МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ДЕПАРТАМЕНТ НАУЧНО-ТЕХНОЛОГИЧЕСКОЙ ПОЛИТИКИ И ОБРАЗОВАНИЯ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«ИРКУТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ А.А. ЕЖЕВСКОГО»
(ФГБОУ ВО Иркутский ГАУ)

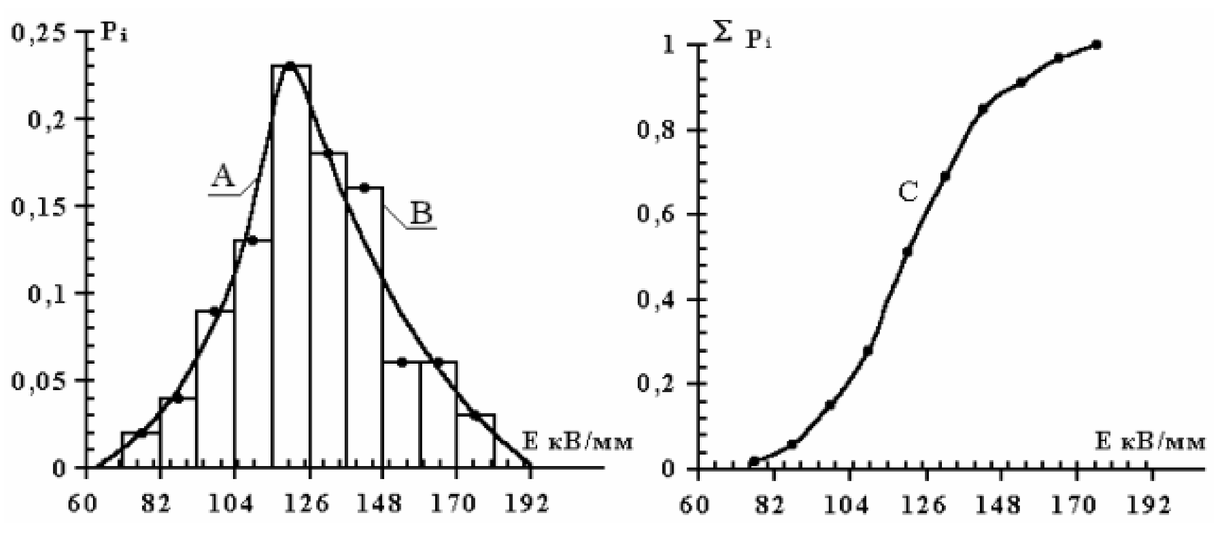
Энергетический факультет

Кафедра электроснабжения и электротехники

Подъячих С.В.

Статистические методы обработки экспериментальных данных

Учебно-методическое пособие для студентов
обучающихся по направлению подготовки
13.03.02 Электроэнергетика и электротехника



Молодежный 2021

УДК 621.315

ББК 31.27-05

Рецензент: д.т.н., доцент Алтухов И.В., профессор кафедры энергообеспечения и теплотехники ФГБОУ ВО Иркутский ГАУ.

Статистические методы обработки экспериментальных данных. Учебно-методическое пособие / С.В. Подъячих – Молодёжный: Издательство ФГБОУ ВО Иркутского ГАУ, 2021.- 36 С.

Учебно-методическое пособие предназначено для студентов направления подготовки 13.03.02 и 13.04.02 «Электроэнергетика и электротехника» и соответствует учебной программе по дисциплине «Статистические методы обработки экспериментальных данных». В пособии приведены примеры и задачи для самостоятельного решения. Включены контрольные задания для самопроверки знаний.

Предназначено для студентов всех форм обучения.

Учебное пособие рассмотрено и одобрено кафедрой электроснабжения и электротехники (протокол № 7 от 10.03.2021 г.).

СОДЕРЖАНИЕ

СТАТИСТИЧЕСКАЯ ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ ИСПЫТАНИЙ

Глава 1. СТАТИСТИЧЕСКАЯ ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ ИСПЫТАНИЙ

1.1. Вычисление среднего арифметического и оценка среднего квадратического отклонения

Повторив несколько раз измерения одной и той же величины, получим ряд численных значений, которые, как правило, отличаются одно от другого, но если измерения производились в одинаковых условиях и с одинаковой тщательностью, заслуживают одинакового доверия. Если результаты измерений свободны от систематических погрешностей, то в качестве оценки истинного значения измеряемой величины принято считать среднее арифметическое полученных результатов

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n}{n} = \frac{\sum_{n=1}^{n} x_i}{n}, \tag{1.1}$$

где $\bar{x}$ - среднее значение измеряемой величины;

x_i - результат i-го измерения;

n - число измерений.

При бесконечном числе измерений $\bar{x}$ приближается к истинному значению измеряемой величины. Поскольку бесконечного числа измерений практически осуществить невозможно, то $\bar{x}$ вычисляют при том числе измерений, которое можно было провести в данных условиях.

Точно также невозможно вычислить по данным эксперимента истинное значение среднего квадратического отклонения σ. Здесь можно говорить только о некотором приближении или об оценке S среднего квадратического отклонения σ. Если параметр σ неизвестен, то эмпирический стандарт среднего квадратического отклонения вычисляется по формуле

$$S = \sqrt{\frac{1}{n-1} \cdot \sum_{1}^{n} (x_i - \bar{x})^2} \tag{1.2}$$

И лишь при достаточно большом числе опытов (n > 40) величина среднего квадратического отклонения может быть оценена как

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{1}^{n} (x_i - \bar{x})^2} \tag{1.3}$$

1.2. Построение гистограммы, полигона и интегральной кривой распределения

При обработке результатов эксперимента исключительно важную роль играет проверка закона распределения. Эта задача представляет собой частный случай более общей проблемы, заключающейся в подборе теоретической функции распределения, которая наилучшим образом согласуется с опытными данными.

При достаточно большом числе измерений данная задача решается в следующем порядке.

Весь диапазон полученных результатов измерений $(x_{\max} - x_{\min})$ разделяют на r интервалов шириной

$$\Delta x = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{r} \tag{1.4}$$

и подсчитывают частоты m_i, равные числу результатов, лежащих в каждом i-м интервале. Число интервалов выбирается в зависимости от числа измерений согласно следующим данным

n	r
40-100	7-9
100-500	8-12
500-1000	10-16
1000-10000	12-22

Затем рассчитывают отношения

$$P_i = \frac{m_i}{n} \tag{1.5}$$

которые называются частостями и представляют собой статистические оценки вероятностей попадания результата наблюдений в i-й интервал. Распределение частостей по интервалам образует статистическое распределение результатов наблюдений.

Разделив частость на длину интервала, получим величину, характеризующую среднюю плотность распределения в интервале

$$f_i = \frac{P_i}{\Delta x_i} = \frac{m_i}{n \cdot \Delta x} \tag{1.6}$$

Отложим на оси абсцисс интервалы Δx в порядке возрастания индекса i и на каждом интервале построим прямоугольник с высотой равной P_i. Полученный график называется гистограммой статистического распределения.

Площадь всей гистограммы равна объему совокупности, если построение велось для ряда частот (m_i) или равна единице, если построение велось для ряда частостей (P_i).

При построении полигона распределения для дискретного ряда по оси абсцисс откладывают значения признака, а по оси ординат – соответствующие им частоты (n_i) или частости (F_i). Нанесенные точки соединяют плавной кривой.

При построении полигона для интервального ряда, необходимо сначала перестроить его в дискретный, заменив каждый интервал средним значением признака. Крайние точки соединяют с серединами пустых интервалов, смежных с первым и последующими интервалами ряда.

Для построения интегральной кривой по горизонтальной оси откладывают значение признака, а по вертикальной – соответствующие им накопленные частоты или частости (вероятности).

Результаты испытаний кратковременной электрической прочности пленки полиэтилентерефталата. f= 50 гц, d = 40 мкм, t = 20 ^{0}C.

Таблица 1

№ п/п	E кВ/мм	№ п/п	E кВ/мм	№ п/п	E кВ/мм	№ п/п	E кВ/мм
1	153	26	170	51	119	76	145
2	122	27	130	52	112	77	130
3	136	28	98	53	147	78	126
4	110	29	104	54	113	79	134
5	146	30	149	55	119	80	123
6	139	31	131	56	143	81	125
7	103	32	175	57	86	82	110
8	140	33	106	58	122	83	117
9	148	34	100	59	131	84	130
10	127	35	120	60	129	85	103
11	132	36	98	61	90	86	146
12	72	37	124	62	118	87	132
13	146	38	179	63	71	88	115
14	136	39	136	64	154	89	137
15	122	40	117	65	106	90	140
16	112	41	131	66	121	91	162
17	120	42	113	67	140	92	181
18	147	43	148	68	126	93	89
19	144	44	104	69	95	94	125
20	169	45	165	70	151	95	138
21	144	46	151	71	126	96	117
22	103	47	107	72	161	97	138
23	124	48	133	73	120	98	122
24	111	49	137	74	131	99	151
25	115	50	166	75	121	100	115

Пример. По результатам определения кратковременной электрической прочности лавсановой пленки (Таблица1) составить статистический ряд и построить гистограмму, полигон распределения и интегральную кривую.

Решение: Для построения кривых распределения составляем статистический ряд значений электрической прочности лавсана в порядке его возрастания, находим крайние значения электрической прочности и рассчитываем шаг интервала. Согласно экспериментальным данным $\mathrm{E}_{\min} = 71$кВ/мм, а $\mathrm{E}_{\max} = 181$кВ/мм. Исходя из объема выборки $n = 100$, выбираем рекомендуемое число интервалов $r = 10$, следовательно шаг интервала Δx равен (1.4)

$$\Delta x = \frac{\mathrm{E}_{\max} - \mathrm{E}_{\min}}{r} = \frac{181 - 71}{10} = 11 \text{ кВ/мм}$$

Разбиваем ряд экспериментальных данных на интервалы с шагом Δx =11кВ/мм и для каждого интервала находим число значений признака ($\mathrm{E}_{\text{пр}}$), т.е.частоту m_i.

