Министерство сельского хозяйства РФ
ФГОУ ВО «Иркутский государственный аграрный университет
имени А.А. Ежевского»

Кафедра Математики

Т.А. Шумай, С.П. Голышева

МАТЕМАТИКА (ОБЩИЙ КУРС)

Учебное пособие

Программа, методические указания и контрольные задания для студентов 1 курса заочной формы обучения направления бакалавриата 13.03.01 «Теплоэнергетика и теплотехника»

Часть 1

Иркутск – 2017

УДК 51(075.8)

Рекомендовано к изданию научно-методическим советом Иркутского государственного аграрного университета им. А.А. Ежевского (протокол № от 26 мая 2017 г.)

Составители: Шумай Т.А., Голышева С.П.

Математика (общий курс). Учебное пособие. (Программа, методические указания и контрольные задания для студентов 1 курса заочной формы обучения направления бакалавриата 13.03.01 «Теплоэнергетика и теплотехника»). Часть 1, 4-е изд., перераб. – Иркутск: Изд-во ИрГАУ, 2017. – 96 с.

Рецензенты: зав. кафедрой, д.т.н., профессор кафедры Математики Иркутского ГАУ им. А.А. Ежевского Овчинникова Н.И.

к.ф.-м.н., научный сотрудник ИСЗФ СО РАН Грозов В.П.

Данное пособие предназначено для студентов- бакалавров 1 курса заочной формы обучения энергетического факультета направления 13.03.01 «Теплоэнергетика и теплотехника». В нем подробно изложены вопросы курса «Математика (общий курс)», предусмотренные программой для студентов заочной формы обучения направления бакалавриата 13.03.01 «Теплоэнергетика и теплотехника»: линейная алгебра; комплексные числа; аналитическая геометрия на плоскости; векторная алгебра; введение в математический анализ; дифференциальное исчисление функций одной переменной и нескольких переменных; интегральное исчисление функций одной переменной; гармонический анализ.

В пособие включены контрольные задания для первого курса.

Содержание

ПРЕДИСЛОВИЕ

Программа курса «Математика (общий курс)» составлена в объеме, необходимом для изучения общенаучных, инженерных и специальных дисциплин с целью развития навыков, требуемых для применения математических методов в практической работе специалиста аграрного комплекса.

Настоящее пособие предназначено для студентов заочной формы обучения направления бакалавриата **13.03.01 «Теплоэнергетика и теплотехника»** Иркутского государственного аграрного университета им. А.А. Ежевского.

Основной формой обучения бакалавра-заочника является самостоятельная работа над учебным материалом, которая состоит из следующих элементов: изучение материала по учебным пособиям, решение задач, ответы на вопросы для самопроверки, выполнение заданий контрольных работ. В помощь заочникам организуется чтение лекций и проведение практических занятий. Кроме этого студент может обращаться к преподавателю с вопросами для получения письменной и устной консультации по интересующимся его вопросам. Указания студенту по текущей работе даются также в процессе рецензирования контрольных работ. Однако он должен помнить, что только при систематической и упорной самостоятельной работе, оказанная ему помощь будет эффективной и, как следствие, будет удачным изучение всего курса математики, который завершается сдачей зачета и экзамена.

Курс «Математика (общий курс)» разбита на темы. В начале каждой темы указываются необходимая литература, вопросы для самопроверки, приводятся решения типовых вариантов из контрольных работ.

Пособие содержит программу курса, контрольные задания для первого курса, общие методические указания и требования для их выполнения.

ОБЩИЕ МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗНИЯ

В соответствии с действующим учебным планом студенты-заочники инженерно-технических специальностей аграрного университета изучают математику на первом курсе и выполняют одну контрольную работу.

К выполнению контрольной работы следует приступать только после изучения соответствующего материала курса по учебнику и решения задач, указанных в данной теме. Следует также внимательно разобрать решения тех задач, которые приводятся в данном пособии. При этом достаточно руководствоваться следующими указаниями:

1. Контрольную работу следует выполнять в отдельной тетради, на внешней обложке которой должны быть указаны фамилия и инициалы студента, полный учебный шифр его зачетной книжки, факультет и специальность, а также номер контрольной работы и дата ее отправки в институт. Решения всех задач и пояснения к ним должны быть достаточно подробными. При необходимости следует сделать соответствующие ссылки на вопросы теории с указанием формул, теорем, выводов, которые используются при решении данной задачи. Чертежи и графики должны быть выполнены аккуратно и четко. Объяснения к задачам должны соответствовать тем обозначениям, которые даны на чертеже. Для замечаний преподавателя необходимо на каждой странице оставлять поля шириной 3-4 см.

2. После получения работы студент должен исправить в ней все отмеченные рецензентом недостатки. В случае незачета студент обязан в кратчайший срок выполнить все требования рецензента и представить работу на повторное рецензирование, приложив при этом первоначальную выполненную работу.

3. Контрольная работа должна выполняться самостоятельно. Если будет установлено, что она выполнена несамостоятельно, то она не будет зачтена, даже если задачи будут решены без ошибок.

4. В период экзаменационной сессии студент обязан представить все прорецензированные и зачтенные контрольные работы. При необходимости (по требованию преподавателя) студент должен давать на экзамене устные пояснения ко всем или некоторым задачам, содержащимся в этих работах.

5. Студент выполняет тот вариант контрольных работ, который совпадает с последней цифрой его учебного шифра. При этом, если предпоследняя цифра его учебного шифра есть число нечетное (1, 3, 5, 7, 9), то номера задач для соответствующего варианта студент берет из таблицы 1, если же – четное (2, 4, 6, 8, 0), то – из таблицы 2.

Таблица 1

№ варианта	Номера контрольных заданий												
1	1	21	41	61	81	101	121	141	161	181			
2	2	22	42	62	82	102	122	142	162	182			
3	3	23	43	63	83	103	123	143	163	183			
4	4	24	44	64	84	104	124	144	164	184			
5	5	25	45	65	85	105	125	145	165	185			
6	6	26	46	66	86	106	126	146	166	186			
7	7	27	47	67	87	107	127	147	167	187			
8	8	28	48	68	88	108	128	148	168	188			
9	9	29	49	69	89	109	129	149	169	189			
0	10	30	50	70	90	110	130	150	170	190			

Таблица 2

№ варианта	Номера контрольных заданий												
1	11	31	51	71	91	111	131	151	171	191			
2	12	32	52	72	92	112	132	152	172	192			
3	13	33	53	73	93	113	133	153	173	193			
4	14	34	54	74	94	114	134	154	174	194			
5	15	35	55	75	95	115	135	155	175	195			
6	16	36	56	76	96	116	136	156	176	196			
7	17	37	57	77	97	117	137	157	177	197			
8	18	38	58	78	98	118	138	158	178	198			
9	19	39	59	79	99	119	139	159	179	199			
0	20	40	60	80	100	120	140	160	180	200			

ПРОГРАММА КУРСА «МАТЕМАТИКА (ОБЩИЙ КУРС)»

I. ОСНОВЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

1. Определители второго и третьего порядков, их свойства и методы вычисления.

2. Матрицы, их виды. Действия над матрицами. Понятие обратной матрицы.

3. Ранг матрицы, его свойства. Теорема о ранге матрицы. Методы вычисления ранга матрицы.

4. Системы 2-х и трех линейных алгебраических уравнений. Однородная и неоднородная системы. Матричная запись системы уравнений. Теорема Кронекера-Капелли.

5. Методы решения линейных систем: Крамера, Гаусса, матричный.

II. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

1. Понятие комплексного числа, его модуля, главного значения аргумента.

2. Геометрическое изображение комплексного числа.

3. Действия над комплексными числами. Формулы Муавра.

III. ОСНОВЫ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ НА ПЛОСКОСТИ

1. Метод координат. Расстояние между двумя заданными точками.

2. Деление отрезка в данном отношении.

3. Уравнение линии на плоскости. Различные формы уравнения прямой на плоскости.

4. Угол между прямыми. Условие параллельности и перпендикулярности прямых. Расстояние от точки до прямой.

IV. ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ

1. Векторы. Линейные операции над векторами.

2. Направляющие косинусы. Длина (модуль) вектора.

3. Линейная зависимость и независимость системы векторов.

4. Скалярное произведение векторов и его свойства. Механический смысл скалярного произведения.

5. Угол между двумя векторами в координатной форме.

6. Условие ортогональности, коллинеарности двух и компланарности трех векторов.

7. Векторное произведение (двух векторов), его свойства. Приложения векторного произведения двух векторов.

8. Смешанное произведение (трех векторов), его свойства. Геометрический смысл смешанного произведения векторов.

V. ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

1. Понятие функции и области ее определения. Способы задания функции. Сложные и обратные функции. График функции.

2. Числовые последовательности. Предел числовой последовательности. Арифметические свойства пределов (теоремы).

3. Предел функции в точке и на промежутке. Бесконечно малые и бесконечно большие функции.

4. Два замечательных предела.

5. Свойства предела функции. Односторонние пределы.

6. Непрерывность функции в точке и на промежутке. Свойства непрерывных функций.

7. Точки разрыва и их классификация. Скачок функции.

8. Свойства функций, непрерывных на отрезке: ограниченность; существование наибольшего и наименьшего значений; промежуточные значения.

VI. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

1. Понятие функции, дифференцируемой в точке. Производная функции, ее геометрический и механический смыслы.

2. Дифференциал функции, его геометрический смысл.

3. Правила нахождения производной и дифференциала.

4. Производные элементарных функций, вывод формул.

5. Производная сложной и обратной функций. Инвариантность формы дифференциала.

6. Логарифмическое дифференцирование. Дифференцирование функций, заданных параметрически.

7. Производные и дифференциалы высших порядков.

8. Условия монотонности функции. Экстремум функции, необходимое и достаточное условия его существования.

9. Отыскание наибольшего и наименьшего значений функции, дифференцируемой на отрезке.

10. Исследование функции на выпуклость и вогнутость. Точки перегиба.

11. Асимптоты графика функции.

12. Общая схема исследования функции и построения графика с помощью производной.

VII. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

1. Понятие первообразной и неопределенного интеграла и его геометрический смысл. Свойства неопределенного интеграла.

2. Табличные интегралы. Методы вычисления интегралов в неопределенном интеграле: непосредственное интегрирование, подстановки, по частям.

3. Задачи, приводящие к понятию определенного интеграла.

4. Определенный интеграл и его свойства. Формула Ньютона-Лейбница.

5. Методы вычисления определенных интегралов: непосредственное, метод подстановки и метод интегрирования по частям.

6. Геометрические и механические приложения определенных интегралов.

VIII. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

1. Функции многих переменных, ее геометрический смысл. Предел и непрерывность функции.

2. Частные производные. Дифференциал, его связь с частными производными. Инвариантность формы дифференциала.

3. Геометрический смысл частных производных и дифференциала.

4. Частные производные и дифференциалы высших порядков.

IX. ГАРМОНИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

1. Понятие ряда Фурье.
2. Теорема Дирихле.
3. Разложение в ряд Фурье функции с периодом 2π.
4. Разложение в ряд Фурье четной функции с периодом 2π на отрезке $[-\pi;\pi]$.
5. Разложение в ряд Фурье нечетной функции с периодом 2π на отрезке $[-\pi;\pi]$.

Раздел I. ОСНОВЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

Литература: [3], [5], [6], [9], [10], [12], [15], [17], [21].

Вопросы для самопроверки

1. Что называется матрицей размерности $m \times n$?

2. Какая матрица называется: а) квадратной; б) диагональной; в) нулевой; г) единичной; д) транспонированной. Привести примеры.

3. При каком условии матрицы можно складывать, вычитать и умножать и каким образом производятся указанные действия? Привести примеры и контрпримеры (т.е. примеры, где нарушаются условия выполнимости указанных действий).

4. Что называется определителем 2-го порядка? 3-го порядка?

5. Назовите методы вычисления определителя 3-го порядка. Раскрыть суть методов.

6. Что называется минором элемента определителя?

7. Что называется алгебраическим дополнением элемента определителя?

8. Сформулируйте свойства определителей.

9. У матриц, какой размерности можно вычислять определитель?

10. Что называется решением системы?

11. Какая система линейных уравнений называется: а) однородной; б) неоднородной; в) совместной; г) несовместной; д) определенной; е) неопределенной.

12. Записать формулы Крамера для решения систем линейных уравнений.

13. В каком случае неоднородная система имеет единственное решение? множество решений? не имеет решения?

14. В каком случае однородная система имеет единственное нулевое решение? ненулевое решение?

1.1. Матрицы и операции над ними

Определение 1. *Матрицей* A размерности $m\times n$ называется прямоугольная таблица математических выражений a_{ij} *(называемых элементами матрицы),* $i=1,2,...,m=\overline{1,m}$, $j=1,2,...,n=\overline{1,n}$, состоящая из m строк и n столбцов. Обозначается:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \dots & a_{2n} \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ или } A_{m\times n}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \dots & a_{2n} \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Например, $A_{2\times 3}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ – матрица, состоящая из 2-х строк и 3-х столбцов; $B=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ – матрица размерности 2×1; $C=(2)$ – матрица размерности 1×1.

Определение 2. *Квадратной матрицей* n-го порядка называется матрица размера $n\times n$.

Определение 3. *Диагональной* называется квадратная матрица, у которой все элементы вне главной диагонали (т.е. с индексами $i\neq j$) равны нулю.

Определение 4. *Единичной* (обозначается E) называется диагональная матрица с единицами на главной диагонали.

Определение 5. *Нулевой* называется матрица, все элементы которой равны нулю.

Например, $E=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ – единичная диагональная матрица 3×3; $\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ – нулевая матрица размерности 2×3.

Суммой (*или* ***разностью) матриц*** *A* и *B* ($A\pm B$) одинаковой размерности $m\times n$, называется матрица $C=(c_{ij})$, той же размерности, что и матрицы *A* и *B*, причем $c_{ij}=a_{ij}\pm b_{ij}$, $A=(a_{ij})$, $B=(b_{ij})$, $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$.

Произведением матрицы A на число λ ($A\cdot\lambda$) называется матрица $B=(b_{ij})$ той же размерности, что и матрица $A_{m\times n}=(a_{ij})$, причем $b_{ij}=\lambda a_{ij}$, $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$.

Пример 1. Найти $-2A+3B$, если $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}5 & -2 & 1\\ 2 & 4 & 3\end{pmatrix}$.

Решение.

$$-2A=-2\cdot\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & -4 & -6\\ 0 & -2 & 2\end{pmatrix};\ 3B=3\cdot\begin{pmatrix}5 & -2 & 1\\ 2 & 4 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}15 & -6 & 3\\ 6 & 12 & 9\end{pmatrix};$$

$$-2A+3B=\begin{pmatrix}-2+15 & -4+(-6) & -6+3\\ 0+6 & -2+12 & 2+9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}13 & -10 & -3\\ 6 & 10 & 11\end{pmatrix}.$$

Произведением матриц A и B ($A\cdot B$), где $A_{m\times n}=(a_{ij})$, $B_{n\times r}=(b_{jk})$ называется матрица $C_{m\times r}=(c_{ik})$ такая, что

$$c_{ik}=a_{i1}\cdot b_{1k}+a_{i2}\cdot b_{2k}+\ldots+a_{in}\cdot b_{nk}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\cdot b_{jk},\ i=\overline{1,m},\ k=\overline{1,r}.$$

Замечание 1. а) сложение матриц коммутативно, т.е. $A+B=B+A$;

б) умножать матрицы можно только в том случае, если $A_{m\times n}$, а $B_{n\times r}$, т.е. когда число столбцов матрицы A равно числу строк B;
в) умножение матриц некоммутативно, т.е. $A\cdot B\neq B\cdot A$.

Пример 2. Найти $B\cdot C$, если $B=\begin{pmatrix}1 & -5\\ 2 & 3\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 0 & -4\end{pmatrix}$.

Решение.

$$B\cdot C=\begin{pmatrix}1 & -5\\ 2 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & 1\\ 0 & -4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot 3+(-5)\cdot 0 & 1\cdot 1+(-5)\cdot(-4)\\ 2\cdot 3+3\cdot 0 & 2\cdot 1+3\cdot(-4)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 21\\ 6 & -10\end{pmatrix}.$$

Действительно,

$$C\cdot B=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 0 & -4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & -5\\ 2 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\cdot 1+1\cdot 2 & 3\cdot(-5)+1\cdot 3\\ 0\cdot 1+(-4)\cdot 2 & 0\cdot(-5)+(-4)\cdot 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & -12\\ -8 & -12\end{pmatrix}\neq B\cdot C$$

Определение 6. Матрица, полученная из матрицы $A=(a_{ij})$ заменой ее строк столбцами, столбцов – строками, называется *транспонированной* к A и обозначается: A^T.

Например, матрица $A^T=\begin{pmatrix}3 & 5\\ 1 & 2\end{pmatrix}$ - транспонированная к матрице $A=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 5 & 2\end{pmatrix}$.

1.2. Определители 2-го и 3-го порядков, методы их вычисления

Пусть дана квадратная таблица чисел $\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}$, состоящая из 2-х строк и 2-х столбцов.

Определение 7. *Определителем 2-го порядка* называется величина, вычисляемая по формуле:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}. \qquad (1)$$

Числа a_{ij}, где $i, j = \overline{1, 2}$ называются *элементами* определителя 2-го порядка. Первый индекс i указывает номер строки, j – номер столбца, на пересечении которых стоит элемент a_{ij}. Элементы a_{11} и a_{22} образуют *главную диагональ,* a_{12} и a_{21} – *побочную*. Какая-либо строка или столбец определителя называется его *рядом*.

Пример 3.

а) $\Delta_2 = \begin{vmatrix} -8 & 3 \\ -6 & 2 \end{vmatrix} = (-8) \cdot 2 - 3 \cdot (-6) = -16 + 18 = 2$.

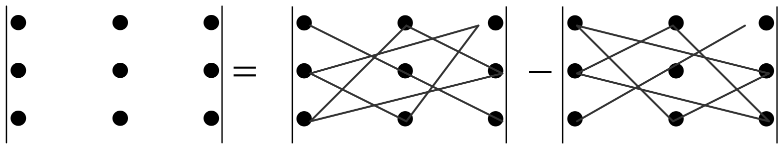
Вычисление определителя 3-го порядка. Пусть дана квадратная таблица чисел $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, состоящая из 3-х строк и 3-х столбцов.

Определение 8. *Определителем 3-го порядка* называется величина, вычисляемая по формуле:

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} - \qquad (2)$$

$$- a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32}.$$

Получение формулы (2) геометрически можно представить так:



Метод, примененный при вычислении определителя 3-го порядка (формула 2), называют *методом Саррюса* (или «звездочки», или треугольников).

Пример 4. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 5 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}$ методом «звездочки».

Решение.

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 5 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (-1)\cdot(-2)\cdot(-1)+5\cdot1\cdot0+3\cdot4\cdot2-0\cdot(-2)\cdot2-$$

$$-5\cdot3\cdot(-1)-(-1)\cdot1\cdot4=41.$$

1.4. Системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

усть дана система линейных алгебраических уравнений, состоящая из 3-х уравнений с 3-мя неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = в_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = в_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = в_3. \end{cases} \qquad (3)$$

где x_j называются неизвестными системы (3), числа a_{ij}, $i, j = \overline{1,3}$ – коэффициентами при неизвестных,

$\begin{pmatrix} в_1 \\ в_2 \\ в_3 \end{pmatrix}$ – столбец свободных членов, причем a_{ij}, $в_i - const$, $i, j = \overline{1,3}$.

