Министерство сельского хозяйства РФ

ФГБОУ ВПО Иркутская государственная сельскохозяйственная академия

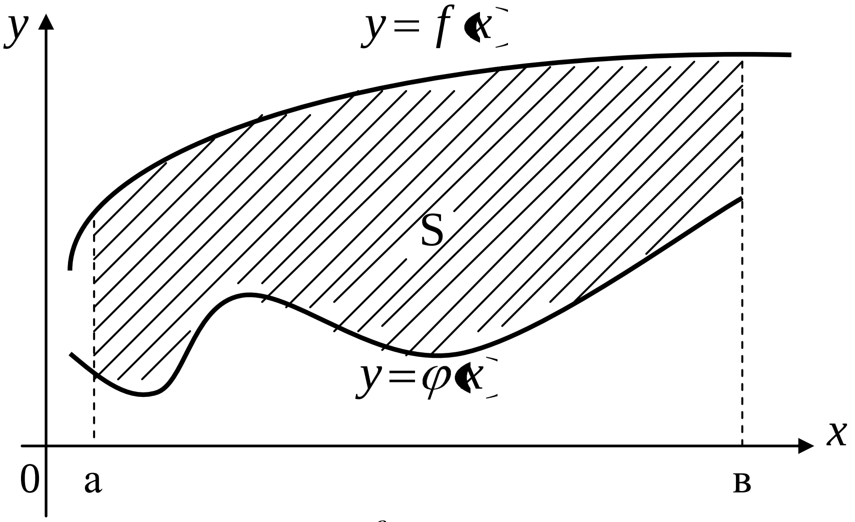
Кафедра Математики

С.П. Голышева

МАТЕМАТИКА

Определенный интеграл и его приложения в агроинженерных задачах

Учебно – методическое пособие



$$S_{фиг} = \int_a^в \left[f(x) - \varphi(x) \right] dx$$

Иркутск – 2012

УДК 517.38(075.8)
Г 638

Составитель: старший преподаватель Голышева С.П.

Определенный интеграл и его приложения в агроинженерных задачах. Учебно-методическое пособие. – Иркутск: Иркутская сельхозакадемия, 2012. – 139 с., ил.

Учебно – методическое пособие предназначено для студентов первых курсов очной формы обучения инженерно – технических специальностей Иркутской государственной сельскохозяйственной академии. Оно содержит необходимые краткие теоретические сведения, касающиеся понятия определенного интеграла и его приложений в задачах с сельскохозяйственным содержанием.

Подробным образом разобраны решения задач и составлены задания контрольных работ в целях формирования и развития навыков самостоятельной работы студентов.

Рецензенты:

Старший научный сотрудник ИДСТУ СО РАН, кандидат физико-математических наук М.А. Новиков.

Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа и методики преподавания математики Бурятского государственного университета В.В. Убодоев.

ВВЕДЕНИЕ

Знания, приобретаемые студентом в результате изучения математики, имеют важное значение в процессе его обучения в вузе. В настоящее время математические методы широко используются для решения самых разнообразных технических задач, применяются в экономике и планировании.

Данное пособие состоит из четырех основных разделов: 1) вычисление площадей плоских фигур, объемов тел, длины дуг; 2) приложение определенного интеграла к задачам механики, физики, техники (давление жидкости, работа переменной силы и т.д.; статические моменты, моменты инерции и центр тяжести); 3) несобственные интегралы; 4) приближенное вычисление определенных интегралов. Для проверки знаний студентов теоретического материала составлены контрольные вопросы. А также приведены решения типовых примеров и задания для самостоятельной работы студентов. В конце пособия предлагается перечень контрольных работ к каждой изученной теме, состоящих из 30 вариантов.

Для желающих расширить и углубить свои знания по теме «Определенный интеграл», предлагается серия задач, отнесенных к главам «Дополнительные задачи» и «Приложение определенного интеграла к задачам с сельскохозяйственным содержанием» данного пособия.

Раздел I. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

1.1. Задача, приводящая к понятию определенного интеграла. Задача о площади криволинейной трапеции

Определение 1. Криволинейной трапецией называется плоская фигура, ограниченная кривой $y = f(x)$, слева прямой $x = a$, справа прямой $x = в$ и снизу – осью Ox, (рис. 1).

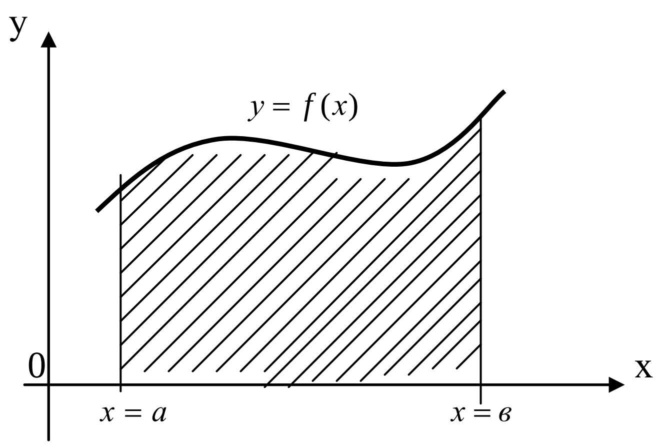


Рис.1 Криволинейная трапеция

Для определенности положим, что функция $y = f(x)$ определена и положительна на отрезке $[a; в]$. Пусть требуется вычислить площадь S указанной трапеции. Проделаем следующие операции:

1) Разобьем отрезок $[a; в]$ на n произвольных частей точками $x_0 = a,\ x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}, x_n = в$.

2) В точках деления проведем прямые, параллельные оси Oy до пересечения с кривой. В результате трапеция разобьется на n частей (полос), каждая из которых – криволинейная трапеция;

3) Найдем длину каждого основания криволинейной трапеции: $\Delta x_1 = x_1 - x_0$, $\Delta x_2 = x_2 - x_1$, $\Delta x_3 = x_3 - x_2, \ldots, \Delta x_n = x_n - x_{n-1}$.

4) На каждом из элементарных отрезков $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, где $i = \overline{1, n}$, выберем произвольно точку $\tilde{x}_i$ и определим значения функции в этих точках $f(\tilde{x}_i)$.

Если площадь каждой из полос заменить соответственно площадью прямоугольника со сторонами $f(\tilde{x}_i)$ и Δx_i, то сумма площадей всех n прямоугольников (ступенчатая фигура) (рис.2) даст приближенное значение площади S данной криволинейной трапеции.

5) Составим сумму вида:

$$f(\tilde{x}_1)\cdot\Delta x_1 + f(\tilde{x}_2)\cdot\Delta x_2 + f(\tilde{x}_3)\cdot\Delta x_3 + \ldots + f(\tilde{x}_i)\cdot\Delta x_i + \ldots + f(\tilde{x}_n)\cdot\Delta x_n =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} f(\tilde{x}_i)\cdot\Delta\tilde{x}_i.$$

или

$$S \approx \sum_{i=1}^{n} f\left(\tilde{x}_i\right)\cdot\Delta x_i. \qquad (1)$$

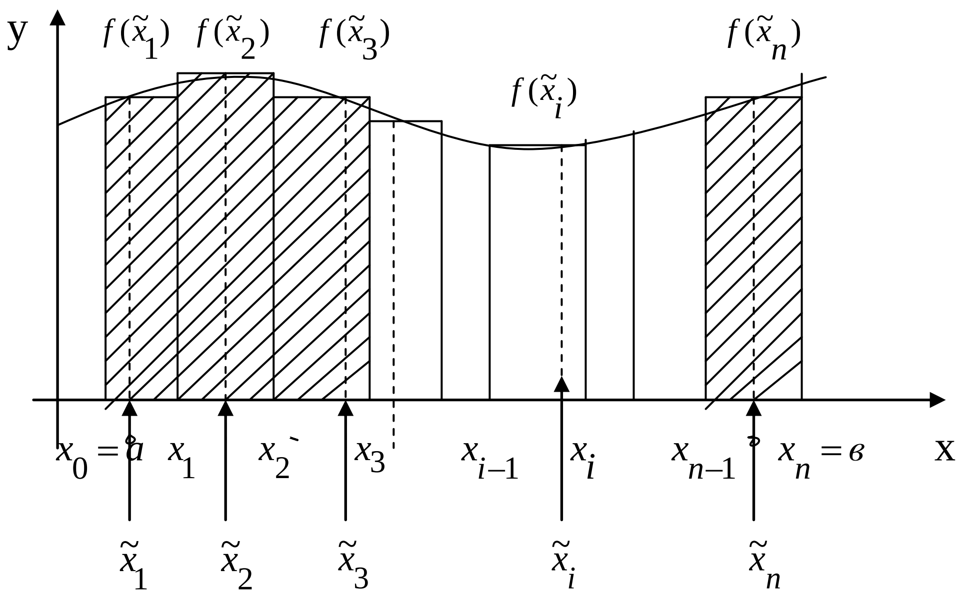


Рис. 2 Ступенчатая фигура

Сумма (1) называется *интегральной суммой Римана* для функции $f(x)$, составленной на отрезке $[a; в]$.

Очевидно, чем больше будет число n, тем точнее сумма (1) будет выражать площадь S. При этом отрезки Δx_i будут уменьшаться.

6) Обозначим через $max\Delta x_i$ наибольшую из длин отрезков Δx_i.

Тогда за величину площади криволинейной трапеции принимают предел, к которому стремится сумма (1) при условии, что $n \to \infty$ и $max\Delta x_i \to 0$.

Таким образом,

$$S \approx \lim_{max\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\tilde{x}_i)\Delta x_i . \tag{2}$$

Интегральная сумма (1) зависит от способа разбиения данного отрезка $[a; в]$ на элементарные отрезки и от выбора точек $\tilde{x}_i$ на каждом из полученных элементарных отрезков. Следовательно, для данной функции на данном отрезке можно составить бесчисленное множество интегральных сумм.

Определение 2. Если существует предел интегральной суммы (1) при $max\Delta x_i \to 0$, не зависящий ни от способа разбиения отрезка на части, ни от выбора в каждой части точки, то этот предел называется определенным интегралом от функции $f(x)$ на отрезке $[a; в]$ и обозначается $\int_a^в f(x)dx$.

Таким образом, по определению 2 имеем:

$$\int_a^в f(x)dx = \lim_{max\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f\left(\tilde{x}_i\right)\cdot \Delta x_i , \tag{3}$$

где a – нижний предел интегрирования;

$в$ – верхний предел интегрирования;

x – переменная интегрирования;

$f(x)$ – подынтегральная функция;

$f(x)dx$ – подынтегральное выражение.

Далее, возвращаясь к задаче о площади криволинейной трапеции и, применяя определение 2, заключаем, что

$$S_{фиг} = \int_a^в f(x)dx. \qquad (4)$$

Геометрический смысл определенного интеграла заключается в вычислении площади криволинейной трапеции.

Определение 3. Функция, для которой на отрезке существует определенный интеграл, называется интегрируемой на этом отрезке.

Приведем теоремы, устанавливающие необходимые и достаточные условия интегрируемости функции, [3].

Теорема 1 (*необходимое условие интегрируемости*). Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a; в]$, то она ограничена на этом отрезке.

Теорема 2. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; в]$, то она и интегрируема на нем.

Теорема 3. Если функция $f(x)$ монотонна на отрезке $[a; в]$, то она интегрируема на этом отрезке.

Теорема 4. Если функция ограничена на отрезке $[a; в]$ и непрерывна во всех точках $[a; в]$, кроме конечного числа точек, в которых она имеет разрыв первого рода, то она интегрируема на $[a; в]$.

Теоремы 2-4 устанавливают достаточные условия интегрируемости функции. примем их без доказательства, т.к. это выходит за рамки изучаемого курса.

Рассмотрим примеры.

Пример 1. Вычислить интеграл $\int_0^1 x^2 dx$ по определению 2.

Решение. Подынтегральная функция $f(x) = x^2$; $a = 0, в = 1$. Проделаем следующие операции:

1) Разделим отрезок $[0;1]$ на n равных частей точками $x_0=0,\ x_1=\frac{1}{n},\ x_2=\frac{2}{n},\ x_3=\frac{3}{n},\ldots,\ x_{n-1}=\frac{n-1}{n},\ x_n=\frac{n}{n}=1$. В результате разбиения получим элементарные отрезки $[x_0;\ x_1],\ [x_1;\ x_2],\ \ldots,\ [x_{n-1};\ x_n]$.

2) Обозначим длину каждого такого отрезка через $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$, где I = 1; 2; 3;…n. Длина каждого такого отрезка будет равна $\Delta x_i=\frac{в-а}{n}=\frac{1-0}{n}=\frac{1}{n}$.

3) Выберем на каждом таком отрезке Δx_i точку $\tilde{x}_i=x_i$, где I = 1 ; 2; 3;…n. Имеем:

$$\tilde{x}_1=x_1=\frac{1}{n},\ \tilde{x}_2=x_2=\frac{2}{n},\ \tilde{x}_3=x_3=\frac{3}{n},\ldots,\ \tilde{x}_{n-1}=x_{n-1}=\frac{n-1}{n},\ \tilde{x}_n=x_n=\frac{n}{n}=1.$$

4) Вычислим значение функции $f(x)=x^2$ в каждой выбранной точке:

$$f(\tilde{x}_1)=f(x_1)=\left(\frac{1}{n}\right)^2;\ f(\tilde{x}_2)=f(x_2)=\left(\frac{2}{n}\right)^2;\ f(\tilde{x}_3)=f(x_3)=\left(\frac{3}{n}\right)^2;\ldots\ f(\tilde{x}_n)=f(x_n)=1$$

5) Составим сумму вида:

$$f(\tilde{x}_1)\cdot\Delta x_1+f(\tilde{x}_2)\cdot\Delta x_2+f(\tilde{x}_3)\cdot\Delta x_3+\ldots+f(\tilde{x}_i)\cdot\Delta x_i+\ldots+f(\tilde{x}_n)\cdot\Delta x_n=$$

$$\left(\frac{1}{n}\right)^2\cdot\frac{1}{n}+\left(\frac{2}{n}\right)^2\cdot\frac{1}{n}+\left(\frac{3}{n}\right)^2\cdot\frac{1}{n}+\ldots+\left(\frac{n-1}{n}\right)^2\cdot\frac{1}{n}+1^2\cdot\frac{1}{n}=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^2\cdot\frac{1}{n}.$$

По определению

$$\int_0^1 x^2dx=\lim_{\substack{\frac{1}{n}\to 0\\ (n\to\infty)}}\left(\frac{1^2}{n^3}+\frac{2^2}{n^3}+\frac{3^2}{n^3}+\ldots+\frac{n^2}{n^3}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2}{n^3}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)}{6}=\frac{1}{3}.$$

Таким образом, $\int_0^1 x^2dx=\frac{1}{3}$.

1.3. Свойства определенного интеграла

1. При перестановке пределов интегрирования, где $a<в$ определенный интеграл меняет свой знак на противоположный, т.е.

$$\int_a^в f(x)dx=-\int_в^a f(x)dx.$$

Доказательство: Рассматривая определенный интеграл

$$\int_a^в f(x)dx=\lim_{max\Delta x_i\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\tilde{x}_i)\Delta x_i$$

(по определению 2) в направлении от *в* к *a,* получим, что в этом случае точки разбиения $\tilde{x}_i$ отрезка $[a;в]$ будут занумерованы в порядке следования от *в* к *a* и в интегральной сумме (3) все разности Δx_i будут отрицательными, что и доказывает свойство.

2. Если пределы интегрирования равны, то определенный интеграл равен нулю, т.е.

$$\int_a^a f(x)dx=0.$$

Доказательство: Исходя из геометрического смысла определенного интеграла,
заключаем, что основание криволинейной трапеции, в данном случае, имеет длину, равную нулю. Следовательно, и площадь ее равна нулю.

3. Постоянный множитель в определенном интеграле можно выносить за знак интеграла, т.е.

$$\int_a^{в} cf(x)dx = c\int_a^{в} f(x)dx$$, где $c - const$ (постоянная величина).

Доказательство: По определению 2 имеем:

$$\int_a^{в} c\cdot f(x)dx = \lim_{max\Delta x_i \to 0}\sum_{i=1}^{n} c\cdot f\left(\tilde{x}_i\right)\cdot \Delta x_i = c\cdot \lim_{max\Delta x_i \to 0}\sum_{i=1}^{n} f\left(\tilde{x}_i\right)\cdot \Delta x_i = c\cdot \int_a^{в} f(x)dx.$$

4. Определенный интеграл от алгебраической суммы конечного числа функций равен алгебраической сумме определенных интегралов от слагаемых функций, т.е.

$$\int_a^{в} \left[f(x) \pm \varphi(x)\right]dx = \int_a^{в} f(x)dx \pm \int_a^{в} \varphi(x)dx.$$

Доказательство: По определению 2:

$$\int_a^{в} \left[f(x) \pm \varphi(x)\right]dx = \lim_{max\Delta x_i \to 0}\sum_{i=1}^{n} \left[f\left(\tilde{x}_i\right) \pm \varphi\left(\tilde{x}_i\right)\right]\cdot \Delta x_i = \lim_{max\Delta x_i \to 0}\sum_{i=1}^{n} f\left(\tilde{x}_i\right)\cdot \Delta x_i \pm$$

$$\pm \lim_{max\Delta x_i \to 0}\sum_{i=1}^{n} \varphi\left(\tilde{x}_i\right)\cdot \Delta x_i = \int_a^{в} f(x)dx \pm \int_a^{в} \varphi(x)dx.$$

5. Если для функции существуют интегралы $\int_a^{в} f(x)dx$, $\int_a^{c} f(x)dx$ и $\int_c^{в} f(x)dx$, то имеет место равенство

$$\int_a^{в} f(x)dx = \int_a^{c} f(x)dx + \int_c^{в} f(x)dx.$$

Это равенство верно, когда выполняются неравенства $a<c<в$ или $a<в<c$, или $c<a<в$.

Доказательство: Пусть $a<c<в$. Поскольку определенный интеграл не зависит от способа разбиения отрезка $[a;в]$, то разобьем отрезок $[a;в]$ так, чтобы точка c была точкой разбиения. Если, например, $c=x_m$, то интегральную сумму (3) можно разбить на две суммы:

$$\sum_{i=1}^{n} f\left(\widetilde{x}_i\right)\cdot\Delta x_i=\sum_{i=1}^{m} f\left(\widetilde{x}_i\right)\cdot\Delta x_i+\sum_{i=m+1}^{n} f\left(\widetilde{x}_i\right)\cdot\Delta x_i.$$

Переходя в этом равенстве к пределу при $max\Delta x_i\to 0$, получаем доказываемое равенство.

Пусть теперь $a<в<c$; тогда по доказанному имеем

$$\int_a^c f(x)dx=\int_a^в f(x)dx+\int_в^c f(x)dx,$$

откуда, учитывая свойство 1, получаем

$$\int_a^в f(x)dx=\int_a^c f(x)dx-\int_в^c f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^в f(x)dx.$$

Таким образом, равенство данного свойства доказано. Аналогично доказывается при $c<a<в$.

6. Если на отрезке $[a;в]$, где $a<в$ функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ удовлетворяют условию $f(x)\le\varphi(x)$, то

$$\int_a^в f(x)dx \le \int_a^в \varphi(x)dx.$$

Доказательство: Рассмотрим разность

$$\int_a^в \varphi(x)dx - \int_a^в f(x)dx = \int_a^в [\varphi(x) - f(x)]dx = \lim_{max \Delta x_i \to 0} \left[\varphi(\tilde{x}_i) - f(\tilde{x}_i)\right] \cdot \Delta \tilde{x}_i.$$

Разность $\varphi(\tilde{x}_i) - f(\tilde{x}_i) \ge 0$, $\Delta \tilde{x}_i \ge 0$. Следовательно, каждое слагаемое суммы неотрицательно, неотрицательна вся сумма и ее предел, т.е.

$$\int_a^в [f(x)dx - \varphi(x)]dx \le 0 \Rightarrow \int_a^в f(x)dx \le \int_a^в \varphi(x)dx.$$

7. (Оценка интеграла). Если m – наименьшее значение, а M – наибольшее значение функции на отрезке $[a;в]$ и $a \le в$, то

$$m(в-a) \le \int_a^в f(x)dx \le M(в-a).$$

Доказательство: По условию

$$m \le f(x) \le M.$$

На основании свойства 6 имеем:

$$\int_a^в m dx \le \int_a^в f(x)dx \le \int_a^в M dx \Rightarrow m(в-a) \le \int_a^в f(x)dx \le M(в-a).$$

8. (Теорема о среднем). Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;в]$, то

$$\int\limits_a^в f(x)dx = f(\xi)(в-a), \text{ где } a<\xi<в.$$

Доказательство: Пусть для определенности $a<в$. Если m и M суть, соответственно наименьшее и наибольшее значения $f(x)$ на отрезке $[a;в]$, то в силу формулы свойства 7:

$$m \le \frac{1}{в-a}\int\limits_a^в f(x)dx \le M.$$

Отсюда $\frac{1}{в-a}\int\limits_a^в f(x)dx = \mu$, где $m\le\mu\le M$. Так как функция $f(x)$ непрерывна, то ее значения, вычисленные в точках из отрезка $[a;в]$, заключены между m и M. Следовательно, при некотором значении ξ ($a\le\xi\le в$) будет выполняться равенство $\mu = f(\xi)$. Таким образом, равенство доказано.

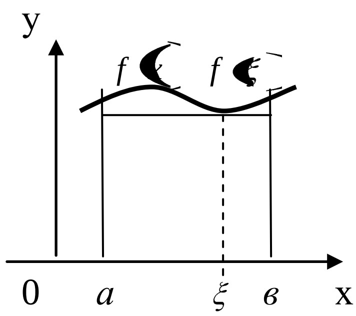


Рис. 3

Геометрический смысл этой теоремы состоит в том, что площадь криволинейной трапеции равна площади прямоугольника с основанием $в-a$ и высотой $f(\xi)$ (рис. 3).

9. Если ограниченная функция интегрируема на отрезке $[a;в]$, то абсолютная величина ее также интегрируема на этом отрезке, причем

$$\left|\int\limits_a^в f(x)dx\right| \le \int\limits_a^в |f(x)|dx.$$

Доказательство: Применяя оценку свойства 6 к очевидным неравенствам: $-|f(x)|\le f(x)\le |f(x)|$, получаем

$$-\int_a^в |f(x)|dx \le \int_a^в f(x)dx \le \int_a^в |f(x)|dx \Rightarrow \left|\int_a^в f(x)dx\right| \le \int_a^в |f(x)|dx.$$

С доказательствами свойств определенного интеграла можно ознакомиться, например, в [14].

Контрольные вопросы

1. Что называется интегральной суммой Римана функции $f(x)$ на отрезке $[a;в]$?
2. Сформулируйте определение определенного интеграла.
3. Какая функция называется интегрируемой на отрезке?
4. Сформулируйте достаточное условие интегрируемости функции.
5. В чем заключается геометрический смысл определенного интеграла?
6. Сформулируйте свойства определенного интеграла.
7. Назовите задачи, приводящие к понятию определенного интеграла.

Раздел II. МЕТОДЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ В ОПРЕДЕЛЕННОМ ИНТЕГРАЛЕ

2.1. Метод непосредственного вычисления определенного интеграла

Метод непосредственного вычисления определенного интеграла заключается в том, что интеграл вычисляется по формуле Ньютона – Лейбница, зная одну из первообразных функции $f(x)$.

Теорема 5. Если функция $y = f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a;в]$ и $F(x)$ ее первообразная также непрерывная на данном отрезке, то имеет место формула:

$$\int_a^в f(x)dx = F(x)\Big|_a^в = F(в) - F(a). \qquad (5)$$

Эта формула называется ***формулой Ньютона – Лейбница (или основной формулой интегрального исчисления)***.

Покажем на примере вычисление определенного интеграла, рассмотренного в **примере 1**, используя формулу (5).

Пример 2. Вычислить интеграл $\int_0^1 x^2 dx$.

Решение. Так как функция и ее первообразная непрерывны на отрезке $[0;1]$, то по формуле Ньютона – Лейбница: $\int_0^1 x^2 dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1 = \frac{1}{3}$.

Пример 3. Найти ошибку при вычислении интеграла $\int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^2}$.

Решение. $\int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^2} = -\left.\frac{1}{x-1}\right|_0^2 = -1-1=-2$.

Полученный результат вводит в сомнение, поскольку интеграл от всюду положительной функции $f(x)=\frac{1}{(x-1)^2}>0$ принимает отрицательное значение, что противоречит *свойству 7*.

В данном случае формулу Ньютона – Лейбница применять нельзя, так как подынтегральная функция $f(x)=\frac{1}{(x-1)^2}$ и ее первообразная $F(x)=-\frac{1}{x-1}$ разрывны на отрезке $[0;2]$ в точке $x=1$.

Пример 4. Вычислить интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{x^2+2x-8}$.

Решение. Здесь, так же, как и в неопределенном интеграле, в интегралах вида:

а) $\int\limits_a^в \frac{dx}{ax^2+вx+c}$; б) $\int\limits_a^в \frac{dx}{\sqrt{ax^2+вx+c}}$; в) $\int\limits_a^в \frac{(mx+n)dx}{ax^2+вx+c}$; г) $\int\limits_a^в \frac{(mx+n)dx}{\sqrt{ax^2+вx+c}}$

выделяют полный квадрат в знаменателе.

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^2+2x-8}=\int\limits_0^1 \frac{dx}{(x^2+2x+1)-1-8}=\int\limits_0^1 \frac{dx}{(x+1)^2-3^2}=\frac{1}{6}ln\left|\frac{x+1-3}{x+1+3}\right|\Bigg|_0^1=$$

$$=\frac{1}{6}\left(ln\left|-\frac{1}{5}\right|-ln\left|-\frac{1}{2}\right|\right)=\frac{1}{6}\left(ln\frac{1}{5}-ln\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{6}ln\frac{2}{5}.$$

Задание 1. Вычислить самостоятельно следующие интегралы:

1. $\int\limits_{-1}^{2}\left(2x^2+4x-3\right)dx$;

(Ответ: 3).

2. $\int\limits_{1}^{8}\frac{\sqrt[3]{x^4}-5x+2}{\sqrt[3]{x}}$;

(Ответ: -52,5).

3. $\int\limits_{2,5}^{4,5} 2e^{2x-5}dx$;

(Ответ: e^4-1).

4. $\int\limits_{5}^{10} 5^{-\frac{4}{5}x+6}dx$;

(Ответ: $\frac{31,2}{ln5}$).

5. $\int\limits_0^2 \frac{dx}{4x+1}$;

(Ответ: $\frac{ln9}{4}$).

6. $\int\limits_0^4 \frac{dx}{\sqrt{2x+1}}+\int\limits_1^7 \frac{3dx}{\sqrt[4]{2x+2}}$;

(Ответ: $2(9-\sqrt{8})$).

7. $\int\limits_{\pi/3}^{\pi/2} sin(3x-\pi)dx$;

(Ответ: $\frac{1}{3}$).

8. $\int\limits_0^{\pi/2} cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{3x}{2}\right)dx$;

(Ответ: $\frac{2+\sqrt{2}}{3}$).

9. $\int\limits_0^{\pi/4} \frac{dx}{cos^2\left(\frac{\pi}{4}-2x\right)}$;

(Ответ: 1).

10. $\int\limits_0^{\pi/8} \frac{dx}{sin^2\left(\frac{\pi}{3}+4x\right)}$;

(Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{3}$).

11. $\int\limits_0^8 \frac{dx}{4+\frac{x^2}{16}}$;

(Ответ: $\frac{\pi}{8}$).

12. $\int\limits_0^1 \frac{4dx}{\sqrt{5+4x^2}}$;

(Ответ: $ln5$).

2.2. Метод замены переменной (подстановки) в определенном интеграле

Если в данном интеграле $\int_a^в f(x)dx$ первообразную $F(x)$ функции $f(x)$ определить по таблице интегралов невозможно, то введение новой переменной позволяет свести данный интеграл к табличному.

Теорема 6. Если функция $x=\varphi(t)$ удовлетворяет следующим условиям:

1) $x=\varphi(t)$ – непрерывная и однозначная функция, заданная на отрезке $[\alpha;\beta]$ и имеющая в нем непрерывную производную $\varphi'(t)$;

2) значения функции $x=\varphi(t)$ при измененном t на отрезке $[\alpha;\beta]$ не выходят за пределы отрезка $[a;в]$;

3) $\varphi(\alpha)=a$; $\varphi(\beta)=в$, то для любой непрерывной на отрезке $[a;в]$ функции $f(x)$ справедлива ***формула замены переменной (***или ***подстановки)*** в определенном интеграле:

$$\int_a^в f(x)dx=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt. \tag{6}$$

Замечание 1. При вычислении определенных интегралов методом подстановки можно не возвращаться к первоначальной переменной x, как это требовалось при вычислении неопределенных интегралов, нужно только пересчитать новые границы интегрирования α и β.

Замечание 2. Часто вместо подстановки $x=\varphi(t)$ применяют обратную подстановку $t=\psi(x)$. В этом случае пределы для новой переменной t α и β определяются непосредственно по формулам $\alpha=\psi(a)$ и $\beta=\psi(в)$. Следует иметь в виду, что и в этом случае функция $x=\varphi(t)$ (которая получается из уравнения $t=\psi(x)$, если его решить относительно переменной x), должна удовлетворять всем указанным выше условиям, при соблюдении которых имеет место формула (6). Функция $x=\varphi(t)$ должна быть непрерывной однозначной от t в пределах интегрирования, и при непрерывном изменении x от *а* до *в* переменная *t* также должна непрерывно изменяться от α до β.

На практике замену переменной обычно производят с помощью монотонных непрерывно дифференцируемых функций.

Пример 5. Вычислить интеграл $\int\limits_3^8 \frac{xdx}{\sqrt{1+x}}$.

Решение. Применим подстановку $\sqrt{1+x}=t$, отсюда $1+x=t^2$ и $x=t^2-1$; $dx=2tdt$; определим границы интегрирования: при $x=3$ $\alpha=\sqrt{1+3}=2$ (нижний предел), при $x=8$ $\beta=\sqrt{1+8}=3$ (верхний предел). Функция $x=t^2-1$ удовлетворяет всем условиям теоремы, т.к.:

1) она однозначна и непрерывна на отрезке $[2;3]$ и имеет на этом отрезке непрерывную производную $\varphi'(t)=2t$;

2) значения функции $x=t^2-1$ при изменении переменной *t* от 2 до 3 не выходят за пределы отрезка $[3;8]$;

3) $\varphi(2)=3$ и $\varphi(3)=8$.

Следовательно, применяя формулу (6), получаем:

$$\int\limits_3^8 \frac{xdx}{\sqrt{1+x}} = \int\limits_2^3 \frac{(t^2-1)\cdot 2tdt}{t} = 2\int\limits_2^3 (t^2-1)dt = 2\left(\frac{t^3}{3}-t\right)\Bigg|_2^3 = 10\frac{2}{3}.$$

Пример 6. Вычислить интеграл $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{cosx\,dx}{6-5sinx+sin^2x}$.

Решение. Применим подстановку $sinx=t$; $cosx\,dx=dt$. Функция $x=arcsint$, определенная на $[0;1]$ при $x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ удовлетворяет всем условиям теоремы. Следовательно, по формуле (6) получим:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x\, dx}{6-5\sin x+\sin^2 x} = \int_0^1 \frac{dt}{6-5t+t^2} = \int_0^1 \frac{dt}{\left(t-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{1}{4}} = ln\left|\frac{t-3}{t-2}\right|\Bigg|_0^1 = ln\frac{4}{3}.$$

Пример 7. Допущена ли ошибка при вычислении интеграла $\int_{-2}^{4} x^2 dx$ в указанных ниже способах?

Решение. *1 способ*. По формуле Ньютона – Лейбница получим:

$$\int_{-2}^{4} x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Bigg|_{-2}^{4} = \frac{1}{3}(64+8) = 24.$$

Ответ: нет.

2 способ. Вычислим данный интеграл, применив подстановку $x^2 = t$; отсюда $x = \pm\sqrt{t} = \begin{cases} +\sqrt{t}, & при \;\; x \ge 0 \\ -\sqrt{t}, & при \;\; x < 0. \end{cases}$

Таким образом, отрезок $[-2;4] = [-2;0] + [0;4]$. В первом случае $dx = \frac{dt}{2\sqrt{t}}$ и, при $x=0$, $\alpha = 0^2 = 0$; при $x=4$, $\beta = 4^2 = 16$. Во втором случае $dx = -\frac{dt}{2\sqrt{t}}$ и при $x=-2$, $\alpha = 2^2 = 4$; при $x=0$, $\beta = 0$. Тогда искомый интеграл будет равен:

$$\int_{-2}^{4} x^2 dx = \int_{-2}^{0} x^2 dx + \int_{0}^{4} x^2 dx = -\int_{4}^{0} \frac{tdt}{2\sqrt{t}} + \int_{0}^{16} \frac{tdt}{2\sqrt{t}} = \int_{0}^{4} \frac{tdt}{2\sqrt{t}} + \int_{0}^{16} \frac{tdt}{2\sqrt{t}} =$$

$$= \frac{1}{3}\left[t^{3/2}\Big|_0^4 + t^{3/2}\Big|_0^{16}\right] = \frac{1}{3}\left[4^{3/2} + 16^{3/2}\right] = \frac{1}{3}(8+64) = 24.$$

Ответ: да, функция $x^2 = t$ неоднозначна на $[-2;4]$.

Пример 8. Вычислить интеграл $\int\limits_0^{ln2}\sqrt{e^x-1}\,dx$.

Решение. Положим $\sqrt{e^x-1}=t$, тогда $t^2=e^x-1;\ e^x=t^2+1;\ x=ln\left(t^2+1\right)$ – функция удовлетворяет условиям применимости формулы замены переменной (6). Определим для новой переменной t пределы интегрирования. При $x=0$, $\alpha=t_1=\sqrt{e^0-1}=0$. При $x=ln2$, $\beta=t_2=\sqrt{e^{ln2}-1}=\sqrt{2-1}=1;\ dx=\dfrac{2tdt}{t^2+1}$.

Итак,

$$\int\limits_0^{ln2}\sqrt{e^x-1}\,dx=\int\limits_0^1 t\cdot\frac{2t}{t^2+1}\,dt=2\int\limits_0^1\frac{t^2+1-1}{t^2+1}\,dt=2\left(t-arctgt\right)\Big|_0^1=2\left(1-arctg1\right)=2-\frac{\pi}{2}.$$

Задание 2. Вычислить самостоятельно следующие интегралы:

1. $\int\limits_0^{1/2}\dfrac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$; (Ответ: $\dfrac{2-\sqrt{3}}{2}$).

2. $\int\limits_3^5 e^{2x^2-5x+3}\cdot(4x-5)dx$; (Ответ: $e^6\left(e^{22}-1\right)$).

3. $\int\limits_0^4 x\cdot\sqrt{9+x^2}dx$; (Ответ: $32\dfrac{2}{3}$).

4. $\int\limits_0^2\sqrt{4-x^2}dx$; (Ответ: π).

5. $\int\limits_2^5\dfrac{dx}{(3x-2)\cdot ln^2(3x-2)}$; (Ответ: $\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{ln4}-\dfrac{1}{ln13}\right)$).

6. $\int\limits_0^4\dfrac{dx}{1+\sqrt{x}}$; (Ответ: $4-ln9$).

7. $\int\limits_1^4\dfrac{x\cdot dx}{\sqrt{2+4x}}$; (Ответ: $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$).

8. $\int\limits_0^2\dfrac{x^2dx}{\sqrt{16-x^2}}$; (Ответ: $\dfrac{4\pi}{3}-2\sqrt{3}$).

9. $\int\limits_0^{\ln 5}\dfrac{e^x\cdot\sqrt{e^x-1}}{e^x+3}dx$; (Ответ: $4-\pi$).

10. $\int\limits_{3}^{29} \frac{\sqrt[3]{(x-2)^2}}{\sqrt[3]{(x-2)^2}+3}dx$; 11. $\int\limits_{0}^{\pi/4} \frac{sec^2 x dx}{(1+tgx)^2}$; 12. $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/2} sinx \cdot cos^3 x dx$;

(Ответ: $8+\frac{3\sqrt{3}\pi}{2}$). (Ответ: $\frac{1}{2}$). (Ответ: $\frac{9}{64}$).