Рассчитываем среднее значение для каждого интервала $\Delta\overline{\mathrm{E}}_i$. Расчетные данные заносим в таблицу 2.

Таблица 2

Номер интер-вала r_i	Границы интервала кВ/мм	Среднее значение интервала кВ/мм $\overline{\mathrm{E}}_i$	Частота m_i	Частость P_i	Накопленная частость $\sum_1^r P_i$
1	71-82	76,5	2	0,02	0,02
2	82-93	87,5	4	0,04	0,06
3	93-104	98,5	9	0,09	0,15
4	104-115	109,5	13	0,13	0,28
5	115-126	120,5	23	0,23	0,51
6	126-137	131,5	18	0,18	0,69
7	137-148	142,5	16	0,16	0,85
8	148-159	153,5	6	0,06	0,91
9	159-170	164,5	6	0,06	0,97
10	170-181	175,5	3	0,03	1,00
			$\sum_1^r m_i = 100$	$\sum_1^r P_i = 1$	

По полученным результатам строят кривые распределения. Рис.1.

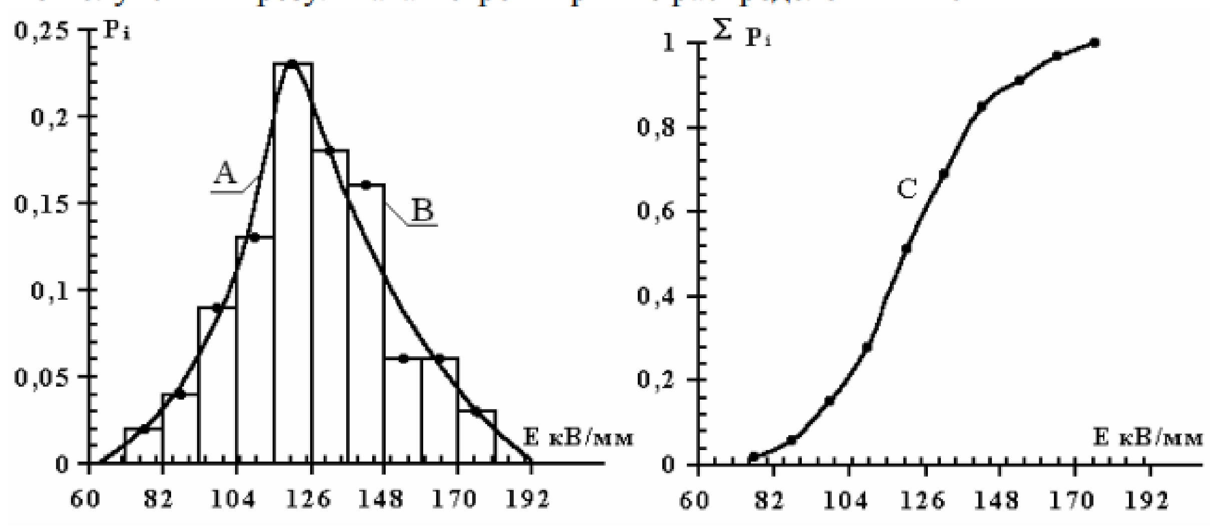


Рис.1 А – полигон распределения; В – гистограмма; С – интегральная кривая.

1.3. Оценка расхождения между средними значениями
а) *при неизвестном σ*

Если требуется установить, принадлежат ли две независимые частичные совокупности объемов n_1 и n_2 одной и той же нормально распределенной генеральной совокупности, то применяется статистика - t.

$$t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{S} \cdot \sqrt{\frac{n_1 \cdot n_2}{n_1 + n_2}} \qquad (1.7)$$

где S - полная оценка дисперсии.

Число степеней свободы определяется как

$$K = n_1 + n_2 - 2 \qquad (1.8)$$

Затем, используя таблицу IV приложения, по известным t и К, определяют значимо или нет расхождение между двумя экспериментальными рядами распределения.

Пример. Рассмотрим данные, полученные при наблюдении веса определенного объема азота при 15 ^{0}C и 760 мм. рт. ст. В первом ряду опытов взвешивался азот, приготовленный из азотистых соединений, во втором – азот, приготовленный из воздуха, таблица3. Средний вес азота в первом ряду опытов оказался равным $\bar{x}_1$ =2,29946 г, во втором $\bar{x}_2$ =2,31016 г. Таким образом, азот воздуха на 1/200 тяжелее азота, извлеченного из его соединений. Найти значимость этой разницы при P=0,999.

Решение: Находим полную дисперсию двух распределений веса азота (таблица 3).

$$S^2 = \frac{(n_1-1)\cdot S_1^2 + (n_2-1)\cdot S_2^2}{(n_1-1)+(n_2-1)} = \frac{0{,}000013315}{16} = 0{,}0000118534$$

откуда $S = 0{,}00344$

Статистика t равна

$$t = \frac{0{,}0107}{0{,}00344}\cdot\sqrt{\frac{80}{18}} = 6{,}55$$

при к = 16 таблица IV приложения дает для P = 0,999, t = 4,015. Таким образом, расчетное значение t = 6,56 значительно превосходит табличное $t_{таб}$=4,015.

Следовательно, полученное различие является не случайным, а существенным. Поэтому предположение о том, что азот, приготовленный из воздуха, и азот из азотистых соединений ничем между собой не отличаются, должно быть отвергнуто. Действительно, вскоре было доказано, что азот, полученный из воздуха, содержит небольшое количество более тяжелого газа – аргона.

Вес азота при двух рядах опытов (г)

Таблица 3

x_1	x_2	$(x_1-\bar{x}_1)^2$	$(x_2-\bar{x}_2)^2$
2,30143	2,31017	0,0000038417	0,0000000001
2,29890	2,30986	03249	900
2,29816	2,31010	17161	036
2,30182	2,31010	55225	225
2,29869	2,31024	06084	064
2,29940	2,31010	0,0049	036
2,29840	2,31028	09604	144
2,29889	2,31035	03364	361
	2,31026		100
	2,31024		064
$\bar{x}_1 = 2{,}29947$	$\bar{x}_2 = 2{,}31016$	$\sum 0{,}0000133152 = S_1^2$	$\sum 0{,}0000001931 = S_2^2$

б) *сравнение средних при известном σ*

Если проведены две серии измерений, и при этом n_1 измерений первой серии дали среднеквадратическое отклонение σ_1, а n_2 измерений второй серии - σ_2 , то для оценки значимости расхождения между сериями этих измерений рассчитываем величину t

$$t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_2} + \frac{\sigma_2^2}{n_1}}} \qquad (1.9)$$

Затем по заданной вероятности *P* в таблице I «А» приложения находим критическое значение $t_{кр.}$ Если абсолютная величина t, рассчитанная из опытных данных, превосходит табличное значение $t_{кр,}$ то расхождение средних можно считать значимым с надежностью вывода *P*.

Так, например, при $P = 0{,}99$ $t_{кр} = 2{,}576$, при $n_1 + n_2 \to \infty$ и если расчетное значение t превосходит $t_{кр}$, то расхождение средних значимо.

1.4. Сравнение двух дисперсий

Если по результатам двух рядов измерений получены эмпирические дисперсии S_1^2 при числе опытов n_1 и S_2^2 при числе опытов n_2. При условии, если $S_1 > S_2$, определяют отношение

$$\frac{S_1^2}{S_2^2} = t(P) > 1 \qquad (1.10)$$

Задавая желаемую надежность вывода *P*, по таблице II приложения находят критическое значение *t*(*P*), соответствующее данному числу приемлемых результатов опыта $к_1 = n_1 - 1$; $к_2 = n_2 - 1$

Если рассчитанное таким образом значение *t* (*P*) оказывается большим, чем приведенное в таблице II приложения, то расхождение дисперсий считают значимым с надежностью *P*.

Пример. Пусть старый измерительный прибор, на котором произведено 200 измерений имеет точность, определяемую эмпирической дисперсией $S_1^2 = 3{,}82$ (кв. единиц). Новый измерительный прибор при первых пятнадцати измерениях дал эмпирическую дисперсию $S_2^2 = 2{,}0$ (кв. единиц). Можно ли считать, что новый прибор дает существенно лучшую точность, чем старый ?

Решение: Рассчитываем отношение *t* (*P*)

$$t\,(P) = \frac{S_1^2}{S_2^2} = \frac{3{,}82}{2{,}0} = 1{,}91,$$

при этом $к_1 = 199$ и $к_2 = 14$.

По таблице II приложения при $P = 0{,}95$ и известных $к_1$ и $к_2$ находим $t_{кр}$ (*P*)>2,13. Поскольку расчетное значение *t* (*P*) оказалось меньше критического, то расхождение в показаниях приборов можно считать не значимым, и точность обоих приборов одинакова.

1.5. Критерий принадлежности двух выборок одной и той же генеральной совокупности (критерий Вилькоксона)

Часто приходится сравнивать две выборки или две серии независимых наблюдений однородных величин x и y, причем наблюдаемые значения x и y дают различные значения средних ($\bar{x} \neq \bar{y}$) или обнаруживают различные рассеивания. Возникает вопрос о том, можно ли считать эти расхождения существенными (значимыми) или их следует приписать случайности выборок. Для ответа на поставленный вопрос можно использовать критерий Вилькоксона, основанный на числе инверсий, под которыми понимается следующее: наблюдения, полученные в двух выборках, располагаются в общую последовательность в порядке возрастания их значений, например, в виде:

$$y_1 x_1 x_2 y_2 y_3 y_4 x_3 y_5 y_6 x_4$$

где $x_1 \ldots x_4$ – члены, принадлежащие первой выборке;

$y_1 \ldots y_6$ – члены второй выборки.