Обозначим через: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ – матрицу системы (3),

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ – матрицу неизвестных и $B = \begin{pmatrix} в_1 \\ в_2 \\ в_3 \end{pmatrix}$ – матрицу-столбец свободных членов.

Определение 9. *Решением системы* (3) называется такая упорядоченная тройка чисел $(x_1; x_2; x_3)$, которая обращает уравнения системы в тождества.

Определение 10. Система (3) называется *однородной*, если в нем все элементы столбца свободных членов равны нулю; в противном случае, система называется *неоднородной*.

Пусть система (3) неоднородная, т.е. $в_i \neq 0$, $i = \overline{1,3}$. Рассмотрим три метода решения СЛАУ.

Метод Крамера. Определителем системы назовем определитель матрицы *A*, который будем обозначать через Δ:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Теорема 1 (теорема Крамера). Если $\Delta \neq 0$, то система (3) имеет *единственное решение*, которое может быть определено по формулам:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}, \qquad (4)$$

где Δ_i $(i = \overline{1,3})$ получается из Δ путем замены i-го столбца столбцом свободных членов

$\begin{pmatrix} в_1 \\ в_2 \\ в_3 \end{pmatrix}$. В данном случае система будет *совместной* и *определенной*.

Формулы (4) называются *формулами Крамера*.

Пример 5. Решить неоднородную систему методом Крамера.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 4 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 5 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 = -2. \end{cases}$$

Решение. Вычисляем определители Δ, Δ_1, Δ_2 и Δ_3:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -20 \neq 0 \;\Rightarrow \text{система имеет единственное решение;}$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \\ -2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0; \; \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 20; \; \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & -2 \end{vmatrix} = -40.$$

Тогда по формуле (4):

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{0}{-20} = 0, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{20}{-20} = -1, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-40}{-20} = 2.$$

Далее, обязательно следует сделать проверку, подставляя найденные значения $x_1 = 0, x_2 = -1$ и $x_3 = 2$ в уравнения системы:

$$\begin{cases} 0 - 2(-1) + 2 = 4 \\ 0 - 1 + 3 \cdot 2 = 5 \\ 0 - 4 + 2 = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4 \equiv 4 \\ 5 \equiv 5 \\ -2 \equiv -2 \end{cases}.$$

Тройка чисел $(0; -1; 2)$ обращает уравнения системы в тождества, следовательно, она является решением данной системы.

Раздел II. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

Литература: [3], [5], [6], [9], [10], [12], [15], [17], [21].

Вопросы для самопроверки

1. Что называется комплексным числом? его действительной и мнимой частью?

2. Какое число называется чисто мнимым? сопряженным с данным комплексным числом? противоположным?

3. Как геометрически изображаются комплексные числа?

4. Что называется модулем, главным значением аргумента и аргументом комплексного числа? Записать формулы.

5. Записать различные формы записи комплексного числа.

6. Рассказать суть действий над комплексными числами: сложения, вычитания, умножения, деления

7. Записать формулы Муавра возведения в степень и извлечения корня из комплексного числа.

2.1. Основные понятия и определения

Определение 11. *Комплексным числом* z называется выражение вида $z = x + iy$, где x и y – действительные числа, i – *мнимая единица,* $i^2 = -1$.

Если $x = 0$, то число $0 + iy = iy$ называется *чисто мнимым комплексным числом*; если $y = 0$, то число $x + i0 = x$ – действительным числом.

Таким образом, множество всех действительных чисел R является подмножеством множества C всех комплексных чисел, т.е. $R \subset C$.

Число x называется *действительной частью* комплексного числа z и обозначается $x = \operatorname{Re} z$, а y – *мнимой частью* z: $y = \operatorname{Im} z$.

Два комплексных числа $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ называются *равными* $(z_1 = z_2)$ тогда и только тогда, когда равны их действительные и мнимые части соответственно, т.е. $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$. В частности, комплексное число $z = x + iy$ равно нулю тогда и только тогда, когда $x = y = 0$.

Замечание 2. Понятия «больше» и «меньше» для комплексных чисел не вводится.

Комплексное число $\bar{z} = x - iy$ называется *сопряженным* с числом $z = x + iy$.

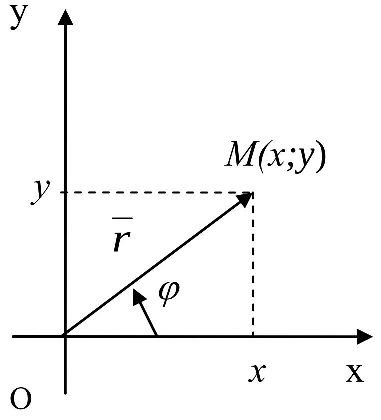
Числа z и $\bar{z}$ отличаются лишь знаком мнимых частей.

Комплексное число $-z = -x - iy$ называется *противоположным* числу $z = x + iy$.

Пример 6. Для данных комплексных чисел найти $\operatorname{Re} z$ и $\operatorname{Im} z$, $\bar{z}$ и $-z$: а) $z = 5 - \sqrt{7}i$; б) $z = i$; в) $z = 3$.

Решение. а) Re $z = 5$, $\operatorname{Im} z = -\sqrt{7}$, $\bar{z} = 5 + \sqrt{7}i$, $-z = -5 + \sqrt{7}i$; б) $\operatorname{Re} z = 0$, $\operatorname{Im} z = 1$, $\bar{z} = -i$, $-z = -i$; в) Re $z = 3$, $\operatorname{Im} z = 0$, $\bar{z} = 3$, $-z = -3$.

2.2. Геометрическое изображение комплексных чисел



Всякое комплексное число $z = x + iy$ можно изобразить точкой $M(x; y)$ плоскости xOy такой, что $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$ (рис. 1). И, наоборот, каждую точку $M(x; y)$ координатной плоскости xOy можно рассматривать как образ комплексного числа $z = x + iy$.

Рис. 1

Плоскость, на которой изображаются комплексные числа, называется *комплексной* плоскостью (ее также обозначают *C*). Ось абсцисс (Ox) называется *действительной осью*, а ось ординат (Oy) – *мнимой осью.*

Комплексное число $z = x + iy$ можно изображать и с помощью радиус-вектора $\bar{r} = \overline{OM} = (x; y)$.

Определение 12. Длина вектора $\bar{r}$, изображающего комплексное число z, называется *модулем* этого числа и обозначается $|z|$ или r. Модуль $r = |z|$ однозначно определяется по формуле

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}\,. \tag{5}$$

Определение 13. *Главным значением аргумента* комплексного числа $z = x + iy$ называется величина угла, на которую нужно повернуть ось Ox, чтобы совпасть с направлением вектора $\overline{OM}$, двигаясь по кратчайшему пути, и обозначается: $\varphi = arg z$, причем $-\pi < arg z \le \pi$.

В зависимости от того, в какой четверти лежит точка $M(x; y)$, φ определяется следующим образом:

$$\varphi = argz = \begin{cases} arctg\dfrac{y}{x},\ \text{если}\ M(x;y) \in I\ \text{или}\ IV\ \text{четверти}; \\ arctg\dfrac{y}{x} + \pi, \text{если}\ M(x;y) \in II\ \text{четверти}; \\ arctg\dfrac{y}{x} - \pi, \text{если}\ M(x;y) \in III\ \text{четверти}. \end{cases} \quad (6)$$

Аргумент комплексного числа $z = x + iy$ есть величина многозначная, определяющаяся по формуле: $Argz = argz + 2k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, где $argz$ – главное значение аргумента z.

Замечание 3. В качестве значения аргумента можно брать величину, принадлежащую промежутку $[0;2\pi)$.

Пример 7. Построить комплексные числа $z_1 = 2 + 2i$, $z_2 = -3 - 2i$ и найти $|z|$ и $argz$.

Решение. На рис. 2 радиус-векторы $\overline{OM_1}$ и $\overline{OM_2}$ изображают данные комплексные числа z_1 и z_2 соответственно.

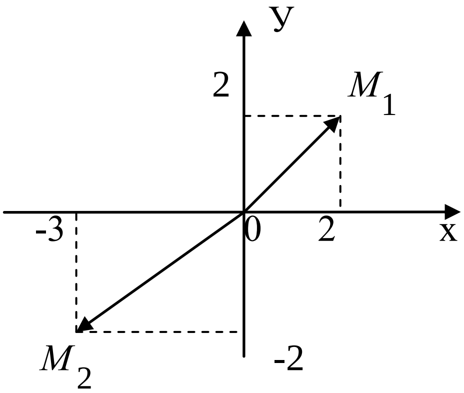


Рис. 2

По формуле (5) найдем их модули.

$$|z_1| = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2},$$

$$|z_2| = \sqrt{(-3)^2 + (-2)^2} = \sqrt{13}.$$

Т.к. z_1 находится в I четверти: $x_1 = 2 > 0$, $y_1 = 2 > 0$, то аргумент φ_1 будет равен:

$$\varphi_1 = argz_1 = arctg\frac{2}{2} = arctg1 = \frac{\pi}{4}.$$

Число z_2 находится в III четверти: $x_2 = -3 < 0, y_2 = -2 < 0$, тогда $\varphi_2 = argz_2 = arctg\dfrac{-2}{-3} - \pi = arctg\dfrac{2}{3} - \pi$.

2.3. Формы записи комплексных чисел

Запись числа z в виде $z = x + iy$ называют *алгебраической формой* комплексного числа.

Выражение $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ называется *тригонометрической формой* записи комплексного числа $z = x + iy$, где r – модуль комплексного числа, φ - главное значение аргумента данного числа.

Запись числа z в виде $z = re^{i\varphi}$ называют *показательной формой* (или *экспоненциальной*) комплексного числа.

Пример 8. Записать комплексное число $z = -1 + i\sqrt{3}$ в тригонометрической и показательной формах.

Решение. Чтобы записать комплексное число в тригонометрической и показательной форме необходимо найти его модуль и аргумент.

Итак, по формуле (5): $|z| = \sqrt{(-1)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{4} = 2,$

Так как z находится в II четверти: $x = -1 < 0$, $y = \sqrt{3} > 0$, то аргумент φ будет равен: $\varphi = \arg z = arctg\,\dfrac{\sqrt{3}}{-1} + \pi = -\dfrac{\pi}{3} + \pi = \dfrac{2\pi}{3}$.

Тригонометрическая форма: $z = 2\left(\cos\dfrac{2\pi}{3} + i\sin\dfrac{2\pi}{3}\right)$.

Показательная форма: $z = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

2.4. Действия над комплексными числами

Действия над комплексными числами (сложение, вычитание, умножение, деление) $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$, заданные в алгебраической форме, определяются следующими равенствами:

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2).$$

Таким образом, чтобы сложить комплексные числа, нужно сложить отдельно их действительные и мнимые части.

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + y_1 x_2).$$

Замечание 4. Сложение и умножение комплексных чисел производится аналогично преобразованиям алгебраических выражений, стоящих в скобках.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{\overline{z_2}}{\overline{z_2}} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \cdot \frac{y_1 x_2 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}, \text{ где } z_2 \neq 0.$$

Таким образом, чтобы разделить комплексные числа, нужно числитель и знаменатель умножить на комплексное число, сопряженное знаменателю.

Пример 9. Найти $z_1 + z_2,\ z_1 - z_2,\ z_1 \cdot z_2,\ \dfrac{z_1}{z_2}$, если $z_1 = 1 + 2i,\ z_2 = 2 - i.$

Решение.

$z_1 + z_2 = (1 + 2i) + (2 - i) = (1 + 2) + i(2 - 1) = 3 + i$;

$z_1 - z_2 = (1 + 2i) - (2 - i) = (1 - 2) + i(2 - (-1)) = -1 + 3i$;

$z_1 \cdot z_2 = (1 + 2i) \cdot (2 - i) = (1 \cdot 2 - 2 \cdot (-1)) + i(1 \cdot (-1) + 2 \cdot 2) = 4 + 3i$;

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(1 + 2i)(2 + i)}{(2 - i)(2 + i)} = \frac{1 \cdot 2 + 2 \cdot (-1)}{2^2 + (-1)^2} + i \cdot \frac{2 \cdot 2 - 1 \cdot (-1)}{2^2 + (-1)^2} = \frac{5i}{5} = i.$$

Комплексные числа можно возводить в натуральную степень n и извлекать из корня n-ой степени по ***формулам Муавра***:

$$z^n = r^n \cdot (cosn\varphi + isinn\varphi). \tag{7}$$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \cdot \left(cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + isin\frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right), \tag{8}$$

где r – модуль комплексного числа z, определяющийся по формуле (5), φ – его главное значение аргумента, определяющееся по (6) и $k = \overline{0, n-1}$.

Пример 10. Найти: а) $\left(-1-i\sqrt{3}\right)^{15}$; б) $\sqrt[3]{-i}$.

Решение. а) Найдем модуль и аргумент комплексного числа $z=-1-i\sqrt{3}$ по формуле (43) и (44) соответственно.

$$|z|=\sqrt{(-1)^2+\left(-\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{4}=2,\ \varphi=\arg z=arctg\,\frac{-\sqrt{3}}{-1}-\pi=\frac{\pi}{3}-\pi=-\frac{2\pi}{3}.$$

Тогда по формуле Муавра (7) получим:

$$\left(-1-i\sqrt{3}\right)^{15}=2^{15}\cdot\left(cos(-10\pi)+isin(-10\pi)\right)=2^{15}(1+0i)=2^{15}=32768.$$

б) Модуль и аргумент числа $z=-i$, вычисленные соответственно по (5) и (6), будут равны:

$$|z|=\sqrt{0^2+(-1)^2}=1,\quad \varphi=\arg z=-\frac{\pi}{2},$$

По формуле (8) получим:

$$\sqrt[3]{z}=cos\frac{-\frac{\pi}{2}+2\pi k}{3}+isin\frac{-\frac{\pi}{2}+2\pi k}{3},\ k=0,1,2.$$

Придавая k значения 0, 1, 2, получим три корня.

При $k=0$, $z_0=cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+isin\left(-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}$;

При $k=1$, $z_1=cos\frac{\pi}{2}+isin\frac{\pi}{2}=i$;

При $k=2$, $z_2=cos\frac{7\pi}{6}+isin\frac{7\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}$.

Раздел III. ОСНОВЫ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ НА ПЛОСКОСТИ

Литература: [3], [5], [6], [9], [10], [12], [15], [17], [21].

Вопросы для самопроверки

1. Чем определяются декартовы координаты точки на плоскости?

2. Чем отличаются координаты двух точек, симметричных относительно: а) оси Ох; б) оси Оу; в) начала координат?

3. Как вычислить расстояние между двумя точками?

4. Выведите формулы для координат точки деления отрезка в данном отношении, пополам.

5. Дайте определение уравнения линии на плоскости.

6. Как найти координаты точки пересечения двух линий на плоскости, заданных уравнениями?

7. Как определяется угол между двумя прямыми? Вывести формулу.

8. Каково условие: а) параллельности; б) перпендикулярности двух прямых?

10. Выведите уравнение прямой: а) с угловым коэффициентом; б) проходящей через заданную точку в заданном направлении; в) проходящей через две данные точки; г) «в отрезках».

3.1. Расстояние между точками. Деление отрезка в данном отношении

Пусть на плоскости хОу даны две точки $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$. Тогда расстояние *d* между ними определяется по формуле:

$$d=\sqrt{\left(x_2-x_1\right)^2+\left(y_2-y_1\right)^2}\,. \qquad (9)$$

В частности, расстояние от точки $M(x;y)$ до начала координат находится по формуле:

$$d=\sqrt{x^2+y^2}\,. \qquad (10)$$

Пусть в ПДСК даны точки $A(x_1;y_1)$, $B(x_2;y_2)$ и $C(x;y)$, делящая отрезок *AB* в отношении λ, т.е. $\frac{|AC|}{|CB|}=\lambda$. Тогда координаты точки *C* будут определяться по формуле:

$$x_C=\frac{x_A+\lambda x_B}{1+\lambda};\;\; y_C=\frac{y_A+\lambda y_B}{1+\lambda}\,. \qquad (11)$$

В частности, если *C* лежит посередине отрезка *AB*, то ее координаты будут равны:

$$x_C=\frac{x_A+x_B}{2};\;\;\; y_C=\frac{y_A+y_B}{2}\,. \qquad (12)$$

3.2. Прямая на плоскости, виды ее заданий

Общее уравнение прямой имеет вид:

$$Ax+By+C=0\,. \qquad (13)$$

Уравнение прямой с угловым коэффициентом *k*:

$$y=kx+b\,. \qquad (14)$$

Угловой коэффициент k равен тангенсу угла наклона прямой с положительным направлением оси Ох (т.е. движение совершается против часовой стрелки). Итак, $k = tg\alpha$. Параметр b называют начальной ординатой, который равен отрезку, отсекаемому данной прямой на оси Оу (рис. 3).

Уравнение прямой, проходящей через две точки $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$, определяется формулой:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}. \qquad (15)$$

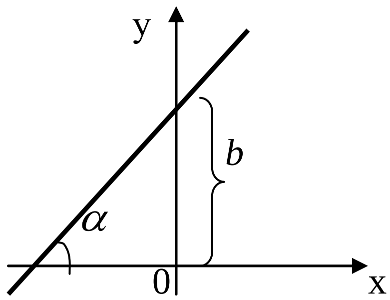


Рис. 3

Уравнение прямой, проходящей через данную точку $M_0(x_0; y_0)$ в заданном направлении (или уравнение пучка прямых, проходящих через данную точку), имеет вид:

$$y - y_0 = k(x - x_0). \qquad (16)$$

Пусть даны на плоскости две прямые l_1 и l_2, которым соответствуют уравнения на плоскости $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$.

Условием параллельности двух прямых является равенство их угловых коэффициентов, т.е. $k_1 = k_2$;

Условием перпендикулярности двух прямых является то, что их угловые коэффициенты обратно-пропорциональны по абсолютной величине и противоположны по знаку, т.е.

$$k_2 = -\frac{1}{k_1}.$$

Угол φ, образованный между двумя прямыми l_1 и l_2 определяется формулой:

$$tg\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2}. \qquad (17)$$

Решение типового варианта

Пример 11. Даны вершины треугольника *ABC*: $A(-2;3)$, $B(1;12)$, $C(11;6)$. Составить уравнения сторон *AB, BC, AC*.

Решение. Сделаем чертеж (рис. 4).

