

**Министерство сельского хозяйства Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
Иркутский государственный аграрный университет имени А.А. Ежевского
Кафедра информатики и математического моделирования**

Асалханов П.Г., Бендик Н.В.

**Учебное пособие
«Математические методы и модели поддержки принятия решения»**

для студентов

направления подготовки 09.04.03 Прикладная информатика,
профиль - Информационные и математические методы в экономике АПК

Иркутск 2020

Печатается по решению научно-методического совета ФГБОУ ВО Иркутского ГАУ (протокол № 5 от 26 мая 2020 г.).

Рецензенты:

Бузина Т.С. – к.т.н., доцент кафедры информатики и математического моделирования Иркутского ГАУ имени А.А. Ежевского.

Соколов Д.В. - к.т.н., старший научный сотрудник отдела трубопроводных систем энергетики №50 ИСЭМ СО РАН.

Асалханов П.Г. Математические методы и модели поддержки принятия решения / Учебное пособие для студентов направления 09.04.03 Прикладная информатика // П.Г. Асалханов, Н.В. Бендик, – Иркутск: Изд-во Иркутский ГАУ, 2020. – 116 с. – ил.

Учебное пособие содержит материал по курсу «Математические методы и модели поддержки принятия решения» и представляет собой практическое руководство по созданию информационных систем с использованием структурного подхода с помощью популярных CASE-средств. Пособие содержит описание методов структурного анализа и проектирования информационных моделей в объеме необходимом для практической работы. Подробно на конкретных примерах рассмотрено применения CASE-технологий и CASE-средств для автоматизации этапов анализа, проектирования и генерации кода информационных систем. Пособие предназначено для студентов, изучающих основы системного анализа и проектирования информационных систем.

© Асалханов П.Г., 2020

© Бендик Н.В., 2020

© Иркутский ГАУ, 2020

Содержание

| | |
|--|-----|
| 1. Решение задач линейного программирования и анализ чувствительности..... | 4 |
| Практическая работа №1 | 29 |
| 2. Принятие решений при многих критериях с помощью метода анализа иерархий | 38 |
| Практическая работа №2 | 46 |
| 3. Принятие решений в условиях риска..... | 54 |
| Практическая работа №3 | 61 |
| 4. Теория игр и принятие решений в условиях неопределенности..... | 66 |
| Практическая работа №4 | 72 |
| 5. Методы сетевого планирования..... | 79 |
| Практическая работа №5 | 86 |
| 6. Методы анализа временных рядов | 94 |
| Практическая работа №6 | 110 |

1. Решение задач линейного программирования и анализ чувствительности

Процесс принятия управленческого решения можно представить как последовательность выполнения следующих действий (этапов выработки решения).

I. Анализ ситуации и формализация исходной проблемы. На этом этапе надо просто четко сформулировать проблему, понять и сформулировать цели, которые хочется достичь в виде решения проблемы. Другими словами, надо *поставить проблему*, четко определить *цели*, возможные *решения* и *факторы*, влияющие на решение проблемы. Часто результат этого этапа представляют в виде *формальной модели* проблемы (пока записанной обычным языком), где были бы собраны воедино цели, решения и факторы и где бы присутствовала основа для формализации отношений между ними.

II. Построение математической модели, т. е. перевод формальной модели, построенной на предыдущем этапе, на язык математических отношений.

III. Анализ математической модели и получение математического решения проблемы. На этом этапе анализируется построенная математическая модель, проверяется адекватность модели и находится решение математической задачи, вытекающей из этой модели. Если для решения математической задачи используется вычислительная техника, то предварительно строится также *компьютерная модель* задачи. Обычно этот этап наиболее простой из всех этапов процесса принятия решения, поскольку здесь, как правило, используются известные и апробированные алгоритмы решения математических задач.

IV. Анализ математического решения проблемы и формирование управленческого решения. На этом этапе анализируется полученное математическое решение (выполняется так называемый *анализ чувствительности*), и затем на основе этого математического решения формируется управленческое решение.

После выполнения этих этапов следует этап реализации принятого решения.

I. Рассмотрим первый этап процесса принятия решения: анализ проблемы и формализация исходной проблемы. Этот этап можно рассматривать как первую стадию перехода от реального мира к компьютерному представлению проблемы.

На данном этапе надо четко сформулировать свою проблему, понять и сформулировать цели, которые хочется достичь в виде решения проблемы. Другими словами, надо *поставить проблему*. Поэтому на данном этапе на простом русском языке надо

- ◆ *сформулировать проблему*, по возможности максимально четко;
- ◆ *сформулировать цели*, которые должны быть достигнуты в результате реализации найденного решения;
- ◆ указать, что считать *решением* проблемы (решение должно гарантировать достижение целей);
- ◆ выявить и описать *возможности* достижения целей;
- ◆ выявить и описать *факторы*, от которых может зависеть решение проблемы;
- ◆ выявить и описать *ограничения*, препятствующие достижению целей;
- ◆ описать возможные *альтернативные* способы решения проблемы.

Эти пункты и составляют формальную модель проблемы. Таким образом, формальная модель — это просто четкое описание вашей проблемы, в котором необходимо выделить перечисленные пункты.

Пусть некий лакокрасочный завод «Олимп», в связи с изменившейся конъюнктурой рынка хочет разработать новый производственный план для выпуска краски типов А и Б, не трогая пока производство другой продукции. Допустим, что «Олимп» имеет месячный цикл производства. Таким образом, нужно определить, сколько в месяц следует производить краски типа А и сколько — типа Б. Ответ вроде бы простой: чем больше, тем лучше, конечно, с учетом производственных возможностей. Итак, вот *первая цель* — увеличить до *максимума* производство как продукции А, так и продукции Б. Допустим, производственные мощности позволяют выпускать в месяц суммарно 500 т краски всех типов. Вот появилось *первое ограничение* — общее количество краски типов А и Б не должно превышать 500 т.

