - 2).$$

Если вход системы есть единичная ступенчатая функция, то, по определению, выход – переходная функция. Поэтому

$$y(t) = h(t - 0,5) - 3h(t - 1) + 2h(t - 2) = 1 - e^{-(t-0,5)} - 3 + 3 \cdot e^{-(t-1)} + 2 - 2 \cdot e^{-(t-2)} = 3 \cdot e^{-(t-1)} - 2 \cdot e^{-(t-2)} - e^{-(t-0,5)}.$$

Тогда

$$y(3) = 3 \cdot e^{-2} - 2e^{-1} - e^{-2,5}.$$

Задача №5

Передаточная функция системы имеет вид: $\Phi(p) = \frac{2(p+1)^2}{(p+3)^3}$.

Определить начальные значения $g(0)$ и $h(0)$.

Решение:

Определяем изображения $G(p)$ и $H(p)$:

$$G(p) = \Phi(p) = \frac{2(p+1)^2}{(p+3)^3}; \quad H(p) = \frac{1}{p} \Phi(p) = \frac{2(p+1)^2}{(p+3)^3}$$

Применяем предельную теорему:

$$\begin{aligned} g(0) &= \lim_{p \rightarrow \infty} pG(p) = \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{2p(p+1)^2 / p^3}{(p+3)^3 / p^3} = \\ &= \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{2 \frac{p}{p} \cdot \frac{p+1}{p} \cdot \frac{p+1}{p}}{\frac{p}{p} \cdot \frac{p+3}{p} \cdot \frac{p+3}{p} \cdot \frac{p+3}{p}} = \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{2(1 + \frac{1}{p})^2}{(1 + \frac{3}{p})^3} = 2; \\ h(\infty) &= \lim_{p \rightarrow \infty} p \cdot H(p) = \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{p \cdot 2(p+1)^2}{p(p+3)^3} = \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{p}(1 + \frac{1}{p})^2}{(1 + \frac{3}{p})^3} = 0. \end{aligned}$$

2.5. Частотные характеристики.

Определение реакции АС на гармонический входной сигнал.

Формы представления гармонического сигнала?

Гармоническая функция: $x(t) = A_x \sin(\omega t + \psi_x)$; $x(t) = A_x \cos(\omega t + \psi_x)$.

В комплексная функция

$$x(t) = A_x e^{j(\omega t + \psi_x)} = \dot{A}_x e^{j\omega t}, \text{ где}$$

$\dot{A}_x = A_x e^{j\psi_x}$ - комплексная амплитуда;

ψ_x - фаза гармонического сигнала.

1. Определения частотных характеристик?

Частотные характеристики – это функции частоты гармонического входного сигнала, определяющие реакцию АС на этот сигнал.

$$\Phi(j\omega) = \frac{\dot{A}_y e^{j\omega t}}{\dot{A}_x e^{j\omega t}} = \frac{A_y e^{j\psi_y}}{A_x e^{j\psi_x}} = \frac{A_y}{A_x} e^{j(\psi_y - \psi_x)} = \Phi_a(\omega) e^{j\varphi(\omega)}.$$

АФЧХ – отношение вынужденной составляющей выходного сигнала к соответствующему гармоническому входному сигналу, представленному в комплексной форме.

$$\Phi_a(\omega) = \frac{A_y}{A_x}; \quad \Phi(\omega) = \left| \Phi(j\omega) \right| = \frac{|B(j\omega)|}{|A(j\omega)|};$$

$\Phi_a(\omega) = \sqrt{R^2(\omega) + I^2(\omega)}$ - математические выражения, определяющие АЧХ.

АЧХ – это отношение амплитуды вынужденной составляющей выходного сигнала к амплитуде входного гармонического сигнала.

$$\varphi(\omega) = \psi_y - \psi_x; \quad \varphi(\omega) = \arg \Phi(j\omega); \quad \varphi(\omega) = \arctg \frac{I(\omega)}{R(\omega)}.$$

Математические выражения, определяющие ФЧХ.

ФЧХ – есть разность фаз выходного и входного гармонических сигналов.

АФЧХ можно представить в комплексной форме.

$$\Phi(j\omega) = R(\omega) + jI(\omega),$$

где $R(\omega)$ – вещественная частотная характеристика;

$I(\omega)$ – мнимая частотная характеристика.

2. Физический смысл АЧХ и ФЧХ?

Если входной сигнал АС гармонический, то и выходной сигнал – гармонический.

$$x(t) = A_x \sin(\omega t + \psi_x) = A_x e^{j(\psi_x + \omega t)},$$

$$y(t) = A_y \sin(\omega t + \psi_y) = A_y e^{j(\psi_y + \omega t)}$$

Зная АЧХ и ФЧХ на частоте входного сигнала $\omega = \omega_x$ легко определить параметры выходного сигнала:

$$A_y = A_x \Phi_a(\omega) \Big|_{\omega_x}; \quad \Psi_y = \Psi_x + \varphi(\omega) \Big|_{\omega_x}$$

Ошибка в этом случае имеет также гармонический вид:

$$e_x(t) = A_e \sin(\omega t + \psi_e)$$

$$A_e = A_x S_a(\omega) \Big|_{\omega_x}; \quad \Psi_e = \Psi_x + \varphi_e(\omega) \Big|_{\omega_x}$$

где $S_a(\omega) = |S(j\omega)|$ - АЧХ системы по ошибке,

$\varphi_e(\omega) = \arg S(j\omega)$ - ФЧХ системы по ошибке.

3. Правила действий над векторами?

При нахождении АЧХ и ФЧХ чаще всего пользуются следующими правилами действия над векторами:

а) $C(j\omega) = N(j\omega) \cdot K(j\omega).$

$$|C(j\omega)| = |N(j\omega) \cdot K(j\omega)| = |N(j\omega)| |K(j\omega)|;$$

$$\arg C(j\omega) = \arg [N(j\omega) \cdot K(j\omega)] = \arg [N(j\omega)] + \arg [K(j\omega)] =$$

$$= \operatorname{arctg} \frac{I_N(\omega)}{R_N(\omega)} + \operatorname{arctg} \frac{I_K(\omega)}{R_K(\omega)}.$$

Примечание: При нахождении arctg необходимо контролировать знаки вещественной и мнимой частей.

$$\text{б) } C(j\omega) = \frac{A(j\omega)}{B(j\omega)},$$

$$|C(j\omega)| = \frac{|A(j\omega)|}{|B(j\omega)|} = \frac{|A(j\omega)|}{|B(j\omega)|} = \frac{\sqrt{R_A^2 + I_A^2}}{\sqrt{R_B^2 + I_B^2}};$$

$$\arg C(j\omega) = \arg \frac{A(j\omega)}{B(j\omega)} = \arg A(j\omega) - \arg B(j\omega).$$

$$\text{в) } C(j\omega) = [A(j\omega)]^K,$$

$$|C(j\omega)| = |A(j\omega)|^K; \quad \arg C(j\omega) = \arg [A(j\omega)]^K = K \arg A(j\omega).$$

II. Решение задач.

Задача №1.

Для системы с передаточной функцией

$$\Phi(p) = \frac{K}{(Tp+1)p}.$$

Определить: $\Phi_a(\omega)$; $\varphi(\omega)$; $R(\omega)$; $I(\omega)$ и построить годограф.

Решение:

1. По известной передаточной функции определим АФЧХ, подставив в выражение для $\Phi(p)$ $p = j\omega$:

$$\Phi(j\omega) = \frac{K}{j\omega(Tj\omega+1)}.$$

2. Определим $R(\omega)$ и $I(\omega)$, для этого домножим числитель и знаменатель $\Phi(j\omega)$ на число, комплексно-сопряженное знаменателю:

$$\Phi(j\omega) = \frac{K(-T\omega^2 - j\omega)}{(-T\omega^2 + j\omega)(-T\omega^2 - j\omega)} = \Phi(j\omega) = \frac{-KT\omega^2}{T^2\omega^4 + \omega^2} - j \frac{K\omega}{T^2\omega^4 + \omega^2};$$

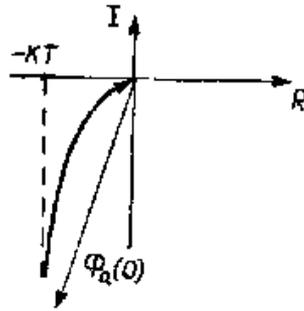
$$R(\omega) = -\frac{KT}{T^2\omega^2 + 1}; \quad I(\omega) = -\frac{K}{\omega(T^2\omega^2 + 1)}.$$

3. Определим $\Phi_a(\omega)$ и $\varphi(\omega)$:

$$\Phi_a(\omega) = \frac{|K|}{|j\omega(Tj\omega+1)|} = \frac{K}{\omega\sqrt{T^2\omega^2 + 1}}.$$

$$\varphi(\omega) = \arg K - \arg j\omega - \arg(Tj\omega + 1) = -\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} T\omega.$$

4. Строим АФЧХ:



$$\omega = 0 \rightarrow R(0) = -KT; \quad I(0) = -\infty.$$

$$\omega = \infty \rightarrow R(\infty) = 0; \quad I(\infty) = 0.$$

Задача №2.

Для автоматической системы с передаточной функцией

$$\Phi(p) = \frac{p^2}{(p+1)^2}$$

определить параметры выходного сигнала A_y , Ψ_y и построить с помощью ЛАХ -годограф, если входной сигнал имеет вид:

$$x(t) = 4 \sin(t + 0,4).$$

Решение:

1. Определим A_y и Ψ_y :

$$A_y = A_x \Phi_a(\omega_x); \quad A_y = 4; \quad \omega_x = 1, \quad c^{-1},$$

$$\Phi_a(\omega_x) = \left| \frac{(j\omega_x)^2}{(j\omega_x + 1)^2} \right| = \frac{\omega_x^2}{\omega_x^2 + 1} = \frac{1}{1+1} = 0,5.$$

$$A_y = 4 \cdot 0,5 = 2,$$

$$\psi_y = \psi_x + \varphi(\omega_x); \quad \psi_x = 0,4, \text{ рад},$$

$$\varphi(\omega_x) = \arg \Phi(j\omega_x) = \arg \frac{(j\omega_x)^2}{(j\omega_x + 1)^2} = 2 \arg(j\omega_x) - 2 \arg(j\omega_x + 1) =$$

$$= 2 \frac{\pi}{2} - 2 \arctg \omega_x = \pi - 2 \arctg 1 = \pi - 2 \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2};$$

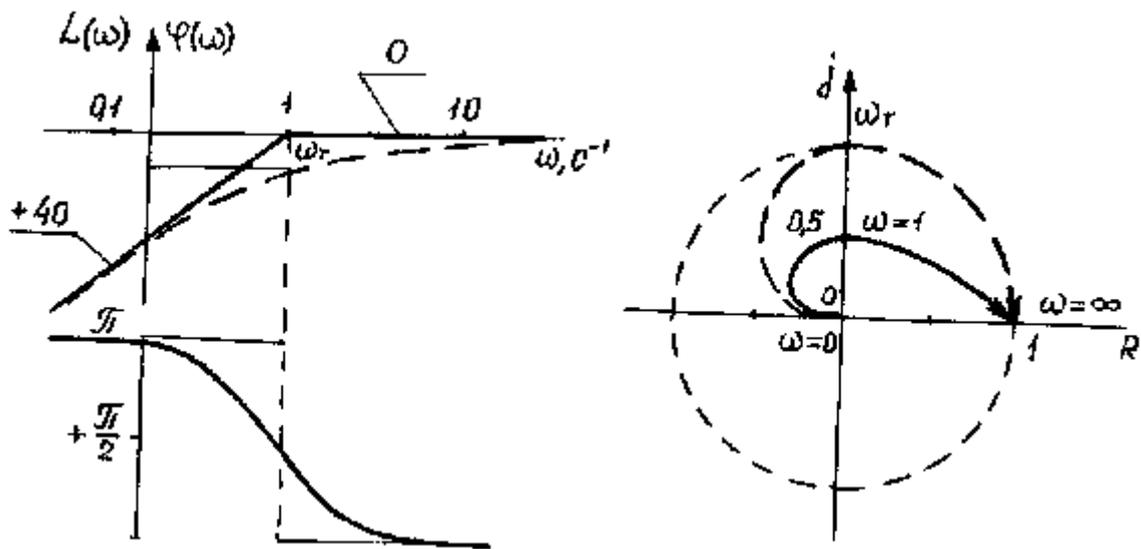
$$\psi_y = 0,4 + \frac{\pi}{2};$$

$$\text{Итак, } y(t) = 2 \sin(t + 0,4 + \frac{\pi}{2}) = -2 \cos(t + 0,4).$$

2. Используя ЛАХ для данной системы, методику построения которых мы рассмотрим на следующем занятии, построим АФЧХ:

ЛАХ для данной передаточной функции имеет вид:

$$L(\omega) = 20 \lg \Phi_a(\omega);$$



Если построить АФЧХ приближенно, то при

$$\omega = 0 \rightarrow L(0) = -\infty; \quad \Phi_a(0) = 0; \quad \varphi(0) = +\pi$$

$$\omega_T \rightarrow L(\omega_T) = 0; \quad \Phi_a(\omega_T) = 1; \quad \varphi(\omega_T) = +\pi/2.$$

И далее при $\omega = (\omega_T; \infty) \rightarrow L(\omega) = 0; W_a(\omega) = 1$, а $\varphi(\omega)$ от $\pi/2$ до 0 меняется равномерно, т.е. вектор $\Phi(j\omega)$ движется по окружности и в точке $\omega = \infty$, следовательно, $\varphi(\infty) = \pi/2$.

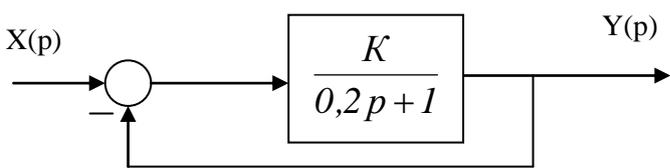
Проверим поведение годографа в точке $\omega = 1$:

$$\omega = 1 \rightarrow L(1) = 20 \lg \frac{1}{1+1} = 20 \lg 0,5 < 1; \quad \Phi_a(1) = 0,5; \quad \varphi(1) = \frac{\pi}{2}.$$

Следовательно, годограф данной системы будет иметь вид, показанный на рисунке.

Задача №3

Структурная схема АС имеет вид:



Определить значение коэффициента усиления K , необходимого для обеспечения сдвига фаз между входным и выходным сигналами $\varphi = -45^\circ$, если частота входного гармонического сигнала $f = 1,6$ Гц.

Решение:

Сдвиг фаз между входным и выходным сигналами есть ФЧХ системы:

$$\varphi(\omega_x) = \arg \Phi(j\omega_x),$$

где $\Phi(j\omega_x)$ – АФЧХ системы.

Но $\varphi(\omega_x) = -45^\circ$, тогда $-45^\circ = \arg \Phi(j\omega_x)$.

Следовательно, необходимо определить передаточную функцию замкнутой АС, её АФЧХ, в выражение для которой будет входить неизвестное K , а за-

тем определим численное значение требуемого коэффициента усиления разомкнутой системы.

1. Определим передаточную функцию и выражение для АФЧХ замкнутой АС:

$$\Phi(p) = \frac{W(p)}{1+W(p)}, \text{ или для единичной обратной связи:}$$

$$\Phi(p) = \frac{B(p)}{A(p)+B(p)} = \frac{K}{0,2p+K+1};$$

$$\text{Тогда } \Phi(j\omega) = \frac{K}{0,2j\omega+K+1};$$

2. Из выражения для ФЧХ на частоте входного сигнала $\omega_x = 2\pi f$ определим требуемый коэффициент усиления:

$$\omega_x = 2\pi \cdot 1,6 \approx 10, c^{-1};$$

$$\arg \Phi(j\omega_x) = -45^\circ; \quad -\arctg \frac{0,2\omega_x}{K+1} = 45^\circ;$$

$$\arctg \frac{2}{K+1} = 45^\circ; \quad \operatorname{tg} 45^\circ = \frac{2}{K+1}; \quad K = 1.$$

Задача №4.

Изобразить общий вид годографа для АС с передаточной функцией:

$$\Phi(p) = \frac{K}{Tp+1} e^{-\tau p} - \text{простейшая модель человека – оператора (летчика).}$$

Решение:

$$\text{Обозначим } W_1(p) = \frac{K}{Tp+1}; \quad W_2(p) = e^{-\tau p}$$

$$\text{Тогда } \Phi(p) = W_1(p) W_2(p);$$

$$\Phi(j\omega) = W_1(j\omega) W_2(j\omega);$$

$$\Phi_a(\omega) = |\Phi(j\omega)| = |W_1(j\omega)| |W_2(j\omega)| = W_{1a}(\omega) W_{2a}(\omega);$$

$$\varphi(\omega) = \arg \Phi(j\omega) = \arg[W_1(j\omega) W_2(j\omega)] = \arg W_1(j\omega) + \arg W_2(j\omega).$$

Определим все составляющие выражений для $\Phi_a(\omega)$ и $\varphi(\omega)$.

$$W_1(j\omega) = \frac{K}{Tj\omega+1}; \quad \left| W_1(j\omega) \right| = \frac{|K|}{|Tj\omega+1|} = \frac{K}{\sqrt{T^2\omega^2+1}};$$

$$\arg W_1(j\omega) = \arg K - \arg(Tj\omega+1) = -\arctg T\omega;$$

$$R_1(\omega) = \frac{K}{1+T^2\omega^2}; \quad I_1(\omega) = -\frac{K\omega T}{1+T^2\omega^2};$$

$$W_1(j\omega) = e^{-j\tau\omega}; \quad |W_2(j\omega)| = |e^{-j\tau\omega}| = |\cos \tau\omega - j\sin \tau\omega| = 1;$$

$$\arg W_2(j\omega) = -\arctg \frac{\sin \tau\omega}{\cos \tau\omega} = -\arctg \operatorname{tg} \tau\omega = -\tau\omega;$$

Тогда $\Phi_a(\omega) = W_{Ia}(\omega) = \frac{K}{\sqrt{T^2\omega^2 + 1}}$;

$\varphi(\omega) = -\text{arctg}T\omega - \tau\omega$;

Можно сформулировать следующее правило построения годографов для АС, содержащих в своем составе звено постоянного запаздывания $e^{-\tau\omega}$.

Правило:

Для того, чтобы построить годограф передаточной функции, содержащей звено $e^{-\tau\omega}$, необходимо:

- а) построить годограф части функции без этой составляющей;
- б) каждую строчку построенного годографа сдвинуть по фазе на величину $-\tau\omega$ (по часовой стрелке).

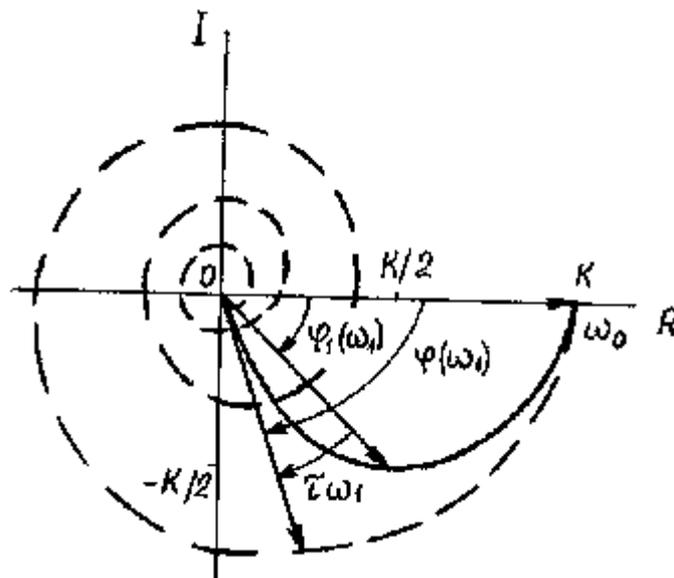
Поступим согласно этого правила:

$\omega_0 = 0; \rightarrow R(0) = K; I(0) = 0; \varphi_I(0) = 0.$

$\omega_1 = \frac{1}{T} \rightarrow R(\omega_1) = K/2; I(\omega_1) = -K/2; \varphi_I(\omega_1) = -45^\circ.$

$\omega \rightarrow \infty \rightarrow R(\infty) = 0; I(\infty) = 0; \varphi_I(\infty) = -90^\circ.$

Пример: В отклонение указателя положения в командно-пилотажном приборе и соответствующие движения рукоятки управления летчиком вперед и назад. Чем больше ω , тем больше запаздывание реакции летчика. И при больших частотах $\omega \rightarrow \infty$ отставание по фазе.



2.6. Частотные характеристики ЛСС. Частотные характеристики соединений звеньев.

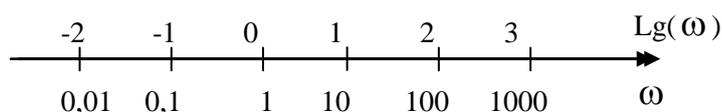
Частотные характеристики, построенные в логарифмическом масштабе, называются ЛЧХ.

Различают:

ЛАЧХ (ЛАХ) – $L(\omega) = 20 \lg \Phi a(\omega)$ построенные в логарифмическом

ЛФЧХ – $\varphi(\omega) = \arg \Phi(j\omega)$ масштабе частот.

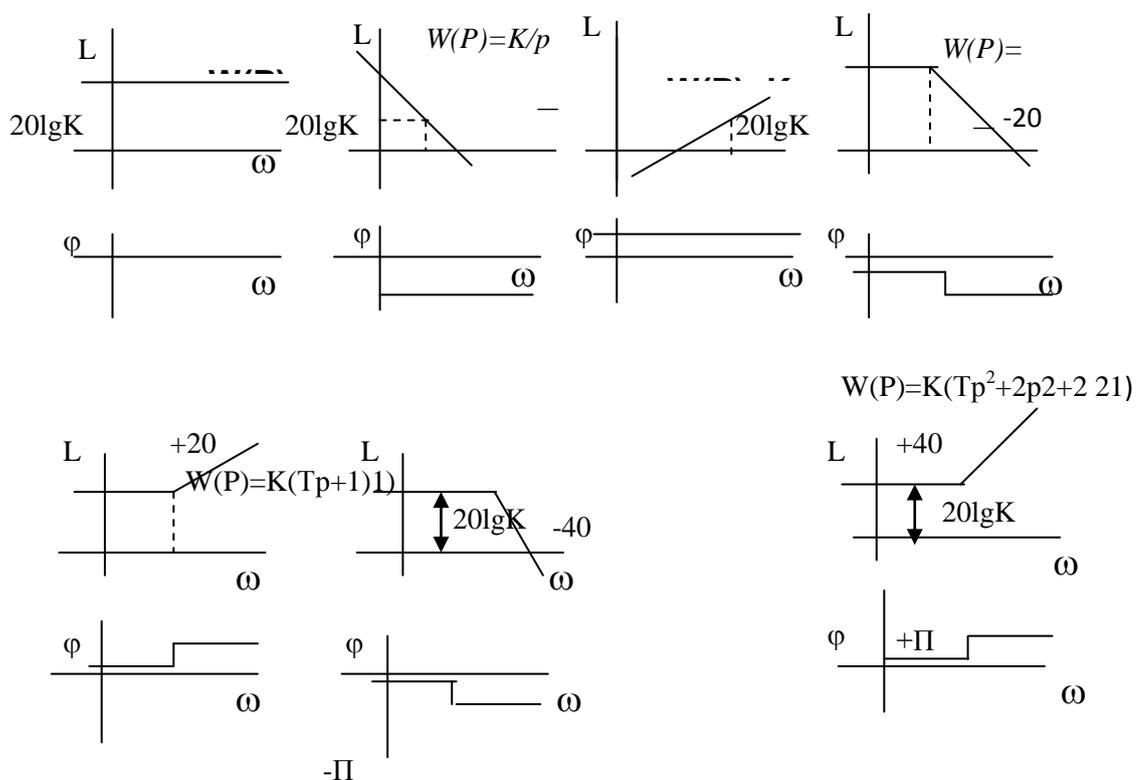
За единицу масштаба по оси частот принимают декаду, т.е. интервал на котором частота увеличивается в 10 раз, если десятичный логарифм от частоты увеличивается на 1.



ЛЧХ вводятся потому, что:

- во-первых позволяют существенно упростить получение и построение частотных характеристик сложных систем, состоящих из большого числа звеньев;
- во-вторых, позволяют на одном графике построить и анализировать частотные характеристики системы практически во всем диапазоне частот.

ЛЧХ элементарных звеньев имеют вид:



Т.к. передаточная функция любой АС есть удобно-рациональная функция переменной p . с вещественными коэффициентами, то, используя теорему Безу о разложении многочлена на элементарные множители, можно ее представить в виде:

$$\Phi(P) = \frac{B(P)}{A(P)} = \frac{K \cdot P^d \prod_{i=1}^m (T_i p + 1) \prod_{z=1}^j (T_z^2 p^2 + 2T_z \xi_z p + 1)}{P^i \prod_{l=1}^k (T_l p + 1) \prod_{c=1}^f (T_c^2 p^2 + 2T_c \xi_c p + 1)} = W_1 \cdot W_2 \cdots W_f, \quad (1)$$

где j – число элементарных звеньев.

Используя свойства логарифмов можно записать:

$$L(\omega) = 20 \lg \Phi a(\omega) = 20 \lg [W a_1 \cdot W a_2 \cdots W a_j] = L_1(\omega) + L_2(\omega) + \cdots + L_j(\omega),$$

$$\varphi(\omega) = \varphi_1(\omega) + \varphi_2(\omega) + \cdots + \varphi_j(\omega).$$

Следовательно, для построения ЛЧХ сложных систем необходимо выделить все элементарные звенья, входящие в ПФ системы, построить и графически сложить их частотные характеристики.

II. Порядок решения задач.

1. Передаточная функция системы приводится к стандартному виду [1].
2. Определяются частоты сопряжения элементарных звеньев и располагаются в порядке их возрастания.

$$\omega_1 = \frac{1}{T_1}; \quad \omega_2 = \frac{1}{T_2};$$

3. Строятся суммарные ЛАЧХ и ЛФЧХ.

Для построения ЛАХ через точку с координатами $\omega = 1$, $L(\omega) = 20 \lg K$ проводят прямую с наклоном $20(d-i)$ дб/дк до первой частоты сопряжения. В соответствии с тем к какому звену относится эта частота, осуществляется изменение наклона прямой на ± 20 или ± 40 дб/дк. Если звеньев с такой частотой K штук, то наклон изменяется на $\pm 20 \cdot K$ или $\pm 40 \cdot K$ дб/дк. Далее эта новая прямая продолжается до следующей частоты сопряжения, где вновь изменяется ее наклон. Эта операция продолжается до тех пор, пока не будут пройдены все имеющиеся частоты сопряжения.

Для построения ЛФЧХ проводят горизонтальную прямую с

$$\varphi(\omega) = (d-i) \cdot \pi/2$$

до первой частоты сопряжения, где ФЧХ скачком изменяется на величину $\pm \pi/2 \cdot K$ или $\pm \pi \cdot K$ соответственно для звеньев первого и второго порядков. Знак "+" соответствует форсирующим звеньям, а "-" инерционным.

Если в $\Phi(p)$ присутствует звено e^{pT} , то ЛАХ не меняется, а $\varphi(\omega)$ с $\uparrow \omega$ растет до $-\infty$.

Проверка: $m-n$ $\begin{cases} \nearrow h(\omega) \rightarrow (m-n)20 \\ \searrow \varphi(\omega) \rightarrow (m-n) \pi/2 \end{cases}$

V. Решение задач.

Задача №1. Для АС с передаточной функцией

$$\Phi(p) = \frac{10p + 1}{p^2(p + 10)}$$

построить ЛЧХ и общий вид АФЧХ.

Решение:

1. Приводим $\Phi(p)$ к стандартному виду [1]

$$\Phi(p) = \frac{0,1(10p + 1)}{p^2(0,1 + 1)}$$

2. Определяем частоты сопряжения и располагаем их в порядке возрастания

$$\omega_1 = \frac{1}{10} = 0,1c^{-1}; \quad \omega_2 = \frac{1}{0,1} = 10c^{-1}.$$

3. Строим суммарную ЛАЧХ и ЛФЧХ.

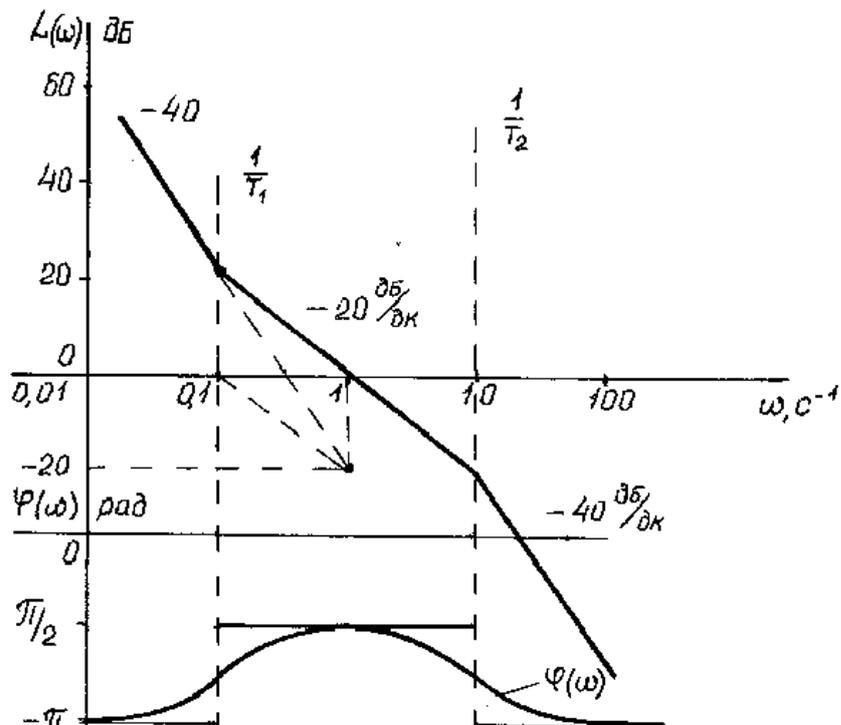
Определяем наклон низкочастотной асимптоты ЛАЧХ и точку с координатами $\omega=1$ и $20 \lg K$

$$20(n-\alpha) = 20(0-2) = -40 \text{ дБ/дК},$$

$$L(\omega)|_{\omega=1} = 20 \lg K = 20 \lg 0,1 = -20 \text{ дБ}.$$

Определим положение низкочастотной асимптоты $\varphi(\omega)$:

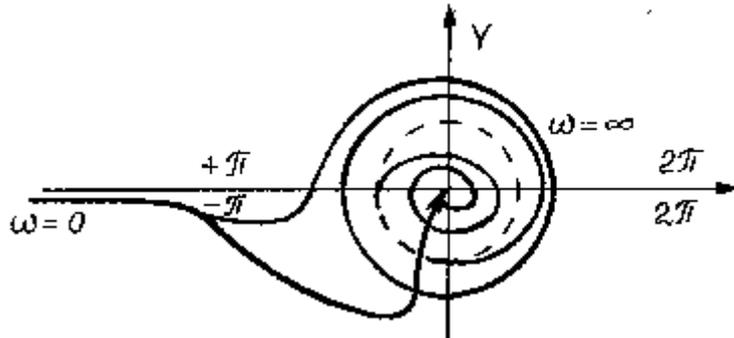
$$\varphi_n(\omega) = (n-\alpha) \cdot \pi/2 = (0-2) \cdot \pi/2 = -\pi, \text{ рад}$$



4. Строим приближенную АФЧХ (по виду ЛАХ).

При: $\omega \rightarrow 0, \quad \varphi(\omega) \rightarrow \pi, \quad L(\omega) \rightarrow \infty, \quad W_f(\omega) \rightarrow \infty,$

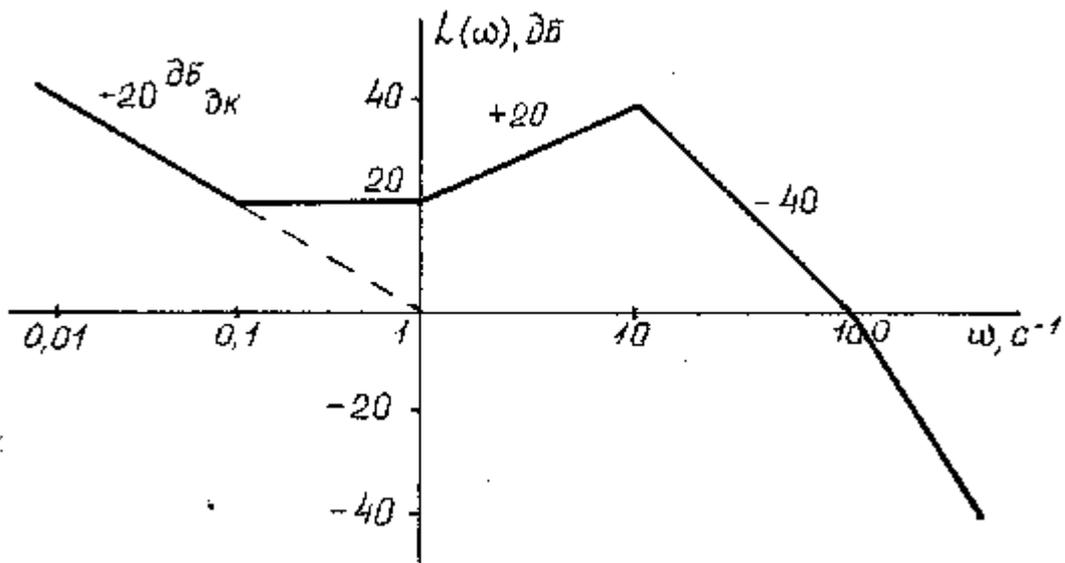
$$\begin{aligned} \omega \uparrow, \quad \varphi(\omega) \uparrow, \quad L(\omega) \downarrow, \quad W_f(\omega) \downarrow, \\ \omega \rightarrow \infty, \quad \varphi(\omega) \rightarrow -\pi, \quad L(\omega) \rightarrow \infty, \quad W_a(\omega) \rightarrow 0, \\ L(\omega) = 0 \rightarrow W_a(\omega) = 1 \rightarrow \varphi = -\frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$



Добавить $e^{-\varphi}$ и решить задачу.

Задача №2.

Записать выражение для $\Phi(p)$ системы ЛАХ которой имеет вид (звеньев второго порядка нет):



Решение:

1. Определяется число интегрирующих и дифференцирующих звеньев и общий коэффициент усиления K

$$20(d-i) = -20 \text{ dB/dk} \Rightarrow d=0; I=1 - \text{интегрирующее звено.}$$

На частоте $\omega=1$ низкочастотная асимптота ЛАЧХ имеет значение

$$L(1) = 20 \lg K \pm 20 \lg 1 = 0 \quad (\text{для интегрирующих и дифференцирующих звеньев})$$

Откуда $K=1$.

2. Определяем постоянные времени звеньев из частот сопряжения

$$\omega_1=0,1 \Rightarrow T_1=\frac{1}{\omega_1}=10,$$

$$\omega_2=1 \Rightarrow T_2=1,$$

$$\omega_3=10 \Rightarrow T_3=0,1$$

$$\omega_4=100 \Rightarrow T_4=0,01.$$

3. По изменению наклона на частотах сопряжения определяются передаточные функции элементарных звеньев системы

$$-20 \rightarrow 0 \Rightarrow 10p+1,$$

$$0 \rightarrow +20 \Rightarrow p+1,$$

$$+20 \rightarrow -40 \Rightarrow \frac{1}{(0,1p+1)^3},$$

$$-40 \rightarrow -60 \Rightarrow \frac{1}{0,01p+1}.$$

4. Записывается общая передаточная функция системы

$$\Phi(p) = \frac{1(10p+1)(p+1)}{p(0,1p+1)^3(0,01p+1)}.$$

2.7. Устойчивость ЛСС.