Подставляя в формулу (11) координаты точек *A* и *B*, найдем уравнение прямой *AB*:

$$\frac{x-(-2)}{1-(-2)} = \frac{y-3}{12-3} \;\Rightarrow\; \frac{x+2}{3} = \frac{y-3}{9} \;\Rightarrow\; 3(y-3) = 9(x+2),$$

$$y-3 = 3(x+2) \;\Rightarrow\; y_{AB} = 3x+9, \quad k_{AB} = 3.$$

Аналогичным образом находим уравнение стороны *BC*.

$$\frac{x-1}{11-1} = \frac{y-12}{6-12} \;\Rightarrow\; \frac{x-1}{10} = \frac{y-12}{-6} \;\Rightarrow\; 10(y-12) = -6(x-1);$$

$$y-12 = -\frac{6}{10}(x-1) \;\Rightarrow\; y = -\frac{3}{5}x + \frac{3}{5} + 12 \;\Rightarrow\; y_{BC} = -\frac{3}{5}x + \frac{63}{5},$$

$$k_{BC} = -\frac{3}{5}.$$

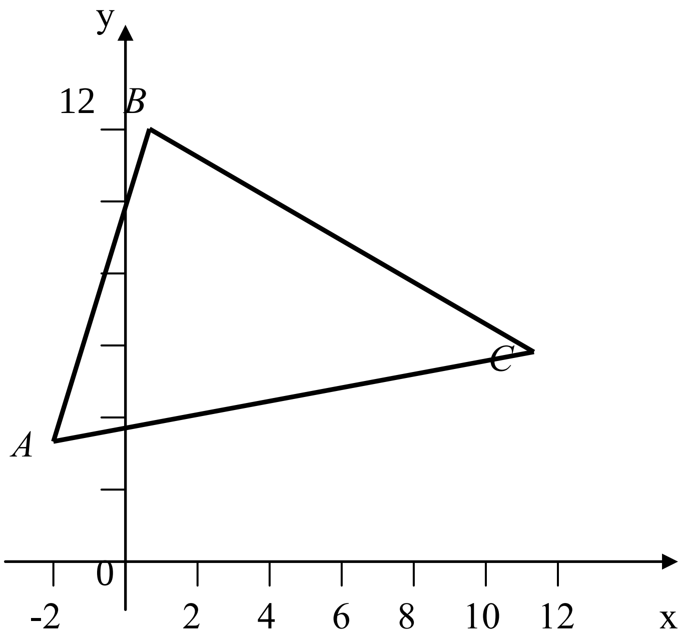


Рис. 4

Аналогичным образом находим уравнение стороны AC.

$$\frac{x+2}{11+2} = \frac{y-3}{6-3} \quad \Rightarrow \quad \frac{x+2}{13} = \frac{y-3}{3} \quad \Rightarrow \quad 13(y-3) = 3x+6$$

$$y-3 = \frac{3x}{13} + \frac{6}{13} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{3x}{13} + 3\frac{6}{13}.$$

Раздел IV. ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ

Литература: [3], [5], [6], [9], [10], [12], [15], [17], [21].

Вопросы для самопроверки

1. Что называется вектором? Как определяется его модуль?

2. Какие векторы называются: а) равными; б) коллинеарными; в) компланарными?

3. Как определяются линейные операции над векторами? Каковы их свойства? Сформулировать правила суммы двух и более векторов.

4. Как определяется декартова прямоугольная система координат в пространстве?

5. Написать формулу, определяющую расстояние между двумя точками в пространстве.

6. Что называется направляющими косинусами вектора?

7. Как выражаются координаты вектора через координаты точек, являющихся началом и концом этого вектора?

8. Как производится сложение векторов и умножение вектора на скаляр, если векторы заданы своими координатами?

9. Что называется скалярным произведением двух векторов? Каковы его свойства и выражение через координаты векторов-сомножителей?

10. По какой формуле можно вычислить угол между двумя векторами?

11. Что называется векторным произведением двух векторов? Каковы его свойства и выражение через координаты векторов-сомножителей?

12. Что называется смешанным произведением трех векторов? Каковы его свойства и выражение через координаты векторов-сомножителей?

13. Каковы условия коллинеарности, перпендикулярности двух и компланарности трех векторов? Как они выражаются через координаты векторов?

14. Какие Вы знаете виды уравнений плоскостей?

15. Что называется нормальным вектором плоскости?

16. Как записывается уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки?

17. Как вычисляются углы между: а) двумя прямыми в пространстве; б) двумя плоскостями; в) прямой и плоскостью?

В 3-хмерном пространстве $xyzO$, в котором координатные оси взаимно перпендикулярны, т.е. $Ox \perp Oy$, $Ox \perp Oz$, $Oy \perp Oz$, произвольная точка M определяется упорядоченной тройкой чисел x, y, z, называемых координатами, т.е. $M(x, y, z)$.

Вектор, исходящий из начала координат $O(0{,}0{,}0)$ пространства $xyzO$, называется ***радиус-вектором***; на рис. 5 – это вектор $\overline{OM}$.

Векторы $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ образуют базис пространства $xOyz$ и называются ***ортами***, т.е. $\bar{i} \perp \bar{j}$, $\bar{i} \perp \bar{k}$, $\bar{j} \perp \bar{k}$ и $|\bar{i}| = |\bar{j}| = |\bar{k}| = 1$.

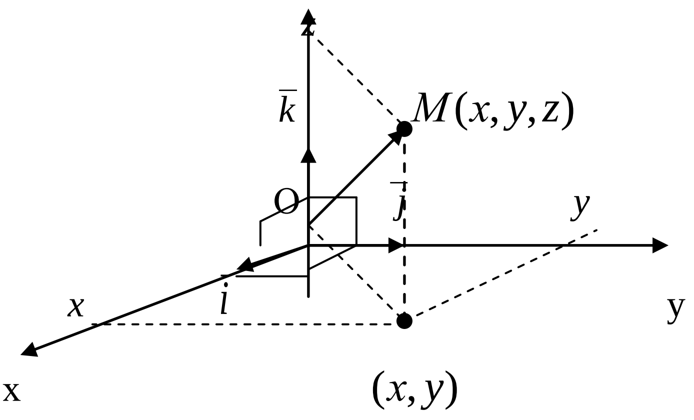


Рис. 5

Произвольный вектор $\overline{OM}$ в системе орт определяется равенством

$$\overline{OM} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}. \tag{18}$$

Пусть в этом пространстве даны две точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$. Чтобы найти координаты вектора $\overline{M_1M_2}$, нужно из координат конца вектора вычесть координаты начала, т.е.

$$\overline{M_1M_2} = (x_2 - x_1,\ y_2 - y_1,\ z_2 - z_1). \tag{19}$$

Длина (или модуль) радиус-вектора $\overline{OM}$ определяется по формуле:

$$\left|\overline{OM}\right| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\ , \tag{20}$$

а длина (или модуль) вектора $\overline{M_1M_2}$, по формуле:

$$\left|\overline{M_1M_2}\right| = \sqrt{\left(x_2 - x_1\right)^2 + \left(y_2 - y_1\right)^2 + \left(z_2 - z_1\right)^2}\ . \tag{21}$$

Дадим два определения скалярного произведения векторов $\bar{a}$ и $\bar{в}$.

Определение 14. Скалярным произведением векторов $\bar{a}$ и $\bar{в}$ называется число, равное сумме произведений соответствующих координат этих векторов и обозначается $\bar{a} \cdot \bar{в}$ или $(\bar{a}, \bar{в})$, т.е.

$$\overline{a}\cdot\overline{в}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2. \tag{22}$$

Формулой (22) пользуются тогда, когда известны координаты векторов $\overline{a}$ и $\overline{в}$: $\overline{a}=(x_1,y_1,z_1)$, $\overline{в}=(x_2,y_2,z_2)$.

Однако скалярное произведение векторов можно находить и по другой формуле, согласно следующему определению.

Определение 15. Скалярным произведением векторов $\overline{a}$ и $\overline{в}$ называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними, т.е.

$$\overline{a}\cdot\overline{в}=|\overline{a}|\cdot|\overline{в}|\cdot cos\varphi. \tag{23}$$

Данной формулой пользуются для нахождении скалярного произведения, при известных длин векторов-сомножителей и угла между ними $\varphi=(\overline{a},\hat{\ }\,\overline{в})$.

Для определения угла (или косинуса угла) между данными векторами применяют следующую формулу, полученную из формулы (19):

$$cos\varphi=\frac{\overline{a}\cdot\overline{в}}{|\overline{a}|\cdot|\overline{в}|}. \tag{24}$$

Физический смысл скалярного произведения. Если вектор $\overline{a}=\overline{OA}$ (рис. 6) изображает прямолинейное смещение материальной точки, а вектор $\overline{F}=\overline{OF}$ – силу, действующую на эту точку, то работа A силы $\overline{F}$ равна скалярному произведению вектора силы на вектор перемещения

$$A=\overline{a}\cdot\overline{F}. \tag{25}$$

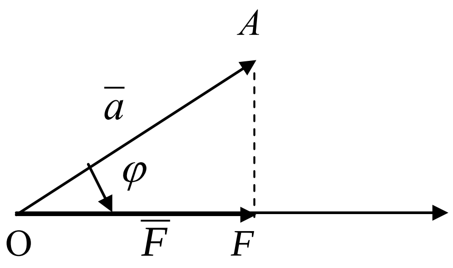


Рис. 6

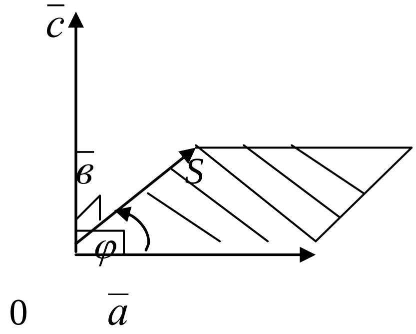


Рис. 7

Определение 16. Векторным произведением $\bar{a}\times\bar{в}$ вектора $\bar{a}$ на $\bar{в}$ называется такой вектор $\bar{c}$, удовлетворяющий следующим условиям:

1) $\bar{c}\perp\bar{a}$, $\bar{c}\perp\bar{в}$ (рис. 7);

2) модуль вектора $\bar{c}$ численно равен площади параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a}$ и $\bar{в}$ (рис. 5), т.е.

$$|\bar{c}|=|\bar{a}\times\bar{в}|=S_{пар-ма}=|\bar{a}|\cdot|\bar{в}|\cdot sin\varphi; \tag{26}$$

3) векторы $\bar{a}$, $\bar{в}$, $\bar{c}$ образуют правую тройку, т.е. движение от $\bar{a}$ к $\bar{в}$ происходит в положительном направлении – в направлении движения против часовой стрелки.

Векторное произведение $\bar{a}\times\bar{в}$ определяется по формуле

$$\bar{a}\times\bar{в}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}. \tag{27}$$

Физический смысл векторного произведения. Пусть в точке A приложена сила $\overline{F}=\overline{AB}$ и O – некоторая точка пространства (рис. 8).

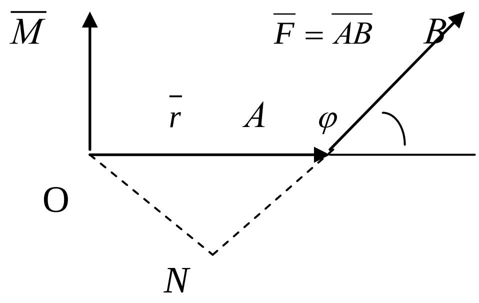


Рис. 8

Определение 17. Моментом силы $\overline{F}$ относительно точки *O* называется вектор $\overline{M}$, который проходит через точку *O* и:

1) перпендикулярен к плоскости, проходящей через точки *O, A, B*;

2) численно равен произведению силы на плечо, т.е.

$$\left|\overline{M}\right|=\left|\overline{F}\right|\cdot ON=\left|\overline{F}\right|\cdot\left|\overline{r}\right|sin\varphi=\left|\overline{F}\right|\cdot\left|\overline{OA}\right|\sin\left(\overline{F},\,\hat{}\,\overline{OA}\right).$$

3) Образует правую тройку с векторами $\overline{OA}$ и $\overline{AB}$.

Следовательно,

$$\overline{M}=\overline{OA}\times\overline{F}. \tag{28}$$

Пример 12. Сила $\overline{F}=(2,3,-5)$ приложена к точке $A(1,-2,2)$. Вычислить: а) работу силы $\overline{F}$ в случае, когда точка ее приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается из положения A в положение $B(1,4,0)$; б) модуль момента силы $\overline{F}$ относительно точки B.

Решение. а) Так как $A=\overline{F}\cdot\overline{S}$ и $\overline{S}=\overline{AB}=(0,6,-2)$, то

$$A=\overline{F}\cdot\overline{AB}=2\cdot 0+3\cdot 6+(-5)\cdot(-2)=28.$$

б) Момент силы $\overline{M}=\overline{BA}\times\overline{F}$, $\overline{BA}=(0,-6,2)$, тогда

$$\overline{M}=\overline{BA}\times\overline{F}=\begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ 0 & -6 & 2\\ 2 & 3 & -5\end{vmatrix}=24\overline{i}+4\overline{j}+12\overline{k}.$$

Следовательно, $|M|=\sqrt{24^2+4^2+12^2}=4\sqrt{46}$.

Раздел V. ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Литература: [3], [5], [6], [9], [10], [12], [15], [17], [21], [23].

Вопросы для самопроверки

1. Что называется множеством? Какие операции можно выполнять над множествами?

2. Что называется: а) постоянной величиной; б) переменной величиной?

3. Что называется функцией от одной независимой переменной?

4. Перечислите способы задания функции. Расскажите суть каждого способа

5. Что называется: а) областью определения; б) областью значений функции?

6. Что называется графиком функции?

7. Что называется частным значением функции?

8. Какие функции относятся к: а) основным элементарным; б) элементарным?

9. Какая функция называются: четной; нечетной; периодической; сложной; обратной к данной?

10. Сформулируйте понятие предела: а) числовой последовательности; б) переменной величины; в) функции.

11. Какие величины называются: а) бесконечно малыми; б) бесконечно большими? Сформулируйте их свойства.

12. Сформулируйте теорему о связи между бесконечно малой и бесконечно большой величинами.

13. Сформулируйте теорему о первом и втором замечательном пределах. В каких случаях они применяются?

14. Что называется левосторонним (правосторонним) пределом.

15. Приведите классификацию точек разрыва функции.

16. Дайте определение непрерывности функции в точке, на отрезке.

17. Назовите основные свойства непрерывных функций.

5.1. Понятие функции и ее области определения

Часто приходится рассматривать несколько переменных величин, зависящих одна от другой. Математический анализ изучает переменные величины, рассматривая их во взаимной связи и зависимости. Основным понятием математического анализа является понятие «функция».

Определение 18 (определение функции по Дирихле). Если каждому изучаемому значению x ставится в соответствие по некоторому закону или правилу одно определенное значение y, то у называется *функцией* от x.

Обозначают: $x \overset{f}{\mapsto} y$ или $y = f(x)$.

Переменная x называется *независимой переменной* или *аргументом*, а y – *зависимой переменной* или *функцией.*

Графиком функции $y = f(x)$ называется совокупность всех точек плоскости, абсциссы которых являются значениями аргумента x, а ординаты – соответствующими значениями функции $y = f(x)$.

Определение 19. *Областью определения* функции $y = f(x)$ называется совокупность всех действительных значений аргумента *x*, при которых функция существует и обозначается: D_f или D_y.

Определение 20. Совокупность всех тех значений, которые принимает при этом сама функция *y*, называется *областью значений* этой функции и обозначается: E_f или E_y.

Определение 21. Функция $f(x)$ называется *четной*, если для любого $x \in D_f$ выполняется равенство

$$f(-x) = f(x).$$

И называется *нечетной*, если для любого $x \in D_f$ выполняется равенство

$$f(-x) = -f(x).$$

Пример 13. Найти область определения функции: а) $y = \sqrt{x-5}$; б) $y = \dfrac{3}{x^2 - 4}$.

Решение. а) Данная функция будет принимать действительные значения только в том случае, когда подкоренное выражение $x - 5 \geq 0$. Решая неравенство, получаем $x \geq 5$. Следовательно, областью определения будет промежуток $[5; +\infty]$, т.е. $D_f:\ x \in [5; +\infty]$.

б) Аргумент *x* содержится в знаменателе дроби. Так как на нуль делить нельзя, то эта функция будет существовать только тогда, когда знаменатель будет не равен нулю. Решая уравнение $x^2 - 4 = 0$, найдем те значения *x*, при которых функция не существует. Корни этого уравнения: $x_{1;2} = \pm 2$. Таким образом, областью определения будет являться множество действительных чисел, кроме точек $x_{1;2} = \pm 2$, т.е. $D_f:\ x \in R \setminus \{\pm 2\}$.

5.2. Пределы. Неопределенность вида: $\left(\frac{0}{0}\right)$; $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$.

В данной теме рассматривается вычисление пределов функций, которое основывается на следующих теоремах:

1. Предел постоянной равен самой постоянной:

$$\lim_{x\to a} C = C,\ (C = const).$$

2. Постоянный множитель можно выносить за знак предела:

$$\lim_{x\to a} C\cdot f(x) = C\cdot \lim_{x\to a} f(x).$$

3. Предел от алгебраической суммы нескольких функций равен алгебраической сумме пределов этих же функций:

$$\lim_{x\to a}\left[f(x)\pm\varphi(x)\right] = \lim_{x\to a} f(x)\pm \lim_{x\to a}\varphi(x).$$

4. Предел произведения нескольких функций равен произведению пределов этих же функций:

$$\lim_{x\to a}\left[f(x)\cdot\varphi(x)\right] = \lim_{x\to a} f(x)\cdot \lim_{x\to a}\varphi(x).$$

5. Предел частного функций равен частному пределов, при условии, что предел знаменателя не равен нулю:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)},\ \lim_{x\to a}\varphi(x)\neq 0.$$

Определение 22. Величина (функция) называется *бесконечно малой* (б.м.), если ее предел при $x\to a$, равен нулю, т.е.

$$\lim_{x\to a} f(x) = 0.$$

Определение 23. Величина (функция) называется *бесконечно большой* (б.б.), если ее предел при $x \to a$, равен бесконечности, т.е.

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty.$$

Теорема 2 (о связи б.м. и б.б. величин). Величина, обратная бесконечно большой, есть величина бесконечно малая и, наоборот, величина, обратная бесконечно малой, есть величина бесконечно большая.

Символически это обозначают так: $\frac{1}{\infty} = 0$ и $\frac{1}{0} = \infty$.

Свойства бесконечно малых величин

Пусть α, β – б.м. величины, y – переменная величина, имеющая предел, равный A, т.е. $\lim_{x \to a} y = A\,(const)$. Тогда справедливы следующие свойства, которые символически можно представить так:

1. $\alpha \pm \beta = 0$; 2. $\alpha \cdot A = 0$; 3. $\frac{\alpha}{A} = 0$, $A \neq 0$.

Свойства бесконечно больших величин

Свойства б.б. величин также можно символически записать так:

1. $\infty \pm A = \infty$. 2. $\infty \cdot A = \infty$. 3. $\frac{\infty}{A} = \infty$.

4. $\infty^n = \infty$. 5. $\sqrt[n]{\infty} = \infty$. 6. $\begin{matrix} +\infty + (+\infty) = +\infty \\ -\infty + (-\infty) = -\infty \end{matrix}$,

где $\lim_{x \to a} y = A\,(const)$, y – переменная величина.

Пример 13. Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{-2x^2+5x-1}{3x^2+x-6}$; б) $\lim\limits_{m\to 2}\dfrac{m^2-4m+5}{-4m^2+6m+4}$;

в) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2+x-10}{x^2+x-6}$; г) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{4x^2-3x+1}{2x^2+x-5}$.