Если какому-либо значению x предшествует некоторый y, то мы говорим, что эта пара дает инверсию. Так, например, в нашей последовательности x_1 и x_2 дают по одной инверсии с y_1, стоящим на первом месте, x_3 дает четыре инверсии (с $y_4 y_3 y_2 y_1$) и x_4 дает шесть инверсий (с $y_6 y_5 y_4 y_3 y_2 y_1$), а всего инверсий в этой последовательности будет:

$$U = 1+1+4+6 = 12$$

Вывод о не существенности различия между этими рядами отвергается, если число U (число инверсий) превосходит выбранную в соответствии с уровнем значимости границу, определяемую из того расчета, что при объемах n_x>10, и m_y > 10 выборок число инверсий распределено приблизительно нормально с центром

$$M_U = \frac{m \cdot n}{2} \qquad (1.11)$$

дисперсией

$$Д_U = \frac{m \cdot n}{12}(m+n+1) \qquad (1.12)$$

и средним квадратическим отклонением $\sigma_U = \sqrt{Д_U}$ (1.13)

Расхождение между этими двумя рядами можно считать несущественными, если выполняется условие

$$M_U - \sigma_U \cdot t_P \le U \le M_U + \sigma_U \cdot t_P \qquad (1.14)$$

Значение t_p определяют из таблицы IV приложения, по заданному значению уровня значимости при числе испытаний $m + n - 1 = к$

1.6. Определение доверительных границ при нормальном распределении результатов эксперимента

Поскольку $\bar{x}$ величина случайная, то для оценки точности метода ее определения необходимо знать интервал, в котором она может находиться с заданной вероятностью P_x, которую называют двусторонней доверительной вероятностью и рассчитывают нижнюю $a_н$ и верхнюю $a_в$ доверительные границы, а соответствующие им вероятности называют односторонними доверительными вероятностями P_1 и P_2 .

Определение нижней доверительной границы $a_н$ для $\bar{x}$ осуществляется следующим способом:

а) по результатам измерений вычисляют среднее арифметическое и оценивают среднее квадратическое отклонение σ или S;

б) задают значение двухсторонней доверительной вероятности P_1;

в) по заданным значениям P_1 и $к = n - 1$, где n – число измерений, находят значение t_{P1}, по таблице IV приложения распределения Стьюдента для двухсторонней доверительной вероятности P_1 (или уровня значимости $q_1 = 1 - P_1$);

г) вычисляют нижнюю доверительную границу ($a_н$) по формуле

$$a_н = \bar{x} - \frac{t_{P1} \cdot \sigma}{\sqrt{n}} \qquad (1.15)$$

Определение верхней доверительной границы $a_в$ для $\bar{x}$ осуществляется следующим образом:

а) по заданным значениям P_2 и $к = n - 1$ по таблице IV приложения находят значение t_{P2};

б) вычисляют верхнюю доверительную границу $a_в$ по формуле

$$a_в = \bar{x} + \frac{t_{P2} \cdot \sigma}{\sqrt{n}} \qquad (1.16)$$

Нижняя и верхняя доверительные границы $a_н$ и $a_в$, полученные по формулам (1.15) и (1.16), образуют доверительный интервал для $\bar{x}$ при двусторонней доверительной вероятности P_x, которая для заданных односторонних доверительных вероятностей P_1 и P_2 может быть вычислена по формуле:

$$P_x = P_1 + P_2 - 1 \qquad (1.17)$$

Если задана двусторонняя доверительная вероятность P_x и сказано, что односторонние доверительные вероятности P_1 и P_2 равны, то они могут быть вычислены по формуле:

$$P_1 = P_2 = P = \frac{1+P_x}{2} \qquad (1.18)$$

В этом случае нижняя $a_н$ и верхняя $a_в$ доверительные границы образуют симметричный интервал

$$a_н = \bar{x} - \varepsilon$$
$$a_в = \bar{x} + \varepsilon \qquad (1.19)$$

где $\varepsilon = \Delta = \dfrac{t_{px} \cdot \sigma}{\sqrt{n}}$

Значение t_{px} находят по таблице I «А» приложения по заданным значениям P_x и к = $n-1$.

1.7. Определение доверительных границ при малом числе измерений

Поскольку вычисленные по результатам измерения значения $\bar{x}$ и S являются лишь некоторым приближением к действительным значениям, то определение доверительных интервалов при заданных доверительных вероятностях оказывается тем менее надежным, чем меньше число измерений.

При числе измерений менее 21 (n<21) формулами для нормального распределения можно пользоваться только в том случае, если для данного метода предварительно с помощью большого числа измерений была доказана норальность распределения и определена оценка среднего квадратического отклонения - σ.

При числе измерений менее 21 и неизвестной σ пользуются распределением Стьюдента. Таблица IV приложения.

Порядок обработки результатов эксперимента при малом числе измерений следующий:

а) определяем среднее арифметическое из n измерений

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{1}^{n} x_i \qquad (1.20)$$

б) определяем стандарт среднего квадратического отклонения

$$S = \sqrt{\sum_{1}^{n} \frac{(x_i - \bar{x})^2}{n-1}} \qquad (1.21)$$

в) задаем доверительную вероятность P_c и по таблице IV приложения находим значение коэффициента t_c для данного числа измерений n;

г) вычисляем доверительную погрешность по формуле:

$$\Delta = t_c \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} \qquad (1.22)$$

д) определяют границы доверительного интервала $x = \bar{x} \pm \Delta$

Пример. По результатам десяти измерений некоторой величины x было получено, что $\bar{x}$= 24, а эмпирический стандарт S = 0,25. Требуется оценить истинное значение измеряемой величины с надежностью P = 0,95.

Решение: По заданной надежности P = 0,95 и числу измерений n=10 находим по таблице IV приложения множитель t(0,95;9)=2,262 и получаем доверительную оценку истинного значения x в виде

$$|x_i - \bar{x}| = |x_i - 24| < 2{,}262\frac{0{,}25}{\sqrt{9}} = 0{,}188$$

таким образом, $|24 - 0{,}188| < \bar{x} < |24 + 0{,}188|$

Пример. Случайная величина x распределена нормально с σ = 2, $\bar{x}$ = 14 при n = 40. Найти доверительный интервал Δx по данным выборки при вероятности P = 0,95.

Решение: $P(t) = 0{,}95 = 2\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{\sigma} \cdot \varepsilon\right)$

По таблице I «А» приложения для $P(t)$ = 0,95 величина t_p = 1,96, следовательно $\Delta x = \frac{t_p \cdot \sigma}{\sqrt{n}} = \frac{1{,}96 \cdot 2}{\sqrt{40}} = 0{,}62$

При P = 0,99 значения величины x лежат в пределах 14 – 0,62< x < 14+0,62

Пример. Для десяти измерений известно, что σ= 0,28, $\bar{x}$ = 36,06. Требуется оценить истинное значение измеряемой величины с надежностью P=0,99.

Решение: По таблице I «А» приложения для P = 0,99 величина t_p=2,576, следовательно $\Delta x = t(P) \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

$\Delta x = 2{,}576 \cdot \frac{0{,}28}{\sqrt{10}} = 0{,}23$ т.е. $36{,}06 - 0{,}23 < x < 36{,}06 + 0{,}23$

1.8. Исключение грубых погрешностей

При проведении ряда измерений одной и той же величины всегда будет некоторый разброс результатов. При этом могут встретиться измерения с большими случайными ошибками, которые являются результатом естественного статистического отклонения. Их незаконное исключение из результатов измерений может необоснованно повысить точность и сделать фиктивным весь ряд измерений.

С другой стороны, измерения с большими случайными ошибками могут оказаться и промахами (x'). Наличие промахов в серии из небольшого числа измерений может исказить как среднее значение измеряемой величины, так и границы доверительного интервала. Поэтому в процессе обработки результатов наблюдения промахи надо обнаруживать и исключать из дальнейшего анализа.

Наиболее простой способ исключения грубых ошибок основан на том, что вероятность появления значения, отклоняющегося от среднего арифметического $\bar{x}$ более чем на 3 S равна 0,003 и поэтому результаты, вероятность получения которых меньше 0,003, можно считать промахами. Таким образом, если результат x' из серии измерений удовлетворяет соотношению

$$| x' - \bar{x}| > 3\,S \qquad (1.23)$$

то x' является промахом и подлежит исключению из серии измерений. После отбрасывания промаха (x'), $\bar{x}$ и S вычисляют заново.

Более надежным является метод исключения грубых ошибок при известном σ, который заключается в определении величины

$$t = \frac{|\bar{x} - x'|}{\sigma \cdot \sqrt{\dfrac{n+1}{n}}}\ , \qquad (1.24)$$

по табличным значениям которой, подсчитывается вероятность 1–2Ф (t) с помощью таблицы $t = \varphi[\Phi(t)]$. Таблица III приложения.

При заданном уровне значимости $\alpha = 1 - P$ «выскакивающее» значение x' считают содержащим грубую ошибку, если для соответствующего значения величины t вероятность 1 – 2Ф (t) < α.

Чтобы подчеркнуть вероятностный характер этого заключения, говорят, что значение x' содержит грубую ошибку с надежностью вывода $P = 1 - \alpha$.

Значение $t = t\,(P)$, для которого 1 – 2Ф (t) = α и, значит, 2Ф (t) = P называется критическим значением отношения (1.24) при надежности P.

Так, если α. = 0,01, то P = 0,99, критическое значение t=t(P)=2,576, и как только отношение (1.24) превзойдет это критическое значение, можно отбраковывать «выскакивающее» значение x' с надежностью вывода P = 0,99.