Как видно, первую цель достичь можно, однако проблема остается плохо поставленной, поскольку дает неоднозначное решение. Поэтому вспомним, что всякое производство должно приносить прибыль. Теперь можно сформулировать *вторую цель* — производственный план должен приносить *максимальную* прибыль. Пусть одна тонна краски А приносит в среднем 2000 руб. прибыли, а одна тонна краски Б — 2500 руб. Здесь величины удельной прибыли (т.е. прибыли на одну тонну краски) являются *факторами*, которые влияют на конечную цель.

На этом шаге мы сделали огромное *упрощение* реальной ситуации, т. к. удельная прибыль любого производимого изделия зависит от многих факторов (конъюнктуры рынка, стоимости исходных материалов, себестоимости производства, уровня рентабельности и т. д.) и не является величиной постоянной даже на протяжении относительно небольшого временного промежутка. Тем более сложно предсказать и трудоемко подсчитать ее значение на будущий более-менее продолжительный период времени. Можно только *оценить* будущую удельную прибыль, да и то с определенной степенью точности. Пусть в нашем примере получены оценки будущей удельной прибыли производства краски типа А: от 1500 до 2300 руб., а краски типа Б: от 2100 до 3000 руб. Приведенные выше величины удельных прибылей 2000 и 2500 руб. являются наиболее вероятными ожидаемыми значениями. Далее именно эти величины примем за значения удельных прибылей, а возможные последствия от их неточного задания рассмотрим при проведении анализа полученного решения.

Очевидно, что для достижения второй цели надо производить только краску типа Б и забыть о краске типа А. Однако отдел маркетинга требует, чтобы краски типа А производилось не менее 200 т в месяц, поскольку есть договоры на такое количество, а краску типа Б нельзя производить более 150 т, поскольку большее количество трудно реализовать. Итак, имеем еще *два ограничения*: произведенное количество краски А должно быть не меньше 200 т, а краски Б — не более 150 т.

При таких ограничениях даже начальник производства составит план: надо производить 350 т краски А и 150 т краски Б. Этот план учитывает только ограничения по производственным мощностям и маркетинговые ограничения. Но для производства любой продукции нужны еще исходные материалы. Пусть на изготовление красок А и Б необходимо сырье трех видов согласно следующей таблице.

| | Краска А, кг | Краска Б, кг | Месячный запас, т |
|---------|--------------|--------------|-------------------|
| Сырье 1 | 50 | 100 | 50 |
| Сырье 2 | 70 | 80 | 30 |
| Сырье 3 | 40 | 70 | 25 |

В этой таблице показано, сколько и какого сырья необходимо для производства одной тонны краски А и одной тонны краски Б, а также величины месячных запасов этого сырья. Очевидно, что общее количество сырья, используемого для производства краски, не должно превышать их месячные запасы. Таким образом, имеем еще *три ограничения* — по одному для каждого типа сырья. С учетом этих ограничений производственный план «на пальцах» уже не подсчитаешь.

Здесь сделано еще одно существенное упрощение реальной ситуации — реальный процесс производства чего бы то ни было зависит не только от наличия исходных материалов, необходимых для создания конечного продукта, но и от многих других факторов: наличия достаточных производственных мощностей, наличия рабочей силы, периодичности поступления исходных материалов, качества этих материалов и т.д. Здесь эти факторы отброшены, оставлены только ограничения на сырье трех видов. При этом сделано еще одно неявное допущение, что другие компоненты, необходимые для производства краски, имеются в достаточном количестве и не влияют на объемы производства.

Итак, что же мы имеем после небольшого анализа проблемы.

♦ *Постановка проблемы:* разработать производственный план, который максимизировал бы прибыль с учетом всех видов ограничений.

♦ *Цель:* максимизировать прибыль.

♦ *Решение:* количество тонн краски А и Б, производимых в месяц.

♦ *Факторы,* от которых зависит решение: значения удельной прибыли каждого типа краски, предельное число производимой краски, предельные числа производимых красок типов А и Б (маркетинговые ограничения), количества сырья (необходимых для производства одной тонны краски), значения запасов сырья (всего 14 факторов).

♦ *Факторы,* влияющие на прибыль: все перечисленные факторы, кроме значений количества сырья, необходимого для производства одной тонны краски. (Считаем, что на рецептуру красок мы влиять не можем.)

♦ *Ограничения:* на предельное общее количество производимой краски, на предельные количества производимых красок А и Б в отдельности, на предельные количества используемого сырья (всего 6 ограничений).

Мы выделили факторы, влияющие на прибыль отдельно, чтобы в дальнейшем провести анализ чувствительности решения именно по этим факторам.

И еще одно замечание: при такой размытой постановке исходной проблемы можно сформулировать много разных целей. Например, можно составить производственный план, который бы минимизировал себестоимость продукции. Можно сформулировать более

сложные цели (что обычно имеет место в реальных ситуациях), например, максимизировать прибыль и одновременно минимизировать использование каких-то исходных материалов, которые являются дорогими или дефицитными. При этом в зависимости от сформулированных целей могут выделяться разные факторы, влияющие на эти цели, и могут формироваться разные ограничения. В нашем примере мы ограничимся сформулированной целью максимизации прибыли.

II. Построение математической модели означает перевод формальной модели, построенной на предыдущем этапе, на четкий язык математических отношений. Математическая модель должна содержать три основных компонента.

1. **Переменные**, значения которых необходимо вычислить (это *переменные решения* из формальной модели).