Решение. а) Вычисление предела начинается с подстановки вместо переменной величины того значения, к которому она стремится под знаком предела. В данном случае, вместо x подставляем «–1». Получим

$$\lim_{x\to -1}\frac{-2x^2+5x-1}{3x^2+x-6}=\lim_{x\to -1}\frac{-2(-1)^2+5(-1)-1}{3(-1)^2-1-6}=\frac{-8}{-4}=2.$$

б) Аналогично, подставим вместо переменной величины m значение «2». В результате получим

$$\lim_{m\to 2}\frac{m^2-4m+5}{-4m^2+6m+4}=\lim_{m\to 2}\frac{2^2-4\cdot 2+5}{-4\cdot 2^2+6\cdot 2+4}=\frac{1}{0}=\infty \text{ (по \textit{теореме 1})}.$$

в) Непосредственная подстановка вместо x значения «2» в данную дробь приводит к неопределенности вида $\left(\dfrac{0}{0}\right)$. Чтобы раскрыть эту неопределенность, необходимо числитель и знаменатель – квадратные трехчлены разложить на линейные множители по формуле: $ax^2+вx=c=a(x-x_1)(x-x_2)$, где x_1 и x_2 корни уравнения $ax^2+вx+c=0$, которые вычисляются по формулам: $x_{1,2}=\dfrac{-в\pm\sqrt{D}}{2a}$, $D=в^2-4ac$.

$$\lim_{x\to 2}\frac{2x^2+x-10}{x^2+x-6}=\left(\frac{0}{0}\right)=\left\{\begin{array}{l}2x^2+x-10=2(x-2)(x+\frac{5}{2}).\\ D=в^2-4ac=1-4\cdot 2\cdot(-10)=81.\\ x_{1;2}=\frac{-в\pm\sqrt{D}}{2a}=\frac{-1\pm 9}{4}=2;-\frac{5}{2}.\\ \\ \textit{Аналогично}, x^2+x-6=(x-2)(x+3).\\ D=1-4\cdot 1\cdot(-6)=25.\\ x_{1;2}=\frac{-1\pm 5}{2}=2;-3.\end{array}\right\}=$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{2\cancel{(x-2)}(x+\frac{5}{2})}{\cancel{(x-2)}(x+3)}=\left\{\begin{array}{c}\textit{т.к. } x\to 2 \ (\textit{но не равен } 2), \textit{сократим на } (x-2);\\ (x-2)-\textit{критический множитель.}\end{array}\right\}=$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{2x+5}{x+3}=\frac{2\cdot 2+5}{2+3}=\frac{9}{5}=1{,}8.$$

г) $$\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2-3x+1}{2x^2+x-5}=\frac{4\cdot\infty^2-3\cdot\infty+1}{2\cdot\infty^2+\infty-5}=\{\textit{по св}-\textit{ам б.б. величин}\}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right).$$

В данном случае получили неопределенность вида $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$. Чтобы ее раскрыть, пользуемся ***правилом***: если под знаком предела при $x\to\infty$, стоит дробно-рациональная функция $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$, в которой $P_m(x)$ и $Q_n(x)$ многочлены степени m и n соответственно, то числитель и знаменатель делим на x^k, где k – наивысшая степень многочленов $P_m(x)$ и $Q_n(x)$. Другими словами, делим на x^m, если $m\geq n$ и на x^n, если $n>m$.

Пример 14.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2-3x+1}{2x^2+x-5}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{4\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}}-\frac{3\cancel{x}}{x^{\cancel{2}}}+\frac{1}{x^2}}{\frac{2\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}}+\frac{\cancel{x}}{x^{\cancel{2}}}-\frac{5}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{4-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}{2+\frac{1}{x}-\frac{5}{x^2}}=$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4-\frac{3}{\infty}+\frac{1}{\infty}}{2+\frac{1}{\infty}-\frac{5}{\infty}}=\frac{4-0+0}{2+0-0}=\frac{4}{2}=2.$$

Раздел VI. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Литература: [3], [5], [6], [9], [10], [12], [15], [17], [21], [24].

Вопросы для самопроверки

1. Что называется: а) производной; б) дифференциалом функции? В чем заключается геометрический смысл дифференциала?

2. Какая функция называется дифференцируемой в точке?

3. Сформулируйте правила вычисления производной суммы, произведения, частного. Выведите формулы.

4. Как дифференцируются сложные функции?

5. Как вычисляются производные и дифференциалы высших порядков?

6. Сформулируйте определение возрастающей; убывающей функции.

7. Как определяются наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке?

8. Сформулируйте необходимое, достаточное, необходимое и достаточное условия существования экстремума функции.

9. Запишите формулы наклонной, вертикальной и горизонтальной асимптот.

10. Привести общую схему исследования функции и построения графика.

5. Понятие производной и дифференциала

Пусть дана функция $y = f(x)$, определенная на некотором промежутке $X \in D_f$.

Определение 24. Если существует конечный предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда последнее стремится к нулю, то этот предел называется *производной* данной функции $f(x)$ в точке *x* и обозначается: y'.

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \qquad (29)$$

Определение 25. Главная линейная часть приращения функции Δy ($\Delta y = y' \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x$, где $\alpha = \alpha(\Delta x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$) называется *дифференциалом функции* в точке *x* и обозначается: dy, т.е.

$$dy = y' \cdot dx. \qquad (30)$$

Таким образом, чтобы найти дифференциал функции (dy), нужно производную данной функции (y') умножить на дифференциал независимой переменной (dx).

Операция нахождения производной называется *дифференцированием*.

Для справок приводим таблицу основных формул и правил дифференцирования.

Таблица основных формул производных

Простая функция $y = f(x)$	***Сложная функция*** $y = f(u)$, $u = \varphi(x)$
1. $C' = 0$, $C = const$.	
2. $x' = 1$.	
3. $(Cx)' = C$.	$(C \cdot u)' = C \cdot u'$.
4. $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$, $n \in R$.	$(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$.
а) $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.	$\left(\sqrt{u}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$.
б) $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$.	$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{1}{u^2} \cdot u'$.
в) $\left(\sqrt[n]{x^m}\right)' = \left(x^{\frac{m}{n}}\right)' = \frac{m}{n} \cdot x^{\frac{m}{n}-1}$.	$\left(\sqrt[n]{u^m}\right)' = \left(u^{\frac{m}{n}}\right)' = \frac{m}{n} \cdot u^{\frac{m}{n}-1} \cdot u'$.
5. $(a^x)' = a^x \cdot lna$,	$(a^u)' = a^u \cdot lna \cdot u'$, $a > 0, a \neq 1, a = const$.
6. $(e^x)' = e^x$.	$(e^u)' = e^u \cdot u'$.
7. $(lnx)' = \frac{1}{x}$	$(lnu)' = \frac{1}{u} \cdot u'$
8. $\left(log_a x\right)' = \frac{1}{x \cdot lna}$.	$\left(log_a u\right)' = \frac{1}{u \cdot lna} \cdot u'$.
9. $(sinx)' = cosx$.	$(sinu)' = cosu \cdot u'$
10. $(cosx)' = -sinx$.	$(cosu)' = -sinu \cdot u'$
11. $(tgx)' = \frac{1}{cos^2 x}$.	$(tgu)' = \frac{1}{cos^2 u} \cdot u'$.
12. $(ctgx)' = -\frac{1}{sin^2 x}$.	$(ctgu)' = -\frac{1}{sin^2 u} \cdot u'$.

13. $(arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.	$(arcsin u)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$.
14. $(arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.	$(arccos u)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$.
15. $(arctg x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$.	$(arctg u)' = \dfrac{1}{1+u^2} \cdot u'$.
16. $(arcctg x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$.	$(arcctg u)' = -\dfrac{1}{1+u^2} \cdot u'$.

Правила дифференцирования: 1) $(u+v-w)' = u'+v'-w'$ (***суммы***).

2) $(u \cdot v)' = u' \cdot v + uv'$ (***произведения***).

3) $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$ (***частного***).

Решение типового варианта

Пример 15. Найти производные и дифференциалы следующих функций:

а) $y = 2x^4 - \dfrac{5}{x^3} - 9\sqrt[3]{x^2}$; б) $y = \left(x^3+1\right) \cdot sin x$; в) $y = \dfrac{arccos 5x}{ln(x^2-3x)}$;

Решение. а) Вводя дробные и отрицательные показатели: $x^{-n} = \dfrac{1}{x^n}$, получим:

$$y = 2x^4 - 5x^{-3} - 9x^{\frac{2}{3}}.$$

Применяя правило дифференцирования суммы и формулы (4) и (4в) для простой функции, будем иметь:

$$y' = 2 \cdot 4x^{4-1} - 5 \cdot (-3)x^{-3-1} - 9 \cdot \frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1} = 8x^3 + 15x^{-4} - 6x^{-\frac{1}{3}} = 8x^3 + \frac{15}{x^4} - \frac{6}{\sqrt[3]{x}}.$$

Для нахождения дифференциала применим формулу (30). Тогда

$$dy=\left(8x^3+\frac{15}{x^4}-\frac{6}{\sqrt[3]{x}}\right)\cdot dx.$$

б) Применим правило дифференцирования произведения, суммы и формулы (4), (9):

$$y'=\left(x^3+1\right)'\cdot sinx+\left(x^3+1\right)\cdot(sinx)'=3x^2\cdot sinx+\left(x^3+1\right)\cdot cosx.$$

$$dy=\left(3x^2\cdot sinx+\left(x^3+1\right)\cdot cosx\right)dx.$$

в) Здесь необходимо воспользоваться правилом дифференцирования частного:

$$y'=\frac{(arccos5x)'\cdot ln(x^2-3x)-arccos5x\cdot(ln(x^2-3x))'}{ln^2(x^2-3x)}=\{по\ (7)\ и\ (14)\}=$$

$$=\frac{-\frac{1}{\sqrt{1-25x^2}}\cdot(5x)'\cdot ln(x^2-3x)-arccos5x\cdot\frac{1}{x^2-3x}(x^2-3x)'}{ln^2(x^2-3x)}=\{по\ (3)\ и\ (4)\}=$$

$$=\frac{-\frac{5}{\sqrt{1-25x^2}}\cdot ln(x^2-3x)-arccos5x\cdot\frac{1}{x^2-3x}(2x-3)}{ln^2(x^2-3x)}.$$

Тогда

$$dy=\frac{-\frac{5}{\sqrt{1-25x^2}}\cdot ln(x^2-3x)-arccos5x\cdot\frac{1}{x^2-3x}(2x-3)}{ln^2(x^2-3x)}dx.$$

Раздел VII. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Литература: [3], [5], [6], [7], [9], [10], [11], [12], [15], [17], [21].

Вопросы для самопроверки

1. Что называется интегральной суммой Римана функции $f(x)$ на отрезке $[a;в]$?

2. Сформулируйте определение определенного интеграла.

3. Какая функция называется интегрируемой на отрезке?

4. Сформулируйте достаточное условие интегрируемости функции.

5. В чем заключается геометрический смысл определенного интеграла?

6. Сформулируйте свойства определенного интеграла.

7. Назовите задачи, приводящие к понятию определенного интеграла.

8. Записать формулу площади фигуры в случае, когда: а) $f(x)\geq 0$; б) $f(x)\leq 0$; в) $f(x)$ – четная на отрезке $[-a;a]$; г) $f(x)$ – нечетная на отрезке $[-a;a]$; д) фигура ограничена двумя кривыми $y=f(x)$ и $y=\varphi(x)$, причем $f(x)\geq\varphi(x)$ на отрезке $[a;в]$;

9. Записать формулу площади фигуры в декартовых координатах.

10. Записать формулу площади фигуры в параметрической форме.

11. Записать формулу площади фигуры в полярных координатах.

7.1. Понятие первообразной и неопределенного интеграла

Определение 26. Функция $F(x)$ называется ***первообразной*** для функции $y=f(x)$ на интервале $X\in D_f$, если для каждой точки из этого интервала выполняется равенство:

$$F'(x)=f(x). \tag{31}$$

Например, функция $F(x) = sinx$ является первообразной для $f(x) = cosx$ на промежутке $X \in (-\infty; +\infty) \in D_f$, так как при любом $x \in (-\infty; +\infty)$ $F'(x) = (sinx)' = cosx = f(x)$, т.е. выполняется равенство (31).

Определение 27. Совокупность всех первообразных $F(x) + C$ функции $y = f(x)$ на промежутке $X \in D_f$ называется ***неопределенным интегралом*** от данной функции и обозначается: $\int f(x)dx$, т.е.

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \tag{32}$$

где знак $\int$ называется знаком неопределенного интеграла; $f(x)$ – подынтегральной функцией; $f(x)dx$ – подынтегральным выражением; x – переменной интегрирования функцией; $C = const$.

Таким образом, из ***определения 27*** следует, что $\int cosxdx = sinx + C$, где C принимает любое числовое значение.

Основные свойства неопределенного интеграла

1. Производная неопределенного интеграла равна подынтегральной функции; дифференциал от неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению, т.е.

$$(\int f(x)dx)' = f(x) \text{ и } d(\int f(x)dx) = f(x)dx.$$

2. В неопределенном интеграле постоянный множитель можно выносить за знак интеграла, т.е. если $k = const$, то

$$\int k \cdot f(x)dx = k \cdot \int f(x)dx.$$

3. Неопределенный интеграл от алгебраической суммы нескольких функций равен алгебраической сумме неопределенных интегралов от каждой функции:

$$\int \left[f(x) \pm g(x) \right] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx .$$

4. Неопределенный интеграл от дифференциала некоторой функции равен сумме этой функции и произвольной постоянной *C*, т.е.

$$\int d \left[f(x) \right] = f(x) + C .$$

Правило интегрирования: если $F(x)$ – первообразная для функции $f(x)$, то $\frac{1}{a} \cdot F(ax + в)$ является первообразной для функции $f(ax + в)$, где $\frac{1}{a}$ называется ***компенсирующим множителем***.

Для справок приведем таблицу интегралов.

Таблица интегралов

Простая функция	*Сложная функция*
1. $\int dx = x + C$; $\int dt = t + C$;	1. $\int du = u + C$; $\int dv = v + C$.
2. $\int 0dx = C$.	2. $\int 0du = C$.
3. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C,\ n \in R,\ n \neq -1.$	3. $\int u^n dx = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C,\ n \in R,\ n \neq -1.$
3 а) $\int \sqrt{x} dx = \frac{2x^{3/2}}{3} + C$.	3а) $\int \sqrt{u} du = \frac{2u^{3/2}}{3} + C$.
3 б) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C$.	3б) $\int \frac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + C$.
4. $\int \frac{dx}{ax + в} = \frac{1}{a} ln\lvert ax + в \rvert + C$.	4. $\int \frac{du}{au + в} = \frac{1}{a} ln\lvert au + в \rvert + C$.
4 а) $\int \frac{dx}{x} = ln\lvert x \rvert + C$.	4а). $\int \frac{du}{u} = ln\lvert u \rvert + C$.
5. $\int e^x dx = e^x + C$.	5. $\int e^u du = e^u + C$.
6. $\int a^x dx = \frac{a^x}{lna} + C$, $a > 0, a \neq 1, a = const$.	6. $\int a^u du = \frac{a^u}{lnu} + C$, $a > 0, a \neq 1, a = const$.
7. $\int sinxdx = -cosx + C$.	7. $\int sinudu = -cosu + C$.
8. $\int cosxdx = sinx + C$.	8. $\int cosudu = sinu + C$.
9. $\int tgxdx = -ln\lvert cosx \rvert + C$.	9. $\int tgudu = -ln\lvert cosu \rvert + C$.
10. $\int ctgxdx = ln\lvert sinx \rvert + C$.	10. $\int ctgudu = ln\lvert sinu \rvert + C$.
11. $\int \frac{dx}{cos^2 x} = tgx + C$.	11. $\int \frac{du}{cos^2 u} = tgu + C$.
12. $\int \frac{dx}{sin^2 x} = -ctgx + C$.	12. $\int \frac{du}{sin^2 u} = -ctgu + C$.

13 . $\int \frac{dx}{x^2-1}=\frac{1}{2}\cdot ln\left\lvert\frac{x-1}{x+1}\right\rvert+C$.	13 . $\int \frac{du}{u^2-1}=\frac{1}{2}\cdot ln\left\lvert\frac{u-1}{u+1}\right\rvert+C$.
14. $\int \frac{dx}{x^2+1}=\left[\begin{array}{l} arctgx+C \\ -arcctgx+C \end{array}\right.$.	14. $\int \frac{du}{u^2+1}=\left[\begin{array}{l} arctgu+C \\ -arcctgu+C \end{array}\right.$.
15. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\left[\begin{array}{l} arcsinx+C \\ -arccosx+C \end{array}\right.$.	15. $\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}=\left[\begin{array}{l} arcsinu+C \\ -arccosu+C \end{array}\right.$
16. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2\pm 1}}=ln\left\lvert x+\sqrt{x^2\pm 1}\right\rvert+C$.	16. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2\pm 1}}=ln\left\lvert u+\sqrt{u^2\pm 1}\right\rvert+C$
17 . $\int \frac{dx}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\cdot ln\left\lvert\frac{x-a}{x+a}\right\rvert+C$, $a=const$	17. $\int \frac{du}{u^2-a^2}=\frac{1}{2a}\cdot ln\left\lvert\frac{u-a}{u+a}\right\rvert+C$, $a=const$.
18. $\int \frac{dx}{x^2+a^2}=\left[\begin{array}{l} \frac{1}{a}\cdot arctg\frac{x}{a}+C \\ -\frac{1}{a}\cdot arcctg\frac{x}{a}+C \end{array}\right.$.	18 . $\int \frac{du}{u^2+a^2}=\left[\begin{array}{l} \frac{1}{a}\cdot arctg\frac{u}{a}+C \\ -\frac{1}{a}\cdot arcctg\frac{u}{a}+C \end{array}\right.$,
19. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\left[\begin{array}{l} arcsin\frac{x}{a}+C \\ -arccos\frac{x}{a}+C \end{array}\right.$.	19. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}}=\left[\begin{array}{l} arcsin\frac{u}{a}+C \\ -arccos\frac{u}{a}+C \end{array}\right.$.
20. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2\pm m}}=ln\left\lvert x+\sqrt{x^2\pm m}\right\rvert+C$, $m=const$.	20. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2\pm a^2}}=ln\left\lvert u+\sqrt{u^2\pm a^2}\right\rvert+C$.

7.2 Методы интегрирования в неопределенном интеграле

7.2.1 Непосредственное интегрирование

Интегрирование, основанное на применении таблицы основных интегралов, свойств неопределенного интеграла, а также простейших тождественных преобразований подынтегральной функции, принято называть ***непосредственным интегрированием***.

Пример 16. Найти интеграл: а) $\int \left(4x^3-\sqrt{x}+\frac{6}{x^2}\right)dx$;

б) $\int \frac{dx}{25x^2-4}$; в) $\int \left(\frac{1}{\sqrt{16-9x^2}}+\frac{5}{cos^2(6x-7)}-e^{-\frac{6}{7}x-8}\right)dx$.