2.3. Метод интегрирования по частям в определенном интеграле

Если $u=u(x)$ и $v=v(x)$ непрерывные функции на отрезке $[a;в]$, имеющие непрерывные производные на этом отрезке, то имеет место ***формула интегрирования по частям*** в определенном интеграле:

$$\int\limits_{a}^{в} f(x)dx = \int\limits_{a}^{в} u \cdot dv = u \cdot v\Big|_{a}^{в} - \int\limits_{a}^{в} vdu . \qquad (7)$$

Как и в методе интегрирования по частям в неопределенном интеграле, в заданном интеграле $\int\limits_{a}^{в} u \cdot dv$ множитель, включающий dv, должен быть легко интегрируемым. Формулой (7) пользуются тогда, когда подынтегральная функция $f(x)$ представляет собой произведение разнохарактерных функций:

Тип 1: $f(x) = P_n(x) \cdot \{sinx, cosx, tgx, ctgx, e^x, a^x\}$, где $P_n(x)$ - многочлен n – ой степени, тогда $P_n(x)=u$; все остальное обозначают за dv.

Тип 2: $f(x) = P_n(x) \cdot \{arcsinx, arccosx, arctgx, arcctgx, lnx, log_a x\}$, тогда $P_n(x)dx = dv$; все остальное обозначают за u.

Тип 3: В интегралах $\int\limits_{a}^{в} e^x \cdot sinx\,dx$, $\int\limits_{a}^{в} e^x \cdot cosx\,dx$ за u обозначают любую из этих функций, например, $e^x = u$. Далее, дважды интегрируя по частям, приходят к исходному интегралу, и из полученного равенства, как из уравнения, выражают исходный интеграл.

Тип 4: В интегралах $\int\limits_{a}^{в} sin(lnx)dx$, $\int\limits_{a}^{в} cos(lnx)dx$ и т.п., сначала применяют подстановку $lnx = t$, в результате чего, приходят к интегралу **типа 3**.

Пример 9. Вычислить интеграл $\int\limits_{0}^{\pi/2} x \cdot sinx\,dx$.

Решение. Данный интеграл является интегралом **типа 1**, где $x = P_1(x)$– многочлен 1- ой степени. Поэтому по формуле (7) получим:

$$\int\limits_{0}^{\pi/2} x \cdot sinx\,dx = \left\{ \begin{matrix} x = u; & dx = du; \\ sinxdx = dv; & -cosx = v. \end{matrix} \right\} =$$

$$= \left(-x \cdot cosx \right) \Big|_{0}^{\pi/2} + \int\limits_{0}^{\pi/2} cosxdx = sinx \Big)\Big|_{0}^{\pi/2} = 1.$$

Пример 10. Вычислить интеграл $\int\limits_{0}^{1} arcsinx\,dx$.

Решение. Данный интеграл является интегралом **типа 2**. Поэтому

$$\int\limits_{0}^{1} arcsinx\,dx = \left\{ \begin{matrix} arcsinx = u; & \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = du; \\ dx = dv; & x = v. \end{matrix} \right\} =$$

$$= (x \cdot arcsinx)\Big|_{0}^{1} - \int\limits_{0}^{1} \frac{x \cdot dx}{\sqrt{1-x^2}} = 1 \cdot arcsin1 - 0 + \sqrt{1-x^2}\Big|_{0}^{1} = \frac{\pi}{2} - 1.$$

Пример 11. Вычислить интеграл $\int\limits_{0}^{\pi/2} e^x \cdot cosx\,dx$.

Решение. Данный интеграл является интегралом **типа 3**. Поэтому решение его будет заключаться в применении формулы интегрировании по частям дважды. Для удобства вычисления данного интеграла, находят сначала неопределенный интеграл от подынтегральной функции, затем применяют формулу Ньютона – Лейбница.

$$\int e^x \cdot cosx\,dx = \left\{ \begin{matrix} cosx = u; & -sinxdx = du; \\ e^x dx = dv; & e^x = v. \end{matrix} \right\} = e^x \cdot cosx + \int e^x \cdot sinxdx =$$

$$= \left\{ \begin{matrix} sinx = u; & cosxdx = du; \\ e^x dx = dv; & e^x = v. \end{matrix} \right\} = e^x \cdot (sinx + cosx) - \int e^x \cdot cosxdx.$$

Отсюда, как из уравнении, выразим интеграл $\int e^x \cdot cosx\,dx$ и получим:

$$\int e^x \cdot cosx\,dx = \frac{e^x (sinx + cosx)}{2} + C.$$

Тогда искомый интеграл будет равен:

$$\int e^x \cdot cosx\,dx = \frac{e^x (sinx + cosx)}{2} \Bigg|_0^{\pi/2} = \frac{e^{\pi/2} - 1}{2}.$$

Задание 3. Вычислить самостоятельно следующие интегралы:

1. $\int_0^1 x \cdot e^{-x} dx$; (Ответ: $1 - \frac{2}{e}$).

2. $\int_0^{1/2} arccos2x\,dx$; (Ответ: *не существует*).

3. $\int_0^{2\pi} x \cdot cosxdx$; (Ответ: 0).

4. $\int_0^1 x \cdot ln\left(x^2 + 1\right) dx$; (Ответ: $ln2 - 0{,}5$).

5. $\int_1^2 x \cdot lnx\,dx$; (Ответ: $ln4 - 0{,}75$).

6. $\int_1^4 e^{\sqrt{x}} dx$; (Ответ: $2e^2$).

7. $\int_1^4 arctg\sqrt{x}\,dx$; (Ответ:

8. $\int_0^{\pi} e^x \cdot sinx\,dx$;

9. $\int_{-1}^0 e^{-2x} \cdot (2x + 3)\,dx$;

$5arctg2-\frac{\pi+2}{2}$).

(Ответ: $\frac{1+e^{\pi}}{2}$).

(Ответ: e^2-2).

10. $\int\limits_0^{\pi/2} x^2\cdot cos2xdx$.

(Ответ: $-\frac{\pi}{4}$).

11. $\int\limits_0^1 (5x+1)\cdot ln(5x+1)\,dx$

(Ответ: $3,6ln6-1,75$).

12. $\int\limits_0^{\pi} x\cdot cos\frac{x}{2}dx$

(Ответ: $2\pi-4$).

Раздел III. Интегрирование четных и нечетных функций на отрезке, симметричном относительно начала координат

1. Если функция $f(x)$ четная на отрезке $[-a;a]$, то

$$\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx=2\int\limits_0^a f(x)dx. \qquad (8)$$

2. Если функция $f(x)$ нечетная на отрезке $[-a;a]$, то

$$\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx=0. \qquad (9)$$

Формулы (8) и (9) легко доказываются на основании геометрического смысла определенного интеграла.

Доказательство: Пусть для определенности $f(x)\geq 0$. Тогда площадь фигуры на $[-a;a]$ (рис. 5) будет равна сумме площадей на $[-a;0]$ и $[0;a]$. Поскольку площади на этих участках равны (по условию $f(x)$ – четная), то тем самым докажем формулу (8).

Аналогично рассуждая и учитывая, что площади фигур на отрезках $[-a;0]$ и $[0;a]$ равны по абсолютной величине, и что на $[-a;0]$ интеграл $\int\limits_{-a}^{0} f(x)dx\leq 0$ (по свойству 7 определенного интеграла), то получим (9).

Эти формулы часто используют при вычислении определенных интегралов, площадей плоских фигур, поверхностей вращения, объемов тел.

Пример 12. Вычислить интеграл $\int\limits_{-1}^{1}(sinx+5x^4+3x\cdot e^{x^2})dx$.

Решение. Данный интеграл представим в виде суммы 3-х интегралов. Далее, учитывая, что подынтегральные функции $sinx$ и $3x\cdot e^{x^2}$ – нечетные, а функция $5x^4$ – четная, по формулам (8) и (9) получаем:

$$\int\limits_{-1}^{1}(sinx+5x^4+3x\cdot e^{x^2})dx=\int\limits_{-1}^{1}sinxdx+\int\limits_{-1}^{1}5x^4dx+\int\limits_{-1}^{1}3x\cdot e^{x^2}dx=2x^5\Big|_0^1=2.$$

Пример 13. Вычислить интеграл $\int\limits_{-\pi}^{\pi}(sin^3x-x\cdot cosx+3)dx$.

Решение. Данный интеграл представим в виде суммы 3-х интегралов. Далее, учитывая, что подынтегральные функции sin^3x и $x\cdot cosx$ – нечетные, а функция 3 – четная, по формулам (8) и (9) получаем:

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}(sin^3x-x\cdot cosx+3)dx=\int\limits_{-\pi}^{\pi}sin^3xdx-\int\limits_{-\pi}^{\pi}x\cdot cosxdx+\int\limits_{-\pi}^{\pi}3dx=6x\Big|_0^{\pi}=6\pi.$$

Контрольные вопросы

1. Запишите формулу Ньютона – Лейбница.
2. Укажите, при каких условиях применима формула Ньютона – Лейбница.
3. В чем состоит метод непосредственного интегрирования в определенном интеграле?
4. В чем состоит метод подстановки в определенном интеграле?

5. Найдя новые границы интегрирования, следует ли переходить к первоначальной переменной интегрирования и данным пределам интегрирования?
6. Сформулируйте условия, при которых применима формула метода подстановки в определенном интеграле.
7. Запишите формулу интегрирования по частям в определенном интеграле. В каком случае применима эта формула?
8. Чему равен интеграл от четной функции, заданной на отрезке $[-a;a]$.
9. Чему равен интеграл от нечетной функции, заданной на отрезке $[-a;a]$.
10. Чему равен интеграл: а) $\int\limits_{-4}^{4} x^3 dx$; б) $\int\limits_{-\pi}^{\pi} x^4 sinx dx$; в) $\int\limits_{-\pi}^{\pi} x^2 cosx dx$.

Раздел IV. ПРИЛОЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА К ЗАДАЧАМ ГЕОМЕТРИИ

4.1. Вычисление площадей плоских фигур

Геометрически определенный интеграл представляет собой площадь криволинейной трапеции.

1. Если функция $y = f(x) \geq 0$ на отрезке $[a;в]$ (рис.1), то площадь фигуры вычисляется по формуле (4).

2. Если функция $y = f(x) \leq 0$ на отрезке $[a;в]$ (рис. 4), то площадь фигуры вычисляется по формуле:

$$S_{фиг} = -\int\limits_{a}^{в} f(x)dx. \tag{10}$$

3. Если функция $y = f(x)$ четная на отрезке $[-a;a]$ (рис. 5), то площадь фигуры, ограниченной данной кривой, прямыми $x = \pm a$, вычисляется по формуле:

$$S_{фиг} = \left|\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx\right| = 2\left|\int\limits_{0}^{a} f(x)dx\right|. \tag{11}$$

Если функция $y=f(x)$ нечетная на $[-a;a]$ (рис. 6), то $S_{фиг}=0$ (формула (9)).

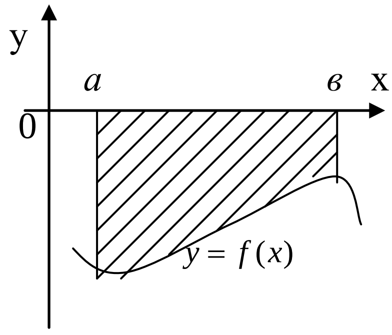


Рис. 4 Функция $f(x)<0$

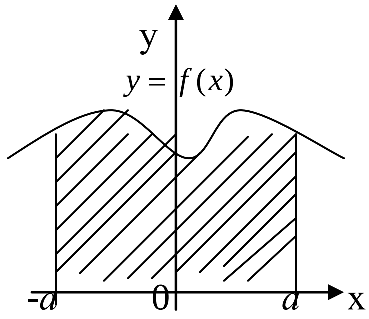


Рис. 5 Четная функция

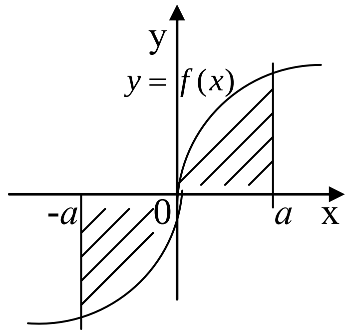


Рис. 6 Нечетная функция

4. Если фигура ограничена двумя кривыми $y=f(x)$, $y=\varphi(x)$ и прямыми $x=a$, $x=в$, причем $f(x)\geq\varphi(x)$ на отрезке $[a;в]$ (рис. 7), то ее площадь вычисляется по формуле:

$$S_{фиг}=\int_a^в [f(x)-\varphi(x)]dx. \tag{12}$$

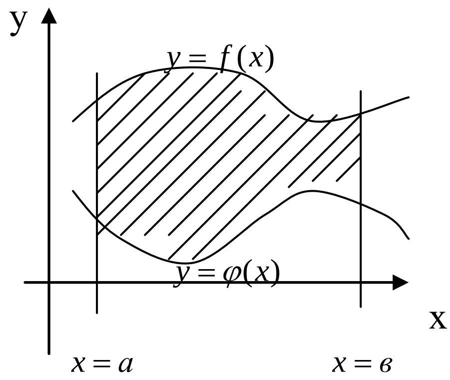


Рис. 7

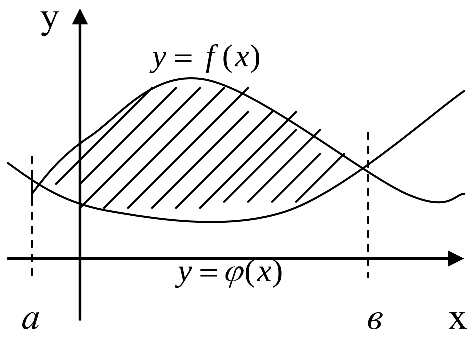


Рис. 8

5. Если левая граница (или правая граница) есть точка пересечения кривых $y=f(x)$ и $y=\varphi(x)$ (рис. 8), то в этом случае, площадь фигуры вычисляется также по формуле (12).

Чтобы найти точки пересечения кривых $y=f(x)$ и $y=\varphi(x)$, нужно решить уравнение: $f(x)=\varphi(x)$. Корни данного уравнения определят абсциссы точек пересечения этих кривых.

В зависимости от того, в каких координатах задана ограничивающая кривая, площадь фигуры находится по определенным формулам. Например:

а) если фигура ограничена кривой $y=f(x)$, заданной в декартовых координатах, то площадь ее вычисляется по формуле (4);

б) если фигура ограничена кривой, заданной параметрическими уравнениями $x=x(t)$, $y=y(t)$, то площадь ее вычисляется по формуле:

$$S_{фиг}=\int_{\alpha}^{\beta} y(t)\cdot x'(t)dt, \tag{13}$$

где α и β – значения параметра t, соответствующие значениям $x=a$ и $x=в$, т.е. $x(\alpha)=a$, $x(\beta)=в$ ($y=y(t)\geq 0$ на отрезке $[\alpha;\beta]$).

в) Если фигура ограничена кривой, заданной в полярных координатах $\rho=\rho(\varphi)$, то площадь сектора *AOB* (рис. 9), ограниченного дугой кривой и двумя полярными радиусами *OA* и *OB*, соответствующие значениям φ_1 и φ_2, вычисляется по формуле:

$$S_{фиг}=\frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho^2(\varphi)d\varphi. \tag{14}$$

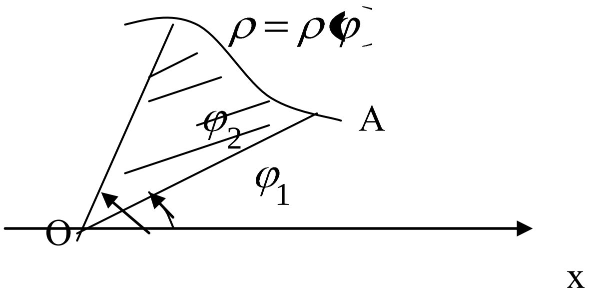


Рис. 9 Фигура, ограниченная полярной кривой

Пример 14. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривой $y=\sqrt{x}$, прямыми $x=1$, $x=4$ и осью O*x* (рис. 10).

Решение. Так как $y=\sqrt{x}\geq 0$ на отрезке $[1;4]$, то по формуле (4):

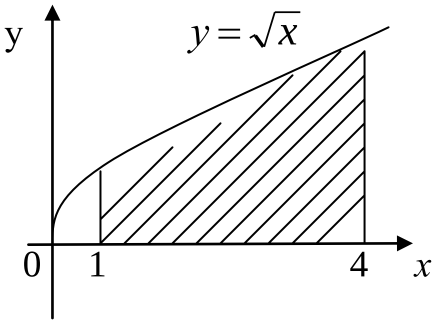


Рис. 10 Кривая $y=\sqrt{x}$

$$S_{фиг}=\int_1^4 \sqrt{x}dx=\frac{2}{3}x^{3/2}\Big|_1^4=$$

$$=\frac{2}{3}\left[\left(\sqrt{4}\right)^3-1\right]=\frac{2}{3}(8-1)=4\frac{2}{3}(ед^2.).$$

Пример 15. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой $y=-\frac{x^2}{2}+2x+6$ и прямой $y=x+2$ (рис. 11).

Решение. Найдем точки пересечения прямой и параболы, решив квадратное уравнение: $-\frac{x^2}{2}+2x+6=x+2$, корни которого $x=-2$ и $x=4$.Следовательно, по формуле (12) искомая площадь фигуры будет равна:

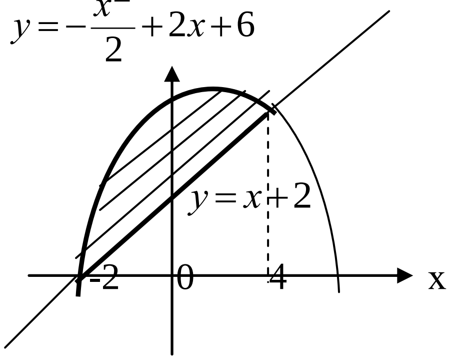


Рис. 11 Фигура, ограниченная параболой $y=-\frac{x^2}{2}+2x+6$ и прямой $y=x+2$

$$S_{фиг}=\int_{-2}^{4}\left(2x-\frac{x^2}{2}+6-x-2\right)dx=$$

$$=\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}+4x\right)\Bigg|_{-2}^{4}=8-\frac{64}{6}+16-2-$$

$$-\frac{8}{6}+8=30-12=18(ед.^2)$$

Пример 16. Вычислить площадь фигуры, ограниченной $y=|sinx|$ на отрезке $[0;2\pi]$.

Решение. Так как $sinx\geq 0$ на отрезке $[0;\pi]$ и фигура состоит из двух одинаковых фигур на $[0;2\pi]$ (рис.12), то площадь ее будет равна:

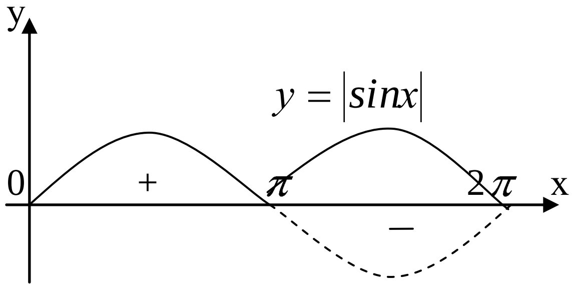


Рис. 12 График функции $y=|sinx|$

$$S_{фиг}=\int_0^{\pi} sinxdx+\int_{\pi}^{2\pi} sinxdx=$$

$$=2\int_0^{\pi}|sinx|dx=2\int_0^{\pi} sinxdx=-2cosx\,\Big|_0^{\pi}=$$

$$=-2(cos\pi-cos0)=-2(-1-1)=4(ед.^2)$$

Пример 17. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривой $y=x^2+2$, прямыми $y=1$, $x=-2$ и $x=2$ (рис.13).

Решение. Фигура симметрична относительно оси Оу, поэтому воспользовавшись формулами (11) и (12) и учитывая, что функция

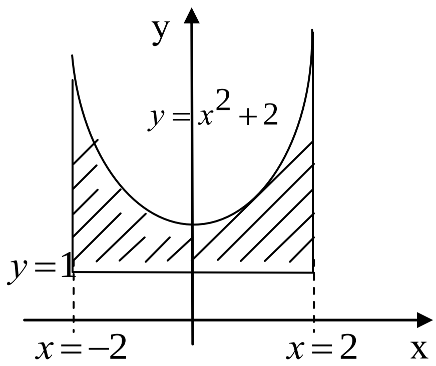


Рис.13 Фигура, ограниченная параболой $y=x^2+2$ и прямой $y=1$

$f(x)-\varphi(x)=x^2+2-1=x^2+1\geq 0$, площадь фигуры будет равна:

$$S_{фиг}=\left|\int_{-2}^{2}(x^2+2-1)dx\right|=2\int_0^2(x^2+1)dx=$$

$$=2\left(\frac{x^3}{3}+x\right)\Bigg|_0^2=2\left(\frac{8}{3}+2\right)=2\cdot\frac{14}{3}=9\frac{1}{3}(ед.^2).$$

Пример 18. Вычислить площадь фигуры, ограниченной одной аркой циклоиды $x=a(t-sint)$, $y=a(1-cost)$ и осью Ох (рис.14).

Решение. Найдем пределы интегрирования α и β из соотношений $x(\alpha)=a$; $x(\beta)=в$. Здесь $a=0$ – абсцисса точки О, $в=2\pi a$. Значит $a(\alpha-sin\alpha)=0$, $a(\beta-sin\beta)=2\pi a$. Отсюда $a=sin\alpha$, $\beta-2\pi=sin\beta$. Из первого уравнения получаем $\alpha=0$, а из второго $\beta=2\pi$. Поэтому искомая площадь фигуры, ограниченной кривой, заданной в параметрической форме, по формуле (13), будет равна:

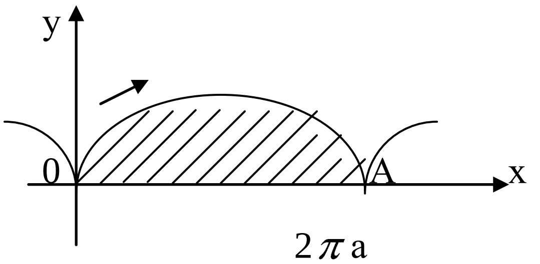


Рис. 14 Циклоида

$$S_{фиг}=\int_0^{2\pi}a(1-cost)\cdot a(1-cost)dt=$$

$$=a^2\int_0^{2\pi}\left[1-2cost+\frac{1}{2}(1+cos2t)\right]dt=$$

$$a^2\left[t-2sint+\frac{1}{2}(t+\frac{1}{2}sin2t)\right]\Bigg|_0^{2\pi}=$$

$$=a^2\left[2\pi-2sin2\pi+\frac{1}{2}(2\pi+\frac{1}{2}sin4\pi)-0\right]=a^2(2\pi+\pi)=3\pi a^2(ед.^2).$$

Пример 19. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривой $y=x^3$, прямыми $x=-1$ и $x=1$ (рис.15).

Решение. Так как функция $y=x^3$ нечетная на отрезке $[-1;1]$, то по формуле (9) искомая площадь фигуры будет равна нулю.

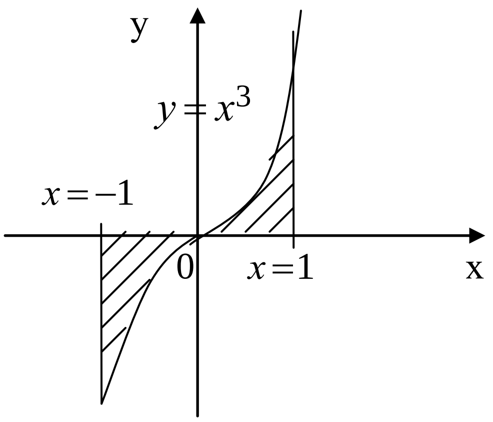


Рис.15 Кривая $y=x^3$

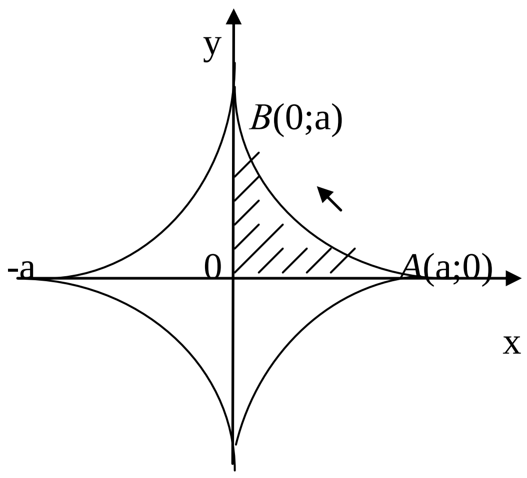


Рис. 16 Астроида

Пример 20. Вычислить площадь фигуры, ограниченной астроидой $x=acos^3t$, $y=asin^3t$ (рис. 16).

Решение. Пусть движение по астроиде совершается в положительном направлении из $A(a;0)$ в $B(0;a)$). Так как астроида – фигура, симметричная относительно осей Ox, Oy и начала координат, то достаточно найти площадь одной ее четверти, и результат умножить на 4. Определим пределы интегрирования. Здесь $a = a$ – абсцисса точки A, $в = 0$ – абсцисса точки B.

x	t
a	$\alpha = \frac{\pi}{2}$
0	$\beta = 0$

Найдем $x'(t)dt$: $x'(t)dt = -3acos^2 t \cdot sintdt$.

Итак,

$$S_{фиг} = 4\int_{\pi/2}^{0} asin^3 t \cdot (3a\cos^2 t \cdot sint)dt = 12a^2 \int_0^{\pi/2} sin^4 tcos^2 tdt =$$

$$= 12a^2 \int_0^{\pi/2} \left(\frac{1-cos2t}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1+cos2t}{2}\right)dt = \frac{3}{2}a^2 \int_0^{\pi/2} (1 - cos2t - cos^2 2t + cos^3 2t)dt.$$

Подынтегральную функцию разобьем на две функции и интегралы от каждой из них вычислим отдельно.

$$S_{фиг} = \frac{3}{2}a^2 \left[\underbrace{\int_0^{\pi/2} (1 - cos2t - \frac{1}{2}(1 + cos4t))dt}_{I_1} + \underbrace{\int_0^{\pi/2} cos^2 2t \cdot cos2tdt}_{I_2} \right].$$

$$I_1 = \int_0^{\pi/2} (1 - cos2t - \frac{1}{2}(1 + cos4t))dt = \left[t - \frac{1}{2}sin2t - \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{4}sin4t\right)\right]\Bigg|_0^{\pi/2} =$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}sin\pi - \frac{\pi}{4} - \frac{1}{8}sin2\pi = \frac{\pi}{4}.$$

$$I_2 = \int_0^{\pi/2} cos^2 2t \cdot cos2tdt = \int_0^{\pi/2} (1 - sin^2 2t) \cdot cos2tdt = \left\{ \begin{array}{c} sin2t = u; \\ 2cos2tdt = du; \\ cos2tdt = du/2; \\ при\ \ t = 0 \quad u_1 = 0; \\ при\ \ t = \pi/2\ \ u_2 = 0. \end{array} \right\} =$$

$$= \int\limits_0^0 \frac{(1-u^2)}{2} du = 0$$ (по свойству 2).

Таким образом, $S_{фиг} = \frac{3\pi}{8} a^2 (ед^2.)$.

Пример 21. Найти площадь фигуры, ограниченной эллипсом $x = acost$ $y = вsint$ (рис. 17).

Решение. При таком задании эллипса фигура его будет симметричной относительно осей координат, поэтому достаточно найти площадь ее части, расположенной в I – ой четверти и результат умножить на 4.

Найдем пределы интегрирования α и β:

x	t
a	$\alpha = \frac{\pi}{2}$
0	$\beta = 0$

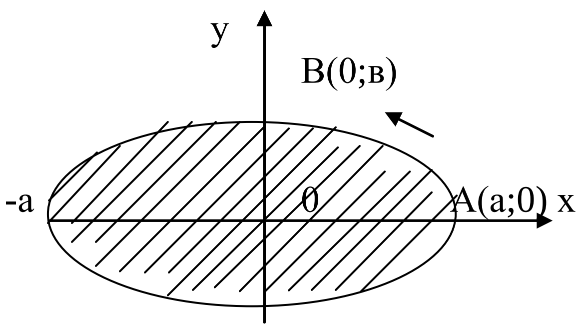


Рис. 17 Эллипс

Тогда искомая площадь фигуры будет равна

$$S_{фиг} = 4\int\limits_{\pi/2}^{0} вsint(-asint)dt =$$

$$= 4ав\int\limits_0^{\pi/2} sin^2 tdt = 4ав\int\limits_0^{\pi/2} \frac{1-cos2t}{2} dt =$$

$$= 2ав(t - \frac{sin2t}{2})\Big|_0^{\pi/2} = 2ав(\frac{\pi}{2} - \frac{sin\pi}{2}) = \pi ав.$$

Пример 22. Найти площадь фигуры, ограниченной кардиоидой $x = acost(1+cost)$, $y = asint(1+cost)$ (рис. 18).

Решение. Кардиоида – фигура, симметричная относительно оси Ох, поэтому достаточно найти площадь верхней ее части, и результат умножить на 2. Найдем пределы интегрирования α и β, положив $x(\alpha)=0;\ x(\beta)=2a$, т.е. $a\cos\alpha(1+\cos\alpha)=0,\ a\cos\beta(1+\cos\beta)=2a$.

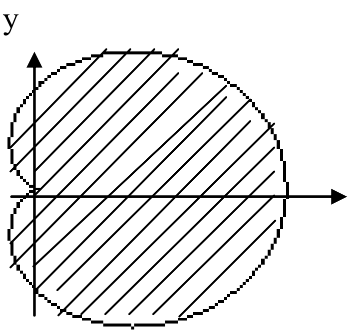


Рис. 18 Кардиоида

Решив первое уравнение, получим $\alpha=\dfrac{\pi}{2}$ и $\alpha=\pi$. Решив второе уравнение, получим $\beta=0$. Следовательно, пределами интегрирования будут $\alpha=\pi$ и $\beta=0$. Тогда искомая площадь фигуры будет равна:

$$S_{фиг}=2\int_{\pi}^{0} a\sin t(1+\cos t)\cdot\left(-a\sin t(1+2\cos t)\right)dt=$$

$$=2a^2\int_{0}^{\pi}\left(\sin^2 t+3\sin^2 t\cos t+2\sin^2 t\cos^2 t\right)dt.$$

Разобьем подынтегральную функцию на 3 функции, интеграл от каждой из них вычислим отдельно. Получим:

$$S_{фиг}=2a^2\left[\int_0^{\pi}\sin^2 t\,dt+3\int_0^{\pi}\sin^2 t\cdot\cos t\,dt+\int_0^{\pi}2\sin^2 t\cdot\cos^2 t\,dt\right].$$

Пусть

$$I_1=\int_0^{\pi}\sin^2 t\,dt=\int_0^{\pi}\frac{1-\cos 2t}{2}dt=\frac{1}{2}\left[t-\frac{1}{2}\sin 2t\right]\Bigg|_0^{\pi}=\frac{1}{2}\left(\pi-\frac{1}{2}\sin 2\pi\right)=\frac{\pi}{2}.$$

$$I_2=3\int_0^{\pi}\sin^2 t\cdot\cos t\,dt=\left\{\begin{array}{c}\sin t=u;\\ \cos t\,dt=du;\\ при\ t=0\ \ u_1=0;\\ при\ t=\pi\ \ u_2=0.\end{array}\right\}=3\int_0^{0}u^2du=0.$$

$$I_3=\int_0^{\pi}2sin^2t\cdot cos^2tdt=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}4sin^2t\cdot cos^2tdt=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}sin^2 2tdt=\frac{1}{4}\left(t-\frac{1}{4}sin4t\right)\Bigg|_0^{\pi}=\frac{\pi}{4}.$$

Таким образом,

$$S_{фиг}=2a^2\left[I_1+I_2+I_3\right]=2a^2\left[\frac{\pi}{2}+0+\frac{\pi}{4}\right]=\frac{3\pi a^2}{2}\left(ед.^2\right).$$

Пример 23. Найти площадь фигуры, ограниченной полярной осью и первым витком спирали Архимеда $\rho=a\varphi$ (рис. 19).

Решение. Первый виток спирали Архимеда описывается при изменении *t* от 0 до 2π. Поэтому $\varphi_1=0$, $\varphi_2=2\pi$. Тогда искомая площадь фигуры, по формуле (14), будет равна

$$S_{фиг}=\frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}\varphi^2 d\varphi=\frac{a^2}{2}\cdot\frac{\varphi^3}{3}\Bigg|_0^{2\pi}=\frac{a^2}{6}\left(8\pi^3-0\right)=$$

$$=\frac{4}{3}\pi^3a^2(ед.^2).$$

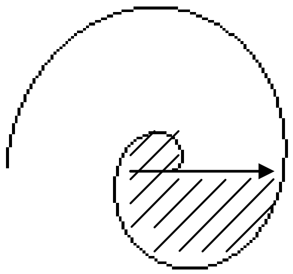
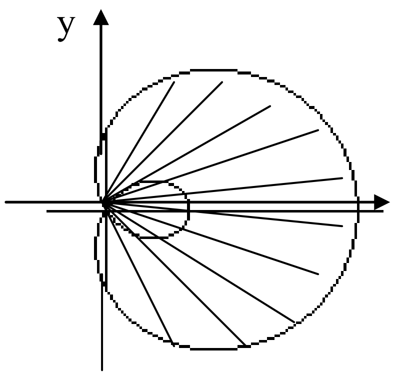


Рис. 19 Спираль Архимеда

Пример 24. Вычислить площадь фигуры, ограниченной улиткой Паскаля $\rho=a(1+2cos\varphi)$ (рис. 20).

Решение. Из рис. 20 видно, что фигура симметрична относительно оси Ох, поэтому найдем площадь верхней части фигуры и результат удвоим. Решив уравнение $a(1+2cos\varphi)=0$, найдем значения $\varphi_1=-\frac{2\pi}{3}$ и $\varphi_2=\frac{2\pi}{3}$. Тогда искомая площадь фигуры, по формуле (14), будет равна:

$$S_{фиг}=\frac{1}{2}\int_{-2\pi/3}^{2\pi/3}a^2(1+2cos\varphi)^2 d\varphi=$$



$$= a^2 \int_0^{2\pi/3} (1+4cos\varphi+2(1+cos2\varphi)d\varphi =$$

$$= a^2 \left[\varphi + 4sin\varphi + 2(\varphi + \frac{1}{2} sin2\varphi) \right]\Bigg|_0^{2\pi/3} =$$

$$= a^2 \left[2\pi + \frac{3\sqrt{3}}{2} \right] (ед.^2).$$

Рис. 20 Улитка Паскаля

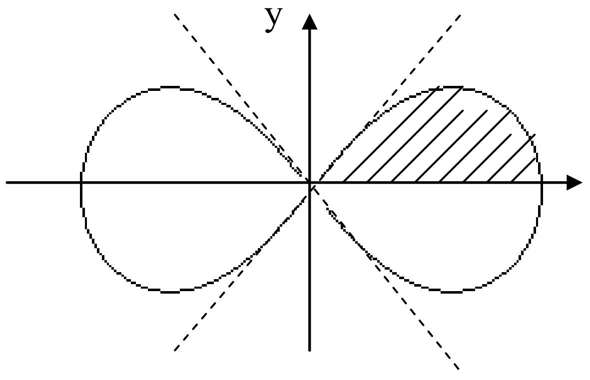
Пример 25. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривой $(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)$.

Решение. Запишем данное уравнение в полярной системе координат, положив $x=\rho\, cos\varphi,\ y=\rho\, sin\varphi$:

$$(\rho^2 cos^2 + \rho^2\ sin^2\varphi)^2 = a^2 \cdot \rho^2 (cos^2\varphi - sin^2\varphi).$$

Определим $\rho^2 = a^2 cos2\varphi$ или $\rho = a\sqrt{cos2\varphi}$ – уравнение лемнискаты Бернулли в полярных координатах.

Фигура, ограниченная данной кривой, состоит из 2–х одинаковых лепестков (рис. 21). Чтобы найти искомую площадь, определим площадь половины одного из лепестков и результат умножим на 4. Пусть $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = \frac{\pi}{4}$, тогда



$$S_{фиг} = 4 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} a^2 cos2\varphi d\varphi =$$

$$= a^2\ sin2\varphi \Big|_0^{\pi/4} = a^2 sin\frac{\pi}{2} = a^2\,(ед.^2).$$

Рис. 21 Лемниската Бернулли

Контрольные вопросы

1. Записать формулу площади фигуры в случае, когда: а) $f(x)\geq 0$; б) $f(x)\leq 0$; в) $f(x)$ – четная на отрезке $[-a;a]$; г) $f(x)$ – нечетная на отрезке $[-a;a]$; д) фигура ограничена двумя кривыми $y=f(x)$ и $y=\varphi(x)$, причем $f(x)\geq\varphi(x)$ на отрезке $[a;в]$;

2. Записать формулу площади фигуры в декартовых координатах.