2. **Целевая функция** — это *цель*, записанная математически в виде функции от переменных. Обязательно указывается, что необходимо сделать с этой функцией для решения проблемы: найти ее максимум, минимум или конкретное заданное значение.

3. **Ограничения** — записанные математически *ограничения* из формальной модели.

Если определены переменные, то построение целевой функции и ограничений обычно не вызывает затруднений, поскольку на предыдущем этапе и цель и ограничения уже формулировались с привязкой к переменным решения.

В нашем примере обозначим через x_1 и x_2 переменные, которые определяют месячные объемы производства краски (в тоннах) типа А и Б соответственно. Напомним, что 1 тонна краски А приносит прибыль 2000 руб., а 1 тонна краски Б — 2500 руб. Тогда суммарная прибыль z при производстве x_1 тонн краски А и x_2 тонн краски Б составит

$$z = 2000 \cdot x_1 + 2500 \cdot x_2 \text{ (руб.)}$$

Это и есть целевая функция, которую необходимо *максимизировать*.

Теперь запишем ограничения. Первое ограничение говорит о том, что суммарный объем производства краски обоих типов не должен превышать 500 т. Это запишется так: $x_1 + x_2 \leq 500$. Маркетинговые ограничения записываются просто: $x_1 \geq 200$ и $x_2 \leq 150$. Теперь надо записать ограничения на сырье. Напомним, что сырья 1 на производство 1 т краски А расходуется 0,05 т (50 кг) и 0,1 т (100 кг) на производство 1 т краски Б. Таким образом, всего на производство x_1 тонн краски А и x_2 тонн краски Б потребуется $0,05 \cdot x_1 + 0,1 \cdot x_2$ тонн сырья 1. Эта величина не должна превышать 50 т. Отсюда получаем ограничение: $0,05 \cdot x_1 + 0,1 \cdot x_2 \leq 50$. Подобным способом получаем еще два ограничения на сырье 2 и сырье 3: $0,07 \cdot x_1 + 0,08 \cdot x_2 \leq 30$ и $0,04 \cdot x_1 + 0,07 \cdot x_2 \leq 25$. Еще одно неявное ограничение состоит в том, что переменные x_1 и x_2 должны быть неотрицательными (если не вдаваться в мистику, то отрицательные объемы производства физически просто невозможны). Это ограничение называется *условием неотрицательности переменных* и записывается так: $x_1 \geq 0$ и $x_2 \geq 0$. Однако заметим, что условие неотрицательности для переменной x_1 здесь излишне, поскольку имеем более сильное ограничение $x_1 \geq 200$. Поэтому неравенство $x_1 \geq 0$ исключаем из списка ограничений.

Обратите особое внимание на то, что размерности всех переменных и параметров должны быть согласованы. Поэтому в нашем примере удельные расходы сырья переведены из килограммов в тонны, поскольку переменные измеряются в тоннах.

Обычно ограничение записывают таким образом, чтобы в левой части неравенства находилось выражение с переменными, а в правой части неравенства — только числа. Тогда левую часть неравенства называют *функцией ограничения*.

Окончательно математическая модель нашей проблемы запишется следующим образом:

максимизировать $z = 2000 \cdot x_1 + 2500 \cdot x_2$ при выполнении ограничений

$$x_1 + x_2 \leq 500,$$

$$x_1 \geq 200,$$

$$x_2 \leq 150,$$

$$0,05 \cdot x_1 + 0,1 \cdot x_2 \leq 50,$$

$$0,07 \cdot x_1 + 0,08 \cdot x_2 \leq 30,$$

$$0,04 \cdot x_1 + 0,07 \cdot x_2 \leq 25,$$

$$x_2 \geq 0.$$

Любое решение (т.е. пара значений переменных x_1 и x_2), удовлетворяющее *всем* ограничениям модели, называется *допустимым*. В нашем примере решение $x_1 = 200$ и $x_2 = 150$ будет допустимым, поскольку не нарушает ни одного ограничения, включая условия неотрицательности. Чтобы убедиться в этом, надо подставить значения $x_1 = 200$ и $x_2 = 150$ в левые части ограничений, выполнить вычисления и проверить, что ни одно неравенство не нарушается. Значение целевой функции при этом решении будет равно $z = 2000 \cdot 200 + 2500 \cdot 150 = 775\,000$ (руб.).

Итак, математическая модель построена, осталось найти решение модели. Для выполнения этого дела мы привлечем программу электронных таблиц Excel, а еще точнее — надстройку **Поиск решения**.

III. Прежде чем начать выполнение каких-либо вычислений в Excel, надо перевести нашу построенную математическую модель на рабочий лист Excel. Для этого следует определить, в каких ячейках будут располагаться переменные решения, записать в нужные ячейки формулы, по которым будут вычисляться целевая функция и функции ограничений (левые части ограничений), надо записать в отдельные ячейки значения правых частей ограничений. Всю эту совокупность значений и формул, записанных на рабочем листе, назовем *табличной моделью*.

Для табличных моделей задач оптимизации не существует общепринятых канонов их построения. Вот некоторые рекомендации, которые облегчат дальнейшее применение средства **Поиск решения**.

♦ Значения переменных располагаются в отдельных ячейках и группируются в отдельный блок ячеек.

◆ Каждому ограничению отводится отдельная строка или столбец таблицы. Ограничения группируются в отдельный блок ячеек.

◆ Желательно, чтобы ячейки, содержащие переменные и значение целевой функции, а также все ограничения, имели заголовки.

◆ Коэффициенты целевой функции должны храниться в отдельной строке, располагаясь непосредственно под или над соответствующими переменными; формула для вычисления целевой функции должна находиться в соседней ячейке.