Оценка устойчивости непрерывных систем.

1. Какие системы называются устойчивыми?

Под устойчивостью обычно понимают способность АС после прекращения действия на нее внешних возмущений возвращаться в исходное положение.

Выходной сигнал линейной АС: $y(t) = y_B(t) + y_C(t)$.

Для нормальной работоспособности АС необходимо, чтобы свободная составляющая выходного сигнала $y_C(t)$ стремилась к нулю при увеличении времени наблюдения процесса. Системы, удовлетворяющие этому требованию, называются устойчивыми.

2. Необходимое и достаточное условие устойчивости непрерывных АС.

Собственное движение системы можно описать набором экспонент:

$$y_C(t) = \sum_{i=1}^n C_i e^{p_i t},$$

где p_i – корни характеристического полинома системы, C_i – постоянные коэффициенты.

$y_C(t)$ будет уменьшаться, если будет стремиться к нулю каждая экспоненциальная составляющая, а это полностью определяется знаком соответствующего корня p_i .

Необходимым и достаточным математическим условием устойчивости АС является отрицательность вещественных частей корней характеристическо-

го полинома, т.е. расположение корней слева от мнимой оси на комплексной плоскости.

Если хотя бы один из корней лежит на мнимой оси, а все остальные корни лежат в левой полуплоскости, то говорят, что АС находится на границе устойчивости. В этом случае устойчивость системы можно обеспечить сколь угодно малым изменением параметров АС.

Система, у которой хотя бы один из корней характеристического уравнения имеет положительную вещественную часть, называется неустойчивой.

Если корни известны, то вопрос устойчивости АС решается довольно просто. Однако определение корней является трудоемким процессом. Поэтому для оценки устойчивости были разработаны критерии, позволяющие судить об устойчивости системы по коэффициентам характеристического уравнения, не решая его.

3. Необходимое условие устойчивости. Критерий Гурвица.

Необходимым условием устойчивости АС является положительность всех коэффициентов характеристического полинома.

Среди алгебраических критериев наибольшее распространение получил критерий Гурвица. Его применение связано с построением матрица размером $n \times n$ из коэффициентов характеристического полинома и определением знаков ее диагональных миноров

$$R = \begin{pmatrix} a_0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_2 & a_1 & a_0 & 0 & \cdot & \cdot \\ a_4 & a_3 & a_2 & 0 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 0 & a_n & a_{n-1} \end{pmatrix} \quad \left. \vphantom{\begin{pmatrix} a_0 \\ a_2 \\ a_4 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix}} \right\} n$$

Матрица Гурвица составляется следующим образом

По диагонали от верхнего левого до нижнего правого угла выписываются все коэффициенты по порядку от a_0 до a_{n-1} . Каждая строка дополняется справа коэффициентами с убывающими индексами, слева – с возрастающими. Оставшиеся пустые места заполняются нулями. Из матрицы R в пересечении последовательно вычерчиваемых крайних правых столбцов и нижних строк получают n подматриц

$$\det R_1 = a_{n-1}; \quad \det R_2 = a_{n-2}a_{n-1} - a_n a_{n-3}; \quad \det R = a_n R_{n-1}.$$

Критерий устойчивости Гурвица :

Вещественная часть корней характеристического уравнения отрицательна только тогда, когда все \det подматрицы матрицы Гурвица больше нуля:

$$\det R_1 > 0; \quad \det R_2 > 0; \quad \det R > 0.$$

Для уравнений первого и второго порядка необходимое условие устойчивости является и достаточным, т.е. положительность всех коэффициентов a_i .

Условие устойчивости для систем третьего порядка впервые получил русский ученый И.А. Вышнеградский. Система третьего порядка будет устойчивой, если:

а) коэффициент $a_3 > 0$;

б) произведение "средних" коэффициентов больше произведения "крайних"

$$a_1 a_2 > a_0 a_3.$$

Для системы четвертого порядка устойчивость определяется положительностью $\det R_3$ при условии $a_4 > 0$:

$$\det R_3 = a_1(a_2 a_3 - a_1 a_4) - a_0 a_3^2 > 0.$$

Условие нахождения АС на границе устойчивости:

$$\Delta = \det R = a_0 \|R_{n-1}\| = 0.$$

Для замкнутых АС как правило $a_0 \neq 0$, тогда это условие трансформируется

$$\det R_{n-1} = 0.$$

Это равенство используется для определения критического значения параметров АС.

4. Частотный критерий устойчивости Михайлова.

В 1936 советским ученым А.В. Михайловым, для исследования на устойчивость АС высокого порядка, был предложен частотный критерий устойчивости.

АС устойчива только тогда, когда угол поворота радиус-вектора функции Михайлова $A(j\omega)$ при изменении частоты от 0 до ∞ равен $n \cdot \frac{\pi}{2}$, а модуль его нигде не обращался в 0. Где n – порядок характеристического полинома замкнутой АС

$$\Delta \varphi_A = \arg A(j\infty) - \arg A(j0) = n \cdot \pi / 2,$$

где $A(j\omega)$ – функция Михайлова, получаемая заменой p на $j\omega$ в характеристическом полиноме $A(p)$.

Для устойчивых АС кривая Михайлова (логограф $A(j\omega)$) всегда имеет плавную спиралевидную форму, причем конец ее уходит в бесконечность в том квадранте комплексной плоскости, номер которого равен степени характеристического полинома.

Следствие: корни мнимой и вещественной частей функции Михайлова, расположенные в порядке возрастания, чередуются между собой, а их число равно порядку системы

$$A(j\omega) = X(\omega) + jY(\omega).$$

При наличии нулевого корня в характеристическом уравнении ($a_0 = 0$) кривая Михайлова при $\omega = 0$ выходит из начала координат. При наличии пары мнимых корней $\pm j\omega_0$, вектор $A(j\omega) = 0$, т.е. кривая проходит через начало координат при $\omega = \omega_0$, а $X(\omega_0) = 0$, $Y(\omega_0) = 0$.

С помощью этих соотношений можно определить критическое значение параметров АС. В этом случае одно из равенств позволит выразить частоту ω_0 ,

при которой годограф проходит через начало координат, а второе – критическое значение параметра.

Решение задач.

Задача № 1.

Оценить устойчивость продольного движения самолета, если характеристическое уравнение имеет вид:

$$0,7p^3 + 20p^2 + p + 0,1 = 0.$$

Решение:

1. Необходимое условие выполняется

$$\forall i: a_i > 0; \quad I = 0, 1, 2, 3.$$

2. Т.к. система третьего порядка, то воспользуемся правилом Вышнеградского:

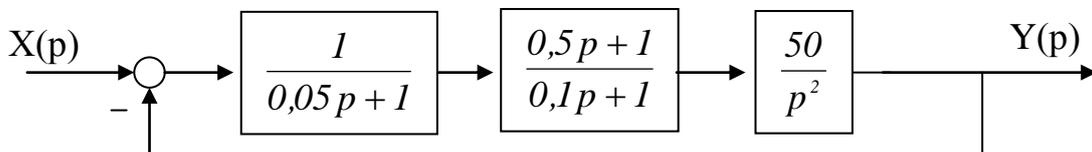
$$a_1 a_2 > a_0 a_3;$$

$$1 \cdot 20 - 0,1 \cdot 0,7 > 0$$

Вывод: АС – устойчива.

Задача № 2.

Структурная схема АС имеет вид:



С помощью критерия Гурвица исследовать устойчивость замкнутой АС.

Решение:

1. Чтобы исследовать устойчивость необходимо получить характеристический полином системы

$$\Phi(p) = \frac{W(p)}{1 + W(p)} = \frac{B(p)}{Q(p) + B(p)};$$

$$W(p) = \frac{50(0,5p + 1)}{(0,05p + 1)(0,1p + 1)p^2} = \frac{25p + 50}{0,005p^4 + 0,15p^3 + p^2};$$

$$\Phi(p) = \frac{25p + 50}{0,005p^4 + 0,15p^3 + p^2 + 25p + 50} = \frac{B(p)}{A(p)};$$

$$A(p) = 0,005p^4 + 0,15p^3 + p^2 + 25p + 50.$$

2. Проверяем: $a_n \neq 0$.

3. Составим матрицу Гурвица из коэффициентов характеристического полинома:

$$R = \begin{array}{c} \left\| \begin{array}{cccc} 50 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 25 & 50 & 0 \\ 0,005 & 0,15 & 1 & 25 \\ 0 & 0 & 0,005 & 0,15 \end{array} \right\| \begin{array}{l} \rightarrow R_3 \\ \rightarrow R_2 \\ \rightarrow R_1 \end{array} \end{array}$$

5. Вычислим определители подматриц R_3 матрицы Гурвица R :

$$\Delta_1 = \det R_1 = |0,15| > 0;$$

$$\Delta_2 = \det R_2 = \begin{vmatrix} 1 & 25 \\ 0,005 & 0,15 \end{vmatrix} = 1 \cdot 0,15 - 0,005 \cdot 25 > 0,$$

$$\Delta_3 = \det R_3 = \begin{vmatrix} 25 & 50 & 0 \\ 0,15 & 1 & 25 \\ 0 & 0,005 & 0,15 \end{vmatrix} = 25 \cdot 1 \cdot 0,15 + 0 \cdot 0,005 \cdot 0,15 + 0 \cdot 50 \cdot 25 - 0 \cdot 1 \cdot 0 - 0,15 \cdot 25 \cdot 0,005 = 25(1 \cdot 0,15 - 25 \cdot 0,005) - 50 \cdot 0,15 \cdot 0,15 = -0,5 < 0.$$

Вывод: Т.к. определитель одной из подматриц меньше нуля, то АС неустойчива.

Задача №3

Передаточная функция разомкнутой системы имеет вид:

$$W(p) = \frac{0,1K(p+1)}{p(5p+1)(3p+1)}.$$

Используя критерий Гурвица найти критическое значение коэффициента усиления разомкнутой системы.

1. Определим передаточную функцию замкнутой АС:

$$\Phi(p) = \frac{W(p)}{1+W(p)} = \frac{B(p)}{Q(p)+B(p)} = \frac{B(p)}{A(p)};$$

$$W(p) = \frac{0,1K(p+1)}{p(5p+1)(3p+1)+0,1K(p+1)} = \frac{0,1Kp+0,1K}{15p^3+8p^2+(1+0,1K)p+0,1K};$$

$$A(p) = 15p^3+8p^2+(1+0,1K)p+0,1K.$$

2. Критический коэффициент усиления соответствует нахождению АС на границе устойчивости.

Анализируя соответствие коэффициентов $A(p)$ необходимому условию устойчивости можно видеть, что с одной стороны

$$K_{кр} = 0, \text{ т.к. } \forall_i a_i > (i=0 \div 3), \text{ при } k > 0.$$

Учитывая, что $a_0 \neq 0$, воспользовавшись критерием Гурвица для АС находящейся на границе устойчивости.

$$\det R = a_0 |R_{n-1}| = 0 \text{ можно записать:}$$

$$\det R_{n-1} = 0.$$

Для системы третьего порядка $n=3$.

Тогда определим R_2^{\wedge} ($a_3 > 0$):

$$R = \begin{array}{ccc|c} 0,1K & 0 & 0 & \rightarrow R_2 \\ 8 & 1+0,1K & 0,1K & \\ 0 & 15 & 8 & \rightarrow R_1 \end{array}$$

Из условия $\det R_2 = 0$ определим $K_{кр}$:

$$(1+0,1K)8 - 15 \cdot 0,1K = 0; \quad (1+0,1K)8 = 15 \cdot 0,1K.$$

Откуда $K_{кр} \approx 11,43$.

Вывод: АС будет устойчива при коэффициенте усиления разомкнутой системы

$$0 < K < 11,43.$$

Методика оценки устойчивости по критерию Гурвица следующая:

1. Проверка выполнения необходимого условия устойчивости по коэффициентам $A(p)$.
2. Составление матрицы Гурвица и коэффициентов $A(p)$ замкнутой системы.
3. Определяем знаки определителей подматриц матрицы Гурвица.
4. Если хотя бы один из определителей отрицателен – система неустойчива. В противном случае – устойчива.

Задача №4.

С помощью критерия Михайлова оценить устойчивость АС, характеристическое уравнение которой имеет вид:

$$0,0014p^4 + 0,022p^3 + 0,7p^2 + 1,6p + 5 = 0.$$

Решение:

1. Проверяем выполнение необходимого условия:

$$\forall_i a_i > 0 \quad (i=0-4).$$

$$2. \Delta\varphi = n \cdot \frac{\pi}{2} = 4 \cdot \frac{\pi}{2} = 2\pi.$$

3. Подставляем в любую часть уравнения вместо комплексной переменной p , комплексную переменную $j\omega$. Полученную таким образом вектор-функцию Михайлова запишем в виде:

$$A(j\omega) = X(\omega) + jY(\omega),$$

$$A(j\omega) = 0,0014\omega^4 - j0,022\omega^3 - 0,7\omega^2 + j1,6\omega + 5,$$

$$A(j\omega) = (0,0014\omega^4 - 0,7\omega^2 + 5) + j(1,6\omega - 0,022\omega^3),$$

где $X(\omega) = 5 - 0,7\omega^2 + 0,0014\omega^4$, $Y(\omega) = 1,6\omega - 0,022\omega^3$.

4. Задавая различные значения частоты ω построим годограф вектор-функции Михайлова:

ω	0	1	3	5	10	30	∞
$X(\omega)$	5	4,3	-1,2	-11,6	-51	508	∞
$Y(\omega)$	0	1,6	4,2	5,25	-6	-546	$-\infty$

Вывод: Т.к. исходная АС 4-го порядка и годограф вектор-функции Михайлова проходит в положительном направлении 4 квадранта ($n \cdot \pi/2$), то условия критерия Михайлова выполняются. Система устойчива.

Задача №5

Определить устойчивость АС с характеристическим уравнением

$$p^5 + p^4 + 3p^3 + 2p^2 + p + 0,5 = 0.$$

Решение:

1. Функция Михайлова

$$\begin{aligned} A(j\omega) &= (j\omega)^5 + (j\omega)^4 + 3(j\omega)^3 + 2(j\omega)^2 + (j\omega) + 0,5 = j\omega^5 + \omega^4 - j3\omega^3 - j\omega + 0,5 = \\ &= \omega^4 - 2\omega^2 + 0,5 + j(\omega^5 - 3\omega^3 + \omega). \end{aligned}$$

2. Определяем корни действительной и мнимой частей $A(j\omega)$.

$$\begin{aligned} \omega^4 - 2\omega^2 + 0,5 &= 0, & x_{1,2} &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \\ \omega^2 &= \frac{2 \pm \sqrt{4 - 2}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{2}}{2} \approx \begin{matrix} 1,7 \\ 0,3 \end{matrix}, & x_{1,2} &= -\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4} - c}, \\ \omega_1 &= \sqrt{1,7} = 1,2, & x_1 \cdot x_2 &= c; \quad x_1 + x_2 = -b, \\ \omega_2 &= \sqrt{0,3} = 0,52, & X(\omega_{1,2}) &= 0. \end{aligned}$$

Из физических соображений $\omega_1 = -1,2$ и $\omega_2 = -0,52$ не учитываем, т.к. отрицательных частот не существует

$$\begin{aligned} \omega^5 - 3\omega^3 + \omega &= 0, \\ \omega^3 &= 0, \\ \omega^4 - 3\omega^2 + 1 &= 0; \quad \omega^2 = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} = \begin{matrix} 2 \\ 6 \end{matrix} \end{aligned}$$

$$\omega_4 = 1,6; \quad \omega_6 = 0,64, \quad Y(\omega_{3,4,5}) = 0.$$

3. Располагаем корни в порядке возрастания

$$\begin{matrix} \omega_3 = 0, & \omega_2 = 0,52, & \omega_5 = 0,64, & \omega_1 = 1,2; & \omega_4 = 1,6. \\ Y_1 & X_1 & Y_2 & X_2 & Y_3 \end{matrix}$$

4. Корни чередуются – система устойчива.

Итак, методика оценки устойчивости системы по следствию критерия Михайлова следующая:

а) определяем для замкнутой АС функцию Михайлова

$$A(j\omega) = X(\omega) + jY(\omega).$$

б) вычисляем корни вещественной и мнимой составляющих

$$X(\omega) = 0; \quad Y(\omega) = 0$$

и располагаем их в порядке возрастания их значений.

в) анализируем порядок следования корней вещественной и мнимой частей.

Если они чередуются между собой, т.е. вектор-функция Михайлова последовательно пересекает координатные оси, - система устойчива. В противном случае – неустойчива.

2.8. Устойчивость ЛСС. Оценка устойчивости непрерывных систем с помощью критерия Найквиста.

1. Формулировка частотного критерия Найквиста?

Для того, чтобы АС была устойчива необходимо и достаточно чтобы полное приращение аргумента функции Найквиста $N(j\omega) = 1 + W(j\omega)$ при изменении частоты от 0 до ∞ было равно:

$$\Delta\varphi_N = \frac{\pi}{2}(2\mu_p + \nu_p), \text{ где}$$

μ_p и ν_p - количество корней характеристического уравнения разомкнутой АС с положительной и нулевой вещественными частями.

$W(p) = \frac{B(p)}{S(p)}$ - передаточная функция разомкнутой системы.

$\Phi(p) = \frac{W(p)}{1+W(p)} = \frac{B(p)}{S(p)+B(p)} = \frac{B(p)}{A(p)}$ - передаточная функция замкнутой АС.

$$N(j\omega) = 1 + W(j\omega) = \frac{A(j\omega)}{S(j\omega)} - \text{функция Найквиста.}$$

Т.о. частотный критерий Найквиста характеризуется тем, что он позволяет судить об устойчивости замкнутой АС по виду АФЧХ разомкнутой АС, которая может быть неустойчива или нейтральна.

Применение критерия Найквиста состоит в построении годографа вектора $W(j\omega)$, т.е. АФЧХ разомкнутой системы и поворот вектора $N(j\omega) = 1 + W(j\omega)$ на угол φ_N отсчитывается относительно точки $(-1; j0)$.

2. Сформулировать первое следствие критерия Найквиста.

Замкнутая АС устойчива, если годограф АФЧХ устойчивой или нейтральной разомкнутой системы не охватывает точку с координатами $(-1; j0)$.

В этом случае, если годограф АФЧХ разомкнутой системы несколько раз пересекает ось $(0; \infty)$, то используется ещё одна формулировка следствия:

Замкнутая АС устойчива, если число частот ω_p на которых $W_a(\omega_p) > 1$ равно нулю или четное.

Если разомкнутый контур содержит ν интегрирующих звеньев, но структурный признак неустойчивости не выполняется, то АФЧХ разомкнутой системы необходимо дополнить дугой бесконечного радиуса от $+R$ с центральным углом $\nu(-\frac{\pi}{2})$ и далее использовать формулировку критерия.

Если годограф АФЧХ $W(j\omega)$ проходит через точку с координатами $(-1; j0)$, т.е. выполняется условие $W_a(\omega_\pi)=1$, замкнутая АС находится на границе устойчивости.

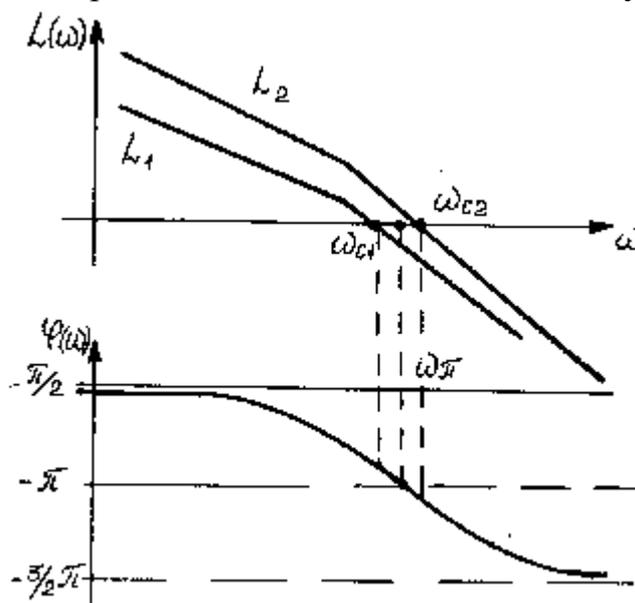
3. Второе следствие критерия Найквиста («логарифмический» критерий Найквиста)?

Для анализа устойчивости АС по критерию Найквиста на практике, как правило, используют ЛЧХ разомкнутой системы, построение которых значительно проще построения годографа $W(j\omega)$.

Замкнутая АС устойчива, когда она устойчива или нейтральна в разомкнутом состоянии и выполняется условие

$$\omega_c < \omega_\pi.$$

На практике для определения частот ω_c и ω_π используют ЛЧХ:



АС, ЛЧХ разомкнутой системы которой L_1 – устойчива.

Для устойчивых АС:

$$L(\omega_\pi) = 20 \lg W_a(\omega_\pi) < 0;$$

$$\varphi(\omega_\pi) > -\pi.$$

В общем случае, если ω_π несколько, то “логарифмический” критерий Найквиста можно сформулировать так:

Замкнутая АС устойчива, если число частот ω_π , на которых $L(\omega_\pi) > 0$, равно нулю или четное. ($\varphi(\omega)$ тоже дополняется).

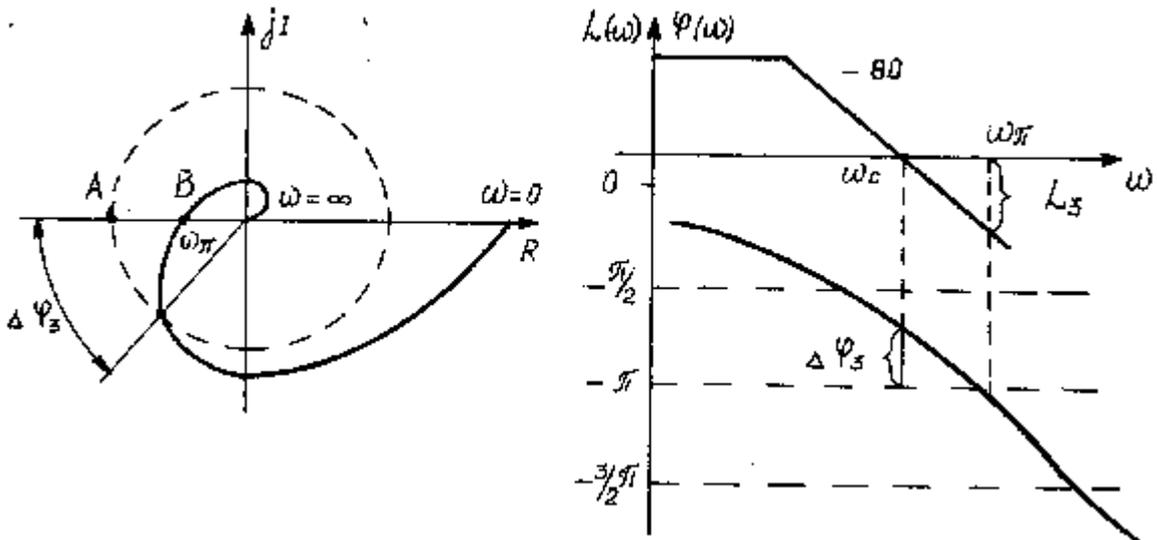
4. Запас устойчивости?

При проектировании АС необходимо определить и предусмотреть некоторый запас устойчивости, характеризующий степень удаленности от границ устойчивости.

Положение АС на границе устойчивости определяется двумя условиями:

$$W_a(\omega) = 1; \arg W(j\omega) = -\pi,$$

Т.е. если
$$\begin{cases} AB = 0 \\ \Delta\varphi_3 = 0 \end{cases}$$



Чем больше отрезок АВ или угол $\Delta\varphi_3$, тем дальше АС находится от границы устойчивости. Т.о. Величину отрезка АВ и угла $\Delta\varphi_3$ можно рассматривать как запас устойчивости.

Запасом устойчивости по амплитуде ΔL_3 называется величина в децибелах, на которую можно увеличить коэффициент усиления разомкнутой системы, чтобы вывести замкнутую АС на границу устойчивости:

$$\Delta L_3 = 20 \lg |W_a(\omega_\pi)| = |L(\omega_\pi)|;$$

Запасом устойчивости по фазе $\Delta\varphi_3$ называется угол, на который необходимо повернуть АФЧХ разомкнутой АС, чтобы замкнутая система оказалась на границе устойчивости:

$$\Delta\varphi_3 = \pi + \varphi(\omega_c).$$

Для авиационных АС рекомендуется обеспечивать:

$$\Delta L_3 \geq 6 \text{ дб}; \Delta\varphi_3 \geq \pi/6.$$

Критерий устойчивости Найквиста целесообразно применять в тех случаях, когда разомкнутый контур АС представляет собой последовательное соединение простых звеньев. В этом случае легко определяются корни характеристического полинома разомкнутой системы и величина $\Delta\varphi_N$. В противном случае рекомендуется использовать критерий устойчивости Михайлова.

Задача №1.

Определить устойчивость замкнутой АС по критерию Найквиста, если её передаточная функция в разомкнутом состоянии имеет вид:

$$W(p) = \frac{20(0,1p + 1)}{p(0,05p - 1)}.$$

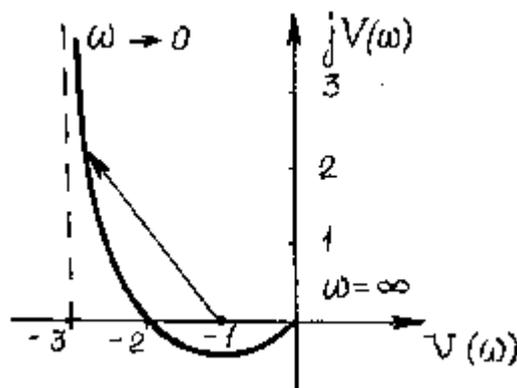
Решение:

Как следует из вида передаточной функции, характеристический полином разомкнутой АС имеет один нулевой корень ($\nu_p=1$) и один корень в правой полуплоскости ($\mu_p=1$). Разомкнутая система неустойчива.

Строим АФЧХ разомкнутой системы:

$$W(j\omega) = \frac{20(0,1j\omega + 1)}{j\omega(0,05j\omega - 1)} = \frac{20(0,1j\omega + 1)(-0,05\omega^2 + j\omega)}{\omega^2(0,0025\omega^2 + 1)} = \frac{-3}{(0,0025\omega^2 + 1)} + j \frac{20 - 0,1\omega^2}{\omega(0,0025\omega^2 + 1)} = U(\omega) + jV(\omega).$$

ω	0	5	10	20	100	∞
$U(\omega)$	-3	-2,82	-2,4	-1,5	-0,115	0
$V(\omega)$	$+\infty$	+3,29	+0,8	-0,5	-0,377	0



Для устойчивости АС:

$$\Delta\varphi_N = \Delta \arg N(j\omega) = \pi/2(2\mu_p + \nu_p).$$

Вычислим:

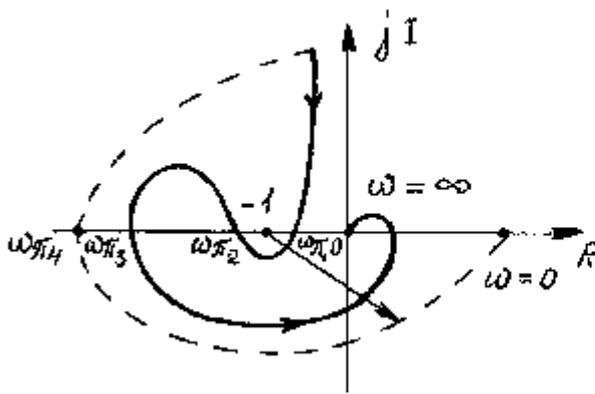
$$\Delta\varphi_N = \pi/2(2 \cdot 1 + 1) = 3/2\pi.$$

По графику получаем :

$\Delta\varphi_N = 3/2\pi$, т.е. замкнутая АС устойчива.

Задача №2.

Годограф АФЧХ разомкнутой системы имеет вид:



а)

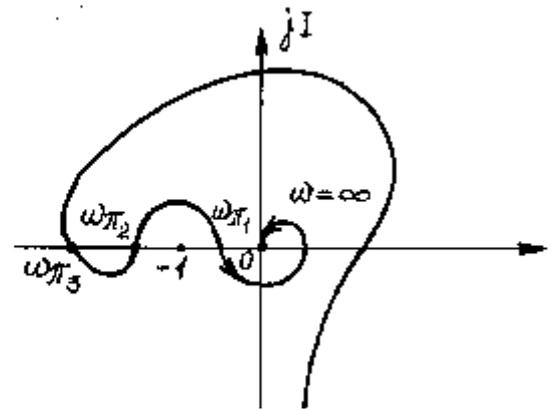
по критерию:

$$\Delta\varphi_N = \pi/2(2\mu_p + \nu_p) = 3/2\pi$$

имеем:

$$\Delta\varphi_N = -2\pi;$$

$$\begin{array}{l|l} \mu_p = 0 & \text{разомкн.} \\ \nu_p = 3 & \text{АС нейтр.} \end{array}$$



б)

$$\begin{array}{l|l} \mu_p = 2 & \text{разомкнутая} \\ \nu_p = 1 & \text{АС неустойчива,} \end{array}$$

По первому следствию критерия Найквиста оценить устойчивость разомкнутой системы.

Решение:

а) - годограф $W(j\omega)$ охватывает точку с координатами $(-1; j0)$, система неустойчива.

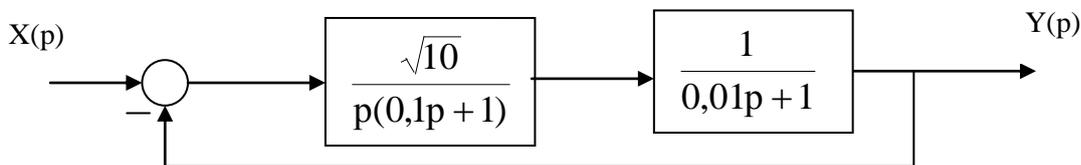
-частота ω_π на которых $W_a(\omega_\pi) > 1$ три, т.е. нечетное число – система неустойчива;

б) 1-е следствие не работает.

Задача №3.

Оценить устойчивость замкнутой АС и определить запасы устойчивости:

$\Delta L_3, \Delta\varphi_3$.



Решение:

Воспользуемся вторым следствием критерия Найквиста, т.к. $\mu_p = 0, \nu_p = 1$.

1. Определим выражение для передаточной функции разомкнутой системы:

$$W(p) = \frac{\sqrt{10}}{p(0,1p+1)(0,01p+1)}$$

Разомкнутая АС нейтральна.

2. Строим ЛЧХ разомкнутой системы:

а) определяем наклон низкочастотной асимптоты

$$20(\alpha-i) = 20(0-1) = -20, \text{ дб/дек.}$$

б) определяем точку на плоскости, через которую пройдет низкочастотная асимптота:

$$L(1) = 20 \lg \sqrt{10} = 10, \text{ дб.}$$

в) определяем частоты сопряжения звеньев:

$$\omega_1 = \frac{1}{0,1} = 10, \text{ с}^{-1}; \quad \omega_2 = \frac{1}{0,1} = 10, \text{ с}^{-1}.$$

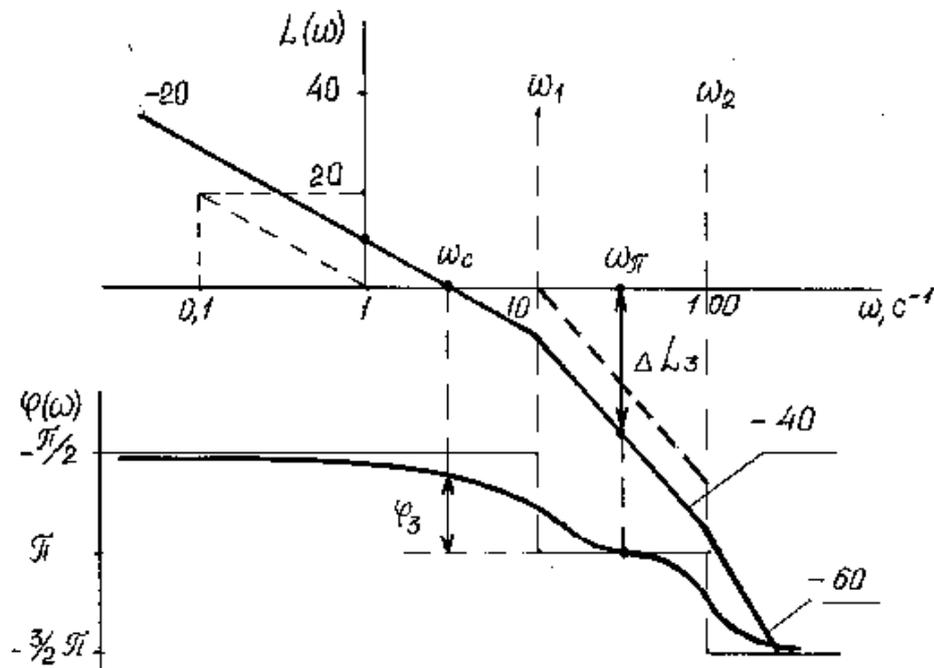
3. По ЛАХ определяем выполнение условия устойчивости замкнутой АС по критерию Найквиста:

$$\omega_c < \omega_\pi - \text{замкнутая АС устойчива.}$$

4. По ЛАХ определим запас устойчивости

$$\Delta L_3 = 20 \lg |W_a(\omega_\pi)| = |L(\omega_\pi)| \approx 35, \text{ дб},$$

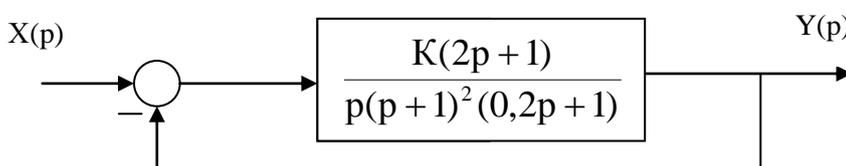
$$\Delta \varphi_3 = \pi + \varphi(\omega_c) \approx \pi - 105^\circ \approx 75^\circ.$$



Примечание: если хотя бы один из параметров запаса устойчивости находится в районе нуля, то необходимо пользоваться не асимптотическими, а точными ЛАХ.

Задача №4.

Для системы, структурная схема которой имеет вид:



Требуется, пользуясь критерием устойчивости Найквиста определить значения $K = K_1$, при котором $\Delta\varphi_3 = 30^\circ$ и $K = K_2$, при котором $\Delta L_3 = 6, \text{дб}$.

Решение:

Разомкнутая АС нейтральна.