Решение. а) Вводя дробные и отрицательные показатели и применяя табличную формулу интегрирования для степенной функции (3), а также свойство (2) неопределенного интеграла, получим:

$$\int \left(4x^3-\sqrt{x}+\frac{6}{x^2}\right)dx=\int 4x^2dx-\int\sqrt{x}dx+\int\frac{6}{x^2}dx=$$

$$=4\int x^2dx-\int\sqrt{x}dx+6\int x^{-2}dx=\frac{4x^3}{3}-\frac{2x^{3/2}}{3}+\frac{6x^{-1}}{-1}+C=\frac{4x^3}{3}-\frac{2x^{3/2}}{3}-\frac{6}{x}+C.$$

б) Преобразуем выражение в знаменателе, применим формулу (17) и введенное выше правило интегрирования:

$$\int \frac{dx}{25x^2-4}=\int \frac{dx}{(5x)^2-2^2}=\frac{1}{2\cdot 2}\cdot\frac{1}{5}ln\left|\frac{5x-2}{5x+2}\right|+C=\frac{1}{20}ln\left|\frac{5x-2}{5x+2}\right|+C,$$

где $\frac{1}{5}$ – компенсирующий множитель.

в) Применив к слагаемым подынтегральной функции табличные формулы (19), (11) и (5) соответственно, получим:

$$\int\left(\frac{1}{\sqrt{16-9x^2}}+\frac{5}{cos^2(6x-7)}-e^{-\frac{6}{7}x-8}\right)dx=\int\frac{1}{\sqrt{16-9x^2}}dx+\int\frac{5}{cos^2(6x-7)}dx-$$

$$-\int e^{-\frac{6}{7}x-8}dx=\frac{1}{3}arcsin\frac{3x}{4}+\frac{5}{6}tg(6x-7)+\frac{7}{6}e^{-\frac{6}{7}x-8}+C.$$

7.2.2 Метод подстановки (замены переменной) в неопределенном интеграле

Если данный интеграл $\int f(x)dx$ не является табличным и не может быть найден методом непосредственного интегрирования, то введение новой переменной интегрирования позволяет свести данный интеграл к табличному.

Положим $x=\varphi(t)$, где $\varphi(t)$ непрерывная и дифференцируемая функция на некотором промежутке. Если на указанном промежутке изменения переменной x функция $f(x)$ интегрируема, то имеет место ***формула замены переменной в неопределенном интеграле***:

$$\int f(x)dx=\int f[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t)dt. \qquad (33)$$

После того, как интеграл вычислен с помощью подстановки $x=\varphi(t)$, следует вернуться к старой переменой x.

Иногда вместо указанной подстановки применяют подстановку $t=\varphi(x)$.

Вычисление интегралов методом подстановки значительно упрощается, если пользоваться следующими правилами:

а) Если под знаком интеграла стоит дробь, числитель которой равен производной знаменателя, отличающейся с точностью, хотя бы, до постоянного множителя, то за t обозначают знаменатель, т.е.

$$\int \frac{f'(x)dx}{f(x)} = \left\{ \begin{matrix} f(x) = t \\ f'(x)dx = dt \end{matrix} \right\} = ln|f(x)| + C.$$

б) Если под знаком интеграла стоит дробь, в знаменателе которой – функция $f^n(x)$, а в числителе – производная $f'(x)$ без учета n-ой степени, отличающаяся с точностью, хотя бы, до постоянного множителя, то за t обозначают функцию $f(x)$, т.е.

$$\int \frac{f'(x)dx}{[f(x)]^n} = \left\{ \begin{matrix} f(x) = t \\ f'(x)dx = dt \end{matrix} \right\} = \frac{1}{(1-n)\cdot[f(x)]^{n-1}} + C,\ n \in R,\ n \neq 1.$$

Пример 17. Найти интеграл методом подстановки:

а) $\int \frac{dx}{5x+1}$; б) $\int e^{x^2+1} \cdot x dx$; в) $\int (tg 2x + 1)^3 \cdot \frac{dx}{cos^2 2x}$; г) $\int \sqrt[5]{4x+7} dx$.

Решение.

а)I способ:

$$\int \frac{dx}{5x+1} = \left\{ \begin{matrix} 5x+1 = t \\ 5dx = dt \\ dx = \dfrac{dt}{5} \end{matrix} \right\} = \int \frac{dt}{5t} = \frac{1}{5}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{5} \cdot ln|t| + C = \frac{1}{5} ln|5x+1| + C.$$

II способ: применим табличную формулу (4).

$$\int \frac{dx}{5x+1} = \frac{1}{5} ln|5x+1| + C.$$

б)

$$\int e^{x^2+1}\cdot xdx = \{по\ \ форм.(г)\} = \left\{\begin{matrix} x^2+1=t \\ 2xdx=dt \\ xdx=\dfrac{dt}{2} \end{matrix}\right\} = \int e^t dt = e^t + C = e^{x^2+1} + C.$$

в) Здесь применим *правило (в)*, где $f(x)=tg2x+1;\ \ n=3$:

$$\int (tg2x+1)^3\cdot\frac{dx}{cos^2 2x} = \frac{1}{2}\cdot\frac{(tg2x+1)^4}{4} + C = \frac{(tg2x+1)^4}{8} + C.$$

г) Аналогично, применяя *правило (в)*, где $f(x)=4x+7$; $n=\dfrac{1}{5}$:

$$\int \sqrt[5]{4x+7}dx = \int (4x+7)^{1/5}dx = \frac{1}{4}\cdot\frac{5(4x+7)^{6/5}}{6} + C = \frac{5(4x+7)^{6/5}}{24} + C$$

7.2.3 Метод интегрирования по частям в неопределенном интеграле

Пусть функции $u=u(x)$ и $v=v(x)$ дифференцируемы по *x*. Известно, что $d(u\cdot v)=vdu+udv$. Выражая отсюда udv, получим:

$$udv = d(u\cdot v) - vdu.$$

Проинтегрируем обе части последнего выражения:

$$\int udv = u\cdot v - \int vdu. \tag{34}$$

Формула (34) называется ***формулой интегрирования по частям в неопределенном интеграле.***

Рассмотрим три типа интегралов, к которым применяется эта формула.

Пусть дан интеграл $\int f(x)dx$. Если в нем функция $f(x)$ представляет собой произведение многочлена n-ой степени и одной из функций, указанных в квадратных скобках:

I тип: $f(x)=P_n(x)\cdot\left[sinx; cosx; tgx; ctgx; e^x; a^x\right]$, где $P_n(x)$ – многочлен n-ой степени, тогда $P_n(x)=u$; все остальное обозначают за dv.

II тип: $f(x)=P_n(x)\cdot\left[arcsinx; arccosx; arctgx; arcctgx; lnx; log_a x\right]$, тогда многочлен обозначают за dv, т.е. $P_n(x)dx=dv$; все остальное обозначают за u.

Пример 18. Найти интеграл $\int(3x+1)\cdot sin2xdx$.

Решение. $$\int\underbrace{(3x+1)\cdot sin2xdx}_{\text{I тип}}=\left\{\begin{matrix} 3x+1=u & 3dx=du \\ sin2xdx=dv & -\frac{1}{2}cos2x=v \end{matrix}\right\}=$$

$$=-\frac{1}{2}(3x+1)\cdot cos2x+\frac{3}{2}\int cos2xdx=-\frac{1}{2}(3x+1)\cdot cos2x+\frac{3}{4}sin2x+C.$$

Определение 28. Если существует предел $\lim\limits_{max\Delta x_i\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\tilde{x}_i)\cdot\Delta x_i$ интегральной суммы при $max\Delta x_i\to 0$, не зависящий ни от способа разбиения отрезка $[a; в]$ на части, ни от выбора точки на каждом частичном отрезке, то этот предел называется ***определенным интегралом*** от функции $f(x)$ на отрезке $[a; в]$ и обозначается: $\int\limits_a^в f(x)dx$.

Таким образом, по ***определению 28*** имеем:

$$\int_a^в f(x)dx = \lim_{max\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f\left(\tilde{x}_i\right) \cdot \Delta x_i, \qquad (35)$$

где $\int$ – знак интеграла, символизирующий сумму;

a – нижний предел интегрирования;

$в$ – верхний предел интегрирования;

x – переменная интегрирования;

$f(x)$ – подынтегральная функция;

$f(x)dx$ – подынтегральное выражение.

Определение 29. Функция, для которой на отрезке существует определенный интеграл, называется интегрируемой на этом отрезке.

Определение 30. Криволинейной трапецией называется плоская фигура, ограниченная сверху кривой $f(x)$, снизу – осью Ох, слева прямой $x = a$, справа – прямой $x = в$.

На рис. 9 $ABCD$ – криволинейная трапеция.

Геометрический смысл определенного интеграла заключается в вычислении площади криволинейной трапеции.

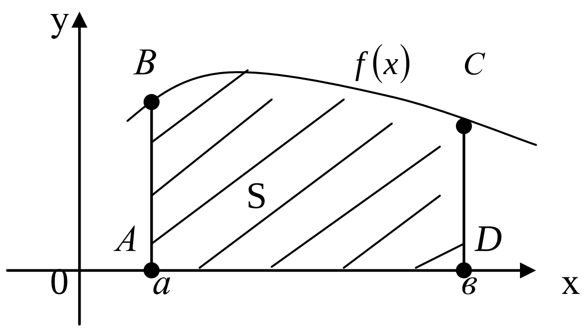


Рис. 9

$$S_{фиг} = \int_a^в f(x)dx. \tag{36}$$

7.2.4 Свойства определенного интеграла

1. При перестановке пределов интегрирования, где $a < в$ определенный интеграл меняет свой знак на противоположный, т.е.

$$\int_a^в f(x)dx = -\int_в^a f(x)dx.$$

2. Если пределы интегрирования равны, то определенный интеграл равен нулю, т.е.

$$\int_a^a f(x)dx = 0.$$

3. Постоянный множитель в определенном интеграле можно выносить за знак интеграла, т.е.

$\int_a^в cf(x)dx = c\int_a^в f(x)dx$, где с – *const*. (постоянная величина).

4. Определенный интеграл от алгебраической суммы конечного числа функций равен алгебраической сумме определенных интегралов от слагаемых функций, т.е.

$$\int_a^в [f(x) \pm \varphi(x)]dx = \int_a^в f(x)dx \pm \int_a^в \varphi(x)dx.$$

5. Если для функции существуют интегралы $\int_a^в f(x)dx$, $\int_a^c f(x)dx$ и $\int_c^в f(x)dx$, то имеет место равенство

$$\int_a^в f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^в f(x)dx.$$

Это равенство верно, когда выполняются неравенства $a < c < в$ или $a < в < c$, или $c < a < в$.

6. Если на отрезке $[a;в]$, где $a < в$ функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ удовлетворяют условию $f(x) \le \varphi(x)$, то

$$\int_a^в f(x)dx \le \int_a^в \varphi(x)dx.$$

7.2.5 Метод непосредственного вычисления определенного интеграла

Метод непосредственного вычисления определенного интеграла заключается в том, что интеграл вычисляется по формуле Ньютона – Лейбница, зная одну из первообразных функции $f(x)$.

Теорема 3. Если функция $y = f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a;в]$ и $F(x)$ ее первообразная также непрерывная на данном отрезке, то

$$\int_a^в f(x)dx = F(x)\Big|_a^в = F(в) - F(a). \qquad (37)$$

Эта формула называется ***формулой Ньютона – Лейбница***.

Пример 19. Вычислить интеграл $\int_0^1 (x^3 + 3x^2 - 2)dx$.

Решение. Так как функция и ее первообразная непрерывны на отрезке $[0;1]$, то по формуле Ньютона – Лейбница:

$$\int_0^1 (x^3 + 3x^2 - 2)dx = \frac{x^4}{4} + x^3 - 2x\Bigg|_0^1 = \frac{1}{4} + 1 - 2 - 0 = -\frac{3}{4}.$$

7.3 *Вычисление площадей плоских фигур*

Геометрически определенный интеграл представляет собой площадь криволинейной трапеции.

1. Если функция $y = f(x) \geq 0$ на отрезке $[a; в]$ (рис.9), то площадь фигуры находится по формуле (36).

2. Если функция $y = f(x) \leq 0$ на отрезке $[a; в]$ (рис. 10), то площадь фигуры находится по формуле:

$$S_{фиг} = -\int_a^в f(x)dx. \tag{38}$$

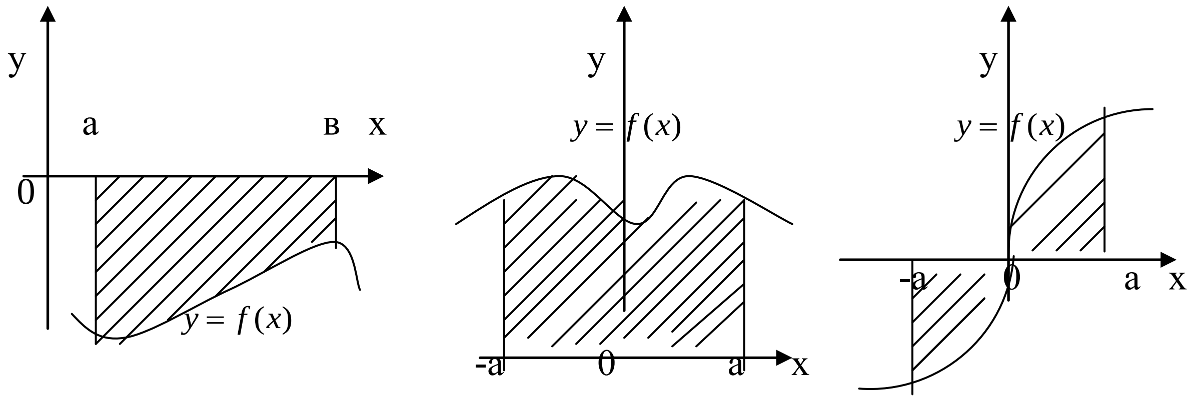


Рис. 10 Рис. 11 Рис. 12

3. Если функция $y = f(x)$ четная на отрезке $[-a; a]$ (рис. 11), то площадь фигуры, ограниченной данной кривой, прямыми $x = \pm a$, находится по формуле:

$$S_{фиг} = \left| \int_{-a}^{a} f(x)dx \right| = 2\left| \int_0^a f(x)dx \right|. \tag{39}$$

4. Если фигура ограничена двумя кривыми $y = f(x)$, $y = \varphi(x)$ и прямыми $x = a$, $x = в$, причем $f(x) \geq \varphi(x)$ на отрезке $[a; в]$ (рис. 13), то ее площадь вычисляется по формуле:

$$S_{фиг} = \int_a^в [f(x) - \varphi(x)]dx. \qquad (40)$$

5. Если левая граница (или правая граница) есть точка пересечения кривых $y = f(x)$ и $y = \varphi(x)$ (рис. 14), то в этом случае, площадь фигуры вычисляется также по формуле (40).

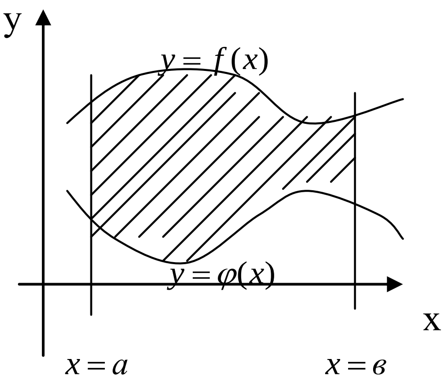


Рис. 13

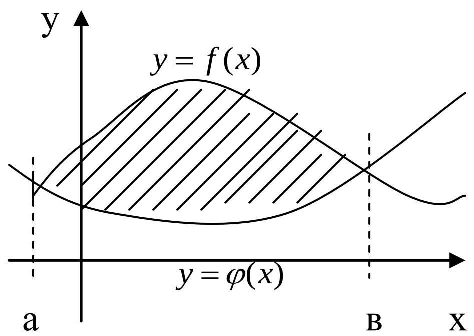


Рис. 14

Пример 20. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривой $y = \sqrt{x}$, прямыми $x = 1$, $x = 4$ и осью О*x* (рис. 15).

Решение. Так как $y = \sqrt{x} \geq 0$ на отрезке $[1; 4]$, то по формуле (36):

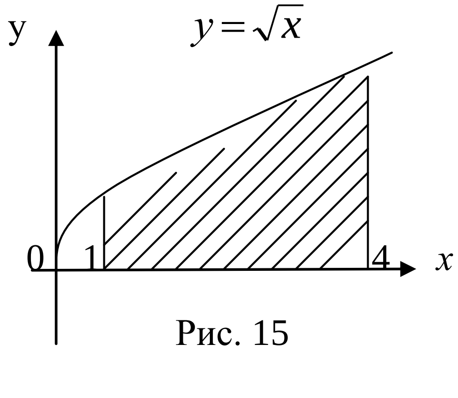


Рис. 15

$$S_{фиг} = \int_1^4 \sqrt{x}dx = \frac{2}{3}x^{3/2}\Big|_1^4 =$$

$$= \frac{2}{3}\left[\left(\sqrt{4}\right)^3 - 1\right] = \frac{2}{3}[8 - 1] = 4\frac{2}{3}(ед^2.).$$

Пример 21. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой $y=-\frac{x^2}{2}+2x+6$ и прямой $y=x+2$ (рис. 16).

Решение.

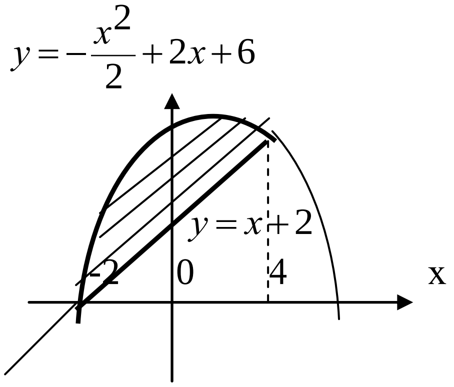


Рис. 16

Найдем точки пересечения прямой и параболы: $-\frac{x^2}{2}+2x+6=x+2$, отсюда $x=-2$ и $x=4$. Следовательно, по формуле (40) искомая площадь фигуры будет равна:

$$S_{фиг}=\int_{-2}^{4}\left(2x-\frac{x^2}{2}+6-2\right)dx=$$

$$=\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}+4x\right)\Bigg|_{-2}^{4}=8-\frac{64}{6}+16-2-\frac{8}{6}+8=18(ед^2.)$$

Раздел VIII. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Литература: [3], [5], [6], [7], [9], [10], [11], [12], [15], [17], [21].

Вопросы для самопроверки

1. Дайте понятие функции: а) многих (нескольких) переменных; б) двух переменных. Что называется ее областью определения?

2. Что называется частными производными первого порядка функции двух переменных? Каков их геометрический смысл?

3. Как определяются частные производные 2, 3-го порядков для функции двух переменных?

4. Что называется полным дифференциалом функции двух переменных? Запишите формулу для его нахождения.

5. Что называется экстремумом функции двух переменных? Сформулируйте необходимое и достаточное условия существования экстремума двух переменных.