3. Записать формулу площади фигуры в параметрической форме.

4. Записать формулу площади фигуры в полярных координатах.

Задание 4. Вычислить площади фигур, ограниченных указанными кривыми:

1. $y=4-x^2$, $y=x^2+2$; (Ответ: $2\frac{2}{3}$).

2. $y^2=4x$, $x^2=4y$; (Ответ: $5\frac{1}{3}$).

3. $x=4cost$, $y=6sint$; (Ответ: 24π).

7. $y=x^2-4x+3$, $x=0$, $y=0$; (Ответ: $2\frac{2}{3}$).

8. $x=3(t-sint)$, $y=3(1-cost)$; (Ответ: 27π).

9. $\rho=a\sqrt{sin2\varphi}$; (Ответ: a^2).

4. $x=2cost$, $y=2sint$; (Ответ: 4π).

5. $\rho=acos3\varphi$; (Ответ: $2\frac{\pi a^2}{4}$).

6. $y=\sqrt{x}$, $x=4$, ось Ох; (Ответ: $5\frac{1}{3}$).

10. $\rho=2a(2+cos\varphi)$. (Ответ: $18\pi a^2$).

11. $y=x^2$, $y=\sqrt{x}$; (Ответ: $\frac{1}{3}$).

12. $y=2x^2+3x+1$, $y=-x^2-2x+9$; (Ответ: $13{,}75$).

4.2. Вычисление объемов тел

I. Вычисление объема тела по известной площади поперечного сечения. Если площадь сечения тела плоскостью, перпендикулярной к оси Ох (рис.22), может быть выражена как функция от *x* в виде $S=S(x)$, $a\leq x\leq в$, то объем части тела, заключенной между перпендикулярными к оси Ох плоскостями $x=a$ и $x=в$, находится по формуле:

$$V=\int_a^в S(x)dx. \tag{15}$$

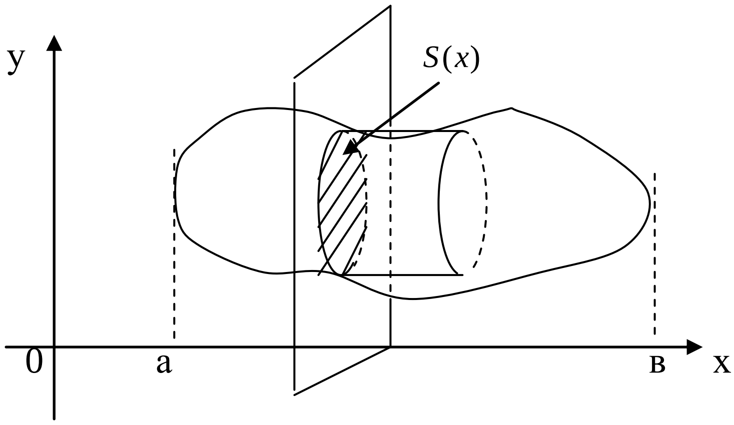


Рис. 22 Объемное тело с площадью $S(x)$ поперечного сечения

II. Вычисление объема тела вращения

1. В декартовых координатах. а) Объем тела, образованного вращением вокруг оси Ох фигуры, ограниченной кривой $y=f(x)$, осью Ох и прямыми $x=a$ и $x=в$ (рис.23), вычисляется по формуле:

$$V_x=\pi\int_a^в y^2dx. \tag{16}$$

б) Объем тела, образованного вращением вокруг оси Оу фигуры, ограниченной кривой $x=\varphi(y)$, осью Оу и двумя параллельными прямыми $y=c$ и $y=d$ (рис.24), вычисляется по формуле:

$$V_y=\pi\int_c^d x^2dy. \tag{17}$$

в) Если фигура, ограниченная кривыми $y=f(x)$ и $y=\varphi(x)$, причем $0\le\varphi(x)\le f(x)$, и прямыми $x=a$ и $x=в$, вращается вокруг оси Ох, то объем тела вращения вычисляется по формуле:

$$V_x = \pi \int_a^{в} \left[f^2(x) - \varphi^2(x) \right] dx. \quad (18)$$

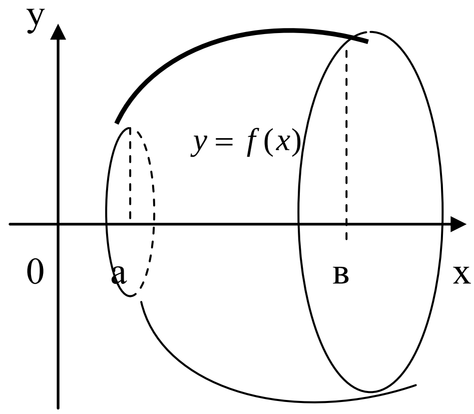


Рис.23 Тело, полученное вращением кривой $y = f(x)$ вокруг Ох

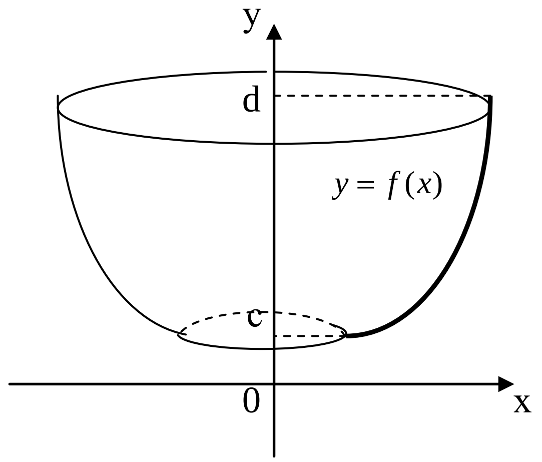


Рис.24 Тело, полученное вращением кривой $y = f(x)$ вокруг Оy

г) Если фигура, ограниченная кривыми $x_1(y)$ и $x_2(y)$, причем $x_1(y) \ge x_2(y)$, и прямыми $y = c$ и $y = d$, вращается вокруг оси Оy , то объем тела вращения вычисляется по формуле:

$$V_y = \pi \int_c^d \left[x_1^2(y) - x_2^2(y) \right] dy. \quad (19)$$

2. В параметрической форме. Если кривая задана в параметрической форме $x = x(t)$, $y = y(t)$, то объем тела, полученного вращением вокруг оси Ох (Оy) при $\alpha \le t \le \beta$, вычисляется соответственно по формулам:

$$V_x = \pi \int_{\alpha}^{\beta} y^2(t) x'(t) dt. \quad (20)$$

$$V_y = \pi \int_{\gamma}^{\mu} x^2(t) y'(t) dt. \quad (21)$$

3. В полярных координатах. Если кривая задана в полярных координатах $\rho=\rho(\varphi)$, то объем тела, полученного вращением вокруг оси Ох (Оу) при $\varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2$, находится соответственно по формулам:

$$V_x = -\pi \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho^3 sin^3\varphi d\varphi . \tag{22}$$

$$V_y = \pi \int_{\varphi_3}^{\varphi_4} \rho^3 cos^3\varphi d\varphi . \tag{23}$$

Пример 26. Вычислить объем шарового слоя, вырезанного из шара $x^2+y^2+z^2=16$ плоскостями $x=2$ и $x=3$ (рис.25).

Решение. При сечении шара плоскостью, перпендикулярной к оси Ох в точке x, получается круг: $y^2+z^2=16-x^2$ с радиусом $R=\sqrt{16-x^2}$. Тогда площадь сечения (круга) будет равна:

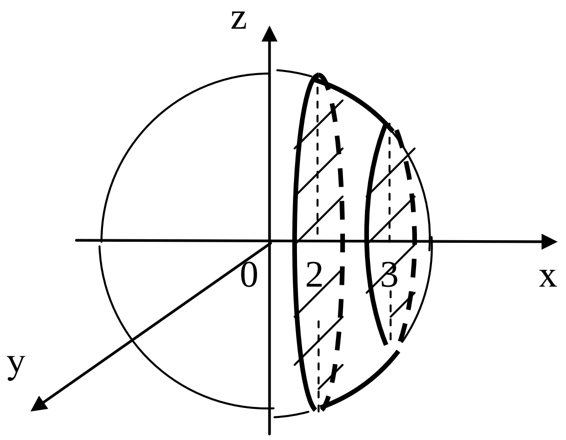


Рис. 25 Шаровой слой

$$S(x)=\pi R^2=\pi(16-x^2).$$

Далее подставляя в формулу (15) $a=2$, $в=3$ и $S(x)$, найдем искомый объем тела.

$$V=\int_a^в S(x)dx=\int_2^3 \pi(16-x^2)dx=$$

$$=\pi\left(16x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_2^3 = 9\frac{2}{3}\pi\ (ед.^3).$$

Пример 27. Оси двух одинаковых цилиндров с равными радиусами основания, пересекаются под прямым углом. Вычислить объем тела, составляющего общую часть этих цилиндров.

Решение. Примем оси цилиндров за оси Oy и Oz (рис. 26). Тело *OABCD* составляет восьмую часть интересующего нас тела. Пересечем это тела плоскостью, перпендикулярной к оси Ox, на расстоянии x от 0.

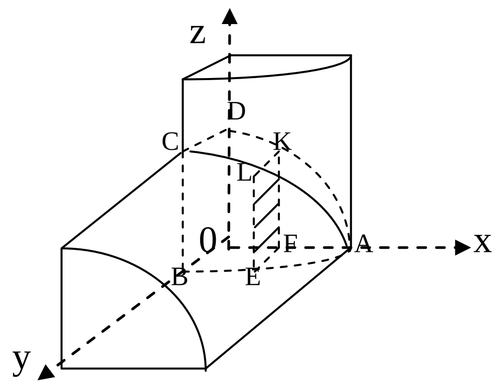


Рис. 26

В сечении получим квадрат *EFKL* со стороной

$$EF=\sqrt{a^2-x^2},$$

поэтому

$$S(x)=a^2-x^2.$$

Тогда искомый объем тела будет равен:

$$V=8\int\limits_0^a (a^2-x^2)dx=\frac{16}{3}a^2(ед.^3).$$

Пример 28. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox плоской фигуры, ограниченной параболой $y=\dfrac{x^2}{3}+1$, прямыми $x=0$, $x=3$ и осью Ox (рис.27).

Решение. Пользуясь формулой (16) и подставляя в нее $a=0$, $в=3$, $y=\dfrac{x^2}{3}+1$, получим:

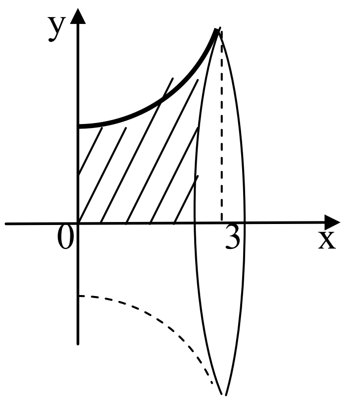


Рис. 27

$$V_x=\pi\int\limits_0^3\left(\frac{x^2}{3}+1\right)^2dx=\pi\int\limits_0^3\left(\frac{x^4}{9}+\frac{2x^2}{3}+1\right)dx=$$

$$=\pi\left[\frac{x^5}{45}+\frac{2x^3}{9}+x\right]_0^3=\pi\left(\frac{27}{5}+6+3\right)=14{,}4\pi(ед.^3)$$

Пример 29. Вычислить объем тела, полученного вращением вокруг оси Oy фигуры, ограниченной параболами $y=x^2$ и $y^2=8x$.

Решение. Построим данные кривые (рис. 28). Разрешая данные уравнения относительно x, получим: $x_1 = \pm\sqrt{y}$, но т.к. $x \geq 0$, то $x_1 = \sqrt{y}$; $x_2 = \dfrac{y^2}{8}$.

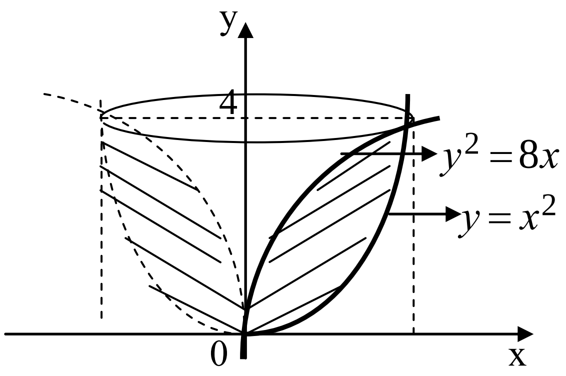


Рис. 28

Тогда по формуле (19) искомый объем будет равен:

$$V_y = \pi \int_0^4 \left(y - \frac{y^4}{64} \right) dy = \pi \left(\frac{y^2}{2} - \frac{y^5}{64 \cdot 5} \right) \Bigg|_0^4 =$$

$$= \pi \left(8 - \frac{16}{5} \right) = \frac{24\pi}{5} (ед.^3).$$

Пример 30. Вычислить объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной астроидой $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$ (рис.16).

Решение. Искомый объем равен удвоенному объему тела, полученного вращением вокруг оси Ox плоской фигуры *OAB*. Следовательно,

$$V_x = 2\pi \int_0^a y^2 dx.$$

Для удобства вычислений предварительно найдем dx и новые пределы интегрирования.

$dx = -3a\cos^2 t \sin t dt$; при $x = 0$, $t = \dfrac{\pi}{2}$, при $x = a$, $t = 0$. Тогда по формуле (20) объем тела будет равен:

$$V_x = 2\pi \int_0^a y^2 dx = 2\pi \int_{\pi/2}^0 a^2 \sin^6 t \cdot (-3a\cos^2 t \sin t) dt = 6\pi a^3 \int_0^{\pi/2} \sin^6 t \cdot \cos^2 t \sin t dt =$$

$$=6\pi a^3\int_0^{\pi/2}(1-cos^2t)^3cos^2tsintdt=\left\{\begin{array}{c} cost=u; \\ sintdt=-du; \\ npu\ \ t=0 \quad\ \ u_1=1; \\ npu\ \ t=\pi/2\ \ u_2=0. \end{array}\right\}=6\pi a^3\int_0^1(1-u^2)^3u^2(-du)=$$

$$=6\pi a^3\int_0^1(1-3u^2+3u^4-u^6)u^2du=6\pi a^3\int_0^1(u^2-3u^4+3u^6-u^8)du=$$

$$=6\pi a^3\left(\frac{u^3}{3}-\frac{3u^5}{5}+\frac{3u^7}{7}-\frac{u^9}{9}\right)\Bigg|_0^1=6\pi a^3\left(\frac{1}{3}-\frac{3}{5}+\frac{3}{7}-\frac{1}{9}\right)=\frac{32\pi a^3}{105}(e\partial.^3).$$

Пример 31. Вычислить объем тела, полученного вращением вокруг полярной оси кривой $\rho=acos^2\varphi$.

Решение. Для вычисления объема тела необходимо найти пределы интегрирования φ_1 и φ_2, положив $x=\rho cos\varphi$; при $x=0$ $\varphi_1=\dfrac{\pi}{2}$; при $x=a$ $\varphi_2=0$. Поскольку полученная фигура симметрична относительно осей координат (рис. 29), то для вычисления полного объема тела, достаточно найти объем его части, полученной вращением, например, вокруг оси Ох и расположенной в I четверти, и затем полученный результат умножить на 2.

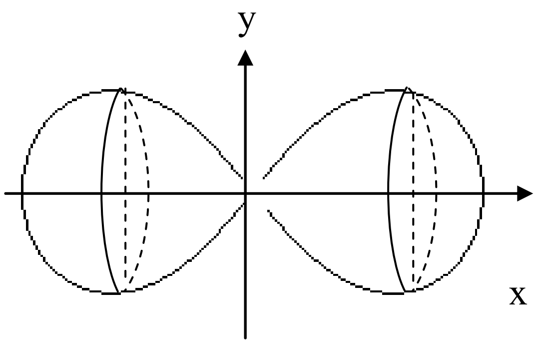


Рис. 29

Следовательно, объем тела, по формуле (22), будет равен:

$$V_x=-2\pi\int_{\pi/2}^{0}a^3\cdot cos^6\varphi\cdot sin^3\varphi d\varphi=$$

$$=2\pi a^3\int_0^{\pi/2}sin^2\varphi\cdot cos^6\varphi sin\varphi d\varphi=$$

$$=2\pi a^3\int_0^{\pi/2}(1-cos^2\varphi)\cdot cos^6\varphi sin\varphi d\varphi=$$

$$=\begin{cases} cos\varphi = u; \\ sin\varphi d\varphi = -du; \\ при\ \ \varphi = 0 \qquad u_1 = 1; \\ при\ \ \varphi = \pi/2 \quad u_2 = 0. \end{cases} = 2\pi a^3 \int\limits_1^0 (1-u^2)u^6(-du) = 2\pi a^3 \int\limits_0^1 (u^6 - u^8)du =$$

$$= 2\pi a^3 \left(\frac{u^7}{7} - \frac{u^9}{9} \right)\Bigg|_0^1 = 2\pi a^3 \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{9} \right) = \frac{4\pi a^3}{63} (ед.^3).$$

Контрольные вопросы

1. Записать формулу вычисления объема тела с известным поперечным сечением.

2. Записать формулу вычисления объема тела, полученного вращением вокруг оси Ох кривой, заданной в: а) декартовых координатах; б) параметрической форме; в) полярных координатах.

3. Записать формулу вычисления объема тела, полученного вращением вокруг оси Оу кривой, заданной в: а) декартовых координатах; б) параметрической форме; в) полярных координатах.

Задание 5. Вычислить самостоятельно объемы тел, полученных вращением вокруг указанной оси плоской фигуры, ограниченной кривыми:

1. $y^2 = 4x,\ x = 1,\ x = 3$, Ох;
(Ответ: 16π).

2. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1,\ y = 0$, Ох;
(Ответ: 16π).

3. $x = 3y - y^2,\ x = 0$, Оу; (Ответ: $8{,}1\pi$).

7. $x^2 - y^2 = 4,\ y = -2,\ y = 2$, Оу;
(Ответ: $21\frac{1}{3}\pi$).

8. $x = 2(t - sint),\ y = 2(1 - cost)$, Ох;
(Ответ: $40\pi^2$).

9. $(x^2 + y^2)^2 = 4(x^2 - y^2)$, Оу;
(Ответ: $\sqrt{2}\pi^2$).

4. $x=5cost$, $y=3sint$, Ox;
(Ответ: $\approx 4738{,}5\pi$).

10. $\rho=3cos^2\varphi$; (Ответ: $\frac{36\pi}{7}$).

5. $\rho=2(1+cos\varphi)$; (Ответ: $\frac{64}{3}\pi$).

11. $y=\sqrt{x}$, $0\le x\le 2$, Ox;
(Ответ: 2π).

6. $xy=2$, $y=2$, $y=4$, Oy;

(Ответ: π).

12. $y=\frac{6}{x}$, $y=-x+7$, Oy
(Ответ: $\frac{125\pi}{3}$).

4.3. Вычисление длины дуги

1. Вычисление длины дуги плоской кривой, заданной в декартовых координатах. Если плоская кривая задана уравнением $y=f(x)$, где $x\in[a;в]$ и производная $f'(x)$ непрерывна, то длина дуги кривой определяется по формуле:

$$l=\int_a^в \sqrt{1+(y')^2}\,dx. \qquad (24)$$

2. Вычисление длины дуги плоской кривой, заданной в параметрической форме. Если кривая задана параметрическими уравнениями $x=x(t)$, $y=y(t)$, $t_1\le t\le t_2$, то длина дуги кривой вычисляется по формуле:

$$l=\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\,dt. \qquad (25)$$

где t_1 *и* t_2 – значения параметра *t*, соответствующие концам дуги.

3. Вычисление длины дуги плоской кривой, заданной в полярных координатах. Если кривая задана в полярных координатах $\rho=\rho(\varphi)$, $\varphi_1\le\varphi\le\varphi_2$, то длина дуги кривой вычисляется по формуле:

$$l=\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2}\sqrt{[\rho(\varphi)]^2+[\rho'(\varphi)]^2}\,d\varphi. \qquad (26)$$

где φ_1 и φ_2 – значения полярного угла в концах дуги.

Пример 32. Вычислить длину дуги полукубической параболы $y=\sqrt{x^3}$ от точки $O(0;\,0)$ до точки $A(4;\,8)$.

Решение. Так как кривая задана в декартовых координатах, то найдя y' и подставляя в формулу (24) $a=0$ и $в=4$, получим:

$$y'=\frac{3}{2}\sqrt{x};\qquad l=\int\limits_0^4\sqrt{1+\frac{9}{4}x}\,dx=\frac{4}{9}\cdot\frac{2}{3}\left(1+\frac{9}{4}x\right)^{3/2}\Bigg|_0^4=\frac{8}{27}\left(10\sqrt{10}-1\right).$$

Пример 33. Вычислить длину дуги одной арки циклоиды $x=a(t-sint)$, $y=a(1-cost)$ (рис.14).

Решение. Для вычисления длины дуги нужно воспользоваться формулой (25). Предварительно следует вычислить x'_t и y'_t:

$x'_t=a(1-cost)$; $y'_t=asint$. Тогда $\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}=\sqrt{2}a\sqrt{1-cost}$; $t_1=0$,

$t_2=2\pi$. Следовательно, искомая длина дуги будет равна:

$$l=\int\limits_0^{2\pi}\sqrt{2}a\sqrt{1-cost}\,dt=\sqrt{2}a\int\limits_0^{2\pi}\sqrt{2}sin\frac{t}{2}dt=2a\int\limits_0^{2\pi}sin\frac{t}{2}dt=-4acos\frac{t}{2}\Bigg|_0^{2\pi}=$$

$$=-4a(cos\pi-cos0)=8a.$$

Пример 34. Вычислить длину дуги кардиоиды $\rho = a(1+cos\varphi)$, $0 \le \varphi \le 2\pi$ (рис. 18).

Решение. Для вычисления длины дуги воспользуемся формулой (26). Предварительно следует вычислить $\rho' : \rho' = -asin\varphi$. Тогда

$$\sqrt{(\rho(\varphi))^2 + (\rho'(\varphi))^2} = \sqrt{a^2(1+cos\varphi)^2 + a^2 sin^2\varphi} = \sqrt{2a^2(1+cos\varphi)} =$$

$$= \sqrt{2a^2 \cdot 2\cos^2\frac{\varphi}{2}} = 2a\left|cos\frac{\varphi}{2}\right| = \left[\begin{array}{l} 2acos\dfrac{\varphi}{2},\ 0 \le \varphi \le \pi; \\ -2acos\dfrac{\varphi}{2},\ \pi \le \varphi \le 2\pi. \end{array}\right.$$

Следовательно, в силу симметрии длина дуги кардиоиды будет равна:

$$l = 2a\int_0^{2\pi}\left|cos\frac{\varphi}{2}\right|d\varphi = 4a\int_0^{\pi}cos\frac{\varphi}{2}d\varphi = 8asin\frac{\varphi}{2}\Big|_0^{\pi} = 8a.$$

Контрольные вопросы

1. Дайте определение длины кривой линии.
2. Записать формулу для вычисления длины дуги, заданной в декартовых координатах. Привести пример.
3. Записать формулу для вычисления длины дуги, заданной в параметрической форме. Привести пример.
4. Записать формулу для вычисления длины дуги, заданной в полярных координатах. Привести пример.

Задание 6. Вычислить самостоятельно длину дуги кривой:

1. $y = lnx$ от $x = \sqrt{3}$ до $x = \sqrt{15}$; (Ответ: $\approx 2{,}29$).

2. Цепной линии $y=\frac{a}{2}(e^{x/a}+e^{-x/a})$ от $x=0$ до $x=a$; (Ответ: $x=\frac{a}{2}\left(e-\frac{1}{e}\right)$).

3. Кривой OABCO, состоящей из участков кривых $y^2=2x^3$ и $x^2+y^2=20$ (рис.29); (Ответ: $\frac{8}{27}(10\sqrt{10}-1)+4\sqrt{5}arctg2$).

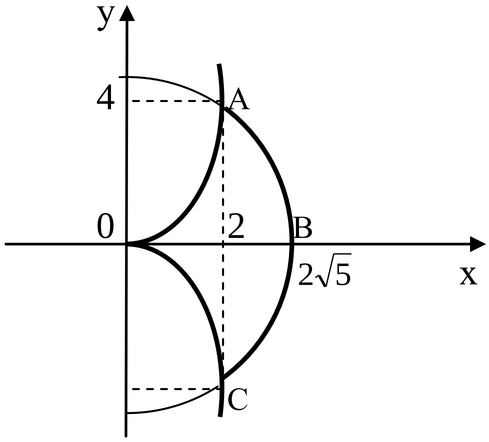


Рис. 30

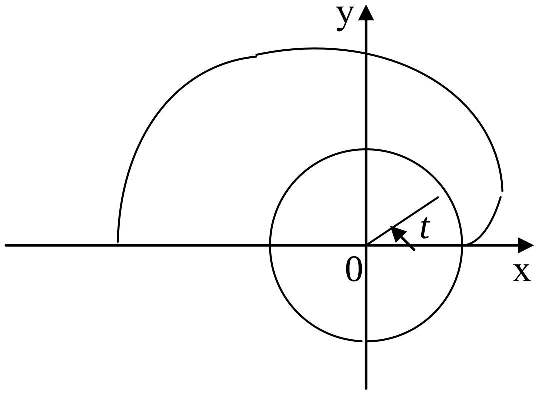


Рис. 31

4. Развертки окружности (эвольвенты) $x=a(cost+sint)$, $y=a(sint-tcost)$ от $t_1=0$ до $t_2=\pi$ (рис. 30); (Ответ: $\frac{\pi a^2}{2}$).

5. Астроиды $x^{2/3}+y^{2/3}=5^{2/3}$; (Ответ: 30).

6. $x=2cos^3t$ $y=2sin^3t$; (Ответ: 12).

7. $\rho=3(1+cos\varphi)$; (Ответ: 24).

8. $\rho=4\varphi$ от полюса до конца первого завитка;

(Ответ: $4\pi\sqrt{1+4\pi^2}+2ln(2\pi+\sqrt{1+4\pi^2})$).

9. Логарифмической спирали $\rho=2e^{\varphi}$, находящейся внутри круга радиуса $\rho=2$; (Ответ: $2\sqrt{2}$).

10. $\rho=3sin^3\varphi$; (Ответ: $4{,}5\pi$).

11. $x=4(cost+tsint)$, $y=4(sint-tcost)$, $0\le t\le 2$; (Ответ: 8).

12. $y=ln(x^2-1)$, $2\le x\le 3$; (Ответ: $1+ln1{,}5$).

4.4. Вычисление площади поверхности вращения

1. Вычисление площади поверхности вращения кривой, заданной в декартовых координатах.

а) площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси Ох дуги кривой $y = f(x)$, заключенной между точками с абсциссой $x = a$ и $x = в$, вычисляется по формуле:

$$S_x = 2\pi \int_a^в y(x)\sqrt{1 + [y'(x)]^2}\,dx. \tag{27}$$

б) площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси Оу дуги кривой $x = \varphi(y)$, заключенной между точками с ординатами $y = c$ и $y = d$, вычисляется по формуле:

$$S_y = 2\pi \int_c^d x(y)\sqrt{1 + x'(y)}\,dy. \tag{28}$$

2. Вычисление площади поверхности вращения кривой, заданной в параметрической форме. Если кривая задана параметрическими уравнениями $x = x(t)$ $y = y(t)$, то площадь поверхности, образованной вращением вокруг осей Ох и Оу, вычисляется по формулам соответственно

$$S_x = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} y(t)\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\,dt. \tag{29}$$

$$S_y = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} x(t)\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\,dt. \tag{30}$$

где t_1 и t_2 – значения параметра t, соответствующие концам вращаемой дуги.

3. Вычисление площади поверхности вращения кривой, заданной в полярных координатах. Если кривая задана в полярных координатах $\rho=\rho(\varphi)$, то площадь поверхности, образованной вращением вокруг полярной оси (т.е. вокруг оси Ох), вычисляется по формуле:

$$S=2\pi\int\limits_L ydl=2\pi\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2}\rho sin\varphi\sqrt{\rho^2+(\rho')^2}d\varphi. \qquad (31)$$

где φ_1 и φ_2 – значения полярного угла, соответствующие концам вращаемой дуги. (Следует напомнить: $x=\rho cos\varphi$, $y=\rho sin\varphi$ – уравнения перехода из декартовой в полярную систему координат).

Пример 35. Вычислить площадь поверхности, образованной вращением дуги кубической параболы $y=x^3$ вокруг оси Ох от начала координат до точки с абсциссой $x=1$ (рис. 32).

Решение. Так как кривая задана в декартовых координатах, то искомую площадь будем вычислять по формуле (29), для чего предварительно найдем y':

$$y'=3x^2, \text{ тогда } \sqrt{1+(y')^2}=\sqrt{1+9x^4}.$$

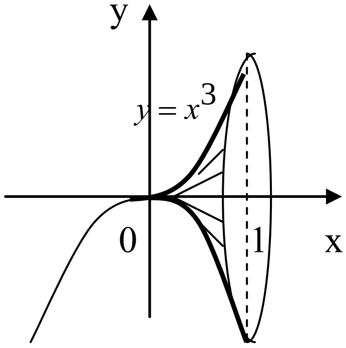


Рис. 32

Подставляя в формулу *а* = 0 и *в* = 1, получим:

$$S_x=2\pi\int\limits_0^1 x^3\sqrt{1+9x^4}dx=\frac{\pi}{18}\cdot\frac{2}{3}\left(1+9x^4\right)^{3/2}\Big|_0^1=$$

$$=\frac{\pi}{27}\left(10^{3/2}-1\right)(ед.^2).$$

Пример 36. Вычислить площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси Оу дуги параболы $y=x^2$ от начала координат до точки с абсциссой $x=1$. Из данного уравнения выразим x: $x=\pm\sqrt{y}$. Но, так как у≥ 0, то «-» не учитываем. Подставляя в формулу (28) $c=0$, $d=1$ и

$$\sqrt{1+\left[x'(y)\right]^2}=\sqrt{1+\frac{1}{4y}}=\frac{\sqrt{1+4y}}{2\sqrt{y}},$$

где $x'(y)=\dfrac{1}{2\sqrt{y}}$, получим:

Решение.

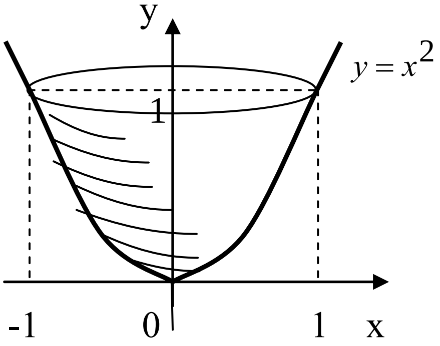


Рис.33

$$S_y=2\pi\int\limits_0^1\sqrt{y}\cdot\frac{\sqrt{1+4y}dy}{2\sqrt{y}}=$$

$$=\frac{\pi}{6}\left(1+4y\right)^{3/2}\Big|_0^1=\frac{\pi}{6}\left(5^{3/2}-1\right)(ед.^2).$$

Пример 37. Вычислить площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси Ох астроиды $x=acos^3t$, $y=asin^3t$ (рис. 16).

Решение. Известно, что движению точки по астроиде от точки $A(a;0)$ до точки $B(0;a)$ соответствует изменение параметра t от $t_1=0$ до $t_2=\dfrac{\pi}{2}$. Чтобы определить искомую площадь поверхности, достаточно вычислить площадь, образованную вращением вокруг оси вокруг оси Ох дуги *AB*, затем полученный результат умножить на 2. Прежде, следует вычислить:

$$x'(t)=-3acos^2t\cdot sint,\ y'(t)=3asin^2t\cdot cost,$$

$$y(t)\sqrt{\left[x'(t)\right]^2+\left[y'(t)\right]^2}=asin^3t\sqrt{9a^2sin^2t\cdot cos^4t+9a^2sin^4t\cdot cos^2t}=$$

$$=asin^3t\cdot\sqrt{9a^2sin^2t\cdot cos^2t\left(sin^2t+cos^2t\right)}=3a^2\left|sin^4t\cdot cost\right|,$$

но так как $t\in\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$, то при этих значениях *t*: $3a^2\left|sin^4t\cdot cost\right|=3a^2sin^4t\cdot cost$.

Таким образом, искомая площадь поверхности, по формуле (29), будет равна:

$$S_x = 4\pi \int_0^{\pi/2} 3a^2 sin^4 t \cdot cost dt = 12\pi a^2 \int_0^{\pi/2} sin^4 t \cdot d(sint) =$$

$$= 12\pi a^2 \left. \frac{sin^5 t}{5} \right|_0^{\pi/2} = \frac{12\pi a^2}{5}\left(sin^5 \frac{\pi}{2} - sin^5 0\right) = \frac{12\pi a^2}{5}(ед.^2).$$

Пример 38. Вычислить площадь поверхности, образованной вращением лемнискаты Бернулли $\rho = a\sqrt{\cos 2\varphi}$ вокруг полярной оси (рис. 21).

Решение. Для нахождения требуемой площади поверхности воспользуемся симметричностью данной кривой относительно осей координат. А именно, найдем площадь поверхности, образованной вращением частью лемнискаты, ограниченной углом от $\varphi_1 = 0$ до $\varphi_2 = \frac{\pi}{4}$. Для нахождения искомой площади полученный результат умножим на 2.

Предварительно найдем:

$$\rho'(\varphi) = -\frac{asin2\varphi}{\sqrt{cos2\varphi}};$$

$$\sqrt{\rho^2 + (\rho')^2} = \sqrt{a^2 cos2\varphi + \frac{a^2 sin^2 2\varphi}{cos2\varphi}} = \sqrt{\frac{a^2\left(sin^2 2\varphi + cos^2 2\varphi\right)}{cos2\varphi}} = \frac{a}{\sqrt{cos2\varphi}}.$$

Следовательно, по формуле (31) получим:

$$S = 2 \cdot 2\pi \int_0^{\pi/4} \rho sin\varphi \cdot \frac{a}{\sqrt{cos2\varphi}} d\varphi = 4\pi a^2 \int_0^{\pi/4} \frac{\sqrt{cos2\varphi} \cdot sin\varphi}{\sqrt{cos2\varphi}} d\varphi =$$

$$= 4\pi a^2 \int\limits_0^{\pi/4} sin\varphi d\varphi = -4\pi a^2 cos\varphi\Big|_0^{\pi/4} = -4\pi a^2\left(cos\frac{\pi}{4} - cos0\right) = -4\pi a^2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right) =$$

$$= 2\pi a^2 \left(2 - \sqrt{2}\right)(ед.^2).$$

Контрольные вопросы

1. Записать формулу вычисления площади поверхности, образованной вращением вокруг оси Ох кривой, заданной в: а) декартовых координатах; б) параметрической форме; в) полярной системе координат (вокруг полярной оси).

2. Записать формулу вычисления площади поверхности, образованной вращением вокруг оси Оу кривой, заданной в а) декартовых координатах; б) параметрической форме.

3. Можно ли вычислять площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси Оу кривой, заданной в полярной системе координат? Если да, то записать формулу.

Задание 7. Вычислить площади поверхности тел, полученных вращением кривых вокруг указанной оси.

1. Параболы $y^2 = 4x$ от вершины до точки с абсциссой $x = 3$, Ох; (Ответ: $18\frac{2}{3}\pi$).

2. Эллипса $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$, Ох; (Ответ: $2\pi^2 + 4\pi$).

3. $4x^2 + y^2 = 4$, Оу; (Ответ: $2\pi(1 + 4\pi/(3\sqrt{3}))$).

4. Одной полуволны синусоиды $y = sinx$, Ох; (Ответ: $2\pi[\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})]$).

5. Четверти окружности $x^2 + y^2 = a^2$ от точки А (а; 0) до точки В(0; а) вокруг прямой $x + y = a$; (Ответ: $\frac{\sqrt{2}\pi a^2}{2}\left(4 - \pi\right)$).

6. Кардиоиды $x = 5(2cost - cos2t)$, $y = 5(2sint - sin2t)$, Ох; (Ответ: 640π).

7. Астроиды $x = 2cos^3 t$, $y = 2sin^3 t$, Ох; (Ответ: $9{,}6\pi$).

8. $y^2 = 4x$ от вершины до точки с абсциссой $x = 3$, Ох;

(Ответ: $18\frac{2}{3}\pi$).

9. Тора, образованного вращением окружности $x^2 + (y - в)^2 = r^2$ $(0 < r < в)$ вокруг оси Ох; (Ответ: $4\pi^2 вr$).

10. $\rho = 3\sqrt{cos 2\varphi}$ вокруг полярной оси; (Ответ: $18\pi(2 - \sqrt{2})$).