1. Допустим, что $K = 1$. Построим ЛАХ разомкнутой системы:

а) определяем наклон низкочастотной асимптоты ЛФХ

$$20(\alpha-i) = 20(0-1) = -20, \text{ дб/дек},$$

$$\pi/2(\alpha-i) = \pi/2(0-1) = -\pi/2, \text{ рад}.$$

б) Определяем точку на плоскости, через которую проходит след низкочастотной асимптоты ЛАХ при $\omega = 1$

$$20 \lg K|_{\omega=1} = 20 \lg 1 = 0, \text{ дб}.$$

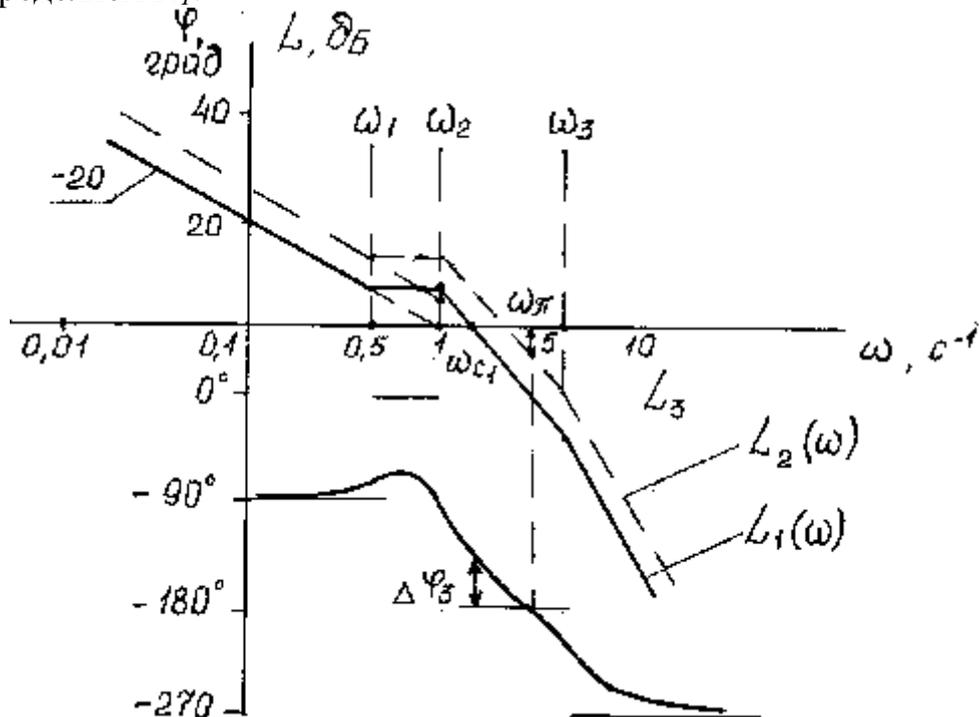
в) определяем частоты сопряжения звеньев.

$$\omega_1 = 0,5, c^{-1} - \text{форсирующее звено } -1,$$

$$\omega_2 = 1, c^{-1} - \text{апериодическое звено } -2,$$

$$\omega_3 = 5, c^{-1} - \text{апериодическое звено } -1.$$

2. Определяем K_1 :



$L(\omega)$ смещается параллельно самой себе вниз или вверх до положения, когда точка пересечения её с осью частот будет соответствовать частоте, при которой $\varphi(\omega)$ превышает линию $-\pi$ на величину заданного запаса устойчивости, т.е. при которой $\varphi(\omega) = -180^\circ + \Delta\varphi_3$.

В нашем примере на частоте ω_{c1} обеспечивается требуемый $\Delta\varphi_3$, т.е.

$$\varphi(\omega_{c1}) \approx -180^\circ + 30 = -150^\circ.$$

Следовательно, произвольно выбранный нами коэффициент усиления $K = 1$ и есть K_1 .

3. Определяем K_2 :

$L(\omega)$ смещается параллельно самой себе вверх до положения, когда её ордината при частоте ω_π станет равной $-\Delta L_3$.

- определяется ордината первой асимптоты $L_2(\omega)$ при $\omega = 1$

$$L_2(1) \approx 4, \text{ дб};$$

- из равенства $L_2(1) = 20 \lg K_2 = 4$ вычисляется $K_2 = 1,585, c^{-1}$.

2.9. Качество ЛСС. Определение установившейся ошибки АС.

1. Понятие качества процесса управления или качества АС?

Качество характеризует точность и характер протекания переходных процессов в АС.

2. Методы оценки качества и критерии качества АС?

Качество АС может быть оценено прямыми и косвенными методами. Критерии качества, полученные при использовании прямых методов, основанных на анализе кривых переходных процессов, называются прямыми. К ним относятся:

- время регулирования;
- перерегулирование;
- число колебаний за время регулирования;
- время срабатывания; полоса пропускания;
- ошибка в установившемся режиме;
- ошибка при воздействии случайных возмущений и т. д.

Косвенные методы оценки качества АС основаны на использовании математического аппарата при исследовании передаточных функций, частотных характеристик и интегральных оценок.

Основным показателем качества АС является точность в установившемся режиме, которую можно оценить по установившейся ошибке АС при типовом воздействии. В этом случае целесообразно воспользоваться первой предельной теоремой:

$$e(t) \Big|_{t \rightarrow \infty} = \lim_{p \rightarrow 0} pE(p).$$

Задача №1.

Определить установившуюся ошибку АС с передаточной функцией разомкнутой системы

$$W(p) = \frac{K}{(0,1p+1)(2p+1)},$$

при входном сигнале $x(t) = a1(t)$.

Решение:

1. Определим выражение для ошибки в изображении по Лапласу:

$$E(p) = S(p)X(p).$$

$$X(p) = L[x(t)] = \frac{a}{p}, \quad S(p) = \frac{1}{1+W(p)} = \frac{(0,1p+1)(2p+1)}{(0,1p+1)(2p+1)+K}.$$

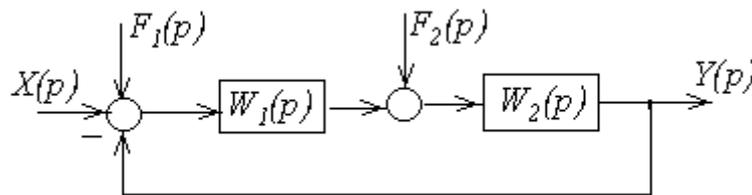
Тогда
$$E(p) = -\frac{(0,1p+1)(2p+1)}{(0,1p+1)(2p+1)+K} \cdot \frac{a}{p}.$$

2. Используя теорему “о конечном значении” определим оригинал ошибки $e(t)$ в установившемся режиме:

$$e(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{-(0,1p+1)(2p+1)}{(0,1p+1)(2p+1)+K} \cdot \frac{a}{p} = -\frac{a}{1+K}.$$

Однако чаще возникает задача оценки точности работы АС при воздействии на неё произвольных (в том числе и случайных) входных сигналов.

Допустим, на АС заданной структуры воздействуют медленно меняющиеся сигналы:



где $X(p)$ – задающий сигнал; $F_1(p), F_2(p)$ – помехи.

Требуется определить ошибку системы $E(p)$ - ?

По определению

$$\begin{aligned} E(p) &= -X(p) + Y(p) = -X(p) + \Phi(p)X(p) + \Phi_{F_1Y}(p)F_1(p) + \Phi_{F_2Y}(p)F_2(p) = \\ &= [-1 + \Phi(p)]X(p) + \frac{W_1(p)W_2(p)}{1 + W_1(p)W_2(p)}F_1(p) + \frac{W_2(p)}{1 + W_1(p)W_2(p)}F_2(p) = \\ &= S(p)X(p) + \Phi(p)F_1(p) + \frac{W_2(p)}{1 + W_1(p)W_2(p)}F_2(p) = E_x(p) + E_{f_1}(p) + E_{f_2}(p). \end{aligned}$$

Но любая передаточная функция может быть представлена в полиномиальном виде:

$$\Phi(p) = \frac{B(p)}{A(p)} = S_0 + S_1p + S_2p^2 + \dots,$$

$$\begin{aligned} \text{Тогда } E(p) &= (S_{0x} + S_{1x}p + S_{2x}p^2 + \dots)X(p) + \left(\tilde{S}_{0F_1} + \tilde{S}_{1F_1}p + \tilde{S}_{2F_1}p^2 + \dots \right)F_1(p) + \\ &+ \left(\tilde{S}_{0F_2} + \tilde{S}_{1F_2}p + \tilde{S}_{2F_2}p^2 + \dots \right)F_2. \end{aligned}$$

Применив операцию обратного преобразования Лапласа, получим оригинал ошибки:

$$\begin{aligned} e(t) &= S_{0x}x(t) + S_{1x}x^{(1)}(t) + S_{2x}x^{(2)}(t) + \dots + \tilde{S}_{0F_1}f_1(t) + \tilde{S}_{1F_1}f_1^{(1)}(t) + \dots + \\ &+ \tilde{S}_{0F_2}f_2(t) + \tilde{S}_{1F_2}f_2^{(1)}(t) + \tilde{S}_{2F_2}f_2^{(2)}(t) + \dots \end{aligned}$$

Из формулы видно, что необходимое число вычисляемых коэффициентов ошибок в полиномиальном представлении передаточных функций определяется порядком максимальной производной воздействующих на систему сигналов равной нулю.

Т.о., можно составить следующую методику определения ошибки АС при воздействии на неё сигналов, заданных в полиномиальном виде:

1. Определить передаточные функции АС по ошибке

$$S(p) = \Phi_{XE}(p), \quad \Phi_{F_1E}(p).$$

2. Определить необходимое число вычисляемых коэффициентов ошибок S_i ($i=0, 1, \dots$) для каждой передаточной функции по ошибке.

3. Определить численные значения S_i и порядок астатизма системы (при необходимости)

2. Определить частные и общую ошибки АС.

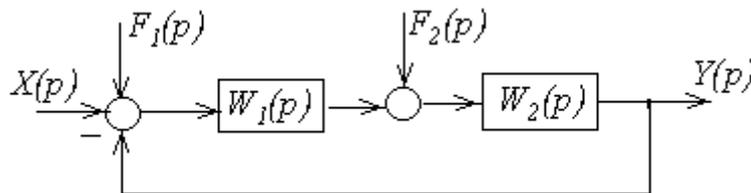
В тех случаях, когда входной сигнал представлен в гармоническом виде, то ошибку системы на этот сигнал определяют через частотные характеристики АС:

$$x(t) = A_x \sin(\omega t + \psi_x), \quad \text{тогда} \quad e(t) = A_e \sin(\omega t + \psi_e),$$

где $A_e = A_x S_a(\omega_x)$, $\psi_e = \psi_x + \varphi_e(\omega_x)$.

Задача №2.

Структурная схема АС имеет вид:



где $W_1(p) = \frac{5}{p+1}$, $W_2(p) = \frac{2}{p}$.

Определить установившуюся ошибку $e(t)$, если входной сигнал и помеха описываются выражениями:

$$x(t) = (2+t)^2; \quad f_1(t) = \sin t; \quad f_2(t) = 0,1t.$$

Решение:

$$e(t) = e_x(t) + e_{f_1}(t) + e_{f_2}(t).$$

Сигналы $x(t)$ и $f_2(t)$ заданы полиномиально от t , а сигнал $f_1(t)$ – гармонический. Реакцию системы $e_{f_1}(t)$ мы научились определять на предыдущих занятиях, здесь же определим ошибку АС обусловленную сигналами $x(t)$ и $f_2(t)$. Для этого воспользуемся приведенной выше методикой:

1. Определим передаточные функции по ошибке:

$$S(p) = -\frac{1}{1+W(p)} = -\frac{1}{1 + \frac{5}{p+1} \cdot \frac{2}{p}} = \frac{p(p+1)}{p^2 + p + 10}.$$

$$\Phi_{F_2E}(p) = \frac{W_2(p)}{1+W(p)} = \frac{\frac{2}{p}}{1 + \frac{10}{p(p+1)}} = \frac{2(p+1)}{p^2 + p + 10}.$$

2. Определим необходимое число вычисляемых коэффициентов ошибок S_i для составляющих ошибки $e_x(t)$ и $e_{f_2}(t)$:

$$e(t) = S_0 x(t) + S_1 x^{(1)}(t) + \dots + A_{ef_1} \sin(\omega_{f_1} t + \psi_{ef_1}) + \tilde{S}_0 f_2(t) + \tilde{S}_1 f_2^{(1)}(t) + \dots$$

$$x(t) = (2+t)^2 \neq 0, \Rightarrow S_0 = ?; \quad f_2(t) = 0, 1t \neq 0, \Rightarrow \tilde{S}_0 = ?;$$

$$x^{(1)}(t) = 2(2+t) \neq 0, \Rightarrow S_1 = ?; \quad f_2^{(1)}(t) = 0, 1 \neq 0, \Rightarrow \tilde{S}_1 = ?;$$

$$x^{(2)}(t) = 2 \neq 0, \Rightarrow S_2 = ?; \quad f_2^{(2)}(t) = 0.$$

$$x^{(3)}(t) = 0.$$

Т.е., необходимо определить численные значения коэффициентов $S_0, S_1, S_2, \tilde{S}_0, \tilde{S}_1$.

3. Определим численные значения коэффициентов ошибок S_i, \tilde{S}_i и порядок астатизма системы по отношению к задающему сигналу и помехам:

$$a) S_i: \quad -\frac{p(p+1)}{p^2 + p + 10} = S_0 + S_1 p + S_2 p^2 + \dots,$$

$$-p^2 - p = (p^2 + p + 10)(S_0 + S_1 p + S_2 p^2 + \dots),$$

$$p^0 \quad 0 = 10S_0 \Rightarrow S_0 = 0;$$

$$p^1 \quad -1 = 10S_1 + S_0 \Rightarrow S_1 = -0,1;$$

$$p^2 \quad -1 = 10S_2 + S_1 + S_0 \Rightarrow S_2 = -0,09.$$

$$b) \tilde{S}_i: \quad \frac{2(p+1)}{p^2 + p + 10} = \tilde{S}_0 + \tilde{S}_1 p + \tilde{S}_2 p^2 + \dots,$$

$$p^0 \quad 2 = 10\tilde{S}_0 \Rightarrow \tilde{S}_0 = 0,2,$$

$$p^1 \quad 2 = 10\tilde{S}_1 + \tilde{S}_0 \Rightarrow \tilde{S}_1 = 0,18.$$

Т.к. $S_0 = 0$, а $S_1 \neq 0$, то АС астатическая первого порядка по отношению к по-лезному сигналу. Структурный признак астатизма 1-го порядка по отношению к задающему воздействию – наличие одного интегрирующего звена в разомкнутом контуре.

$\tilde{S}_0 \neq 0$ - АС статическая по отношению к возмущению $f_2(t)$. Структурный признак статической АС по отношению к возмущениям $f_2(t)$ и $f_1(t)$ – отсутствие дифференцирующих звеньев между точкой ввода возмущения и выходом системы.

2. Определим $e_x(t), e_{f_2}(t)$ и $e(t)$.

$$e_x(t) = S_0 x(t) + S_1 x^{(1)}(t) + S_2 x^{(2)}(t) = 0 \cdot x(t) - 0,1 \cdot 2(2+t) - 0,09 \cdot 2 = -(0,2t + 0,58).$$

$$e_{f_2}(t) = \tilde{S}_0 f_2(t) + \tilde{S}_1 f_1^{(1)}(t) = 0,2 \cdot 0,1t + 0,18 \cdot 0,1 = 0,02t + 0,018.$$

Тогда $e(t) = -(0,2t + 0,58) + 0,02t + 0,018 + e_{f_1}(t) = -(0,18t + 0,562) + e_{f_1}(t)$.

Для эффективного сравнения между собой близких систем, выбора оптимальных значений параметров АС, в смысле удовлетворения выбранного функционала качества, широко используются интегральные оценки качества, позво-

ляющие дать общую характеристику качества АС без определения какого-либо её показателя в отдельности.

Простейшей интегральной оценкой качества может служить функционал вида:

$$I = \int_0^{\infty} |e(t)| dt,$$

где $e(t) = h_{\text{жс}}(t) - h(t)$ – динамическая ошибка АС.

Данный интеграл интерпретируется алгебраической суммой площадей под кривой динамической ошибки. Оценка качества АС по минимуму данного интеграла дает удовлетворительные результаты только в случае монотонного изменения переходного процесса системы. При колебательном его характере наблюдается компенсация положительных и отрицательных площадей при интегрировании, и даже неудовлетворительная по качеству АС может иметь очень хорошую интегральную оценку. Поэтому наиболее распространенной является интегральная квадратичная оценка качества вида:

$$I = \int_0^{\infty} e^2(t) dt.$$

А.А. Красовский, решая данный интеграл, получил для него выражение через параметры ПФ АС

$$E(p) = \frac{\tilde{B}(p)}{\tilde{A}(p)} = \frac{b_0 + b_1 p + \dots + b_m p^m}{a_0 + a_1 p + \dots + a_n p^n}.$$

Т.е.
$$I = \int_0^{\infty} e^2(t) dt = \frac{\Delta_B}{2a_n \Delta},$$

где
$$\Delta = |R| = \begin{vmatrix} a_0 & 0 & \dots & & 0 \\ -a_2 & a_1 & -a_0 & \dots & 0 \\ \dots & -a_3 & a_2 & \dots & \vdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \dots & 0 & -a_n & a_{n-1} \end{vmatrix};$$

$$\Delta_B = |B| = \begin{vmatrix} a_0 & 0 & \dots & & B_0 \\ -a_2 & a_1 & -a_0 & \dots & B_1 \\ \dots & -a_3 & a_2 & \dots & \vdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \dots & 0 & -a_n & B_m \end{vmatrix};$$

$$B_0 = b_0^2, \quad B_1 = b_1^2 - 2b_0 b_2, \quad B_2 = b_2^2 - 2b_1 b_3 + 2b_0 b_4, \quad \dots, \quad B_m = b_m^2.$$

Методика определения ИКО:

1. Определить изображение по Лапласу подынтегральной функции $E(p)$.
2. Составить и вычислить определители Δ и Δ_B .
3. Вычислить ИКО по формуле А.А. Красовского.

Задача №3.

Для АС с передаточной функцией

$$\Phi(p) = \frac{K}{T^2 p^2 + 2T\xi p + 1}$$

определить оптимальное значение коэффициента ξ_{opt} в смысле минимума ИКО вида:

$$I = \int_0^{\infty} [h_{жс}(t) - h(t)]^2 dt.$$

В качестве $h_{жс}(t)$ выбрать $K(t)$.

Решение:

1. Определяем изображение по Лапласу подынтегральной функции:

$$\begin{aligned} E(p) = H_{жс}(p) - H(p) &= \frac{K}{p} - \frac{\Phi(p)}{p} = \frac{K - \Phi(p)}{p} = \frac{K - \frac{K}{T^2 p^2 + 2T\xi p + 1}}{p} = \\ &= \frac{KT^2 p + 2Kt\xi}{T^2 p^2 + 2T\xi p + 1}; \end{aligned}$$

2. Составляем и находим значения определителей:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -T^2 & 2T\xi \end{vmatrix} = 2T\xi;$$

$$\Delta_B = \begin{vmatrix} 1 & B_0 \\ -T^2 & B_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & (2KT\xi)^2 \\ -T^2 & (KT^2)^2 \end{vmatrix} = K^2 T^4 (1 + 4\xi^2).$$

3. Определяем ИКО:

$$I = \frac{\Delta_B}{2a_n \Delta} = \frac{K^2 T^4 (1 + 4\xi^2)}{2T\xi \cdot 2T^2} = \frac{K^2 T}{4\xi} (1 + 4\xi^2) = \frac{K^2 T}{4} \left(\frac{1}{\xi} + 4\xi \right).$$

4. Определяем ξ_{opt} :

$$\frac{dI}{d\xi} = \frac{K^2 T}{4} \left(-\frac{1}{\xi^2} + 4 \right) = 0, \Rightarrow \frac{1}{\xi^2} = 4; \quad \xi = 0,5 - \text{экстремум.}$$

$$\frac{d^2 I}{d\xi^2} = \frac{K^2 T}{4} \cdot 2 \frac{1}{\xi^3} \Big|_{\xi=0,5} > 0 \Rightarrow \text{экстремум соответствует минимуму функции.}$$

Следовательно, при $\xi=0,5$ и фиксированных параметрах K и T достигается минимум ИКО данной АС.

В дальнейшем данную методику расчета ИКО вы можете использовать при синтезе ЛС АС методом ИКО.

2.10. Синтез ЛСС методом стандартных коэффициентов.

1. В чем суть метода стандартных коэффициентов (МСК)?

МСК предполагает такой выбор параметров элементов АС с заданной структурой, при котором коэффициенты её передаточной функции принимают заранее назначенные (стандартные) значения. При этом и переходная характеристика системы будет иметь желаемую (стандартную) форму.

Коэффициенты передаточной функции являются функциями параметров элементов АС. Зная коэффициенты – задаваясь ими, можно вычислить значения параметров элементов синтезируемой АС – в этом физическая суть метода стандартных коэффициентов.

2. Какие показатели качества АС рассматриваются в качестве исходных данных при синтезе? В чем различие порядков синтеза статических и астатических систем?

Для статических систем, ПФ разомкнутого контура которых имеет вид:

$$W(p) = \frac{K}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + 1}$$

в качестве исходных данных при синтезе задают:

- величину коэффициента статизма – S_0 ;
- время регулирования – t_p ;
- величину перерегулирования – Δh_m .

Тогда коэффициент усиления K определится исходя из требований по величине статизма – S_0 :

$$|S_0| = \left| \frac{-1}{1+K} \right|, \text{ откуда } K = \frac{1-S_0}{S_0}.$$

Коэффициенты полинома знаменателя ПФ $W(p) - a_i$ определяются из табл. №1 в зависимости от порядка исходной системы – n .

Переходные характеристики АС с табличными коэффициентами a_i в передаточных функциях разомкнутых контуров будут иметь перерегулирование $\Delta h_m < 5\%$.

Таблица №1.

n	t_p	a_1	a_2	a_3	a_4
2	2,9	$\frac{1,38(1+K)}{\Omega}$	$\frac{1+K}{\Omega^2}$	—	—
3	4,4	$\frac{2,39(1+K)}{\Omega}$	$\frac{2,05(1+K)}{\Omega^2}$	$\frac{1+K}{\Omega^3}$	—
4	4,6	$\frac{2,8(1+K)}{\Omega}$	$\frac{3,8(1+K)}{\Omega^2}$	$\frac{2,6(1+K)}{\Omega^3}$	$\frac{1+K}{\Omega^4}$

3. Порядок синтеза статической АС МСК:

- 1). Выбирают вид передаточной функции разомкнутой цепи $\tilde{W}(p)$
- 2). Определяют значения коэффициента усиления K

$$K = \frac{1 - S_0}{S_0}.$$

3). Вычисляют значение среднегеометрического корня

$$\Omega = \frac{t_p \Omega}{t_p}.$$

4). Вычисляют необходимое значение коэффициентов a_1, \dots, a_n по формулам таблицы 1 и составляют ПФ $W(p)$ разомкнутой системы, удовлетворяющую требованиям качества S_0 и $t_p, \Delta h_m$ для замкнутой АС.

5). Приравняв коэффициенты при равных степенях p знаменателей ПФ $W(p)$ и $\tilde{W}(p)$ определяют значения параметров элементов АС.

6). Проверяют качество АС с синтезированными параметрами.

4. В чем отличие синтеза МСК астатических систем от статических?

Синтез астатических систем отличается формулами вычисления a_i , причем для систем с различными порядками астатизма эти формулы различны. Например, для астатических систем первого порядка, передаточная функция разомкнутого контура которых имеет вид:

$$W(p) = \frac{K}{p(a_n p^{n-1} + a_{n-1} p^{n-2} + \dots + a_2 p + 1)},$$

таблица расчета стандартных a_i имеет вид:

Таблица №2

n	$t_p \Omega$	K	a_2	a_3	a_4
2	2,9	$\frac{\Omega}{1,38}$	$\frac{1}{1,38\Omega}$	—	—
3	4,4	$\frac{\Omega}{2,39}$	$\frac{0,858}{\Omega}$	$\frac{1}{2,39\Omega^2}$	—
4	4,6	$\frac{\Omega}{2,8}$	$\frac{1,357}{\Omega}$	$\frac{0,929}{\Omega^2}$	$\frac{1}{2,8\Omega^3}$

Для астатических систем второго порядка, чтобы замкнутая АС была устойчива по структурному признаку, необходимо чтобы ПФ разомкнутой системы содержала форсирующее звено, т.е.:

$$W(p) = \frac{K(b_1 p + 1)}{p^2(a_n p^{n-2} + a_{n-1} p^{n-3} + \dots + a_3 p + 1)}.$$

В данном случае необходимо вычислять a_i и b_i по соответствующим формулам, которые тоже сведены в таблицы.

При синтезе астатических систем МСК в качестве исходных данных выбирается один из двух показателей качества: либо величина коэффициента

а статической точности S_i , где $i=1, \dots, n$ в зависимости от порядка астатизма, либо время регулирования t_p .

Если задан S_1 , то K определяется по формуле $K = \frac{1}{S_1}$. Далее, используя

таблицу, определяют Ω , а затем t_p .

Если задано t_p и известен порядок системы n , то по таблице 2 определяют Ω , а затем K системы.

Перерегулирование Δh_m при решении инженерных задач синтеза АС МСК в любом случае будет меньше 5%.

5. Чем объясняется ограниченное применение МСК на практике?

Для систем n -го порядка согласно МСК должно быть n варьируемых параметров (не меньше), что не всегда возможно. Кроме того, вычисленные значения параметров не всегда могут быть физически реализованы, т.к. стандартные переходные функции в значительной степени идеализированы, особенно по $\Delta h_m < 5\%$.

II. Решение задач.

Задача №1.

Передаточная функция разомкнутой системы имеет вид:

$$\tilde{W}(p) = \frac{K}{T^2 p^2 + 2T\xi p + 1}$$

Определить значения параметров системы, при которых коэффициент статизма $S_0=0,02$, время регулирования $t_p \leq 0,3c$ и перерегулирование $\Delta h_m \leq 10\%$.

Решение:

1. Определим необходимое значение K :

$$K = \frac{1 - S_0}{S_0} = \frac{1 - 0,02}{0,02} = 49.$$

2. Вычислим значение среднегеометрического корня характеристического уравнения второго порядка разомкнутой системы:

$$\Omega = \frac{t_p \Omega}{t_p} = \frac{2,9}{0,3} \approx 10.$$

3. Вычислим необходимые значения коэффициентов a_i по формулам таблицы 1 для $n=2$:

$$a_1 = \frac{1,38(1 + K)}{\Omega} = \frac{1,38(1 + 49)}{10} = 6,9;$$

$$a_2 = \frac{1 + K}{\Omega^2} = \frac{1 + 49}{100} = 0,5.$$

Следовательно $W(p) = \frac{49}{0,5p^2 + 6,9p + 1}$.

4. Составим алгебраическое уравнение, приравняв коэффициенты при одинаковых степенях p характеристических полиномов $W(p)$ и $\tilde{W}(p)$:

$$T^2 p^2 + 2T\xi p + 1 + 0,5p^2 + 6,9p + 1;$$

$$T^2 = 0,5; \quad 2T\xi = 6,9; \quad T = 0,7; \quad \xi = \frac{6,9}{2T} = \frac{6,9}{1,4} \approx 5.$$

Следовательно, для удовлетворения требований качества системы параметры ПФ $\tilde{W}(p)$ должны быть:

$$K = 49; \quad T = 0,7; \quad \xi = 5.$$

Задача №2.

Передаточная функция разомкнутой АС имеет вид:

$$\tilde{W}(p) = \frac{K}{p(Tp + 1)}.$$

Выбрать K и T так, чтобы время регулирования $t_p \leq 0,5c$, а перерегулирование $\Delta h_m \leq 15\%$.

Решение:

1. Определим значение коэффициента усиления K .

Т. к. в задаче рекомендовано синтезировать систему по быстродействию ($t_p \leq 0,5c$), то коэффициент усиления определяется по таблице 2 (система астатична 1-го порядка).

$$n=2; \quad t_p \Omega = 2,9 \quad \text{откуда} \quad \Omega = \frac{2,9}{t_p} = \frac{2,9}{0,5} = 5,8.$$

Тогда
$$K = \frac{\Omega}{1,38} = \frac{5,8}{1,38} \approx 4,2.$$

2. Единственный коэффициент a_2 определим по формуле таблицы №2:

$$a_2 = \frac{1}{1,38\Omega} = \frac{1}{1,38 \cdot 5,8} \approx 0,125.$$

Следовательно,
$$W(p) = \frac{4,2}{p(0,125p + 1)}; \quad T = 0,125c.$$

Метод Лина.

Очевидно, что синтез МСК весьма прост для АС, характеристический полином ПФ в разомкнутом состоянии которых не выше второго порядка.

Рассмотрим пример синтеза статической АС, которая в разомкнутом состоянии описывается ПФ с характеристическим полиномом третьего порядка.

Задача №3.

Передаточная функция разомкнутой АС имеет вид:

$$\tilde{W}(p) = \frac{K}{(T_1^2 p^2 + 2T_1 \xi p + 1)(T_2 p + 1)}.$$

Определить значения параметров АС, при которых она будет удовлетворять следующим показателям качества: $S_0=0,02$; $t_p \leq 0,2c$; $\Delta h_m \leq 10\%$.

Решение:

1. Определим необходимое значение K :

$$K = \frac{1 - S_0}{S_0} = \frac{1 - 0,02}{0,02} = 49.$$

2. Вычислим значение среднегеометрического корня основываясь на формулах таблицы 1 и учитывая, что $n=3$:

$$t_p \Omega = 4,4, \quad \text{тогда} \quad \Omega = \frac{t_p \Omega}{t_p} = \frac{4,4}{0,2} = 22.$$

3. Основываясь на формулах той же таблицы 1, вычислим значения коэффициентов a_i :

$$a_1 = \frac{2,39(1+K)}{\Omega} = \frac{2,39(1+49)}{22} \approx 5,43;$$

$$a_2 = \frac{2,05(1+K)}{\Omega^2} = \frac{2,05(1+49)}{22^2} \approx 0,212;$$

$$a_3 = \frac{1+K}{\Omega^3} = \frac{1+49}{22^3} \approx 0,0047.$$

$$\text{Следовательно} \quad W(p) = \frac{49}{0,0047 p^3 + 0,0212 p^2 + 5,43 p + 1}.$$

4. Определим параметры элементов АС T_1 , T_2 , ξ . Для этого приравняем коэффициенты характеристических полиномов ПФ $\tilde{W}(p)$ и $W(p)$:

$$T_1^2 T_2 p^3 + (T_1^2 + 2T_1 T_2 \xi) p^2 + (T_2 + 2T_1 \xi) p + 1 =$$

$$= 0,0047 p^3 + 0,212 p^2 + 5,43 p + 1;$$

$$\begin{cases} T_1^2 T_2 = 0,0047; \\ (T_1^2 + 2T_1 T_2 \xi) = 0,212; \\ T_2 + 2T_1 \xi = 5,43. \end{cases}$$

Решить данную систему нелинейных алгебраических уравнений очень сложно. Этим трудностям можно избежать, если применить к знаменателю ПФ $W(p)$ метод Лина, который позволяет разложить полиномы порядка $n \geq 3$ на элементарные множители вида:

$$(T_i p + 1) \text{ и } (T_j^2 p^2 + 2T_j \xi p + 1) \text{ при } \xi < 1.$$

Данный метод реализуется последовательными приближениями.

Попробуем выделить трехчлен вида $1 + b_1 p + b_2 p^2$, а в частном получим $r_0 + r_1 p$. Для этого зададимся первым приближением:

$$b_{1_1} = \frac{a_2}{a_1} = \frac{0,212}{5,43} \approx 0,039;$$

$$b_{2_1} = \frac{a_3}{a_1} = \frac{0,0047}{5,43} \approx 0,000864.$$

Выполним деление $A(p)$ на трехчлен, начиная с младших членов:

$$\begin{array}{r|l} 1+5,43p+0,212p^2+0,0047p^3 & 1+0,039p+0,000864p^2 \\ \hline 1+0,039p+0,000864p^2 & 1+5,39p \\ \hline 5,39p+0,2112p^2+0,0047p^3 & \\ -5,39p+0,2102p^2+0,00466p^3 & \\ \hline 0,001p^2+0,00004p^3 & \end{array}$$

При делении необходимо стремиться к *min* остатку, поэтому уточним коэффициенты b_1 и b_2 исходя из полученного остатка по формулам:

$$b_{1_i} = \frac{a_{n-1} - r_{n-3}b_{2_{i-1}}}{r_{n-2}}; \quad b_{2_i} = \frac{a_n}{r_{n-2}},$$

где r_i – коэффициенты частного.

До тех пор, пока коэффициенты остатка не будут исчезающе малы (не более 1-2% от соответствующих коэффициентов полинома $A(p)$) необходимо уточнять коэффициенты b_1 , b_2 и повторять деление, но не менее двух раз для того, чтобы убедиться, что процесс сходится.

Выполним второе приближение:

$$b_{1_2} = \frac{a_{3-1} - r_{3-3}b_{2_{2-1}}}{r_{3-2}} = \frac{a_2 - r_0b_{2_1}}{r_1} = \frac{0,212 - 1 \cdot 0,000864}{5,39} \approx 0,0391;$$

$$b_{2_2} = \frac{a_3}{r_1} = \frac{0,0047}{5,39} \approx 0,000871.$$

Разделим $A(p)$ на трехчлен с новыми коэффициентами:

$$\begin{array}{r|l} 1+5,43p+0,212p^2+0,0047p^3 & 1+0,0391p+0,000871p^2 \\ \hline 1+0,0391p+0,000871p^2 & 1+5,39p \\ \hline 5,39p+0,2111p^2+0,0047p^3 & \\ -5,39p+0,21077p^2+0,004695p^3 & \\ \hline 0,0004p^2+0,000005p^3 & \end{array}$$

Т.е., остаток меньше 1-2% от соответствующих коэффициентов $A(p)$ и процесс сходится.

В результате разложения по методу Лина полином $A(p)$ примет вид:

$$A(p) = (0,000871p^2 + 0,0391p + 1)(5,39p + 1).$$

Составляем алгебраические уравнения для определения T_1, T_2, ξ :

$$T_1^2 = 0,000871; \quad 2T_1\xi = 0,0391; \quad T_2 = 5,39;$$

$$T_1 = \sqrt{0,000871} \approx 0,0295;$$

$$\xi = \frac{0,0391}{2 \cdot 0,0295} \approx 0,662.$$

Следовательно, для удовлетворения заданных требований к качеству АС параметры $\tilde{W}(p)$ должны быть:

$$\tilde{W}(p) = \frac{49}{(0,000871p^2 + 0,0382p + 1)(5,39p + 1)},$$

$K=49; \quad T_1=0,0295; \quad \xi=0,664; \quad T_2=5,39.$

2.11. Синтез последовательного КУ методом ЛЧХ.

В чем заключается сущность задачи синтеза?

Сущность задачи синтеза в широком смысле заключается в таком выборе структурной схемы системы и её параметров и таком конструкторском решении, при которых обеспечиваются требуемые показатели качества, а сама АС состоит из наиболее простых устройств управления.

1. Из каких элементов состоит АС?

В любую АС обычно входят объект управления и два типа устройств управления. К первому типу устройств обычно относятся исполнительные устройства, усилитель мощности и измерительное устройство, которое практически невозможно изменять в процессе синтеза систем. Ко второму типу относятся корректирующее устройство и согласующий электронный усилитель, т.е. устройства, которые легко можно изменять в процессе синтеза.

АС можно разделить на две части:

Объект управления, исполнительное устройство, усилитель мощности и измерительное устройство – неизменяемая часть системы, и корректирующее устройство с согласующим усилителем – изменяемая часть системы.

Задачу синтеза АС обычно сводят к выбору лишь изменяемых устройств управления, а именно усилительных и корректирующих устройств. Эту задачу обычно называют задачей инженерного синтеза, которая впервые была поставлена и решена В.В. Солодовниковым на основе применения частотного метода с использованием ЛЧХ.