Определение 31. Пусть X, $У$ и Z – некоторые числовые множества. Функцией двух переменных называется множество f упорядоченных троек чисел (x, y, z), таких, что $x \in X$, $y \in У$, $z \in Z$ и каждая упорядоченная пара чисел (x, y) входит в одну и только одну тройку этого множества, а каждое z входит, по крайней мере, в одну тройку. При этом говорят, что упорядоченной паре чисел (x, y) поставлено в соответствие число z, и пишут $z = f(x, y)$. Число z называется значением функции f в точке (x, y). Переменную z называют зависимой переменной, а переменные x и y – независимыми переменными (или аргументами); множество $\{(x, y)\}$ – областью определения функции z, а множество Z – множеством значений функции z.

Примерами функции 2-х переменных являются следующие функции:

а) $z = x^2 + y^2$; б) $z = \dfrac{x^2}{1-y} + xy$; в) $z = e^{xy}$.

Определение 32. Если существует предел $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta_x z}{\Delta x}$ $\left(\lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{\Delta_y z}{\Delta y} \right)$, то он называется ***частной производной*** от функции $z = f(x, y)$ в точке (x, y) ***по переменной*** x ***(по переменной*** y) и обозначается одним из следующих символов: z'_x, f'_x, $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ (z'_y, f'_y, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$).

При вычислении частной производной $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ переменную x считают независимой переменной, а $y = const$, а при вычислении частной производной $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ переменную y – независимой переменной, $x = const$.

Пример 22. Вычислить частные производные функции $z = x^2 - 2xy^2 + y^3$.

Решение. Частную производную $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ находим как производную функции по переменной x в предположении, что $y = const$. Поэтому

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(x^2 - 2xy^2 + y^3 \right)'_x = 2x - 2y^2 + 0 = 2(x - y^2).$$

Аналогично,

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left(x^2 - 2xy^2 + y^3 \right)'_y = 0 - 2x \cdot 2y + 3y^2 = -4xy + 3y^2).$$

Частные производные вычисляют по формулам и правилам вычисления производных функций одной переменной.

Частные производные высших порядков. Пусть функция $z = f(x, y)$ имеет частные производные $f'_x(x, y)$ и $f'_y(x, y)$ (они называются *частными производными первого порядка*) в каждой точке некоторой окрестности точки $M(x, y)$. Если $f'_x(x, y)$ и $f'_y(x, y)$ имеют частные производные по переменным x и y в точке $M(x, y)$, то они называются *частными производными второго порядка* от функции $z = f(x, y)$ в этой точке и обозначаются следующими символами:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''_{xx}(x, y); \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f''_{xy}(x, y); \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''_{yy}(x, y); \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = f''_{yx}(x, y).$$

Частные производные второго порядка $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f''_{xy}(x, y)$ и $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = f''_{yx}(x, y)$ называются *смешанными частными производными*. Доказывается, что $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

Пример 23. Найти частные производные второго порядка от функции $z = x^4 + 4x^2y^3 + 7xy + 1$.

Решение. Сначала находим частные производные первого порядка

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 4x^3 + 8xy^3 + 7y; \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = 12x^2y^2 + 7x.$$

Затем находим частные производные второго порядка:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \left(4x^3 + 8xy^3 + 7y\right)_x' = 12x^2 + 8y^3;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = (4x^3 + 8xy^3 + 7y)_y' = 24xy^2 + 7; \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \left(12x^2y^2 + 7x\right)_y' = 24x^2 y.$$

Раздел IX. ГАРМОНИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Вопросы для самопроверки

1. Что называется рядом Фурье?
2. Что называется гармоническим анализом?
3. Запишите формулы коэффициентов ряда Фурье.
4. Запишите формулы коэффициентов ряда Фурье, если функция четная.
5. Запишите формулы коэффициентов ряда Фурье, если функция нечетная.
6. Сформулируйте теорему Дирихле.

Основная задача теории рядов Фурье заключается в следующем: нельзя ли любую заданную периодическую функцию $f\left(x\right)$ с периодом T представить в виде бесконечной суммы гармоник, периоды которых относятся, как $1 : \frac{1}{2} : \frac{1}{3} : \ \dots \ : \frac{1}{n} : \ \dots$. Иначе, нельзя ли любую заданную периодическую функцию $f\left(x\right)$ представить в виде тригонометрического ряда

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n cosnx + b_n sinnx\right). \qquad (41)$$

Определение 33. Рядом Фурье называется бесконечный ряд, членами которого являются синусы и косинусы углов, последовательно пропорциональных числам натурального ряда.

Ряд Фурье имеет вид:

$$\frac{a_0}{2} + a_1 cosx + b_1 sinx + a_2 cos2x + b_2 sin2x + ... + a_n cosnx + b_n sinnx + ... =$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n cosnx + b_n sinnx). \qquad (42)$$

Здесь a_0, a_n, b_n – постоянные величины.

Будем говорить, что сумма членов $a_n cosnx + b_n sinnx$ образуют *n*-ю гармонику ряда Фурье. Первый член ряда $\frac{a_0}{2}$ будем называть ***нулевой гармоникой***.

Отрасль математики, изучающая разложение функций в тригонометрические ряды и интегралы, называется ***гармоническим анализом***. Основная задача гармонического анализа заключается в расщеплении сложной периодической функции на простейшие гармонические составляющие, т. е. в определении коэффициентов ряда Фурье и в определении условий, которым должна удовлетворять функция $f(x)$, чтобы ряд, полученный в результате разложения, сходился к представляемой функции.

Чтобы это осуществить, необходимо:

1. Уметь по заданной функции $f(x)$ находить коэффициенты разложения a_n и b_n.

2. Показать, что полученный в результате разложения – тригонометрический ряд сходится к $f(x)$.

Решим первую задачу. Пусть функция $f(x)$ задана в интервале $(-\pi;\pi)$. Предположим, что она может быть представлена в виде ряда (7) и что этот ряд равномерно сходится; тогда его можно почленно интегрировать.

Такое предположение упрощает вывод формул коэффициентов ряда Фурье.

Другие способы получения формул для коэффициентов не требуют ни интегрирования ряда, ни его равномерной сходимости.

Для определения коэффициентов a_0 применим формулу (43), a_n ($n \neq 0$) – формулу (44), b_n – формулу (45).

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx. \tag{43}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) cosnx dx, \quad n = \overline{1,\infty}. \tag{44}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) sinnx dx, \ n = \overline{1,\infty}. \tag{45}$$

Коэффициенты a_0, a_n и b_n называются ***коэффициентами Фурье***, а ряд с такими коэффициентами, называется ***рядом Фурье***.

Для того чтобы ряд Фурье для функции $f(x)$ сходился и сумма этого ряда была равна заданной функции, нужно наложить на функцию $f(x)$ два ограничения:

1. Функция $f(x)$, заданная на интервале $(-\pi;\pi)$, или непрерывна, или имеет внутри этого интервала конечное число точек разрыва первого рода, т. е. является в данном интервале кусочно-непрерывной.

2. Функция $f(x)$ имеет в интервале $(-\pi;\pi)$ конечное число максимумов и минимумов, т. е. интервал $(-\pi;\pi)$ может быть разбит на конечное число частей, в каждой из которых функция $f(x)$ меняется монотонно (либо возрастает, либо убывает).

Условия (1) – (2) являются достаточными, для того, чтобы функцию $f(x)$ разложить в ряд Фурье и они называются ***условиями Дирихле***, по имени немецкого математика Дирихле (1805—1859), впервые давшего строгое доказательство возможности разложения в ряд Фурье кусочно-непрерывной и монотонной функций.

Теперь можно сформулировать, не приводя доказательства, одну из основных теорем теории рядов Фурье.

Теорема 4 (теорема Дирихле). Если периодическая функция $f(x)$ с периодом 2π удовлетворяет в интервале $(-\pi;\pi)$ условиям Дирихле, то ряд Фурье этой функции сходится в каждой точке интервала и сумма этого ряда:

1) равна $f(x)$ во всех точках непрерывности $f(x)$, лежащих внутри интервала;

2) равна $\dfrac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$ во всех точках разрыва непрерывности;

3) равна

$$\frac{f(-\pi+0)+f(\pi+0)}{2}$$

на концах интервала, то есть в точках $x=-\pi$ и $x=\pi$.

Иначе, функция, удовлетворяющая условиям Дирихле, может быть разложена в тригонометрический ряд Фурье, при этом в точках непрерывности ряд Фурье сходится к самой функции, а в точках разрыва и на границах сумма ряда равна среднему арифметическому предельных значений функции справа и слева в этих точках.

9.1. Разложение в ряд Фурье функции с периодом 2π

При решении многих практических задач электротехники возникает необходимость разложения в тригонометрический ряд функции $f(x)$, заданной лишь на отрезке $[-\pi;\pi]$.

Чтобы воспользоваться только что полученными результатами, обычно поступают следующим образом: функцию $f(x)$ периодически продолжают на всю ось Ох. Полученная периодическая функция совпадает с функцией, заданной на отрезке $[-\pi;\pi]$. Периодическую функцию теперь можно разложить в ряд Фурье, воспользовавшись для нахождения коэффициентов ряда формулами (43, 44, 45). Так как в них фигурирует лишь отрезок $[-\pi;\pi]$, на котором задана функция, то ряд Фурье для периодической функции и для заданной на этом отрезке будет одним и тем же.

Если $f(-\pi)=f(\pi)$ и функция на отрезке $[-\pi;\pi]$ непрерывна, то ее продолжение будет также непрерывной функцией на всей оси Ох (рис. 17).

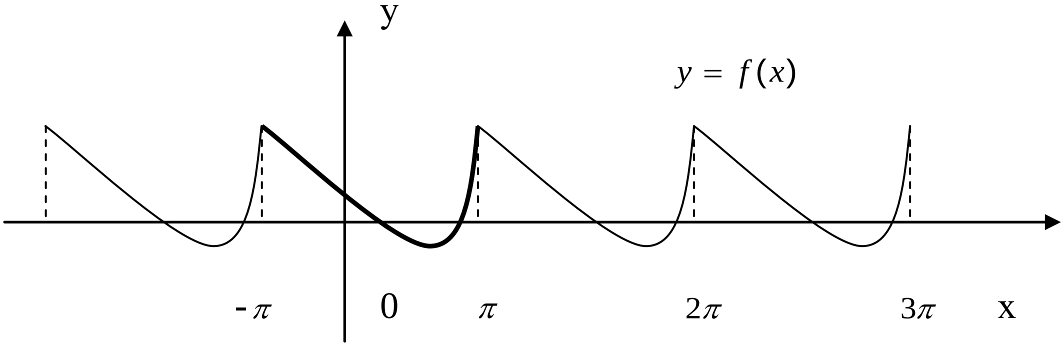


Рис. 17

Если же $f(-\pi)\neq f(\pi)$ и функция $f(x)$ на отрезке $[-\pi;\pi]$ непрерывна, то периодическое продолжение $f(x)$ на всю ось ОХ будет иметь разрывы первого рода в точках $x=(2k+1)\pi\,(k=0,\pm1,\pm2...)$ (рис. 18).

Рассмотрим примеры разложения функций в ряд Фурье.

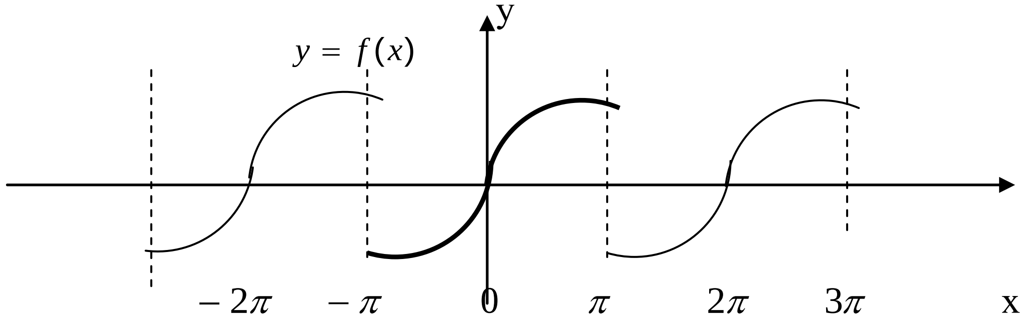


Рис. 18

Пример 24. Разложить в ряд Фурье функцию

$$f(x)=\begin{cases}0 \quad при \quad -\pi<x<0; \\ 2-x \quad при \quad 0<x<\pi.\end{cases}$$

Решение. График этой функции показан на рис. 19.

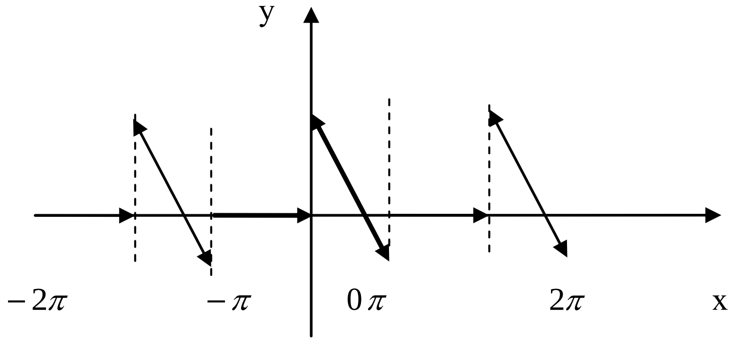


Рис. 19

По формуле (43) найдем коэффициент a_0.

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} 0dx+\int_{0}^{\pi}(2-x)dx\right)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}(2-x)dx=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(2x-\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^{\pi}=\frac{4-\pi}{2}.$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} f(x)cosnxdx+\int_{0}^{\pi} f(x)cosnxdx\right]=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}(2-x)cosnxdx=$$

$$=\left\{\begin{matrix} u=2-x; & du=-dx \\ dv=cosnxdx; & v=\frac{1}{n}sinnx \end{matrix}\right\}=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\left((2-x)\frac{1}{n}sinnx\right)\Bigg|_0^{\pi}+\frac{1}{n}\int_0^{\pi} sinnxdx\right]=-\frac{1}{\pi n^2}cosnx\Bigg|_0^{\pi}=-\frac{1}{\pi n^2}(cos\pi n-cos0)=$$

$$=\left[\begin{matrix} \frac{2}{\pi n^2}, & n-нечетное \\ 0, & n-четное. \end{matrix}\right.$$

Аналогично,

$$в_n=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} f(x)sinnxdx+\int_{0}^{\pi} f(x)sinnxdx\right]=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}(2-x)sinnxdx=$$

$$=\left\{\begin{matrix} u=2-x; & du=-dx \\ dv=sinnxdx; & v=-\frac{1}{n}cosnx \end{matrix}\right\}=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\left((x-2)\frac{1}{n}cosnx\right)\Bigg|_0^{\pi}-\frac{1}{n}\int_0^{\pi} cosnxdx\right]=\left[\begin{matrix} \frac{4-\pi}{\pi n}, & n-нечетное \\ \frac{1}{n}, & n-четное. \end{matrix}\right.$$

Подставляя найденные значения коэффициентов a_0, a_n и $в_n$ в ряд Фурье (42), получим разложение заданной функции в виде:

$$f(x)=\frac{4-\pi}{4}+\frac{2}{\pi}cosx+\frac{4-\pi}{\pi}sinx+\frac{1}{2}sin2x+\dots .$$

Если функция $f(x)$ ***четная***, заданная в замкнутом интервале $[-\pi;\pi]$, то коэффициенты ряда Фурье определяются по формулам:

$$\begin{cases} a_n=\dfrac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} f(x)cosnxdx \\ b_n=0 \end{cases}, \qquad n=0,1,2,3,\dots \quad (46)$$

В этом случае ряд Фурье содержит лишь косинусы и имеет вид:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n cosnxdx.$$

Если функция $f(x)$ ***нечетная*** на $[-\pi;\pi]$, коэффициенты ряда Фурье будут определяться по формулам:

$$\begin{cases} a_n=\dfrac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)cosnxdx=0 \\ b_n=\dfrac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)sinnxdx=\dfrac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} f(x)sinnxdx \end{cases} \qquad (47)$$

Таким образом, ряд Фурье для нечетной функции содержит лишь синусы, т.е.

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n sinnx .$$

КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

В задачах **1-20** 1) выполнить действия над матрицами: найти $2A \pm 3B$, $A \cdot B$, $C \cdot A^T$, $C \cdot B$; 2) решить заданную систему уравнений методом Крамера и сделать проверку полученного решения.

В-1

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 8 & -7 & -6 \\ -3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$,

$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 2 \\ 1 & 4 & -3 \end{pmatrix}$,

$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

2. $\begin{cases} 2x - 3y - 5z = 1 \\ 3x + y - 2z = -4 \\ x - 2y + z = 5. \end{cases}$

В-2

1. $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -6 \\ 2 & 4 & 3 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,

$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$,

$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

2. $\begin{cases} 2x + 3y - z = 2 \\ x + 2y + 3z = 0 \\ x - y - 2z = 6. \end{cases}$

В-3

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

$B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$,

$C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

2. $\begin{cases} 3x + y + 2z = -4 \\ x - 2y - z = -1 \\ 2x + 3y + 2z = 0. \end{cases}$

В-4

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$,

$B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 0 \end{pmatrix}$,

$C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

В-5

1. $A = \begin{pmatrix} 6 & 7 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$,

$B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & -4 \end{pmatrix}$,

$C = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

В-6

1. $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & -4 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$,

$B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

$C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

2. $\begin{cases} x-3y+z=2 \\ 2x+y+3z=3 \\ 2x-y-2z=8. \end{cases}$

2. $\begin{cases} 3x+2y-z=3 \\ x-y+2z=-4 \\ 2x+2y+z=4. \end{cases}$

$\begin{cases} 3x-2y+2z=3 \\ 2x+y-z=-5 \\ 5x-y+3z=4. \end{cases}$

B-7

1. 1. $A=\begin{pmatrix} -6 & 1 & 11 \\ 9 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 7 \end{pmatrix}$

$B=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 7 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$

$C=\begin{pmatrix} 2 & 8 & -5 \\ -3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

2. $\begin{cases} 2x+3y-z=2 \\ x-y+3z=-4 \\ 3x+5y+z=4. \end{cases}$

B-8

1. $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$,

$B=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}$,

$C=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

2.

$\begin{cases} 2x-3y+z=3 \\ x+y-2z=4 \\ 3x-2y+6z=0. \end{cases}$

B-9

1. $A=\begin{pmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

$C=\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

2. $\begin{cases} 2x-3y+3z=0 \\ x+y-2z=-7 \\ x-2y+3z=3. \end{cases}$

B-10

1. $A=\begin{pmatrix} 1 & 7 & 3 \\ -4 & 9 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

$B=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,

$C=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

2. $\begin{cases} 5x-2y+z=-1 \\ 2x+y+2z=6 \\ x-3y-z=-5. \end{cases}$

B-11

1. $A=\begin{pmatrix} 6 & 9 & 4 \\ -1 & -1 & 1 \\ 10 & 1 & 7 \end{pmatrix}$,

$B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

$C=\begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}$..