11. $y^2 = 4x$, $0 \le x \le 1$, Ох; (Ответ: $\frac{8}{3}\pi(2\sqrt{2} - 1)$).

12. $\rho = 5(1 + cos\varphi)$; (Ответ: 320π).

Раздел V. ПРИЛОЖЕНИЕ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА К ЗАДАЧАМ МЕХАНИКИ, ФИЗИКИ, ТЕХНИКИ

5.1. Вычисление давления, работы и других физических величин

1. Давление жидкости. Сила давления жидкости P на площадку S с глубиной погружения h по закону Паскаля равна

$$P = \gamma \cdot hSg. \qquad (32)$$

где γ – плотность жидкости, g – ускорение силы тяжести.

2. Работа силы. Работа A переменной силы $F = f(x)$, действующей в направлении оси Ох на отрезке $[x_1; x_2]$, равна

$$A = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx. \tag{33}$$

3. Кинетическая энергия K тела или системы тел определяется формулой:

$$K = \frac{I\omega^2}{2}, \tag{34}$$

где I – момент инерции, ω – угловая скорость.

4. Работа силы электрического взаимодействия вычисляется по формуле:

$$A = \int_{x_1}^{x_2} F(x)dx, \tag{35}$$

где $F = \dfrac{e_1 \cdot e_2}{x^2}$, e_1 и e_2 величины зарядов, x – расстояние между ними; $[x_1; x_2]$ – отрезок пути, пройденный зарядом e_1 в результате действия на него заряда e_2.

5. Путь, пройденный материальной точкой. Если $V = f(t)$ – скорость движения материальной точки по некоторой кривой, то путь S, пройденный точкой за промежуток времени $[t_1;\ t_2]$, равен

$$S = \int_{t_1}^{t_2} V(t)dt. \tag{36}$$

Пример 39. Вычислить силу давления воды на вертикальную треугольную пластинку, имеющую основание $в$ и высоту h, погруженную в воду так, что ее вершина лежит на поверхности воды.

Решение. Введем систему координат так, как показано на рис. 34, и рассмотрим горизонтальную полоску, находящуюся на произвольной глубине x и имеющую толщину dx. Приближенно принимая эту полоску за прямоугольник, находим дифференциал площади $dS = MN\,dx$.

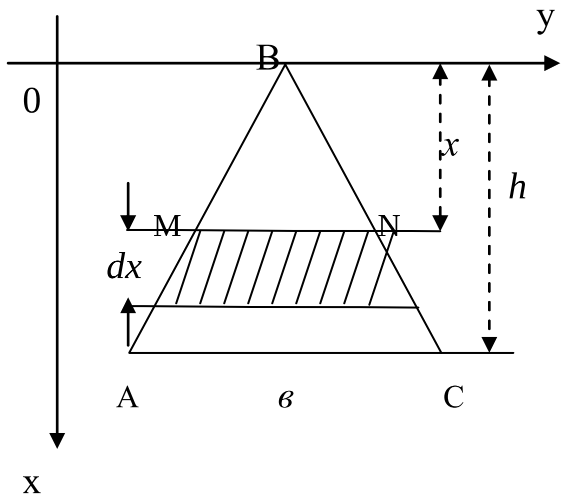


Рис. 34

Из подобия треугольников BMN и ABC имеем: $\frac{MN}{в}=\frac{x}{h}$.

Отсюда $MN=\frac{вx}{h}$ и $dS=\frac{вx}{h}dx$.

Сила давления воды на эту полоску равна $dP=xdSg$,

где удельный вес воды γ = 1. Следовательно, сила давления воды на всю пластинку ABC равна:

$$P=g\int_0^h xdS=\frac{gв}{h}\int_0^h x^2dx=\frac{вgh^2}{3}.$$

Пример 40. Найти силу давления, испытываемую полукругом радиуса *r*, погруженным вертикально в воду так, что его диаметр совпадает с поверхностью воды (рис. 35).

Решение. Сила давления жидкости направлена по нормали к стенке сосуда. Здесь она равна силе веса. Разобьем площадь полукруга на элементарные полоски, параллельные поверхности воды. Площадь одной такой полоски, находящейся на расстоянии *h* от поверхности воды, равна:

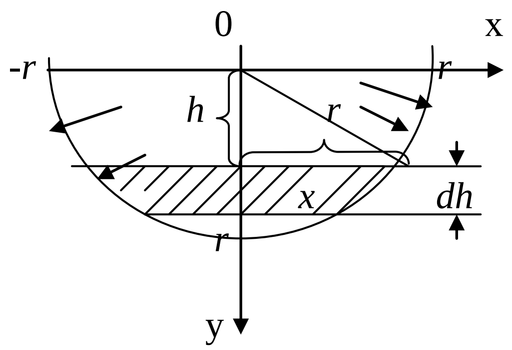


Рис. 35

$$dS=2xdh=2\sqrt{r^2-h^2}dh.$$

Сила давления, испытываемая этим элементом, равна:

$$dP=\gamma hdSg=2\gamma hg\sqrt{r^2-h^2}dh.$$

Отсюда сила давления на весь полукруг равна:

$$P = 2\gamma g \int_0^r h\sqrt{r^2 - h^2}\,dh = -\frac{2}{3}\gamma g\left(r^2 - h^2\right)^{3/2}\Bigg|_0^r = \frac{2}{3}\gamma g r^3.$$

Пример 41. Найти работу, затраченную на выкачивание воды из корыта, имеющего форму полуцилиндра, длина которого a, радиус r (рис. 36).

Решение.

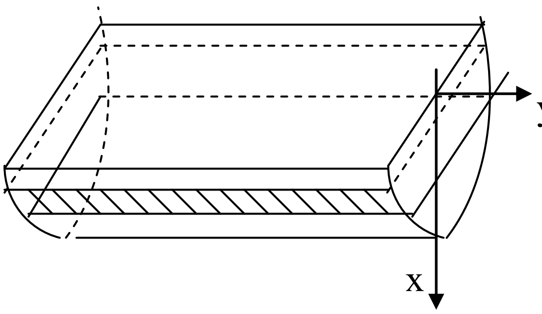


Рис. 36

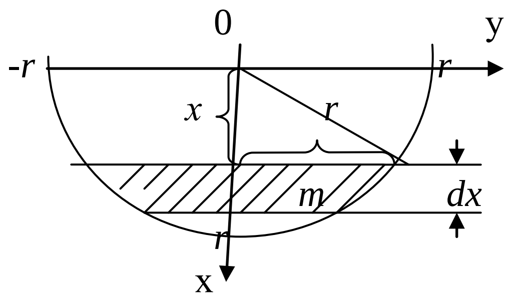


Рис. 37

Разобьем цилиндр на элементарные полоски, параллельные верхней плоскости. Тогда объем такого слоя воды, находящегося на глубине x и имеющую длину a, ширину $m = 2\sqrt{r^2 - x^2}dx$ и толщину dx (рис. 37.), равен:

$$dV = amdx = 2a\sqrt{r^2 - x^2}\,dx.$$

Работа, совершаемая для поднятия заштрихованного слоя воды на высоту x, равна:

$$dA = 2\gamma g a x\sqrt{r^2 - x^2}\,dx$$

Следовательно,

$$A = 2\gamma g a \int_0^r x\sqrt{r^2 - x^2}\,dx = -\gamma g a \cdot \frac{2}{3}\left(r^2 - x^2\right)^{3/2}\Bigg|_0^r = \frac{2}{3}\gamma g a r^3.$$

Пример 42. Какую работу надо совершить, чтобы растянуть пружину на 4 см, если известно, что от нагрузки в 1 H она растягивается на 1 см?

Решение. Согласно закону Гука сила *X Н*, растягивающая пружину на x м, равна $X = rx$, где r – коэффициент пропорциональности; найдем его. Зная, что, если $x = 0{,}01$, $X = 1H$, тогда $r = \dfrac{1}{0{,}01} = 100$ и $X = 100x$. Следовательно, работа *А* по формуле (33) будет равна:

$$A = \int_0^{0{,}04} 100x\,dx = 50x^2\Big|_0^{0{,}04} = 0{,}08\,Дж.$$

Пример 43. Канал, имеющий форму параболоида вращения (рис. 37) с радиусом основания *R* и глубиной *H*, наполнен жидкостью, плотность которой равна *a*. Определить работу, которую нужно произвести для того, чтобы выкачать жидкость из данного котла.

Решение. Разобьем объем параболоида плоскостями, перпендикулярными оси вращения, т.е. оси Ох, на слои толщины dx. Вес слоя жидкости, расположенного на расстоянии x от вершины, равен $\pi y^2 dx \cdot ag$, а работа по перемещению этого слоя на высоту $H - x$ равна:

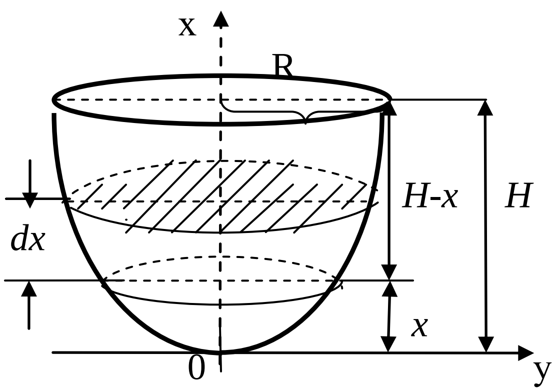


Рис.38

$$dA = \pi y^2 ag(H - x)dx.$$

Следовательно, работа определится:

$$A = \pi ga \int_0^H y^2 (H - x)dx.$$

Парабола симметрична относительно оси Ох, значит ее уравнение имеет вид: $y^2 = 2px$. Из условия, что $R^2 = 2pH$, найдем $2p = \dfrac{R^2}{H}$ и тогда уравнение параболы будет иметь вид: $y^2 = \frac{R^2}{H} x$. Подставляя его в уравнение работы A, получим:

$$A = \pi g a \int_0^H \frac{R^2}{H} x (H - x) dx = \frac{\pi g a R^2}{H} \left(\frac{H - x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \Bigg|_0^H = \frac{\pi g a R^2 H^2}{6}.$$

Пример 44. Электрический заряд E, сосредоточенный в начале координат, отталкивает заряд e из точки $(a; 0)$ в точку $(в; 0)$. Определить работу A силы отталкивания F.

Решение. Дифференциал работы силы на перемещение dx равен:

$$dA = Fdx = \frac{eE}{x^2} dx.$$

Отсюда

$$A = eE \int_a^в \frac{dx}{x^2} = eE \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{в} \right).$$

При $в \to \infty$ $A \to \frac{eE}{a}$.

Пример 45. Определить работу, необходимую для запуска ракеты весом P с поверхности Земли вертикально вверх на высоту h.

Решение. Обозначим через F величину силы притяжения ракеты Землей. Пусть m_p – масса ракеты, $m_з$ – масса Земли. Согласно закону Ньютона (закон всемирного тяготения)

$$F = \gamma \frac{m_p \cdot m_з}{x^2},$$

где x – расстояние от ракеты до центра Земли, γ – гравитационная постоянная. Полагая $rm_p \cdot m_з$ = К, получим $F(x) = \frac{K}{x^2}$, $R \le x \le R+h$, R – радиус Земли. При $x = R$ сила $F(R)$ будет весом ракеты P, т.е. $F(R) = P = \frac{K}{R^2}$, отсюда $K = P \cdot R^2$ и $F(x) = \frac{P \cdot R^2}{x^2}$. Таким образом, дифференциал работы есть

$$dA = F(x)dx = \frac{P \cdot R^2}{x^2} dx.$$

Тогда искомая работа равна:

$$A = \int_R^{R+h} F(x)dx = P \cdot R^2 \int_R^{R+h} \frac{dx}{x^2} = \frac{PRh}{R+h}.$$

Пример 46. Скорость движения точки дается формулой $V = t^2 - 2t$ м/с. Найти путь, пройденный точкой за первые 10 сек. после начала движения. Чему равна средняя скорость за этот промежуток времени?

Решение. По формуле (36) имеем:

$$S = \int_0^{10} (t^2 - 2t)dt = 2(t-1)\Big|_0^{10} = 20; \quad V_{ср} = \frac{S}{10} = \frac{20}{10} = 2 \text{ м/с.}$$

Задание 8. Решить самостоятельно следующие задачи.

1. Скорость движения материальной точки определяется уравнением $V = 6t - 2t^2$ *см/сек*. Найти путь, пройденный точкой от начала движения до полной остановки. (Ответ: 9 *см*.).

2. Скорость тела, брошенного вертикально вверх с начальной скоростью V_0, без учета сопротивления воздуха, определяется уравнением $V = V_0 - gt$, где g – ускорение силы тяжести, t – протекшее время. На каком расстоянии от начального положения будет находиться тело через t секунд от момента бросания? (Ответ: $V_0 t - \frac{gt^2}{2}$.)

3. Вычислить силу давления на треугольник, погруженный вертикально в воду так, что основание, равное 12 *см*, лежит на поверхности воды, а высота равна 9 *см*. (Ответ: 1,59 *Н*.)

4. Плотина имеет форму трапеции. Верхнее основание ее совпадает с поверхностью воды. Вычислить силу давления на плотину, если длина нижнего основания равна 25 *м*, а верхнего – 15 *м*, высота равна 8 *м*. (Ответ: 6800 *Н*.)

5. Вычислить силу давления воды на вертикальную плотину, имеющую форму эллипса, большая ось которого равна 6 *м*, находится на поверхности воды; малая ось равна 4 *м*. (Ответ: 78.480 *Н*.)

6. Найти силу давления воды на вертикальный параболический сегмент, основание которого 4 *м* и расположено на поверхности воды, а вершина находится на глубине 4 *м*. (Ответ: 167000 *Дж*.)

7. Какую работу нужно затратить, чтобы растянуть пружину на 0,06 *м*, если при действии силы 1 *Н* она растягивается на 0,01 *м*? (Ответ: 0,18 *Дж*.)

8. Вычислить работу, которую необходимо затратить, чтобы выкачать воду из конического сосуда, обращенного вершиной вниз. Радиус основания сосуда равна 3 *м*, а высота 8 *м*. (Ответ: 470000 *Дж*.)

9. Вычислить силу давления P жидкости на погруженную в нее вертикальную пластинку, имеющую форму треугольника ABC с основанием $AC = в$ и высотой $BD = h$, предполагая, что вершина В этого треугольника лежит на свободно поверхности жидкости, а основание AC параллельно ей (рис. 39). (Ответ: $\frac{1}{3}\gamma в h^2$.)

10. Для сжатия пружины на 4 см необходимо применить силу 78,4 *Н*. Вычислить работу, которую потребуется затратить для сжатия пружины на 2 *см*. (Ответ: 0,392 *Дж*.).

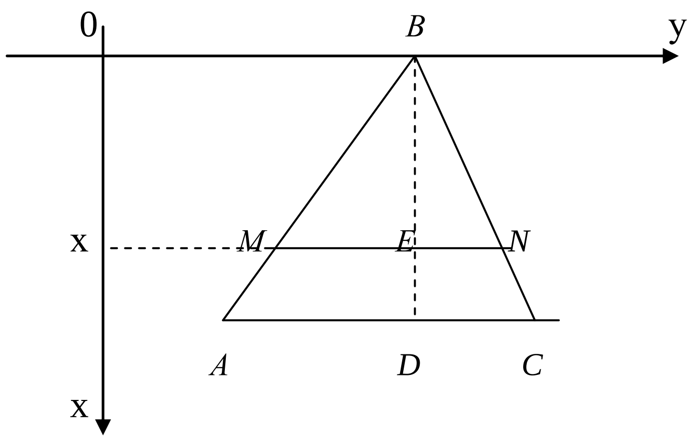


Рис. 39

11. Вычислить силу давления P жидкости на погруженную в нее вертикальную пластинку, имеющую форму треугольника ABC с основанием $AC = 10$ и высотой $BD = 3$, предполагая, что вершина В этого треугольника лежит на свободно поверхности жидкости, а основание AC параллельно ей (рис. 39). (Ответ: 30γ.)

12. Какую работу нужно затратить, чтобы растянуть пружину на 0,05 *м*, если при действии силы 1 *Н* она растягивается на 0,02 *м*? (Ответ: 0,25 *Дж*.)

5. 2. Статические моменты и моменты инерции

5.2.1. Вычисление статических моментов и моментов инерции плоской дуги кривой

Пусть на плоскости xOy задана система материальных точек $A_1(x_1;y_1)$, $A_2(x_2;y_2)$, $A_3(x_3;y_3)$,…, $A_n(x_n;y_n)$ с массами соответственно m_1, m_2, m_3,…, m_n.

Определение 4. Статическим моментом M_x данной системы относительно оси Ox называется сумма произведений масс этих точек на их ординаты.

$$M_x = \sum_{r=1}^{n} m_r y_r \ .$$

Определение 5. Статическим моментом M_y данной системы относительно оси Оу называется сумма произведений масс этих точек на их абсциссы.

$$M_y = \sum_{r=1}^{n} m_r x_r .$$

Определение 6. Моментами инерции I_x и I_y системы относительно осей Ох и Оу называются суммы произведений масс точек на квадраты их расстояний от соответствующей оси.

$$I_x = \sum_{r=1}^{n} m_r y_r^2 , \quad I_y = \sum_{r=1}^{n} m_r x_r^2 .$$

Статические моменты и моменты инерции **дуги плоской кривой** вычисляются по формулам:

$$M_x = \int_0^l y dl , \quad M_y = \int_0^l x dl . \tag{37}$$

$$I_x = \int_0^l y^2 dl , \quad I_y = \int_0^l x^2 dl . \tag{38}$$

где dl – дифференциал дуги кривой.

В случае задания дуги:

а) в декартовых координатах: $y = f(x)$, то $dl = \sqrt{1 + y'^2} dx$ и

$$M_x = \int_a^в y\sqrt{1 + y'^2} dx ; \quad M_y = \int_a^в x\sqrt{1 + y'^2} dx . \tag{39}$$

$$I_x = \int\limits_a^в y^2\sqrt{1+y'^2}dx; \quad I_y = \int\limits_a^в x^2\sqrt{1+y'^2}dx. \qquad (40)$$

б) в параметрической форме: $x = x(t)$, $y = y(t)$, то $dl = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}dt$

$$M_x = \int\limits_\alpha^\beta y(t)\sqrt{x'^2 + y'^2}dt; \quad M_y = \int\limits_\alpha^\beta x(t)\sqrt{x'^2 + y'^2}dt. \qquad (41)$$

$$I_x = \int\limits_\alpha^\beta y^2(t)\sqrt{x'^2 + y'^2}dt; \quad I_y = \int\limits_\alpha^\beta x^2(t)\sqrt{x'^2 + y'^2}dt. \qquad (42)$$

в) в полярных координатах: $\rho = \rho(\varphi)$, то $dl = \sqrt{\rho^2(\varphi) + \rho'^2(\varphi)}d\varphi$ и

$$\left.\begin{aligned} M_x &= \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho sin\varphi \cdot \sqrt{\rho^2(\varphi) + \rho'^2(\varphi)}d\varphi; \\ M_y &= \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho cos\varphi \cdot \sqrt{\rho^2(\varphi) + \rho'^2(\varphi)}d\varphi \end{aligned}\right\} \qquad (43)$$

.

$$\left.\begin{aligned} I_x &= \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho^2 sin^2\varphi \cdot \sqrt{\rho^2(\varphi) + \rho'^2(\varphi)}d\varphi; \\ I_y &= \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho^2 cos^2\varphi \cdot \sqrt{\rho^2(\varphi) + \rho'^2(\varphi)}d\varphi. \end{aligned}\right\} \qquad (44)$$

(Следует заметить, что формулы (43) и (44) получены из формул (39) и (40) соответственно, при помощи уравнения заданной кривой и уравнений перехода из декартовой в полярную систему координат: $x = \rho cos\varphi$, $y = \rho sin\varphi$).

5.2.2. Вычисление статических моментов и моментов инерции плоской фигуры

Статические моменты и моменты инерции **плоской фигуры** вычисляются по формулам:

$$M_x = \frac{1}{2}\int_a^в y dS, \quad M_y = \int_a^в x dS. \tag{45}$$

$$I_x = \frac{1}{3}\int_a^в y^2 dS, \quad I_y = \int_a^в x^2 dS, \tag{46}$$

где dS – дифференциал площади плоской фигуры.

Аналогично, если фигура ограничена кривой, заданной:

а) в декартовых координатах: $y = f(x)$, прямыми $x = a$, $x = в$ и осью Ох, то $dS = ydx$ и

$$M_x = \frac{1}{2}\int_a^в y^2 dx; \qquad M_y = \int_a^в xy dx. \tag{47}$$

$$I_x = \frac{1}{3}\int_a^в y^3 dx; \qquad I_y = \int_a^в x^2 y dx. \tag{48}$$

б) в параметрической форме: $x = x(t)$, $y = y(t)$, то $dS = y(t)\cdot x'(t)dt$ и

$$M_x = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta y^2(t)x'(t)dt; \qquad M_y = \int_\alpha^\beta x(t)y(t)x'(t)dt. \tag{49}$$

$$I_x = \frac{1}{3}\int_\alpha^\beta y^3(t)x'(t)dt; \qquad I_y = \int_\alpha^\beta x^2(t)y(t)x'(t)dt. \tag{50}$$

в) в полярных координатах: $\rho = \rho(\varphi)$, то $dS = \frac{1}{2}\rho^2(\varphi)d\varphi$, $a = \varphi_1$, $в = \varphi_2$ и

$$M_x = \frac{1}{4}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho^3(\varphi) sin\varphi d\varphi; \; M_y = \frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho^3(\varphi) cos\varphi d\varphi. \qquad (51)$$

$$I_x = \frac{1}{6}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho^4(\varphi) sin^2\varphi d\varphi; \; I_y = \frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho^4(\varphi) cos^2\varphi d\varphi. \qquad (52)$$

5.3. Вычисление координат центра тяжести

1. Центр тяжести $(x_c; y_c)$ **дуги плоской кривой** вычисляется по формулам:

$$x_c = \frac{M_y}{l}; \;\; y_c = \frac{M_x}{l}. \qquad (53)$$

где M_x, M_y – статические моменты плоской кривой относительно осей Ох и Оу соответственно, l – длина дуги кривой.

В случае задания кривой:

а) в декартовых координатах:

$$x_c = \frac{M_y}{l} = \frac{\int_a^в x\sqrt{1 + [y'(x)]^2}dx}{\int_a^в \sqrt{1 + [y'(x)]^2}dx}; \;\; y_c = \frac{M_x}{l} = \frac{\int_a^в y\sqrt{1 + [y'(x)]^2}dx}{\int_a^в \sqrt{1 + [y'(x)]^2}dx}. \qquad (54)$$

б) в параметрической форме:

$$x_c=\frac{M_y}{l}=\frac{\int_{\alpha}^{\beta}x(t)\sqrt{x'^2(t)+y'^2}\,dt}{\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{x'^2(t)+y'^2}\,dt};\quad y_c=\frac{M_x}{l}=\frac{\int_{\alpha}^{\beta}y(t)\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\,dt}{\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\,dt}. \qquad (55)$$

в) в полярных координатах:

$$x_c=\frac{\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\rho\cos\varphi\sqrt{\rho^2+\rho'^2}\,d\varphi}{\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\sqrt{\rho^2+\rho'^2}\,d\varphi};\quad y_c=\frac{\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\rho\sin\varphi\sqrt{\rho^2+\rho'^2}\,d\varphi}{\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\sqrt{\rho^2+\rho'^2}\,d\varphi}. \qquad (56)$$

2. Центр тяжести плоской фигуры вычисляется по формулам:

$$x_c=\frac{M_y}{S};\quad y_c=\frac{M_x}{S}, \qquad (57)$$

где статические моменты M_x и M_y – статические моменты плоской фигуры относительно осей Ох и Оу соответственно, S – площадь плоской фигуры.

Если фигура ограничена кривой, заданной:

а) в декартовых координатах: $y=f(x)$, прямыми $x=a$, $x=в$ и осью Ох, то

$$x_c=\frac{\int_a^в xy\,dx}{\int_a^в y\,dx};\quad y_c=\frac{\int_a^в y^2\,dx}{2\int_a^в y\,dx}. \qquad (58)$$

б) в параметрической форме: $x=x(t)$, $y=y(t)$, то

$$x_c = \frac{\int_\alpha^\beta x(t)y(t)x'(t)dt}{\int_\alpha^\beta y(t)x'(t)dt}; \; y_c = \frac{\int_\alpha^\beta y^2(t)x'(t)dt}{2\int_\alpha^\beta y(t)x'(t)dt}. \tag{59}$$

в) в полярных координатах: $\rho = \rho(\varphi)$, то

$$x_c = \frac{\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho^3(\varphi)cos\varphi d\varphi}{\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho^2(\varphi)d\varphi}; \; y_c = \frac{\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho^3(\varphi)sin\varphi d\varphi}{2\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho^2(\varphi)d\varphi}. \tag{60}$$

Пример 47. Определить статические моменты, моменты инерции относительно осей Ox и Oy и координаты центра тяжести следующих кривых:

а) дуги полуокружности $x^2 + y^2 = a^2$, $y \geq 0$;

б) дуги астроиды $x = acos^3 t$, $y = asin^3 t$, лежащей в I четверти;

в) дуги кардиоиды $\rho = a(1 + cos\varphi)$, от $\varphi_1 = 0$ до $\varphi_2 = \pi$.

Решение. а) Начертим полуокружность, расположенную в положительной полуплоскости (рис. 40). Из уравнения окружности выразим *y*: $y = \pm\sqrt{a^2 - x^2}$, но т.к. по условию $y \geq 0$, то $y = \sqrt{a^2 - x^2}$. Таким образом, уравнение дуги кривой представили в декартовых координатах. Следовательно, по формулам (39) и (40) получим:

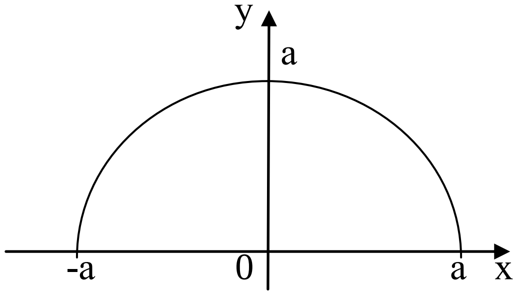


Рис. 40

$$M_x = \int\limits_{-a}^{a} \sqrt{a^2 - x^2} \cdot \sqrt{1 + y'^2}\,dx$$

$$M_y = \int\limits_{-a}^{a} x\sqrt{1 + y'^2}\,dx$$

$$I_x = \int\limits_{-a}^{a} \left(a^2 - x^2\right) \cdot \sqrt{1 + y'^2}\,dx$$

$$I_y = \int\limits_{-a}^{a} x^2 \cdot \sqrt{1 + y'^2}\,dx.$$

Найдем y': $y' = -\dfrac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$, тогда $\sqrt{1 + y'^2} = \sqrt{1 + \dfrac{x^2}{a^2 - x^2}} = \dfrac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}}$.

Подставляя их в M_x, M_y, I_x и I_y, получим:

$$M_x = \int\limits_{-a}^{a} \sqrt{a^2 - x^2} \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,dx = 2a^2;$$

$$M_y = \int\limits_{-a}^{a} x \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,dx = 0;$$

$$I_x = \int\limits_{-a}^{a} \left(a^2 - x^2\right) \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,dx = 2a\int\limits_{0}^{a} \sqrt{a^2 - x^2}\,dx =$$

$$= \left\{\begin{array}{c} x = asint; \\ dx = acostdt; \\ при\ x = 0, t_1 = 0; \\ при\ x = a, t_2 = \dfrac{\pi}{2}. \end{array}\right\} = 2a\int\limits_{0}^{\pi/2} \sqrt{a^2 - a^2 sin^2 t} \cdot acostdt = 2a^3 \int\limits_{0}^{\pi/2} cos^2 tdt =$$

$$=2a^3\int\limits_0^{\pi/2}\frac{1+cos2t}{2}dt=a^3\int\limits_0^{\pi/2}\left(t+\frac{1}{2}sin2t\right)\Bigg|_0^{\pi/2}=a^3\left(\frac{\pi}{2}-0\right)=\frac{\pi a^3}{2}.$$

$$I_y=\int\limits_{-a}^{a}x^2\cdot\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}dx=2a^3\int\limits_0^{\pi/2}\frac{sin^2tcost}{cost}dt=$$

$$=2a^3\int\limits_0^{\pi/2}sin^2tdt=2a^3\int\limits_0^{\pi/2}\frac{1-cos2t}{2}dt=\frac{\pi}{2}a^3.$$

Таким образом, получили, что $I_x=I_y$. Найдем координаты центра тяжести дуги полуокружности. Для этого сначала определим длину *l* по формуле (24).

$$l=\int\limits_{-a}^{a}\sqrt{1+y'^2}dx=2a\int\limits_0^a\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=2a\int\limits_0^{\pi/2}\frac{acostdt}{acost}=2at\Bigg|_0^{\pi/2}=\pi a.$$

Тогда по формуле (53)

$$x_c=0;\ y_c=\frac{2a^2}{\pi a}=\frac{2a}{\pi}.$$

Итак, центр тяжести дуги полуокружности находится в С $(\frac{2a}{\pi};\frac{2a}{\pi})$.

б) Астроида изображена на рис. 16. Поскольку кривая задана в параметрической форме, то для определения M_x, M_y, I_x, I_y и центра тяжести, будем пользоваться формулами (41), (42) и (55) соответственно.

Предварительно найдем: $x'(t)=-3acos^2t\cdot sint$; $y'(t)=3asin^2t\cdot cost$, тогда

$$\sqrt{x'^2+y'^2}=\sqrt{9a^2sin^2tcos^4t+9a^2sin^4tcos^2t}=$$

$$\sqrt{9a^2 sin^2 t cos^2 t\left(sin^2 t + cos^2 t\right)} = 3asintcost;$$

$$\alpha = 0\,,\ \beta = \frac{\pi}{2}\,.$$

Следовательно, по формуле (41):

$$M_x = \int_0^{\pi/2} asin^3 t \cdot 3asintcostdt = 3a^2 \int_0^{\pi/2} sin^4 tcostdt = 3a^2 \int_0^{\pi/2} sin^4 td(sint) =$$

$$= \frac{3a^2}{5} sin^5 t\Big|_0^{\pi/2} = \frac{3a^2}{5}$$

$$M_x = M_y = \frac{3a^2}{5}\,.$$

По формуле (42):

$$I_x = I_y = \int_0^{\pi/2} a^2 sin^6 t \cdot 3asintcostdt = 3a^3 \int_0^{\pi/2} sin^7 tcostdt = 3a^3 \int_0^{\pi/2} sin^7 td(sint) =$$

$$= \frac{3a^3}{8}\left(sin^8 t\right)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{3a^3}{8}\left(sin^8 \frac{\pi}{2} - sin0\right) = \frac{3a^3}{8}\,.$$

Вычислим l по формуле (25):

$$l = \int_0^{\pi/2} 3asintcostdt = 3a \int_0^{\pi/2} sintd(sint) = \frac{3a^2}{2} sin^2 t\Big|_0^{\pi/2} = \frac{3a}{2}.$$

Тогда по формуле (55):

$$x_c = y_c = \frac{3a^2}{5} : \frac{3a}{2} = \frac{2a}{5}\,.$$

в) Кардиоида изображена на рис. 18. Для вычисления M_x, M_y, I_x, I_y, x_c и y_c и будем пользоваться формулами (43), (44) и (56) соответственно. При изменении параметра φ от 0 до π текущая точка (*x;y*) опишет верхнюю часть кривой. Предварительно преобразуем следующие выражения: $\rho'(\varphi) = -a sin\varphi$, тогда

$$\sqrt{\rho^2 + \rho'^2} = \sqrt{a^2(1+cos\varphi)^2 + a^2 sin^2\varphi} =$$

$$= a\sqrt{1+2cos\varphi + cos^2\varphi + sin^2\varphi} = \sqrt{2}a\sqrt{1+cos\varphi} = 2a cos\frac{\varphi}{2}.$$

Следовательно, по формуле (43):

$$M_x = \int_0^{\pi} a(1+cos\varphi) sin\varphi \sqrt{2}a\sqrt{1+cos\varphi}\, d\varphi = \sqrt{2}a^2 \int_0^{\pi} (1+cos\varphi)^{3/2} sin\varphi\, d\varphi =$$

$$= \left\{ \begin{array}{c} cos\varphi = t \\ sin\varphi d\varphi = -dt \\ \varphi = 0,\ \ t_1 = 1 \\ \varphi = \pi,\ t_2 = -1 \end{array} \right\} = -\sqrt{2}a^2 \int_1^{-1} (1+t)^{3/2} dt = 2\sqrt{2}a^2 \left.\frac{(1+t)^{5/2}}{5}\right|_{-1}^{1} = \frac{16a^2}{5}.$$

$$M_y = \int_0^{\pi} a(1+cos\varphi) cos\varphi\, 2a cos\frac{\varphi}{2} d\varphi = 4a^2 \int_0^{\pi} cos^2\frac{\varphi}{2}\left(cos^2\frac{\varphi}{2} - sin^2\frac{\varphi}{2}\right) cos\frac{\varphi}{2} d\varphi =$$

$$= 4a^2 \int_0^{\pi} \left(1 - sin^2\frac{\varphi}{2}\right)\left(1 - 2sin^2\frac{\varphi}{2}\right) cos\frac{\varphi}{2} d\varphi = \left\{ \begin{array}{c} sin\frac{\varphi}{2} = t \\ cos\frac{\varphi}{2} d\varphi = 2dt \\ при\ \ \varphi = 0\ \ t_1 = 0 \\ при\ \ \varphi = \pi\ \ t_2 = 1 \end{array} \right\} =$$

$$= 8a^2 \int_0^1 (1-t^2)(1-2t^2) dt = 8a^2 \int_0^1 (1-3t^2+2t^4) dt = 8a^2 \left.\left(t - t^3 + \frac{2t^5}{5}\right)\right|_0^1 = \frac{16a^2}{5}.$$

Ранее нами было найдено, что длина кардиоиды от $\varphi_1 = 0$ до $\varphi_2 = 2\pi$ равна 8*a* (см. пример 34). Здесь длина будет равна 4*a*, как половина всей дуги. Тогда по формуле (56) получим:

$$x_c = y_c = \frac{16a^2}{5} : 4a = \frac{4a}{5}.$$

Таким образом, центр тяжести дуги кардиоиды, расположенной над осью Ох, находится в точке С $\left(\frac{4a}{5}; \frac{4a}{5}\right)$.

Далее определим I_x и I_y по формуле (44).

$$I_x = \int_0^\pi a^2(1+cos\varphi)^2 sin^2\varphi 2acos\frac{\varphi}{2}d\varphi = 32a^3 \int_0^\pi sin^2\frac{\varphi}{2}(1-sin^2\frac{\varphi}{2})^3 cos\frac{\varphi}{2}d\varphi =$$

$$= (\textit{см. подстановку выше при вычисл. } M_y \textit{ в прим.} 47(\textit{в})) =$$

$$= 64a^3 \int_0^1 t^2(1-t^2)^3 dt = 64a^3 \int_0^1 (t^2 - 3t^4 + 3t^6 - t^8)dt =$$

$$= 64a^3\left(\frac{t^3}{3} - \frac{3t^5}{5} + \frac{3t^7}{7} - \frac{t^9}{9}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1024a^3}{315}.$$

$$I_y = \int_0^\pi a^2(1+cos\varphi)^2 cos^2\varphi \cdot 2acos\frac{\varphi}{2}d\varphi = 2a^3 \int_0^\pi 4cos^4\frac{\varphi}{2}\left(1-2sin^2\frac{\varphi}{2}\right)^2 cos\frac{\varphi}{2}d\varphi =$$

$$= 8a^3 \int_0^\pi \left(1-sin^2\frac{\varphi}{2}\right)^2\left(1-2sin^2\frac{\varphi}{2}\right)^2 cos\frac{\varphi}{2}d\varphi = 16a^3 \int_0^\pi \left(1-t^2\right)^2\left(1-2t^2\right)^2 dt =$$

$$= 16a^3 \int_0^1 (1-6t^2+13t^4-12t^6+4t^8)dt = 16a^3\left(t - 2t^3 + \frac{13t^5}{5} - \frac{12t^7}{7} + \frac{4t^9}{9}\right)\Bigg|_0^1 =$$

$$=16a^3\left(-1+\frac{13}{5}-\frac{12}{7}+\frac{4}{9}\right)=16a^3\cdot\frac{104}{315}\approx 5{,}3a^3.$$

Следовательно, $I_y \approx 5{,}3a^3$.