Пример. Среди 41 результата независимых наблюдений, проведенных с величиной $\sigma = 0{,}133$ обнаружено одно выскакивающее значение $x' = 6{,}866$, в то время как среднее из остальных 40 измерений дают $\bar{x} = 6{,}5$. Содержит ли x' грубую ошибку?

Решение: $$t(P) = \frac{|x' - \bar{x}|}{\sigma \cdot \sqrt{\dfrac{n+1}{n}}} = \frac{0{,}366}{0{,}133\sqrt{\dfrac{41}{40}}} = 2{,}72$$

По таблице III приложения для $P = 0{,}99$ и n = 40 находим значение $t(P)$=2,742, которое оказалось больше расчетного $t\,(P) = 2{,}72$. Следовательно с надежностью $P \geq 0{,}99$ можно считать, что данное значение x' не содержит грубой ошибки, т.е. принадлежит данному ряду. И лишь при $P > 0{,}993$ величина x' содержит грубую ошибку. Таблица IA приложения.

Пример. Для n результатов равноточных независимых измерений $x' = 6{,}5$, а $S = 0{,}133$ и пусть $(n + 1)$ измерение дало результат $x' = 6{,}866$. Содержит ли этот результат грубую ошибку?

Решение: $$t(P) = \frac{|x' - \bar{x}|}{S} = \frac{0{,}366}{0{,}133} = 2{,}75$$

Из таблицы III приложения следует,что если $n = 40$, то полученное значение $t(P) = 2{,}742$ при $P = 0{,}99$, и значение x' можно исключить с вероятностью $P \geq 0{,}99$.

Если $n = 6$, то полученное отношение меньше критического $t_{кр}(P) = 2{,}78$ даже при $P = 0{,}95$ и значение x' исключать не следует.

1.9. Необходимое количество измерений

Необходимое количество измерений для достижения необходимой точности ε и надежности P можно определить заранее только в том случае, когда известна средняя квадратическая ошибка измерений. В этом случае количество измерений для получения доверительной точности

$$|x - \bar{x}| < \Delta x = \varepsilon \cdot \bar{x} \tag{1.25}$$

с заданной надежностью P определяется по уравнению

$$n \geq \left[\frac{t(P)}{2\varepsilon}\right]^2 \cdot \left(\frac{\sigma}{\bar{x}}\right)^2 \tag{1.26}$$

где $t = t\,(P)$ находится по таблицам из равенства $2\Phi(t) = P$. (Таблицы I и II приложения).

Пример. Определить объем выборки для определения электрической прочности резины с доверительной надежностью P = 0,96 и точностью $\varepsilon = \dfrac{\Delta x}{\bar{x}} = 0{,}05$ при коэффициенте вариации

$$к_в = \frac{\sigma}{\bar{x}} = 0{,}5$$

Решение: По таблице I приложения для $\Phi(t) = \dfrac{P}{2} = 0{,}48$ находим $t = t\,(P) = 2{,}054$

$$n \geq \left[\frac{2{,}054}{2 \cdot 0{,}05}\right]^2 \cdot (0{,}5)^2 = 105$$

Если ранее были проведены испытания в аналогичных условиях на достаточно большом числе образцов генеральной совокупности N с точностью Δx и надежностью P, то мы можем определить объем выборки n, которая даст нам возможность найти $\bar{x}$ с заданной точностью ε и надежности P из уравнения

$$n \geq \frac{1}{\dfrac{4\varepsilon^2}{t(P)^2} + \dfrac{1}{\mathrm{N}}} \qquad (1.27)$$

Пример. Зададим $P = 0{,}95$; $\varepsilon = 0{,}05$; N = 1000.

По таблице I приложения находим для $P = 0{,}95$,

$t = t\,(P) = 1{,}96$

отсюда

$$n \geq \frac{1}{\dfrac{4 \cdot (0{,}05)^2}{(1{,}96)^2} + \dfrac{1}{1000}} = \frac{1}{0{,}0036} = 277{,}8$$

Следовательно, если мы возьмем случайную выборку объема 278 или более, то получим относительную погрешность не более чем 0,05 с надежностью P= 0,95.

Примечание: В случае очень большого объема генеральной совокупности в сравнении со случайной выборкой последнее уравнение можно упростить, тогда

$$n \geq \frac{[t(P)]^2}{4\varepsilon^2}$$

Если средняя квадратическая ошибка измерений заранее неизвестна, а известен лишь ее порядок S (стандарт среднего квадратического отклонения), то по известной величине доверительной ошибки Δx объем случайной выборки можно рассчитать по формуле

$$n = \frac{[t(P)]^2 \cdot S^2 + \Delta x^2}{\Delta x^2} \qquad (1.28)$$

В эту формулу входят две величины *t* и *S*, которые зависят от искомого *n*. Для устранения этого явления применяют следующий вариант расчета. Берут предварительную выборку малого объема $n' \leq 10$ и находят для нее *S*. Далее для выбранной вероятности *P* определяют

$$\Phi(t) = \frac{P+1}{2} \qquad (1.29)$$

Зная $\Phi(t)$ и n' по таблице I и II приложения находят *t*.

Пример. Сколько необходимо выбрать образцов стеклотекстолита для механических испытаний на одноосное растяжение, чтобы при доверительной вероятности *P*= 0,954 ошибка не превышала по абсолютной величине Δx = 3 кг/мм^2. Из предварительной выборки объемом n' = 9 было определено *S* = 5,7 кг/мм^2.

$$\Phi(t) = \frac{0{,}954 + 1}{2} = 0{,}977$$

Из таблицы I приложения находим для $\Phi(t)$ = 0,977 и *n* = 9 величина *t*=2,27.

Подставив эти значения в приведенное выше уравнение (1.26) получим

$$n = \frac{(2{,}27)^2 \cdot (5{,}7)^2 + (3)^2}{(3)^2} = 19{,}6$$

Следовательно, для определения среней механической прочности материала при растяжении необходимо делать выборку порядка 20 образцов.

1.10. Оценка погрешности результатов измерений

Целью каждого измерения является определение значения некоторой величины *x*. При практическом осуществлении процесса измерения независимо от точности измерительного прибора и правильности методики измеренная величина отличается от действительной.

Ошибкой измерения Δx называется разность (*x* – А) между результатом измерения *x* и истинным значением А измеряемой величины. По способу числового выражения погрешности различают на:

а) абсолютную погрешность Δx, выраженную в единицах измеряемой величины

$$\Delta x = x - \text{A}, \qquad (1.30)$$

где А - действительное (истинное) значение измеряемой величины;

x - измеренное значение величины;

б) относительную погрешность $\varepsilon_{отн.}$, выраженную в долях или в процентах от действительного значения

$$\varepsilon_{отн.} = \frac{x - \text{А}}{\text{А}} = \frac{\Delta x}{\text{А}}; \qquad \varepsilon_{отн.} = \frac{x - \text{А}}{\text{А}} \cdot 100\% = \frac{\Delta x}{\text{А}} \cdot 100\% \qquad (1.31)$$

Относительная погрешность характеризует точность измерения, но для определения относительной погрешности нужно знать абсолютную погрешность.

Измерения бывают прямые и косвенные. Под прямым измерением понимают такое, при котором искомое значение физической величины определяют по показаниям измерительного прибора.

При косвенном измерении измеряется, как правило, несколько величин. Между этими величинами, полученными путем прямых измерений и искомой величиной, существует известная функциональная зависимость, которая и используется для определения значения искомой величины. Например, если искомая величина x представляет собой функцию двух переменных (α и β) и связана с ними зависимостью $y=f(\alpha,\beta)$ то погрешность Δy, в результате наличия погрешностей $\Delta\alpha$ и $\Delta\beta$ в значениях α и β может быть вычислена следующим образом.

Погрешности Δy, $\Delta\alpha$ и $\Delta\beta$ практически очень малы, по сравнению с y, α, β. Поэтому их можно отождествить с дифференциалами dy, $d\alpha$ и $d\beta$; при этом dy будет представлять дифференциал функции y при дифференциалах $d\alpha$ и $d\beta$ величин α и β. Применяя к поставленной задаче дифференциальное исчисление, можно записать

$$dy = f'_\alpha(\alpha,\beta) \cdot d\alpha + f'_\beta(\alpha,\beta) \cdot d\beta, \qquad (1.32)$$

где $f'_\alpha(\alpha,\beta)$ - частная производная функции $f(\alpha,\beta)$ по α, где α рассматривается как единственная переменная; $f'_\beta(\alpha,\beta)$ - такая же частная производная $f(\alpha,\beta)$ по β.

Тогда для относительной погрешности $\dfrac{dy}{y}$, равной отношению абсолютной погрешности к самой величине y, можно записать

$$\frac{dy}{y} = \frac{f'_\alpha(\alpha,\beta) \cdot d\alpha}{f(\alpha,\beta)} + \frac{f'_\beta(\alpha,\beta) \cdot d\beta}{f(\alpha,\beta)} \qquad (1.33)$$

Решая это уравнение, получим

$$d(\ln y) = d(\ln f(\alpha,\beta)) \qquad (1.34)$$

Полученный результат можно сформулировать в виде следующего правила:

для вычисления относительной погрешности косвенного измерения $\left(\frac{\Delta y}{y}\right)$ *надо взять натуральный логарифм это величины (lny) и продифференцировать этот логарифм по измеренным величинам, рассматривая их как переменные.*

Пример. Рассчитать абсолютную и относительную погрешности определениядиэлектрической проницаемости диэлектрика конденсатора, если $C_x = 100\pi F$, $\frac{\Delta C}{C} = 2\%$, диаметр электрода

D= (25±0,05)мм, а толщина образца h = (1±0,005)мм.