Итак, целью инженерного синтеза АС является определение структуры и параметров передаточной функции КУ, которые необходимо добавить к неизменяемой части системы, чтобы обеспечить требуемые показатели качества.

При синтезе КУ обычно предполагаются заданными объект управления, устройства управления неизменяемой части системы, а также показатели качества системы.

2. Какие основные этапы инженерного синтеза АС?

Частотный метод синтеза с использованием ЛЧХ включает в себя следующие этапы:

1) Определение структуры и параметров передаточной функции $W_n(p)$ нескорректированной системы.

2) Определение передаточной функции желаемой системы $W_{жс}(p)$, удовлетворяющей поставленным выше требованиям.

3) Выбор типа КУ и его параметров.

4) Проверка полученного решения.

Одним из основных параметров системы является коэффициент усиления K . Он определяется допустимой установившейся ошибкой $E_{уст}$. Поэтому синтез желаемой АС обычно начинается с выбора системы (если он не задан в ТТТ).

$$\text{Если } W_n(p) = \frac{KQ(p)}{P^v B(p)}, \text{ где } Q(0) = B(0) = 1,$$

$$\text{то } S(p) = -\frac{1}{1+W_n B(p)} = S_0 + S_1 p + \dots$$

и для статической системы $v = 0$, $S_0 = 1/(1+K)$, а для астатической $v = 1$, $S_1 = 1/K$.

В следствие этого установившаяся ошибка будет

$$e_{x_{max}}(t) = \left| \frac{x(t)}{1+K} \right| \text{ при } v = 0 \text{ и } e_{x_{max}}(t) = \left| \frac{\dot{x}(t)}{K} \right| \text{ при } v = 1.$$

$$\text{Тогда } K = \left| \frac{x}{e_{x_{max}}} - 1 \right| \text{ при } v = 0 \text{ и } K = \left| \frac{\dot{x}}{e_{x_{max}}} \right| \text{ при } v = 1.$$

где $x(t)$ и $\dot{x}(t)$ - заданные максимальные величины входного сигнала и его производной.

При синтезе КУ с использованием ЛЧХ в качестве основной динамической характеристики желаемой АС используется ЛАЧХ разомкнутой системы, называемая желаемой ЛАХ.

Теоретической основой рекомендаций для построения $L_{жс}(\omega)$ является связь ЛАХ разомкнутой системы с показателями качества замкнутой системы. С этой точки зрения можно выделить три области:

- область низких частот $L_{нч}(\omega)$ $0 \leq \omega \leq 0,1 \omega_c$
- область средних частот $L_{ср}(\omega)$ $0,1 \omega_c \leq \omega \leq 10 \omega_c$
- область высоких частот $L_{вч}(\omega)$ $10 \omega_c \leq \omega \leq \infty$.

Параметры $L_{нч}(\omega)$ и особенно её первой асимптоты определяют точность АС в установившемся режиме, а именно ордината первой асимптоты при $\omega = 1$ определяет общий коэффициент усиления разомкнутой системы K , который и определяет $e_{уст}(t)$ при заданном $x(t)$. Наклон первой асимптоты $\alpha = -v \cdot 20$ дб/дк

определяет порядок астатизма системы по отношению к заданному воздействию.

Параметры $L_{cp}(\omega)$ и особенно её средней части определяют такие показатели качества как t_p и Δh_m . Для типовых $L(\omega)$ (см. станд) связь между их параметрами $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \mu$ и показателями качества устанавливается номограммами Чеснота-Майера. В общем случае отметим следующие связи:

а) система имеет хорошее качество управления (малое Δh_m) если наклон отрезка ЛАХ, принадлежащего частоте среза и имеющего верхнюю границу ω_3 , равен -20 дб/дк, а его длина не меньше одной декады, т.е.

$$\omega_3/\omega_2 \geq 10, \omega_3/\omega_c = (2 \dots 4);$$

б) время регулирования обратно пропорционально частоте среза, т.е.

$$t_p \approx K_p/\omega_c, \text{ где } K_p = 3 \dots 12. \text{ (расчетный)}$$

Параметры $L_{вч}(\omega)$ не имеют прямой связи с показателями качества и не влияют существенно на динамические свойства системы, а посему не нуждаются в коррекции.

При последовательном включении КУ передаточная функция прямого тракта (разомкнутой) желаемой АС будет иметь вид

$$W_{жс}(p) = W_{ку}(p) W_n(p), \text{ откуда } W_{ку}(p) = \frac{W_{жс}(p)}{W_n(p)}$$

$$\text{или } L_{ку}(\omega) = L_{жс}(\omega) - L_n(\omega).$$

Данное соотношение и определяет условие простоты и реализуемости последовательного КУ, а именно:

а) последовательное КУ будет технически реализуемо, если наклон последней асимптоты $L_{жс}(\omega)$ будет равен наклону последней асимптоты исходной системы $L_n(\omega)$; (порядок n тот же)

в) последовательное КУ тем проще, чем больше совпадений частот сопряжений $\omega_{жс}$ и $\omega_{ин}$ соответственно $L_{жс}(\omega)$ и $L_n(\omega)$.

II. Правила и порядок синтеза последовательного КУ:

1. Из ТТТ к точности АС определить требуемое значение K разомкнутой АС и необходимый порядок астатизма ν .

2. С учетом полученных K и ν построить $L_n(\omega)$ низкочастотная асимптота которой и будет определять первую (низкочастотную) асимптоту $L_{жс}(\omega)$.

3. Построить среднечастотную асимптоту $L_{жс}(\omega)$. При этом:

$$- \omega_{сжс} = \frac{K_p}{t_p}, \text{ где } K_p \approx K_0 \cdot \pi \text{ определяется по заданным в ТТТ значениям } t_p \text{ и } \Delta h_m \text{ с}$$

помощью графика $\omega_c t_p = f(\Delta h_m)$;

– частота $\omega_{сжс}$ наносится на оси частот и через неё проводится среднечастотная асимптота с наклоном -20 дб/дк;

– с учетом условий

$\frac{\omega_{зжс}}{\omega_{2жс}} \geq 10$; $\frac{\omega_{зжс}}{\omega_{2жс}} = (2...4)$ определяются её допустимые границы.

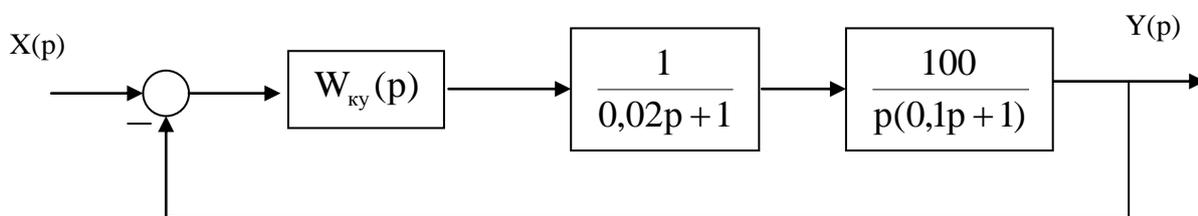
4. Из условия обеспечения устойчивости замкнутой АС и простоты реализации КУ выполнить сопряжение низкочастотной и среднечастотной асимптот и построение высокочастотной асимптоты $L_{жс}(\omega)$.

5. Графическим решением уравнения $L_{ку}(\omega) = L_{жс}(\omega) - L_n(\omega)$ определить $L_{ку}(\omega)$. По виду $L_{ку}(\omega)$ определяется $W_{ку}(\omega)$.

6. Рассчитать схему технической реализации КУ.

II. Решение задачи.

Структурная схема АС с последовательным КУ имеет вид:



Определить параметры и рассчитать схему технической реализации КУ, чтобы замкнутая АС имела следующие показатели качества:

$$e(t) = 0, \text{ при } x(t) = const; t_p < 0,5 \text{ с}; \Delta h_m < 20\%; \Delta \varphi_3 > \frac{\pi}{6}.$$

$$(e(t) = 0,02 \text{ град.}, \text{ при } \dot{x}(t) = 2 \text{ град/с}).$$

Решение:

1. Строим $L_n(\omega)$ и анализируем удовлетворяет ли исходная замкнутая АС:

- заданным показателям качества?
- запасу устойчивости по фазе?

Т.к. $K = 100$, то $L(1) = 20 \lg 100 = 40$, дб.

$\nu = 1$, т.к. по структурному признаанию астатизма $W_n(p)$ содержит одно интегрирующее звено, а следовательно наклон низкочастотной асимптоты $L_n(\omega)$ будет -20 дб/дк.

$$\frac{1}{0,02} = 50 \text{ с}^{-1}; \frac{1}{0,1} = 10 \text{ с}^{-1}; \text{ -аперiodические звенья.}$$

Низкочастотная асимптота $\varphi_n(\omega)$ определяется интегрирующим звеном и равна $-\pi/2$.

Т.к. $\omega_{сн} \approx \omega_{пн}$, то исходная замкнутая АС неустойчива. Кроме того, даже если бы она была устойчива, т.к. $\omega_{сн}$ находится на участке с наклоном -40 дб/дк, то

исходная не скорректированная АС обладала бы заведомо плохими показателями качества.

2. Поскольку коэффициент усиления АС задан $K = 100$, определим необходимый порядок астатизма желаемой системы:

– т.к. $e(t) = 0$ при $x(t) = const$, то $\nu = 1$, т.е. наклон первой асимптоты $L_{жс}(\omega)$ должен быть -20 дк/дб.

$$K = \frac{\dot{x}(t)}{e(t)} = \frac{2}{0,02} = 100.$$

Т.к. $\omega_c < \omega_\pi$, то синтезированная замкнутая АС устойчива.

3. Строим асимптотическую $L_{жс}(\omega)$ и $\varphi_{жс}(\omega)$:

а) Строим низкочастотную асимптоту $L_{жс}(\omega)$ по данным пункта 2.

Т.к. коэффициент усиления и астатизм желаемой системы и исходной одинаковы, то низкочастотные асимптоты $L_n(\omega)$ и $L_{жс}(\omega)$ совпадают.

б) Строим среднечастотную асимптоту $L_{жс}(\omega)$:

-определяем ω_c по заданному $\Delta h_m < 20\%$

$$\omega_c \approx K_0 \frac{\pi}{t_p} = \left| \omega_c t_p = f(\Delta h_m) \rightarrow \omega_c t_p = 7 \right| = \frac{7}{t_p} = \frac{7}{0,5} = 14, c^{-1}$$

Т.к. $t_p < 0,5$ с, то выбираем $\omega_c \geq 14 c^{-1}$, т.е. $\omega_c = 20 c^{-1}$.

- определяем допустимые границы, т.е. $\omega_{3жс}$ и $\omega_{2жс}$:

$$\omega_3 \approx (2 \div 4) \omega_c \quad \omega_3 \approx (2 \div 4) 20 \approx 40 \div 80, c^{-1}.$$

Из условия простоты реализации КУ выбираем $\omega_3 = 50, c^{-1}$.

Левая граница среднечастотной асимптоты определяется из соотношения $\omega_2 \leq \omega_3 / 10 \quad \omega_2 \leq 50 / 10 = 5, c^{-1}$. Выбираем $\omega_2 = 5 c^{-1}$.

- через частоту $\omega_c = 20 c^{-1}$ проводим среднечастотную асимптоту с наклоном -20 дб/дк. Левая и правая границы $\omega_2 = 5 c^{-1}$, $\omega_3 = 50, c^{-1}$.

в) Выполним сопряжение среднечастотной асимптоты с низкочастотной асимптотой:

Из условия обеспечения устойчивости замкнутой желаемой АС, *max* запаса устойчивости и простоты реализации КУ - сопрягаем среднечастотную и низкочастотную асимптоты с *min* наклоном прямой.

г) Строим высокочастотную асимптоту:

высокочастотная асимптота не оказывает существенного влияния на показатели качества АС, поэтому если не удастся добиться точного совпадения высокочастотных $L_{жс}(\omega)$ с $L_n(\omega)$ на частоте $\omega_3 = 50 c^{-1}$, то её проводят параллельно $L_n(\omega)$.

д) Построение $\varphi_{жс}(\omega)$ трудностей не вызывает.

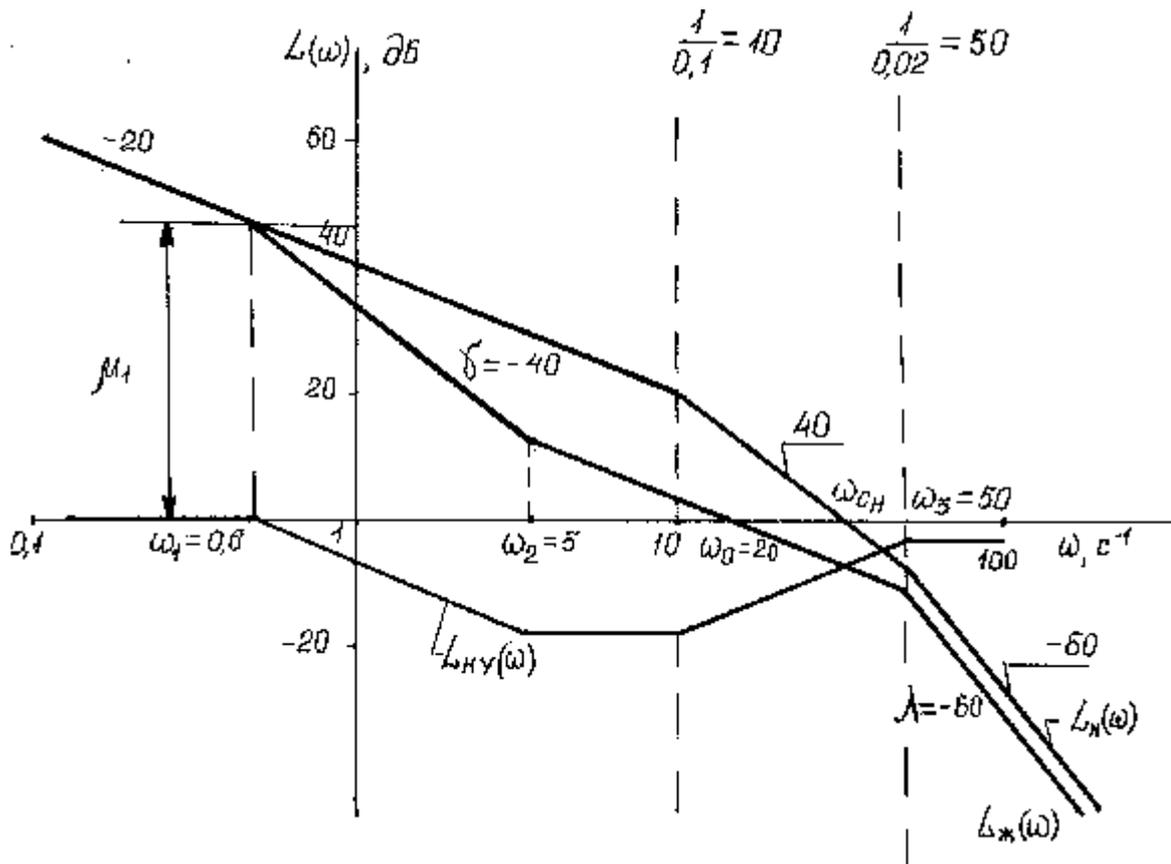
4. Проверим соответствие синтезированной АС с ЛАХ разомкнутой системы $L_{жс}(\omega)$ заданным показателям качества:

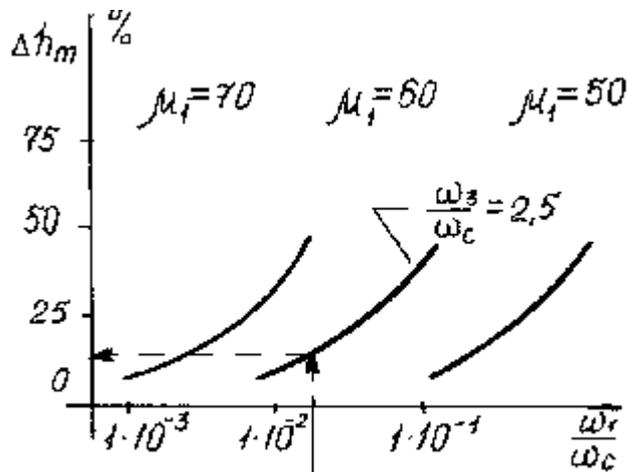
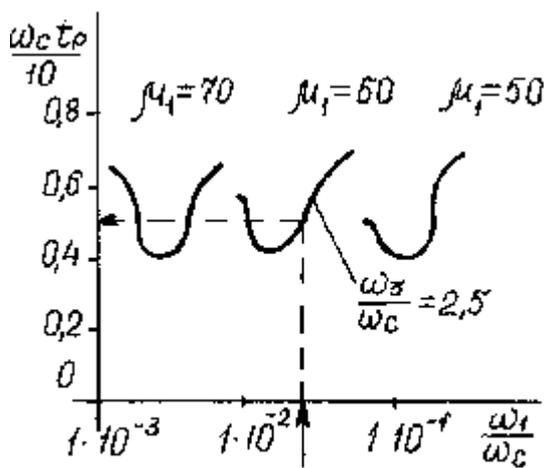
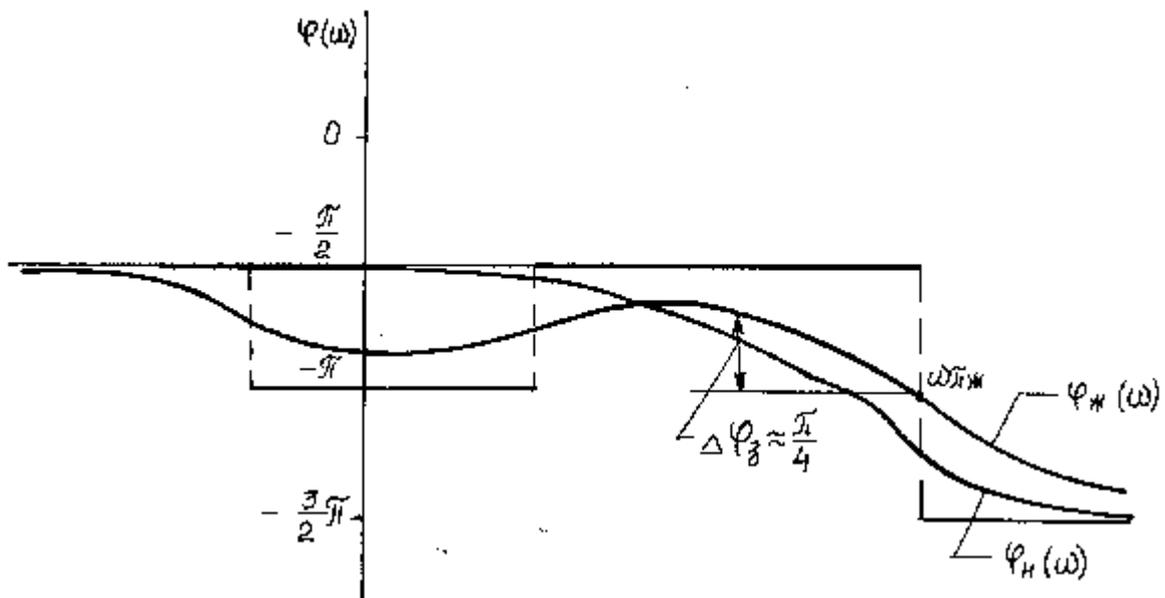
Данная задача решается приближенно, с помощью номограмм Чесната-Майера и при положительном результате показатели качества синтезированной АС уточняются более точными методами.

Чтобы воспользоваться номограммами, необходимо определить координаты входа в номограммы:

$$\mu_1 \approx 60 \text{ дБ}; \gamma = -40; \lambda = -60; \frac{\omega_3}{\omega_c} = \frac{50}{20} = 2,5; \frac{\omega_1}{\omega_c} = \frac{50}{20} = 0,03;$$

По данным координатам отыскиваем нужную номограмму и определяем t_p и Δh_m системы





$$\frac{\omega_1}{\omega_c} = 0,03$$

$$\frac{\omega_1}{\omega_c} = 0,03$$

$$\frac{\omega_c t_p}{10} \approx 0,5 \quad t_p = \frac{5}{20} = 0,25c; \quad \Delta h_m \approx 15\%;$$

Т.о. получили, что

$$t_p < t_{p \text{ зад.}} = 0,5c$$

$$\Delta h_m < \Delta h_{m \text{ зад.}} = 20\%$$

Т.е. синтезированная замкнутая АС по этим показателям качества удовлетворяет требованиям ТЗ на проектируемую систему.

Запас устойчивости по фазе $\Delta\varphi_3$ определяем по $\varphi_{жс}(\omega)$ на частоте ω_c :

$$\Delta\varphi_3 \approx \frac{\pi}{4} > \Delta\varphi_{3 \text{ зад.}} = \frac{\pi}{6}.$$

5. Определим передаточную функцию КУ:

Графическим решением уравнения

$$L_{\text{кy}}(\omega) = L_{\text{жс}}(\omega) - L_{\text{н}}(\omega)$$

Определяем $L_{\text{кy}}(\omega)$. По виду $L_{\text{кy}}(\omega)$ определим $W_{\text{кy}}(p)$.

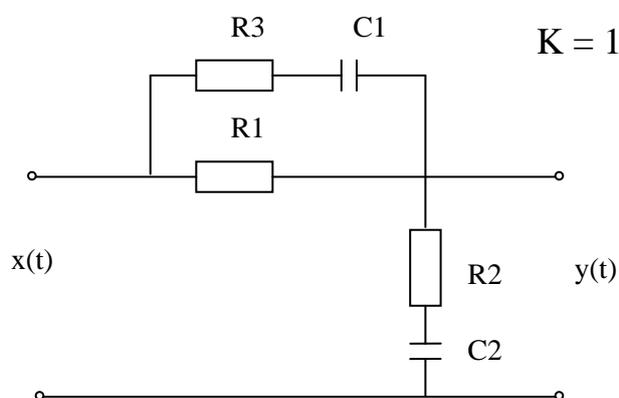
$$W_{\text{кy}}(p) = \frac{K(T_2 p + 1)(T_3 p + 1)}{(T_1 p + 1)(T_4 p + 1)}; K = 1;$$

$$T_2 = \frac{1}{5}; T_3 = \frac{1}{10}; T_1 = \frac{1}{6}; T_4 = \frac{1}{50};$$

$$W_{\text{кy}}(p) = \frac{(0,2p + 1)(0,1p + 1)}{(1,66p + 1)(0,02p + 1)}.$$

6. Рассчитает схему технической реализации КУ:

По виду $L_{\text{кy}}(\omega)$ из таблицы типовых КУ выбираем соответствующие КУ, реализованное на R-C элементах:



$$T_2 = R_2 \cdot C_2$$

$$T_3 = \frac{R_1 + R_3}{C_1}$$

$$T_1 T_4 = C_1 C_2 (R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3)$$

$$T_1 + T_4 = (R_1 + R_3) C_1 (R_1 + R_2) C_2$$

Задавая гостированным значением одного из параметров, например $C_2 = 100 \text{ мкФ}$, получим

$$R_2 = \frac{T_2}{C_2} = \frac{0,2}{100} = 2 \text{ кОм};$$

$$R_1 = 13,2 \text{ кОм};$$

$$C_1 = 5 \text{ мкФ};$$

$$R_3 = 100 \text{ Ом}.$$

2.12. Синтез параллельного КУ методом ЛАЧХ.

1. Достоинства параллельных КУ?

В АС средней и большой мощности для обеспечения заданных требований по точности и качеству управления применяются параллельные КУ, т.е. КУ, включенные в обратные связи внутренних контуров, т.к. последовательные КУ обладают двумя существенными недостатками:

- высокие требования к стабильности параметров КУ;
- наличие дифференцирующих звеньев приводит к увеличению уровня широкополосных помех, которые перегружают оконечные каска-

ды, создают нелинейный режим работы АС. Данные недостатки последовательного КУ и ограничивают возможность их применения в АС средней и большой мощности.

При удачном выборе параллельного КУ динамические свойства звена, охваченного обратной связью, определяются динамическими свойствами КУ.

Т.о., основными достоинствами параллельного КУ являются:

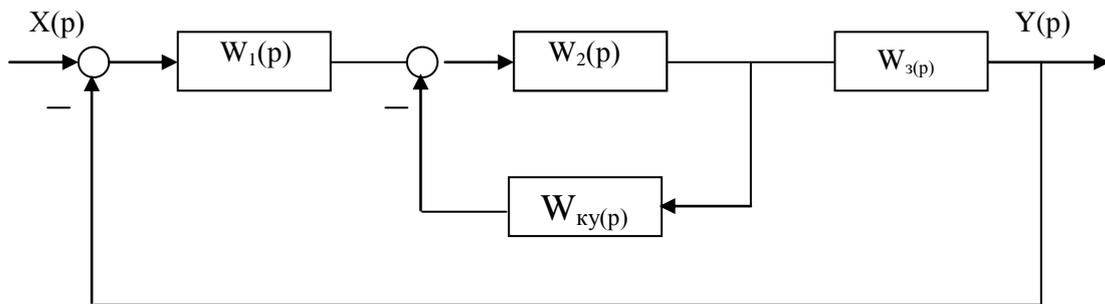
1). Применение параллельных КУ позволяет уменьшить зависимость качества АС от изменения ее параметров (звена, охваченного обратной связью с КУ)

2). Нелинейные характеристики элементов, охваченных ОС, линеаризуются, т.к. передающие свойства такого звена определяются параметрами контура ОС, т.е. параметрами параллельного КУ.

3). Выходными сигналами параллельного КУ являются мощные сигналы оконечных каскадов АС, поэтому нет необходимости в их усилении.

4). Значительно меньший, по сравнению с последовательным КУ, уровень высокочастотных помех.

2. Сущность синтеза параллельного КУ?



Передаточная функция желаемой разомкнутой системы будет:

$$W_k(p) = \frac{W_1(p)W_2(p)W_3(p)}{1 + W_2(p)W_{ку}(p)} = W_1(p)\overline{W_2}(p)W_3(p),$$

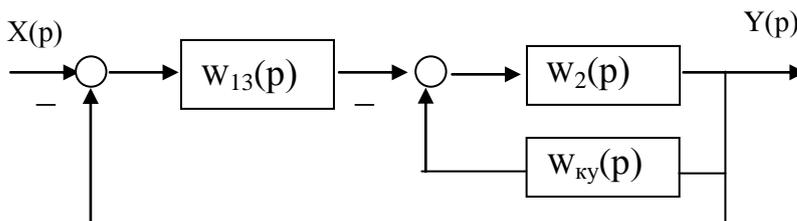
где

$$\overline{W_2}(p) = W_2(p) \frac{1}{1 + W_2(p)W_{ку}(p)} = W_2(p)\overline{W_{ку}}(p).$$

Т.о., сущность синтеза параллельного КУ вытекает из возможности замены последовательного КУ $W_{ку}(p)$ эквивалентным параллельным КУ $\overline{W_{ку}}(p)$.

3. Синтез параллельного КУ методом ЛАХ?

Структуру скорректированной системы можно представить в виде:



Тогда для разомкнутой системы:

$$W_{жс}(p) = W_{13}(p) \bar{W}_2(p), \text{ где } W_{13}(p) = W_1(p) W_3(p).$$

Тогда
$$L_{жс}(\omega) = L_{13}(\omega) + \bar{L}_2(\omega).$$

Для того, чтобы найти $L_{жс}(\omega)$ и $W_{жс}(p)$ рассмотрим более подробно связь частотной характеристики внутреннего контура $\bar{W}_2(j\omega)$ с частотными характеристиками $W_2(j\omega)$ и $W_{жс}(j\omega)$:

$$W_{жс}(p) = W_{13}(p) \cdot \bar{W}_2 = W_{13}(p) W_2(p) \bar{W}_{жс}(p) = W_{13}(p) W_2(p) \cdot \frac{1}{1 + W_2(p) W_{жс}(p)}.$$

Рассматривают два частных случая:

а)
$$|W_2(j\omega) W_{жс}(j\omega)| \ll 1.$$

Тогда
$$|W_{жс}(j\omega)| \cong 1, \bar{L}_{жс}(\omega) \cong 0,$$

$$|W_{жс}(j\omega)| = |W_{13}(j\omega) W_2(j\omega)| = |W_n(j\omega)|.$$

Следовательно, $L_{жс}(\omega) = L_n(\omega)$ и в этом случае:

$$L_2(\omega) + L_{жс}(\omega) \ll 0, L_{жс}(\omega) \ll -L_2(\omega).$$

б)
$$|W_2(j\omega) W_{жс}(j\omega)| \gg 1.$$

Тогда
$$|W_{жс}(j\omega)| \cong \left| \frac{1}{W_2(j\omega) W_{жс}(j\omega)} \right|,$$

$$\bar{L}_{жс}(\omega) = -[L_2(\omega) + L_{жс}(\omega)]$$

$$W_{жс}(j\omega) = W_{13}(j\omega) \cdot \frac{1}{W_{жс}(j\omega)}.$$

Следовательно,

$$L_{жс}(\omega) = L_{13}(\omega) - L_{жс}(\omega) < -L_n(\omega)$$

и в этом случае

$$L_2(\omega) + L_{жс}(\omega) \gg 0, L_{жс}(\omega) \gg -L_2(\omega), \text{ но при известной } L_{жс}(\omega) \text{ в диапазоне частот,}$$

$$\text{где } L_{жс}(\omega) < L_n(\omega) \quad L_{жс}(\omega) = L_{13}(\omega) - L_{жс}(\omega).$$

Т.о. во всем диапазоне частот при параллельном КУ:

$$L_{жс}(\omega) \leq L_n(\omega).$$

Если $L_{жс}(\omega) = L_n(\omega)$, то $L_{жс}(\omega) < -L_2(\omega)$,

Если $L_{жс}(\omega) < L_n(\omega)$, то $L_{жс}(\omega) > -L_2(\omega)$,

Данные соотношения накладывают на желаемую ЛАХ при параллельном способе коррекции следующие ограничения из условия реализуемости и простоты КУ:

1) параллельное КУ будет реализовано, если во всем диапазоне частот

$$L_{жс}(\omega) \leq L_n(\omega).$$

2) параллельное КУ будет тем проще, чем больше будет совпадений частот сопряжений $L_{жс}(\omega)$ и $L_{13}(\omega)$ в диапазоне частот где $L_{жс}(\omega) < L_n(\omega)$.

4. Порядок синтеза параллельного КУ?

1). Построить ЛАХ неизменной частоты системы $L_n(\omega), L_{13}(\omega)$ и $-L_2(\omega)$.

Методика построения $L_n(\omega)$ ничем не отличается от методики построения ЛАХ разомкнутой системы.

2). Построить желаемую ЛАХ разомкнутой системы.

Методика построения ЖЛАХ аналогична методике построения $L_{жс}(\omega)$ в случае последовательного КУ. При этом исходя из условий реализуемости и простоты параллельного КУ, необходимо:

– по возможности обеспечить $L_{жс}(\omega) = L_n(\omega)$ на низких и высоких частотах, т.к. в этом случае $L_{ку}(\omega)$ может иметь произвольный вид, ограничиваясь лишь условием

$$L_{ку}(\omega) < L_2(\omega);$$

– для области частот, где $L_{жс}(\omega) < L_n(\omega)$, то возможности обеспечить совпадение частот сопряжения $L_{жс}(\omega)$ и $L_{13}(\omega)$.

3). Проверить выполнение условия $L_{жс}(\omega) \leq L_n(\omega)$ на всем диапазоне частот. Если это условие нарушается, то следует увеличить коэффициент усиления исходной разомкнутой системы K до значений K^* , обеспечивающего выполнение данного условия.

Общий коэффициент усиления следует увеличить за счет K_y элементов с передаточной функцией $W_2(p)$, до K_y^* . Это выполняется следующим образом:

– $L_n(\omega)$ перемещается параллельно вверх до положения $L_n^*(\omega)$ удовлетворяющего на всем диапазоне частот условию $L_{жс}(\omega) \leq L_n^*(\omega)$;

– по первой асимптоте $L_n^*(\omega)$ определяется K_y^* ;

– по значению K_y^* определяется $K_2^* u K_y^*$:

$$K_2^* = \frac{K^*}{K_1 \cdot K_3}, \text{ но } K_2^* = K_y \cdot K_2, \text{ тогда } K_y^* = \frac{K_2^*}{K_2}.$$

– строится $-L_2^* = L_{13}(\omega) - L_n^*(\omega)$, т.е. обратная ЛАХ элементов, охватываемых КУ, с коэффициентом усиления K_2^* .

4). Оценить устойчивость замкнутой АС, у которой ЛАХ разомкнутой системы $L_{жс}(\omega)$ и с помощью номограмм Чеснота-Майера соответствие показателей качества требованиям ТЗ.

5). Определить $L_{ку}(\omega)$ и $W_{ку}(p)$ параллельного КУ исходя из:

– для областей частот где $L_{жс}(\omega) = L_n(\omega)$ или $L_{жс}(\omega) = L_n^*(\omega)$, $L_{ку}(\omega)$ строится произвольно, но с учетом условия $L_{ку}(\omega) < L_2(\omega)$ или $-L_2^*$ и простоты реализации КУ;

– для области частот где $L_{жс}(\omega) < L_n(\omega)$ или $L_{жс}(\omega) = L_n^*(\omega)$, $L_{ку}(\omega)$ определяется графическим решением уравнения

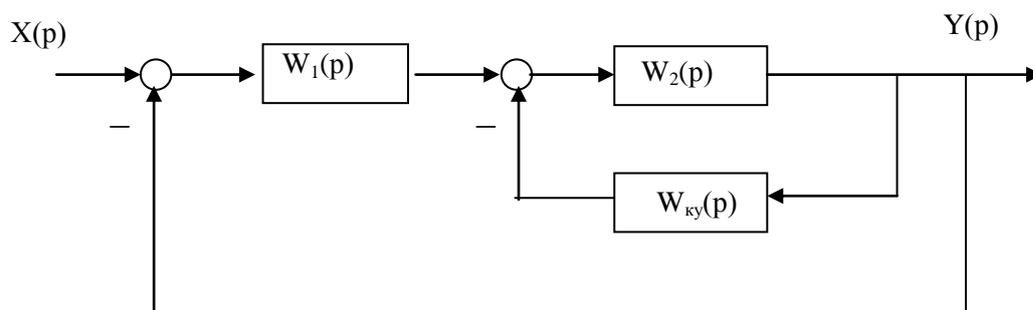
$$L_{ку}(\omega) = L_{13}(\omega) - L_{жс}(\omega).$$

По виду полученной $L_{ку}(\omega)$ находится $W_{ку}(p)$.

6). Определить и рассчитать схему технической реализации параллельного КУ.

II. Решение задач.

Структурная схема АС имеет вид



где $W_1(p) = \frac{1}{0.02p + 1}$; $W_2(p) = \frac{K^2}{P(0.1p + 1)}$.