◆ В каждой строке ограничений за ячейками, содержащими коэффициенты данного ограничения, следует ячейка, в которую записывается вычисленное значение функции ограничения (значение левой части ограничения). За ней может следовать ячейка, в которой стоит соответствующий знак неравенства или равенства ограничения, а затем ячейка, содержащая значение правой части ограничения. Желательно, чтобы правые части ограничений были константами, а не формулами. Дополнительно можно иметь ячейку, в которой вычислена разность между значениями левой и правой частей неравенства.

◆ Условия неотрицательности переменных решения не обязательно включать в табличную модель. Как правило, они опускаются и указываются непосредственно в диалоговом окне средства **Поиск решения**.

В результате выполнения этих рекомендаций все основные коэффициенты модели содержатся в отдельных ячейках, поэтому их легко изменять, не меняя формул модели. Благодаря группированию упрощается работа со средством **Поиск решения**, поскольку для указания переменных или ограничений можно использовать *диапазоны ячеек*, т.е. задавать переменные и ограничения группой, а не по отдельности. Наличие заголовков сделает понятной эту табличную модель не только вам, но и другим людям.

Пример табличной модели для нашей задачи показан на рис. 1. Здесь значения переменных решения записаны в ячейках В4 и С4 с соответствующими заголовками в ячейках В3 и С3. *Вначале значения переменных произвольные*. Коэффициенты, стоящие перед переменными в формуле целевой функции, записаны в ячейки В8 и С8, а само значение целевой функции вычисляется в ячейке D8 (соответствующие заголовки записаны над этими ячейками). Ниже в диапазоне В11:С17 записаны коэффициенты функций ограничений, в диапазоне D11:D17 вычисляются значения левых частей ограничений, в диапазоне E11:E17 записаны знаки неравенств ограничений, а в диапазоне F11:F17 — значения правых частей ограничений. Наконец, внизу в строке 20 под «левым» заголовком **Решение** еще раз повторены значения переменных и целевой функции.

| | A | B | C | D | E | F |
|----|--|--------------|----------|--------------------------|----|--------------|
| 1 | Производственный план для завода "Олимп" | | | | | |
| 2 | Переменные решения | | | | | |
| 3 | | x1 | x2 | | | |
| 4 | | 100 | 100 | | | |
| 5 | | | | | | |
| 6 | Коэффициенты целевой функции | | | Значение целевой функции | | |
| 7 | | c1 | c2 | | | |
| 8 | | 2000 | 2500 | 450000 | | |
| 9 | | | | | | |
| 10 | Ограничения | Коэффициенты | | Левая часть | | Правая часть |
| 11 | Производственное | 1 | 1 | 200 | <= | 500 |
| 12 | 2-е маркетинговое | 0 | 1 | 100 | <= | 150 |
| 13 | Сырье 1 | 0,05 | 0,1 | 15 | <= | 50 |
| 14 | Сырье 2 | 0,07 | 0,08 | 15 | <= | 30 |
| 15 | Сырье 3 | 0,04 | 0,07 | 11 | <= | 25 |
| 16 | Неотрицательность | 0 | 1 | 100 | >= | 0 |
| 17 | 1-е маркетинговое | 1 | 0 | 100 | >= | 200 |
| 18 | | | | | | |
| 19 | | x1 | x2 | z | | |
| 20 | Решение | 100,00 т | 100,00 т | 450000 | | |
| 21 | | | | | | |

Рис. 1. Табличная модель для вычисления производственного плана

Формулы, по которым выполняются все вычисления на данном рабочем листе, показаны на рис. 2. Для вычисления линейных функций подходит функция **СУММПРОИЗВ(массив1;массив2)**, которая суммирует попарные произведения элементов двух диапазонов, заданных аргументами функции **массив1** и **массив2**. Например, формула **=СУММПРОИЗВ(\$B\$4:\$C\$4;B8:C8)**, вычисляющая значение целевой функции в ячейке D8, эквивалентна такой формуле: **=B4*B8+C4*C8**. Абсолютные ссылки **\$B\$4:\$C\$4** на диапазон B4:C4, содержащий значения переменных x1 и x2, сделаны для того, чтобы можно было скопировать эту формулу из ячейки D8 в ячейки D11:D17 для вычисления левых частей неравенств, где также участвуют значения переменных решения.

| | A | B | C | D | E | F |
|----|--|---------------------------|---------------------------|------------------------------------|----|--------------|
| 1 | Производственный план для завода "Олимп" | | | | | |
| 2 | Переменные решения | | | | | |
| 3 | | x1 | x2 | | | |
| 4 | | 100 | 100 | | | |
| 5 | | | | | | |
| 6 | Коэффициенты целевой функции | | | Значение целевой функции | | |
| 7 | | c1 | c2 | | | |
| 8 | | 2000 | 2500 | =СУММПРОИЗВ(B4:C4;B8:C8) | | |
| 9 | | | | | | |
| 10 | Ограничения | Коэффициенты | | Левая часть | | Правая часть |
| 11 | Производственное | 1 | 1 | =СУММПРОИЗВ(\$B\$4:\$C\$4;B11:C11) | <= | 500 |
| 12 | 2-е маркетинговое | 0 | 1 | =СУММПРОИЗВ(\$B\$4:\$C\$4;B12:C12) | <= | 150 |
| 13 | Сырье 1 | 0,05 | 0,1 | =СУММПРОИЗВ(\$B\$4:\$C\$4;B13:C13) | <= | 50 |
| 14 | Сырье 2 | 0,07 | 0,08 | =СУММПРОИЗВ(\$B\$4:\$C\$4;B14:C14) | <= | 30 |
| 15 | Сырье 3 | 0,04 | 0,07 | =СУММПРОИЗВ(\$B\$4:\$C\$4;B15:C15) | <= | 25 |
| 16 | Неотрицательность | 0 | 1 | =СУММПРОИЗВ(\$B\$4:\$C\$4;B16:C16) | >= | 0 |
| 17 | 1-е маркетинговое | 1 | 0 | =СУММПРОИЗВ(\$B\$4:\$C\$4;B17:C17) | >= | 200 |
| 18 | | | | | | |
| 19 | | x1 | x2 | z | | |
| 20 | Решение | =ФИКСИРОВАННЫЙ(B4;2)&" т" | =ФИКСИРОВАННЫЙ(C4;2)&" т" | =D8 | | |
| 21 | | | | | | |