Пример 48. Найти статические моменты, моменты инерции и координаты центра плоских фигур, ограниченными кривыми, рассмотренными в **примере 47**.

Решение. а) Так как верхняя половина круга симметрична относительно оси Oy, то центр тяжести находится на этой оси, т.е. $x_c = 0$. Площадь полукруга $S=\frac{\pi a^2}{2}$. Вычислим M_x, полагая $x \in [-a; a]$ и $y^2 = a^2 - x^2$.

$$M_x=\frac{1}{2}\int_a^в y^2dx=\frac{1}{2}\int_{-a}^{a}(a^2-x^2)dx=\int_0^a (a^2-x^2)dx=\left(a^2x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^a=\frac{2}{3}a^3.$$

Следовательно, $y_c=\frac{2}{3}a^3:\frac{\pi a^2}{2}=\frac{4a}{3\pi}$; центр тяжести круга находится в точке С$(0;\frac{4a}{3\pi})$.

$$I_x=\frac{1}{3}\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\cdot(a^2-x^2)dx=\frac{1}{3}\int_{-a}^{a}\left(\sqrt{a^2-x^2}\right)^3dx=\{см.\ пример\ 47а\}$$

$$=\frac{2a^4}{3}\int_0^{\pi/2}cos^4t\,dt=\frac{2a^4}{3}\int_0^{\pi/2}\left(\frac{1+cos2t}{2}\right)^2dt=\frac{a^4}{6}\left(\frac{3}{2}t+sin2t+\frac{1}{8}sin4t\right)\Bigg|_0^{\pi/2}=\frac{\pi a^4}{8}.$$

$$I_y=\int_{-a}^{a}x^2\sqrt{a^2-x^2}dx=2\int_0^a x^2\cdot\sqrt{a^2-x^2}dx=\frac{a^4}{2}\int_0^{\pi/2}4sin^2t\,cos^2t\,dt=$$

$$=\frac{a^4}{2}\int_0^{\pi/2}sin^2 2t\,dt=\frac{a^4}{2}\int_0^{\pi/2}\frac{1-cos4t}{2}dt=\frac{a^4}{4}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{4}sin2\pi\right)=\frac{\pi a^4}{8}.$$

б) Для определения M_x, M_y, I_x, I_y, x_c и y_c будем пользоваться формулами (49), (50) и (59) соответственно. Так как данная фигура симметрична относительно прямой $y = x$, то $M_x = M_y$, $I_x = I_y$, $x_c = y_c$. Известно, что площадь астроиды равна $\frac{3\pi a^2}{8}$ (см. **пример 20**), тогда в нашем случае $S = \frac{3\pi a^2}{32}$ (как 1/4 часть всей площади астроиды).

$$M_x = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} a^2 sin^6 t(-3a cos^2 t sint)dt = \frac{3}{2}a^3 \int_0^{\pi/2} sin^7 t cost dt =$$

$$= \frac{3}{2}a^3 \int_0^{\pi/2} (1-cos^2 t)^3 \cdot cos^2 t sint dt = \left\{ \begin{array}{c} cost = u; \\ sint dt = -du; \\ при\ \ t = 0 \quad u_1 = 1; \\ при\ \ t = \frac{\pi}{2} \quad u_2 = 0. \end{array} \right\} = \frac{3}{2}a^3 \int_0^1 (1-u^2)^3 \cdot u^2 du =$$

$$= \frac{3}{2}a^3 \int_0^1 (u^2 - 3u^4 + 3u^6 - u^8)du = \frac{3a^3}{2}\left[\frac{u^3}{3} - \frac{3u^5}{5} + \frac{3u^7}{7} - \frac{u^9}{9}\right]\Bigg|_0^1 = \frac{8a^3}{105}.$$

Таким образом, центр тяжести рассматриваемой фигуры находится в точке

С $\left(\frac{256a}{315\pi}; \frac{256a}{315\pi}\right)$. Далее найдем I_x и I_y.

$$I_x = I_y = \int_{\pi/2}^0 a^3 cos^6 t sin^3 t(-3a cos^2 t sint)dt = 3a^4 \int_0^{\pi/2} sin^4 t \cdot cos^8 t dt =$$

$$= 3a^4 \int_0^{\pi/2} \left(\frac{1-cos2t}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1+cos2t}{2}\right)^4 dt = \frac{3a^4}{64}\int_0^{\pi/2} \left(1-cos^2 2t\right)^2 \cdot \left(1+cos2t\right)^4 dt =$$

$$=\frac{3a^4}{64}\int\limits_0^{\pi/2}\left(1-2\cos^2 2t+\cos^4 2t\right)\cdot\left(1+2\cos 2t+\cos^2 2t\right)dt=$$

$$=\frac{3a^4}{64}\int\limits_0^{\pi/2}(1+2\cos 2t-\frac{1+\cos 4t}{2}-4(1-\sin^2 2t)\cos 2t-\frac{(1+\cos 4t)^2}{4}+$$

$$+\frac{(1+\cos 4t)^3}{8}dt=\left\{\begin{array}{c} \sin 2t=u; \\ \cos 2t dt=du/2; \\ t=0, \quad u_1=0; \\ t=\pi/2, \quad u_2=0. \end{array}\right\}=$$

$$=\frac{3a^4}{64}\int\limits_0^{\pi/2}\left(1+2\cos 2t-\frac{1+\cos 4t}{2}-\frac{1+2\cos 4t+\cos^2 4t}{4}+\frac{1+3\cos 4t+3\cos^2 4t}{8}+\right.$$

$$\left.+\frac{\cos^3 4t}{8}\right)=\frac{3a^4}{64}\left(t+\sin 2t-\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{4}\sin 4t\right)-\frac{1}{4}\left(t+\frac{1}{2}\sin 4t+\frac{1}{2}(t+\frac{1}{8}\sin 8t)\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{8}\left(t+\frac{3}{4}\sin 4t+\frac{3}{2}(t+\frac{1}{8}\sin 8t)\right)\right|_0^{\pi/2}=\frac{3a^4}{64}\left[\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}-\frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)+\frac{1}{8}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{3\pi}{4}\right)\right]=\frac{21\pi a^4}{2048}.$$

Таким образом,

$$I_x=I_y=\frac{21\pi a^4}{2048}.$$

в) M_x, M_y, I_x, I_y, x_c и y_c фигуры, ограниченной кардиоидой $\rho=a(1+\cos\varphi)$, от $\varphi_1=0$ до $\varphi_2=\pi$, будут определяться по формулам (51), (52) и (60) соответственно. Ранее, в примере 22, была вычислена площадь, ограниченная данной кривой: $S_{фиг} = \frac{3\pi a^2}{2}$. В нашем случае она равна $\frac{3\pi a^2}{4}$, как половина всей площади фигуры.

$$M_x = \frac{1}{4}\int_0^{\pi} a^3(1+cos\varphi)^3 sin\varphi d\varphi = \left\{\begin{matrix} cos\varphi = t; \\ sin\varphi d\varphi = -dt; \\ \varphi = 0, \quad t_1 = 1; \\ \varphi = \pi, \quad t_2 = -1. \end{matrix}\right\} = a^3 \int_{-1}^{1} (1+t)^3 dt =$$

$$= \frac{a^3}{4}\int_{-1}^{1}(1+3t^2+3t+t^3)dt = \frac{a^3}{4}\left(t+t^3+\frac{3t^2}{2}+\frac{t^4}{4}\right)\Bigg|_{-1}^{1} = \frac{a^3}{4}\left(4+\frac{3}{2}+\frac{1}{4}-\frac{3}{2}-\frac{1}{4}\right) = a^3.$$

$$M_y = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} a^3(1+cos\varphi)^3 cos\varphi d\varphi = \frac{a^3}{2}\int_0^{\pi}(1+3cos\varphi+3cos^2\varphi+cos^3\varphi)cos\varphi d\varphi =$$

$$= \frac{a^3}{2}\int_0^{\pi}(cos\varphi+3cos^2\varphi+3cos^3\varphi+cos^4\varphi)d\varphi = \frac{a^3}{2}\int_0^{\pi}\left[cos\varphi+\frac{3}{2}(1+cos2\varphi)+\right.$$

$$\left.+3(1-sin^2\varphi)cos\varphi+\frac{(1+cos2\varphi)^2}{4})d\varphi\right] = \left\{\begin{matrix} sin\varphi = t; \\ cos\varphi d\varphi = dt; \\ \varphi = 0, \quad t_1 = 0; \\ \varphi = \pi, \quad t_2 = 0. \end{matrix}\right\} =$$

$$= \frac{a^3}{2}\int_0^{\pi}\left[cos\varphi+\frac{3}{2}(1+cos2\varphi)+\frac{1}{4}\left(1+2cos2\varphi+\frac{1+cos4\varphi}{2}\right)\right] =$$

$$= \frac{a^3}{2}\left(sin\varphi+\frac{3}{2}(\varphi+\frac{1}{2}sin2\varphi)+\frac{1}{4}(\varphi+sin2\varphi+\frac{\varphi}{2}+\frac{sin4\varphi}{8}\right)\Bigg|_0^{\pi} =$$

$$=\frac{a^3}{2}\left(\frac{3\pi}{2}+\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{8}\right)=\frac{a^3}{2}\cdot\frac{15\pi}{8}=\frac{15\pi a^3}{16}.$$

Таким образом, $x_c=\frac{15\pi a^3}{16}:\frac{3\pi a^2}{32}=10a$; $y_c=a^3:\frac{3\pi a^2}{32}=\frac{32a}{3\pi}$.

Далее найдем I_x и I_y по формулам (52).

$$I_x=\frac{1}{6}\int_0^{\pi}a^4(1+cos\varphi)^4 sin^2\varphi d\varphi=\frac{a^4}{6}\int_0^{\pi}\left(sin^2\varphi+4sin^2\varphi cos\varphi+6sin^2\varphi cos^2\varphi+\right.$$

$$\left.+4sin^2\varphi cos^3\varphi+sin^2\varphi cos^4\varphi\right)d\varphi=\{\text{см. пример } 48в\}=$$

$$=\frac{a^4}{6}\int_0^{\pi}\left(\frac{1-cos2\varphi}{2}+\frac{3}{2}\cdot\frac{1-cos4\varphi}{2}+\frac{1-cos^2 2\varphi+cos2\varphi-cos^2 2\varphi cos2\varphi}{8}\right)d\varphi=$$

$$=\frac{a^4}{6}\int_0^{\pi}\left(\frac{1-cos2\varphi}{2}+\frac{3}{2}\cdot\frac{1-cos4\varphi}{2}+\frac{1-cos^2 2\varphi+cos2\varphi}{8}-(1-sin^2 2\varphi)cos2\varphi\right)d\varphi=$$

$$=\left\{\begin{array}{l} sin2\varphi=t; \\ cos2\varphi d\varphi=dt/2; \\ \varphi=0, \quad t_1=0; \\ \varphi=\pi, \quad t_2=0. \end{array}\right\}=\frac{a^4}{6}\left(\frac{1}{2}\left(\varphi-\frac{1}{2}sin2\varphi\right)+\frac{3}{4}\left(\varphi-\frac{1}{4}sin4\varphi\right)+\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{8}\left(\varphi-\frac{1}{2}(\varphi+\frac{1}{4}sin4\varphi)+\frac{1}{2}sin2\varphi\right)\right)\right|_0^{\pi}=\frac{a^4}{6}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{3\pi}{4}+\frac{1}{8}\left(\pi-\frac{\pi}{2}\right)\right)=\frac{7\pi a^4}{32}.$$

Итак, $I_x = \dfrac{7\pi a^4}{32}$.

$$I_y = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi} a^4(1+cos\varphi)^4 cos^2\varphi d\varphi =$$

$$= \frac{a^4}{2}\int\limits_0^{\pi} (cos^2\varphi + 4cos^3\varphi + 6cos^4\varphi + 4cos^5\varphi + cos^6\varphi)d\varphi = \left[см. пример\ 48в \right]$$

$$= \frac{a^4}{2}\int\limits_0^{\pi}\left(\frac{1+cos2\varphi}{2} + \frac{3(1+2cos2\varphi)}{2} + \frac{3(1+cos4\varphi)}{4} + \frac{1}{8}\left(1+3cos2\varphi + \frac{3(1+cos4\varphi)}{2}\right)\right)d\varphi =$$

$$= \frac{a^4}{2}\left(\frac{1}{2}\left(\varphi + \frac{1}{2}sin2\varphi\right) + \frac{3}{2}\left(\varphi + sin2\varphi\right) + \frac{3}{4}\left(\varphi + \frac{1}{4}sin4\varphi\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{8}\left(\varphi + \frac{3}{2}sin2\varphi + \frac{3}{2}\left(\varphi + \frac{1}{4}sin4\varphi\right)\right)\right)\Bigg|_0^{\pi} = \frac{a^4}{2}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{2} + \frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{8} + \frac{3\pi}{16}\right) = \frac{49\pi a^4}{32}.$$

Таким образом, $I_y = \dfrac{49\pi a^4}{32}$.

Контрольные вопросы

1. Записать формулу вычисления давления жидкости; работы силы; кинетической энергии; силы, с которой электрические заряды отталкивают друг друга; пути, пройденного материальной точкой.

2. Что называется статическим моментом системы материальных точек относительно оси Ох. Записать формулу его вычисления.

3. Что называется статическим моментом системы материальных точек относительно оси Оу.

4. Что называется моментом инерции системы материальных точек относительно оси Ох. Записать формулу его вычисления.

5. Что называется моментом инерции системы материальных точек относительно оси Оу. Записать формулу его вычисления.

6. Записать формулы вычисления статического момента относительно оси Оу плоской фигуры, ограниченной кривой, заданной в: а) декартовых координатах; б) параметрической форме; в) полярных координатах.

7. Записать формулы вычисления момента инерции относительно оси Ох плоской кривой, заданной в: а) декартовых координатах; б) параметрической форме; в) полярных координатах.

8. Записать формулы вычисления момента инерции относительно оси Оу плоской фигуры, ограниченной кривой, заданной в: а) декартовых координатах; б) параметрической форме; в) полярных координатах.

9. Дать определение центра тяжести.

10. Записать формулы вычисления координат центра тяжести плоской кривой, заданной в: а) декартовых координатах; б) параметрической форме; в) полярных координатах.

11. Вывести формулы вычисления статических моментов объемных тел. И как тогда запишутся формулы координат центра тяжести объемных тел.

Задание 9. Решить самостоятельно следующие задачи.

1. Найти координаты центра тяжести четверти окружности $x^2+y^2=25$. (Ответ: $(\frac{10}{\pi}; \frac{10}{\pi})$.)

2. Найти координаты центра тяжести полуокружности $x^2+y^2=16$. (Ответ: $(0; \frac{8}{\pi})$.)

3. Найти момент инерции относительно осей Ох и Оу треугольника, ограниченного линиями $x=0$, $y=0$ и $\frac{x}{5}+\frac{y}{6}=1$. (Ответ: $I_x=90$; $I_y=\frac{125}{2}$.)

4. Найти координаты центра тяжести однородной плоской фигуры, ограниченной параболой $y=4-x^2$ и осью Ох. (Ответ: (0; 1,6).)

5. Найти статические моменты относительно осей Ох и Оу дуги параболы $y^2 = 2x$ от $x = 0$ до $x = 2$ ($y > 0$).

(Ответ: $M_x = \frac{1}{3}(5\sqrt{5} - 1)$; $M_y = \frac{9}{8}\sqrt{5} + \frac{1}{16} ln(\sqrt{2} + 1)$.)

6. Найти координаты центра тяжести однородной плоской фигуры, ограниченной кривой $y = cosx$ и отрезком оси Ох от $x = -\frac{\pi}{2}$ до $x = \frac{\pi}{2}$.

(Ответ: (0; $\frac{\pi}{8}$).)

7. Найти момент инерции трапеции *ABCD* относительно ее основания *AD*, если *AD* равно *а*, *ВС* = *в*, а высота равна h однородной плоской фигуры, ограниченной параболой и осью Ох. (Ответ: $\frac{a + 3в}{12} h^3$.)

8. Однородной плоской фигуры, ограниченной первой арки циклоиды $x = 4(t - sint)$, $y = 4(1 - cost)$, ($0 \le t \le 2\pi$). (Ответ: (4π; $5\frac{1}{3}$).)

9. Найти декартовы координаты центра тяжести однородной плоской фигуры, ограниченной кривой $\rho = 2\cos^3 \varphi$. (Ответ: ($\frac{21}{20}$; 0).)

10. Найти момент инерции трапеции *ABCD* относительно ее основания *AD*, если *AD* равно 4 *см*, *ВС* = 3 *см*, а высота равна 2 *см* однородной плоской фигуры, ограниченной параболой и осью Ох. (Ответ: $8\frac{2}{3}$.)

11. Найти координаты центра тяжести плоской однородной фигуры, ограниченной параболой $y = -x^2 + 2x$ и прямой $y = -x$. (Ответ: (1,5; -0,6).)

12. Найти статический момент относительно Оу плоской фигуры, ограниченной кривой $y = -x^2 + 1$ и осью Ох. (Ответ: 0.)

Раздел VI. НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

6.1. Несобственные интегралы с бесконечными пределами интегрирования от непрерывных функций

В п.1.1 понятие определенного интеграла $\int\limits_a^в f(x)dx$ было дано для случая, когда пределы интегрирования a и $в$ – числа конечные, а подынтегральная функция $f(x)$ – непрерывна на отрезке $[a; в]$. В этом разделе обобщим понятие определенного интеграла.

Определение 7. Определенный интеграл от непрерывной функции с бесконечным промежутком интегрирования называется несобственным интегралом I рода.

Пусть функция $y = f(x)$ определена для всех $x \geq a$ и интегрируема на любом отрезке $[a; B]$. Тогда несобственный интеграл I рода $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ от функции $y = f(x)$ в пределах от *a* до $+\infty$ (рис. 41) будет определяться равенством:

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{B \to +\infty} \int\limits_a^{B} f(x)dx = \begin{cases} d = const, сходится \\ \pm\infty \text{ или не существует, расходится.} \end{cases} \qquad (61)$$

Аналогично определяются интегралы $\int\limits_{-\infty}^{в} f(x)dx$ (рис.42), $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ (рис.43).

$$\int\limits_{-\infty}^{в} f(x)dx = \lim_{A \to -\infty} \int\limits_A^{в} f(x)dx = \begin{cases} d = const, сходится \\ \pm\infty \text{ или не существует, расходится.} \end{cases} \qquad (62)$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int\limits_{c}^{+\infty} f(x)dx =$$

$$= \lim_{A\to-\infty}\int_A^c f(x)dx + \lim_{B\to+\infty}\int_c^B f(x)dx, \qquad (63)$$

$-\infty < c < +\infty$. Интеграл (63) сходится, если оба предела существуют. (Вместо c можно взять любое конечное значение оси Ox).

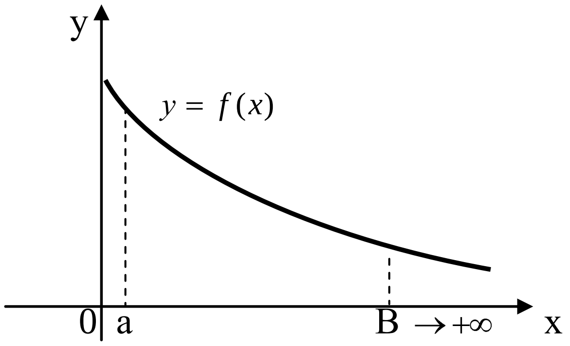


Рис. 41

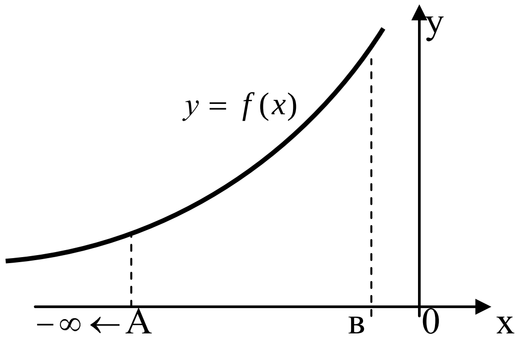


Рис. 42

Пример 49. Вычислить несобственные интегралы (или установить их сходимость):

$$1)\ \int_0^{+\infty} cosxdx;\ 2)\ \int_{-\infty}^{-\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2+9};\ 3)\ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2};\ 4)\ \int_0^{+\infty} x\cdot sinxdx;$$

$$5)\ \int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{(2-x)ln^2(2-x)};\ 6)\ \int_5^{+\infty} \frac{dx}{x^2-3x-4};\ 7)\ \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}.$$

Решение. 1) По формуле (61) получим:

$$\int_0^{+\infty} cosxdx = \lim_{B\to+\infty}\int_0^B cosxdx = \lim_{B\to+\infty} sinx\Big|_0^B = \lim_{B\to+\infty}(sinB - sin0) = \lim_{B\to+\infty} sinB$$

Предел не существует. Следовательно, данный интеграл расходится.

$$2)\ \int_{-\infty}^{-\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2+9} = \lim_{A\to-\infty} \int_{A}^{-\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2+9} = \lim_{A\to-\infty} \left(\frac{1}{3} arctg \frac{x}{3} \right) \Bigg|_{A}^{-\sqrt{3}} =$$

$$= \frac{1}{3} \lim_{A\to-\infty} \left(arctg \frac{-\sqrt{3}}{3} - arctg \frac{A}{3} \right) = \frac{1}{3} \left(-\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} \right) = \frac{\pi}{9}$$

Следовательно, интеграл сходится.

3) Пользуясь равенством (63) и выбирая $c = 0$, т.к. в этой точке

подынтегральная функция $f(x) = \dfrac{1}{x^2+2x+2}$ непрерывна, будем иметь:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2} = \int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{x^2+2x+2} + \int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2} = \lim_{A\to-\infty} \int_{A}^{0} \frac{dx}{(x+1)^2+1} +$$

$$+ \lim_{B\to+\infty} \int_{0}^{B} \frac{dx}{(x+1)^2+1} = \lim_{A\to-\infty} \left[arctg(x+1) \right]_{A}^{0} + \lim_{B\to+\infty} \left[arctg(x+1) \right]_{0}^{B} =$$

$$= \lim_{A\to-\infty} \left(arctg 1 - arctg(A+1) \right) + \lim_{B\to+\infty} \left(arctg(B+1) - arctg 1 \right) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi .$$

Данный несобственный интеграл сходится.

4) По формуле (61) имеем:

$$\int_{0}^{+\infty} x \cdot sinx dx = \lim_{B\to+\infty} \int_{0}^{B} x \cdot sinx dx .$$

Применим правило интегрирования по частям, полагая

$$\left\{\begin{matrix} x = u; & dx = du; \\ sinxdx = dv; & cosx = v. \end{matrix}\right\},$$

будем иметь:

$$\int\limits_0^{+\infty} x \cdot sinxdx = \lim_{B\to+\infty} \int\limits_0^B x \cdot sinxdx = \lim_{B\to+\infty} \left(-x\ cosx\Big|_0^B + \int\limits_0^B cosxdx\right) =$$

$$= \lim_{B\to+\infty} (-BcosB + sinB) = -\lim_{B\to+\infty} BcosB + \lim_{B\to+\infty} sinB.$$

Пределы не существуют, следовательно, несобственный интеграл расходится.

5) Прежде вычислим неопределенный интеграл от подынтегральной функции при помощи метода подстановки.

$$\int \frac{dx}{(2-x)ln^2(2-x)} = \left\{\begin{matrix} ln(2-x) = t; \\ \dfrac{dx}{2-x} = -dt. \end{matrix}\right\} = -\int \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{t} + C.$$

Подставим в формулу (62), тогда искомый интеграл будет равен:

$$\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{dx}{(2-x)ln^2(2-x)} = \lim_{A\to-\infty} \int\limits_A^0 \frac{dx}{(2-x)ln^2(2-x)} = \lim_{A\to-\infty} \frac{1}{ln(2-x)}\Big|_A^0 =$$

$$= \lim_{A\to-\infty}\left(\frac{1}{ln2} - \frac{1}{ln(2-A)}\right) = \frac{1}{ln2} - \frac{1}{ln\infty} = \frac{1}{ln2} - 0 = \frac{1}{ln2}.$$

Следовательно, интеграл сходится.

6) Для удобства вычислим сначала неопределенный интеграл от данной подынтегральной функции.

$$\int \frac{dx}{x^2-3x-4}=\int \frac{dx}{x^2-2\cdot\frac{3}{2}x+\frac{9}{4}-\frac{9}{4}-4}=\int \frac{dx}{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{25}{4}}=\frac{1}{5}ln\frac{|x-4|}{|x+1|}.$$

Тогда по формуле (61) имеем:

$$\int_5^{+\infty} \frac{dx}{x^2-3x-4}=\lim_{B\to+\infty}\int_5^{B} \frac{dx}{x^2-3x-4}=\lim_{B\to+\infty}\frac{1}{5}ln\frac{|x-4|}{|x+1|}\Bigg|_5^B=$$

$$=\frac{1}{5}\lim_{B\to+\infty}\left(ln\left|\frac{B-4}{B+1}\right|-ln\left|\frac{1}{4}\right|\right)=\frac{1}{5}\lim_{B\to+\infty}\left(ln\left|\frac{B-4}{B+1}\right|-ln\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{5}\left(ln1-ln\frac{1}{6}\right)=\frac{ln6}{5}.$$

Следовательно, искомый интеграл сходится.

7) Вычислим для начала неопределенный интеграл:

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}=\left\{\begin{matrix} x=\frac{1}{t}; & dx=-\frac{dt}{t^2}; \\ \sqrt{x^2-1}=\frac{\sqrt{1-t^2}}{t}. & \end{matrix}\right\}=-\int \frac{t^2dt}{t^2\sqrt{1-t^2}}=$$

$$-arcsint+c=-arcsin\frac{1}{x}+C.$$

Тогда искомый интеграл будет равен:

$$\int_{2}^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}=\lim_{B\to+\infty}\int_{2}^{B}\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}=\lim_{B\to+\infty}\left(-arcsin\frac{1}{x}\right)\Bigg|_2^B=\frac{\pi}{6}.$$

Следовательно, несобственный интеграл сходится.

Контрольные вопросы

1. Дайте определение несобственного интеграла I рода.

2. Запишите формулу вычисления несобственного интеграла I рода с левым бесконечным пределом интегрирования. Приведите примеры.

3. Запишите формулу вычисления несобственного интеграла I рода с правым бесконечным пределом интегрирования. Приведите примеры.

4. Запишите формулу вычисления несобственного интеграла I рода, у которого оба предела интегрирования бесконечны. Приведите примеры.

5. Укажите геометрический смысл несобственного интеграла I рода.

6. Может ли при вращении бесконечно протяженной кривой вокруг какой – либо прямой образоваться тело конечного объема? Рассмотрите пример кривой $y=e^{-x}$ $(0\le x<+\infty)$, вращающееся вокруг оси Ох.

Задание 10. Вычислить самостоятельно несобственные интегралы I рода (или установить их сходимость).

1) $\int_{0}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+4}$;

(Ответ: $\frac{\pi}{4}$ (сход.))

2) $\int_{-\infty}^{1}\frac{(x+3)dx}{\sqrt{2-x}}$;

(Ответ: расход.)

3) $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x}dx$;

(Ответ: расход.)

4) $\int_{1}^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt[3]{x^5}}$;

(Ответ: 1,5 (сход.))

5) $\int_{-\infty}^{2}\frac{xdx}{\sqrt[3]{x^2+4}}$;

(Ответ: расход.)

6) $\int_{1}^{+\infty}\frac{\sqrt{x}dx}{1+x}$;

(Ответ: (расход.))

7) $\int\limits_{1/2}^{+\infty} \frac{arctgxdx}{x^2}$;
(Ответ: (расход.)

8) $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x(1+x)}$;
(Ответ: (расход.))

9) $\int\limits_{0}^{+\infty} x^2 \cdot e^{-x^3} dx$;
(Ответ: 1/3 (сход.))

10) $\int\limits_{2}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{(x-1)^3}}$;
(Ответ: 2 (сход.))

11) $\int\limits_{-\infty}^{\pi/2} x \cdot sinxdx$;
(Ответ: *не существует*)

12) $\int\limits_{\sqrt{3}}^{+\infty} \frac{dx}{x^2(1+x^2)}$.
(Ответ: $\frac{\pi - 2\sqrt{3}}{6}$ (сход.))

6.2 . Несобственные интегралы от неограниченных функций

Определение 8. Определенный интеграл с конечным промежутком интегрирования от функции, имеющей бесконечный разрыв в промежутке интегрирования, называется несобственным интегралом II рода.

Пусть дан интеграл $\int\limits_{a}^{в} f(x)dx$. Если подынтегральная функция $y = f(x)$ непрерывна при $a < x \leq в$ и имеет бесконечный разрыв в точке $x = a$ (рис. 44), т.е. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$, то по определению:

$$\int\limits_{a}^{в} f(x)dx = \lim\limits_{\varepsilon \to +0} \int\limits_{a+\varepsilon}^{в} f(x)dx = \begin{cases} d = const, сходится \\ \pm\infty \; или \; не \; существует, \; расходится, \end{cases} \quad (64)$$

($\varepsilon > 0$).

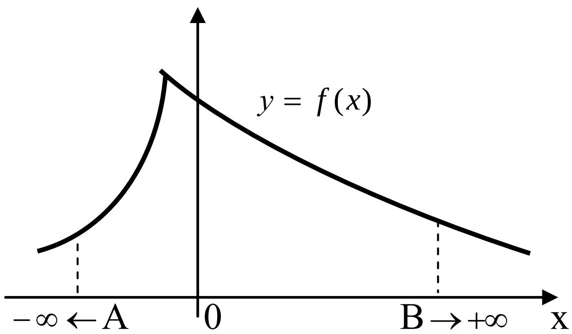


Рис. 43

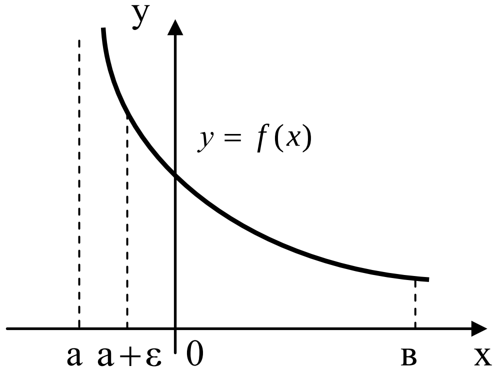


Рис.44

Аналогично определяется интеграл от функции, имеющей бесконечный разрыв в точке $x=в$ (рис.45) ($\varepsilon>0$).

$$\int\limits_a^в f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_a^{в-\varepsilon} f(x)dx=\begin{cases}д=const,\ сходится\\ \pm\infty\ или\ не\ существует,\ расходится.\end{cases} \tag{65}$$

Если функция $y=f(x)$ непрерывна при $a\le x<c$ и $c<x\le в$ и имеет бесконечный разрыв в точке $x=c$ (рис.46), то

$$\int\limits_a^в f(x)dx=\int\limits_a^c f(x)dx+\int\limits_c^в f(x)dx=$$

$$=\lim_{\varepsilon_1\to+0}\int\limits_a^{c-\varepsilon_1} f(x)dx+\lim_{\varepsilon_2\to+0}\int\limits_{c+\varepsilon_2}^{в} f(x)dx,\quad (\varepsilon_1,\varepsilon_2>0) \tag{66}$$

Интеграл (66) сходится, если оба предела указанных в формуле существуют, и расходится, если хотя бы один из пределов не существует.

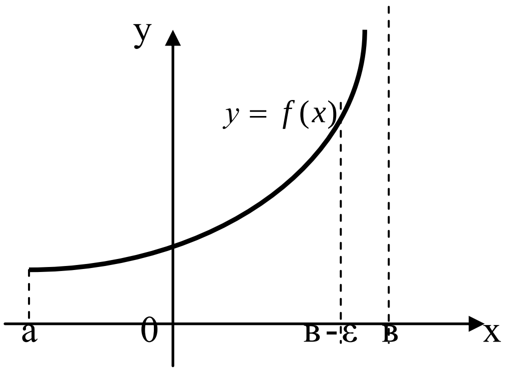


Рис.45

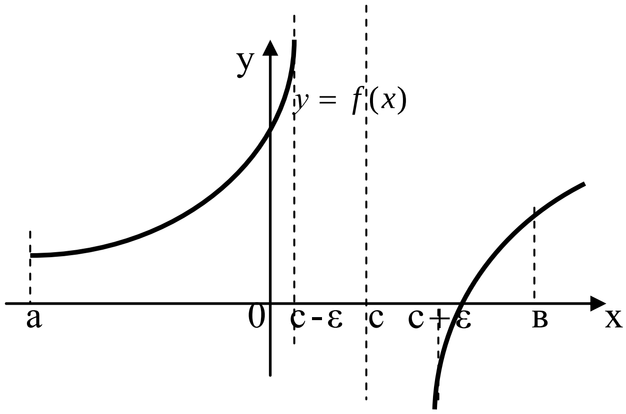


Рис. 46

Контрольные вопросы

1. Дайте определение несобственного интеграла II рода.

2. Сформулируйте понятие несобственного интеграла от функции, разрывной на левом конце промежутка (а; в]- в точке $x=a$. Приведите примеры.

3. Сформулируйте понятие несобственного интеграла от функции, разрывной на правом конце промежутка [а; в) – в точке $x=в$. Приведите примеры.

4. Сформулируйте понятие несобственного интеграла от функции, имеющей бесконечный разрыв во внутренней точке $x=c$ интервала (а; в). Приведите примеры.

5. Укажите геометрический смысл несобственного интеграла II рода.

6. Может ли при вращении бесконечно протяженной кривой вокруг какой – либо прямой образоваться тело конечного объема? Рассмотрите пример кривой $y=e^{-x}$ $(0\le x<+\infty)$, вращающееся вокруг оси Ох.

7. Какие из приведенных интегралов являются несобственными:

$$1)\ \int_0^{+\infty} x\cdot\sin x dx;\quad 2)\ \int_0^1 \frac{2}{x+1}dx;\quad 3)\ \int_{-4}^5 \frac{x-3}{x^2-16}dx;\quad 4)\ \int_{-\infty}^{+\infty} x\cdot\sin x dx;$$

$$5)\ \int_{-\infty}^1 \frac{sinx}{x-5}dx;\quad 6)\ \int_{-1}^0 \frac{x-3}{x^3+1}dx;\quad 7)\ \int_{-2}^3 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2+1}};\quad 8)\ \int_{-1}^3 \frac{dx}{x^2-2x-3}?$$

Пример 50. Вычислить несобственные интегралы II рода (или установить их сходимость).

$$1)\ \int_2^5 \frac{dx}{(x-2)^2};\quad 2)\ \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}};\quad 3)\ \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}};\quad 4)\ \int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}};$$

$$5)\ \int_1^2 \frac{x-2}{\sqrt{x-1}}dx;\ 6)\ \int_{-1}^3 \frac{dx}{x};\quad 7)\ \int_{-1}^5 \frac{dx}{x^2-5x+6}.$$

Решение. 1) Подынтегральная функция $f(x)=\dfrac{1}{(x-2)^2}$ непрерывна во всех точках полуинтервала (2; 5] и терпит разрыв при $x=2$. Пользуясь равенством (64), будем иметь:

$$\int_2^5 \frac{dx}{(x-2)^2} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{2+\varepsilon}^5 \frac{dx}{(x-2)^2} = \lim_{\varepsilon\to 0}\left[-\frac{1}{x-2}\right]_{2+\varepsilon}^5 = \lim_{\varepsilon\to 0}\left[-\frac{1}{3}+\frac{1}{\varepsilon}\right] = -\frac{1}{3}+\frac{1}{0} = \infty .$$

Следовательно, интеграл расходится.

2) Подынтегральная функция $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ непрерывна при $0\le x<1$ и имеет бесконечный разрыв в точке верхнего предела интегрирования – в $x=1$. Поэтому, в силу формулы (65) получим:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{1-\varepsilon}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(arcsin x\right)\Big|_0^{1-\varepsilon} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\left[arcsin(1-\varepsilon)-arcsin 0\right] = \lim_{\varepsilon\to 0} arcsin(1-\varepsilon) = \frac{\pi}{2}.$$

Следовательно, интеграл сходится.