Из формулы плоского конденсатора находим

$$\varepsilon_p = \frac{4 \cdot C_x \cdot h}{\varepsilon_0 \cdot \pi \cdot D^2} = \frac{4 \cdot 100 \cdot 10^{-12} \cdot 1 \cdot 10^{-3}}{8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 3{,}14 \cdot 6{,}25 \cdot 10^{-4}} = 23$$

Логарифмирование этой функциональной зависимости дает:

$$\ln \varepsilon = \ln 4 + \ln C_x + \ln h - \ln \varepsilon_0 - 2 \ln D - \ln \pi$$

дифференцируем это выражение

$$\frac{d\varepsilon}{\varepsilon} = \frac{dC_x}{C_x} + \frac{dh}{h} - 2\frac{dD}{D}$$

Так как нам неизвестны знаки отдельных погрешностей, то принимаем, что все они имеют одинаковый знак, тогда окончательно:

$$\frac{d\varepsilon}{\varepsilon} = \frac{dC_x}{C_x} + \frac{dh}{h} + 2\frac{dD}{D}$$

Полученная относительная погрешность будет *максимальной*, т.е. дает верхний предел погрешности

$$\frac{d\varepsilon}{\varepsilon} = 0{,}02 + 0{,}002 + 0{,}005 = 0{,}027; \qquad \frac{d\varepsilon}{\varepsilon} \cdot 100\% = 2{,}7\%$$

Абсолютная погрешность определения ε равна:

$$d\varepsilon = \varepsilon \cdot \left(\frac{d\varepsilon}{\varepsilon}\right) = 23{,}0 \cdot 0{,}027 = \pm 0{,}62$$

следовательно $\varepsilon = \varepsilon_p \pm d\varepsilon = 23{,}0 \pm 0{,}62$

Формулы для вычисления относительной погрешности для некоторых функциональных зависимостей

Функция	Относительная погрешность

$y = a+b$	$\pm\dfrac{\Delta a+\Delta b}{a+b}$
$y = a-b$	$\pm\dfrac{\Delta a+\Delta b}{a-b}$
$y = \ln a$	$\pm\dfrac{\Delta a}{a\cdot\ln a}$
$y = \ln\dfrac{a}{b}$	$\pm\dfrac{1}{\ln a/b}\cdot\left(\dfrac{\Delta a}{a}+\dfrac{\Delta b}{b}\right)$
$y = a^b$	$\pm\ln a\cdot\Delta b + b\cdot\dfrac{\Delta a}{a}$
$y = \sqrt[n]{a}^{\,b}$	$\pm\dfrac{1}{n}\cdot\dfrac{\Delta a}{a}$

1.11. Построение графиков. Выбор масштаба

Графическое изображение экспериментальных и расчетных данных облегчает сравнение величин, позволяет легко обнаружить наличие максимумов, минимумов, точек перегиба. В таблицах эти особенности проявляются менее отчетливо.

При построении графиков необходимо соблюдать несколько основных правил.

1. Значение независимой переменной (аргумента) откладывают, как правило, по оси абсцисс, функции – по оси ординат.
2. Кривая должна быть плавной, с малым числом перегибов.
3. Кривая должна проходить насколько возможно близко ко всем нанесенным точкам, однако она не обязательно должна проходить через каждую отдельную точку.
4. При построении кривой (прямой) по экспериментальным точкам необходимо иметь в виду, что число точек лежащих выше кривой должно быть примерно равно числу точек лежащих ниже кривой.

   С использованием современных методов математического описания зависимости (прямой) используется метод наименьших квадратов, и используются правила нахождения уравнений регрессии. (Программа Origin–6 и др.)

   Построение кривой по точкам возможно при использовании программ ЭВМ. (Graph, Mathcad, Origin и др.)
5. Если кривая предназначена для точного определения соответствующих значений координат или для точного определения производных, то провести ее следует в виде возможно более тонкой линии.

   При выборе масштаба необходимо учитывать следующее:

1. Если функция или аргумент изменяются более чем на два порядка, то в этом случае следует выбирать логарифмический масштаб.
2. Масштаб следует выбирать таким, чтобы координаты любой точки графика могли быть определены быстро и легко. Как правило , масштаб (число единиц измерения, приходящиеся на один сантиметр координаты) выбирают с таким расчетом, чтобы абсолютная погрешность измерений соответствовала примерно одной десятой – одной двадцатой цены деления масштаба.
3. Масштабы должны быть выбраны так, чтобы расстояние между главными соседними линиями (один сантиметр) соответствовало одной, двум, пяти или десяти единицам измерения или этим значениям, умноженным на $10^{\pm n}$, где n – целое число. Масштаб, при котором чтение графика затруднено, не может считаться приемлемым.
   Не все линии координатной сетки должны быть подписаны: часто для чтения графика оказывается удобным подписывать линии через одну или несколько.

Пример. Выберете вид масштаба и его величину для построения зависимости $U_{пр} = f(T\ ^0C)$, если предел изменения пробивного напряжения составляет от 40 кВ до 20 кВ при повышении температуры от 20^0C до 200^0C. Погрешность измерения пробивного напряженя ±2%, а температуры ±1%.

Решение. Поскольку и аргумент, и функция изменяются менее чем на два порядка, то выбираем по обеим осям линейные масштабы (согласно п.6. раздел 1.11). Рассчитаем максимальные значения абсолютных погрешностей измеряемых величин

$$\Delta U_{пр} = \varepsilon_{пр} \cdot U_{пр} = 0{,}02 \cdot 40 = 0{,}8\ кВ$$

$$\Delta T\ ^0C = \varepsilon_т \cdot T\ ^0C = 0{,}01 \cdot 200 = 2\ ^0C$$

Учитывая требования к выбору масштаба (п.7. и п. 8. Раздел 1.11) (он должен в 10 и более раз превышать абсолютную погрешность измерения), принимаем масштаб по оси ординат $M_и$=10 кВ, а по оси абсцисс $M_т$=20^0C.

1.12. Задачи по статистической обработке результатов испытаний и погрешности измерений

1.1. На основании экспериментальных значений, приведенных в таблице1, составьте ряд распределения. По полученным результатам постройте

а) гистограмму распределения,

б) полигон распределения.

1.2. По результатам испытаний, приведенных в таблице1, постройте интегральную кривую распределения кратковременной электрической прочности полиэтилентерефталата.

1.3. Рассчитайте среднее значение и среднее квадратическое отклонение величины кратковременной электрической прочности лавсана (таблица1).

1.4. Можно ли считать, что минимальное и максимальное значения электрической прочности лавсана (таблица1) содержат грубую ошибку, и исключить их из дальнейшей обработки?

1.5. Пусть для n = 40 результатов независимых равноточных измерений некоторой величины среднее значение равно $\bar{x}$=6,5, а эмпирический стандарт S = 0,133, и пусть (n +1) измерение дало результат x=6,866. Можно ли исключить этот результат из дальнейшей обработки? Покажите, при каком значении n полученный результат x=6,866 не следует исключать при надежности P=0,95.

Таблица 4

x_i	n_i
35,6	1
35,9	3
36,1	3
36,2	2
36,6	1
$\sum$	10

1.6. Для десяти измерений, результаты которых приведены в таблице 4, рассчитайте среднее квадратическое отклонение и оцените истинное значение измеряемой величины x с надежностью P = 0,9.

1.7. Пусть для десяти измерений, результаты которых приведены в таблице 4, величина среднего квадратического отклонения неизвестна.
Требуется оценить истинное значение измеряемой величины с надежностью P = 0,99.

1.8. По приведенным испытаниям, представленным в таблице 4, определите границы, между которыми лежит среднее значение общей совокупности при 5%-ном уровне значимости.

1.9. Случайная величина x, распределенная по нормальному закону, представляет собой ошибку измерения некоторого расстояния. Среднеквадратическое отклонение ошибки равно 0,8 м^2. Найти вероятность того, что отклонение измеренного значения от истинного не превзойдет по абсолютной величине 1,6 м.

1.10. Для десяти измерений, результаты которых приведены в таблице 5, величина среднего квадратического отклонения $\sigma = 0,25$. Оцените истинное значение измеряемой величины с надежностью $P = 0,99$. Какое количество измерений необходимо произвести, чтобы при данной надежности получить результат с точностью до 0,1.

1.11. Используя результаты пробивного напряжения образцов резины (таблица 4), определите вероятность появления образца с пробивным напряжением:

а) $x = 35,6$ кв

б) $x = 36,6$ кв

в) $x = 36,0$ кв

1.12. Пусть в шести сериях опытов произведено по девять измерений, которые дали эмпирические дисперсии

$S_1^2 = 3,82$; $S_2^2 = 1,70$; $S_3^2 = 1,30$; $S_4^2 = 0,92$; $S_5^2 = 0,78$; $S_6^2 = 0,81$.

Относятся ли полученные дисперсии к выборкам из совокупности с одной и той же теоретической дисперсией.

Примечание: При решении данной задачи воспользоваться таблицей критических отношений G. Таблица V приложения

1.13. Пусть две серии в 25 и 50 равноточных измерений дали средние значения соответственно $\bar{x}_1 = 23,56$ и $\bar{x}_2 = 22,80$ и стандарт среднего квадратического отклонения от них S_1=1,10 и S_2 = 1,25. Требуется сравнить средние значения и решить вопрос о значимости их расхождения с надежностью P=0,99.

1.14. Две серии в 25 и 50 измерений, произведенных со средней квадратической ошибкой $\sigma = 1,20$, дали средние значения $\bar{x}_1 = 23,56$ и $\bar{x}_2 = 22,80$. Требуется сравнить эти средние и решить вопрос о значимости их расхождения.