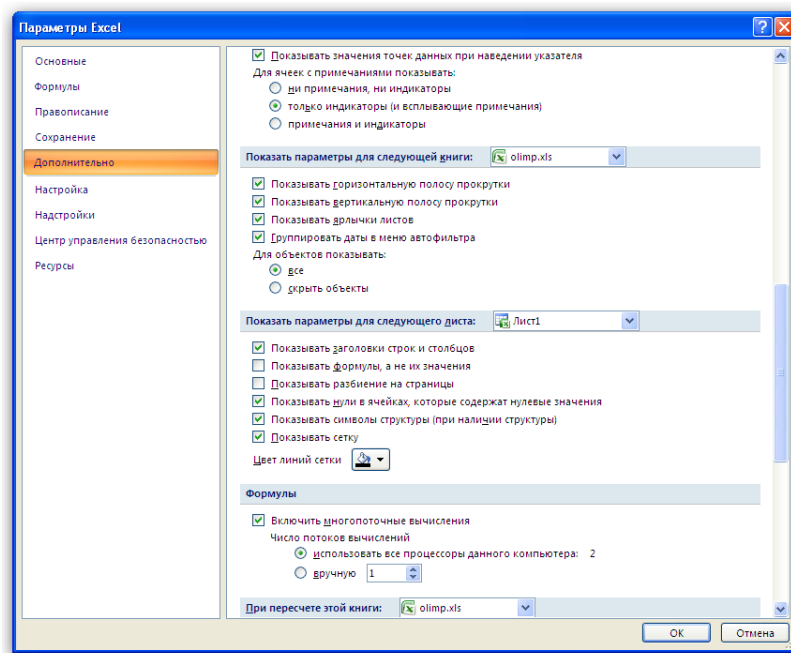
Рис. 2. Формулы табличной модели

Левые части ограничений, поскольку это линейные функции, также вычисляются с помощью функции **СУММПРОИЗВ**. Даже если это простые ограничения типа $x_2 \leq 150$, которые здесь представляются как $0 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 \leq 150$ (ограничение 2 на рис. 1).

Обратите внимание на то, что ограничения сгруппированы по типу неравенств — сначала идут ограничения типа \leq , а затем типа \geq . Конечно, порядок представления этих групп несущественен.

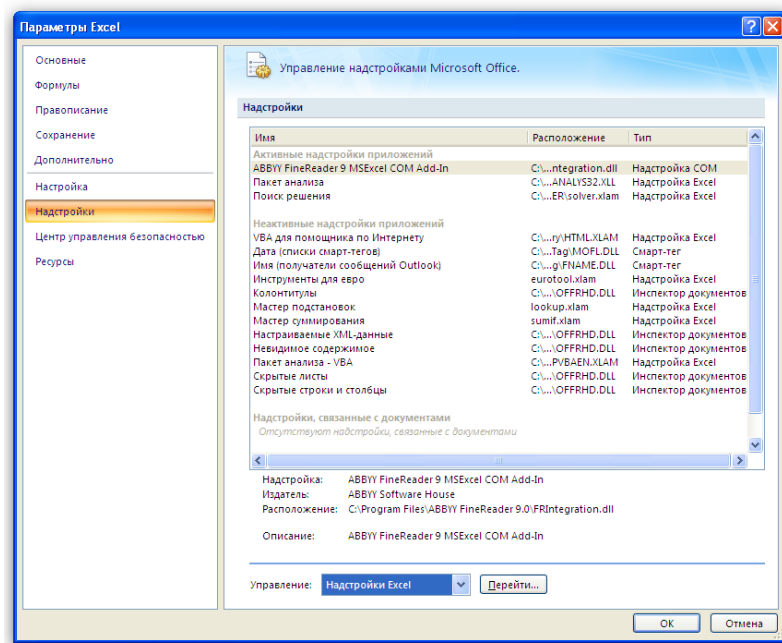
Существенно само наличие групп однотипных ограничений, что позволит в дальнейшем задавать их в средстве **Поиск решения** не по отдельности, а целой группой. Знаки неравенств в диапазоне E11:E17 вставлены только для пояснения ограничений, средство **Поиск решения** их не использует. Зато средство **Поиск решения** использует заголовки строк, содержащих ограничения (использует в своих отчетах, как показано далее). Поэтому рекомендуется давать более содержательные заголовки, даже чем те, что показаны на рис. 1 в ячейках A11:A17. Например, такие: **Ограничение на объем производства**, **Маркетинговое ограничение** или **Ограничение, не знаю, откуда оно взялось**. С другой стороны, заголовки не являются обязательным элементом табличной модели — средство **Поиск решения** прекрасно вычислит результат и без них. Заголовки полезны для документирования модели.

Если вы не знаете, как отобразить на рабочем листе Excel формулы, а не значения (как на рис. 2), то это делается так. Надо выполнить команду **Сервис->Параметры** и в открывшемся диалоговом окне **Параметры** на вкладке **Вид** установить флажок **формулы**. Отображение формул может оказаться полезным, полезно при отладке модели. В Excel 2007 и выше отображение формул осуществляется через меню **Параметры Excel->Дополнительно**, выбирая для данного листа **Показывать формулы, а не их значения**



Теперь, когда табличная модель построена и проверена, пришло время ее решить. Для этого используем надстройку Excel **Поиск решения**. Если в меню **Сервис** вы не находите одноименной команды, то это означает, что данная надстройка не подключена к Excel. Для ее подключения выполните команду **Сервис->Надстройки** и в открывшемся диалоговом окне **Надстройки** в списке **Доступные надстройки** установите флажок **Поиск решения**.