Определить параметры параллельного КУ обеспечивающего работу АС со следующими показателями качества:

$$t_p < 0,5c; \quad \Delta h_m < 20\%; \quad \Delta\varphi > \pi/6;$$

$$e(t) = 0,02c^{-1} \quad \text{при} \quad \dot{x}_{max}(t) = 2c^{-1} \quad \text{и} \quad e(t) = 0 \quad \text{при} \quad x(t) = const.$$

Решение:

1. Определим величину коэффициента усиления разомкнутой системы исходя из условий, предъявляемых по точности к АС.

$$e(t) = S_0x(t) + S_1\dot{x}(t) + S_2\ddot{x}(t) + \dots,$$

т.к. $S_0x(t) = 0$, то $v=1$ $e(t) = S_1\dot{x}(t)$; $0,02 = S_1 \cdot 2$; откуда $S_1 = 0,01$;

В нашем примере $K = K_1 \cdot K_2 = 1 \cdot K_2$ и т.к. $v=1$, то $K = 1/S_1$, или $K = \dot{x}^{(1)}(t)/e(t)$:

$$K = \frac{1}{S_1} = \frac{\dot{x}^{(1)}(t)}{e(t)} = \frac{2}{0,02} = 100.$$

2. Убедиться в необходимости коррекции исходной АС. Для этого:

а) оценить устойчивость и запас устойчивости по фазе.

Устойчивость нескорректированной системы удобно оценить по второму следствию критерия Найквиста, т.к. исходная АС нейтральна в разомкнутом состоянии. Строим ЛАХ разомкнутой системы $L_n(\omega)$ и анализируем соотношения ω_c и ω_{π} , а также вычисляем $\Delta\varphi_3$ (см. рис. на Л7).

Исходная АС оказалась неустойчивой, т.к.

$$\omega_{сн} > \omega_{\pi},$$

следовательно, необходима коррекция.

Если бы исходная АС оказалась устойчивой с удовлетворительным $\Delta\varphi_3$, то необходимо:

б) оценить показатели качества $e(t)$, $t_p, \Delta h_m$ и т.д.

Т.к. наклон асимптоты ЛАХ нескорректированной система, на которой находится $\omega_{сн} - 40 \text{дб/дек}$, то исходная АС обладает заведомо неудовлетворительными показателями качества t_p и Δh_m . По $e(t)$ исходная АС нас удовлетворяет, т.к. при выборе K мы исходим из $e(t)_{max}$.

Если бы наклон среднечастотной асимптоты был -20дб/дек , то для оценки качества АС можно воспользоваться номограммами либо определить:

$$H(p) = \frac{\Phi(p)}{P} \Rightarrow h(t) = L^{-1}[H(p)] \begin{matrix} \nearrow t_p \\ \searrow \Delta h \end{matrix}$$

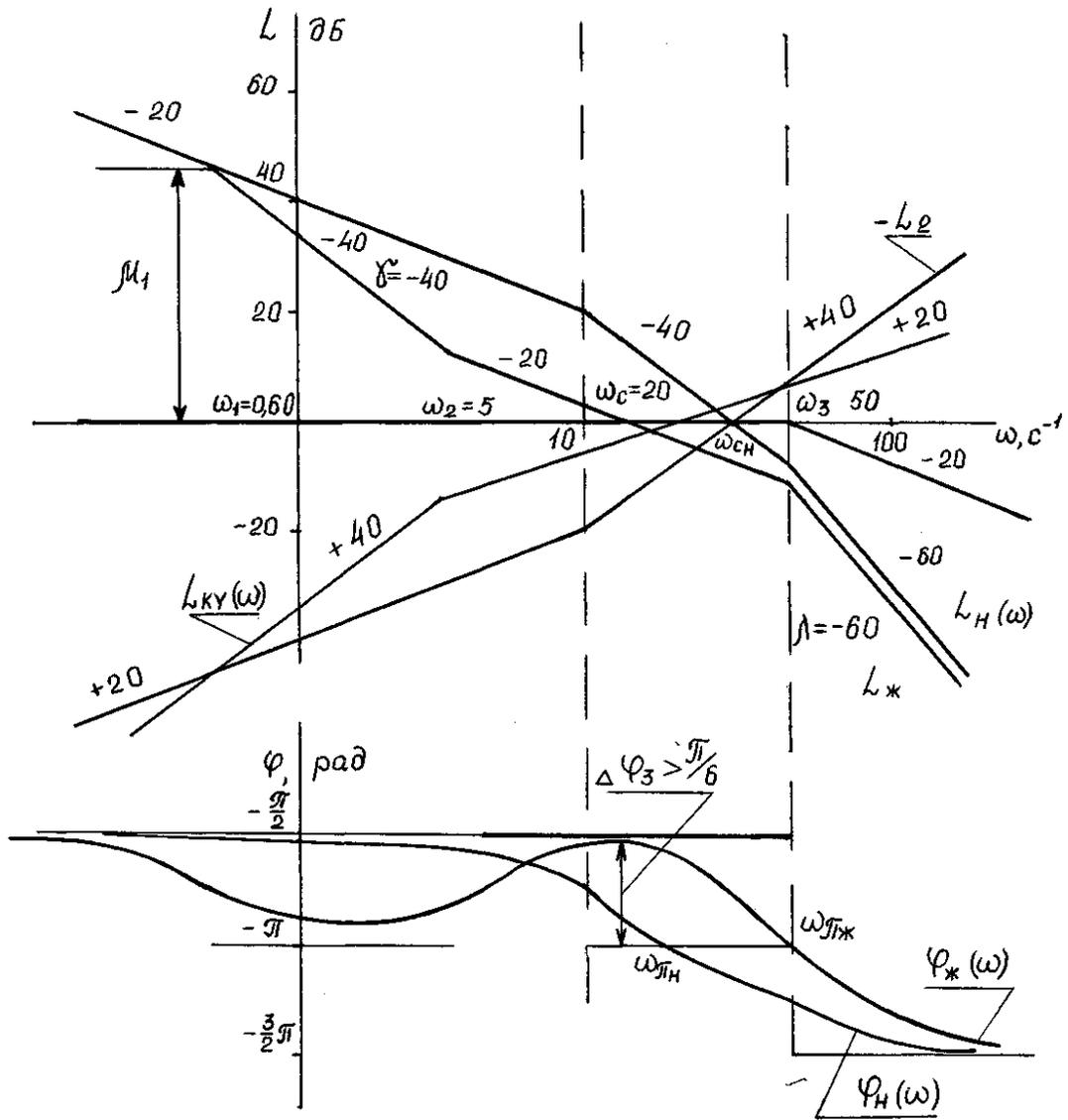
При устойчивой исходной АС сравнить $\Delta\varphi_3, t_p, \Delta h_m$ с показателями качества в ТЗ и сделать вывод о целесообразности коррекции.

3. Построим ЛАХ желаемой системы, т.е. такой, которая обеспечивает требуемые показатели качества:

– так как полученные K и ν для исходной и желаемой систем одинаковы, то

$$L_{жн}(\omega) = L_{ин}(\omega),$$

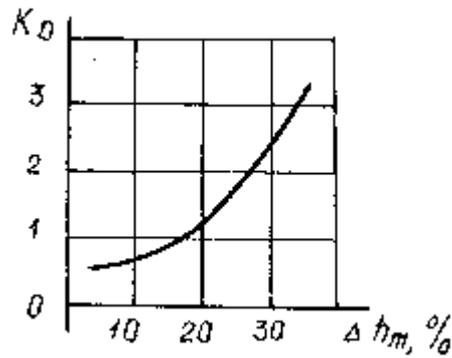
– строим среднечастотную асимптоту $L_{жс}(\omega)$:



$$W_H(\omega) = \frac{100}{p(0,1p+1)(0,02p+1)}; W_{oc}(\omega) = \frac{100(0,2p+1)}{p(1,66p+1)(0,02p+1)^2};$$

$$L(1) = 20 \lg 100 = 40, \text{ дБ.}$$

а) определим \min допустимую частоту среза $\omega_{c\min}$ из условия обеспечения заданного времени регулирования $t_p < 0,5\text{с}$ и $\Delta h_m = 20\%$.



$$\left(\omega_c = K_0 \frac{\pi}{t_h} \right) \quad \omega_c t_p = j(\Delta h_m) - \text{из пособия по КП}$$

$$\left(\omega_{c \min} = 1,2 \frac{3,14}{t_{p \max}} = 1,2 \cdot \frac{3,14}{0,5} = 7,5, c^{-1} \right)$$

$$\omega_{c \min} t_{p \max} \approx 7,5 \quad \omega_{c \min} \approx 15 c^{-1}$$

С целью обеспечения $t_{p \min}$ необходимо увеличить частоту среза. Выбираем $\omega_c \approx 20 c^{-1}$.

б) определяем допустимые границы, т.е. $\omega_{3жс}$ и $\omega_{2жс}$:

$$\omega_{3жс} \geq (2-4) \cdot \omega_{сжс}; \quad \omega_3 \geq 40-80, c^{-1}$$

Из условия простоты реализации КУ выбираем

$$\omega_3 = \omega_{с \text{опр}} = 50, c^{-1}$$

Левая граница среднечастотной асимптоты определяется из соотношения

$$\omega_{2жс} \leq \omega_3 / 10, \quad \omega_2 \leq 5, c^{-1}$$

Выбираем $\omega_2 = 5, c^{-1}$

в) через частоту $\omega_c = 20 c^{-1}$ проводим среднечастотную асимптоту с наклоном -20 дб/дек . Левая и правая границы: $\omega_2 = 5, c^{-1}$; $\omega_3 = 50 c^{-1}$:

- выполним сопряжение среднечастотной асимптоты с низкочастотной.

Данное сопряжение осуществляется прямой с \min возможным наклоном, что обеспечит max запас устойчивости по фазе желаемой АС

- строим высокочастотную асимптоту.

Высокочастотная асимптота не оказывает существенного влияния на качество системы, поэтому, если не удастся добиться точного совпадения высокочастотных $L_{жс}(\omega)$ с $L_n(\omega)$ на частоте $\omega_3 = 5, c^{-1}$, то ее проводим параллельно $L_n(\omega)$.

- строим $\varphi_{жс}(\omega)$.

4. С помощью номограмм Чеснота-Майера определяем Δh_m и t_p , предварительно оценив устойчивость, и $\Delta \omega_3$ синтезированной системы.

$$\omega_{сжс} < \omega_{лжс}, \text{ - АС устойчива, } \Delta \omega_3 > \pi/6.$$

Определим параметры входа в номограммы:

$$\mu_1=50 \text{ дБ}, \quad \gamma=-40 \text{ дБ/дк}, \quad \lambda=-60 \text{ дБ/дк}, \quad \frac{\omega_1}{\omega_c} = 0,03, \quad \frac{\omega_3}{\omega_c} = 2,5.$$

По этим данным входим в соответствующие номограммы из которых определяем

$$\frac{\omega_c t_p}{10} \approx 0,5 \rightarrow t_p \approx 0,25; \Delta h_m \approx 15\%.$$

Следовательно: $t_p=0,25 < t_{p \text{ зад}}=0,5 \text{ с}$, $\Delta h_m=15\% < \Delta h_{m \text{ зад}}=20\%$.

Т.о. синтезированная АС по всем показателям качества удовлетворяет требованиям ТЗ на проектируемую систему.

5. Определяем $L_{\text{ку}}(\omega)$ и $W_{\text{ку}}(\omega)$ параллельного КУ.

Для диапазонов частот, где $L_{\text{жс}}(\omega)=L_{\text{жс}}(\omega)$

$$L_{\text{ку}}(\omega) \leq -L_2(\omega)$$

С целью упрощения КУ частоты сопряжения ω_1 и ω_3 можно не учитывать.

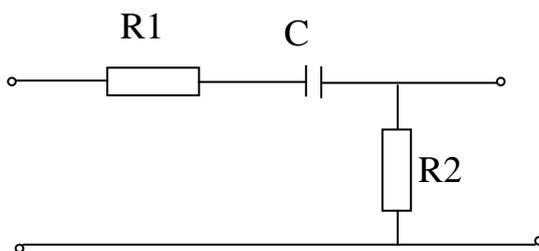
По виду $L_{\text{ку}}(\omega)$ запишем передаточную функцию полученного параллельного корректирующего устройства.

$$W_{\text{ку}}(p) = \frac{KP^2}{T_2P + 1} = P \cdot \frac{KP}{T_2P + 1}.$$

С помощью справочника подбираем электрическую схему реализации КУ и рассчитываем ее параметры:

-дифференцирующее звено реализуется обычно с помощью тахогенератора;

$W_p = \frac{KP}{T_2P + 1}$ реализуется на пассивных R—C цепочках:



$$K=R_2C$$

$$T_2=(R_1+R_2)C.$$

Задаваясь значением одного из параметров электрической цепи из единого ряда, можем вычислить два других параметра.

Вывод: в качестве параллельных КУ обычно применяются фазопережающие звенья, которые вводят в прямой тракт АС производные от выходного сигнала устройства, охваченного внутренней обратной связью. В результате уменьшается отрицательное фазовое смещение, возникающее в разомкнутой АС. Это позволяет увеличить запас устойчивости и быстродействия системы.

С целью достижения физической реализуемости полученного КУ нужно учитывать инерционность тахогенератора, либо, не нарушая правила, что для частот где $L_{\text{жс}}(\omega)=L_{\text{жс}}(\omega)$ $L_{\text{ку}} < -L_2$, в передаточную функции $W_{\text{ку}}(p)$ ввести инерционные звенья.

2.13. Основы линеаризации дифференциальных уравнений нелинейных АС.

В общем случае любая АС является нелинейной, т.е. к ней не применим принцип суперпозиции. Исследование же нелинейных АС связано со значительными трудностями (работы А.М. Ляпунова и др.), поэтому уже на этапе математического описания систем стараются линеаризовать их операторы. Для этого применяется метод линеаризации, позволяющий заменить точные нелинейные дифференциальные уравнения приближенными линейными дифференциальными уравнениями того же порядка.

Суть метода: рассматривается движение системы в малой окрестности одного конкретного движения, называемого *опорным*.

В качестве опорного может выступать установившееся движение АС.

Основные допущения метода линеаризации:

1. Величины, вызывающие отклонение фактического движения от опорного являются малыми, т.е. малыми являются:

$$\Delta x(t) = x(t) - x^o(t); \quad f_i(t) \neq 0; \quad \Delta y_{i_0}(t) = y_{i_0}(t) - y_{i_0}^o(t) \quad (\text{НУ}).$$

2. Функции f_i (оператор АС) являются гладкими, т.е. дифференцируемы по всем аргументам в точке, соответствующей опорному движению.

При выполнении 1-го допущения, второе допущение определяет малость отклонения фактического движения от опорного: $\Delta y_i = y_i - y_i^o$.

Рассмотрим методику линеаризации на примере нелинейного дифференциального уравнения 2-го порядка, описывающего АС с одним входом и одним выходом:

$$F[y^{(2)}(t), y^{(1)}(t), y(t), x^{(1)}(t), x(t), f(t), t] = 0, \quad (1)$$

где $y(t)$ – выходной сигнал, $x(t)$ – входной сигнал, $f(t)$ – помеха.

За опорное движение принимаем установившееся движение системы, т.е.

$$x(t) = x^o(t), \quad y(t) = y^o(t), \quad f(t) = 0, \quad t - \text{фиксированный параметр.}$$

С учетом принятых допущений, функцию (1) можно разложить в ряд Тейлора:

$$\begin{aligned} F[y^{(2)}(t), y^{(1)}(t), y(t), x^{(1)}(t), x(t), f(t), t] = & F[y^{(2)o}, y^{(1)o}, y^o, x^{(1)o}, x^o, 0, t] + \\ & + \left(\frac{dF}{dy^{(2)}} \right)^o \Delta y^{(2)} + \left(\frac{dF}{dy^{(1)}} \right)^o \Delta y^{(1)} + \left(\frac{dF}{dy} \right)^o \Delta y + \left(\frac{dF}{dx^{(1)}} \right)^o \Delta x^{(1)} + \left(\frac{dF}{dx} \right)^o \Delta x + \\ & + \left(\frac{dF}{df} \right)^o f + \frac{1}{2!} \left(\frac{d^{(2)}F}{dy^{(2)}} \right)^o \Delta y^{(2)} + \frac{1}{2!} \left(\frac{d^2F}{dy^{(2)}y^{(1)}} \right)^o \Delta y^{(2)} y^{(1)} + \dots = 0. \end{aligned}$$

O_1

O_1 – члены высшего порядка малости, которые полагаются равными нулю.

$F[y^{(2)o}, y^{(1)o}, y^o, x^{(1)o}, x^o, 0, t]$ – уравнение опорного движения, из которого определяются координаты опорного движения.

Тогда линеаризованное дифференциальное уравнение системы будет иметь вид:

$$a_2 \Delta y^{(2)} + a_1 \Delta y^{(1)} + a_0 \Delta y - b_1 \Delta x^{(1)} - b_0 \Delta x - cf = 0,$$

где $\left(\frac{dF}{dy^{(2)}}\right)^o = a_2; \quad \left(\frac{dF}{dy^{(1)}}\right)^o = a_1; \quad \left(\frac{dF}{dy}\right)^o = a_0;$

$$\left(\frac{dF}{dx^{(1)}}\right)^o = -b_1; \quad \left(\frac{dF}{dx}\right)^o = -b_0; \quad \left(\frac{dF}{df}\right)^o = -c.$$

Или в стандартной форме

$$a_2 \Delta y^{(2)} + a_1 \Delta y^{(1)} + a_0 \Delta y = b_1 \Delta x^{(1)} + b_0 \Delta x + cf.$$

Т.к. t – фиксированный параметр, то коэффициенты линеаризованного уравнения представляют a_i собой константы. В общем случае они являются функциями времени $a_i(t), b_i(t), c_i(t)$, т.к. t входит в список аргументов функций f_i , а сам оператор АС при этом является нестационарным.

1. Оператор НАС записывается в виде [1];
2. По заданным значениям опорного входного сигнала $x^{(1)^\circ}, x^\circ$ и при отсутствии возмущения $f_i=0$ из уравнения опорного движения определяются координаты опорного выходного сигнала $y^{(2)^\circ}, y^{(1)^\circ}, y^\circ$.
3. Разлагаем в ряд Тейлора исходное линеаризуемое дифференциальное уравнение и на опорном движении определяем частные производные (при фиксированном t для стационарной АС):

$$\left(\frac{dF}{dy^{(2)}}\right)^o; \quad \left(\frac{dF}{dy^{(1)}}\right)^o; \quad \dots \left(\frac{dF}{df}\right)^o.$$

4. Записывается линейное дифференциальное уравнение АС (оператор АС) с вычисленными коэффициентами.

Примечание: если оператор АС задан системой дифференциальных уравнений, то указанные выше операции осуществляются по отношению к каждому уравнению системы.

Задача №1.

Оператор НАС имеет вид:

$$F = y^{(3)}(t) + 2y^{(1)}(t)[1 + y^{(2)}(t)] + [1 + f(t)]y^{(1)}(t) + y(t) - x(t) = 0.$$

За опорное принято движение с постоянной скоростью при $x^\circ(t) = 2t + 1$.

Требуется построить структурную схему линеаризованной системы.

Решение:

1. Оператор НАС запишем в виде [1]:

$$F[y^{(3)}(t), y^{(2)}(t), y^{(1)}(t), y(t), x(t), f(t)] = 0.$$

2. Запишем уравнение опорного движения, вытекающее из исходного нелинейного оператора, и вычислим его координаты.

$$F^\circ = y^{(3)^\circ} + 2y^{(1)^\circ} [1 + y^{(2)^\circ}] + [1 + f^\circ] y^{(1)^\circ} + y^\circ - x^\circ = 0.$$

По условию $y^{(1)^\circ}(t) = \text{const} = a$, тогда $y^\circ(t) = at + b$, $y^{(2)^\circ} = y^{(3)^\circ} = 0$.

Кроме того $f^\circ = 0$. Неизвестными координатами опорного движения являются коэффициенты a и b . Тогда

$$F^\circ = 0 + 2a[1+0] + [1+0]a + at + b - 2t - 1 = 0 \quad \text{или} \quad 3a + b + at - 2t - 1 = 0.$$

Полученное равенство справедливо при любом t только тогда, когда коэффициенты при различных степенях переменной t в правой и левой частях равны.

$$\left. \begin{array}{l} t^0 \\ t^1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 3a + b - 1 = 0, \\ a - 2 = 0. \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} a = 2; \\ b = -5. \end{array} \quad y^\circ(t) = 2t - 5.$$

3. Разлагаем ряд Тейлора исходное дифференциальное уравнение и на опорном движении определяем значения частных производных:

$$\left(\frac{dF}{dy^{(3)}}\right)^\circ \Delta y^{(3)} + \left(\frac{dF}{dy^{(2)}}\right)^\circ \Delta y^{(2)} + \left(\frac{dF}{dy^{(1)}}\right)^\circ \Delta y^{(1)} + \left(\frac{dF}{dy}\right)^\circ \Delta y +$$

$$+ \left(\frac{dF}{dx}\right)^\circ + \left(\frac{dF}{df}\right)^\circ f = 0 \dots \dots \dots (m.k. \Delta f = f - f^\circ = f).$$

$$\left(\frac{dF}{dy^{(3)}}\right)^\circ = 1; \quad \left(\frac{dF}{dy^{(2)}}\right)^\circ = (2y^{(1)})^\circ = 2a = 4;$$

$$\left(\frac{dF}{dy^{(1)}}\right)^\circ = 2(1 + y^{(2)^\circ}) + (1 + f^\circ) = 3; \quad \left(\frac{dF}{dy}\right)^\circ = 1; \quad \left(\frac{dF}{dx}\right)^\circ = -1;$$

4. Записываем линейризованное дифференциальное уравнение в малых приращениях с вычисленными коэффициентами:

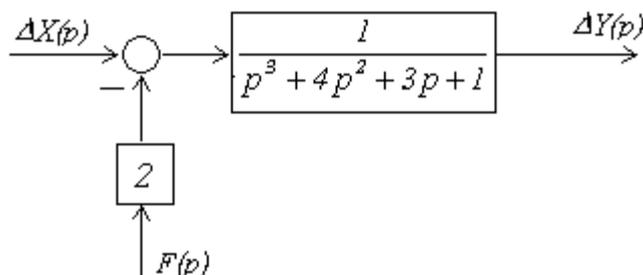
$$\Delta y^{(3)}(t) + 4\Delta y^{(2)}(t) + 3\Delta y^{(1)}(t) + \Delta y(t) = \Delta x(t) - 2f(t).$$

5. Построим структурную схему линейризованной АС.

Оператор линейной системы в изображении по Лапласу при нулевых НУ ($\Delta y_0 = \Delta y_0^{(1)} = \Delta y_0^{(2)} = \dots = 0$) имеет вид:

$$(p^3 + 4p^2 + 3p + 1)\Delta Y(p) = \Delta X(p) - 2F(p);$$

$$\Delta Y(p) = \frac{1}{p^3 + 4p^2 + 3p + 1} [\Delta X(p) - 2F(p)].$$



Задача №2.

Оператор НАС имеет вид:

$$\begin{cases} \{y_1^{(1)^2}(t) - 2y_1(t) + f^2(t) + 2 = 0, \\ y_2^{(1)}(t)[1 + f(t)] + y_1(t) - u(t) + y_2(t) + t = 0, \end{cases}$$

где u – управление (входной сигнал),

y_1, y_2 – выходы системы,

f – помеха (шумы) системы.

За опорное движение принимается движение системы с линейно изменяющимися фазовыми координатами:

$$y_1^o(t) = a_1 t + b_1; \quad y_2^o(t) = a_2 t + b_2; \quad \text{при} \quad u^o(t) = 2t + 1.$$

Требуется изобразить структурную схему линеаризованной АС.

Решение:

1. Определяем параметры опорного движения из исходной системы нелинейных уравнений: a_1, a_2, b_1, b_2 .

Т.к. $y_1^o(t) = a_1 t + b_1$, то $y_1^o(t) = a_1$, аналогично $y_2^o(t) = a_2$.

$$\begin{cases} F_1(y_1^{(1)^o}, y_1^o, u^o, 0) = a_1^2 - 2(a_1 t + b_1) - 3(2t + 1) + 2 = 0, \\ F_2(y_2^{(1)^o}, y_2^o, y_1^o, u^o, 0, t) = a_2(1 + 0) + (a_1 t + b_1) - (2t + 1) + (a_2 t + b_2) + t = 0, \\ (f^o = 0 \text{ для опорного движения}). \end{cases}$$

$$\begin{matrix} t^0 \\ t^1 \end{matrix} \left| \begin{matrix} a_1^2 - 2b_1 - 1 = 0, \\ -2a_1 - 6 = 0. \end{matrix} \right\} \Rightarrow \begin{matrix} a_1 = -3; \\ b_1 = 4. \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} t^0 \\ t^1 \end{matrix} \left| \begin{matrix} a_2 + b_1 + b_2 - 1 + 0, \\ a_1 + a_2 - 1 = 0. \end{matrix} \right\} \Rightarrow \begin{matrix} a_2 = 1 - a_1 = 4; \\ b_2 = 1 - a_2 - b_1 = -7. \end{matrix}$$

Таким образом $y_1^o(t) = -3t + 4, \quad y_1^{(1)^o} = -3,$
 $y_2^o(t) = 4t - 7, \quad y_2^{(2)^o} = 4.$

2. Разлагаем систему нелинейных дифференциальных уравнений, описывающих НАС, в ряд Тейлора и определяем частные производные функций F_1 и F_2 на опорном движении:

$$\begin{cases} \left[\left(\frac{dF_1}{dy_1^{(1)}} \right)^o \Delta y_1^{(1)} + \left(\frac{dF_1}{dy_1} \right)^o \Delta y_1 + \left(\frac{dF_1}{du} \right)^o \Delta u + \left(\frac{dF_1}{df} \right)^o f = 0; \\ \left[\left(\frac{dF_2}{dy_2^{(1)}} \right)^o \Delta y_2^{(1)} + \left(\frac{dF_2}{dy_2} \right)^o \Delta y_2 + \left(\frac{dF_2}{dy_1} \right)^o \Delta y_1 + \left(\frac{dF_2}{du} \right)^o \Delta u = 0. \right. \\ \left. \left[\left(\frac{dF_2}{dt} \right)^o = 0, \quad \text{т.к. } t \text{ фиксировано.} \right] \right\}$$

$$\left(\frac{dF_1}{dy_1^{(1)}} \right)^o = 2(y_1^{(1)^o})^o = 6; \quad \left(\frac{dF_1}{dy_1} \right)^o = -2; \quad \left(\frac{dF_1}{du} \right)^o = -3; \quad \left(\frac{dF_1}{df} \right)^o = 2f^o = 0;$$

$$\left(\frac{dF_2}{dy_2^{(1)}}\right)^o = (1 + f^o) = 1; \quad \left(\frac{dF_2}{dy_2}\right)^o = 1; \quad \left(\frac{dF_2}{dy_1}\right)^o = 1; \quad \left(\frac{dF_2}{du}\right)^o = -1;$$

$$\left(\frac{dF_2}{df}\right)^o = (y_2^{(1)})^o = 4.$$

3. Записываем систему линеаризованных дифференциальных уравнений в малых приращениях с постоянными коэффициентами, описывающую движение линейной системы относительно выбранного опорного движения:

$$-6\Delta y_1^{(1)}(t) - 2\Delta y_1(t) = 3\Delta u(t);$$

$$\Delta y_2^{(1)}(t) + \Delta y_2(t) + \Delta y_1(t) = \Delta u(t) - 4f(t).$$

Или в операторной форме:

$$(-6p-2)\Delta Y_1(p) = 3\Delta U(p);$$

$$(p+1)\Delta Y_2(p) + \Delta Y_1(p) = \Delta U(p) - 4F(p).$$

2.14. Исследование устойчивости автоколебаний в нелинейных системах методом Гольдфарба.

1. Сущность метода гармонической линеаризации?

Сущность метода гармонической линеаризации заключается в распространении частотных методов на нелинейные системы. Для этого необходимо НЭ аппроксимировать посредством приближенной линейной передаточной функцией (ПФ) $W_n(p)$.

Указанная аппроксимация выполняется в частотной области путем разложения в ряд Фурье реакции НЭ на гармонический входной сигнал.

Для различных типов НЭ существуют аппроксимирующие ПФ:

$$W_n(p, A) = \frac{4B}{\pi A} \text{ — идеальное реле;}$$

$$W_n(p, A) = \frac{4B}{\pi A} \sqrt{1 - \frac{a^2}{A^2}}, \quad A \geq a \text{ — реле с зоной нечувствительности}$$

(трехпозиционное реле);

$$W_n(p, A) = \frac{4B}{\pi A} \sqrt{1 - \frac{a^2}{A^2} - j \frac{a}{A}}, \quad A \geq a \text{ — реле с зоной неоднозначности}$$

(двухпозиционное реле).

2. Что называется передаточной функцией (ПФ) НЭ?

ПФ НЭ называется отношение изображения по Лапласу первой гармоники выходного сигнала НЭ к изображения по Лапласу гармонического входного сигнала при нулевых н. у.

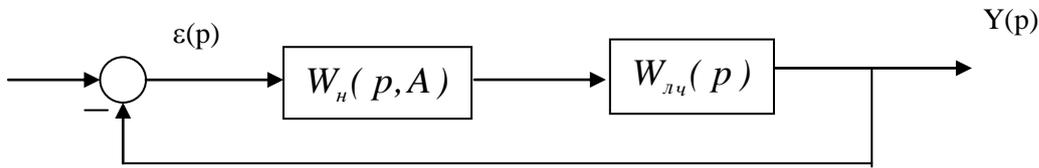
3. Что называется автоколебаниями (АК) в нелинейных АС и чем они характеризуются?

АК называется периодическое движение нелинейной АС с постоянной амплитудой A_a и частотой ω_a под действием постоянного, в том числе и нулевого входного сигнала.

АК характеризуются амплитудой A_a и частотой ω_a .

Для линейной АС, в состав которой включены гармонически линеаризованные НЭ, АК соответствуют нахождению ее на границе устойчивости.

Параметры АК A_a и ω_a аналитически можно определить из решения комплексного уравнения гармонического баланса (УГБ), которое, для указанной АС, имеет вид:



$$\varepsilon(p) = -Y(p), \text{ при } X(p) = 0. \quad Y(p) = \varepsilon(p) \cdot W_0(p); \Rightarrow W_0(p) = -1;$$

$$W_0(j\omega) = W_n(j\omega, A) \cdot W_{лч}(j\omega) = -1$$

Это уравнение эквивалентно двум скалярным равенствам:

- уравнению баланса амплитуд:

$$|W_n(j\omega, A)| \cdot |W_{лч}(j\omega)| = 1.$$

- уравнению баланса фаз:

$$\arg W_n(j\omega, A) + \arg W_{лч}(j\omega) = -\pi + 2k\pi,$$

где $k=0; \pm 1; \pm 2 \dots$

Автоколебания в системе существуют, если управление гармонического баланса имеет решение.

4. Сущность графоаналитического метода Гольдфарба?

Метод Гольдфарба позволяет решить вопрос об устойчивости автоколебаний в системе.

При использовании метода Гольдфарба пользуются обратной частотной характеристикой гармонически линеаризованного НЭ:

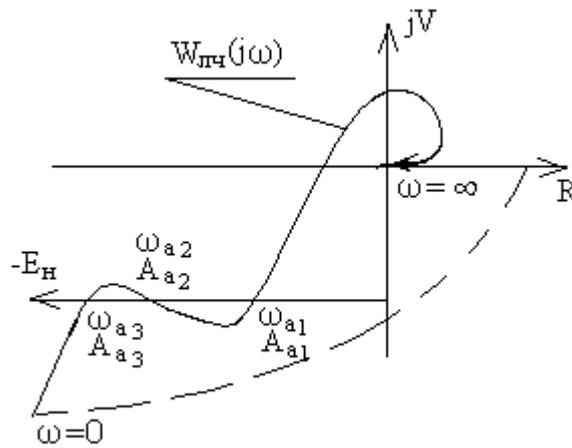
$$E_n(j\omega, A) = W_n^{-1}(j\omega, A).$$

Тогда управление гармонического баланса преобразуется к виду:

$$W_{лч}(j\omega) = -E_n(j\omega, A)$$

Графоаналитическому решению этого уравнения соответствует точка пересечения годографа линейной части АС, размеченного частотной, и годографа отрицательной обратной частотной характеристики НЭ, размеченного амплитудой.

Если указанные годографы не пересекаются, то автоколебания в системе отсутствуют.



Автоколебания с найденными параметрами A_{a_i} , ω_{a_i} будут устойчивыми, если годограф $-E_H(j\omega, A)$ при переходе через точку пересечения с годографом $W_{лч}(j\omega)$ выходит из области, охватываемой годографом $W_{лч}(j\omega)$.

Задача №1.

Передаточная функция линейной части АС имеет вид:

$$W_{лч}(p) = \frac{K}{Tp + 1};$$

Определить выражение для АЧХ и ФЧХ.

$$1. p \rightarrow j\omega: W_{лч}(j\omega) = \frac{K}{1 + jT\omega};$$

$$2. |W_{лч}(j\omega)| = \left| \frac{K}{1 + jT\omega} \right| = \frac{|K|}{|1 + jT\omega|} = \frac{K}{\sqrt{T^2\omega^2 + 1}}.$$

$$3. \arg W_{лч}(j\omega) = \arg K - \arg(1 + jT\omega) = -\arctg T\omega.$$

Задача №2.

Передаточная функция АС имеет вид:

$$W_{лч}(p) = \frac{2p + 3}{(4p + 1)^2};$$

Определить выражения для АЧХ и ФЧХ.

Решение:

$$1. p \rightarrow j\omega: W_{лч}(j\omega) = \frac{2j\omega + 3}{(4j\omega + 1)^2};$$

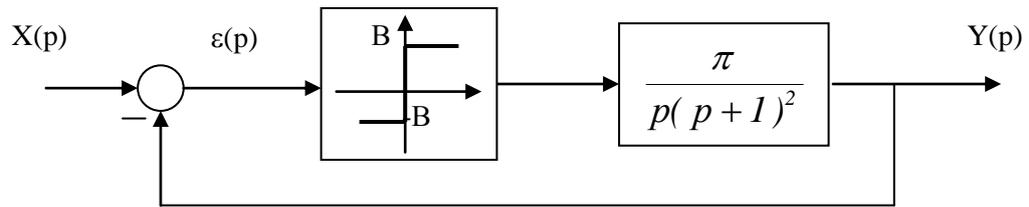
$$2. |W_{лч}(j\omega)| = \left| \frac{2j\omega + 3}{(4j\omega + 1)^2} \right| = \frac{|2j\omega + 3|}{|(4j\omega + 1)^2|} = \frac{\sqrt{4\omega^2 + 9}}{16\omega^2 + 1}.$$

$$3. \arg W_{лч}(j\omega) = \arg \frac{2j\omega + 3}{(4j\omega + 1)^2} = \arg(2j\omega + 3) - 2\arg(4j\omega + 1) = \arctg \frac{2}{3}\omega -$$

$\arctg 4\omega$

Задача №3.