3) Подынтегральная функция терпит разрыв во внутренней точке отрезка [0; 2] – в точке $x=1$. Следовательно, по формулам (66), (64) и (65) получим:

$$\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}} + \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}} = \lim_{\varepsilon_1\to 0}\int_0^{1-\varepsilon_1}(x-1)^{-2/3}dx +$$

$$+\lim_{\varepsilon_2\to 0}\int_{1+\varepsilon_2}^2 (x-1)^{-2/3}dx = \lim_{\varepsilon_1\to 0} 3\left(x-1\right)^{1/3}\Big|_0^{1-\varepsilon_1} + \lim_{\varepsilon_2\to 0} 3\left(x-1\right)^{1/3}\Big|_{1+\varepsilon_2}^2 =$$

$$=3\cdot\lim_{\varepsilon_1\to 0}\left[\left(1-\varepsilon_1-1\right)^{1/3}-\left(-1\right)^{1/3}\right]+3\cdot\lim_{\varepsilon_2\to 0}\left[\left(2-1\right)^{1/3}-\left(1+\varepsilon_2-1\right)^{1/3}\right]=3+3=6.$$

Следовательно, интеграл сходится.

4) Подынтегральная функция терпит разрыв в точке $x=1$.

$$\int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(-\arcsin\frac{1}{x}\right)\Bigg|_{1+\varepsilon}^{2} = -\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{3}.$$

Следовательно, исходный интеграл сходится.

5) Сначала вычислим неопределенный интеграл от подынтегральной функции.

$$\int \frac{x-2}{\sqrt{x-1}}dx = \left\{\begin{matrix}\sqrt{x-1}=t \Rightarrow x-1=t^2\\ x=1+t^2 \Rightarrow dx=2tdt\end{matrix}\right\} = \int\frac{t^2-1}{t}\cdot 2tdt = 2\left(\frac{t^3}{3}-t\right)+C=$$

$$=2\left[\frac{\left(\sqrt{x-1}\right)^3}{3}-\sqrt{x-1}\right]+C.$$

Тогда искомый интеграл будет равен:

$$\int_1^2 \frac{x-2}{\sqrt{x-1}}dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{1-\varepsilon}^{2}\frac{x-2}{\sqrt{x-1}}dx = 2\cdot\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{\left(\sqrt{x-1}\right)^3}{3}-\sqrt{x-1}\right)\Bigg|_{1+\varepsilon}^{2} =$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\frac{\left(\sqrt{2-1}\right)^3}{3}-\sqrt{2-1}-\frac{\left(\sqrt{1+\varepsilon-1}\right)^3}{3}+\sqrt{1+\varepsilon-1}\right]=-\frac{4}{3} \Rightarrow \text{сходится.}$$

6) Функция $f(x)=\dfrac{1}{x}$ непрерывна во всех точках промежутка $[-1;3]$, кроме точки $x=0$. Данный интеграл достаточно вычислить на каком – либо внутреннем отрезке исходного, содержащий точку $x=0$, например, на отрезке $[-1;0]$. Тогда

$$\int_{-1}^{0}\frac{dx}{x}=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{1}^{0-\varepsilon}\frac{dx}{x}=\lim_{\varepsilon\to 0} ln\ |x|\Big|_{-1}^{0-\varepsilon}=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(ln|0-\varepsilon|-ln|-1|\right)=\lim_{\varepsilon\to 0} ln\varepsilon-0=-\infty.$$

Следовательно, данный интеграл расходится.

7) Подынтегральная функция $f(x)=\dfrac{1}{x^2-5x+6}$ терпит разрыв при $x=2$ и $x=3$. Для сходимости несобственного интеграла $\int_{a}^{в} f(x)dx$ необходимо конечное значение интеграла $\int_{c_i}^{c_{i+1}} f(x)dx$ для любых $c_i, c_{i+1}\in [a;в]$. И тогда, рассматривая исходный интеграл $\int_{-1}^{5}\dfrac{dx}{x^2-5x+6}$ на отрезке $[-1;2]$, будем иметь:

$$\int_{-1}^{2}\frac{dx}{x^2-5x+6}=\lim_{\varepsilon\to 0} ln\left|\frac{x-3}{x-2}\right|\Bigg|_{-1}^{2}=\lim_{\varepsilon\to 0}\left[ln\frac{1}{\varepsilon}-ln\frac{4}{3}\right]=\infty.$$

Следовательно, интеграл расходится.

Задание 11. Вычислить самостоятельно несобственные интегралы (или установить их сходимость).

1) $\int_{0}^{1}\dfrac{dx}{\sqrt{x}}$;
(Ответ: 2 (сход.))

2) $\int_{0}^{2}\dfrac{dx}{x^3}$;
(Ответ: расход.)

3) $\int_{0}^{1}\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$;
(Ответ: $\frac{\pi}{2}$ (сход.))

4) $\int_{2}^{3}\dfrac{3xdx}{\sqrt[4]{x^2-4}}$;
(Ответ: $2\sqrt[4]{125}$ (сход.))

5) $\int_{1}^{2}\dfrac{xdx}{\sqrt{x-1}}$;
(Ответ: $8\dfrac{2}{3}$ (сход.))

6) $\int_{-1}^{1}\dfrac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$;
(Ответ: 6 (сход.))

7) $\int\limits_{2}^{6} \frac{dx}{(4-x)^3}$;

(Ответ: (расход.))

8) $\int\limits_{0}^{1} \frac{(x+1)dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}$;

(Ответ: $5\frac{1}{4}$ (сход.))

9) $\int\limits_{0}^{2} \frac{dx}{(x-1)^2}$;

(Ответ: расход.)

10) $\int\limits_{0}^{a} \frac{2xdx}{\sqrt[3]{(x^2-a^2)^2}}$;

(Ответ: $\frac{5}{3}\sqrt[5]{a^6}$ (сход.))

11) $\int\limits_{0}^{2} \frac{dx}{x^2-4x+3}$;

(Ответ: расход.)

12) $\int\limits_{1}^{2} \frac{dx}{x\sqrt{x-1}}$.

(Ответ: $\frac{\pi}{2}$ (сход.))

6.3. Геометрическое и физическое приложения несобственных интегралов

Пример 51. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой – *локоном Аньези* $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ и ее асимптотой (рис. 47).

Решение. Функция $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ непрерывна во всей числовой оси, причем $y=0$ является ее асимптотой. Вычисление площади фигуры сводится к вычислению несобственного интеграла $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ (геометрический смысл несобственного интеграла I рода).

Таким образом,

$$S_{фиг} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}.$$

В силу симметричности данной фигуры относительно оси Oy имеем:

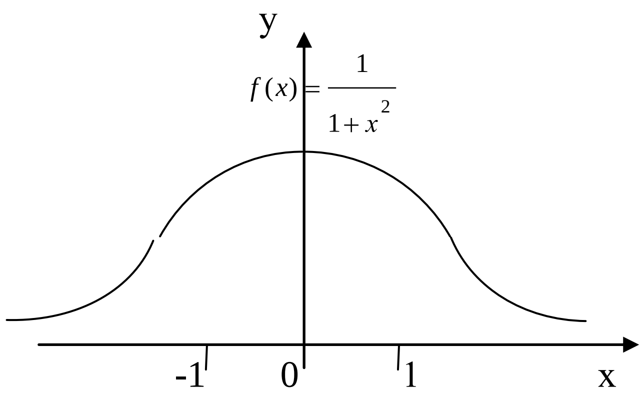


Рис. 47

$$S_{фиг}=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=2\int_{0}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=$$

$$2\lim_{B\to+\infty}\int_{0}^{B}\frac{dx}{1+x^2}=2\lim_{B\to+\infty} arctgx\Big|_0^B$$

$$=2\lim_{B\to+\infty}(arctgB-arctg0)==2\left(\frac{\pi}{2}-0\right)=\pi.$$

Пример 52. Найти площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси Ox дуги кривой $y=e^{-x}$ от $x=0$ до $x=+\infty$.

Решение. По формуле (27) искомая площадь поверхности равна:

$$S_x=2\pi\int_0^{+\infty}e^{-x}\sqrt{1+e^{-2x}}dx=\left\{\begin{array}{c} e^{-x}=t; \\ -e^{-x}dx=dt; \\ при\;\; x=0 \quad t=1; \\ при\;\; x=+\infty \quad t=0. \end{array}\right\}=-2\pi\int_1^0\sqrt{1+t^2}dt=$$

$$=2\pi\int_0^1\sqrt{1+t^2}dt=2\pi\cdot\frac{1}{2}\left[t\sqrt{1+t^2}+ln\left(t+\sqrt{1+t^2}\right)\right]_0^1=\pi\left[\sqrt{2}+ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right].$$

Пример 53. Пусть бесконечная (в обе стороны) балка, лежащая на упругом основании, изгибается сосредоточенной силой *P*. Если совместить ось Ox с первоначальным положением оси балки (до изгиба), а ось Oy провести через точку O приложения силы и направить вниз, то после изгиба ось балки будет иметь уравнение

$$y=\frac{P\alpha}{2k}e^{-\alpha|x|}\left(cos\alpha x+sin\alpha|x|\right),$$

где α и k – некоторые постоянные. Вычислить потенциальную энергию упругой деформации по формуле

$$W=Ee\int\limits_{0}^{+\infty}(y'')^2dx \qquad (E,e-const).$$

Решение. Найдем y'':

$$y''=\frac{P\alpha^3}{k}\left[(cos\alpha x+sin\alpha x)-2(cos\alpha x-sin\alpha x)+(-cos\alpha x-sin\alpha x)\right]=$$

$$=\frac{P\alpha^3}{k}e^{-\alpha x}(sin\alpha x-cos\alpha x).$$

Отсюда

$$W=\frac{P^2\alpha^6Ee}{k^2}\int\limits_{0}^{+\infty}e^{-2\alpha x}(1-2sin\alpha x cos\alpha x)dx=\frac{P^2\alpha^6Ee}{k^2}\left[\frac{1}{2\alpha}-\frac{2\alpha}{8\alpha^2}\right]=\frac{P^2\alpha^5Ee}{4k^2}$$

Задание 12. Решите самостоятельно задачи на приложения несобственных интегралов.

1. Вычислить площадь петли декартова листа $x^3+y^3-3axy=0$ (рис. 48). (Ответ: $\frac{3a^2}{2}$.)

2. Найти объем тела, образованного вращением циссоиды $y^2=\frac{x^3}{2a-x}$ вокруг ее асимптоты $x=2a$ (рис. 49). (Ответ: $2\pi^2a^3$.)

3. Доказать, что площадь области, заключенной между кривой $y=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, осью абсцисс, осью ординат и асимптотой $x=1$, конечна и равна $\frac{\pi}{2}$.

4. Доказать, что площадь области, заключенной между кривой $y=\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$, осью абсцисс и прямыми $x=\pm1$, конечна и равна 6, а площадь области, заключенной между кривой $y=\frac{1}{x^2}$, осью абсцисс и прямыми $x=\pm1$, бесконечна.

5. Найти объемы тел, ограниченных поверхностями, полученными вращением линий $y=e^{-x}$, $x=0$, $y=0$ ($0\le x<+\infty$): а) вокруг оси Ох; б) вокруг оси Оу. (Ответ: а) $\pi/2$; б) 2π.)

6. Найти площадь, заключенную между циссоидой $y^2 = \dfrac{x^3}{2a-x}$ и ее асимптотой. (Ответ: $3\pi a^2$.)

7. Найти площадь, заключенную между кривой $y = e^{-2x}$ (при $x > 0$) и осями координат. (Ответ: $1/2$.)

8. Пусть в начале координат О находится масса *m*, которая притягивает материальную точку *M*, находящуюся на оси Ох на расстоянии x от О и имеющую массу *1*, с силой $F = \dfrac{m}{x^2}$ (по закону Ньютона). Какую работу *A* произведет сила *F* при перемещении точки *M* вдоль оси Ох из положения, отвечающего $x = r$, в бесконечность? (Ответ: $-m/r$.)

9. Какую работу надо затратить, чтобы тело массы *m* перенести в бесконечность с поверхности Земли? (Ответ: mgR. *Указание.* Закон притяжения тела Землей определяется формулой $f = mgR^2/r^2$, где *m* – масса тела, *r* – расстояние тела до центра Земли, *R* – радиус Земли.)

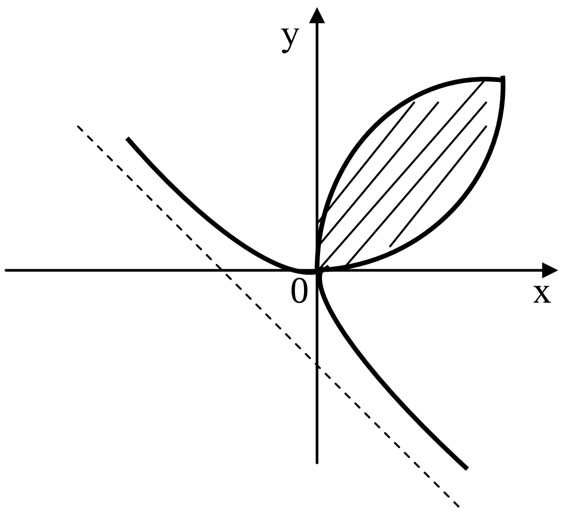


Рис. 48

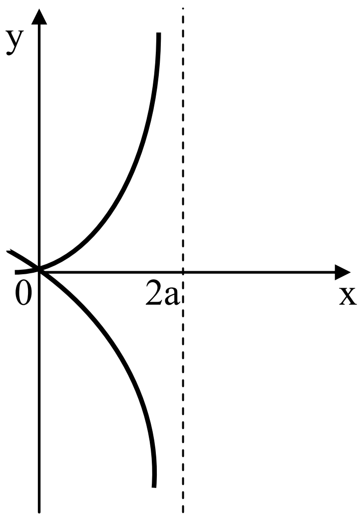


Рис. 49

10. Определить работу, которую необходимо затратить, чтобы электрический заряд $e_2 = 1$ приблизить к заряду e_1 из бесконечности на расстояние, равное

единице. (Ответ: e_1. *Указание.* Электрические заряды взаимодействуют с силой $e_1 e_2 / r^2$, где e_1 и e_2 – величины зарядов, *r* – расстояние между ними.)

11. Ветер производит равномерное давление 5 *Г/см²* на дверь, ширина которой 10 *см* и высота 3 *см.* Найти момент силы давления ветра, стремящейся повернуть дверь на петлях. (Ответ: 750 *Гсм*)

12. Определить расход Q воды {количество воды, вытекающей в единицу времени) через водослив прямоугольного сечения. Высота водослива 9 *м*, ширина 0,1 *м*. (Ответ: $0{,}6\mu\sqrt{0{,}2g}$.)

Раздел VII. ПРИБЛИЖЕННОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ ОПРЕДЕЛЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ

Пусть требуется вычислить определенный интеграл $\int_a^в f(x)dx$, где функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; в]$.

Если функция $f(x)$ задана аналитически и ее первообразная на этом отрезке может быть найдена в элементарных функциях, то для вычисления определенного интеграла $\int_a^в f(x)dx$ используют формулу Ньютона – Лейбница. Если же функция задана аналитически, но ее первообразная не выражается в элементарных функциях или же подынтегральная функция $f(x)$ задана графически или с помощью таблицы, то значение определенного интеграла находят приближенно. Чаще всего применимы формулы прямоугольников, трапеций, парабол.

1. Формула прямоугольников. Пусть на отрезке $[a; в]$ задана непрерывная функция $y = f(x)$. Требуется вычислить определенный интеграл $\int_a^в f(x)dx$.

Выполним следующие операции:

1) Разделим отрезок точками $x_0 = a < x_1 < x_2 < ... < x_n = в$ на n равных частей длины Δx: $\Delta x = \dfrac{в - a}{n}$.

2) Обозначим через $y_0, y_1, y_2, ..., y_n$ значения функции в точках $x_0, x_1, x_2, ..., x_n$ соответственно, т.е.

$$y_0 = f(x_0),\ y_1 = f(x_1),\ \ldots,\ y_n = f(x_n).$$

3) Полагаем приближенно

$$\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx \approx y_{k-1}\Delta x_k \quad (k = 1, 2, \ldots, n) \tag{67}$$

или

$$\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx \approx y_k \Delta x_k \quad (k = 1, 2, \ldots, n), \tag{68}$$

$\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$. Это означает, что площадь каждой полоски, на которые разбивается криволинейная трапеция *aABв*, заменяется площадью прямоугольника с высотой y_k (y_{k-1}) и основанием Δx_k (рис. 50).

4) Сложив приближенные равенства (67) и (70) для k = 1, 2, …, n, получим соответственно:

$$\int\limits_a^в f(x)dx \approx \sum_{k=1}^{n} y_{k-1}\Delta x_k = \frac{в - a}{n}\left(y_0 + y_1 + y_2 + ... + y_{n-1}\right). \tag{69}$$

или

$$\int\limits_a^в f(x)dx \approx \sum_{k=1}^{n} y_k \Delta x_k = \frac{в - a}{n}\left(y_1 + y_2 + y_3 + ... + y_n\right). \tag{70}$$

Формулы (69) и (70) называются ***формулами прямоугольников***.

Если $f'(x)$ существует и ограничена на отрезке $[a; в]$, то для погрешности δ_n формулы (69) справедлива оценка

$$\left|\delta_n\right| = \left|\int_a^в f(x)dx - \sum_{k=1}^{n} y_{k-1}\Delta x_k\right| \le \frac{M_1(в-a)^2}{2n}, \qquad (71)$$

где $M_1 = \max\limits_{x\in[a;в]} \left|f'(x)\right|$.

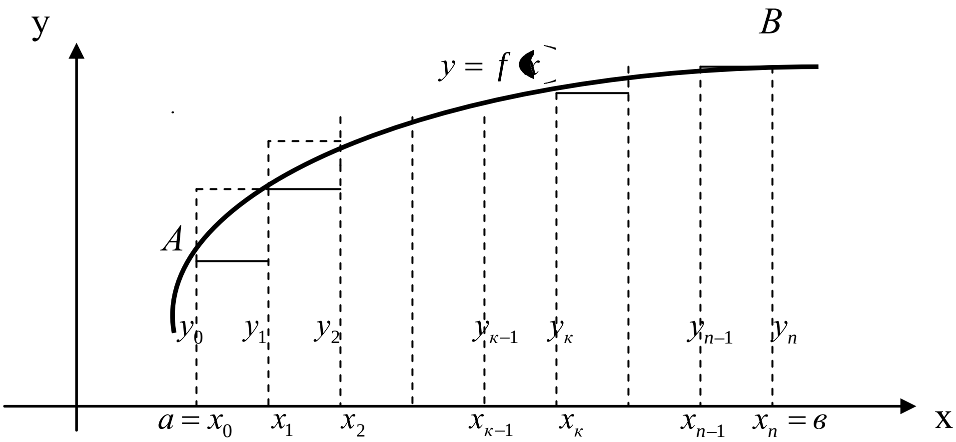


Рис. 50

2. Формула трапеций. Если данную кривую $y = f(x)$ заменить не ступенчатой линией, как это было показано в формуле прямоугольников, а вписанной ломаной (рис. 51), тогда криволинейной трапеции $aABв$ заменится суммой площадей прямолинейных трапеций, ограниченных сверху хордами $AA_1,\ A_1A_2, ..., A_{n-1}B$.

Так как площадь каждой из этих трапеций равна $\frac{y_{к-1}+y_к}{2}\Delta x$, где k = 1, 2, …, n, то площадь всей фигуры приближенно равна

$$\int_a^в f(x)dx \approx \left(\frac{y_0+y_1}{2}\Delta x + \frac{y_1+y_2}{2}\Delta x + \ldots + \frac{y_{n-1}+y_n}{2}\Delta x\right)$$

или

$$\int_a^в f(x)dx \approx \frac{в-a}{n}\left(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \ldots + 2y_{n-1} + y_n\right). \qquad (72)$$

Формула (72) называется ***формулой трапеций***.

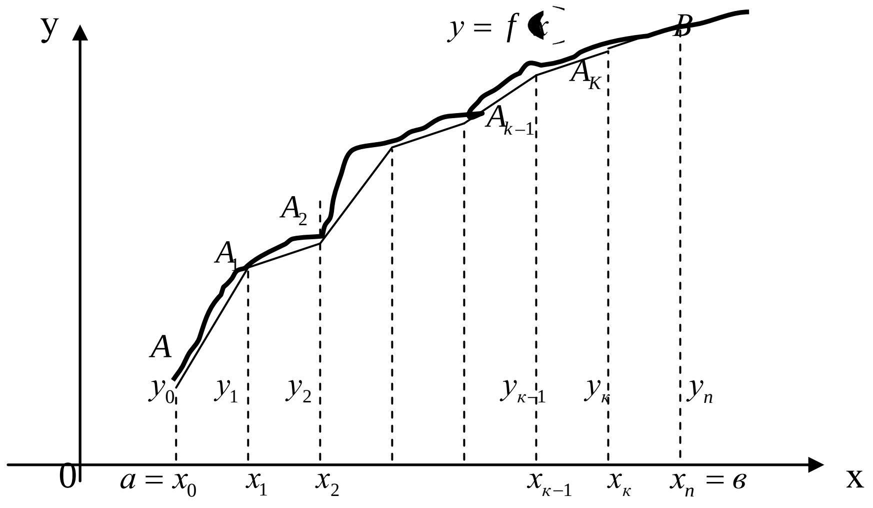


Рис. 51

Если $f''(x)$ существует и ограничена на отрезке $[a;в]$, то погрешность δ_n формулы (72) оценивается неравенством:

$$\left|\delta_n\right| = \left|\int_a^в f(x)dx - \sum_{k=1}^{n} \frac{y_{k-1} + y_k}{2} \Delta x_k\right| \le \frac{M_2 (в - a)^3}{12n^2}, \qquad (73)$$

где $M_2 = \max\limits_{x \in [a;в]} \left|f''(x)\right|$.

3. Формула Симпсона (формула парабол). Проделаем следующие операции:

1) Разобьем отрезок на *2n* равных частей точками

$$x_0 = a < x_1 < x_2 < ... < x_{2n-2} < x_{2n} = в$$

2) Обозначим через $y_0, y_1, y_2, ..., y_{2n-2}, y_{2n-1}, y_{2n}$ соответствующие значения функции $y = f(x)$ в этих точках.

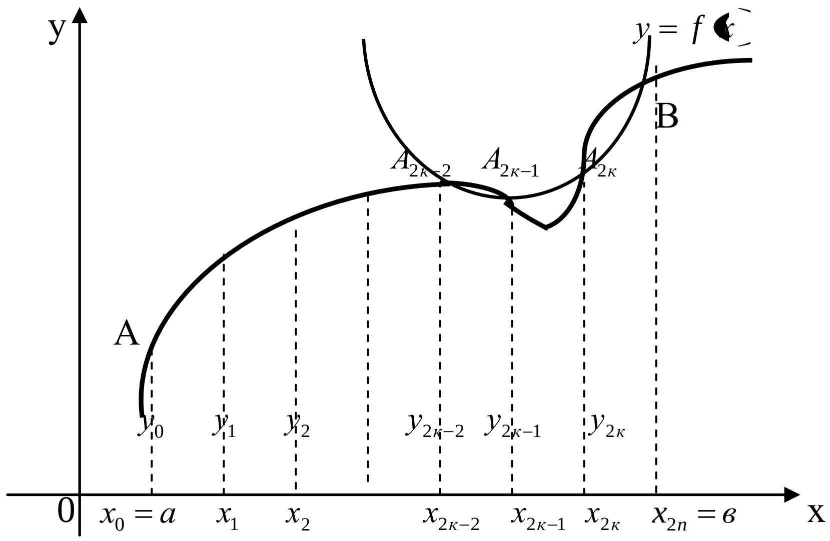


Рис. 52

3) Рассмотрим двойной частичный отрезок $[x_{2k-2};x_{2k}]$ и проведем дугу параболы через точки $(x_{2k-2};y_{2k-2})$, $(x_{2k-1};y_{2k-1})$, $(x_{2k};y_{2k})$ (рис. 52).

4) Заменяем площадь каждой криволинейной полоски $A_{2к-2}, x_{2к-2}, x_{2к}, A_{2к}$ площадью соответствующей параболической полоски (полоски, ограниченной сверху дугой параболы). Тогда для приближенного вычисления площади всей криволинейной трапеции *aABв* получим формулу:

$$\int_a^в f(x)dx \approx \frac{в-a}{6n}\left(y_{2к-2}+4y_{2к-1}+y_{2к}\right)=$$

$$=\frac{в-a}{6n}\Big((y_0+y_{2n})+4(y_1+y_3+...+y_{2n-1})+2(y_2+y_4+...+y_{2n-2})\Big). \qquad (74)$$

Формула (74) называется ***формулой Симпсона***.

Если $f^{(4)}(x)$ существует и ограничена на отрезке $[a;в]$, то погрешность δ_n формулы (74) оценивается неравенством:

$$\left|\delta_n\right| = \left|\int_a^{в} f(x)dx - \frac{в-a}{6n}\sum_{k=1}^{n}\left(y_{2k-2} + 4y_{2k-1} + y_{2k}\right)\right| \le \frac{M_4(в-a)^5}{180(2n)^4}, \qquad (75)$$

где $M_4 = \max\limits_{x\in[a;в]}\left|f^{(4)}(x)\right|$.

Пример 54. Вычислить приближенно $\int_1^2 \frac{dx}{x}$ по формуле ($n = 10$):

а) прямоугольников; б) трапеций.

Решение. а) Разобьем отрезок $[1;2]$ на 10 равных частей точками $x_0 = 1$; $x_1 = 1{,}1$; $x_2 = 1{,}2$; …; $x_{10} = 2$. Найдем значения функции $y = \frac{1}{x}$ в этих точках (см. табл. 1). Получим $\sum\limits_{к=0}^{9} y_к = 7{,}187$.

Таблица 1

$x_к$	1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9
$y_к$	1,000	0,909	0,833	0,769	0,714	0,667	0,625	0,588	0,556	0,526

По формуле (69) найдем

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} \approx \frac{2-1}{10}\cdot 7{,}187 \approx 0{,}719.$$

Оценим допущенную при этом погрешность по формуле (71). Так как $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$, то $\left|f'(x)\right| = \frac{1}{x^2}$ монотонно убывает на отрезке $[1;2]$, поэтому

$$M_1 = \max\limits_{x\in[1;2]}\left|f'(x)\right| = f'(1) = 1 \text{ и } \left|\delta_{10}\right| \le \frac{1}{20} = 0{,}05.$$

Таким образом, $\int_1^2 \frac{dx}{x} \in [0{,}7;\, 0{,}8]$.

С другой стороны, по формуле Ньютона – Лейбница: $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x} = \ln x \Big|_1^2 = \ln 2$.

Следовательно, получили приближенное значение $\ln 2$: $\ln 2 \in [0{,}7;\ 0{,}8]$.

б) Значения функции в точках разбиения известны (см. таблицу). В соответствии с формулой (72), подсчитываем

$$2\sum_{k=1}^{9} y_k = 12{,}3754;\quad y_0 + y_{10} = 1{,}5.$$

И окончательно получаем:

$$\int\limits_1^2 \frac{dx}{x} \approx \frac{2-1}{2\cdot 10}\cdot(12{,}375 + 1{,}5) \approx 0{,}694\,.$$

Оценим допущенную при этом погрешность по формуле (73). Функция $f''(x) = \frac{2}{x^3}$ монотонно убывает на отрезке $[1;\ 2]$, поэтому

$$M_2 = \max_{x\in[1;2]} |f''(x)| = f''(1) = 2,\quad |\delta_{10}| \le \frac{2(2-1)^3}{12\cdot 10^2} = \frac{1}{600} < 0{,}002\,.$$

Таким образом, по формуле трапеций $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x} = \ln 2 \in [0{,}692;\ 0{,}696]$.

Замечание 4. Сравнение оценок допускаемой погрешности в данной и предыдущей задачах показывает, что расчет по формуле трапеций дает большую степень точности по сравнению с расчетом по формуле прямоугольников (при одном и том же значении n =10).

Пример 55. Вычислить приближенно $\int\limits_0^1 e^{-x^2}$ по формуле Симпсона с точностью до 0,0001.

Решение. По условию задачи допускаемая погрешность не должна превышать 0,0001, поэтому число делений $2n$ отрезка $[0;1]$ в формуле (74) находится из неравенства (75)

$$\frac{M_4(в-a)^5}{180(2n)^4}<0{,}0001. \qquad (76)$$

В данном случае $в-a=1$. Чтобы найти n, вычислим $M_4 = \max\limits_{x\in[0;1]}\left|f^{(4)}(x)\right|$, где

$f(x)=e^{-x^2}$:

$$f'(x)=-2e^{-x^2};\quad f''(x)=2(2x^2-1)e^{-x^2};\quad f'''(x)=-4(2x^3-3x)e^{-x^2};$$

$$f^{(4)}(x)=4(4x^4-12x^2+3)e^{-x^2}.$$

Исследуя функцию $f^{(4)}(x)=4(4x^4-12x^2+3)e^{-x^2}$ на экстремум и сравнивая ее значения на концах отрезка $[0;1]$, получим:

$$f^{(4)}(x_{min}) = f^{(4)}\left(\frac{\sqrt{5-\sqrt{10}}}{2}\right) = -4{,}212;\quad f^{(4)}(0)=12;\quad f^{(4)}(1) = -7{,}36.$$

Тогда

$$\left|f^{(4)}\left(\frac{\sqrt{5-\sqrt{10}}}{2}\right)\right| = \left|-4{,}212\right| = 4{,}212;\quad \left|f^{(4)}(0)\right|=12;$$

$$\left|f^{(4)}(1)\right| = \left|-7{,}36\right| = 7{,}36.$$

Значит,

$$M_4 = \max_{x\in[0;1]}\left|f^{(4)}(x)\right| = f^{(4)}(x)=12.$$

Теперь подставляя значения *в* – *а* и M_4 в неравенство (76), получаем

$$\frac{12}{180(2n)^4} < 0{,}0001 ,$$

отсюда $n^4 > \frac{135}{3}$. Это неравенство выполняется для всех $n \geq 3$. Для простоты вычисления возьмем *n* = 5.

Делим отрезок $[0;1]$ на 10 равных частей точками $x_0 = 0$; $x_1 = 0{,}1$; $x_2 = 0{,}2$; …; $x_{10} = 1$ и вычислим соответствующие значения функции $f(x) = e^{-x^2}$. При этом, чтобы обеспечить требуемую условием точность ($\varepsilon = 0{,}0001$), вычисления производим с 5-ью знаками после запятой, округляя окончательный результат до 4-х знаков. Получим табл. 2:

Таблица 2

i	x_i	$y_i = f(x_i)$	i	x_i	$y_i = f(x_i)$
0	0	1,00000	6	0,6	0,69768
1	0,1	0,99005	7	0,7	0,61263
2	0,2	0,96079	8	0,8	0,52729
3	0,3	0,91393	9	0,9	0,44486
4	0,4	0,85214	10	1,0	0,36788
5	0,5	0,77680			

$$y_0 + y_{10} = 1{,}36788\ ;\ 4(y_1 + y_3 + y_5 + y_7 + y_9) = 4 \cdot 3{,}74027 = 14{,}96108\ ;$$

$$2(y_2 + y_4 + y_6 + y_8) = 2 \cdot 3{,}03790 = 6{,}07580 .$$

Подставляя полученные значения в формулу (74), получаем:

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx \approx \frac{1{,}36788 + 6{,}07580 + 14{,}96108}{6 \cdot 5} = 0{,}74682 \approx 0{,}7468 .$$

Контрольные вопросы

1. С помощью каких формул можно вычислить определенный интеграл приближенно?

2. Записать формулу прямоугольников для приближенного вычисления определенного интеграла. Привести пример.

3. Записать формулу трапеций для приближенного вычисления определенного интеграла. Привести пример.

4. Записать формулу Симпсона для приближенного вычисления определенного интеграла. Привести пример.

5. В каком случае формула Симпсона дает достаточно точный результат?

Задание 13. Вычислите приближенно определенный интеграл по указанной формуле.

1. $\int\limits_{2}^{12} \frac{dx}{x}$, $n=10$ по формуле трапеций; (Ответ: $\approx 1{,}792$).

2. $\int\limits_{0}^{0,6} \sqrt{4+10x^3}dx$, $n=6$ по формуле Симпсона; (Ответ: ≈ 1276).

3. $\int\limits_{1}^{2} \frac{dx}{x}$, $n=10$ по формуле трапеций; (Ответ: $\approx 0{,}694$).

4. $\int\limits_{0}^{1} \sqrt{1-x^2}dx$, $n=10$ по формуле Симпсона; (Ответ: $\approx 0{,}782$).

5. $\int\limits_{1}^{6} \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}}$, $n=5$ по формуле трапеций; (Ответ: $\approx 1{,}12$).

6. $\int\limits_{1}^{5} x^2dx$, $n=10$ по формуле прямоугольников; (Ответ: $\approx 41{,}28$).

Раздел VIII. КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ

Контрольная работа № 1

Вычислить определенные интегралы

1. а) $\int\limits_1^4 \frac{(1+\sqrt{x})dx}{x^2}$;

б) $\int\limits_2^3 x\ln(x-1)dx$;

в) $\int\limits_0^{\pi/2} \sin^3\varphi d\varphi$;

г) $\int\limits_1^2 \frac{e^{1/x}}{x^2}dx$.

2. а) $\int\limits_1^2 \frac{(x^2-2x+3)dx}{\sqrt{x}}$;

б) $\int\limits_0^1 \frac{12t^5}{\sqrt{t^6+1}}dx$;

в) $\int\limits_{-2}^0 x^2\cdot e^{-x/2}dx$;

г) $\int\limits_0^1 e^{x+e^x}dx$.

3. а) $\int\limits_1^4 \frac{1+\sqrt[3]{y^2}}{\sqrt[6]{y}}dy$;

б) $\int\limits_{ln2}^{2ln2} \frac{d\varphi}{e^{\varphi}-1}$;

в) $\int\limits_0^{2\pi} \cos 5x\cdot\cos x dx$;

г) $\int\limits_0^{\pi/2} e^{2x}\cos x dx$.

4. а) $\int\limits_1^4 \frac{1+\sqrt{t}}{t^2}dt$;

б) $\int\limits_0^{\pi/3} \cos^3 x\cdot\sin 2x dx$;

в) $\int\limits_1^e \frac{(1+\ln x)dx}{x}$;

г) $\int\limits_0^{1/2} \frac{\arcsin x}{\sqrt{1+x}}dx$.

5. а) $\int\limits_1^4 \left(x^2-2x^{-2/3}+3\sqrt{x}\right)dx$;

б) $\int\limits_{-x}^{x} e^t dt+\int\limits_1^e \frac{\ln^2 t dt}{t}$;

в) $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x^2+x}$;

г) $\int\limits_0^{1/2} \arcsin^2 x dx$.

6. а) $\int\limits_0^8 \left(\sqrt{2x}+\sqrt[3]{x}\right)dx$;

б) $\int\limits_{-3}^3 \frac{x^2\cdot\sin 2x}{x^2+1}dx$;

в) $\int\limits_0^{\pi/3} \frac{dx}{5-3\cos x}$;

г) $\int\limits_1^2 (y-1)\ln y dy$.

7. а) $\int\limits_2^6 \sqrt{x-2}+\int\limits_{-2}^{-3} \frac{dx}{x^2-1}$;

б) $\int\limits_0^1 \frac{x}{x^2+3x+2}dx$;

8. а) $\int\limits_{-3}^0 \frac{dx}{\sqrt{25+3x}}+\int\limits_0^{\sqrt{2}/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$;

б) $\int\limits_3^{29} \frac{(x-2)^{2/3}dx}{(x-2)^{2/3}+3}$;

9. а) $\int\limits_0^5 (\sqrt{5x}+2x^2-$

$-\frac{4}{\sqrt{2x+5}})dx$

б) $\int\limits_0^5 \frac{dx}{2x+\sqrt{3x+1}}$;

в) $\int\limits_4^9 \frac{x-1}{\sqrt{x}+1}dx$;

г) $\int\limits_{-1/2}^0 xe^{-2x}dx$.

в) $\int\limits_0^4 \frac{dx}{\sqrt{x}+1}$;

г) $\int\limits_0^\pi x^2 sinx dx$.

в) $\int\limits_{-1/2}^0 \frac{(2x-8)dx}{\sqrt{1-x-x^2}}$;

г) $\int\limits_{-1/3}^{-2/3} \frac{zdz}{e^{3z}}$.

10. а) $\int\limits_1^{32} \frac{2\sqrt[5]{x^2}+3\sqrt[5]{x}}{\sqrt[10]{x}}dx$;

б) $\int\limits_0^{\pi/4} cos^2\beta d\beta$;

в) $\int\limits_0^1 \frac{y^2dy}{\sqrt{y^6+4}}$;

г) $\int\limits_1^e \frac{ln^2x}{x^2}dx$.