Для Excel 2007 и выше **Поиск решения** находится во вкладке **Данные->Анализ**. Подключение осуществляется через меню **Параметры Excel->Надстройки**. Выбираем в списке **Надстройки Excel** и нажимаем кнопку **Перейти...**



Покажем общую схему применения средства **Поиск решения** для решения *задачи линейной оптимизации*.

Сначала надо познакомиться с терминологией, относящейся к средству **Поиск решения**, т.е. надо знать, как там называют переменные решения, целевую функцию и ограничения. Так вот,

- ◆ переменные решения, точнее, ячейки, содержащие значения этих переменных, называются *изменяемыми ячейками*,
- ◆ ячейка, содержащая значение целевой функции, называется *целевой ячейкой*,
- ◆ ограничения так и будут называться *ограничениями*.

Схема применения средства **Поиск решения** выглядит так:

1. Пусть на рабочем листе Excel уже создана табличная модель задачи линейной оптимизации.
2. После проверки и отладки модели переходим к этапу оптимизации, выбрав команду **Поиск решения** в меню **Сервис**.
3. В открывшемся диалоговом окне **Поиск решения** укажите данные, необходимые для поиска оптимального решения (рис. 3).

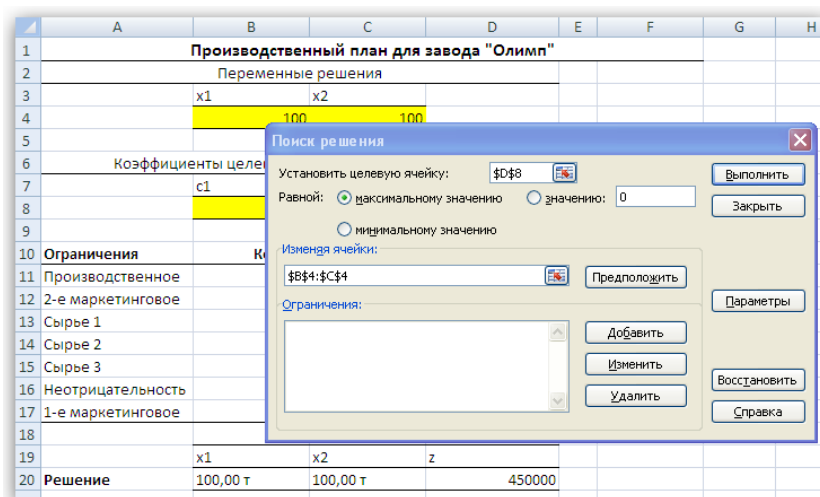


Рис. 3. Задание параметров для поиска решения

- В поле **Установить целевую ячейку** вводится адрес ячейки, содержащей значение целевой функции. Для нашей модели в это поле следует ввести **D8**, но лучше щелкнуть указателем мыши на этой ячейке, чтобы ввести ее адрес автоматически.

- Параметры области **Равной** диалогового окна **Поиск решения** позволяют задать тип оптимизации. В данном случае необходимо максимизировать значение целевой функции. Для этого нужно щелкнуть на переключателе **максимальному значению**.

- Поле **Изменяя ячейки** позволяет указать ячейки, в которых содержатся переменные модели; в данном случае это диапазон **B4:C4**.

4. Далее необходимо задать ограничения. Щелчок на кнопке **Добавить** открывает диалоговое окно **Добавление ограничения**, показанное на рис. 4,

- В нашем примере в поле **Ссылка на ячейку** вводим или указываем на рабочем листе ссылку на диапазон **D11:D15**, в соседнем поле оставляем знак неравенства \leq , а в поле **Ограничение** вводим или указываем на рабочем листе ссылку на диапазон **F11:F15**.

- Щелкаем на кнопке **Добавить** и вводим вторую группу ограничений: в поле **Ссылка на ячейку** вводим **D16:D17**, в соседнем раскрывающемся списке выбираем знак неравенства \geq , а в поле **Ограничение** вводим **F16:F17**. Затем щелкаем на кнопке **ОК** и возвращаемся в диалоговое окно **Поиск решения**.

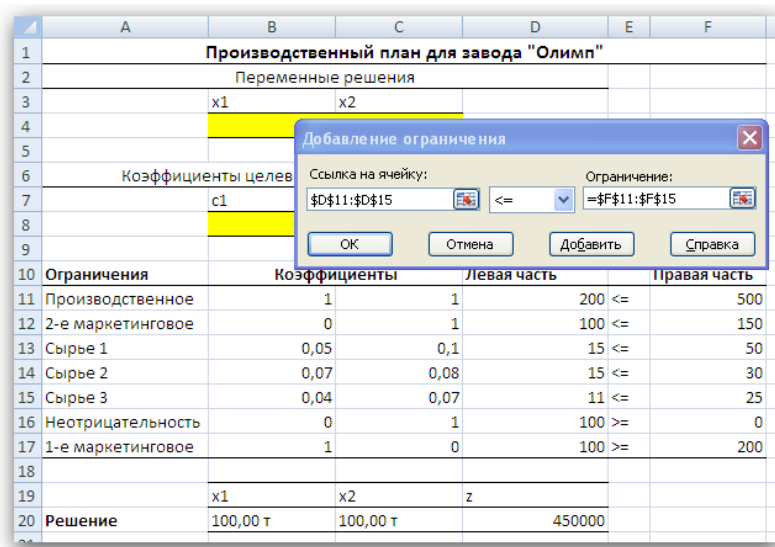


Рис. 4. Задание ограничений

5. После задания ограничений при необходимости в диалоговом окне **Параметры поиска решения**, которое открывается после щелчка на кнопке **Параметры** диалогового окна **Поиск решения**, следует задать дополнительные условия для поиска решения.