Определить параметры устойчивых автоколебаний в АС, структурная схема которой имеет вид:



$$B=10, B \quad W_n(A) = \frac{4B}{\pi A}$$

Решение:

1. Поскольку АФЧХ гармонически линеаризованного НЭ от частоты не зависит, то из уравнения баланса фаз определим частоту возможных автоколебаний:

$$\arg W_n(j\omega, A) + \arg W_{лч}(j\omega) = -\pi + 2k\pi,$$

т.к. $\arg W_n(j\omega, A) = 0$, а $\arg W_{лч}(j\omega) = \arg \frac{\pi}{j\omega(1+j\omega)^2}$, то

$$\arg \frac{\pi}{j\omega(1+j\omega)^2} = -\pi + 2k\pi,$$

$$\arg \pi - \arg(j\omega) - 2 \arg(1+j\omega) = -\pi + 2k\pi;$$

$$-\pi/2 - 2 \arctg \omega = -\pi + 2k\pi$$

$$\arctg \omega = \pi/4 - k\pi; \quad \omega = \omega_a = 1, \quad c^{-1}$$

2. Подставив в уравнение баланса амплитуд частоту возможных автоколебаний в системе ω_a , определим амплитуду автоколебаний A_a :

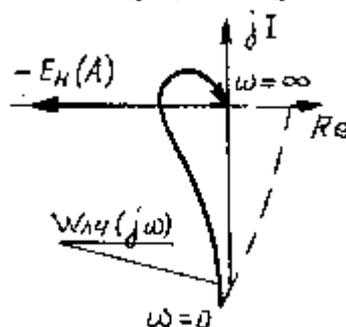
$$|W_n(j\omega, A)| \cdot |W_{лч}(j\omega)| = 1.$$

$$\frac{4B}{\pi A} \cdot \frac{\pi}{\omega_a(1+\omega_a^2)} = 1; \quad A = A_a = \frac{4B}{\omega_a(1+\omega_a^2)} \Big|_{\omega_a=1};$$

$$A_a = 20, B.$$

3. Вопрос об устойчивости автоколебаний решается методом Гольдфарба. Для этого графически решается уравнение

$$W_{лч}(j\omega) = -E_n(j\omega, A).$$



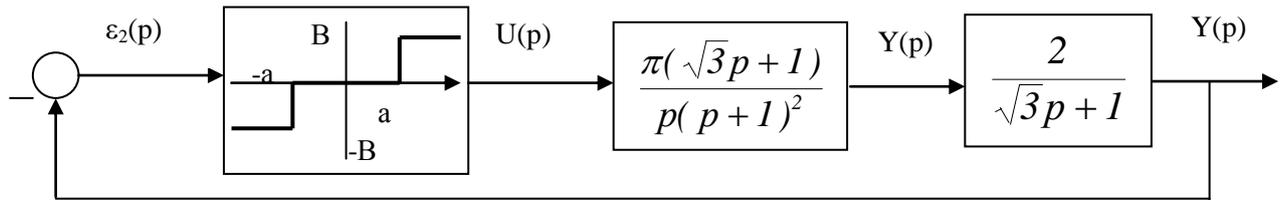
Единственная точка пересечения годографов - $E_n(A)$ и $W_{лч}(j\omega)$ с координатами (ω_a, A_a) и соответствует устойчивым автоколебаниям.

Примечание:

При единственном решении можно и не строить годографы.

Задача №4.

Определить параметры устойчивых автоколебаний в АС, структурная схема которой имеет вид:



$$B=0,25, \text{ В}; a=0,3, \text{ В}; W_n(A) = \frac{4B}{\pi A} \sqrt{1 - \frac{a^2}{A^2}};$$

Решение:

1. Из уравнения балансов фаз определяем частоту автоколебаний для $Y(p)$:

$$\arg W_n(A) + \arg W_{лч}(j\omega) = -\pi + 2k\pi,$$

где $\arg W_n(A) = 0$, а $W_{лч}(j\omega) = \frac{2\pi}{j\omega(1+j\omega)^2}$.

Тогда $\arg W_{лч}(j\omega) = \arg \frac{2\pi}{j\omega(1+j\omega)^2} = -\pi + 2k\pi,$

$$-\pi/2 - 2\arctg \omega = -\pi + 2k\pi;$$

Откуда $\omega = \omega_a = 1$.

2. Подставив найденную частоту ω_a в уравнение баланса амплитуд, определим амплитуду АК-й для $Y(p)$:

$$|W_n(A)| \cdot |W_{лч}(j\omega)| = 1;$$

$$\frac{4B}{\pi A} \cdot \sqrt{1 - \frac{a^2}{A^2}} \cdot \frac{2\pi}{\omega(1+\omega^2)} \Big|_{\omega_a=1} = 1;$$

откуда $A^2 - a^2 = A^4;$

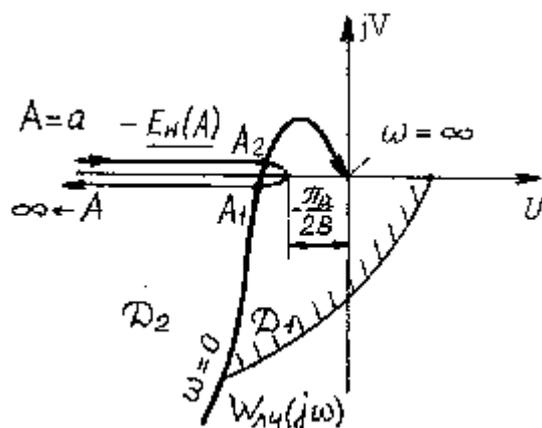
$$A^4 - A^2 + a^2 = 0 \Rightarrow A^4 - A^2 + 0,09 = 0;$$

$$A^2 = 0,5 \pm 0,4; \quad A_1^2 = 0,9; \quad A_2^2 = 0,1;$$

Существующий считаются АК-я с положительной амплитудой, поэтому

$$A \approx 0,95; \quad A \approx 0,34;$$

3. Методом Гольдфарба определяем параметры устойчивых АК-й:



Устойчивыми являются АК-я с большой амплитудой, т.е. $A_a = A_1 \approx 0,95$, т.к. годограф $-E_n(A)$ при увеличении амплитуды A выходит из области D_1 в область D_2 .

III. Порядок решения задач.

1. Структурная схема системы приводится к виду, когда на НЭ воздействует гармонический входной сигнал. В этом случае его можно гармонически линеаризовать.

2. Строится приближенно АФЧХ линейной части системы.

3. Строится отрицательная обратная частотная характеристика линеаризованного НЭ $-E_n(A)$ и анализируются точки её пересечения с годографом АФЧХ на предмет существования в АС устойчивых автоколебаний.

Если пересечение годографов невозможно, то автоколебаний в системе не возникает.

Если приближенно построенные годографы имеют точку (или точку) пересечения, то решая последовательно уравнения баланса фаз или амплитуд определяют значения частоты (частот) и амплитуды (амплитуд) устойчивых автоколебаний.

Решение уравнения гармонического баланса можно искать как аналитически, так и графоаналитически.

4. Если необходимо, определяется амплитуда автоколебаний выходного сигнала исходной системы.

2.15. Определение передаточных функций дискретных АС на основе Z-преобразований.

1. Что называется ДАС?

2. Какая функция называется решетчатой?

$$- \{x_i\} = \{x(t = iT)\} = \{x_0, x_1, x_2 \dots\};$$

$$- \{x_i\} = \sum_{i=0}^{\infty} x_i \delta(t - iT).$$

3. Чем описываются процессы, происходящие в дискретных АС?

В непрерывных системах процессы описываются дифференциальными уравнениями. Аналогом дифференциальных уравнений в импульсных АС являются разностные уравнения:

$$\text{-первая разность } \{\Delta x_i\} = \{x_i\} - \{x_{i-1}\}, \quad \Delta x_0 = x_0;$$

$$\text{-разность } n\text{-ного порядка } \{\Delta^n x_i\} = \{\Delta^{n-1} x_i\} - \{\Delta^{n-1} x_{i-1}\} = \sum_{\kappa=0}^n \{x_{i-\kappa}\} C_n^\kappa (-1)^\kappa,$$

где $C_n^\kappa = \frac{n!}{\kappa!(n-\kappa)!}$.

Аналогом процесса интегрирования в импульсных системах является операция дискретного Σ :

$$\frac{1}{\Delta} \{x_i\} = \{\lambda_i\}, \quad \text{где } \lambda_i = \sum_{\kappa=0}^i x_\kappa, \quad i=0,1,\dots$$

4. Что называется Z-преобразованием?

Под Z-преобразованием решетчатой функции $\{x_i\}$ понимается степенной ряд относительно переменной z^{-i} , где $z = e^{pT}$.

$$Z[\{x_i\}] = X(z) = \sum_{i=0}^{\infty} x_i z^{-i}, \quad i=0 \div \infty.$$

Тогда Z-преобразование последовательностей сдвинутых на κ тактов в сторону запаздывания или опережения:

$$Z[\{x_{i-\kappa}\}] = z^{-\kappa} X(z); \quad Z[\{x_{i+\kappa}\}] = z^{\kappa} X(z);$$

Z-преобразование решетчатой функции κ -ой разности:

$$Z[\{\Delta^\kappa x_i\}] = (1 - z^{-1})^\kappa X(z).$$

Z-преобразование суммы числовой последовательности:

$$\left| Z \left[\frac{1}{\Delta} \{x_i\} \right] = \lambda(z) = \frac{X(z)}{1 - z^{-1}} \right|.$$

5. Что называется λ_p^Z -преобразованием?

Преобразованием λ_p^Z называется операция перехода от функции с комплексной переменной p к функции с комплексной переменной z .

$$\lambda_p^Z [X(p)] = Z[\{L^{-1}(X(p))\}] = X(z).$$

λ_p^Z -преобразование, так как и L^{-1} линейно, поэтому

$$\lambda_p^Z [X(p)Y(p)] = \lambda_p^Z [X(p)] \cdot \lambda_p^Z [Y(p)].$$

L^{-1} - обратное преобразование Лапласа, которое позволяет перейти от функции с комплексной переменной p к функции от времени t .

Методы обращения преобразования Лапласа:

а) прямой

$$y(t) = L^{-1}[Y(p)] = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} Y(p) e^{pt} dt,$$

где c - вещественное число

$j = \sqrt{-1}$ - мнимая единица.

б) табличный (в случае элементарных функций).

в) по теореме разложения:

$$Y(p) = \frac{B(p)}{A(p)} = \frac{\epsilon_m + \epsilon_{m-1}p + \dots + \epsilon_0 p^m}{a_n + a_{n-1}p + \dots + a_0 p^n}$$

- в случае когда корни p_i уравнения $A(p)=0$ простые:

$$y(t) = y_0 \delta(t) + \sum_{i=1}^n C_i e^{p_i t},$$

где $y_0 \begin{cases} \epsilon_m & \text{при } m \geq n \\ a_n & \\ y_0 = 0 & \text{при } m \leq n \end{cases}$, $C_i = \left. \frac{B(p)}{A'(p)} \right|_{p=p_i}$, p_i - корни $A(p)=0$;

- в случае кратных корней необходимо исходную рациональную дробь $Y(p)$ разложить на элементарные дроби:

$$Y(p) = \frac{B(p)}{A(p)} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k \frac{\epsilon_{ij}}{(p-p_i)^j} = \sum_{i=1}^n \left[\frac{\epsilon_{i1}}{p-p_i} + \frac{\epsilon_{i2}}{(p-p_i)^2} + \dots + \frac{\epsilon_{ik}}{(p-p_i)^k} \right],$$

где k - количество кратных корней, а затем воспользоваться таблицами λ_p^Z -преобразований,

б. Что называется Z-передаточной функцией дискретной и непрерывной части АС?

$$W_d(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} - Z - \text{передаточная функция дискретной части АС.}$$

$$\tilde{W}_H(z) = \frac{Z[y(t)]}{Z[x(t)]} - Z - \text{передаточная функция непрерывной части.}$$

Z-передаточной функцией непрерывного элемента называется отношение Z-преобразования аналогового выходного сигнала к Z-преобразованию кусочно-постоянного входного сигнала. Применив Z-преобразование - получим:

$$\tilde{W}_H(z) = (1 - z^{-1}) \lambda_p^Z \left[\frac{1}{p} W_H(p) \right].$$

Задача №1.

Определить Z-изображение функции

$$x(t) = 1 + 2t^2 - e^{-2t}, \quad \text{если } T=0,2c.$$

Решение:

$$X(z) = Z[\{x_i\}] = Z[x(iT)]; \quad i=0, \dots$$

1. Находим решетчатую функцию $\{x_i\}$:

$$\{x_i\} = \{x_0, x_1, x_2, \dots\},$$

$$i=0 \quad x_0 = 1 + 2(0 \cdot 0,2)^2 - e^{-2(0 \cdot 0,2)} = 0;$$

$$i=1 \quad x_1 = 1 + 2(1 \cdot 0,2)^2 - e^{-2(1 \cdot 0,2)} = 1,08 - e^{-0,4};$$

$$i=2 \quad x_2 = 1 + 2(2 \cdot 0,2)^2 - e^{-2(2 \cdot 0,2)} = 1,32 - e^{-0,8};$$

$$\{x_i\} = \{0; 1,08 - e^{-0,4}; 1,32 - e^{-0,8}; \dots\}.$$

$$2. X(z) = \sum_{i=0}^{\infty} x_i z^{-i} = x_0 + x_1 z^{-1} + x_2 z^{-2} + \dots$$

$$X(z) = 0 + (1,08 \cdot e^{-0,4})z^{-1} + (1,32 \cdot e^{-0,8})z^{-2} + \dots$$

Задача №2.

Задан оператор ЦВМ:

$$2y_i + 5y_{i-1} - 7y_{i-3} = 0,5x_{i-2} + 3x_{i-5}.$$

Определить $W(Z)$ ЦВМ.

Решение:

$$W_d(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}.$$

1. Применим Z-преобразование к разностному уравнению, описывающему работу ЦВМ:

$$2Y(z) + 5z^{-1}Y(z) - 7z^{-3}Y(z) = 0,5z^{-2}X(z) + 3z^{-5}X(z);$$

$$Y(z)[2 + 5z^{-1} - 7z^{-3}] = X(z)[0,5z^{-2} + 3z^{-5}].$$

2. Определим $W_d(z)$ как отношение $Y(z)$ к $X(z)$:

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{0,5z^{-2} + 3z^{-5}}{2 + 5z^{-1} - 7z^{-3}} = W_d(z).$$

Задача №3.

Задана передаточная функция непрерывного элемента

$$W(p) = \frac{5(p+1)}{(0,5p+1)(2p+1)},$$

на которой воздействует дискретный сигнал с периодом дискретности $T=0,2c$.

Требуется определить Z-передаточную функцию $W(z)$ этого элемента.

Решение:

1. Разложим передаточную функцию $W(p)$ на элементарные дроби:

$$W(p) = \frac{5(p+1)}{(0,5p+1)(2p+1)} = \frac{5(p+1)}{(p+2)(p+0,5)} = \frac{C_1}{p-p_1} + \frac{C_2}{p-p_2},$$

где $p_1 = -2$; $p_2 = -0,5$ корни $A(p) = 0$.

1. Определим коэффициенты C_1 и C_2 :

Можно предложить два метода:

$$а) \frac{C_1}{p-2} + \frac{C_2}{p-0,5} = \frac{5(p+1)}{(p+2)(p+0,5)};$$

$$C_1(p+0,5) + C_2(p+2) = 5(p+1);$$

Приравняв коэффициенты в правой и левой частях равенства при одинаковых степенях p получим:

$$\left. \begin{array}{l} p^0 \\ p^{-1} \end{array} \right| \begin{array}{l} 0,5C_1 + 2C_2 = 5, \\ C_1 + C_2 = 5 \end{array} \Rightarrow C_1 = 3,33; C_2 = 1,667.$$

$$\text{б) } C_1 = \frac{B(p)}{A'(p)} \Big|_{p=p_1} = \frac{5(p+1)}{2p+2,5} \Big|_{p=-2} = 3,33,$$

$$C_2 = \frac{B(p)}{A'(p)} \Big|_{p=p_2} = \frac{5(p+1)}{2p+2,5} \Big|_{p=-0,5} = 1,667.$$

2. Определим $W(z)$.

$$\begin{aligned} W(z) &= \lambda_p^Z [W(p)] = \lambda_p^Z \left[\frac{3,33}{p+2} + \frac{1,667}{p+0,5} \right] = \\ &= Z \left[\left\{ L^{-1} \left(\frac{3,33}{p+2} \right) \right\} \right] + Z \left[\left\{ L^{-1} \left(\frac{1,667}{p+0,5} \right) \right\} \right] = \\ &= Z \left[3,33 \{ e^{-2(iT)} \} \right] + Z \left[1,667 \{ e^{-0,5(iT)} \} \right] = 3,33(1 + e^{-2 \cdot 0,2} z^{-1} + e^{-2 \cdot 0,2 \cdot 2} z^{-2} + \dots) + \\ &+ 1,667(1 + e^{-0,5 \cdot 0,2} z^{-1} + e^{-0,5 \cdot 0,2 \cdot 2} z^{-2} + \dots) = \left| \begin{array}{l} 1 + q + q^2 + q^3 + \dots = \frac{q^n - 1}{q - 1} \\ 1 + q^{-1} + q^{-2} + \dots = \frac{1}{1 - q^{-1}} \end{array} \right| = \\ &= \frac{3,33}{1 - e^{-2 \cdot 0,2} z^{-1}} + \frac{1,667}{1 - e^{-0,5 \cdot 0,2} z^{-1}} = \frac{5 - 4,12z^{-1}}{(1 - 0,67z^{-1})(1 - 0,9z^{-1})}. \end{aligned}$$

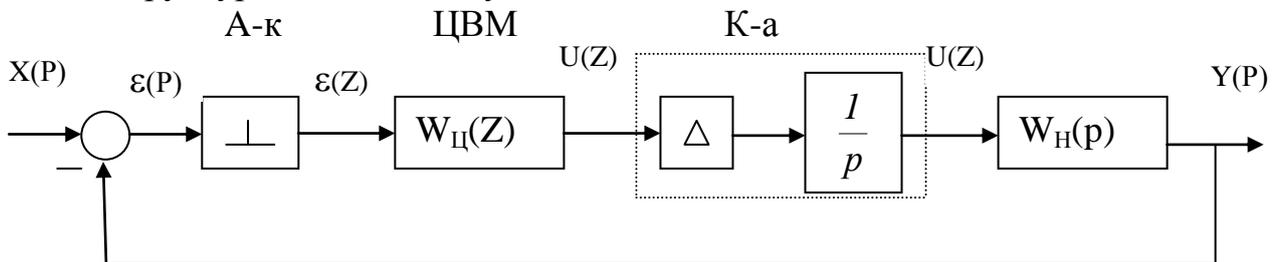
Данный результат можно получить непосредственно из выражения:

$$W(z) = \lambda_p^Z \left[\frac{3,33}{p+2} + \frac{1,667}{p+0,5} \right].$$

Используя таблицы λ_p^Z -преобразований и учитывая, что $T=0,2c$.

Задача №4.

Структурная схема импульсной АС имеет вид:



где $W_d(z) = 1 - z^{-1}$; $W_H(p) = \frac{5(p+1)}{p(2p+1)^2}$; $T=1, c$;

алгоритм ЦВМ: $2y_i - y_{i-2} + y_{i-3} = 5x_{i-1} + x_{i-2}$.

Определить Z-передаточную функцию импульсной АС для выходного сигнала и ошибки.

Решение.

1. Вспомним выражения для передаточной функции замкнутой системы и по ошибке:

$$\Phi(z) = \frac{W(z)}{1+W(z)}; \quad S(z) = \Phi(z) - 1 = -\frac{1}{1+W(z)};$$

2. Определим Z-передаточную функцию разомкнутой системы:

$$W(z) = W_{AK}(z)W_{Ц}(z)W_{КА}(z)\tilde{W}_H(z). \quad W_{AK}(z) = \frac{Z\{\varepsilon_i\}}{Z\{\varepsilon(t)\}} = 1;$$

а) определим $W_{Ц}(z)$:

$$Y(z)[2-z^{-2}+z^{-3}] = X(z)[5z^{-1}+z^{-2}]; \quad W_{Ц}(z) = \frac{z^{-2} + 5z^{-1}}{z^{-3} - z^{-2} + 2};$$

б) Определим Z-передаточную функцию непрерывной части АС:

$$\begin{aligned} \tilde{W}_{HЧ}(z) &= (1-z^{-1}) \lambda_p^Z \left[\frac{1}{p} W_H(p) \right] = (1-z^{-1}) \lambda_p^Z \left[\frac{5(p+1)}{p^2(2p+1)^2} \right] = \\ &= \left| \begin{array}{l} \text{корни кратные} \\ p_{1,2} = 0; p_{3,4} = -0,5 \end{array} \right| = (1-z^{-1}) \lambda_p^Z \left[\frac{C_1}{p} + \frac{C_2}{p^2} + \frac{C_3}{p+0,5} + \frac{C_4}{(p+0,5)^2} \right]. \end{aligned}$$

Определим коэффициенты C_i :

$$C_1 p(p+0,5)^2 + C_2(p+0,5)^2 + C_3 p^2(p+0,5) + C_4 p^2 = 1,25(p+1)$$

$$\begin{array}{l|l} P^0 & 0,25C_2 = 1,25 \Rightarrow C_2 = 5, \\ P^1 & 0,25C_1 + C_2 = 1,25 \Rightarrow C_1 = -15, \\ P^2 & C_1 + C_2 + 0,5C_3 + C_4 = 0; \quad 0,5C_3 + C_4 = 10, \\ P^3 & C_1 + C_3 = 0 \Rightarrow C_3 = 15; \quad C_4 = 2,5. \end{array}$$

$$\text{Тогда } \tilde{W}_{HЧ}(z) = (1-z^{-1}) \lambda_p^Z \left[-\frac{15}{p} + \frac{5}{p^2} + \frac{15}{p+0,5} + \frac{2,5}{(p+0,5)^2} \right] =$$

$$\begin{aligned} &= 5(1-z^{-1}) \left[-\frac{3}{1-z^{-1}} + \frac{Tz^{-1}}{(1-z^{-1})^2} + \frac{3}{1-e^{-0,5T}z^{-1}} + \frac{0,5Te^{-0,5T}z^{-1}}{(1-e^{-0,5T}z^{-1})^2} \right] = \\ &= 5 \left[-3 + \frac{z^{-1}}{1-z^{-1}} + \frac{3(1-z^{-1})}{1-e^{-0,5}z^{-1}} + \frac{0,5(1-z^{-1})e^{-0,5}z^{-1}}{(1-e^{-0,5}z^{-1})^2} \right] = \\ &= 5 \left[\frac{-3(1-z^{-1})(1-e^{-0,5}z^{-1})^2 + (1-e^{-0,5}z^{-1})^2 z^{-1}}{(1-z^{-1})(1-e^{-0,5}z^{-1})^2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{3(1-z^{-1})^2(1-e^{-0,5}z^{-1}) + 0,5e^{-0,5}(1-z^{-1})^2 z^{-1}}{(1-z^{-1})(1-e^{-0,5}z^{-1})^2} \right]. \end{aligned}$$

Дальнейшее решение поставленной задачи тривиально и затруднений, с точки зрения автоматике, не вызывает

2.16. Определение временных характеристик дискретных АС.

1. Что называется временной характеристикой АС? Какие временные характеристики вы знаете?

Временной характеристикой АС (звена) называется закон изменения выходной координаты $y(t)$ в функции времени при изменении во времени по определенному закону внешнего воздействия с условием, что до приложения воздействия АС находилась в покое. Т.о. временная характеристика есть реакция АС на некоторые типовые входные сигналы. Они позволяют оценить динамические свойства АС.

Основными временными характеристиками дискретной АС являются переходная и весовая функции.

2. Что называется весовой функцией дискретной АС?

Весовой функцией дискретной АС называется её реакция на дискретный δ - импульс.

$\{y_i\} = Z^{-1}[\Phi(z)X(z)]$, если $\{x(iT)\} = \{\delta(iT)\} = \{1, 0, 0, \dots\}$, то $Z[\{\delta(iT)\}] = 1$, тогда $\{g_i\} = Z^{-1}[\Phi(z)] = Z^{-1}[G(z)]$.

3. Что называется переходной функцией дискретной АС?

Переходной функцией дискретной АС называется её реакция на единичную ступенчатую функцию.

$\{y_i\} = Z^{-1}[\Phi(z)X(z)]$, если $\{x(iT)\} = \{1(iT)\} = \{1, 1, 1, \dots\}$, то

$$X(z) = Z[\{1(iT)\}] = z^0 + z^{-1} + z^{-2} + \dots = S = \frac{a_0}{1-q} = \frac{1}{1-z^{-1}}, \text{ тогда}$$

$$\{h_i\} = Z^{-1}[\Phi(z) \frac{1}{1-z^{-1}}] = Z^{-1}[H(z)].$$

4. Методы определения оригиналов решетчатых функций?

а) аналитически решая разностное уравнение, представляющее оператор ДАС;

б) по таблицам соответствия оригиналов и изображений с последующим вычислением значений x_i в моменты $t_i = iT$;

в) методом разложения функции $Y(z)$ в степенной ряд (ряд Лорана):

если $Y(z) = \sum_{i=0}^{\infty} y_i z^{-i} = y_0 + y_1 z^{-1} + y_2 z^{-2} + \dots$, то $\{y_i\} = \{y_0, y_1, y_2, \dots\}$;

если $Y(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{b_m + b_{m-1} z^{-1} + \dots + b_0 z^{-m}}{a_n + a_{n-1} z^{-1} + \dots + a_0 z^{-n}}$, то в соответствии с определением

Z – преобразования можно записать:

$$Y(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{b_m + b_{m-1} z^{-1} + \dots + b_0 z^{-m}}{a_n + a_{n-1} z^{-1} + \dots + a_0 z^{-n}} = y_0 + y_1 z^{-1} + y_2 z^{-2} + \dots$$

Откуда, приравняв коэффициенты при одинаковых степенях z^{-i} в обеих частях равенства, найдем значения $y_0; y_1; y_2; \dots$, т.е. $\{y_i\}$.

г) аналитический метод с применением теоремы разложения.

Если $Y(z) = \frac{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \dots + b_0}{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0}$ и полюса функции $Y(z)$ z_1, \dots, z_n не

кратные, то можно записать:

$$Y(z) = C_0 + \sum_{k=1}^n \frac{C_k}{z - z_k} = C_0 + \sum_{k=1}^n \frac{C_k z^{-1}}{1 - z_k z^{-1}} = C_0 + \sum_{k=1}^n C_k z^{-1} (1 + z_k z^{-1} + z_k^2 z^{-2} + \dots) =$$

$$= C_0 + \sum_{k=1}^n C_k z^{-1} + \sum_{k=1}^n C_k z_k z^{-2} + \sum_{k=1}^n C_k z_k^2 z^{-3} + \dots$$

Но $Y(z) = y_0 + y_1 z^{-1} + y_2 z^{-2} + \dots$. Сравним две формулы, получим:

$$y_0 = \frac{b_m}{a_n} = Y(\infty), \text{ при } m=n, \quad y_0 = C_0 = 0, \text{ при } m < n;$$

$$C_k = \frac{B(z_k)}{A^{(1)}(z_k)}, \quad k=1, \dots, n; \quad y_i = \sum_{k=1}^n C_k z_k^{i-1}, \quad i=1, 2, \dots$$

Если среди n полюсов функции $Y(z)$ есть l кратных, то $Y(z)$ раскладывается по формуле:

$$Y(z) = C_0 + \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^l \frac{C_{kj}}{(z - z_k)^j} = C_0 + \sum_{k=1}^n \left[\frac{C_{k1}}{(z - z_k)} + \frac{C_{k2}}{(z - z_k)^2} + \dots + \frac{C_{kl}}{(z - z_k)^l} \right].$$

5. Дискретный аналог интеграла Дюамеля и связь между решетчатыми весовой и переходной функциями?

С помощью дискретного аналога интеграла Дюамеля можно определить реакцию ДАС, если известна её весовая функция, на любой произвольный входной сигнал:

$$y_i = \sum_{k=0}^i x_k g_{i-k} = \sum_{k=0}^i x_{i-k} g_k.$$

Если входной сигнал $\{x_i\} = I(iT)$, то получим следствие дискретного интеграла Дюамеля, отражающее связь между весовой и переходной функциями ДАС:

$$h_i = \sum_{k=0}^i g_{i-k} = \sum_{k=0}^i g_k.$$

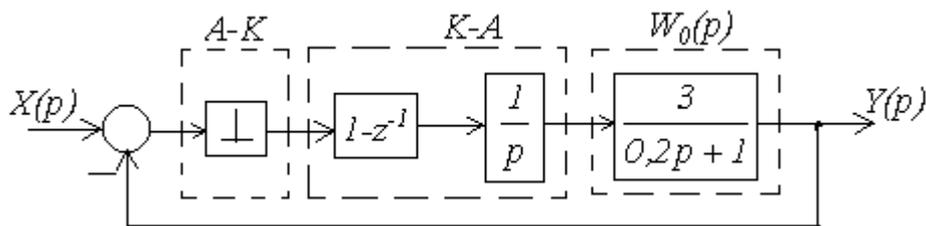
При известной $\{h_i\}$ легко вычислить $\{g_i\}$:

$$g_i = h_i - h_{i-1} = \Delta h_i.$$

II. Решение задач.

Задача №1.

Определить $\{h_i\}$, $\{g_i\}$ ДАС, структурная схема которой имеет вид:



Период дискретности ИЭ $T=0,1c$.

Решение:

Для определения $\{h_i\}$, $\{g_i\}$ необходимо вычислить $H(z)$, $G(z)$, а затем любым удобным методом найти оригиналы требуемых временных характеристик
1. Находим Z – передаточную функцию замкнутой дискретной АС.

$\Phi(z) = \frac{W(z)}{1+W(z)}$, где $W(z)$ – Z -передаточная функция разомкнутой системы.

$$\begin{aligned}
 W(z) &= (1-z^{-1})A_p^z \left[\frac{1}{p} W_0(p) \right] = (1-z^{-1})A_p^z \left[\frac{3}{p(0,2p+1)} \right] = \\
 &= 3(1-z^{-1})A_p^z \left[\frac{5}{p(p+5)} \right] = 3(1-z^{-1})A_p^z \left[\frac{C_1}{p} + \frac{C_2}{p+5} \right] = \left\{ \begin{array}{l} C_1(p+5) + C_2p = 5; \\ C_1 = 1; C_2 = -1. \end{array} \right\} = \\
 &= 3(1-z^{-1})Z \left[\{1(iT)\} - \{e^{-5iT}\} \right] = 3(1-z^{-1}) \left[\begin{array}{l} (1+z^{-1}+z^{-2}+\dots) - \\ -(1+e^{-5T}z^{-1}+e^{-5 \cdot 2T}z^{-2}+\dots) \end{array} \right] = \\
 &= 3(1-z^{-1}) \left[\frac{1}{1-z^{-1}} - \frac{1}{1-e^{-5T}z^{-1}} \right] = \left\{ \begin{array}{l} T=0,1c \\ e^{-5T} \approx 0,61 \end{array} \right\} = 3 - \frac{3(1-z^{-1})}{1-0,61z^{-1}} = \frac{1,17z^{-1}}{1-0,61z^{-1}};
 \end{aligned}$$

Тогда

$$\Phi(z) = \frac{W(z)}{1+W(z)} = \frac{1,17z^{-1}}{1+1,17z^{-1}-0,61z^{-1}} = \frac{1,17z^{-1}}{1+0,56z^{-1}};$$

Определим весовые коэффициенты, решая разностное уравнение, представляющее оператор ДАС:

$$Y_{i+0,56}y_{i-1} = 1,17x_{i-1}; \quad \{x(iT)\} = \{1,0,0,0,\dots\},$$

$$i=0 \Rightarrow g_0+0,56g_{-1} = 1,17x_{-1} \quad g_0 = 0;$$

$$i=1 \Rightarrow g_1+0,56g_0 = 1,17x_0 \quad g_1 = 1,17;$$

$$i=2 \Rightarrow g_2+0,56g_1 = 1,17x_1 \quad g_2 = -0,56 \cdot 1,17 = -0,66;$$

$$i=3 \dots$$

3. Определим весовую функцию ДАС, методом разложения её изображения в ряд Лорана:

$$G(z) = \Phi(z) = \frac{1,17z^{-1}}{1+0,56z^{-1}} = g_0 + g_1z^{-1} + g_2z^{-2} + \dots,$$

$$1,17z^{-1} = (g_0 + g_1z^{-1} + g_2z^{-2} + \dots)(1+0,56z^{-1}),$$

$$z^0 \left| \begin{array}{l} 0 = g_0, \end{array} \right.$$

$$z^{-1} \left| \begin{array}{l} 1,17 = 0,56g_0 + g_1 \Rightarrow g_1 = 1,17, \end{array} \right.$$

$$z^{-2} \left| \begin{array}{l} 0 = 0,56g_1 + g_2 \Rightarrow g_2 = -1,17 \cdot 0,56 = -0,6552, \end{array} \right.$$

$$z^{-3} \left| \begin{array}{l} 0 = 0,56g_2 + g_3 \Rightarrow g_3 = 0,6552 \cdot 0,56 \approx 0,37, \dots \end{array} \right.$$

$$\{g_i\} = \{0; 1,17; -0,66; 0,37; \dots\}$$

4. Определим переходные коэффициенты ДАС, используя теорему разложения:

$$\begin{aligned} H(z) &= \Phi(z)X(z) = \frac{\Phi(z)}{1-z^{-1}} = \frac{1,17z^{-1}}{(1+0,56z^{-1})(1-z^{-1})} = \left| \times \frac{z^2}{z^1 \cdot z^1} \right| = \\ &= \frac{1,17z}{(z+0,56)(z-1)}. \end{aligned}$$

Так как $m < n$, то $h_0 = 0$. $h_i = \sum_{k=1}^n C_k z_k^{i-1}$, где $k = \overline{1, n}$, $i = 1, 2, \dots$

$$z_1 = -0,56; \quad z_2 = 1; \quad A^{(1)}(z) = 2z - 0,44;$$

$$h_1 = C_1 z_1^{1-1} + C_2 z_2^{1-1} = C_1 + C_2 = 1,17;$$

$$h_2 = C_1 z_1^{2-1} + C_2 z_2^{2-1} = \frac{0,65}{1,56}(-0,56) + \frac{1,17}{1,56} = 0,515;$$

$$h_3 = C_1 z_1^{3-1} + C_2 z_2^{3-1} = \dots$$

$$\{h_i\} = \{0; 1,17; 0,515; 0,882; 0,676; 0,791; 0,727; \dots\}$$

Переходные коэффициенты можно получить, воспользовавшись уравнением связи между $\{g_i\}$ и $\{h_i\}$:

$$h_i = \sum_{k=0}^i g_k.$$

Задача №2.

Получить с помощью теоремы разложения оригинал переходной функции по её Z – изображению:

$$\text{а) } H(z) = \frac{0,5z + 1}{(z - 0,1)(z^2 - 1,2z + 0,36)}; \quad \text{б) } H(z) = \frac{0,5z^2}{(z - 1)(z - 0,5)}.$$

Решение:

а) Корни Z – характеристического уравнения $A(z) = 0$ будут $z_1 = 0,1$; $z_{2,3} = 0,6$.

Поскольку z_2 и z_3 кратные, применять теорему разложения сразу не правомочно. Оригинал решетчатой функции $\{h_i\}$ целесообразно вычислять либо с применением таблиц Z – обращения, либо методом разложения Z – изображения функции в ряд Лорана.

В таблицах данного выражения нет, поэтому применим метод разложения в ряд Лорана, предварительно домножив числитель и знаменатель функции $H(z)$ на z^{-3} .

$$H(z) = \frac{0,5z^{-2} + z^{-3}}{1 - 1,3z^{-1} + 0,48z^{-2} - 0,036z^{-3}} = h_0 + h_1z^{-1} + h_2z^{-2} + \dots;$$

$$0,5z^{-2} + z^{-3} = (1 - 1,3z^{-1} + 0,48z^{-2} - 0,036z^{-3})(h_0 + h_1z^{-1} + h_2z^{-2} + \dots);$$

$$\left. \begin{array}{l} z^0 | 0 = h_0, \\ z^{-1} | 0 = h_1 - 1,3h_0 \end{array} \right\} \Rightarrow h_1 = 0;$$

$$z^{-2} \quad 0,5 = h_2 - 1,3h_1 + 0,48h_0 \quad \Leftrightarrow \quad h_2 = 0,5;$$

$$z^{-3} \quad 1 = h_3 - 1,3h_2 + 0,48h_1 - 0,036h_0 = h_3 - 0,65 \quad \Leftrightarrow \quad h_3 = 1,65; \text{ и т.д.}$$

б) Корни $A(z)=0$ $z_1=1$, $z_2=0,5$. Тогда $\{h_i\} = \left\{ C_0 + \sum_{k=1}^n C_k z_k^{i-1} \right\}$.