Результаты испытания ударной вязкости электротехнической стали (кг/см^2)

Таблица 5

N	x	$x-\bar{x}$	$(x-\bar{x})^2$
1	5,4	+0,37	0,1369
2	5,7	+0,67	0,4489
3	5,5	+0,47	0,2209
4	5,0	-0,03	0,0009
5	4,8	-0,23	0,0529
6	5,3	+0,27	0,0729
7	5,0	-0,03	0,0009
8	4,4	-0,63	0,3969
9	4,2	-0,83	0,6889
10	5,0	-0,03	0,0009
	$\sum$50,3	-1,78 +1,78	2,0210

1.15. Систематические ошибки измерительного прибора практически равны нулю, а случайные распределены нормально со среднеквадратическим отклонением $\sigma = 20$ед. Необходимо, чтобы абсолютное значение разности между оценкой измеряемой величины и истинным ее значением не превосходило 10ед. Определить, с какой вероятностью будет выполнено это условие, если число наблюдений 3,5,10,25. (Построить график).

1.16. Определить число испытаний, которые нужно провести, чтобы отклонение измеряемой величины от его среднего значения не превышало по абсолютной величине 0,02 с вероятностью 0,99, если $\sigma = 0,2$.

1.17. Сколько должно быть произведено независимых измерений диаметров провода, чтобы с вероятностью не меньшей чем 0,98, можно было утверждать, что среднее арифметическое результатов измерений отличается от истинного значения по абсолютной величине меньше, чем на 0,01мм, если дисперсия отдельного результата измерения не превосходит 1мм^2.

1.18. Рассчитать относительную и абсолютную погрешность измерения ρ_V плоского образца гальванометрическим методом непосредственного отклонения, если погрешности прямых измерений составляют: диаметра электродов D=50±0,05мм, толщины образца h=1мм±0,005мм, напряжения U = 200В ± 1%, тока I =$1\cdot10^{-10}$А±0,5%.

1.19. Рассчитайте относительную и абсолютную погрешность измерения диэлектрической проницаемости плоского образца диаметром D=5см, толщиной h = 0,2см, емкости C_x = 50πF,если прямые измерения были проведены с погрешностью $\frac{\Delta C_x}{C_x} = 0{,}4\%$, Δh= 0,0005см, ΔD=0,01см.

1.20. Расчитайте абсолютную и относительную погрешность ρ_s плоского образца с наклеенными параллельными электродами, измеренную зеркальным гальванометром методом заряда конденсатора. Исходные данные: U = (200 ± 2)В, t=(300± 1) ^{0}C, a = (5 ± 0,05)см, b=(0,2± 0,005)см, α=(10±0,5)*дел.*, $C_Б = (1\cdot10^{-9} \pm 2\%)\frac{Кл}{дел.}$, n=const=1.

1.21. Рассчитайте абсолютную и относительную погрешности измерения ρ_s с помощью тераомметра для плоского образца с концентрическими электродами, если прямые измерения дали следующие результаты: R_S=(10^{11}±6%)Ом, $D_{эл}$=(50±0,05)мм, $D_{охр.к.}$= (54 ± 0,05)мм.

1.22. Рассчитайте абсолютную и относительную погрешности измерения диэлектрической проницаемости трубчатого образца, если прямые измерения дали следующие результаты: C_x = 100πF ± 2%, l=(100±0,05)мм, кольцевой зазор b = (2 ± 0,005)мм, наружный и внутренний диаметры соответственно равны D = (50 ± 0,05)мм и d=(40 ± 0,05)мм.

1.23. Определите абсолютную и относительную погрешности оценки электрической прочности плоских образцов толщиной h=(0,6±0,005)мм, если среднее значение пробивного напряжения составило $U_{пр}$ = 20 ± 1 кВ.

1.24. Рассчитайте относительную и абсолютную погрешности измерения ρ_v трубчатого образца с помощью зеркального гальванометра методом непосредственного отклонения, если прямые измерения дали следующие результаты:
I=($1\cdot10^{-8}$±$1\cdot10^{-10}$)А, напряжение U=(100±1)В, внешний и внутренний диаметры образца соответственно D=(50±0,05)мм, d=(40±0,05)мм, длина l=(100±0,05)мм, зазор между электродом и охранным кольцом b=(2±0,005)мм.

1.25. Рассчитайте относительную и абсолютную погрешности измерения ρ_v плоского образца электростатическим электрометром методом прямого отклонения, если прямые измерения дали следующие результаты: напряжение на образце $U_x = 500 \pm 1\%$, напряжение на электромере $U_э$=0,01±1%, эталонное сопротивление $R_0=1\cdot10^{12}$Ом±2%, диаметр измерительного электрода D=(75±0,05)мм, толщина образца h=(1 ± 0,005)мм.

1.26. Рассчитать относительную и абсолютную погрешности измерения ρ_v методом сравнения с помощью зеркального гальванометра, если известно, что диаметр измерительного электрода D = (100±0,05)мм, толщина образца h=(2±0,005)мм, эталонное сопротивление $R_0=1\cdot10^{6}$Ом ±1%, отклонения гальванометра α_1 = (100 ± 0,5)*дел.*, α_2=(75±0,5)*дел.*, отклонение шунтовых чисел $n_1 = 1$, $n_2 = 100$, $\frac{\Delta n_1}{n_1} = \frac{\Delta n_2}{n_2} = 2\%$.

1.27. Выберите вид масштаба и его величину для построения зависимости $C_x = \varphi(f$ Гц) при условии, что $\frac{\Delta f}{f} = 2\cdot10^{-4}$, $\frac{\Delta C}{C}\cdot100 = 1\%$. Диапазон частот от 20 Гц до $1\cdot 10^4$. Изменение емкости от 50 до 70πF.

1.28. Выберите вид масштаба и его величину для построения зависимости I = f(t),если относительная погрешность измерения тока составляет 2%, а абсолютная погрешность определения времени не превышает ± 1с. Спадание тока происходит в пределах от $1\cdot10^{-7}$А до $1\cdot10^{-10}$А за время t =90с.

1.29. Выберите вид масштаба и его величину для построения зависимости tgδ = f(T ^{0}C), если относительная погрешность измерения tgδ составляет ±3%, а абсолютная погрешность измерения температуры ± 1 ^{0}C. Предел изменения tgδ от $1\cdot10^{-3}$ до $5\cdot10^{-2}$, а температуры от 20^{0}C до 120 ^{0}C.

1.30. Выберите вид масштаба и его величину для построения зависимости γ = f(T ^{0}C), если относительная погрешность измерения электропроводности составляет ± 1%, а абсолютная погрешность измерения температуры ± 2 ^{0}C. Электропроводность возрастает от $1\cdot10^{-14}$Ом$^{-1}\cdot$м$^{-1}$ до $1\cdot10^{-10}$Ом$^{-1}\cdot$м$^{-1}$ при повышении температуры от 20 ^{0}C до 150^{0}C.

1.31. Выберите вид масштаба и его величину для построения зависимости $\gamma = f\left(\frac{1}{T^0 K}\right)$. (Исходные данные приведены в предыдущей задаче).

1.32. Выберите вид масштабов и рассчитайте их значения для построения зависимости $\rho_v = f\left(\frac{1}{T^0 K}\right)$ полагая, что она описывается уравнением $\rho_v = \rho_0 \cdot \ell^{\frac{W}{KT}}$. Можно считать, что инструментальная погрешность определения ρ_0 составляет ±3%, величина $\frac{W}{K}=1\cdot10^4$град. При T = 293 К $\rho_0 = 5\cdot10^{13}$Ом·м.

1.33. Выберите вид масштаба и его величину для зависимости $U_{пр} = f$ (h), если известно, что относительная погрешность измерения пробивного напряжения составляла ± 3%, а абсолютная погрешность измерения толщины образцов ±0,005мм. С увеличением толщины образцов от 1 до 5мм пробивное напряжение возросло от 30кВ до 120кВ.

Приложение

Таблица I

Интеграл вероятностей $\Phi(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^t e^{-t^2/2dt}$, $\Phi(-t)=-\Phi(t)$

t	Сотые доли t									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,000	0040	0080	0120	0160	0199	0239	0279	0319	0359
0,1	0	0438	0478	0517	0557	0596	0636	0675	0714	0753
0,2	0398	0832	0871	0910	0948	0987	1026	1064	1103	1141
0,3	0793	1217	1255	1293	1331	1368	1406	1443	1480	1517
0,4	1179	1591	1628	1664	1700	1736	1772	1808	1844	1879
0,5	1554	1950	1985	2019	2054	2088	2123	2157	2190	2224
0,6	1915	2291	2324	2357	2389	2422	2454	2486	2517	2549
0,7	2257	2611	2642	2673	2703	2734	2764	2794	2823	2852
0,8	2580	2910	2939	2967	2995	3023	3051	3078	3106	3133
0,9	2881	3186	3212	3238	3264	3289	3315	3340	3365	3389
1,0	3159	3437	3461	3485	3508	3531	3554	3577	3599	3621
1,1	3413	3665	3686	3708	3729	3749	3770	3790	3810	3830
1,2	3643	3869	3888	3907	3925	3944	3962	3980	3997	4015
1,3	3849	4049	4066	4082	4099	4115	4131	4147	4162	4177
1,4	4032	4207	4222	4236	4251	4265	4279	4292	4306	4319
1,5	4192	4345	4357	4370	4382	4394	4406	4418	4429	4441
1,6	4332	4463	4474	4484	4495	4505	4515	4525	4535	4545
1,7	4452	4564	4573	4582	4591	4599	4608	4616	4625	4633
1,8	4554	4649	4656	4664	4671	4678	4686	4693	4699	4706
1,9	4641	4719	4726	4732	4738	4744	4750	4756	4761	4767
2,0	4713	4778	4783	4788	4793	4798	4803	4808	4812	4817
2,1	4772	4826	4830	4834	4838	4842	4846	4850	4854	4857
2,2	4821	4864	4868	4871	4875	4878	4881	4884	4887	4890
2,3	4861	4896	4898	4901	4904	4906	4909	4911	4913	4916
2,4	4893	4920	4922	4925	4927	4929	4931	4932	4934	4936
	4918									

Таблица допускает линейную интерполяцию с ошибкой до 10^{-4}.