11. а) $\int\limits_0^1 \left(3\sqrt[5]{x}+2\sqrt{x^3}\right)dx$;

б) $\int\limits_0^1 \left(\sqrt{x+1}+\frac{2}{3x-1}\right)dx$;

в) $\int\limits_7^{10} \frac{2x-5}{\sqrt{3-x+x^2}}dx$;

г) $\int\limits_1^{e^2} \sqrt{x}lnx dx$.

12. а) $\int\limits_1^8 (2\sqrt[3]{x}-\frac{4}{\sqrt[3]{x^2}}+\sqrt[6]{x})dx$

б) $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{cosydy}{4+\sqrt{siny}}$;

в) $\int\limits_0^{16} \frac{dt}{\sqrt{t+9}+\sqrt{t}}$;

г) $\int\limits_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{x}{sin^2x}dx$.

13. а) $\int\limits_0^1 \left(3\sqrt[3]{x^1}-2\sqrt[6]{x}\right)dx$;

б) $\int\limits_0^1 \frac{e^{-x}dx}{\sqrt{1-e^{-2x}}}$;

в) $\int\limits_0^1 \frac{4xdx}{\sqrt[3]{(9x-1)^2}-\sqrt[3]{9x-1}+1}$;

г) $\int\limits_0^\pi (x+2)cos\frac{x}{2}dx$.

14. а) $\int\limits_1^8 \left(\frac{2}{\sqrt[3]{x}}+\frac{3\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x^5}}\right)dx$;

б) $\int\limits_{-1}^0 \frac{(7x+16)dx}{\sqrt[3]{(7x+8)^2}+2\sqrt[3]{7x+8}}$;

в) $\int\limits_0^{\pi/4} \frac{sec^2xdx}{(1+tgx)^2}$;

г) $\int\limits_0^{\pi/8} x^2\cdot sin4xdx$.

15. а) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt[4]{3x+1}}+\int\limits_0^1 \sqrt{1+5x}dx$

б) $\int\limits_e^{e^2} \frac{\sqrt[5]{ln^4x}dx}{x}$;

в) $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+sinx+cosx}$;

г) $\int\limits_1^2 a^2lnada$.

16. а) $\int\limits_1^8 \frac{2\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[6]{x}}dx$;

б) $\int\limits_1^2 \frac{5xdx}{\sqrt{5x^2-4}+\sqrt[4]{5x^2-4}}$;

17. а) $\int\limits_1^9 \frac{(3\sqrt{x}+2x)dx}{x^2}$;

б) $\int\limits_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2+36}+\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-3x}}$;

18. а) $\int\limits_1^{27} \frac{2\sqrt[3]{2x}-3\sqrt[3]{x}}{x}dx$;

б) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^2+4x+5}$;

в) $\int\limits_1^{\sqrt[4]{e}} \frac{dx}{x\sqrt{1-ln^2x}}$;

г) $\int\limits_1^2 (3u+2)lnudu$.

в) $\int\limits_1^e \frac{dx}{x\sqrt{4-ln^2x}}$;

г) $\int\limits_{3/2}^2 arctg(2t-3)dt$.

в) $\int\limits_{-\pi/2}^{-\pi/4} \frac{cos^3xdx}{\sqrt[3]{sinx}}$;

г) $\int\limits_0^{\pi/2} (x+3)sinxdx$.

19. а) $\int\limits_0^1 \left(2x^3-\frac{4\sqrt[3]{x^2}}{7}\right)dx$;

б) $\int\limits_1^3 \frac{2xdx}{3x^2+4}$;

в) $\int\limits_4^{25} \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{x}-1}$;

г) $\int\limits_0^1 xln(x^2+1)dx$.

20. а) $\int\limits_1^4 \frac{1+\sqrt{x}}{x^2}dx$;

б) $\int\limits_0^{ln5} \sqrt{2e^x-1}\cdot e^xdx$;

в) $\int\limits_{-1/2}^0 \frac{(2x-8)dx}{\sqrt{1-x-x^2}}$;

г) $\int\limits_{-3}^0 (x-2)e^{-x/3}dx$.

21. а) $\int\limits_1^{32} \frac{3\sqrt[5]{x^2}+3\sqrt[5]{x}}{5x}dx$;

б) $\int\limits_3^8 \frac{xdx}{\sqrt{x+1}}$;

в) $\int\limits_0^{\pi/2} 3^{cos(x/3)}\cdot sin(x/3)dx$

г) $\int\limits_0^{\pi/9} \frac{x}{cos^2 3x}dx$.

22. а) $\int\limits_1^2 \frac{5x^6+3\sqrt[5]{x}}{\sqrt[3]{x}}dx$;

б) $\int\limits_1^e \frac{sinlnxdx}{x}$;

в) $\int\limits_0^7 \frac{4xdx}{\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{1+x}+1}$;

г) $\int\limits_{1/2}^1 arcsin(1-t)dt$.

23. а) $\int\limits_1^8 \frac{7\sqrt[9]{x^2}+3\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}}dx$;

б) $\int\limits_0^3 e^{x/3}dx+\int\limits_0^{\pi/4} sin4xdx$;

в) $\int\limits_{-\sqrt{3}/2}^{\sqrt{3}/2} \frac{\pi/4-arcsinx}{\sqrt{1-x^2}}dx$;

г) $\int\limits_1^{\sqrt{3}} arctg\frac{1}{x}dx$.

24. а) $\int\limits_{-\pi/3}^{\pi/3} (sin2x+cos\frac{x}{2}+$
$+tgx)dx$;

б) $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{2+cosx}$;

в) $\int\limits_1^2 \frac{2x^5-4x^6}{x^{10}}dx$;

г) $\int\limits_{-1}^0 xln(1-x)dx$.

25.а) $\int\limits_1^5 \frac{xdx}{\sqrt{5+4x}}+\int\limits_0^1 x\left(x^2+4\right)^9dx$;

б) $\int\limits_1^{32} \frac{3x^2-5x}{\sqrt[5]{x^3}}dx$;

26. а) $\int\limits_1^2 \frac{3x^2-2\sqrt[5]{x^3}}{\sqrt[5]{x}}dx$;

б) $\int\limits_3^5 \frac{(7x+1)dx}{\sqrt{8x-x^2-15}}$;

27. а) $\int\limits_{\pi/18}^{\pi/6} 12ctg3x+$
$+\int\limits_0^{-3} \frac{dx}{\sqrt{25+3x}}$;

б) $\int\limits_1^2 \frac{2\sqrt[8]{x}-3x^2}{\sqrt[4]{x}}dx$;

в) $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{sinx dx}{2+cosx}$;

в) $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{cosx dx}{1+sin^2 x}$;

в) $\int\limits_0^{\pi/2} sin^3\beta \cdot cos^4\beta d\beta$;

г) $\int\limits_0^1 \frac{arcsin(x/2)dx}{\sqrt{2-x}}$.

г) $\int\limits_1^2 ln(3x+2)dx$.

г) $\int\limits_0^{\pi} x^3 sinx dx$.

28. а) $\int\limits_1^8 \frac{\sqrt[3]{x}-4\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x^5}} dx$;

29. а) $\int\limits_1^{32} \frac{2\sqrt[5]{x^3}+5\sqrt[5]{x^2}}{\sqrt[5]{x}} dx$;

30. а) $\int\limits_{-1}^0 \frac{dx}{25x^2-36} + \int\limits_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{dx}{sin^2 x}$;

б) $\int\limits_1^8 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}\cdot\left(1+\sqrt[3]{x}\right)}$;

б) $\int\limits_0^1 x(x^2+4)^9 dx$;

б) $\int\limits_1^2 \frac{xdx}{x^2-x+2}$;

в) $\int\limits_0^1 x^3\cdot\sqrt{4+5x^4}dx$;

в) $\int\limits_1^2 \frac{(x-5)dx}{x^2-2x+2}$;

в) $\int\limits_0^{\pi} cos^3 \cdot sinx dx$;

г) $\int\limits_3^6 ln(3x-8)dx$.

г) $\int\limits_0^{\pi/4} x\cdot tg^2 x dx$.

г) $\int\limits_{-1}^2 3x^2 ln(x+2)dx$.

Контрольная работа № 2

Вычислить: а) площадь; б) объем тела вращения (вокруг указанной оси); в) моменты инерции, координаты центра тяжести плоской фигуры, ограниченной данными кривыми.

1. а) $y^2=9x$, $y=3x$, (Oy);
б) $x=t-sint$, $y=1-cost$ и прямой $y=1$ ($0<x<2\pi$), $y\ge 1$ (Ox);
в) $\rho=2sin2\varphi$, (Ox);

2. а) $y=x^2-2x+3$, $y=3x-1$, (Ox);
б) $x=t^2-1$, $y=t^3-t$, (Oy);
в) $\rho=3cos\varphi$, (Ox).

3. а) $y=x^2$, $y=2x$, $y=x$, (Oy);
б) $x=2t-t^2$, $y=2t^2-t^3$, (Ox);
в) $\rho=2cos4\varphi$, (Ox).

4. а) $y=x^3$, $y=2x$, $y=x$, (Ox);
б) $x=a(cost+tsint)$, $y=a(sint-tcost)$ ($0\le t\le 2\pi$) и $x=a$, $y\le 0$, (Oy);

в) $\rho = 3cos4\varphi$, (Ох).

5. а) $y = x^2 + 1$, $x + y = 3$, (Ох);
б) $x = 3t^2$, $y = 3t - t^3$ (петля), (Оу);
в) $\rho = cos4\varphi$, (Ох).

6. а) $y = \frac{6}{x}$, $y = 7 - x$, (Оу);
б) $x = 2 + 3cost$, $y = 3 + 2sint$, (Ох);
в) $\rho = 1 + cos\varphi$, (Ох).

7. а) $y = -x^3$, $y = -9x$, (Ох);
б) $y = t^2 + 1, y = t^3 - 3t$ (петля), (Ох);
в) $\rho = 3(1 + cos\varphi)$, (Ох).

8. а) $y = \frac{1}{2}x^2 - x + 1$, $y = -\frac{1}{2}x^2 + 3x + 6$, (Оу);
б) Одной петлей кривой $x = asin2t$, $y = asint$, (Ох);
в) $\rho = 2cos^2\varphi$, (Ох).

9. а) $y = -x^2 + 2x$, $y = -x$, (Ох);
б) $x = 2(2cost - cos2t)$, $y = 2(2sint - sin2t)$, (Оу);
в) $\rho = 2sin3\varphi$ (трилистник), (Ох).

10. а) $y = (x+1)^2$, $y = 4 - x$, $y = 0$, (Оу);
б) $x = 2cost$, $y = 2sint$, (Ох);
в) $\rho = 1$, $\rho = 3$, $\varphi = \frac{\pi}{4}$, $\varphi = \frac{\pi}{3}$, (Ох).

11. а) $y = 3x^2 + 1$, $y = 3x + 7$, (Ох);
б) $x = 2cost$, $y = 6sint$, $y = 3$, $y \geq 3$ (Оу);
в) $\rho = 1 + cos2\varphi$, (Ох).

12. а) $y^2 = 2x + 1$, $x - y - 1 = 0$, (Оу);
б) $x = 4(t - sint)$, $y = 4(1 - cost)$, прямой $y = 4$, $y \geq 0$, $0 < x < 8\pi$, (Ох);
в) $\rho = 2cos3\varphi$, (Ох).

13. а) $y=\frac{1}{2}x^2+x+2$, $y=-\frac{1}{2}x^2-5x+7$, (Ox);

б) $x=2t-t^2$, $y=4t-t^3$ (петля), (Oy);

в) $\rho=8cos4\varphi$, (Ox).

14. а) $y^2=2x+1$, $y=x-1$ (Oy);

б) $x=6cos^3t$, $y=6sin^3t$, $0\le t\le 2\pi$ (Oy);

в) $\rho=5sin2\varphi$, (Ox).

15. а) $y=sinx$, $0\le x\le 2\pi$, (Ox);

б) $x=\frac{t^2}{3}$, $y=\frac{t}{3}-\frac{t^3}{9}$ (петля), (Oy);

в) $\rho=asin3\varphi$, (Ox).

16. а) $y=x^2$, $y=-x+2$, (Oy);

б) $x=8cos^3t$, $y=8sin^3t$, $x=1$, $x\ge 1$, (Ox);

в) $\rho=2\sqrt{cos2\varphi}$, (Ox).

17. а) $y=3x^2$, $y=-x+4$, (Ox);

б) $x=4(cost+tsint)$, $y=4(sint-tcost)$ (Oy);

в) $\rho=3(1+sin\varphi)$, (Ox).

18. а) $y=\frac{1}{4}x^2$, $y=-x+3$, (Ox);

б) $x=2cost+sin2t$, $y=2sint-sin2t$ (Oy);

в) $\rho=\frac{1}{2}cos4\varphi$, (Ox).

19. а) $y=\frac{1}{3}x^2-3x+2$, $y=-\frac{2}{3}x^2-2x+4$, (Oy);

б) $x=5(t-sint)$, $y=5(1-cost)$, (Ox);

в) $\rho=2cos^3\varphi$, (Ox).

20. а) $y=\frac{1}{2}x^2$, $y=-3x+8$, (Oy);

б) $x=7(t-sint)$, $y=7(1-cost)$, (Ox);

в) $\rho=2\sqrt{sin2\varphi}$, (Ox).

21. а) $y=\frac{1}{3}x^2,\ y=-3x+12$, (Ox);

б) $x=\frac{1}{3}t^3,\ y=t^2$, (Oy);

в) $\rho=8(1+cos\varphi)\ \ 0\le\varphi\le\pi$, (Ox).

22. а) $y=2x^2+6x-3,\ y=-x^2+x+5$, (Oy);

б) $x=2t,\ y=t^2$ (Ox);

в) $\rho=2cos3\varphi,\ \ \rho=1,\ \rho\ge1$, (Ox).

23. а) $y=4x^2,\ y=-2x+2$, (Ox);

б) $x=2t,\ y=\frac{1}{3}t^3$ (Oy);

в) $\rho=2sin\varphi,\ 0\le\varphi\le\frac{\pi}{3}$, (Ox).

24. а) $y=\frac{1}{4}x^2,\ y=-\frac{1}{2}x+2$, (Ox);

б) $x=9cost,\ y=5sint$, расположенной в I четверти, (Ox);

в) $\rho=2cos\left(\varphi-\frac{\pi}{4}\right),\ \frac{\pi}{4}\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$, (Ox).

25. а) $y=3x^2-5x-1,\ y=-x^2+2x+1$, (Oy);

б) $x=4t,\ y=3+t^2$ (Ox);

в) $\rho=1-cos2\varphi,\ 0\le\varphi\le\frac{\pi}{6}$, (Ox).

26. а) $y=4x^2,\ y=-2x+6$, (Ox);

б) $x=6-t^2,\ y=2t$ (Oy);

в) $\rho=\sqrt{cos2\varphi}\ \ -\frac{\pi}{2}\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$.

27. а) $xy-5=0,\ y=0,\ x=1,\ x=5$, (Oy);

б) $x=2(t-sint),\ y=2(1-cost)$ (Ox);

в) $\rho=2+cos\varphi$, (Ox).

28. а) $y=2x^2-6x+1$, $y=-x^2+x-1$, (Ox);
б) $x=2(t-sint)$, $y=2(1-cost)$ (Oy);
в) $\rho=2\varphi$, $0\le\varphi\le\pi$, (Ox).

29. а) $y=2x-x^2$, $y=0$, (Ox);
б) $x=2(t-sint)$, $y=2(1-cost)$ (вокруг прямой, параллельной оси Оу и проходящей через вершину данной кривой);
в) $\rho=sin6\varphi$.

30. а) $y=x^2-3x-1$, $y=-x^2-2x+5$, (Oy);
б) $x=2(t-sint)$, $y=2(1-cost)$ (вокруг прямой, параллельной оси Ox и проходящей через вершину данной кривой);
в) одним лепестком розы $\rho=cos2\varphi$, $(\frac{\pi}{4}\le\varphi\le\frac{3\pi}{4})$, (Ox).

Контрольная работа № 3

Вычислить: а) длину; б) площадь поверхности вращения (вокруг указанной оси); в) моменты инерции, координаты центра тяжести плоской дуги кривой, заданной уравнением:

1. $y=\frac{1}{3}x\sqrt{x}$, $0\le x\le 12$, (Ox).

2. $y=lnsinx$, $\frac{\pi}{3}\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$, (Ox).

3. $y=1-lncosx$, $0\le\varphi\le\frac{\pi}{6}$, (Ox).

4. $\rho=2sin\varphi$, $0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$.

5. $y^2=4ax$, $0\le x\le 3a$, (Ox).

6. $x=e^t cost$, $y=e^t sint$, $0\le t\le 1$, (Oy).

7. $\rho=2cos\varphi$, $0\le\varphi\le\frac{\pi}{12}$.

8. $y=lnx$, $\frac{3}{4}\le\varphi\le 1$, (Ox).

9. $\rho=1-cos\varphi$, $0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$.

10. $x=t^2$, $y=t-\frac{t^3}{3}$ (петля)(Ox).

11. $x=3t^2$, $y=3t-t^3$ (петля), (Oy).

12. $\rho=2(1+cos\varphi)$, $0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$.

13. $y=lncosx$, $0\le x\le\frac{\pi}{3}$.

14. $x=(2cost-cos2t)$,

15. $\rho = a\cos^3\dfrac{\varphi}{3},\ 0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}$.

$y = 2\sin t - \sin 2t,\ 0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}$, (Ox).

16. $x = 4(\cos t + t\sin t)$,
$y = 4(\sin t - t\cos t),\ 0 \le t \le 2\pi$ (Oy).

17. $\rho = a\sin^3\dfrac{\varphi}{3}$.

18. $\rho = 2(1 - \cos\varphi),\ -\pi \le \varphi \le -\dfrac{\pi}{2}$, (Oy).

19. $x^2 + y^2 = 4$ ($y > 0$) между точками с абсциссами $x = -1$ и $x = 1$, (Ox).

20. $y = \sqrt{2}\sin x,\ 0 \le x \le 2\pi$, (Ox).

21. $x = 4t,\ x = 3 + t^2$, (Oy).

22. $\rho = 5e^{5\varphi/12},\ -\dfrac{\pi}{12} \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}$, (Ox).

23. $x = 3\sin t + 4\cos t,\ x = 4\sin t - 3\cos t$, (Oy).

24. $x = 9 - t^2,\ y = 2t$, (Ox).

25. $\rho\varphi = 1$ от точки (2;1/2) до точки (1/2; 2).

26. $y = \sin x,\ 0 \le x \le 2\pi$, (Oy).

27. $\rho = 6(1 + \sin\varphi),\ -\dfrac{\pi}{2} \le \varphi \le 0$, (Ox).

28. $\rho = 3\varphi\ \ 0 \le \varphi \le \dfrac{3}{4}$, (Ox).

29. $x = (t^2 - 2)\sin t + 2t\cos t$,
$y = (2 - t^2)\cos t + 2t\sin t,\ 0 \le t \le \dfrac{\pi}{3}$ (Ox).

30. $\rho = \sqrt{2}e^{\varphi},\ 0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}$.

Контрольная работа № 4

Вычислить несобственные интегралы (или исследовать на сходимость).

1. а) $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{x\,dx}{\sqrt{\left(x^2 - 3\right)^3}}$; б) $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{x^2 + 5x - 1}$; в) $\displaystyle\int_1^{5} \frac{dx}{\sqrt[3]{(2 - x)^2}}$.

2. а) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 - 6x + 10}$; б) $\displaystyle\int_{-\infty}^{1} \frac{x\,dx}{\sqrt{x+1}}$; в) $\displaystyle\int_{-1}^{2} \frac{dx}{x - 1}$.

3. а) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$; б) $\displaystyle\int_{-\infty}^{2} \frac{dx}{x+1}$; в) $\displaystyle\int_0^{4} \frac{dx}{\sqrt[3]{(3 - x)^2}}$;

4. а) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+2x+2}$; б) $\int\limits_{-\infty}^{0}\frac{dx}{x^2+4x+13}$; в) $\int\limits_{0}^{5}\frac{dx}{\sqrt[3]{(4-x)^2}}$.

5. а) $\int\limits_{0}^{+\infty}x^2\cdot e^{-x^3}dx$; б) $\int\limits_{-\infty}^{1}\frac{xdx}{x-3}$; в) $\int\limits_{0}^{3}\frac{dx}{2x-1}$.

6. а) $\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{(1-x)^3}}$; б) $\int\limits_{-\infty}^{-2}\frac{dx}{\sqrt{x^2-6x}}$; в) $\int\limits_{2}^{6}\frac{dx}{\sqrt[3]{(4-x)^2}}$.

7. а) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{\left(x^2+x+1\right)^2}$; б) $\int\limits_{-\infty}^{0}\frac{xdx}{\sqrt{x-2}}$; в) $\int\limits_{0}^{2}\sqrt{\frac{2+x}{2-x}}dx$.

8. а) $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}$; б) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+6x+10}$ в) $\int\limits_{1}^{4}\frac{dx}{\sqrt[7]{(2-x)^2}}$.

9. а) $\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{arctg2xdx}{1+4x^2}$; б) $\int\limits_{-\infty}^{0}\frac{dx}{x^2+4x-1}$; в) $\int\limits_{3}^{6}\frac{dx}{(3-x)\cdot\sqrt[5]{ln(x-3)}}$.

10. а) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{-3x^2+x-1}$; б) $\int\limits_{-\infty}^{0}\frac{dx}{x^2+25}$; в) $\int\limits_{1}^{3}\frac{xdx}{\sqrt[7]{(2-x)^4}}$.

11. а) $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{\sqrt{x}dx}{(1+x)^2}$; б) $\int\limits_{-\infty}^{0}\frac{dx}{x^2-x}$ в) $\int\limits_{0}^{7}\frac{\sqrt[3]{ln(6-x)}dx}{x-6}$.

12. а) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{5-4x+x^2}}$; б) $\int\limits_{-\infty}^{1}\frac{xdx}{(x-2)^2}$; в) $\int\limits_{0}^{1/e}\frac{dx}{x\cdot ln^2x}$.

13. а) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{2x^2+3x+5}$; б) $\int\limits_{-\infty}^{0}\frac{dx}{x^2-2x+2}$; в) $\int\limits_{-1}^{1}\frac{(3x^2+2)dx}{\sqrt[3]{x^2}}$.

14. а) $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$; б) $\int\limits_{-\infty}^{2}\frac{xdx}{\sqrt{x-1}}$; в) $\int\limits_{-1}^{1}\frac{(x-1)dx}{\sqrt[3]{x^5}}$.

15. а) $\int\limits_{e^2}^{\infty}\frac{dx}{x\cdot ln^3x}$; б) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{3x^2+5}$; в) $\int\limits_{0}^{3}\frac{xdx}{\sqrt{9-x^2}}$.

16. а) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{16x^2+9}}$; б) $\int\limits_{-\infty}^{1}\frac{xdx}{\sqrt{x+5}}$; в) $\int\limits_{0}^{7}\frac{dx}{\sqrt{49-x^2}}$.

17. а) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{25x^2+4}}$; б) $\int\limits_{-\infty}^{0}\frac{dx}{x^2+16}$; в) $\int\limits_{0}^{3}\frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$.

18. а) $\int\limits_{1}^{\infty}\frac{dx}{x+x^3}$; б) $\int\limits_{-\infty}^{0}\frac{dx}{x^2-6x-3}$; в) $\int\limits_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2}$.

19. а) $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x^2(1+x)}$; б) $\int\limits_{-\infty}^{2}\frac{dx}{2x+1}$; в) $\int\limits_{2}^{4}\frac{dx}{x^2-4}$.

20. а) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x^2-4x+9}}$; б) $\int\limits_{-\infty}^{1}\frac{xdx}{\sqrt[3]{2x+3}}$; в) $\int\limits_{2}^{10}\frac{dx}{\sqrt[3]{(2x-6)^2}}$.

21. а) $\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{arctgxdx}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$; б) $\int\limits_{-\infty}^{3}\frac{dx}{\sqrt{9-x}}$; в) $\int\limits_{0}^{4}\frac{dx}{(x-3)^2}$.

22. а) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{4x^2+1}}$; б) $\int\limits_{-\infty}^{2}\frac{dx}{16-x^2}$; в) $\int\limits_{0}^{3}\frac{xdx}{\sqrt{9-x^2}}$.

23. а) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{3x^2+4}$; б) $\int\limits_{-\infty}^{0}\frac{xdx}{x^3+1}$; в) $\int\limits_{0}^{3}\frac{dx}{x^2-4}$.

24. а) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{25x^2+7}}$; б) $\int\limits_{-\infty}^{0}\frac{dx}{x^2+1}$; в) $\int\limits_{0}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

25. а) $\int\limits_{2}^{\infty}\frac{xdx}{x^2-1}$; б) $\int\limits_{-\infty}^{2}\frac{dx}{x^2-4x+3}$; в) $\int\limits_{2,5}^{4}\frac{dx}{x^2-5x+6}$;

26. а) $\int\limits_{2}^{\infty}\frac{dx}{xlnx}$; б) $\int\limits_{-\infty}^{1}\frac{dx}{x^2+4}$; в) $\int\limits_{2}^{6}\frac{dx}{\sqrt[3]{(4-x)^2}}$.

27. а) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{-3x^2-5x-1}$; б) $\int\limits_{-\infty}^{-1}\frac{dx}{x^2}$; в) $\int\limits_{0}^{1}\frac{xdx}{\sqrt[3]{(2x-1)^2}}$.

28. а) $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{4+x^2}}$; б) $\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{dx}{3x^2+81}$; в) $\int\limits_{0}^{2} \frac{dx}{x^2-4x+3}$.

29. а) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{-7x^2+6x-5}}$; б) $\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{dx}{x^2+16}$; в) $\int\limits_{0}^{3} \frac{dx}{x^2-5x+4}$.

30. а) $\int\limits_{e^2}^{+\infty} \frac{dx}{x ln ln x}$; б) $\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{dx}{x^2+2x+2}$; в) $\int\limits_{-1}^{7} \frac{dx}{\sqrt[3]{7-x}}$.

Контрольная работа № 5

1. Найти величину давления воды на прямоугольник, вертикально погруженный в воду так, что основание его равно 8 *м*, высота 12 *м*, верхнее основание параллельно свободной поверхности воды и находится на глубине 5 *м*. (Ответ: 1056 *т*.)

2. Вычислить работу, необходимую для того, чтобы выкачать воду из полусферического сосуда, диаметр которого равен 20 *м*. (Ответ: $2{,}5 \cdot 10^6 \pi$ *кгм*.).

3. Тело движется прямолинейно по закону $x = ct^3$, где x – длина пути, проходимого за время t, $c = const$. Сопротивление среды пропорционально квадрату скорости, причем коэффициент пропорциональности равен k. Найти работу, производимую сопротивлением при передвижении тела от точки $x = 0$ до точки $x = a$. (Ответ: $\frac{27}{7} k \sqrt[3]{c^2 a^7}$.)

4. Вычислить работу, которую нужно затратить, чтобы выкачать жидкость плотностью γ из резервуара, имеющего форму обращенного вершиной книзу конуса, высота которого H, а радиус основания R. (Ответ: $\frac{\pi\gamma R^2 H^2}{12}$.)

5. Деревянный поплавок цилиндрической формы, площадь основания которого $S = 4000\, см^3$, а высота $H = 50\, см$, плавает на поверхности воды. Какую работу нужно затратить, чтобы вытащить поплавок на поверхность?

Удельный вес дерева $\gamma = 0{,}8$. (Ответ: $\frac{\gamma^2 H^2 S}{2} = 32 кгм$.)

6. Вычислить силу, с которой вода давит на плотину, имеющую форму равнобочной трапеции, верхнее основание которой $a = 6{,}4 м$, нижнее $в = 4{,}2 м$, а высота $h = 3 м$. (Ответ: 22,2 т.)

7. Скорость тела, брошенного вертикально вверх с начальной скоростью v_0 с учетом сопротивления воздуха, дается формулой:

$$v = c \cdot tg\left(-\frac{g}{c} t + arctg \frac{v_0}{c}\right),$$

где t – протекшее время, g – ускорение силы тяжести и c – постоянная. Найти высоту поднятия тела. (Ответ: $\frac{c^2H^2}{2g}ln\left(1+\frac{v_0^2}{c^2}\right)$.)

8. Точка оси Ox совершает гармонические колебания вокруг начала координат, причем скорость ее дается формулой:

$$v = v_0 cos\omega t,$$

где t – время и v_0, ω – постоянные. Найти закон колебаний точки, если при $t = 0$ она имела абсциссу $x = 0$. Чему равно среднее значение абсолютной величины скорости точки за период колебаний? (Ответ: $x=\frac{v_0}{\omega}sin\omega t$, $v_{cp}=\frac{2}{\pi}v_0$.)

9. Скорость движения точки $v = te^{-0,01t}$ $м/сек$. Найти путь, пройденный точкой от начала движения до полной остановки. (Ответ: 10 *км*.)

10. Вычислить работу, которую необходимо затратить, чтобы выкачать масло через верхнее отверстие из цистерны, имеющей форму цилиндра с горизонтальной осью, если удельный вес масла γ, длина цистерны H и радиус основания R. (Ответ: $A=\pi\gamma R^3H$.)

11. Прямоугольный сосуд наполнен водой и маслом в равных по объему частях, причем масло вдвое легче воды. Показать, что сила давления смеси на боковую стенку уменьшится на 1/5, если воду заменить маслом.

12. Определить силу давления воды на вертикальный прямоугольный шлюз с основанием 18 *м* и высотой 6 *м*. (Ответ: 324.)

13. Вычислить силу давления воды на треугольник, высота которого равна h *см,* а основание b *см,* если он погружен в воду таким образом, что основание его лежит на поверхности воды, а высота направлена вертикально вниз. (Ответ: $\frac{bH^2}{6}$.)

14. Вычислить силу давления жидкости на вертикальный эллипс с осями *2а* и *2в,* центр которого погружен в жидкость на уровень h ($h \geq в$). Плотность жидкости d. (Ответ: $\pi aвdh$.)

15. Вычислить силу давления воды на вертикальную плотину, имеющую форму трапеции, верхнее основание которой имеет 70 *м* в длину, нижнее 50 *м,* а высота 20 *м*. (Ответ: $11333\frac{1}{3}$.)

16. Вычислить силу давления жидкости на боковые стенки кругового цилиндра, высота которого равна h *см,* а радиус основания r *см.* Плотность жидкости равна γ и жидкость полностью заполняет цилиндр. (Ответ: $\pi\gamma\cdot rh^2$.)

17. Вычислить работу, которую необходимо затратить, чтобы выкачать воду из резервуара, имеющего форму конуса, обращенного вершиной вниз. Высота конуса *H,* радиус *R*. (Ответ: $\pi R^2 H^2$.)

18*. Какую работу надо затратить, чтобы тело массы *m* поднять с поверхности Земли, радиус которой *R,* на высоту *h*? Чему равна эта работа, если тело должно быть удалено на бесконечность? (Ответ: $A=\dfrac{mgh}{1+h/R}$; $A_\infty = mgR$.)

19. Шар лежит на дне бассейна глубиной *H*. Вычислить работу, которую необходимо затратить, чтобы извлечь шар из воды, если его радиус равен *R,* а его плотность δ. (Ответ: $\dfrac{4\pi R^3[R+(\delta-1)H]}{3}$.)

20. Два электрических заряда $e_0 = 100 CGCE$ и $e_1 = 200 CGCE$ находятся на оси Ох соответственно в точках $x_0 = 0$ и $x_1 = 1$ *см*. Какая работа будет произведена, если второй заряд переместится в точку $x_2 = 10$ *см*? (Ответ: $1{,}8 \cdot 10^4$ *эрг*.)

21. Скорость распада радия в каждый момент времени пропорциональна его наличному количеству. Найти закон распада радия, если в начальный момент *t* = 0 имелось Q_0 граммов радия, а через время *T* = 1600 лет его количество уменьшится в два раза. (Ответ: $\theta = \theta_0 \cdot 2^{-t/1600}$.)

22*.Вычислить кинетическую энергию диска массы *M* и радиуса *R*, вращающегося с угловой скоростью ω около оси, проходящей через центр диска перпендикулярно к его плоскости. (Ответ: $\dfrac{MR^2\omega^2}{4}$.)

23. Вычислить кинетическую энергию прямого круглого конуса массы *M,* вращающегося с угловой скоростью ω около своей оси, если радиус основания конуса *R,* а высота *H*. (Ответ: $K = \dfrac{3MR^2\omega^2}{20}$.)

24. Вычислить кинетическую энергию шара массы *m* и радиуса *R*, вращающегося с угловой скоростью ω около оси, проходящей через его центр. (Ответ: $\dfrac{mR^2\omega^2}{5}$.)

25*. Какую работу надо затратить, чтобы остановить железный шар радиуса *R* =2 *м,* вращающийся с угловой скоростью $\omega = 1000\ об/мин$ вокруг своего диаметра? (Удельный вес железа γ = 7,8 *Г/см*^{3}*.)* (Ответ: $K = \dfrac{MR^2\omega^2}{5} = 2{,}3 \cdot 10^8\ к/Гм$. *Указание.* Количество необходимой работы равно запасу кинетической энергии.)

26. Найти давление бензина, находящегося в цилиндрическом баке высотой $h=4$ *м* и радиусом $r=2$ *м* (плотность бензина $\rho=900\ кг/м^3$), на стенки бака на каждом метре глубины. (Ответ: $P_1=17{,}64\pi\ кН$, $P_2=70{,}56\pi\ кН$, $P_3=158{,}76\pi\ кН$, $P_4=282{,}24\pi\ кН$.)

27. Вычислить сопротивление при прохождении тока с одного основания усеченного конуса к другому, если радиусы оснований равны *а* и *в*, а высота усеченного конуса равна *Н*. (Ответ: $\frac{RH}{\pi a в}$.)

28. Куб погружен в воду так, что его верхнее основание находится на поверхности воды. Определить работу, необходимую для извлечения куба из воды, если его ребро равно *а*, а удельный вес δ $(\delta>1)$. (Ответ: $a^4\left(\delta-\frac{1}{2}\right)$.)

29. Верхний край шлюза, имеющего форму квадрата со стороной, равной 8 *м,* лежит на поверхности воды. Определить величину давления на каждую из частей шлюза, образуемую делением квадрата одной из его диагоналей. (Ответ: 85 333,33 *кг*, 170 666,67 *кг).*

30. Найти количество тепла, выделяемое переменным синусоидальным током

$$I=I_0 sin\left(\frac{2\pi}{T}t-\varphi\right)$$

в течение периода *Т* в проводнике с сопротивлением *R*. (Ответ: $0{,}12RTI_0^2$.)

Контрольная работа № 6

Вычислить приближенно определенный интеграл $\int\limits_a^в f(x)dx$ по указанной формуле и числу *n* разбиения отрезка [*а*; *в*].

1. $\int\limits_1^9 \sqrt{x}dx$, $n=4$ по формуле Симпсона;

2. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x}$, $n=8$ по формуле трапеций;

3. $\int\limits_0^{2\pi} xsinxdx,\ n=6$ по формуле прямоугольников;

4. $\int\limits_0^{\pi} \sqrt{3+cosx}dx$, $n=6$ по формуле Симпсона;

5. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x^3}$, $n=12$ по формуле

6. $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{sinx}{x}dx$, $n=10$ по формуле

трапеций;

Симпсона;

7. $\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-\frac{1}{4}sin^2x}dx$, $n=6$ по формуле трапеций;

8. $\int_0^1 \frac{xdx}{ln(1+x)}$, $n=6$ по формуле Симпсона;

9. $\int_3^9 \frac{dx}{x}$, $n=6$ по формуле трапеций;

10. $\int_1^2 \frac{dx}{x}$, $n=10$ по формуле прямоугольников;

11. $\int_0^1 \sqrt{1-x^3}dx$, $n=10$ по формуле Симпсона;

12. $\int_1^2 \frac{dx}{x}$, $n=10$ по формуле трапеций;

13. $\int_0^1 \sqrt{1+x^4}dx$, $n=10$ по формуле Симпсона;

14. $\int_0^{\pi/2} \frac{cosxdx}{x}$, $n=3$ по формуле трапеций;

15. $\int_0^1 xdx$, $n=10$ по формуле прямоугольников;

16. $\int_2^5 \frac{dx}{lnx}$, $n=6$ по формуле Симпсона;

17. $\int_0^4 \sqrt{x}dx$, $n=10$ по формуле трапеций;

18. $\int_0^{\pi/2} \sqrt{cosx}dx$, $n=10$ по формуле Симпсона;

19. $\int_0^{\pi/2} sinxdx$, $n=3$ по формуле трапеций;

20. $\int_0^{\pi/2} \sqrt{1-0{,}1sin^2x}dx$, $n=6$ по формуле Симпсона;

21. $\int_{0,1}^{1,1} (x-0{,}1)\sqrt{5x+3{,}5}dx$, $n=10$ по формуле трапеций;

22. $\int_0^{\pi/3} \frac{sinxdx}{x}$, $n=10$ по формуле Симпсона;

23. $\int_{0,2}^{1,2} (x-0{,}2)\sqrt{5x+3}dx$, $n=3$ по формуле трапеций;

24. $\int_{-3}^1 ln(2x+7)dx$, $n=10$ по формуле Симпсона;

25. $\int_0^{10} x^3dx$, $n=10$ по формуле трапеций;

26. $\int_0^2 \frac{dx}{1+x^2}$, $n=6$ по формуле Симпсона;

27. $\int\limits_{0,3}^{1,3}(x-0{,}3)\sqrt{5x+2{,}5}\,dx$, $n=10$ по формуле трапеций;

28. $\int\limits_{-1}^{3} ln(2x+3)dx$, $n=8$ по формуле Симпсона;

29. $\int\limits_{-2}^{6}\sqrt[3]{9x+10}\,dx$, $n=8$ по формуле трапеций;

30. $\int\limits_{5}^{9} ln(2x-9)dx$, $n=8$ по формуле Симпсона;

Раздел IX. Дополнительные задачи

1. Вычислить интеграл $\int\limits_{0}^{5}\sqrt{25-x^2}\,dx$, опираясь на его геометрический смысл.