- Параметры **Максимальное время**, **Предельное число итераций**, **Относительная погрешность**, **Допустимое отклонение** и **Сходимость** можно оставить без изменений, тем более что параметр **Допустимое отклонение** имеет отношение к целочисленным моделям, а параметр **Сходимость** — к нелинейным моделям.

- В данном примере, поскольку мы работаем с линейной моделью, надо установить флажок **Линейная модель** (рис. 5).

- Если в модели условия неотрицательности налагаются на *все* переменные, следует установить флажок **Неотрицательные значения**. В нашем примере условие неотрицательности налагается только на переменную x_2 поэтому этот флажок мы не устанавливаем.

- Флажок **Автоматическое масштабирование** рекомендуем устанавливать всегда.

- Если хотите проследить каждую итерацию процесса вычисления, установите флажок **Показывать результаты итераций**. Если хотите сразу получить результат вычислений без подглядывания в вычислительную кухню, не устанавливайте этот флажок.

- Переключатели, расположенные в областях **Оценки**, **Разности**, **Метод поиска**, предназначены для нелинейных моделей. Поэтому сейчас мы их оставляем без внимания.

- Щелчок на кнопке **ОК** возвращает в диалоговое окно **Поиск решения**.

6. После задания необходимых данных (указания ячейки, содержащей формулу для вычисления целевой функции, ячеек, в которых находятся переменные, и задания ограничений) щелкните на кнопке **Выполнить**.

7. Средство **Поиск решения** выполняет оптимизацию. В процессе вычислений в строке состояния отображаются число итераций и значения целевой функции при переборе множества допустимых решений задачи. Эта информация позволяет следить, как продвигается процесс оптимизации больших моделей, где он может длиться достаточно долго.

8. После окончания работы **Поиск решения** выведет на экран диалоговое окно **Результаты поиска решения** (рис. 6), в котором можно указать, обновить ли исходную модель (т.е. занести ли в ячейки значения оптимального решения) и создавать ли отчет.

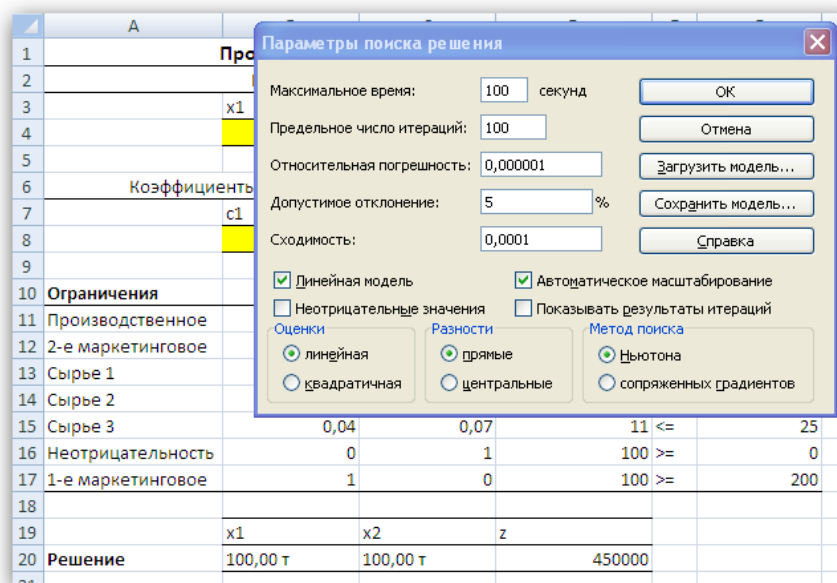


Рис. 5. Диалоговое окно **Параметры поиска решения**

Диалоговое окно **Результаты поиска решения** сообщает о завершении поиска (см. рис. 6). Если оптимальное решение найдено, в диалоговом окне **Результаты поиска решения** должно отобразиться сообщение **Решение найдено. Все ограничения и условия оптимальности выполнены**. Если получено такое сообщение, можно или сохранить найденное решение, выбрав соответствующий параметр, или отбросить его, выбрав параметр **Восстановить исходные значения**. В результате ячейкам переменных будут возвращены значения, которые в них находились до запуска программы **Поиск решения**. Существует возможность также получить три типа отчетов о решении. Каждый отчет выводится на новый лист рабочей книги.

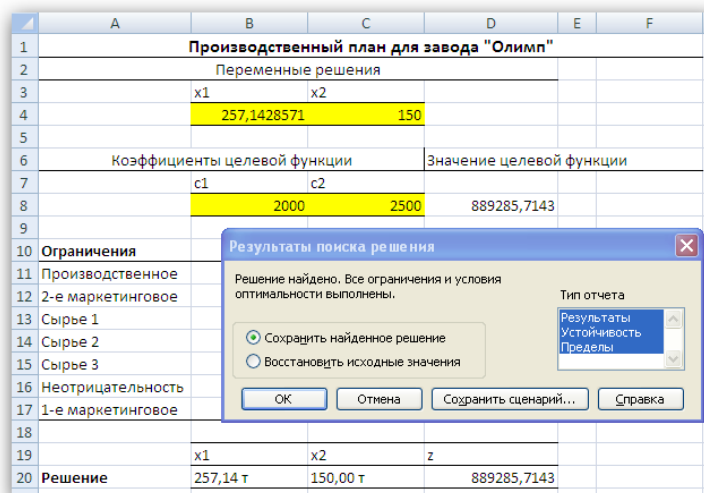


Рис. 6. Успешное завершение решения задачи оптимизации

В нашем примере решение найдено, оно показано на рис. 6: надо производить 257,14 т краски А и 150 т краски Б, при этом будет получена прибыль в размере 889 285,17 руб. В диалоговом окне **Результаты поиска решения** мы также указали, что надо создать отчеты.