Пример. Вычислить Φ(1,614).

Решение. Берем из таблицы два значения Φ(1,61)=0,4463 и Φ(1,62)=0,4474 с разностью 0,0011 и вводим поправку на относительное приращение аргумента (1,614 – 1,61)/0,01=0,4:

$$\Phi(1{,}614)=\Phi(1{,}61)+0{,}0011\cdot 0{,}4 = 0{,}4467.$$

Таблица IA
(продолжение)

Величины, связанные с интегралом вероятностей Ф(t);
Функция t=t (P) является обратной для P=2Ф (t)

t	Ф(t)	1 – 2Ф(t)	1 – P	t=t (P)	P
2,5	0,49379	0,01242	0,05	1,960	0,95
2,6	0,49534	0,00932	0,04	2,054	0,96
2,7	0,49653	0,00693	0,03	2,170	0,97
2,8	0,49744	0,00511	0,02	2,326	0,98
2,9	0,49813	0,00373	0,01	2,576	0,99
3,0	0,49865	0,00270	0,009	2,612	0,991
3,1	0,49903	0,00194	0,008	2,652	0,992
3,2	0,49931	0,00137	0,007	2,697	0,993
3,3	0,49952	0,00097	0,006	2,748	0,994
3,4	0,49966	0,00067	0,005	2,807	0,995
3,5	0,499767	0,000465	0,004	2,878	0,996
3,6	0,499841	0,000318	0,003	2,968	0,997
3,7	0,499892	0,000216	0,002	3,090	0,998
3,8	0,499927	0,000145	0,001	3,291	0,999
3,9	0,499952	0,000096	0,0009	3,320	0,9991
4,0	0,499968	0,000063	0,0008	3,353	0,9992
4,1	0,499979	0,000041	0,0007	3,390	0,9993
4,2	0,499987	0,000027	0,0006	3,432	0,9994
4,3	0,499991	0,000017	0,0005	3,481	0,9995
4,4	0,499995	0,000011	0,0004	3,540	0,9996
4,5	0,4999966	0,0000068	0,0003	3,615	0,9997
4,6	0,4999979	0,0000041	0,0002	3,720	0,9998
4,7	0,4999987	0,0000025	0,0001	3,891	0,9999
4,8	0,4999992	0,0000016	10^{-5}	4,417	$1-10^{-5}$
4,9	0,4999995	0,0000009	10^{-6}	4,892	$1-10^{-6}$
5,0	0,4999997	0,0000006	10^{-7}	5,327	$1-10^{-7}$

В таблице значений Ф(t) ошибка линейной интерполяции убывает с увеличением значений t ; она не превосходит: 10^{-4} – в интервале (2,5; 3,2); 10^{-5} –в интервале (3,2; 3,9);
10^{-6} - в интервале (3,9; 4,5); 10^{-7} – в интервале (4,5; 5,0).

В таблице значений t (P) интерполяцию не производят.

Таблица II

Критические значения отношения t (P) при доверительной вероятности 0,95 (обычный шрифт) и 0,99 (жирный шрифт).

k_2 \ k_1	4	6	8	10	15	20	30	40	50	100	∞
6	4,53	4,28	4,15	4,06	3,94	3,87	3,81	3,77	3,75	3,71	3,67
	9,15	**8,47**	**8,10**	**7,87**	**7,56**	**7,39**	**7,23**	**7,14**	**7,09**	**6,99**	**6,88**
7	4,12	3,87	3,73	3,63	3,50	3,44	3,38	3,34	3,32	3,28	3,23
	7,85	**7,19**	**6,84**	**6,62**	**6,31**	**6,15**	**5,98**	**5,90**	**5,85**	**5,75**	**5,65**
8	3,84	3,58	3,44	3,34	3,21	3,15	3,08	3,05	3,03	2,89	2,93
	7,01	**6,37**	**6,03**	**5,82**	**5,52**	**5,36**	**5,20**	**5,11**	**5,06**	**4,96**	**4,86**
9	3,63	3,37	3,23	3,13	3,00	2,93	2,86	2,82	2,80	2,76	2,71
	6,42	**5,80**	**5,47**	**5,26**	**4,96**	**4,80**	**4,64**	**4,56**	**4,51**	**4,41**	**4,31**
10	3,48	3,22	3,07	2,97	2,84	2,77	2,70	2,67	2,64	2,59	2,54
	5,99	**5,39**	**5,06**	**4,85**	**4,56**	**4,41**	**4,25**	**4,17**	**4,12**	**4,01**	**3,91**
12	3,26	3,00	2,85	2,76	2,62	2,54	2,46	2,42	2,40	2,35	2,30
	5,41	**4,82**	**4,50**	**4,30**	**4,01**	**3,86**	**3,70**	**3,61**	**3,56**	**3,46**	**3,36**
14	3,11	2,85	2,70	2,60	2,46	2,39	2,31	2,27	2,24	2,19	2,13
	5,03	**4,46**	**4,14**	**3,94**	**3,66**	**3,51**	**3,34**	**3,26**	**3,21**	**3,11**	**3,00**
16	3,01	2,74	2,59	2,49	2,35	2,28	2,20	2,16	2,13	2,07	2,01
	4,77	**4,20**	**3,89**	**3,69**	**3,41**	**3,25**	**3,10**	**3,01**	**2,96**	**2,86**	**2,75**
18	2,93	2,66	2,51	2,41	2,27	2,19	2,11	2,07	2,04	1,98	1,92
	4,58	**4,01**	**3,71**	**3,51**	**3,23**	**3,07**	**2,91**	**2,83**	**2,78**	**2,68**	**2,57**
20	2,87	2,60	2,45	2,35	2,20	2,12	2,04	1,99	1,96	1,90	1,84
	4,43	**3,87**	**3,56**	**3,37**	**3,09**	**2,94**	**2,77**	**2,69**	**2,63**	**2,53**	**2,42**
22	2,82	2,55	2,40	2,30	2,15	2,07	1,98	1,93	1,91	1,84	1,78
	4,31	**3,76**	**3,45**	**3,26**	**2,98**	**2,83**	**2,67**	**2,58**	**2,53**	**2,42**	**2,31**
24	2,78	2,51	2,36	2,26	2,11	2,02	1,94	1,89	1,86	1,80	1,73
	4,22	**3,67**	**3,36**	**3,17**	**2,89**	**2,74**	**2,58**	**2,49**	**2,44**	**2,33**	**2,21**
26	2,74	2,47	2,32	2,22	2,07	1,99	1,90	1,85	1,82	1,76	1,69
	4,14	**3,59**	**3,29**	**3,09**	**2,81**	**2,66**	**2,50**	**2,41**	**2,36**	**2,25**	**2,13**
30	2,69	2,42	2,27	2,16	2,01	1,93	1,84	1,79	1,76	1,69	1,62
	4,02	**3,47**	**3,17**	**2,98**	**2,70**	**2,55**	**2,38**	**2,29**	**2,24**	**2,13**	**2,01**
35	2,64	2,37	2,22	2,11	1,96	1,88	1,79	1,73	1,70	1,63	1,56
	3,91	**3,36**	**3,06**	**2,87**	**2,60**	**2,45**	**2,28**	**2,19**	**2,13**	**2,02**	**1,89**
40	2,61	2,34	2,18	2,07	1,92	1,84	1,74	1,69	1,66	1,59	1,51
	3,83	**3,29**	**2,99**	**2,80**	**2,52**	**2,37**	**2,20**	**2,11**	**2,05**	**1,94**	**1,81**
50	2,56	2,29	2,13	2,02	1,87	1,78	1,69	1,63	1,60	1,52	1,44
	3,72	**3,18**	**2,88**	**2,70**	**2,42**	**2,26**	**2,10**	**2,00**	**1,94**	**1,82**	**1,68**
100	2,46	2,19	2,03	1,92	1,77	1,68	1,57	1,51	1,48	1,39	1,28
	3,51	**2,99**	**2,69**	**2,51**	**2,22**	**2,06**	**1,89**	**1,79**	**1,73**	**1,59**	**1,43**
∞	2,37	2,09	1,94	1,83	1,66	1,57	1,46	1,40	1,35	1,24	1,00
	3,32	**2,80**	**2,51**	**2,32**	**2,03**	**1,87**	**1,69**	**1,59**	**1,52**	**1,36**	**1,00**

Таблица допускает линейную интерполяцию по аргументу k_2 и квадратическую интерполяцию по аргументу k_1 с ошибкой до 0,01.

Таблица III

Критические значения $t_n(P)$ отношения (1.3-2) для браковки «выскакивающих» значений x_* (n - число приемлемых результатов, P - надежность вывода).

n \ P	0,95	0,98	0,99	0,999	n \ P	0,95	0,98	0,99	0,999
5	3,04	4,11	5,04	9,43	20	2,145	2,602	2,932	3,979
6	2,78	3,64	4,36	7,41	25	2,105	2,541	2,852	3,819
7	2,62	3,36	3,96	6,37	30	2,079	2,503	2,802	3,719
8	2,51	3,18	3,71	5,73	35	2,061	2,476	2,768	3,652
9	2,43	3,05	3,54	5,31	40	2,048	2,456	2,742	3,602
10	2,37	2,96	3,41	5,01	45	2,038	2,441	2,722	3,565
11	2,33	2,89	3,31	4,79	50	2,030	2,429	2,707	3,532
12	2,29	2,83	3,23	4,62	60	2,018	2,411	2,683	3,492
13	2,26	2,78	3,17	4,48	70	2,009	2,399	2,667	3,462
14	2,24	2,74	3,12	4,37	80	2,003	2,389	2,655	3,439
15	2,22	2,71	3,08	4,28	90	1,998	2,382	2,646	3,423
16	2,20	2,68	3,04	4,20	100	1,994	2,377	2,639	3,409
17	2,18	2,66	3,01	4,13	∞	1,960	2,326	2,576	3,291
18	2,17	2,64	2,98	4,07					

Линейная интерполяция по аргументу n может дать ошибку до 10^{-2} при $20 < n < 60$ и ошибку до 10^{-3} при $60 < n < 100$.