2. Исходя из геометрического смысла интеграла, показать, что:

а) $\int\limits_{0}^{2\pi} sin^3 x dx=0$; б) $\int\limits_{0}^{2\pi} cos^3 x dx=0$; в) $\int\limits_{-3}^{3}\sqrt{9-x^2}\,dx=\frac{9\pi}{2}$.

3. Показать, что функция Дирихле $f(x)=\begin{cases}1, & x-рациональное\\ 0, & x-иррациональное\end{cases}$ неинтегрируемая на отрезке [0; 1].

4. Найти производные следующих функций: а) $F(x)=\int\limits_{1}^{x} lnt dt$; б) $F(x)=\int\limits_{2/x}^{x^2}\frac{dt}{t}$; в) $x=\int\limits_{c^2}^{sint} arcsinz dz$, $y=\int\limits_{n}^{\sqrt{t}}\frac{sinz^2}{z}dz$.

5. Можно ли в следующих интегралах применять указанные подстановки:

а) $\int\limits_{-2}^{2}\sqrt[5]{x^2}\,dx$, $t=x^{2/5}$; б) $\int\limits_{0}^{1}\sqrt{1+x^2}\,dx$, $x=sect$?

6. В чем ошибка при вычислении интеграла $\int\limits_{0}^{2\pi}\frac{dx}{5-2cosx}$?

Решение. Применив подстановку $t=tg\frac{x}{2}$, получим:

$$\int\limits_{0}^{2\pi}\frac{dx}{5-2cosx}=\int\limits_{0}^{0}\frac{2dt}{(1+t^2)\left(5-2\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)}=0.$$

Интеграл от всюду положительной функции равен нулю, что противоречит свойству 7 определенного интеграла.

7. Найти среднее значение μ функции: а) $f(x)=\sqrt[3]{x}$ на отрезке [0; 1]; б) среднюю длину всех вертикальных хорд гиперболы $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{в^2}=1$ на отрезке [a; 2a]; в) среднюю ординату синусоиды $y=sinx$ на отрезке [0; π];. (*Указание*. Средним значением функции на отрезке [a; в] называется число

$$\mu=\frac{1}{в-a}\int_a^в f(x)dx.)$$

8. Сечение желоба имеет форму параболического сегмента. Основание его a, глубина h. Определить среднюю глубину желоба.

9. Тело, падающее на землю из состояния покоя, пройдя вертикальный отрезок $s=s_1$, приобретает скорость $v_1=\sqrt{2gs_1}$. Показать, что на этом пути средняя скорость $v_{ср}$ равна $\frac{2v_1}{3}$.

10. Можно ли при вычислении интеграла $\int_0^1\sqrt{1-x^2}dx$, применяя подстановку $x=sint$, в качестве новых пределов интегрирования взять числа π и $\frac{\pi}{2}$?

11. Доказать равенство $\int_{-a}^{a} f(x)dx=\int_0^a [f(x)+f(-x)]dx$ для любой непрерывной функции $f(x)$.

12. Преобразовать определенный интеграл $\int_0^{2\pi} f(x)cosxdx$ с помощью подстановки $t=sinx$.

13. Дана функция

$$f(x)=\begin{cases}1-x & при\ 0\le x\le 1,\\ 0 & при\ 1\le x\le 2,\\ (2-x)^2 & при\ 2\le x\le 3.\end{cases}$$

Проверить непосредственно, что функция $F(x)=\int\limits_0^x f(t)dt$ кусочно-непрерывна в промежутке [0; 3] и что ее производная в каждой внутренней точке этого промежутка существует и равна $f(x)$.

14. Касательная к графику функции $y=f(x)$ в точке с абсциссой $x=a$ составляет с осью абсцисс угол $\frac{\pi}{3}$ и в точке с абсциссой $x=в$ угол $\frac{\pi}{4}$. Вычислить $\int\limits_a^в f''(x)dx$, если $f''(x)$ – непрерывная функция.

15. Показать, что функция интегрируема на отрезке [0; 1].

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{xlnx}{1-x} & при\ \ 0<x<1, \\ 0 & при\ \ x=0, \\ -1 & при\ \ x=1. \end{cases}$$

16. Дан интеграл $\int\limits_0^\pi \frac{dx}{1+cos^2 x}$. Убедиться, что функции

$$F_1(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}arccos\frac{\sqrt{2}cosx}{\sqrt{1+cos^2 x}} \quad и \quad F_2(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}arctg\frac{tgx}{\sqrt{2}}$$

являются первообразными для подынтегральной функции. Можно ли воспользоваться обеими первообразными для вычисления интеграла по формуле Ньютона – Лейбница? Если нет, то указать, какой можно.

17. Исследовать функцию $F(x)$, заданную определенным интегралом $F(x)=\int\limits_0^x \sqrt{1-t^4}dt$, применив теорему: производная от интеграла с переменным верхним пределом интегрирования равна значению функции в точке верхнего предела, т.е. $\left(\int\limits_a^x f(t)dt\right)' = f(x)$ [9].

18. Доказать, что объем тела, полученного вращением вокруг оси Оу фигуры $a\le x\le в,\ 0\le y\le y(x)$, где $y(x)$ – однозначная непрерывная функция, равен:

$$V=2\pi\int\limits_a^в xy(x)dx.$$

19. Доказать, что объем тела, полученного вращением вокруг полярной оси фигуры $0\le\varphi_1\le\varphi\le\varphi_2\le\pi$, $0\le\rho\le\rho(\varphi)$ равен:

$$V=\frac{2\pi}{3}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\rho^3(\varphi)sin\varphi d\varphi .$$

20. Найти отношение площади, ограниченной петлей кривой $y=\pm(1/3-x)\sqrt{x}$, к площади круга, длина окружности которого равна длине контура этой кривой.

21. В гидравлике существует формула Базена, выражающая скорость v течения воды в широком прямоугольном канале в зависимости от глубины h рассматриваемой точки под свободной поверхностью, $v=v_0-20\sqrt{HL}(h/H)^2$, где v_0 – скорость на свободной поверхности, H – глубина канала, L – уклон. Определить среднюю скорость v_m течения в поперечном сечении канала.

22. Найти осевую составляющую *P кг* полного давления пара на сферическое дно котла. Диаметр цилиндрической части котла *D мм,* давление пара в котле P *кг*$/$*см*^{2}. (Ответ: $P=\frac{\pi PD^2}{400}$.)

23. Призматический брус подвешен вертикально, и к нижнему его концу приложена растягивающая сила *P*. Вычислить удлинение бруса под действием силы его веса и силы *P,* если дано, что длина бруса в нерастянутом состоянии равна *l* площадь поперечного сечения *F,* вес бруса Q и модуль упругости материала *E.* (Ответ: $\Delta l=\frac{(Q+2P)l}{2EF}$.)

24. Определить время, в течение которого жидкость выльется из призматического сосуда, наполненного до высоты *H.* Площадь поперечного сечения сосуда *F*, площадь отверстия *f*, скорость истечения определяется по формуле $v=\mu\sqrt{2gh}$ где μ — коэффициент вязкости, *g*— ускорение силы тяжести, *h* — расстояние от отверстия до уровня жидкости. (Ответ: $t=\frac{2FH}{\mu f\sqrt{2gH}}=\frac{F}{\mu f}\sqrt{\frac{2H}{g}}$.)

25. Определить расход *Q* воды {количество воды, вытекающей в единицу времени) через водослив прямоугольного сечения. Высота водослива *h*, ширина *в* (Ответ: $Q=\frac{2}{3}\mu в h\sqrt{2gh}$.)

26. Определить расход воды *Q,* вытекающей из бокового прямоугольного отверстия высотой *a* и шириной *в,* если высота свободной поверхности воды над нижней стороной отверстия равна *H* (Ответ: $Q=\frac{2}{3}\mu в\sqrt{2g}\left[H^{3/2}-(H-a)^{3/2}\right]$.)

27. Ракетный снаряд поднимается вертикально вверх. Считая, что при постоянной силе тяги ускорение ракеты за счет уменьшения ее веса растет по закону $j = \dfrac{A}{a - bt}$ $(a - bt > 0)$, найти скорость ракеты в любой момент времени t если начальная скорость ее равна нулю. Найти также высоту, достигнутую ракетой к моменту времени $t = t_1$.

(Ответ: $v = \dfrac{A}{b} ln \dfrac{a}{a - bt}$, $h = \dfrac{A}{b^2}\left[bt_1 - \left(a - bt_1\right) ln \dfrac{a}{a - bt_1}\right]$.)

28. Найти массу стержня длины $l = 100$ *см,* если линейная плотность стержня на расстоянии x *см* от одного из его концов равна: $\delta = 2 + 0{,}001x^2$ *г/см*. (Ответ: $533\dfrac{1}{3}$ *г*.)

29. Согласно эмпирическим данным удельная теплоемкость воды при температуре t°С ($0 \le t \le 100^{o}$) равна:

$$c = 0{,}9983 - 5{,}184 \cdot 10^{-5} t + 6{,}912 \cdot 10^{-7} t^2 .$$

Какое количество тепла нужно затратить, чтобы 1 *г* воды нагреть от температуры 0°С до температуры 100°С? (Ответ: 99,8 *кал*.)

30. Ветер производит равномерное давление *pГ/см*^{2} на дверь, ширина которой b *см* и высота h *см.* Найти момент силы давления ветра, стремящейся повернуть дверь на петлях. (Ответ: $M = \dfrac{hb^2 p}{2}$ *Гсм*.)

Раздел X. ПРИЛОЖЕНИЕ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА К ЗАДАЧАМ С СЕЛЬСКОХОЗЯЙСТВЕННЫМ СОДЕРЖАНИЕМ

В данном разделе приведен перечень задач с сельскохозяйственным содержанием, как одна из областей приложения понятия определенного интеграла, что еще раз доказывает широкие возможности применения данного понятия в окружающей действительности.

1. Один колхоз решил посадить картофель на площади, ограниченной кривой $y = 2^x$, прямыми $x = 0$, $x = 2$ и осью Ох. Другой предложил ему сократить эту

площадь кривой $y=-x^2+2x$ и посадить на оставшейся части капусту. Определить площадь, выделенную под картофель (x, y – в км). (Ответ: 300 га)

2. Для группы скота на зиму надо заготовить определенное количество центнеров корма, из которых часть составляют грубые корма, часть – картофель, часть – концентраты. Чему равна масса заготовленного грубого корма, занимаемого площадь, ограниченной кривой $y=x^2+1$ и прямой $x+y=3$, (x, y – в км), если с 1 га в среднем собирают 1 т грубого корма? (Ответ: 450 т)

3. Чему равна общая площадь, занятая под ячмень, рожь и пшеницу в отдельности, если известно, что их участки культур расположены один за другим соответственно и ограничены кривыми: $y=cosx$, $y=sinx$, $x=0$, $x=\pi$ и $y=0$ (x, y – в км)? (Ответ: 240 га)

4. На окучивании картофеля тракторный окучник обработал площадь, ограниченной кривыми: $y=(x-4)^2$ и $y=16-x^2$ (x, y – в км). Какую площадь обработали конные окучники, если известно, что она составляет 3/4 площади, обработанной тракторным? (Ответ: $S_{тракт} = 4270$ га; $S_{кон} = 32$ га)

5. На 1 га земли требуется 60 т навоза и 120 кг минеральных удобрений. Сколько удобрений надо внести на участок, если он ограничен линиями: $7x-2y=3$, $5x+y=7$, $y=0$ (x, y – в км)? (Ответ: 5828 т – навоза; 11,66 т – минеральных удобрений)

6. Какую площадь, ограниченной кривой $\left(x^2+y^2\right)^3 = 2{,}25x^2y^2$ (x, y – в км) может вспахать трактор за 5 дней? (Ответ: 25га)

7. Какую площадь, ограниченной кривой $\left(x^2+y^2\right)^2 = 3200x^2y^2$ (x, y – в м) может скосить тракторная косилка? (Ответ: 1600 $м^2$)

8. Определить площадь, занятую под рожь, ограниченной кривой $\rho=8\sqrt{\frac{10}{\pi}}sin2\varphi$, $0\le\varphi\le2\pi$ (ρ – в км) . (Ответ: 320 тыс. га)

9. Три трактора вспахали площадь земли (в га), ограниченной кривой $y^2=x^3$ и прямой $x=1$. Сколько гектаров вспахал каждый, если 2/3 земли, вспаханной первым трактором, равны 1/2 земли, вспаханной вторым, или 2/3 земли, вспаханной третьим трактором? (Ответ: $S_1 = S_3 = 120$ га; $S_2 = 160$ га)

10. Колхоз засеял пшеницей участок площадью, ограниченной кривой $y = x^2$ и прямой $y = x + 2$ (x, y – в км), что составило 40% всей занимаемой площади под пшеницу, овес и донник, а оставшуюся часть площади распределил для посева овса и донника в отношении 6:4. Найти площадь, занятую каждой из культур. (Ответ: $S_{пшен} = 450$ га; $S_{овес} = 405$ га; $S_{дон} = 270$ га)

11. Какова масса продукта, заполняющего объем, полученного вращением вокруг оси Ох кривой, ограниченной линиями: $y = 2x - x^2$, $y = 0$ (x, y – в м), если известно, что 1 $м^3$ весит 0,4 т? (Ответ: 134 т)

12. Сколько потребуется рейсов пятитонного грузовика для перевозки груза, заполняющего объем, полученного вращением вокруг оси Ох кривой, ограниченной линиями: $x = e^{-y}$, $y = 0$, $y = -1$ (x, y – в м), если известно, что масса 1 $м^3$ равна 400 кг? (Ответ: 2 рейса)

13. Высота кучи зерна, имеющего коническую форму, равна 2,5 м, а длина окружности ее основания – 20 м. Масса 1 $м^3$ зерна равна 750 кг. Какова масса зерна в куче? (Ответ: 20 т)

14. Найти площадь, обрабатываемой силосоуборочным комбайном, если она ограничена кривой $x = 12cost + 5sint$, $y = 5\cos t - 12sint$ (x, y – в м). (Ответ: 530,66 $м^2$)

15. Известно, что две бригады имеют общую площадь пахоты земли (в га), ограниченной кривой $\rho = \dfrac{2\pi}{cos(\varphi - \pi / 6)}$ от $\varphi = \dfrac{\pi}{6}$ до $\varphi = \dfrac{\pi}{3}$ (ρ – в км). Сколько земли относится к каждой бригаде, если к первой относится 2/3 всей площади? (Ответ: $S_1 = 379$ га; $S_2 = 189$ га)

16. Два трактора различной мощности вспахали вместе площадь целины, ограниченной кривой $\rho = 2\sqrt{cos2\varphi}$, ($\rho$ – в км). Найти эту площадь. (Ответ: 400 га)

17. Бригада трактористов пахала ежедневно по участку залежных земель, ограниченный кривой $x = 3(t - sint)$, $y = 3(1 - cost)$, $0 \le t \le 2\pi$. Найти площадь, вспаханную бригадой за 3 дня. (Ответ: 25434 га)

18. Совхоз засел рожью 2 участка земли. Площадь первого составляет 2/5 площади второго, которая ограничена кривой $x = 4cos^3 t$, $y = 4sin^3 t$ (x, y – в км). Найти площадь каждого участка. (Ответ: $S_1 = 1884$ га; $S_2 = 753{,}6$ га)

19. Машинно–тракторный агрегат МТЗ – 82 + «Простор» обработал 2/3 часть всей площади, ограниченной кривыми: $y^2 = x$, $x^2 = y$ (x, y – в км) за 2 *ч* 12 *мин*. Через сколько часов он закончит уборку оставшейся площади при прежней скорости? (Ответ: через 1*ч* 25 *мин*)

20. Для посева ячменя совхоз выделил участок, ограниченный кривой $y = e^{x/2}$, прямыми $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$ (x, y – в км), что составило 35% всей площади посева зерновых. Оставшаяся посевная площадь была распределена для посева пшеницы, овса и ржи в отношении 6:4:3. Сколько гектаров было выделено совхозом для посева пшеницы, овса и ржи? (Ответ: $S_{пшен} = 277{,}56$ га; $S_{овес} = 185{,}04$ га; $S_{рожь} = 138{,}78$ га)

21. Две бригады обработали вместе участок земли, ограниченной линиями: $y = x^2$, $x + y = 2$ (x, y – в км). Площадь первой бригады составляет 80% всей площади. Сколько гектаров земли обработала каждая бригада? Найти координаты центра тяжести этого участка. (Ответ: $S_1 = 360$ га; $S_2 = 90$ га; $(x_c; y_c) = (-0{,}5; 1{,}6)$)

22. Колхозник конной косилкой скосил участок, ограниченный кривыми: $y = x^3$, $y = 0$, $x = 2$ (x, y – в км). Сколько гектаров скосил колхозник? (Ответ: 400 га)

23. Силосная яма имеет форму усеченного конуса, полученного вращением вокруг оси Оу фигуры, ограниченной прямыми: $y = 2x - 6$, $y = 0$, $x = 0$, $y = 2$ (x, y – в км). Сколько коров можно прокормить заготовленным в яме силосом в течение $6\frac{2}{3}$ месяца при ежесуточном расходе на одну корову 40 *кг* силоса, если 1 $м^3$ силоса весит 0,5 т ? (Ответ: ≈ 5 коров)

24. Самолет сельскохозяйственной авиации при опылении посевов поднимается в воздух со скоростью $v = 100t^2 + 6t$ *км/ч*. Определить, какое расстояние он пролетит за первые 10 *мин* от начала полета? (Ответ: $\frac{77}{324}$ км)

25. Движение шара в лототроне описывается уравнением $\rho = 2\varphi$ от $\varphi_1 = 0$ до $\varphi_2 = \frac{3}{4}$ (ρ – в м). Определить, какой путь проходит при этом шар? (Ответ: 1,9375 м)

26. Какова длина цветочной клумбы, имеющей форму астроида: $x = 4cos^3 t$, $y = 4sin^3 t$ (x, y – в м) (рис. 16)? (Ответ: 9,42 м)

27. На свиноферме требуется установить резервуар для воды с прямоугольным дном 3,6×4,5 *м* емкостью, полученной вращением вокруг оси Ох плоской фигуры, ограниченной линиями: $xy=4$, $x=1$, $x=4$, $y=0$ (*x*, *y* – в м). Определить высоту резервуара. (Ответ: 2,3 м)

28. Две картофельные участки имеют форму прямоугольника, площадь каждого из них численно равна площади фигуры, ограниченной кривой $\rho = 50cos4\varphi$ (ρ – в м). Вычислить периметры данных участков, если отношения их сторон соответственно равны 1:2 и 1:5. (Ответ: $P_1 = 531{,}6$ м; $P_2 = 31400{,}4$ м)

29. В прошлом году колхоз заготовил для коров столько тонн силоса, сколько тонн вмещается в яму объемом, полученный вращением вокруг оси Ох фигуры, ограниченной линиями: $y^2=8x$, $x=5$, причем на 1 $м^3$ *м* силоса приходится 260 т силоса. В этом году заготовлено в 1,5 раза силоса больше, чем в прошлом. Сколько тонн силоса заготовлено для коров в этом году? (Ответ: 1222460 т)

30. Сколько самосвалов грузоподъемностью по 2,5 т каждый потребуется для перевозки на животноводческую ферму свеклы из ямы объемом, полученный вращением вокруг оси Оу кривой $x^2-y^2=4$, прямыми $y=2$ и $y=-2$, если на 1 $м^3$*м* приходится 500 *кг* свеклы? (Ответ: 9 самосвалов)

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение 1

Таблица основных интегралов

Простая функция	*Сложная функция*
1. $\int dx = x + C$; $\int dt = t + C$;	1. $\int du = u + C$; $\int dv = v + C$.
2. $\int 0dx = C$.	2. $\int 0du = C$.
3. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$, $n \in R$, $n \neq -1$.	3. $\int u^n dx = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$.
3а) $\int \sqrt{x}dx = \frac{2x^{3/2}}{3} + C$.	3а) $\int \sqrt{u}du = \frac{2u^{3/2}}{3} + C$.
3б) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C$.	3б) $\int \frac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + C$.
3в) $\int \frac{dx}{x^n} = \frac{1}{(1-n)x^{n-1}} + C$, $n \neq 1$.	3в) $\int \frac{du}{u^n} = \frac{1}{(1-n)u^{n-1}} + C$.
3г) $\int \sqrt[n]{x^m}dx = \frac{x^{\frac{m}{n}+1}}{\frac{m}{n}+1} + C$, $\frac{m}{n} \neq -1$.	3г) $\int \sqrt[n]{u^m}du = \frac{u^{\frac{m}{n}+1}}{\frac{m}{n}+1} + C$.
4. $\int \frac{dx}{ax + в} = \frac{1}{a} ln\lvert ax + в \rvert + C$.	4. $\int \frac{du}{au + в} = \frac{1}{a} ln\lvert au + в \rvert + C$.
4а) $\int \frac{dx}{x} = ln\lvert x \rvert + C$.	4а) $\int \frac{du}{u} = ln\lvert u \rvert + C$.
5. $\int e^x dx = e^x + C$.	5. $\int e^u du = e^u + C$.
6. $\int a^x dx = \frac{a^x}{lna} + C$, $a > 0, a \neq 1, a = const$.	6. $\int a^u du = \frac{a^u}{lna} + C$.
7. $\int sinxdx = -cosx + C$.	7. $\int sinudu = -cosu + C$.
8. $\int cosxdx = sinx + C$.	8. $\int cosudu = sinu + C$.
9. $\int tgxdx = -ln\lvert cosx \rvert + C$.	9. $\int tgudu = -ln\lvert cosu \rvert + C$.
10. $\int ctgxdx = ln\lvert sinx \rvert + C$.	10. $\int ctgudu = ln\lvert sinu \rvert + C$.
11. $\int \frac{dx}{cos^2 x} = tgx + C$.	11. $\int \frac{du}{cos^2 u} = tgu + C$.
12. $\int \frac{dx}{sin^2 x} = -ctgx + C$.	12. $\int \frac{du}{sin^2 u} = -ctgu + C$.

13 . $\int \frac{dx}{x^2-1} = \frac{1}{2}\cdot ln\left\|\frac{x-1}{x+1}\right\| + C$.	13 . $\int \frac{du}{u^2-1} = \frac{1}{2}\cdot ln\left\|\frac{u-1}{u+1}\right\| + C$.
14. $\int \frac{dx}{x^2+1} = \left[\begin{array}{l} arctgx + C \\ -arcctgx + C \end{array}\right.$.	14. $\int \frac{du}{u^2+1} = \left[\begin{array}{l} arctgu + C \\ -arcctgu + C \end{array}\right.$.
15. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \left[\begin{array}{l} arcsinx + C \\ -arccosx + C \end{array}\right.$.	15. $\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \left[\begin{array}{l} arcsinu + C \\ -arccosu + C \end{array}\right.$
16. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm 1}} = ln\left\|x + \sqrt{x^2 \pm 1}\right\| + C$.	16. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm 1}} = ln\left\|u + \sqrt{u^2 \pm 1}\right\| + C$
17 . $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\cdot ln\left\|\frac{x-a}{x+a}\right\| + C$, $a = const$.	17. $\int \frac{du}{u^2-a^2} = \frac{1}{2a}\cdot ln\left\|\frac{u-a}{u+a}\right\| + C$,
18. $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \left[\begin{array}{l} \frac{1}{a}\cdot arctg\frac{x}{a} + C \\ -\frac{1}{a}\cdot arcctg\frac{x}{a} + C \end{array}\right.$.	18 . $\int \frac{du}{u^2+a^2} = \left[\begin{array}{l} \frac{1}{a}\cdot arctg\frac{u}{a} + C \\ -\frac{1}{a}\cdot arcctg\frac{u}{a} + C \end{array}\right.$
19. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \left[\begin{array}{l} arcsin\frac{x}{a} + C \\ -arccos\frac{x}{a} + C \end{array}\right.$.	19. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \left[\begin{array}{l} arcsin\frac{u}{a} + C \\ -arccos\frac{u}{a} + C \end{array}\right.$.
20. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm m}} = ln\left\|x + \sqrt{x^2 \pm m}\right\| + C$, $m = const$.	20. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm m}} = ln\left\|u + \sqrt{u^2 \pm m}\right\| + C$.

Обзорная таблица методов интегрирования

№ п/п	***Вид интеграла***	***Способ вычисления интеграла***
1	$\int f(x)dx$ – табличный.	Метод непосредственного интегрирования (при помощи табличных интегралов).
2	$\int f(x)dx$ – не табличный.	Метод подстановки или замены переменной: $\boxed{\int f(x)dx = \int f\,[\varphi(x)]\cdot\varphi'(t)dt}$. *Правило 1*: $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \left\{\begin{matrix} f(x)=t \\ f'(x)dx=dt \end{matrix}\right\} = ln\left\|f(x)\right\| + C$. *Правило 2*: $\int \frac{f'(x)}{[f(x)]^n}dx = \left\{\begin{matrix} f(x)=t \\ f'(x)dx=dt \end{matrix}\right\} = \frac{1}{(1-n)[f(x)]^{n-1}} + C$, $n \neq 1,\ n \in R$. *Правило 3*: $\int [f(x)]^n \cdot f'(x)dx = \left\{\begin{matrix} f(x)=t \\ f'(x)dx=dt \end{matrix}\right\} = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + C$, $n \neq -1,\ n \in R$. *Правило 4*: $\int a^{f(x)} \cdot f'(x)dx = \left\{\begin{matrix} f(x)=t \\ f'(x)dx=dt \end{matrix}\right\} = \frac{a^{f(x)}}{lna} + C$, $a > 0,\ a \neq 1$, (в частности, $a = e$). *Правило 5*: $\int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}dx = \left\{\begin{matrix} f(x)=t \\ f'(x)dx=dt \end{matrix}\right\} = 2\sqrt{f(x)} + C$.
3	$\int f(x)dx$ – не табличный, где	Метод интегрирования по частям: $\boxed{\int f(x)dx = \int u\cdot dv = u\cdot v - \int v\cdot du}$

	а) ***I тип***: $f(x) = P_n(x) \cdot \left[\begin{array}{l} sinx,\ cosx,\ tgx, \\ ctgx,\ e^x,\ a^x \end{array}\right.$; б) ***II тип***: $f(x) = P_n(x) \cdot \left[\begin{array}{l} arcsinx,\ arccosx,\ arctgx, \\ arcctgx, lnx,\ log_a x \end{array}\right.$, где $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ – многочл. n-й степ.; в) ***III тип***: $f(x) = \left[e^x \cdot sinx,\quad e^x \cdot cosx \right.$; г) ***IV тип***: $f(x) = \left[sin(lnx), cos(lnx) \right.$.	а) подстановка: $P_n(x) = u$, все остальное – за dv . б) подстановка: $P_n(x)dx = dv$, все остальное – за u . в) подстановка: $e^x = u$, все остальное – за dv (дважды интегрируется по частям). г) приводят к ***III типу*** при помощи подстановки: $lnx = t \Rightarrow x = e^t$, $dx = e^t dt$.
4	Интегрирование простейшей иррациональности: $\int R(x^{m/n}, x^{p/q}, \ldots, x^{r/s})dx$.	Подстановка: $x = t^\lambda$, где λ – общий знам.-ль несократимых дробей $\frac{m}{n}, \frac{p}{q}, \ldots, \frac{r}{s}$.
5	Интегрирование линейной иррациональности: $\int R((ax+в)^{m/n}, (ax+в)^{p/q}, \ldots, (ax+в)^{r/s})dx$	Подстановка: $ax + в = t^\lambda$, где λ – общий знам. несократ. дробей $\frac{m}{n}$, $\frac{p}{q}$, …, $\frac{r}{s}$.
6	Интегрирование дробно-линейной иррациональности: $\int R\left(\left(\frac{ax+в}{cx+d}\right)^{m/n}, \left(\frac{ax+в}{cx+d}\right)^{p/q}, \ldots, \left(\frac{ax+в}{cx+d}\right)^{r/s}\right)dx$.	Подстановка: $\frac{ax+в}{cx+d} = t^\lambda$, где λ – общий знам. несократ. дробей $\frac{m}{n}$, $\frac{p}{q}$, …, $\frac{r}{s}$.
7	Интегрирование простейших дробей: 1) $\int \frac{A}{x-a}dx$; 2) $\int \frac{A}{(x-a)^n}dx$; 3) $\int \frac{Mx+N}{ax^2+вx+c}dx$; 4) $\int \frac{Mx+N}{(ax^2+вx+c)^n}dx$.	1) $\int \frac{A}{x-a}dx = Aln\lvert x-a \rvert + C$; 2) $\int \frac{A}{(x-a)^n}dx = \frac{A}{(1-n)\cdot(x-a)^{n-1}} + C$, $n \neq 1$; 3) см. *правило 1* п. 2; 4) рекуррентная формула: $\int \frac{dt}{(t^2+m^2)^n} = \frac{t}{m^2(2n-2)\cdot(t^2+m^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{m^2(2n-2)} \cdot \int \frac{dt}{(t^2+m^2)^{n-1}}$.
8	Интегрирование дифференциального бинома: $\int x^m (a + вx^n)^p dx$.	а) если p – натуральное, то раскрыть скобку по биному Ньютона; б) если p – целое, $p < 0$, то $x = t^\lambda$, где λ – общий знаменатель m и n ; в) если $\frac{m+1}{n}$ – целое, то $a + вx^n = t^\lambda$, где λ – общий знаменатель p ;

		г) если $\frac{m+1}{n}+p$ – целое, то $a+bx^n=t^{\lambda}$, где λ – общий знаменат. p.
9	а) $\int sinmx\cdot cosnxdx$; б) $\int sin\,mx\cdot sin\,nxdx$; в) $\int cosmx\cdot cosnxdx$.	Преобразовать произведения синусов и косинусов в виде суммы по формулам: а) $sinmx\cdot cosnx=\frac{1}{2}\left[sin(m-n)x+sin(m+n)x\right]$; б) $sinmx\cdot sin\,nx=\frac{1}{2}\left[cos(m-n)x-cos(m+n)x\right]$; в) $cosmx\cdot cosnx=\frac{1}{2}\left[cos(m-n)x+cos(m+n)x\right]$.
10	$\int sin^m x\cdot cos^n xdx$, где m,n – целые;	а) если $m>0$ – нечетное, то $cosx=t$; б) если $n>0$ – нечетное, то $sinx=t$; в) если m и n – четные и $m<0$, то $ctgx=t$; г) если m и n – четные и $n<0$, то $tgx=t$; д) если m и n – четные и $m>0$, $n>0$, то преобразовать с помощью формул: $sin^2x=(1-cos2x)/2$; $cos^2x=(1+cos2x)/2$.
11	$\int R(sinx,cosx)dx$.	Универсальная подстановка: $tg\frac{x}{2}=t$, $dx=\frac{2dt}{1+t^2}$; $sinx=\frac{2t}{1+t^2}$; $cosx=\frac{1-t^2}{1+t^2}$.
12	а) $\int R(tgx)dx$; б) $\int R(ctgx)dx$.	а) $tgx=t$, $dx=dt/1+t^2$; б) $ctgx=t$, $dx=-dt/1+t^2$.
13	а) $\int R(x,\sqrt{a^2-x^2})dx$; б) $\int R(x,\sqrt{a^2+x^2})dx$; в) $\int R(x,\sqrt{x^2-a^2})dx$.	а) $x=a\cdot sint$, $dx=a\cdot costdt$ (или $x=a\cdot cost$, $dx=-a\cdot sintdt$); б) $x=a\cdot tgt$, $dx=\frac{adt}{cos^2t}$ (или $x=a\cdot ctgt$, $dx=-\frac{adt}{sin^2t}$); в) $x=\frac{a}{cost}$, $dx=\frac{a\cdot tgtdt}{cost}$ (или $x=\frac{a}{sint}$, $dx=\frac{-a\cdot ctgtdt}{sint}$).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Белько И.В. Высшая математика для инженеров. II семестр: экспресс – курс/ И.В. Белько, К.К. Кузьмич, Р.М. Жевняк. – М.: Новое знание, 2005.
2. Бугров Я.С. Высшая математика. В 3 т.: учеб. для вузов/Я.С. Бугров, С.М. Никольский; под ред. В.А. Садовничего. – 8-е изд., стереотип. – М.: Дрофа, 2007. – (Высшее образование: Современный учебник); Т.2: Дифференциальное и интегральное исчисление. – 509 с.
3. Ведина О.И., Десницкая В.Н., Варфоломеева Г.Б. Математический анализ для экономистов: Учебник/Под ред. д.ф.-м.н., проф. А.А. Гриба. – 2 -е изд., перераб. и доп. – Спб.: Изд-во «Лань», 2004.
4. Виленкин И.В., Гробер В.М. Высшая математика для студентов экономических, технических, естественно-научных специальностей вузов/ Серия «Учебники, учебные пособия». – Ростов н/Д.: Феникс, 2002.
5. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. Учебное пособие для вузов / Б.П. Демидович. – М.: Изд-во АСТ, 2003.
6. Демидович Б.П. Краткий курс высшей математики: учеб. Пособие для вузов/Б.П. Демидович, В.А. Кудрявцев. – М.: АСТ: Астрель, 2008.
7. Зайцев М.А. Высшая математика: Учебн. для вузов. – 3-е изд., испр. – М.: Дрофа, 2004.
8. Ильин В.А., Куркина А.В. Высшая математика: Учебник. – М.: ООО «ТК Велби», 2002.
9. Клименко Ю.И. Высшая математика для экономистов: теория, примеры, задачи: Уч-к для вузов/ Ю.И. Клименко. – М.: Изд-во «Экзамен», 2005.
10. Кузнецов Л.А. Сборник задач по высшей математике. Типовые расчеты: Учебн. пос. – 10-е изд., стер. – Спб.: Изд-во «Лань», 2008.
11. Курс высшей математики. Интегральное исчисление. Функции нескольких переменных. Дифференциальные уравнения. Лекции и практикум: Учебное пособие/Под ред. И.М. Петрушко. – Спб.: Изд-во «Лань», 2006.
12. Лунгу К.Н. Сборник задач по высшей математике. 1 курс / К.Н. Лунгу, Д.Т. Письменный. – 4-е изд. – М.: Айрис-пресс, 2005.
13. Натансон И.П. Краткий курс высшей математики.- 8-е изд., стер. – Спб.: Изд-во «Лань», 2005.
14. Общий курс высшей математики для экономистов: Учебник/Под ред. В.И. Ермакова. – М.: ИНФРА-М, 2000.
15. Шипачев В.С. Основы высшей математики: Учеб. для вузов/В.С. Шипачев, под ред А.Н. Тихонова. - 6-е изд., стер. – М.: Высш. шк., 2004.

Содержание

Голышева Светлана Павловна

Математика

Определенный интеграл и его приложения в агроинженерных задачах

Учебно – методическое пособие

Компьютерный набор и верстка Голышевой С.П.

Редактор Тесля Валентина Ивановна

Лицензия ЛР № 070444 от 11.03.98 г.

Подписано к печати

Формат $60 \times 84/16$

8,75 п.л.

Тираж 200 экз.

Издательство Иркутской государственной сельскохозяйственной академии

664038, Иркутская обл., Иркутский р-он, п.Молодежный, ИрГСХА.