Так как $n=m$, то $h_0 = C_0 = \frac{b_m}{a_n} = 0,5$; $C_k = \frac{B(z_k)}{A^{(1)}(z_k)}$; $A^{(1)}(z) = 2z - 1,5$;

$$C_1 = \frac{B(z_1)}{A^{(1)}(z_1)} = \frac{0,5z_1^2}{2z_1 - 1,5} = \frac{0,5 \cdot 1}{2 \cdot 1 - 1,5} = 1;$$

$$C_2 = \frac{B(z_2)}{A^{(1)}(z_2)} = \frac{0,5z_2^2}{2z_2 - 1,5} = \frac{0,5 \cdot 0,25}{2 \cdot 0,5 - 1,5} = -0,25.$$

$$h_0 = 0,5;$$

$$h_1 = C_1 z_1^{1-1} + C_2 z_2^{1-1} = 1 - 0,25 = 0,75;$$

$$h_2 = C_1 z_1^{2-1} + C_2 z_2^{2-1} = 1 - 0,25 \cdot 0,5 = 0,875;$$

$$h_3 = C_1 z_1^{3-1} + C_2 z_2^{3-1} = 1 - 0,25(0,5)^2 = 1 - 0,0625 = 0,9375;$$

$$h_4 = \dots$$

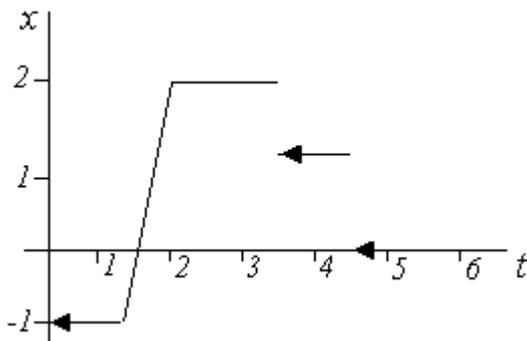
Мы получили переходную функцию ДАС. Как в этом случае определить $\{g_i\}$?

Воспользуемся формулой связи между весовой и переходной функциями ДАС $g_i = h_i - h_{i-1} = \Delta h_i$, тогда

$$\{g_i\} = \{0,5; 0,25; 0,125; \dots\}.$$

ЗАДАЧА №3.

Задана весовая функция ДАС: $\{g_i\} = \{0; 1; 2; 3; 3; 2; 1; 0; \dots\}$. На вход системы действует сигнал, график которого имеет вид:



Период дискретности $T=0,5$ с.

Определить выходной сигнал $\{y_i\}$ -?

Решение:

В данном случае целесообразно воспользоваться дискретным аналогом интеграла Дюамеля:

$$y_i = \sum_{k=0}^i x_k g_{i-k}.$$

Определим решетчатую функцию входного сигнала:

$$\{x_i\} = \{-1; -1; -1; -1; 2; 2; 2; 1; 1; 0; \dots\}.$$

Определим значения элементов решетчатой функции выходного сигнала

y_i :

$$y_0 = x_0 g_0;$$

$$y_1 = \sum_{k=0}^1 x_k g_{1-k} = x_0 g_1 + x_1 g_0 = -1;$$

$$y_2 = \sum_{k=0}^2 x_k g_{2-k} = x_0 g_2 + x_1 g_1 + x_2 g_0 = -3;$$

$$y_3 = \dots$$

Таким образом $\{y_i\} = \{0; -1; -3; -6; -9; \dots\}$.

2.17. Определение устойчивости дискретных ЛСС.

1. Дать определение устойчивой дискретной АС?

Дискретная АС устойчива, если для любого положительного ε существует такое положительное η , что из неравенства $|x_i| \leq \eta \quad i=1,2,\dots$ следует неравенство $|y_i| \leq \varepsilon$ (т.е. реакция системы на ограниченный выходной сигнал ограничена).

2. Сформулировать необходимое и достаточное условие устойчивости дискретных АС.

Исходя из определения устойчивой дискретной АС, условие выполняется в том случае, если

$$1). \quad \sum_{i=0}^{\infty} |g_i| < \infty,$$

т.е. абсолютная сходимость ряда весовых коэффициентов.

$$2). \quad |Z_k| < 1, \quad k=1,2,\dots,n.$$

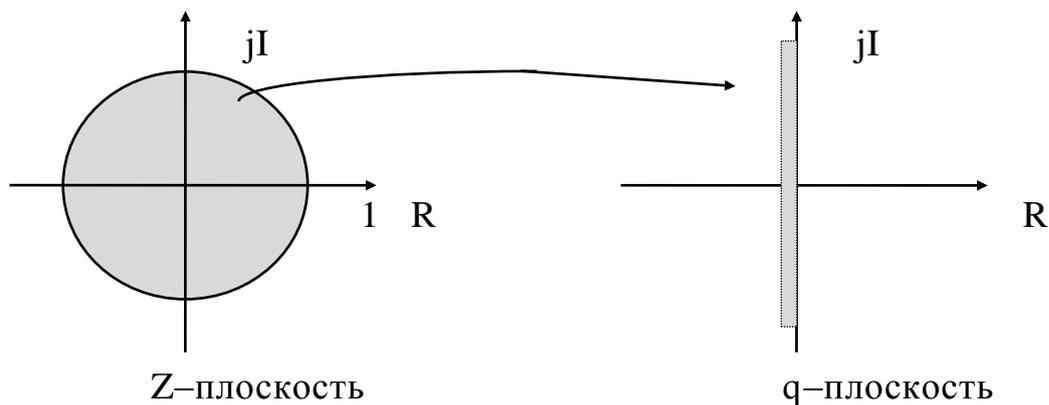
Т.е., для устойчивой замкнутой дискретной АС необходимо и достаточно, чтобы все корни характеристического уравнения $A(Z)=0$ были расположены внутри окружности единичного радиуса плоскости Z .

Т.о., чтобы оценить устойчивость дискретной АС необходимо и достаточно найти все корни ее Z -характеристического уравнения или все весовые коэффициенты.

3. Сущность билинейного преобразования?

Оценка устойчивости по необходимому и достаточному условию обычно сопряжена с достаточно громоздкими вычислительными процедурами и на практике применяется для АС не выше третьего порядка.

Для того, чтобы избежать громоздких вычислений и применить к дискретным АС критерии устойчивости непрерывных систем, необходимо с помощью какого-либо преобразования перевести внутреннюю часть единичного круга плоскости Z в левую полуплоскость, а саму окружность – в мнимую ось некоторой другой плоскости q .



Такое преобразование существует, оно называется билинейным или q -преобразованием:

$$Z = \frac{q+1}{q-1}; \quad q = \frac{Z+1}{Z-1}.$$

Т.о., если исходное характеристическое уравнение дискретной АС $A(z)=0$ преобразовать к виду $A(q)=0$, то необходимое и достаточное условие устойчивости для дискретной АС ($|Z| < 1$) трансформируется в необходимое и достаточное условие устойчивости непрерывных АС – отрицательность вещественных частей корней характеристического полинома $A(q) = 0$.

Именно вследствие этого к характеристическому уравнению замкнутой дискретной АС $A(q)=0$ можно применить методику оценки устойчивости непрерывных АС: Рауса-Гурвица, Михайлова. А для $A(q)=0$ разомкнутой системы – методику критерия Найквиста.

Задача № 1.

Дискретная АС описывается передаточной функцией

$$\Phi(z) = \frac{0,1z^2 + z + 0,8}{2z^3 + z^2 - 3z + 1}.$$

Оценить устойчивость данной АС по сходимости ряда весовых коэффициентов.

Решение.

1. Определим весовые коэффициенты $\{q_i\}$

$$\Phi(z) = G(z) = q_0 + q_1z^{-1} + q_2z^{-2} + \dots$$

Для удобства работы приведем выражение $\Phi(z)$ к отрицательным степеням

$$\frac{0,1z^2 + z + 0,8}{2z^3 + z^2 - 3z + 1} \times \frac{z^{-3}}{z^{-3}} = \frac{0,1z^{-1} + 0,8z^{-3}}{2 + z^{-1} - 3z^{-2} + z^{-3}}.$$

Приравняем данное выражение к степенному ряду весовых коэффициентов относительно z^{-i} , получим :

$$0,1z^{-1} + z^{-2} + 0,8z^{-3} = (2 + z^{-1} - 3z^{-2} + z^{-3})(q_0 + q_1z^{-1} + q_2z^{-2} + \dots),$$

$$\begin{array}{l|l} z^0 & 0 = 2q_0 \rightarrow q_0 = 0; \\ z^{-1} & 0,1 = q_0 + 2q_1 \rightarrow q_1 = 0,05; \\ z^{-2} & 1 = -3q_0 + q_1 + 2q_2 \rightarrow q_2 = 0,475; \\ z^{-3} & 0,8 = q_0 - 3q_1 + q_2 + 2q_3 \rightarrow q_3 = 0,2375; \\ z^{-4} & 0 = 2q_4 + q_3 - 3q_2 + q_1 \rightarrow q_4 = 0,7125; \\ z^{-5} & 0 = 2q_5 + q_4 - 3q_3 + q_2 \rightarrow q_5 = -0,2375; \\ & \vdots \text{ и т.д.} \end{array}$$

2. Оценим сходимость ряда весовых коэффициентов

$$\sum_0^{\infty} |q_i| = \infty.$$

Вывод: Дискретная АС с данной передаточной функцией неустойчива.

Задача №2.

С помощью необходимого и достаточного условия устойчивости оценить устойчивость АС, передаточная функция которой имеет вид:

$$\Phi(z) = \frac{1,1Z + 0,8}{Z^2 + 0,2Z + 1,2}.$$

Решение:

1. Вычислим корни характеристического уравнения

$$A(z) = z^2 + 0,2z + 1,2 = 0,$$

$$z_{1,2} = \frac{-0,2 \pm \sqrt{0,04 - 4,8}}{2} = \frac{-0,2 \pm \sqrt{-4,76}}{2},$$

$$z_1 = -0,1 + j1,09; \quad z_2 = -0,1 - j1,09$$

2. Оценим соответствие корней характеристического уравнения необходимому и достаточному условию устойчивости

$$|z_i| < 1,$$

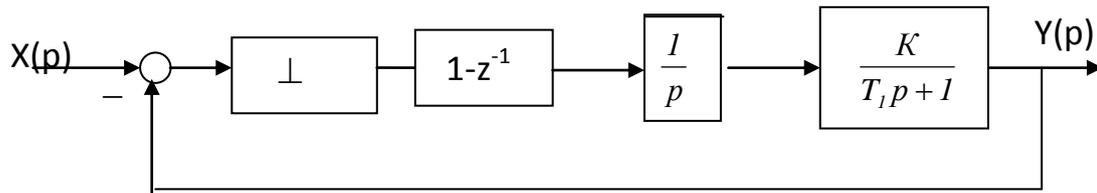
$$|z_1| = |-0,1 + j1,09| = \sqrt{1,198} > 1,$$

$$|z_2| = |-0,1 - j1,09| = \sqrt{1,198} > 1.$$

Вывод: то, что $|z_i| > 1$, свидетельствует о невыполнении необходимого и достаточного условия устойчивости дискретной АС, т.е. система неустойчива.

Задача №3.

Дискретная АС задана структурной схемой



Определить критическое значение коэффициента усиления разомкнутой системы, если T_1 и T – период дискретности – заданы.

Решение:

1. Определим Z – передаточную функцию разомкнутой системы

$$W(z) = (1 - z^{-1}) \lambda_p^Z \left[\frac{K}{p(T_1 p + 1)} \right] = (1 - z^{-1}) K \cdot Z \left[\{ 1(iT) - e^{-\frac{iT}{T_1}} \} \right] =$$

$$= (1 - z^{-1}) \left(\frac{1}{1 - z^{-1}} - \frac{1}{1 - \alpha z^{-1}} \right) = \frac{K(1 - \alpha)z^{-1}}{1 - \alpha z^{-1}};$$

где $\alpha = e^{-T/T_1}$.

2. Определим характеристический полином замкнутой АС

$$\Phi(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{W(z)}{1 + W(z)} = \frac{K(1 + \alpha)z^{-1}}{1 - \alpha z^{-1} + K(1 - \alpha)z^{-1}};$$

Домножив числитель и знаменатель на z , получим:

$$\Phi(z) = \frac{K(1 + \alpha)}{z - \alpha + K(1 - \alpha)};$$

$$A(z) = z - \alpha + K(1 - \alpha).$$

3. Исходя из необходимого и достаточного условия устойчивости и учитывая, что в данном случае передаточная функция АС имеет единственный полюс, коэффициент усиления соответствующий нахождению АС на границе устойчивости можно определить из равенства

$$|z_1| = |\alpha - K(1 - \alpha)| = 1.$$

Данное уравнение эквивалентно двум уравнениям:

$$\alpha - K(1 - \alpha) = 1, \quad -\alpha + K(1 - \alpha) = 1.$$

Решение этих уравнений определяет значения критического коэффициента усиления разомкнутой системы:

$$K_{кр1} = -1, \quad K_{кр2} = \frac{1 + \alpha}{1 - \alpha}.$$

Вывод: замкнутая дискретная АС будет устойчива, если коэффициент усиления разомкнутой системы K будет находиться в пределах

$$-1 < K < \frac{1+\alpha}{1-\alpha}.$$

Задача №4.

Исследовать устойчивость дискретной АС по критерию Гурвица, если Z -передаточная функция АС имеет вид:

$$\Phi(z) = \frac{0,2z^{-1} - z}{1 - 2,1z^{-1} + 1,44z^{-2} - 0,32z^{-3}}.$$

Решение.

1. Определим характеристическое уравнение АС с положительными степенями z . Для этого домножим числитель и знаменатель на z^3 :

$$A(z) = z^3 - 2,1z^2 + 1,44z - 0,32 = 0.$$

2. Применим билинейную подстановку

$$z = \frac{q+1}{q-1};$$

$$A(q) = \left(\frac{q+1}{q-1}\right)^3 - 2,1\left(\frac{q+1}{q-1}\right)^2 + 1,44\left(\frac{q+1}{q-1}\right) - 0,32 = 0.$$

Домножив левую и правую части уравнения на $(q-1)^3$, раскрыв скобки и приведя подобные члены, получим уравнение:

$$0,02q^3 + 0,42q^2 + 2,7q + 4,86 = 0.$$

3. Оценим устойчивость эквивалентной АС с преобразованным характеристическим полиномом $A(q)$ по методике критерия Гурвица.

а) $\forall i: a_i > 0, (i=0...3)$

$$R = \begin{array}{ccc|c} 4,86 & 0 & 0 & R_2 \\ \hline 0,42 & 2,7 & 4,76 & R_1 \\ \hline 0 & 0,02 & 0,42 & \end{array}$$

в) $R_1 = 0,42 > 0,$

$$R_2 = 2,7 \cdot 0,42 - 0,02 \cdot 4,86 > 0,$$

$$R_3 = R_2 \cdot 4,86 > 0.$$

Вывод: т.к. определители диагональных миноров положительны, система устойчива.

Примечание: Для системы третьего порядка из R_2 вытекает формулировка правила Вишнегорского.

Задача №5.

С помощью логарифмического критерия устойчивости исследовать замкнутую АС, если ее Z – передаточная функция разомкнутой системы имеет вид:

$$W(z) = \frac{5(4,5z^2 - 0,5)}{Z(1,1z - 0,9)}$$

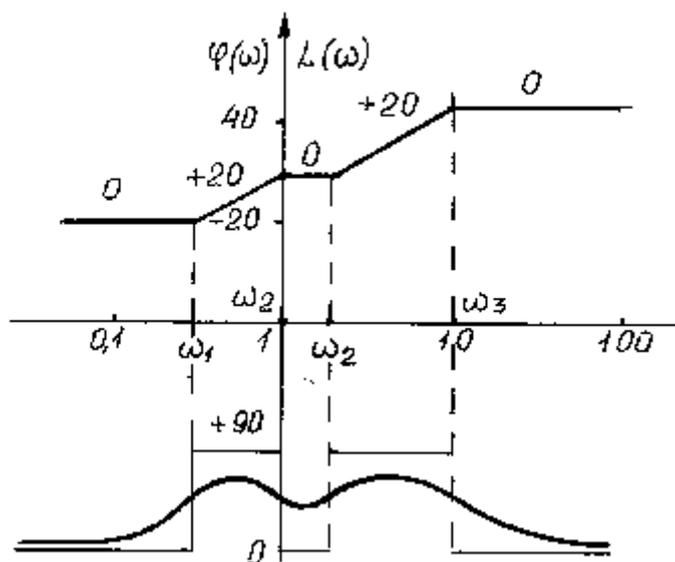
Решение:

Разомкнутая АС устойчива, т.к. $|z_k| < 1$.

1. Применим билинейную подстановку

$$\begin{aligned} W(z) &= \frac{5[4,5\left(\frac{q+1}{q-1}\right)^2 - 0,5]}{\frac{q+1}{q-1}\left(1,1\frac{q+1}{q-1} - 0,9\right)} = \frac{5[4,5(q+1)^2 - 0,5(q-1)^2]}{(q+1)(1,1q+1,1-0,9q+0,9)} = \\ &= \frac{5(4,5q^2 9q+4,5-0,5q^2+q-0,5)}{(q-1)(0,2q+2)} = \frac{5(2q^2+5q+2)}{(q+1)(0,1q+1)} = \\ &= \frac{10(q^2+2,5q+1)}{(q+1)(0,1q+1)} = \frac{10(2q+1)(0,5q+1)}{(q+1)(0,1q+1)}. \end{aligned}$$

2. Оценим устойчивость замкнутой дискретной АС по преобразованной передаточной функции разомкнутой системы применяя второе следствие критерия Найквиста



a) $20(0-0) = 0, \text{дб/дек},$
 $20 \lg K \Big|_{\omega=1} = 20 \lg 10 \Big|_{\omega=1} = 20, \text{дб},$

$$\pi/2(0-0) /_{\omega=0}=0,2\text{рад.}$$

- б) $\omega_1=0,5\text{с}^{-1}$ – форсирующее звено –1,
 $\omega_2=1\text{с}^{-1}$ – апериодическое звено –1,
 $\omega_3=2\text{с}^{-1}$ – форсирующее звено –2,
 $\omega_4=10\text{с}^{-1}$ – апериодическое звено –2.

Вывод: Т.к. ЛФЧХ на всем диапазоне частот не пересекает уровень $-\pi$, т.е. ω_π - отсутствует (ω_c - отсутствует), то определить устойчивость АС с таким характеристическим полиномом передаточной функции разомкнутой АС по Нейквисту невозможно ($n=2$).

2.18. Определение статистических характеристик выходного сигнала АС, находящихся под воздействием случайных сигналов, представленных в канонической форме (степенной ряд).

1. Дать определения стохастических и детерминированных АС.
2. Дать определение случайного сигнала (процесса).
3. Назовите основные количественные характеристики случайных сигналов.

Случайные сигналы как функции времени характеризуются следующими неслучайными количественными характеристиками:

-математическим ожиданием

$$m_x(t) = M[x(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x, t) dx,$$

где $f(x, t)$ – одномерная плотность вероятности;

- корреляционной функцией (моментом)

$$K_x(t_1, t_2) = M \left[\overset{\circ}{x}(t_1) \overset{\circ}{x}(t_2) \right],$$

где $\overset{\circ}{x}(t) = x(t) - m_x(t)$ - центрированная случайная функция;

-дисперсией

$$D_x(t) = M \left[\overset{\circ}{x}^2(t) \right] = K_x(t, t);$$

-среднеквадратическим отклонением

$$\sigma_x(t) = \sqrt{D_x(t)}.$$

4. Физический смысл неслучайных характеристик случайных сигналов?

II. Основные расчетные соотношения.

Если $z(t) = x(t) + u(t)$,

где $x(t)$ и $u(t)$ - взаимно некоррелированные случайные функции, то

$$m_z(t) = m_x(t) + m_u(t);$$

$$K_z(t_1, t_2) = K_x(t_1, t_2) + K_u(t_1, t_2);$$

$$D_z(t) = D_x(t) + D_u(t);$$

$$\sigma_z(t) = \sqrt{\sigma_x^2(t) + \sigma_u^2(t)} = \sqrt{D_x(t) + D_u(t)}.$$

Статические характеристики случайного выходного сигнала $y(t)$, $e(t)$ при известных статистических характеристиках входного сигнала $m_x(t)$, $K_x(t_1, t_2)$ и известной весовой функции АС – $g(t)$, могут быть определены с помощью интеграла Дюамеля:

$$m_y(t) = \int_0^{t-t_0} g(\tau) m_x(t-\tau) d\tau;$$

$$K_y(t_1, t_2) = \int_0^{t_1-t_0} g(\tau_1) \left[\int_0^{t_2-t_0} g(\tau_2) K_x(t_1-\tau_1, t_2-\tau_2) d\tau_2 \right] d\tau_1.$$

Применение данных формул связано с большими вычислительными трудностями.

Решение этой задачи существенно упрощается, если входной случайный сигнал может быть представлен в каноническом виде:

$$x(t) = m_x(t) + \sum_{i=1}^{\kappa} U_i \varphi_i(t), \quad i=1, \dots, \kappa,$$

где U_i – взаимно некоррелированные центрированные случайные величины, т.е.

$$M[U_i] = 0,$$

$$M[U_i U_j] = \begin{cases} 0 & \text{при } i \neq j \\ D_i & \text{при } i = j \end{cases}$$

$\varphi_i(t)$ – неслучайные координатные функции,

$m_x(t)$, $D_i(t)$, $\varphi_i(t)$ – считаются известными.

В этом случае выходной сигнал ЛС АС будет тоже иметь канонический вид:

$$y(t) = m_y(t) + \sum_{i=1}^{\kappa} U_i \psi_i(t) \quad \text{или} \quad e(t) = m_e(t) + \sum_{i=1}^{\kappa} U_i \psi_i(t),$$

а статистические характеристики $K_y(t_1, t_2)$, $K_e(t_1, t_2)$, $D_y(t)$, $D_e(t)$ вычисляются по формулам:

$$K_y(t_1, t_2) = \sum_{i=1}^{\kappa} D_i \psi_i(t_1) \psi_i(t_2);$$

$$K_e(t_1, t_2) = \sum_{i=1}^{\kappa} D_i \psi_{e_i}(t_1) \psi_{e_i}(t_2);$$

$$D_y(t) = K_y(t, t) = \sum_{i=1}^{\kappa} D_i \psi_i^2(t);$$

$$D_e(t) = K_e(t, t) = \sum_{i=1}^{\kappa} D_i \psi_{e_i}^2(t).$$

Т.о., если случайный входной сигнал АС имеет канонический вид, то определение статистических характеристик выходного сигнала фактически за-

ключается в вычислении математического ожидания и координатных функций, т.е. $m_y(t)$, $m_e(t)$, $\psi_i(t)$, $\psi_{ei}(t)$.

Допустим, что математическое ожидание и координатные функции случайного входного сигнала имеют вид:

$$m_x(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots,$$

$$\psi_i(t) = \epsilon_0 + \epsilon_1 t + \epsilon_2 t^2 + \dots$$

Тогда $m_y(t)$ и $\psi_i(t)$ можно вычислить посредством коэффициентов ошибок:

$$m_y(t) = S_0 m_x(t) + S_1 \dot{m}_x(t) + S_2 \ddot{m}_x(t) + \dots,$$

$$\psi_i(t) = S_0 \varphi_i(t) + S_1 \dot{\varphi}_i(t) + S_2 \ddot{\varphi}_i(t) + \dots$$

В случае если $m_x(t)$ либо $\varphi_i(t)$ постоянны, т.е. $m_x(t) = const$, то

$$m_y(\infty) = m_x(t) \int_0^{\infty} g(\tau) d\tau = m_x(\infty) h(\infty) = m_x(\infty) \Phi(0).$$

Аналогично $\psi_i(\infty) = \varphi_i(\infty) \Phi(0)$.

1. Определить функции канонического разложения случайного входного сигнала

$$m_x(t), \varphi_i(t), D_i, m_f(t), \varphi_{fi}(t), D_{fi}.$$

2. Определить требуемую передаточную функцию для данного входного сигнала

$$\Phi(p), S(p), \Phi_{F_Y}(p), \Phi_{F_E}(p) \dots$$

3. Вычислить соответствующие математические ожидания и координатные функции выходного сигнала посредством метода коэффициентов ошибок:

$$m_y(t), m_E(t), \psi_i(t), \psi_{ei}(t) \dots$$

4. Определить сам выходной сигнал и его неслучайные статистические характеристики:

$$y(t), e(t), K_y(t_1, t_2), K_E(t_1, t_2), D_y(t), D_E(t).$$

Задача №1.

Определить функции канонического разложения случайных сигналов и их статистические характеристики $K_x(t_1, t_2)$ и $D_x(t)$.

а) $x(t) = 2 - t + \cos 2t$;
 $m_y(t) = 2 - t + \cos 2t$ $K_x(t_1, t_2) = 0$; $D_x(t) = 0$, т.к.

б) $x(t) = 1 + 5U_1 t^2 - 2U_2 t$, $M[U_1^2] = D_1 = 0,2$, $M[U_2^2] = D_2 = 0,5$.

$$m_x(t) = 1; \varphi_1(t) = 5t^2; \varphi_2(t) = -2t.$$

$$K_x(t_1, t_2) = D_1 \varphi_1(t_1) \varphi_1(t_2) + D_2 \varphi_2(t_1) \varphi_2(t_2) = 0,2 \cdot 5t_1^2 \cdot 5t_2^2 + 0,5(-2t_1)(-2t_2);$$

$$D_x(t) = K_x(t, t) = 0,2 \cdot 25t^4 + 0,5 \cdot 4t^2$$

в) $x(t) = U_1 t^2 - U_2(1-t) + 2U_3 \cos t$, $M[U_1^2] = D_1$; $M[U_2^2] = D_2$;

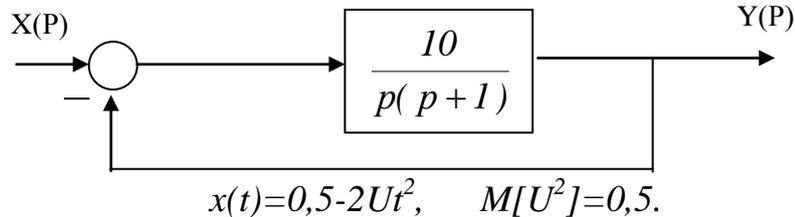
$$M[U_3^2] = D_3.$$

$$m_x(t) = 0; \varphi_1(t) = t^2; \varphi_2(t) = -(1-t); \varphi_3(t) = \cos t;$$

$$\begin{aligned}
K_x(t_1, t_2) &= D_1 \varphi_1(t_1) \varphi_1(t_2) + D_2 \varphi_2(t_1) \varphi_2(t_2) + D_3 \varphi_3(t_1) \varphi_3(t_2) = \\
&= D_1 t_1^2 t_2^2 + D_2 (1-t_1)(1-t_2) + 2D_3 \cdot \text{Cost}_1 \cdot 2\text{Cost}_2; \\
D_x(t) &= K_x(t, t) = D_1 t^4 + D_2 (1-t)^2 + D_3 4\text{Cos}^2 t.
\end{aligned}$$

Задача №2.

На АС заданной структуры действует случайный входной сигнал вида:



Определить сигналы $y(t)$ и $e(t)$ в установившемся режиме и их неслучайные статистические характеристики.

Решение.

1. Определим функции канонического разложения случайного входного сигнала

$$m_x = 0,5 = \text{const}; \quad \varphi(t) = -2t^2, \quad D_x = 0,5.$$

2. Определим требуемые передаточные функции $\Phi(p)$ и $S(p)$:

$$\Phi(p) = \frac{10}{p^2 + p + 10}; \quad S(p) = -\frac{1}{1+W(p)} = -\frac{p^2 + p}{p^2 + p + 10}.$$

3. Вычислим соответствующие математические ожидания и координатные функции выходных сигналов.

Т.к. $m_x = 0,5 = \text{const}$, то $m_y(\infty) = m_x(t) \cdot \Phi(0)$, $m_e(\infty) = m_x(t) \cdot S(0)$,

$$m_y(\infty) = 0,5 \frac{10}{p^2 + p + 10} \Big|_{p=0} = 0,5.$$

$m_e(\infty) = 0$, т.к. по структурному признаку АС имеет астатизм I порядка по отношению к задающему воздействию.

$\psi(t)$ и $\psi_e(t)$ определим через коэффициенты ошибок, как реакцию АС на координатную функцию входа.

$$\psi(t) = \tilde{S}_0 \varphi(t) + \tilde{S}_1 \varphi(t) + \tilde{S}_2 \varphi(t) = -2t^2 - 0,1(-4t) - 0,09(-4),$$

$$\psi_e(t) = S_0 \varphi(t) + S_1 \varphi(t) + S_2 \varphi(t) = -0,1(-4t) - 0,09(-4),$$

$$\psi(t) = -2t^2; \quad \varphi(t) = -4t; \quad \varphi(t) = -4; \quad \varphi(t) = 0.$$

Следовательно, необходимо определять по три коэффициента ошибок из каждой передаточной функции:

$$\begin{aligned}
\Phi(p) &= \frac{10}{p^2 + p + 10} = \tilde{S}_0 + \tilde{S}_1 p + \tilde{S}_2 p^2 + \dots, \\
10 &= (\tilde{S}_0 + \tilde{S}_1 p + \tilde{S}_2 p^2 + \dots)(p^2 + p + 10);
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{l} p^0 \\ p^1 \\ p^2 \end{array} \left| \begin{array}{l} 10=10\tilde{S}_0 \quad \tilde{S}_0=1; \\ 0=\tilde{S}_0+10\tilde{S}_1 \quad \tilde{S}_1=-1; \\ 0=\tilde{S}_0+\tilde{S}_1+10\tilde{S}_2 \quad \tilde{S}_2=-0,09. \end{array} \right.$$

$$S(p) = -\frac{p^2 + p}{p^2 + p + 10} = S_0 + S_1 p + S_2 p^2 + \dots,$$

$$-(p^2 + p) = (S_0 + S_1 p + S_2 p^2 + \dots)(p^2 + p + 10),$$

$$\begin{array}{l} p^0 \\ p^1 \\ p^2 \end{array} \left| \begin{array}{l} 0=10S_0 \quad S_0=0; \text{ (астатизм I),} \\ -1=S_0+10S_1 \quad S_1=-1; \\ -1=S_0+S_1+10S_2 \quad S_2=-0,09. \end{array} \right.$$

4. Определим статистические характеристики случайных выходных сигналов и сам вид сигналов:

$$y(t) = m_y(t) + U\psi(t) = 0,5 + U(-2t^2 + 0,4t + 0,36),$$

$$e(t) = m_e(t) + U\psi_e(t) = U(0,4t + 0,36),$$

$$K_Y(t_1, t_2) = D_x \psi(t_1) \psi(t_2) = 0,5(-2t_1^2 + 0,4t_1 + 0,36)(-2t_2^2 + 0,4t_2 + 0,36),$$

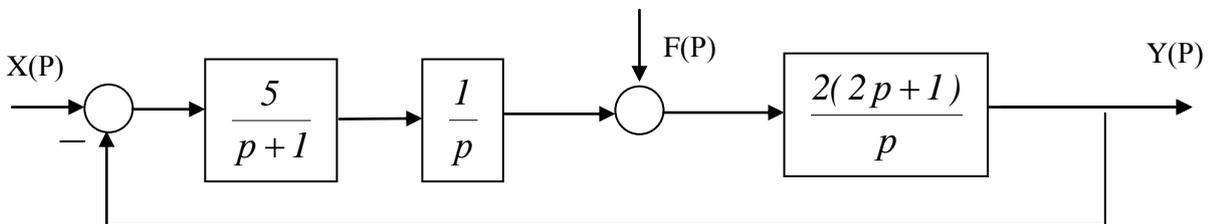
$$D_y(t) = K_Y(t, t) = 0,5(-2t^2 + 0,4t + 0,36)^2,$$

$$K_E(t_1, t_2) = D_x \psi_e(t_1) \psi_e(t_2) = 0,5(0,4t_1 + 0,36)(0,4t_2 + 0,36),$$

$$D_E(t) = K_E(t, t) = 0,5(0,4t + 0,36)^2.$$

Задача №3.

На АС заданной структуры действуют взаимонезависимые случайные сигналы:



$$x(t) = 0,5t - 2U_1 t^2 + U_2, \quad M[U_1^2] = 0,5; \quad M[U_2^2] = 1;$$

$$f(t) = 1 + t + 0,2U_3 t, \quad M[U_3^2] = 0,2.$$

Определить статистические характеристики $m_y(t)$, $K_Y(t_1, t_2)$, $D_y(t)$.

Решение.