При $n > 100$ критические значения $t_n(P)$ с точностью до 10^{-3} можно вычислить по формуле

$$t_n(P) = t_\infty(P) + \frac{t_{100}(P) - t_\infty(P)}{n} \cdot 100;$$

например, при P = 0,99 и n = 200 имеем:

$$t_{200}(0{,}99) = 2{,}576 + \frac{2{,}639 - 2{,}576}{200} \cdot 100 = 2{,}576 + 0{,}031 = 2{,}607$$

Таблица IV

Распределение Стьюдента. Значения t = t (P; k).

P / k	0,90	0,95	0,98	0,99	0,999
4	2,132	2,776	3,747	4,604	8,610
5	2,015	2,571	3,365	4,032	6,859
6	1,943	2,447	3,143	3,707	5,959
7	1,895	2,365	2,998	3,499	5,405
8	1,860	2,306	2,896	3,355	5,041
9	1,833	2,262	2,821	3,250	4,781
10	1,812	2,228	2,764	3,169	4,587
11	1,796	2,201	2,718	3,106	4,487
12	1,782	2,179	2,681	3,055	4,318
13	1,771	2,160	2,650	3,012	4,221
14	1,761	2,145	2,624	2,977	4,140
15	1,753	2,131	2,602	2,947	4,073
16	1,746	2,120	2,583	2,921	4,015
18	1,734	2,103	2,552	2,878	3,922
20	1,725	2,086	2,528	2,845	3,850
25	1,708	2,060	2,485	2,787	3,725
30	1,697	2,042	2,457	2,750	3,646
35	1,689	2,030	2,437	2,724	3,591
40	1,684	2,021	2,423	2,704	3,551
45	1,679	2,014	2,412	2,689	3,522
50	1,676	2,008	2,403	2,677	3,497
60	1,671	2,000	2,390	2,660	3,460
70	1,667	1,995	2,381	2,648	3,436
80	1,664	1,990	2,374	3,639	3,416
90	1,662	1,987	2,368	2,632	3,401
100	1,660	1,984	2,364	2,626	3,391
∞	1,645	1,960	2,326	2,576	3,291

Интерполяция значений t (P;k) допустима только по аргументу k. При 16 <k < 60 ошибка линейной интерполяции не превосходит $7 \cdot 10^{-3}$ для P = 0,999, $4 \cdot 10^{-3}$ для P = 0,99 и $2 \cdot 10^{-3}$ для P ≤ 0,98. При 60 <k < 100 ошибка линейной интерполяции не превосходит 10^{-3}.

При k > 100 с точностью до 10^{-3} имеет место формула

$$t(P;k) = t(P;\infty) + \frac{100}{k}\left[t(P;100) - t(P;\infty)\right].$$

Например, при P = 0,99 и k > 100 имеем

$$t(0{,}99;k) = 2{,}576 + \frac{100}{k} \cdot 0{,}050$$

Таблица V

Критические значения отношения G при доверительной вероятности 0,95 (обычный шрифт) и 0,99 (жирный шрифт).

m \ k	4	5	6	8	10	16	36	144	∞
5	0, 544	0,507	0,478	0,439	0,412	0, 365	0,307	0, 251	0,200
	0,633	**0,588**	**0,553**	**0,504**	**0,470**	**0,409**	**0,335**	**0,264**	**0,200**
6	0,480	0,445	0,418	0,382	0,357	0,314	0,261	0,212	0,167
	0,564	**0,520**	**0,487**	**0,440**	**0,408**	**0,353**	**0,286**	**0,223**	**0,167**
7	0,431	0,397	0,373	0,338	0,315	0,276	0,228	0,183	0,143
	0,508	**0,466**	**0,435**	**0,391**	**0,362**	**0,311**	**0,249**	**0,193**	**0,143**
8	0,391	0,360	0,336	0,304	0,283	0,246	0,202	0,162	0,125
	0,463	**0,427**	**0,393**	**0,352**	**0,325**	**0,278**	**0,221**	**0,170**	**0,125**
9	0,358	0,329	0,307	0,277	0,257	0,223	0,182	0,145	0,111
	0,425	**0,387**	**0,359**	**0,321**	**0,295**	**0,251**	**0,199**	**0,152**	**0,111**
10	0,331	0,303	0,282	0,254	0,235	0,203	0,166	0,131	0,100
	0,393	**0,357**	**0,331**	**0,295**	**0,270**	**0,230**	**0,181**	**0,138**	**0,100**
15	0,242	0,220	0,203	0,182	0,167	0,143	0,114	0,089	0,067
	0,288	**0,259**	**0,239**	**0,210**	**0,192**	**0,161**	**0,125**	**0,093**	**0,067**
20	0,192	0,174	0,160	0,142	0,130	0,111	0,088	0,068	0,050
	0,229	**0,205**	**0,188**	**0,165**	**0,150**	**0,125**	**0,096**	**0,071**	**0,050**
30	0,138	0,124	0,114	0,100	0,092	0,077	0,060	0,046	0,033
	0,164	**0,145**	**0,133**	**0,116**	**0,105**	**0,087**	**0,066**	**0,048**	**0,033**
40	0,108	0,097	0,089	0,078	0,071	0,060	0,046	0,035	0,025
	0,128	**0,114**	**0,103**	**0,090**	**0,082**	**0,067**	**0,050**	**0,036**	**0,025**
60	0,077	0,068	0,062	0,055	0,050	0,041	0,032	0,023	0,017
	0,090	**0,080**	**0,072**	**0,063**	**0,057**	**0,046**	**0,034**	**0,025**	**0,017**
120	0,042	0,037	0,034	0,029	0,027	0,022	0,017	0,012	0,008
	0,049	**0,043**	**0,039**	**0,033**	**0,030**	**0,024**	**0,018**	**0,013**	**0,008**

Раздел I

Табл.1. $n = 100$; $\sum x = 12816$; $\sum x^2 = 1689492$; $\bar{x} = 128{,}16$; $S = 21{,}787$; $\sigma = 21{,}67797$

1.4. $t_1 = 2{,}64$; $t_2 = 2{,}44$; при $P = 0{,}95$ обе исключить.

1.5. $t = 2{,}718$; $n \le 6$; при $P = 0{,}99$ исключить.

1.6. $\bar{x} = 36{,}06$; $S = 0{,}263$; $\sum x = 360{,}06$; $\sum x^2 = 13003{,}86$; $\Delta x = \pm 0{,}14$; $t_p = 1{,}833$.

1.7. $\Delta x = \pm 0{,}26$.

1.8. $\Delta x = 0{,}18$.

1.9. $t = 2$; $P = 0{,}9544$.

1.10. $t = 3{,}25$; $\Delta x = 0{,}257$.

1.11. $P_1 = 0{,}12$; $P_2 = 0{,}89$; $P_3 = 0{,}98$.

1.12. $G = 0{,}41$; $t = 0{,}325$; $G > t$.

1.13. Расхождение незначимо.

1.14. Расхождение значимо.

1.15. $P_1 = 0{,}876$; $P_2 = 0{,}96$; $P_3 = 0{,}985$; $P_4 = 0{,}994$.

1.16. $n \ge 664$.

1.17. $n \ge 24860$.

1.18. $\Delta J/J = 2{,}2\%$; $\Delta\rho = \pm 4{,}4 \cdot 10^{10}$ Ом·м.

1.19. $\Delta\varepsilon / \varepsilon = 0{,}85\%$; $\Delta\varepsilon = \pm 0{,}038$.

1.20. $\Delta\rho_s = 1{,}77 \cdot 10^{13}$ Ом; $\Delta\rho_s / \rho_s = 0{,}12$.

1.21. $\Delta\rho_s = 0{,}7 \cdot 10^{11}$ Ом; $\Delta\rho_s / \rho_s = 8{,}6\%$.

1.22. $\Delta\varepsilon = 0{,}16$; $\Delta\varepsilon / \varepsilon = 3{,}9\%$.

1.23. $\Delta E = 1{,}93$ кВ/мм; $\Delta E/E = 5{,}8\%$.

1.24. $\Delta\rho_v = 0{,}078 \cdot 10^{10}$ Ом·м; $\Delta\rho_v / \rho_v = 0{,}027$.

1.25. $\Delta\rho_v = 4 \cdot 10^{14}$ Ом·м; $\Delta\rho_v / \rho_v = 4{,}6\%$.

1.26. $\Delta\rho_v = 0{,}43 \cdot 10^{8}$ Ом·м; $\Delta\rho_v / \rho_v = 0{,}084$.

Составитель
Подъячих Сергей Валерьевич

**СТАТИСТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ
ОБРАБОТКИ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ**

Методические указания и контрольные задания
для студентов высших аграрных учебных заведений,
обучающихся по направлению подготовки
13.03.02 Электроэнергетика и электротехника

Лицензия на издательскую деятельность
ЛР №070444 от 11.03.1998 г.

Подписано в печать 18.06.2018 г.
Формат 60×86/16
Печ. л. 0,745
Тираж 50 экз.

Издательство Иркутского государственного
аграрного университета им. А.А. Ежевского
664038, Иркутская область, Иркутский район,
поселок Молодежный