$\begin{cases} 4x+3y-2z=-1 \\ 3x+y+z=3 \\ x-2y-3z=8. \end{cases}$

B-12

1. $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 7 \\ 2 & 1 & 8 \end{pmatrix}$,

$B=\begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & -4 & 6 \end{pmatrix}$,

$C=\begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

2. $\begin{cases} x+y-2z=1 \\ 2x+3y+z=0 \\ x-2y-z=7. \end{cases}$

В-13

$A=\begin{pmatrix}5 & 1 & 2\\ 1 & 3 & -1\\ 8 & 4 & -1\end{pmatrix}$,

$B=\begin{pmatrix}4 & 4 & -1\\ -2 & 3 & 0\\ 1 & -4 & 3\end{pmatrix}$,

$C=\begin{pmatrix}2 & 0 & -1\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix}$.

2. $\begin{cases}2x-y+3z=1\\ x+2y+z=8\\ 4x-3y-2z=-1.\end{cases}$

В-14

1. $A=\begin{pmatrix}2 & 2 & 5\\ 3 & 3 & 6\\ 4 & 3 & 4\end{pmatrix}$,

$B=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 3 & 3\\ 1 & -2 & -1\end{pmatrix}$,

$C=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 3 & 4 & 5\end{pmatrix}$.

2.

$\begin{cases}3x+3y+2z=-1\\ 2x+y-z=3\\ x-2y-3z=4.\end{cases}$

В-15

1. $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 5\\ 3 & 0 & 6\\ 4 & 3 & 4\end{pmatrix}$,

$B=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 1 & -2 & -1\\ 3 & 2 & 3\end{pmatrix}$,

$C=\begin{pmatrix}5 & 4 & 1\\ 3 & -7 & 2\end{pmatrix}$.

2. $\begin{cases}x+2y-4z=0\\ 3x+y-3z=-1\\ 2x-y+5z=3.\end{cases}$

В-16

1. $A=\begin{pmatrix}5 & 4 & 2\\ 1 & 2 & 4\\ 3 & 0 & 5\end{pmatrix}$,

$B=\begin{pmatrix}4 & 0 & 1\\ 2 & -1 & 3\\ 4 & 0 & -1\end{pmatrix}$,

$C=\begin{pmatrix}2 & 3 & -1\\ 4 & 5 & 0\end{pmatrix}$.

2. $\begin{cases}2x-y+3z=3\\ x+2y+z=2\\ x-3y+4z=-1.\end{cases}$

В-17

1. $A=\begin{pmatrix}3 & 1 & 0\\ 4 & 3 & 2\\ 2 & 2 & -7\end{pmatrix}$,

$B=\begin{pmatrix}2 & 7 & 0\\ 5 & 3 & 1\\ 1 & -6 & 1\end{pmatrix}$,

$C=\begin{pmatrix}3 & 2 & 1\\ 3 & 2 & 0\end{pmatrix}$.

2.

$\begin{cases}x-2y+z=4\\ 2x+y+3z=5\\ 3x+4y+z=-2.\end{cases}$

В-18

1. $A=\begin{pmatrix}8 & -1 & -1\\ 5 & -5 & -1\\ 10 & 3 & 2\end{pmatrix}$,

$B=\begin{pmatrix}2 & -1 & 4\\ -5 & 2 & 2\\ 1 & 4 & 3\end{pmatrix}$,

$C=\begin{pmatrix}2 & 3 & 1\\ 4 & -3 & 3\end{pmatrix}$.

2. $\begin{cases}x+5y-z=-1\\ 2x+y-2z=7\\ x-4y+z=0.\end{cases}$

В-19

1. $A=\begin{pmatrix}3 & -7 & 2\\ 1 & -8 & 3\\ 4 & -2 & 3\end{pmatrix}$,

В-20

1. $A=\begin{pmatrix}3 & -1 & 0\\ 3 & 5 & 1\\ 4 & -7 & 5\end{pmatrix}$

$B=\begin{pmatrix}0&1&3\\3&2&1\\4&0&2\end{pmatrix}$,

$C=\begin{pmatrix}7&0&1\\2&3&0\end{pmatrix}$.

2.

$$\begin{cases}x-3y-z=1\\2x+y+z=-7\\2x-y-3z=5.\end{cases}$$

$B=\begin{pmatrix}1&2&0\\4&-1&1\\0&3&7\end{pmatrix}$,

$C=\begin{pmatrix}3&4&1\\0&-2&1\end{pmatrix}$.

2.

$$\begin{cases}3x+y-2z=1\\x-2y+3z=5\\2x+3y-z=-4.\end{cases}$$

В задачах **21-40** даны комплексные числа z_1 и z_2. Найти:

а) $2z_1 \pm 3z_2$; б) $\bar{z}_1 \cdot (-z_2)$; в) $\dfrac{z_2}{z_1}$; г) $(z_1)^6$; д) $\sqrt[3]{z_1}$.

21. $z_1=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,\ z_2=-5i$.	22. $z_1=4\sqrt{3}+4i,\ z_2=2i$.	23. $z_1=\frac{\sqrt{3}}{8}+\frac{i}{8},\ z_2=-3i$.
24. $z_1=\sqrt{2}+\sqrt{2}i,\ z_2=-6i$.	25. $z_1=\sqrt{3}+i,\ z_2=\sqrt{2}i$.	26. $z_1=\sqrt{3}-i,\ z_2=4i$.
27. $z_1=\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{i}{4},\ z_2=-3i$.	28. $z_1=-3+3\sqrt{3}i,\ z_2=i$	29. $z_1=\sqrt{2}+\sqrt{2}i,\ z_2=6i$
30. $z_1=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i,\ z_2=-7i$.	31. $z_1=\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{i}{3},\ z_2=8i$.	32. $z_1=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i,\ z_2=9i$.
33. $z_1=\frac{1}{3}+\frac{\sqrt{3}}{3}i,\ z_2=-10i$	34. $z_1=3\sqrt{3}-3i,\ z_2=\sqrt{2}i$.	35. $z_1=4-4\sqrt{3}i,\ z_2=3i$
36. $z_1=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i,\ z_2=2i$.	37. $z_1=\sqrt{3}-i,\ z_2=\sqrt{3}i$.	38. $z_1=-3+\sqrt{3}i,\ z_2=7i$

39. $z_1 = 2\sqrt{3} + 2i,\ z_2 = 8i$.	40. $z_1 = \dfrac{\sqrt{3}}{5} + \dfrac{i}{5},\ z_2 = -9i$.

В задачах **41-60** даны координаты вершин треугольника *ABC*. Составить уравнения сторон данного треугольника. Сделать чертеж.

41. $A(-2;-3); B(0;7); C(8;3)$.
42. $A(-4;-1); B(-2;9);\ C(6;5)$.
43. $A(-3;-2); B(-1;8); C(7;4)$.
44. $A-5;6); B(2;2); C(1;8)$.
45. $A(-4;-2); B(-2;8); C(-2;5)$.
46. $A(2;-5); B(4;5); C(12;1)$.
47. $A(3;0); B(5;10); C(13;6)$.
48. $A(0;3); B(2;13); C(10;9)$.
49. $A(-1;5); B(1;15); C(9;11)$.
50. $A(5;4); B(7;14); C(15;10)$
51. $A(1;2); B(3;12); C(11;8)$.
52. $A(4;1); B(6;11); C(14;7)$.
53. $A(0;3); B(1;0); C(-2;-3)$.
54. $A(7;0); B(-3;10); C(4;7)$.
55. $A(-3;-1); B(-1;-5);\ C(0;0)$.
56. $A(-5;-1); B(9;-6); C(-12;0)$.
57. $A(3;-7); B(-4;0); C(10;-7)$.
58. $A(1;-2); B(4;2); C(4;8)$.
59. $A(0;-1); B(3;3); C(4;1)$.
60. $A(1;-1); B(4;3); C(5;1)$.

В задачах **61-80** сила $\overline{F}$ приложена к точке A. Вычислить: а) работу силы $\overline{F}$ в случае, когда точка ее приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается из положения A в положение B; б) модуль момента силы $\overline{F}$ относительно точки B.

61. $\overline{F}=(5,-3,9)$, $A(3,4,-6)$, $B(2,6,5)$.	71. $\overline{F}=(4,7,-3)$, $A(5,-4,2)$, $B(8,5,-4)$.
62. $\overline{F}=(-3,1,-9)$, $A(6,-3,5)$, $B(9,5,-7)$.	72. $\overline{F}=(2,2,9)$, $A(4,2,-3)$, $B(2,4,0)$.
63. $\overline{F}=(2,19,-4)$, $A(5,3,4)$, $B(6,-4,-1)$.	73. $\overline{F}=(2,-3,4)$, $A(3,4,-2)$, $B(4,0,-1)$.
64. $\overline{F}=(-4,5,-7)$, $A(4,-2,3)$, $B(7,0,-3)$.	74. $\overline{F}=(-2,2,9)$, $A(-4,2,-3)$, $B(2,6,5)$.
65. $\overline{F}=(4,11,-6)$, $A(3,5,1)$, $B(4,-2,-3)$.	75. $\overline{F}=(5,-3,9)$, $A(3,0,-6)$, $B(-1,6,5)$.
66. $\overline{F}=(3,-5,7)$, $A(2,3,-5)$, $B(0,4,3)$.	76. $\overline{F}=(5,6,-7)$, $A(1,1,1)$, $B(2,-4,0)$.
67. $\overline{F}=(5,4,11)$, $A(6,1,-5)$, $B(4,2,-6)$.	77. $\overline{F}=(9,-4,3)$, $A(1,-6,3)$, $B(-4,2,3)$.
68. $\overline{F}=(-9,5,7)$, $A(1,6,-3)$, $B(4,-3,5)$.	78. $\overline{F}=(4,5,-3)$, $A(-5,-3,4)$, $B(-6,4,1)$.
69. $\overline{F}=(6,5,-7)$, $A(7,-6,4)$, $B(4,9,-6)$.	79. $\overline{F}=(3,-5,4)$, $A(-3,5,1)$, $B(5,6,-3)$.
70. $\overline{F}=(-5,4,4)$, $A(3,7,-5)$, $B(2,-4,1)$.	80. $\overline{F}=(4,-9,7)$, $A(4,-5,9)$, $B(2,6,5)$.

В задачах **81-100** вычислить пределы.

81. а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+2x-4}{2x^2+6x-3}$; б) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+7x+5}{2x^2-3x-14}$; в) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2+x-4}{2x^2+x-3}$; г) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{5x^2-13x+5}{4x^2+4x-2}$.	91. а) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{-5x^2+x}{2x^2+x-3}$; б) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3x^2+x-2}{x^2-6x+9}$; в) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3x^2+x-2}{x^2-2x-3}$; г) $\lim\limits_{z\to \infty}\dfrac{7z^2-z+5}{z^2-1}$.
82. а) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{-x^2-9x+7}{2x^2+3x-2}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{3x^2-3x-2}$; в) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2-10x+8}{2x^2-3x-2}$; г) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^3-x+4}{x^5-7x}$.	92. а) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{4x^2-3x+10}{2x^2-x-5}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{-3x^2+2{,}5x+7}{2x^2-3x+8}$; в) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x^2-3x-9}{3x^2-5x-12}$; г) $\lim\limits_{c\to \infty}\dfrac{8c^4-3c+1}{5c^2+4c^4-2}$.
83. а) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{4x^2-5x+4}{x^2-32}$; б) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2+7x+4}{x^2-3x-10}$; в) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-5x+4}{2x^2-32}$; г) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^{12}-6x^5+1}{8x^3-7x}$.	93. а) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{5x-2x^2+4}{2+2x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-3x^2+9}{12-2x^2-10}$; в) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3x-x^2+4}{2+2x^2-4}$; г) $\lim\limits_{a\to \infty}\dfrac{a^3-5a}{2a^2-7a^3-5}$.

84. а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-3x+10}{-5x^2+2x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+x-2}{-3x^2+2x+6}$; в) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{-2x^2+3x+2}{-3x^2+2x+8}$; г) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^4-6x^2+5}{2x-5x^2}$.	94. а) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{-7x^2+5x-6}{2x^2-x-9}$; б) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{-4x^2-5x-1}{2x^2-5x-3}$; в) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{-4x^2-5x-1}{2x^2-x-3}$; г) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{-5x^2-x^4+2}{x^4+x^3-1}$.
85. а) $\lim\limits_{m\to 2}\dfrac{-4m^2+3m+2}{3m+2m^2+5}$; б) $\lim\limits_{m\to -4}\dfrac{-m^2+m+20}{3-2m^2+5m}$; в) $\lim\limits_{m\to 2}\dfrac{-m^2+m+2}{-6-2m^2+5m}$; г) $\lim\limits_{m\to \infty}\dfrac{16m^4-m+1}{-7m-10m^2}$.	95. а) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3-7x^2+1}{2+8x^2-7}$; б) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{3x-4x^2+22}{2+5x^2-7x}$; в) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3x-4x^2+7}{2x+5x^2-3}$; г) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^3-8}{2x^3-3x+4}$.
86. а) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{-x^2-5x+3}{x^2+2x-10}$; б) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{-2x^2-5x+5}{-x^2+2x+3}$; в) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{-2x^2-5x+3}{x^2+2x-3}$; г) $\lim\limits_{y\to \infty}\dfrac{y^2-3y+4}{2y^3-y}$.	96. а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{-6x^2-5x+12}{x^2-4x-3}$; б) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{-5x^2-x+2}{2x^2+3x-2}$; в) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{-7x^2-5x+2}{2x^2-x-3}$; г) $\lim\limits_{m\to \infty}\dfrac{9-m^2}{9m^2-3m+1}$.
87. а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{-4x^2-3x+2}{3x^2+x-9}$;	97. а) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{-7x^2+5x+4}{5x-4x^2-8}$;

б) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{-x^2-x+12}{3x^2+5x-2}$; в) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{-5x^2+3x+2}{3x^2+4x-7}$; г) $\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{10+3t^2-2t}{-t^2-t}$.	б) $\lim\limits_{x\to-6}\dfrac{-7x^2-5x}{66-2x^2-x}$; в) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{-9x^2-5x+4}{5x+4x^2+1}$; г) $\lim\limits_{z\to\infty}\dfrac{z^5-4z+6}{z^2-5z-2}$.
88. а) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{5x-x^2+24}{3x^2+2x-21}$; б) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{5x-x^2+8}{-x^2+5x-6}$; в) $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{5x-x^2+24}{3x^2+2x-21}$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{6n^4+n^3-5}{-n^6+n-2}$.	98. а) $\lim\limits_{x\to-4}\dfrac{2x^2-x+7}{-x^2+3x-1}$; б) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2-2x+5}{-2x^2+5x+7}$; в) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{7x^2-12x+5}{-2x^2+3x-1}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^{12}-3x+5}{x^6-1}$.
89. а) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{-3x^2+5x-3}{7x^2-x-5}$; б) $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{-2x^2-7x+8}{x^2-4x-21}$; в) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{2x^2-5x-3}{x^2-4x-15}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{6n^4+n^3-5}{-n^6+n-2}$.	99. а) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-4x^2+x-10}{5x^2-3x-1}$; б) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{-x^2+5x-2}{2x^2-3x+1}$; в) $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{-x^2+7x-10}{x^2-3x+10}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-5x^2-x+4}{x^2-1}$.
90. а) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{-2x^2+4x-3}{-3x^2-x+2}$; б) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2+5x-3}{-7x^2-5x+2}$;	100. а) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{3x^2-4x+5}{2x^2-x+2}$; б) $\lim\limits_{x\to-4}\dfrac{-x^2+11x+10}{-x^2-6x-8}$;

в) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x^2+5x-33}{3x^2+5x-42}$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^6+n^3-1}{-n^3+5n-2}$.	в) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{3x^2+11x+10}{2x^2+5x+2}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-3x+5}{-4x^3-1}$.

В задачах **101-120** найти производную и дифференциал заданных функций.

101. а) $y=2x^5-\dfrac{4}{x^3}+\dfrac{1}{x}+3\sqrt{x}$; б) $y=\sqrt[4]{x^3}\cdot lnx$; в) $y=\dfrac{5x^2}{x-3}$; г) $y=sin2x-cos^2 3x$.	111. а) $y=\dfrac{3}{x}+\sqrt[5]{x^2}-4x^3+\dfrac{2}{x^4}$; б) $y=e^x\cdot tgx$; в) $y=\dfrac{2x+3}{2x+7}$; г) $y=tg^3\dfrac{x}{2}-ctg2x$.
102. а) $y=3x^4+\sqrt[3]{x^5}-\dfrac{2}{x}-\dfrac{4}{x^2}$; б) $y=4^x\cdot arcsinx$; в) $y=\dfrac{x^2-1}{2x^2+5}$; г) $y=ln\sqrt{1+x^2}$.	112. а) $y=7\sqrt{x}+\dfrac{4}{x}+3x^3-\dfrac{2}{x^5}$; б) $y=e^x\cdot ctgx$; в) $y=\dfrac{2x+x^2}{3-4x}$; г) $y=3^{arcsinx^2}$.
103. а) $y=3x^2+2\sqrt{x^3}-\dfrac{7}{x}-\dfrac{2}{x^5}$; б) $y=(\sqrt{x}+2)\cdot 6^x$; в) $y=\dfrac{e^x-2}{lnx}$; г) $y=ln(x^2+5x-3)$.	113. а) $y=7\sqrt[5]{x^2}+\dfrac{3}{x}+4x^3+\dfrac{6}{x^5}$; б) $y=x^2\cdot lnx$; в) $y=\dfrac{cosx}{3-sinx}$; г) $y=e^{cosx^2}$.

104. а) $y=7x-\sqrt[7]{x^4}+\frac{6}{x}+\frac{5}{x^2}$; б) $y=x^2\cdot 3^x$; в) $y=\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$; г) $y=lnctg\frac{x}{2}$.	114. а) $y=-\sqrt[3]{x^4}+\frac{5}{x}+5x^3-\frac{2}{x^3}$; б) $y=6^x\cdot arctgx$; в) $y=\frac{3cosx}{2x+1}$; г) $y=ln^3x$.
105. а) $y=5x^4+4\sqrt{x}+\frac{2}{x}-\frac{8}{x^2}$; б) $y=cosx\cdot arcctgx$; в) $y=\frac{tgx-1}{2x^2+5}$; г) $y=arccos\sqrt{x}$.	115. а) $y=\sqrt[3]{x^4}-\frac{2}{x}+5x^4-\frac{9}{x^3}$; б) $y=5^x\cdot(x^5-10x)$; в) $y=\frac{ctgx}{2\sqrt{x}-1}$; г) $y=e^{arcsin\sqrt{x}}$.
106. а) $y=7x^4+\sqrt[5]{x^2}-\frac{9}{x}-\frac{4}{x^5}$; б) $y=6^x\cdot(\sqrt{x}+2)$; в) $y=\frac{3sinx-2}{3^{x+2}+5}$; г) $y=lnsinx$.	116. а) $y=2x^7-4\sqrt{x^3}+\frac{3}{x}-\frac{8}{x^3}$; б) $y=3^x\cdot arccosx$; в) $y=\frac{tgx+6}{sinx}$; г) $y=arctg\sqrt{x^2-1}$.
107. а) $y=5x^2+\sqrt[3]{x^7}+\frac{4}{x}-\frac{4}{x^4}$; б) $y=7^x\cdot ctgx$; в) $y=\frac{cosx-1}{lnx+5}$; г) $y=tg^4 2x$.	117. а) $y=10x^2+3\sqrt{x^5}-\frac{4}{x}-\frac{5}{x^4}$; б) $y=5^x\cdot arcrct$; в) $y=\frac{cosx}{1+e^x}$; г) $y=ctg\frac{1}{x}$.
108. а) $y=3x^3+\sqrt{x^5}-\frac{3}{x}-\frac{4}{x^3}$;	118. а) $y=9x^3+\sqrt[3]{x^7}+\frac{5}{x}-\frac{7}{x^4}$;

б) $y=2\sqrt{x}\cdot sinx$; в) $y=\dfrac{9^x-1}{9^x+5}$; г) $y=arctgln3x$.	б) $y=\left(\sqrt[5]{x}-1\right)\cdot arcrct$; в) $y=\dfrac{4cosx}{tgx-2}$; г) $y=arcsin^3 4x$.
109. а) $y=3x^6+\sqrt{x^3}-\dfrac{3}{x}+\dfrac{10}{x^5}$; б) $y=e^x\cdot(x^2+\sqrt{x}-1)$; в) $y=\dfrac{7^x-3}{sinx}$; г) $y=cosx^2$.	119. а) $y=4x^6+\sqrt[3]{x^7}+\dfrac{3}{x}-\dfrac{4}{x^5}$; б) $y=2^x\cdot arcsinx$; в) $y=\dfrac{cosx+x^2}{e^x}$; г) $y=sinln\sqrt{x}$.
110. а) $y=8x^2+\sqrt[3]{x^4}-\dfrac{4}{x}-\dfrac{2}{x^3}$; б) $y=(3+2x)\cdot arcsinx$; в) $y=\dfrac{tgx-1}{sinx+3}$; г) $y=lnarctg\sqrt{x}$.	120. а) $y=4x^6+\sqrt[3]{x^7}+\dfrac{5}{x}-\dfrac{7}{x^4}$; б) $y=lnx\cdot ctgx$; в) $y=\dfrac{2+8^x}{cosx}$; г) $y=ln(1+sinx)$.