1. Т.к. на ЛС АС действует 2 взаимонезависимых входных сигнала, то неслучайные статистические характеристики полезного выходного сигнала будут состоять из двух слагаемых:

$$m_y(t) = m_{y_x}(t) + m_{y_f}(t); \quad K_Y(t_1, t_2) = K_{Y_x}(t_1, t_2) + K_{Y_f}(t_1, t_2); \quad D_Y(t) = D_{Y_x}(t) + D_{Y_f}(t) = K_Y(t, t).$$

2. Определяем функции канонического разложения случайных входных сигналов:

$$m_x(t) = 0,5t; \quad \varphi_1(t) = -2t^2; \quad \varphi_2(t) = 0; \quad D_1 = 0,5; \quad D_2 = 1.$$

$$m_f(t)=1+t; \quad \varphi_3(t)=0,2t; \quad D_3=0,2$$

3. Определим требуемые передаточные функции:

$$\Phi(p) = \frac{10(2p+1)}{10(2p+1)+p^2(p+1)} = \frac{20p+10}{p^3+p^2+20p+10};$$

$$\Phi_{FY}(p) = \frac{2(2p+1)/p}{1+W(p)} = \frac{2(p+1)(2p+1)p}{p^3+p^2+20p+10} = \frac{4p^3+6p^2+2p}{p^3+p^2+20p+10}.$$

4. Вычислим математическое ожидание и координатные функции выходного сигнала посредством коэффициентов ошибок, т.к. одноименные характеристики входных сигналов представлены в полиномиальном виде:

$$m_{y_x}(t) = \tilde{S}_0 m_x(t) + \tilde{S}_1 \dot{m}_x(t);$$

$$\psi_1(t) = \tilde{S}_0 \varphi_1(t) + \tilde{S}_1 \dot{\varphi}_1(t) + \tilde{S}_2 \varphi(t);$$

$$\psi_2(t) = \tilde{S}_0 \varphi_2,$$

$$\Phi(p) = \frac{20p+10}{p^3+p^2+20p+10} = \tilde{S}_0 + \tilde{S}_1 p + \tilde{S}_2 p^2 + \dots,$$

$$20p+10 = (S_0 + S_1 p + S_2 p^2 + \dots)(p^3 + p^2 + 20p + 10),$$

$$\begin{array}{l|l} p^0 & 10 = 10S_0 \quad \tilde{S}_0 = 1; \\ p^1 & 0 = 20S_0 + 10S_1 \quad \tilde{S}_1 = 0; \\ p^2 & 0 = S_0 + 20S_1 + 10S_2 \quad \tilde{S}_2 = -0,1. \end{array}$$

$$\dot{m}_x(t) = 0,5; \quad \varphi_1(t) = -4t; \quad \varphi(t) = -4;$$

$$m_{y_x}(t) = 0,5t;$$

$$\psi_1(t) = -2t^2 + 0,4; \quad \psi_2(t) = 1;$$

$$\text{б) } m_{y_f}(t) = S_{f_0} m_f(t) + S_{f_1} \dot{m}_f(t);$$

$$\psi_3(t) = S_{f_0} \varphi_3(t) + S_{f_1} \dot{\varphi}_3(t);$$

$$\Phi_{FY}(p) = \frac{4p^3+6p^2+2p}{p^3+p^2+20p+10} = S_{f_0} + S_{f_1} p + S_{f_2} p^2 + \dots,$$

$$4p^3+6p^2+2p = (S_{f_0} + S_{f_1} p + S_{f_2} p^2 + \dots)$$

$$(S_0 + S_1 p + S_2 p^2 + \dots)(p^3 + p^2 + 20p + 10),$$

$$\begin{array}{l|l} p^0 & 0 = 10S_{f_0}; \quad S_{f_0} = 0; \\ p^1 & 2 = 20S_{f_0} + 10S_{f_1} \quad S_{f_1} = 0,2; \end{array}$$

$$\dot{m}_f(t) = 1; \quad \varphi_3(t) = 0,2;$$

$$m_{y_f}(t) = 0,2; \quad \psi_3(t) = 0,2 \cdot 0,2 = 0,04.$$

5. Вычислим статические характеристики полезного выходного сигнала:

$$m_y(t) = 0,5t + 0,2;$$

$$K_y(t_1, t_2) = K_{Yx}(t_1, t_2) + K_{Yf}(t_1, t_2),$$

$$\begin{aligned} K_Y(t_1, t_2) &= D_1 \psi_1(t_1) \psi_1(t_2) + D_2 \psi_2(t_1) \psi_2(t_2) + D_3 \psi_3(t_1) \psi_3(t_2) = \\ &= 0,5(-2t_1^2 + 0,4)(-2t_2^2 + 0,4) + 1 + 0,2 \cdot 0,04^2; \end{aligned}$$

$$D_y(t) = K_y(t, t) = 0,5(-2t^2 + 0,4)^2 + 1 + 0,32 \cdot 10^{-3}.$$

На самостоятельной подготовке определить $m_E(t)$, $K_E(t_1, t_2)$, $D_E(t)$ и записать выражения для $y(t)$ и $e(t)$.

$$y(t) = m_{yx}(t) + \sum_{i=1}^2 U_i \psi_i(t) + m_{yf}(t) + U_3 \psi_3(t);$$

$$e(t) = m_{ex}(t) + \sum_{i=1}^2 U_i \psi_{e_i}(t) + m_{yf}(t) + U_3 \psi_3(t).$$

2.19. Определение статистических характеристик выходного сигнала АС, находящихся под воздействием случайных сигналов, представленных в канонической форме (гармоническая функция).

Статистические характеристики выходных сигналов стохастических АС, функции канонического разложения случайных входных сигналов которых представлены в виде степенного ряда, т.е.

$$m_x(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots,$$

$$\varphi_i(t) = \epsilon_0 + \epsilon_1 t + \epsilon_2 t^2 + \dots$$

1. Как определяются неслучайные характеристики случайных выходных сигналов АС?

Неслучайные характеристики случайных выходных сигналов АС в этом случае могут быть определены по формулам:

$$m_y(t) = S_0 m_x(t) + S_1 \dot{m}_x(t) + \dots, \quad \psi_i(t) = S_0 \varphi_i(t) + S_1 \dot{\varphi}_i(t) \dots,$$

$$K_y(t_1, t_2) = \sum_{i=1}^k D_i \psi_i(t_1) \psi_i(t_2), \quad D_y(t) = K_y(t, t) = \sum_{i=1}^k D_i \psi_i^2(t),$$

где $k=1, 2, \dots$ - количество случайных составляющих в выходном сигнале.

На сегодняшнем занятии рассмотрим случаи, когда функции канонического разложения случайного входного сигнала:

$$x(t) = m_x(t) + \sum_{i=1}^k U_i \varphi_i(t),$$

т.е. $m_x(t)$ и $\varphi_i(t)$ представлены в гармоническом виде:

$$m_x(t) = A_{m_x} \sin(\omega_{m_x} t + \Delta_{m_x}),$$

$$\varphi_i(t) = A_{\varphi_i} \cos(\omega_{\varphi_i} t + \Delta_{\varphi_i}).$$

2. Как в этом случае определяются неслучайные характеристики случайных выходных сигналов АС?

В этом случае математическое ожидание выходных сигналов и их координатные функции можно найти как реакцию АС на соответствующие гармонические составляющие входного сигнала посредством соответствующих частотных характеристик:

$$m_y(t) = A_{m_y} \sin(\omega_{m_x} t + \Delta_{m_y}),$$

где $A_{m_y} = A_{m_x} |\Phi(j\omega_{m_x})|$;
 $\Delta_{m_y} = \arg \Phi(j\omega_{m_x}) + \Delta_{m_x}$
 $m_E(t) = A_{m_E} \text{Sin}(\omega_{m_x} t + \Delta_{m_E})$,

где $A_{m_E} = A_{m_x} |S(j\omega_{m_x})|$;
 $\Delta_{m_E} = \arg S(j\omega_{m_x}) + \Delta_{m_x}$.
 $\psi_{yi}(t) = A_{\psi_{yi}} \text{Cos}(\omega_{\phi_i} t + \Delta_{\psi_{yi}})$,

где $A_{\psi_{yi}} = A_{\phi_i} |\Phi(j\omega_{\phi_i})|$;
 $\Delta_{\psi_{yi}} = \arg \Phi(j\omega_{\phi_i}) + \Delta_{\phi_i}$.
 $\psi_{Ei}(t) = A_{\psi_{Ei}} \text{Cos}(\omega_{\phi_i} t + \Delta_{\psi_{Ei}})$,

где $A_{\psi_{Ei}} = A_{\phi_i} |S(j\omega_{\phi_i})|$;
 $\Delta_{\psi_{Ei}} = \arg S(j\omega_{\phi_i}) + \Delta_{\phi_i}$.

Остальные статические характеристики $K_y(t_1, t_2)$; $K_E(t_1, t_2)$; $D_y(t)$; $D_E(t)$ вычисляются по тем же формулам, что и в предыдущем случае.

Задача №1.

Определить функции канонического разложения случайного сигнала и его статические характеристики.

$$x(t) = 5 \text{Cost} - 2 + U_1 \text{Sin}(2t + \pi/4).$$

Решение:

$$m_x(t) = 5 \text{Cost} - 2 \quad (m_x = m_{x1} + m_{x2}),$$

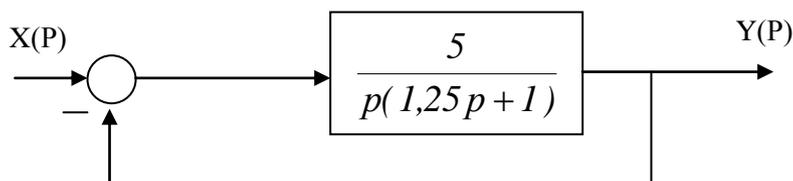
$$\phi_1(t) = \text{Sin}(2t + \pi/4) \quad (A_{\phi_1} = 1; \omega_{\phi_1} = 2; \Delta_{\phi_1} = \pi/4),$$

$$K_x(t_1, t_2) = D_1 \phi_1(t_1) \phi_1(t_2) = D_1 \text{Sin}(2t_1 + \pi/4) \text{Sin}(2t_2 + \pi/4),$$

$$D_x(t) = K_x(t, t) = D_1 \text{Sin}^2(2t + \pi/4).$$

Задача №2.

Структурная схема АС имеет вид:



Определить $m_y(t)$; $K_y(t_1, t_2)$; $D_y(t)$ и на самоподготовке $m_E(t)$; $K_E(t_1, t_2)$; $D_E(t)$, если

$x(t)$ – случайный входной сигнал, заданный каноническим разложением:

$$x(t) = 0,5 \text{Sin} t + 0,4U \text{Sin}(2t + \pi/6), \quad M[U^2] = 0,2.$$

Решение:

1. Определить функции канонического разложения случайного входного сигнала и вид выходного сигнала:

$$m_x(t) = 5 \sin t; \quad A_{m_x} = 0,5; \quad \omega_{m_x} = 1 \text{ c}^{-1}; \quad \Delta_{m_x} = 0.$$

$$\varphi(t) = 0,4 \sin(2t + \pi/6); \quad A_\varphi = 0,4; \quad \omega_\varphi = 2 \text{ c}^{-1}; \quad \Delta_\varphi = \pi/6 \text{ рад}.$$

$$y(t) = m_y(t) + U\psi(t).$$

2. Определить функции канонического разложения выходного случайного сигнала как реакцию АС на функции канонического разложения случайного входного сигнала:

$$m_y(t) = A_{m_y} \sin(\omega_{m_x} t + \Delta_{m_y}),$$

$$A_{m_y} = A_{m_x} |\Phi(j\omega_{m_x})|;$$

$$\Delta_{m_y} = \arg \Phi(j\omega_{m_x}) + \Delta_{m_x}.$$

$$\psi(t) = A_\psi \sin(\omega t + \Delta_\psi),$$

$$A_\psi = A_\varphi |\Phi(j\omega_\varphi)|;$$

$$\Delta_{\psi y} = \arg \Phi(j\omega_\varphi) + \Delta_\psi.$$

Следовательно, для нахождения $m_y(t)$ и $\psi(t)$ необходимо вычислить значения АЧХ и ФЧХ АС на соответствующих частотах ω_{m_x} и ω_φ

$$\Phi(p) = \frac{W(p)}{1+W(p)} = \frac{5}{p(1,25p+1)+5};$$

$$\Phi(j\omega) = \frac{5}{5-1,25\omega^2 + j\omega};$$

$$|\Phi(j\omega)| = \frac{5}{\sqrt{(5-1,25\omega^2)^2 + \omega^2}}; \quad \arg \Phi(j\omega) = -\arctg \frac{\omega}{5-1,25\omega^2}.$$

$$|\Phi(j\omega_{m_x})| = \frac{5}{\sqrt{(5-1,25)^2 + 1}} = \frac{5}{\sqrt{15,0625}} \cong \frac{5}{3,9} \approx 1,3;$$

$$|\Phi(j\omega_\varphi)| = \frac{5}{\sqrt{(5-1,25 \cdot 4)^2 + 4}} = 2,5;$$

$$\arg \Phi(j\omega_{m_x}) = -\arctg \frac{1}{5-1,25} \approx -\arctg 0,27,$$

Тогда $m_y(t) = 0,5 \cdot 1,3 \sin(t - \arctg 0,27) = 0,653 \sin(t - \arctg 0,27).$
 $\psi(t) = 0,4 \cdot 2,5 \sin(2t - \pi/2 + \pi/6) = 1 \sin(2t - \pi/3).$

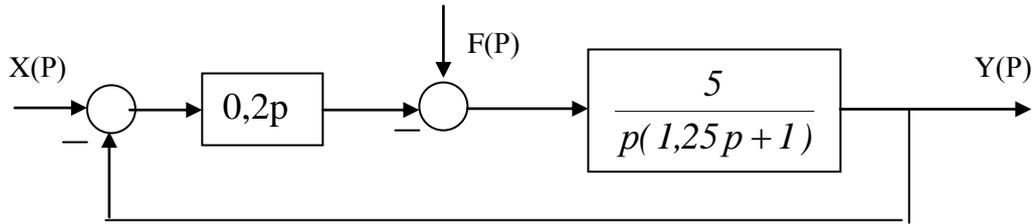
3. Определим $K_y(t_1, t_2)$ и $D_y(t)$:

$$K_y(t_1, t_2) = D_1 \psi(t_1) \psi(t_2) = 0,2 \cdot 1 \sin(2t_1 + \pi/3) \sin(2t_2 + \pi/3)$$

$$D_y(t) = K_y(t, t) = 0,2 \sin^2(2t - \pi/3).$$

Задача №3.

Для автоматической АС заданной структуры:



Определить статистические характеристики ошибки АС в установившемся режиме, если случайные сигналы $x(t)$ и $f(t)$ имеют вид:

$$x(t) = U_1 \sin \sqrt{3} t; \quad M[U_1^2] = 1.$$

$$f(t) = 0,1 + \sin 2t + U_2 \cos t; \quad M[U_2^2] = 0,01.$$

Решение:

1. Определим функции канонического разложения случайных входных сигналов и общий вид выражений для $m_E(t)$; $K_E(t_1, t_2)$; $D_E(t)$:

$$m_x(t) = 0; \quad \varphi_x(t) = \sin \sqrt{3} t; \quad A_{\varphi_x} = 1; \quad \omega_{\varphi_x} = \sqrt{3}; \quad \Delta_{\varphi_x} = 0.$$

$$m_f(t) = m_1 + m_2 = 0,1 + \sin 2t; \quad m_1 = 0,1 = \cos t;$$

$$m_2 = \sin 2t; \quad A_{m_2} = 1; \quad \omega_{m_2} = 2; \quad \Delta_{m_2} = 0.$$

$$\varphi_f = \cos t; \quad A_{\varphi_f} = 1; \quad \omega_{\varphi_f} = 1; \quad \Delta_{\varphi_f} = 0.$$

Тогда

$$m_E(t) = m_1(t) \cdot \Phi_{FE}(0) + A_{m_2} \left| \Phi_{FE}(j\omega_{m_2}) \sin(\omega_{m_2} t + \Delta_{m_{E_2}}) \right|;$$

$$K_E(t_1, t_2) = D_1 \psi_{Ex}(t_1) \psi_{Ex}(t_2) + D_2 \psi_{Ef}(t_1) \psi_{Ef}(t_2);$$

$$D_E(t) = K_E(t, t).$$

2. Вычислим необходимые сомножители для дальнейшего определения выше перечисленных характеристик.

$$\psi_{Ex}(t) = A_{Ex} \sin(\omega_{\varphi_x} t + \Delta_{\varphi_x});$$

$$\psi_{Ef}(t) = A_{Ef} \cos(\omega_{\varphi_f} t + \Delta_{\varphi_f});$$

где

$$A_{Ex} = A_{\varphi_x} \left| S(j\omega_{\varphi_x}) \right|; \quad \Delta_{\psi_x} = \arg S(j\omega_{\varphi_x}) + \Delta_{\varphi_x}.$$

$$A_{Ef} = A_{\varphi_f} \left| \Phi_{FE}(j\omega_{\varphi_f}) \right|; \quad \Delta_{\psi_f} = \arg \Phi_{FE}(j\omega_{\varphi_f}) + \Delta_{\varphi_f}.$$

$$S(p) = -\frac{1}{1+W(p)} = -\frac{0,6p+1}{p+1}; \quad S(j\omega) = -\frac{1+j0,6\omega}{1+j\omega};$$

$$|S(j\omega)| = \frac{\sqrt{1+(0,6\omega)^2}}{\sqrt{1+\omega^2}}; \quad \arg S(j\omega) = \arg \frac{-0,6\omega}{-1} - \arctg \omega;$$

$$\Phi_{FE}(p) = \frac{2/(0,6p+1)}{1+W(p)} = \frac{2}{p+1}; \quad \Phi_{FE}(j\omega) = \frac{2}{1+j\omega};$$

$$|\Phi_{FE}(j\omega)| = \frac{2}{\sqrt{1+\omega^2}}; \quad \arg \Phi_{FE}(j\omega) = -\arctg \omega.$$

Тогда: $\Phi_{FE}(0) = 2$;

$$|\Phi_{FE}(j\omega_{m_2})| = \frac{2}{\sqrt{1+2^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}};$$

$$\Delta m_{E_2} = \arccrc \omega_{m_2} = -\arctg 2;$$

$$|S(j\omega_{\varphi_x})| = \frac{\sqrt{1+(0,6\sqrt{3})^2}}{\sqrt{1+\sqrt{3}^2}} \approx \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\Delta \psi_x = \arccrc \frac{-0,6\sqrt{3}}{-1} - \arctg \sqrt{3};$$

$$|\Phi_{FE}(j\omega_{\varphi_f})| = \frac{2}{\sqrt{1+1}} = \sqrt{2};$$

$$\Delta \psi_f = -\arccrc 1 = -\pi/4;$$

3. Вычислим конечные значения статистических характеристик ошибки АС:

$$m_E(t) = m_I(t) \cdot \Phi_{FE}(0) + Am_2 |\Phi_{FE}(j\omega_{m_2}) \text{Sin}(\omega_{m_2}t + \Delta m_{E_2})| =$$

$$= 0,1 \cdot 2 + 1 \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} \text{Sin}(2t - \arctg 2);$$

$$K_E(t_1, t_2) = D_1 \psi_{Ex}(t_1) \psi_{Ex}(t_2) + D_2 \psi_{Ef}(t_1) \psi_{Ef}(t_2) =$$

$$= 1 \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \text{Sin}(\sqrt{3}t_1 + \arctg \frac{-0,6\sqrt{3}}{-1} - \arctg \sqrt{3}) \times$$

$$\times \text{Sin}(\sqrt{3}t_2 + \arctg \frac{-0,6\sqrt{3}}{-1} - \arctg \sqrt{3}) +$$

$$+ 0,01 \cdot 1 \cdot \sqrt{2} \cdot \text{Cos}(t_1 - \pi/4) \text{Cos}(t_2 - \pi/4);$$

$$D_E(t) = K_E(t, t) = \sqrt{2} \times$$

$$\times \left[\frac{1}{2} \text{Sin}^2(\sqrt{3}t + \arctg \frac{-0,6\sqrt{3}}{-1} - \arctg \sqrt{3}) + 0,01 \text{Cos}^2(t - \pi/4) \right].$$

На самостоятельной подготовке вычислить статистические характеристики случайного выходного сигнала $y(t)$.

3. ЗАДАНИЯ ДЛЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ И УКАЗАНИЯ ПО ЕЕ ВЫПОЛНЕНИЮ

3.1. Общие указания по выполнению контрольной работы

Контрольная работы должна выполняться студентом после изучения теоретического курса.

Контрольная работа состоит из 5 задач, задания к каждой их них представлены в 18 вариантах. Студент выбирает в таблицах 2-6 тот вариант задания, который соответствует сумме двух последних цифр его учебного шифра.

При выполнении контрольной работы необходимо соблюдать следующие требования:

- записать условие задачи;
- решение сопровождать кратким пояснительным текстом, в котором должно быть указано, какая величина определяется и по какой формуле, какие величины подставляются в формулу (из условия задачи, из справочника, определена ранее и т.д.);
- вычисления давать в развернутом виде;
- проставлять размерности всех заданных и расчетных величин в международной системе СИ;
- графический материал должен быть выполнен четко в масштабе на миллиметровой бумаге.

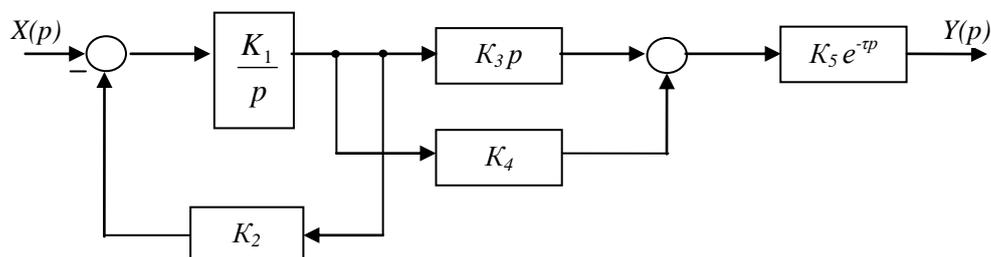
После решения задачи должен быть произведен краткий анализ полученных результатов и сделаны соответствующие выводы.

В конце работы дать перечень использованной литературы.

3.2. Задания для контрольной работы

Задача 1.

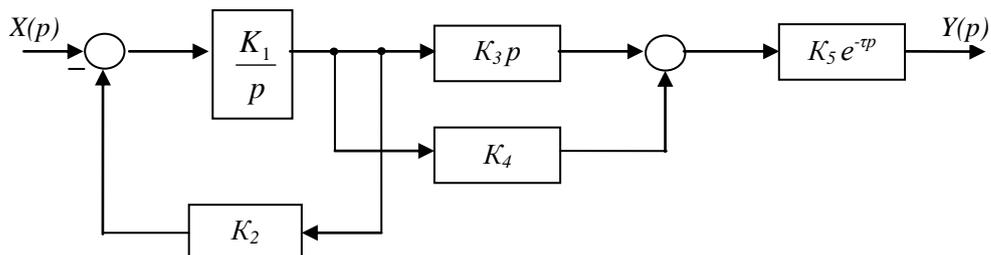
Дана АС со структурной схемой:



Определить передаточную функцию АС $\Phi(p)$, представить её в стандартном виде. Определить аналитические выражения для временных характеристик $q(t)$ и $h(t)$, оценить их начальные и конечные значения, изобразить общий вид графиков $q(t)$ и $h(t)$.

Задача 2.

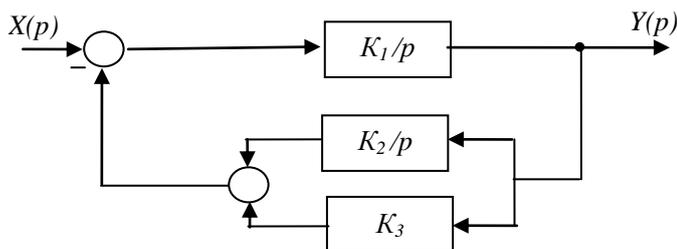
Дана АС со структурной схемой:



Определить передаточную функцию АС $\Phi(p)$, представить её в стандартном виде. Определить аналитические выражения для временных характеристик $q(t)$ и $h(t)$, оценить их начальные и конечные значения, изобразить общий вид графиков $q(t)$ и $h(t)$.

Задача 3.

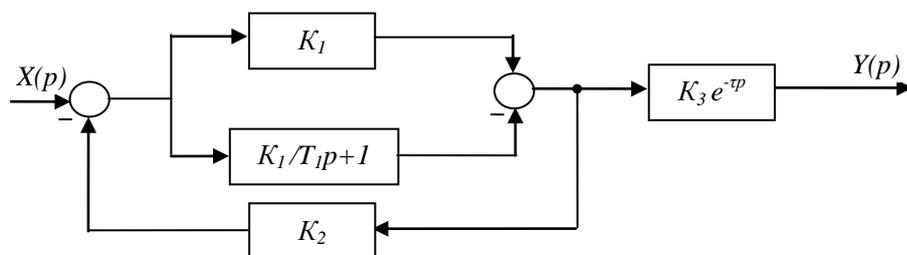
Дана АС со структурной схемой:



Определить передаточную функцию АС $\Phi(p)$, представить её в стандартном виде. Определить аналитические выражения для временных характеристик $q(t)$ и $h(t)$, оценить их начальные и конечные значения, изобразить общий вид графиков $q(t)$ и $h(t)$.

Задача 4.

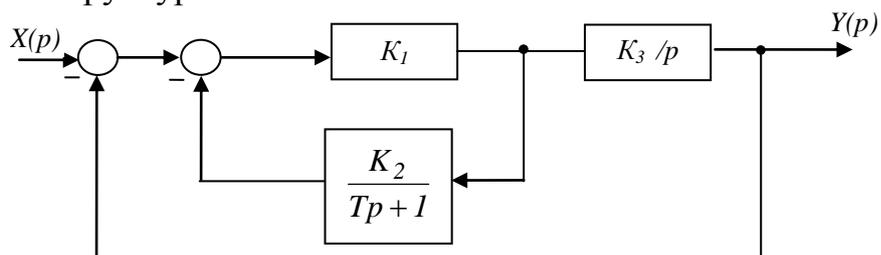
Дана АС со структурной схемой:



Определить передаточную функцию АС $\Phi(p)$, представить её в стандартном виде. Определить аналитические выражения для временных характеристик $q(t)$ и $h(t)$, оценить их начальные и конечные значения, изобразить общий вид графиков $q(t)$ и $h(t)$.

Задача 5.

Дана АС со структурной схемой:



Определить передаточную функцию АС $\Phi(p)$, представить её в стандартном виде. Определить аналитические выражения для временных характеристик $q(t)$ и $h(t)$, оценить их начальные и конечные значения, изобразить общий вид графиков $q(t)$ и $h(t)$.

4. ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ

Таблица 2. Данные для задачи № 1

Сумма двух последних цифр шифра	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5	τ
0	0,1	5	0,1	0,2	100	0,2
1	0,2	6	0,3	0,2	90	0,3
2	0,4	4	0,5	0,1	70	0,5
3	0,1	2	0,2	0,2	65	0,2
4	0,6	8	0,4	0,3	84	0,4
5	0,4	5	0,3	0,3	98	0,3
6	0,3	7	0,2	0,2	85	0,2
7	0,2	6	0,1	0,1	75	0,1
8	0,1	4	0,2	0,2	90	0,1
9	0,6	3	0,4	0,2	95	0,6
10	0,4	5	0,3	0,3	64	0,4
11	0,2	4	0,1	0,1	88	0,2
12	0,2	8	0,4	0,2	97	0,2
13	0,3	9	0,2	0,2	86	0,3
14	0,4	6	0,5	0,3	84	0,4
15	0,1	7	0,2	0,2	78	0,3
16	0,3	4	0,4	0,4	77	0,5
17	0,2	2	0,1	0,2	95	0,2
18	0,5	5	0,3	0,3	93	0,4

Таблица 3. Данные для задачи № 2

Сумма двух по- следних цифр шиф- ра	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5	τ
0	0,2	5	0,2	0,1	100	0,1
1	0,3	6	0,2	0,2	90	0,3
2	0,5	4	0,1	0,4	70	0,5
3	0,2	2	0,2	0,1	65	0,2
4	0,4	8	0,3	0,6	84	0,4
5	0,3	5	0,3	0,4	98	0,3
6	0,2	7	0,2	0,3	85	0,2
7	0,1	6	0,1	0,2	75	0,1
8	0,1	4	0,2	0,1	90	0,2
9	0,6	3	0,2	0,6	95	0,4
10	0,4	5	0,3	0,4	64	0,3
11	0,2	4	0,1	0,2	88	0,1
12	0,2	8	0,2	0,2	97	0,4
13	0,3	9	0,2	0,3	86	0,2
14	0,4	6	0,3	0,4	84	0,5
15	0,3	7	0,2	0,1	78	0,2
16	0,5	4	0,4	0,3	77	0,4
17	0,2	2	0,2	0,2	95	0,1
18	0,4	5	0,3	0,5	93	0,3

Таблица 4. Данные для задачи № 3

Сумма двух по- следних цифр шиф- ра	K	K_1	K_2	K_3
0	0,2	0,1	5	15
1	0,3	0,3	6	12
2	0,5	0,5	4	16
3	0,2	0,2	2	14
4	0,4	0,4	8	15
5	0,3	0,3	5	12
6	0,2	0,2	6	18
7	0,1	0,1	4	10
8	0,1	0,2	7	15
9	0,6	0,4	4	14
10	0,4	0,3	5	16
11	0,2	0,1	6	12
12	0,2	0,4	4	13
13	0,3	0,2	5	14
14	0,4	0,5	6	15
15	0,3	0,2	8	14
16	0,5	0,4	4	12
17	0,2	0,1	3	11
18	0,4	0,3	8	10

Таблица 5. Данные для задачи № 4

Сумма двух по- следних цифр шиф- ра	K_1	T_1	K_2	K_3	τ	K	T
0	10	0,25	1,9	4	0,4	10	5
1	11	0,3	1,5	4	0,3	15	6
2	10	0,25	1,6	5	0,5	12	4
3	12	0,4	1,5	6	0,2	16	2
4	14	0,2	1,4	4	0,4	14	8
5	13	0,3	1,8	8	0,3	15	5
6	15	0,2	1,7	3	0,2	12	6
7	16	0,3	1,6	5	0,1	18	4
8	14	0,35	1,4	4	0,2	10	7
9	12	0,25	1,4	6	0,4	15	4
10	10	0,3	1,5	4	0,3	14	5
11	10	0,1	1,6	5	0,1	16	6
12	15	0,4	1,8	8	0,4	12	4
13	14	0,35	1,9	2	0,2	13	5
14	13	0,2	1,5	3	0,5	14	6
15	12	0,35	1,6	7	0,2	15	8
16	10	0,25	1,7	5	0,4	14	4
17	14	0,2	1,5	4	0,1	12	3
18	16	0,3	1,6	6	0,3	11	8

Таблица 6. Данные для задачи № 5

Сумма двух по- следних цифр шиф- ра	K_1	K_2	T	K_3
0	0,2	2,5	4	11
1	0,3	2,8	6	12
2	0,5	2,9	4	16
3	0,2	3,0	2	14
4	0,4	3,2	8	15
5	0,3	3,5	5	12
6	0,2	2,8	6	18
7	0,1	2,7	4	10
8	0,1	2,6	7	15
9	0,6	2,8	4	14
10	0,4	3,1	5	16
11	0,2	3,5	6	12
12	0,2	2,1	4	13
13	0,3	2,9	5	14
14	0,4	2,8	6	15
15	0,3	2,4	8	14
16	0,5	2,5	4	12
17	0,2	2,2	3	11
18	0,4	2,6	8	10

ПЕРЕЧЕНЬ РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Колесов Л.В. Основы автоматики / Л.В. Колесов. – М.: Колос, 1984. – С. 159-165.
2. Загинайлов В.И. Основы автоматики / В.И. Загинайлов, Л.Н. Шеповалова. – М.: Колос, 2001. – С. 101-115.
3. Шавров А.В. Автоматика / А.В. Шавров, А.П. Коломиец. – М.: Колос, 2000. – С. 158-172.
4. Мартыненко И.И. Проектирование систем автоматики / И.И. Мартыненко, В.Ф. Лысенко. – М.: Агропромиздат, 1990. – С. 116-143.
5. Автоматика. Расчет частотно-регулируемых асинхронных двигателей: учеб. пособие для вузов / Авт. -сост.: Ю.П. Коськин, А.Г. Иванов, Б.Б. Криссинель, А.Г. Черных; под ред. Ю.П. Коськина. – 2-е изд., перераб. и доп. – Иркутск: ИрГСХА, 2008. – 285 с.
6. Бородин И.Ф. Автоматизация технологических процессов / И.Ф. Бородин, Ю.А. Судник. – М.: Колос, 2004. – 179 с.
7. Бородин И.Ф. Автоматизация технологических процессов / И.Ф. Бородин и [др.]. – М.: Колос, 2007. – 214 с.
8. Корнеев Н.В. Теория автоматического управления с практикумом: учеб. пособие для вузов: допущено Учеб.-метод. об-нием / Н.В. Корнеев, Ю.С. Кустарёв, Ю.Я. Морговский. – М.: Академия, 2008. – 219 с.
9. Крылов, Ю.А. Энергосбережение и автоматизация производства в теплоэнергетическом хозяйстве города. Частотно-регулируемый электропривод: учеб. пособие для вузов / Ю.А. Крылов, А.С. Карандаев, В.Н. Медведев. – СПб.: Лань, 2013. – 176 с.
10. Нагорный В.С. Средства автоматики гидро- и пневмосистем [Электронный ресурс] / В.С. Нагорный. - Электрон. текстовые дан. – Москва: Лань, 2014. – Режим доступа: http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=52612. – ISBN 978-5-8114-1652-3. – Рекомендовано УМО по университетскому политехническому образованию в качестве учебного пособия для студентов вузов, обучающихся по направлению подготовки «Технологические машины и оборудование».
11. Ощепков А.Ю. Система автоматического управления: теория, применение, моделирование в MATLAB [Электронный ресурс]: учеб. пособие / А.Ю. Ощепков. – Электрон. текстовые дан. – Москва: Лань, 2013. – 208 с. – Режим доступа: http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_cid=25&pl1_id=5849. – ISBN 978-5-8114-1471-0.
12. Первозванский А.А. Курс теории автоматического управления [Электронный ресурс]: учеб. пособие / А.А. Первозванский. – Электрон. текстовые дан. – Москва: Лань, 2015. – 624 с.: ил. – Режим доступа: http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=68460. – ISBN 978-5-8114-0995-2.
13. Шипицына В.М. Автоматика: типовые задачи и примеры их решения / В.М. Шипицына; Иркут. гос. с.-х. акад. – Иркутск: ИрГСХА, 2008. – 45 с.

СОДЕРЖАНИЕ

1. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ИЗУЧЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ.....	3
1.1. Содержание дисциплины «Основы автоматического управления».....	4
2. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ ДЛЯ ВЫПОЛНЕНИЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ.....	5
2.1. Передаточные функции и структурные преобразования ЛСС. Операторы ЛСС.....	5
2.2. Передаточные функции и структурные преобразования ЛСС.....	10
2.3. Передаточные функции по возмущению.....	17
2.4. Временные характеристики ЛСС. Определение временных характеристик непрерывных АС.....	22
2.5. Частотные характеристики. Определение реакции АС на гармонический входной сигнал.....	28
2.6. Частотные характеристики ЛСС. Частотные характеристики соединений звеньев.....	35
2.7. Устойчивость ЛСС. Оценка устойчивости непрерывных систем.....	39
2.8. Устойчивость ЛСС Оценка устойчивости непрерывных систем с помощью критерия Найквиста.....	46
2.9. Качество ЛСС. Определение установившейся ошибки АС.....	53
2.10. Синтез ЛСС методом стандартных коэффициентов.....	59
2.11. Синтез последовательного КУ методом ЛЧХ.....	65
2.12. Синтез параллельного КУ методом ЛАЧХ.....	73
2.13. Основы линеаризации дифференциальных уравнений нелинейных АС.....	81
2.14. Исследование устойчивости автоколебаний в нелинейных системах методом Гольдфарба.....	85
2.15. Определение передаточных функций дискретных АС на основе Z-преобразований.....	90
2.16. Определение временных характеристик дискретных АС.....	96
2.17. Определение устойчивости дискретных ЛСС.....	101
2.18. Определение статистических характеристик выходного сигнала АС, находящихся под воздействием случайных сигналов, представленных в канонической форме (степенной ряд).....	107
2.19. Определение статистических характеристик выходного сигнала АС, находящихся под воздействием случайных сигналов, представленных в канонической форме (гармоническая функция).....	113
3. ЗАДАНИЯ ДЛЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ И УКАЗАНИЯ ПО ЕЕ ВЫПОЛНЕНИЮ.....	119
3.1. Общие указания по выполнению контрольной работы.....	119
3.2. Задания для контрольной работы.....	119
4. ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ.....	122
ПЕРЕЧЕНЬ РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ.....	128

Учебное издание

Составители
Кудряшев Геннадий Сергеевич
Третьяков Александр Николаевич

ОСНОВЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

*Учебно-методическое пособие по дисциплине
«Основы автоматического управления» для студентов очной и заочной форм
обучения направления подготовки 13.03.02 Электроэнергетика и электротех-
ника (уровень бакалавриата), профиль «Электроснабжение»*

Лицензия на издательскую деятельность
ЛР № 070444 от 11.03.98 г.

Подписано в печать 08.10.2021. Формат 60×86/16. Печ. л. 10,0

Издательство Иркутский государственный
аграрный университет
664038, Иркутская обл., Иркутский район
пос. Молодежный