В задачах **121-140** найти неопределенные интегралы.

121. а) $\int\left(2x-\dfrac{5}{x}+\sqrt[3]{x^2}+\dfrac{4}{sin^2 6x}\right)dx$; б) $\int\dfrac{x^2dx}{3x^3+4}$; в) $\int x\cdot sinxdx$.	131. а) $\int\left(x^{10}-\dfrac{5}{\sqrt{4-x^2}}+sin\dfrac{x}{2}-\dfrac{1}{x^2+9}\right)dx$; б) $\int\dfrac{(3tg^2x+4)dx}{sin^2x}$; в) $\int(x+3)\cdot cos(5x-1)dx$.

122. а) $\int\left(4x^3+\frac{3}{x^4}-e^{2x}-\frac{5}{\sqrt{4-x^2}}\right)dx$; б) $\int\frac{arcsin^2 x dx}{\sqrt{1-x^2}}$; в) $\int x\cdot cosx dx$.	132. а) $\int\left(x^6-\frac{1}{2\sqrt{x^2-4}}+cos4x-\frac{1}{cos^2 2x}\right)dx$; б) $\int\frac{e^{arctgx}dx}{x^2+1}$; в) $\int(x+1)\cdot sin7x dx$.
123. а) $\int\left(x^7-\frac{5}{2x-4}+4^{-3x}-\frac{1}{cos^2 4x}\right)dx$; б) $\int\frac{e^{\sqrt{x}}dx}{\sqrt{x}}$; в) $\int(x-1)\cdot sin2x dx$.	133. а) $\int\left(8x^7-\frac{5}{4-7x}+\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{x^2-4}\right)dx$; б) $\int\frac{cosx dx}{sin^5 x}$; в) $\int 4x\cdot sin(2x+1)dx$.
124. а) $\int\left(2x^{-7}-\frac{6}{-4x}+5^{-3x}-\frac{10}{cos^2 6x}\right)dx$; б) $\int\frac{(1+ln^2 x)dx}{x}$; в) $\int(4x-1)\cdot cos5x dx$.	134. а) $\int\left(\frac{4}{\sqrt[3]{x^2}}-\frac{5}{5x-1}+\sqrt{4x}-\frac{1}{x^2+16}\right)dx$; б) $\int\frac{\sqrt{1+lnx}dx}{x}$; в) $\int(x-2)\cdot sin(5x+1)dx$.
125. а) $\int\left(x^{-2}-\frac{5}{\sqrt{x^2-4}}+5^{1-3x}-\frac{1}{7+4x}\right)dx$; б) $\int\frac{\sqrt[5]{(arctgx)^2}dx}{1+x^2}$; в) $\int(x+2)\cdot sin(4x-3)dx$.	135. а) $\int\left(9x^9-\frac{10}{-5x+1}+\frac{1}{x^5}-\frac{1}{16-x^2}\right)dx$; б) $\int\sqrt{sin^5 x}\cdot cosx dx$; в) $\int(4x+1)\cdot cos(2x-3)dx$.

126. а) $\int\left(\frac{1}{x^4}-\frac{6}{\sqrt{2x-4}}+sin2x-\frac{1}{\sqrt{9-x^2}}\right)dx$; б) $\int\frac{7dx}{x\cdot(2-lnx)^5}$; в) $\int(x+2)\cdot cos8xdx$.	136. а) $\int\left(x^6-\frac{5}{-9x+4}+cos2x-\frac{1}{\sqrt{25-x^2}}\right)dx$; б) $\int\frac{x^4dx}{3x^5+4}$; в) $\int-6x\cdot sin(2x+1)dx$.
127. а) $\int\left(\frac{4}{\sqrt[5]{x^8}}-5x^7-\frac{5}{x^2+4}+9^{-x}-\frac{1}{cos^2 4x}\right)dx$ б) $\int\frac{sinxdx}{cos^2x+16}$; в) $\int(x-3)\cdot sin6xdx$.	137. а) $\int\left(2x^8-\frac{5}{5-2x}+\frac{4}{\sqrt{4-x^2}}-\frac{1}{cos^2(4x)}\right)dx$; б) $\int\frac{x^3dx}{\sqrt{1+x^4}}$; в) $\int 5x\cdot cos(6x+1)dx$.
128. а) $\int\left(x^{-5}-\frac{5}{5x-3}+\sqrt{x}-\frac{1}{9x^2-4}\right)dx$; б) $\int\frac{5x^2dx}{\sqrt{3-x^3}}$; в) $\int(4x-9)\cdot cos7xdx$.	138. а) $\int\left(x^{-7}-\frac{1}{6-9x}+e^{2-3x}-\frac{1}{x^2+81}\right)dx$; б) $\int\frac{\sqrt{arccosx}dx}{\sqrt{1-x^2}}$; в) $\int 2x\cdot sin(7x+5)dx$.
129. а) $\int\left(\sqrt{x^7}-\frac{2}{2-8x}+e^{4-x}-\frac{1}{36x^2+25}\right)dx$ б) $\int\frac{sinxdx}{cos^2x-1}$; в) $\int(x+1)\cdot sin(5x+2)dx$.	139. а) $\int\left(3x^{10}-\frac{9}{2-9x}+e^{-x}-\frac{1}{16x^2-25}\right)dx$; б) $\int\frac{x^2dx}{\sqrt[5]{x^3+5}}$; в) $\int x\cdot cos(4x+9)dx$.

130. а) $\int\left(4x^{-6}-\frac{6}{1+6x}+\sqrt{4-x}-\frac{1}{9+4x^2}\right)dx$; б) $\int\frac{e^{1/x}dx}{x^2}$; в) $\int 4x\cdot cos3xdx$.	140. а) $\int\left(5x^{-6}-\frac{10}{2x+5}+6^{1+2x}-\frac{1}{25x^2-4}\right)dx$; б) $\int\frac{1-sinx}{cos^2x}dx$; в) $\int(x+1)\cdot sin5xdx$.

В задачах **141-160** вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной указанными линиями.

141. $y=x^2-4x+3,\ \ y=x-1.$
142. $y=x^2+2x,\ \ y=x+2.$
143. $y=x^2+4x+3,\ \ y=x+3.$
144. $y=x^2-6x+10,\ \ y=x.$
145. $y=x^2-2x-1,\ \ y=x-1.$
146. $y=x^2+6x+8,\ \ y=x+4.$
147. $y=x^2-6x+13,\ \ y=x+3.$
148. $y=x^2+8x+15,\ \ y=x+5.$
149. $y=x^2,\ \ y=x+2.$
150. $y=x^2-1,\ \ y=x+1.$
151. $y=3x^2+1,\ \ y=3x+7.$
152. $y=-x^2,\ \ y=x-2.$
153. $y=6x^2,\ \ y=-x+2.$
154. $y=-x^2-2x+3,\ \ y=-2x-1.$
155. $y=x^2-2x+4,\ \ y=2x.$
156. $y=x^2-x+3,\ \ y=x+6.$
157. $y=x^2,\ \ y=-x+6.$
158. $y=x^2+1,\ \ y=-x+7.$
159. $y=-x^2+2x,\ \ y=-x.$
160. $y=x^2-3x+1,\ \ y=x+6.$

В задачах **161-180** найти частные производные 2-го порядка функции 2-х переменных $z=f(x,y)$.

161. $z=x^2+3xy+y^2-x-4y+3.$

171. $z=-x^2+3xy-3y^2-6x+9y+2.$

162. $z = x^2 + xy + y^2 - 13x - 11y + 17$.

163. $z = -2x^2 + xy - y^2 + 7x - 7y - 10$.

164. $z = -x^2 + 3xy - 4y^2 + 4x - 6y + 5$.

165. $z = 5 - 2x^2 - 4xy - 3y^2 + 4x + 10y + 5$

166. $z = 3x^2 + 5xy + 3y^2 + 4x + 7y + 1$.

167. $z = x^2 + 2xy - y^2 - 2x + 2y + 3$.

168. $z = x^2 - xy + y^2 + 9x - 6y + 20$.

169. $z = 2x^3 - 2xy + y^2 + 4x^2 - 10$.

170. $z = x^3 + y^2 - 6xy - 39x + 18y + 3$

172. $z = -x^2 + 3xy - y^2 - 10x + 5y + 3$.

173. $z = x^2 + 3xy - 2y^2 + 2x + 3y + 1$.

174. $z = x^2 + xy + y^2 + 4x - y + 3$.

175.

$z = 2x^2 - 3xy + 2y^2 - 9x + 12y + 10$

176. $z = -x^2 - 4y^2 + 5x - 8y + 3$.

177. $z = 1 - 3x^2 - 5xy - 3y^2 - x - y$.

178. $z = x^2 - xy + 2y^2 + 3x + 2y + 1$.

179. $z = 4x^2y - x^3y - x^2y^2 - 6$.

180. $z = x^3 + xy^2 + 6xy - 2$

В задачах **181-200** разложить в ряд Фурье периодическую (с периодом $T = 2\pi$) функцию $f(x)$, заданную на отрезке $[-\pi; \pi]$.

181. $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \le x < 0, \\ x - 1, & 0 \le x \le \pi. \end{cases}$	182. $f(x) = \begin{cases} 2x - 1, & -\pi \le x \le 0, \\ 0, & 0 < x \le \pi. \end{cases}$
183. $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \le x < 0, \\ x + 2, & 0 \le x \le \pi. \end{cases}$	184. $f(x) = \begin{cases} -x + 1/2, & -\pi \le x \le 0, \\ 0, & 0 < x \le \pi. \end{cases}$
185. $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \le x < 0, \\ x/2 + 1, & 0 \le x \le \pi. \end{cases}$	186. $f(x) = \begin{cases} 2x + 3, & -\pi \le x < 0, \\ 0, & 0 < x \le \pi. \end{cases}$

187. $f(x)=\begin{cases}0, & -\pi\le x<0,\\ 3-x, & 0\le x\le\pi.\end{cases}$	188. $f(x)=\begin{cases}x-2, & -\pi\le x\le 0,\\ 0, & 0<x\le\pi.\end{cases}$
189. $f(x)=\begin{cases}0, & -\pi\le x<0,\\ 4x-3, & 0\le x\le\pi.\end{cases}$	190. $f(x)=\begin{cases}5-x, & -\pi\le x\le 0,\\ 0, & 0<x\le\pi.\end{cases}$
191. $f(x)=\begin{cases}0, & -\pi\le x<0,\\ 3x-1, & 0\le x\le\pi.\end{cases}$	192. $f(x)=\begin{cases}3-2x, & -\pi\le x\le 0,\\ 0, & 0<x\le\pi.\end{cases}$
193. $f(x)=\begin{cases}0, & -\pi\le x<0,\\ (\pi-x)/2, & 0\le x\le\pi.\end{cases}$	194. $f(x)=\begin{cases}5x+1, & -\pi\le x\le 0,\\ 0, & 0<x\le\pi.\end{cases}$
195. $f(x)=\begin{cases}0, & -\pi\le x<0,\\ 1-4x, & 0\le x\le\pi.\end{cases}$	196. $f(x)=\begin{cases}3x+2, & -\pi\le x\le 0,\\ 0, & 0<x\le\pi.\end{cases}$
197. $f(x)=\begin{cases}0, & -\pi\le x<0,\\ 4-2x, & 0\le x\le\pi.\end{cases}$	198. $f(x)=\begin{cases}x+\pi/2, & -\pi\le x\le 0,\\ 0, & 0<x\le\pi.\end{cases}$
199. $f(x)=\begin{cases}0, & -\pi\le x<0,\\ 6x-5, & 0\le x\le\pi.\end{cases}$	200. $f(x)=\begin{cases}7-3x, & -\pi\le x\le 0,\\ 0, & 0<x\le\pi.\end{cases}$

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Бородин А.Н. Элементарный курс теории вероятностей и математической статистики: учеб. пособие для вузов/ А. Н. Бородин. - 6-е изд., стер. - СПб.: Лань, 2006.

2. Воробьев Н.Н. Теория рядов/ Н.Н. Воробьев. - 6-е изд., стер. - СПб.: Лань, 2002.

3. Высшая математика для экономистов: учеб. для вузов/ Н.Ш. Кремер [и др.]; под ред. Н.Ш. Кремера . - 2-е изд., перераб. и доп. - М.: ЮНИТИ, 2003.

4. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика: Учеб. пособие для вузов/ В.Е. Гмурман. - 9-е изд., стер. - М.: Высш. шк., 2003.

5. Демидович Б.П. Краткий курс высшей математики: Учеб. пособие для вузов/ Б.П. Демидович, В.А. Кудрявцев. - М.: Астрель: АСТ, 2003.

6. Данко П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах: учеб. пособие для вузов: в 2 частях. - 6-е изд. - М.: ОНИКС 21 век : Мир и образование, 2005.

7. Курс высшей математики. Интегральное исчисление. Функции нескольких переменных. Дифференциальные уравнения: лекции и практикум : учеб. пособие для вузов / И. М. Петрушко [и др.]; под ред. И. М. Петрушко. - СПб.: Питер , 2006. -

8. Курс высшей математики. Кратные интегралы. Векторный анализ. Лекции и практикум : учеб. пособие для вузов/ И. М. Петрушко [и др.] ; под ред. И. М. Петрушко. - 2-е изд., испр. - СПб.: Лань, 2007.

9. Курс высшей математики. Теория вероятностей. Лекции и практикум: учеб. пособие для вузов/ И. М. Петрушко [и др.] ; под ред. И. М. Петрушко. - 2-е изд., испр.. - СПб.: Лань, 2007.

11. Мышкис А.Д. Математика для технических вузов. Специальные курсы/ А.Д. Мышкис. - 2-е изд. - СПб.: Лань, 2002.

12. Натансон, И.П. Краткий курс высшей математики: Учебник для вузов/ И.П. Натансон. - 6-е изд., стер. - СПб.: Лань, 2003.

13. Пантелеев А.В. Теория функций комплексного переменного и операционное исчисление в примерах и задачах: учеб. пособие для втузов: рек. Учеб.-метод. об-нием вузов/ А. В. Пантелеев, А. С. Якимова. - 2-е изд., стер. - М.: Высш. шк., 2007.

14. Пантелеев А.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения в примерах и задачах: Учеб. пособие для втузов/ А.В. Пантелеев; А.В. Пантелеев, А.С. Якимова, А.В. Босов. - М.: Высш. шк., 2001.

15. Практикум по высшей математике для экономистов: учеб. пособие для вузов/ Н.Ш. Кремер [и др.]; под ред. Н.Ш. Кремера. - М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2005.

16. Проскуряков И.В. Сборник задач по линейной алгебре : учеб. пособие для вузов/ И. В. Проскуряков. - 11-е изд., стер. - СПб.: Лань, 2008.

17. Шипачев В.С. Курс высшей математики: учеб. для вузов / В. С. Шипачев. - 8-е изд., стер. - М. : Высш. шк., 2006.

18. Шведов А.С. Теория вероятностей и математическая статистика/ А.С. Шведов. - 2-е изд., перераб. и доп. - М.: ГУ ВШЭ, 2005.

Учебно-методическое обеспечение кафедры Математики

19. Багдуев В.Н., Шумай Т.А., Голышева С.П. Ряды Фурье. Учебно-методическое пособие. – Иркутск: Изд-во ИрГСХА, 2007.

20. Большакова Н.М. Функции многих переменных. Учебно-методическое пособие.

21.Голышева С.П. Математика: учеб.-метод. пособие для студентов первых курсов биол. спец. : в 3 ч. - Иркутск : ИрГСХА, 2006.

22. Голышева С.П., Васильева С.Е. Математика. Неопределенный и определенный интегралы и их приложения. В 2-х ч. Учебно-методическое пособие. – Иркутск: Изд-во ИрГСХА, 2005.

23. Голышева С.П., Манухина Н.Д. Математика. Введение в математический анализ. Пределы. Учебно-методическое пособие. – Иркутск: Изд-во ИрГСХА, 2008.

24. Мартыненко А.И. Приложения производной функции одной переменной: учеб.-метод. указ. и индивидуальные задания/ А.И. Мартыненко, Т.А. Шумай; Иркут. гос. с.-х. акад. - Иркутск : ИрГСХА, 2000.

25. Шумай Т.А. Кратные и криволинейные интегралы. Учебно-методическое пособие. – Иркутск: Изд-во ИрГСХА, 2008.

26. Шумай Т.А., Мартыненко А.И. Теория вероятностей в примерах и задачах. Учебно-методическое пособие. – Иркутск: Изд-во ИрГСХА, 2008.

27. Овчинникова Н.И., Шумай Т.А. Дифференциальные уравнения. Учебно-методическое пособие. – Иркутск: Изд-во ИрГСХА, 2007.

Шумай Татьяна Анатольевна

Голышева Светлана Павловна

МАТЕМАТИКА (ОБЩИЙ КУРС)

Учебное пособие

Программа, методические указания и контрольные задания для студентов 1 курса заочной формы обучения направления бакалавриата 13.03.01 «Теплоэнергетика и теплотехника»

Часть 1

Компьютерный набор и верстка Голышевой С.П.

Редактор Тесля В.И.

Лицензия ЛР № 070444 от 11.03.98 г.
Подписано к печати
Формат 60×84. Печ. 6 п. л. Тираж 50 экз.

664038, Иркутская обл., Иркутский р-он, п. Молодежный

ФГОУ ВО Иркутский государственный аграрный университет им. А.А. Ежевского