IV. Теперь покажем, что делать дальше с полученным «компьютерным» решением, и как на его основе найти «настоящее» решение проблемы.

Итак, решение математической модели получено. Ну и что с ним дальше делать — бегом бежать внедрять в жизнь? Нет, бежать пока рано. Надо вспомнить, что мы получили решение только для *модели* реальной проблемы, а не решение самой проблемы. В процессе построения модели были сделаны различные допущения, упрощающие реальную ситуацию, в результате чего мы смогли ее формализовать. Зависимости, зафиксированные в модели, только приближенно отображают реальные зависимости между факторами и переменными решения и целью. Наши знания факторов, влияющих на цель, зияют пробелами — значения многих параметров модели мы знаем только приближенно. Ну, а если реальные значения параметров хотя бы немного отличаются от тех, которые заложены в модели, то насколько может измениться решение и изменится ли вообще?

На эти и подобные вопросы должен дать ответы анализ полученного решения. На «научном» языке этот анализ называется *анализом чувствительности решения*. Он проводится после получения оптимального решения математической модели и дает важную информацию, которую можно и нужно использовать при принятии решения в реальной ситуации.

Анализ чувствительности должен дать ответы на следующие вопросы.

◆ В каких пределах могут изменяться параметры модели так, чтобы сохранилось полученное решение?

◆ Какие ограничения связанные (т.е. лимитируют (сдерживают) целевую функцию), а какие ограничения не влияют на решение?

◆ Если изменить значения правых частей связанных ограничений, то насколько может измениться значение целевой функции?

◆ Если значение какой-то переменной решения равно нулю, то при каких условиях она может принять положительное значение? (Вопрос весьма актуален для моделей производства.)

Средство **Поиск решения** может генерировать три вида отчетов: отчет по результатам, отчет по устойчивости и отчет по пределам. Все перечисленные виды отчетов и именно в той форме, которая показана ниже на рис. 8—10, **Поиск решения** создает только для линейных моделей. Для целочисленных моделей недоступны отчеты по устойчивости и по пределам, а для нелинейных моделей отчет по устойчивости имеет другой вид. Рассмотрим применение отчетов для выполнения анализа чувствительности линейных моделей.

На рис. 7 показан рабочий лист Excel с найденным решением математической модели, а на рис. 8—10 — отчеты, сгенерированные средством **Поиск решения**.

| | A | B | C | D | E | F |
|----|---|---------------------|----------|--------------------------|---------------------|-----|
| 1 | Производственный план для завода "Олимп" | | | | | |
| 2 | Переменные решения | | | | | |
| 3 | | x1 | x2 | | | |
| 4 | | 257,1428571 | 150 | | | |
| 5 | | | | | | |
| 6 | Коэффициенты целевой функции | | | Значение целевой функции | | |
| 7 | | c1 | c2 | | | |
| 8 | | 2000 | 2500 | 889285,7143 | | |
| 9 | | | | | | |
| 10 | Ограничения | Коэффициенты | | Левая часть | Правая часть | |
| 11 | Производственное | 1 | 1 | 407,1428571 | <= | 500 |
| 12 | 2-е маркетинговое | 0 | 1 | 150 | <= | 150 |
| 13 | Сырье 1 | 0,05 | 0,1 | 27,85714286 | <= | 50 |
| 14 | Сырье 2 | 0,07 | 0,08 | 30 | <= | 30 |
| 15 | Сырье 3 | 0,04 | 0,07 | 20,78571429 | <= | 25 |
| 16 | Неотрицательность | 0 | 1 | 150 | >= | 0 |
| 17 | 1-е маркетинговое | 1 | 0 | 257,1428571 | >= | 200 |
| 18 | | | | | | |
| 19 | | x1 | x2 | z | | |
| 20 | Решение | 257,14 т | 150,00 т | 889 285,71 р | | |

Рис. 7. Решение линейной модели для завода «Олимп»

| Целевая ячейка (Максимум) | | | | | |
|---------------------------|-------------------------------|-------------------|------------------|------------|-------------|
| Ячейка | Имя | Исходное значение | Результат | | |
| \$D\$8 | Значение целевой функции | 450000 | 889285,7143 | | |
| Изменяемые ячейки | | | | | |
| Ячейка | Имя | Исходное значение | Результат | | |
| \$B\$4 | x1 | 100 | 257,1428571 | | |
| \$C\$4 | x2 | 100 | 150 | | |
| Ограничения | | | | | |
| Ячейка | Имя | Значение | Формула | Статус | Разница |
| \$D\$11 | Производственное Левая часть | 407,1428571 | \$D\$11<=\$F\$11 | не связан. | 92,85714286 |
| \$D\$12 | 2-е маркетинговое Левая часть | 150 | \$D\$12<=\$F\$12 | связанное | 0 |
| \$D\$13 | Сырье 1 Левая часть | 27,85714286 | \$D\$13<=\$F\$13 | не связан. | 22,14285714 |
| \$D\$14 | Сырье 2 Левая часть | 30 | \$D\$14<=\$F\$14 | связанное | 0 |
| \$D\$15 | Сырье 3 Левая часть | 20,78571429 | \$D\$15<=\$F\$15 | не связан. | 4,214285714 |
| \$D\$16 | Неотрицательность Левая часть | 150 | \$D\$16>=\$F\$16 | не связан. | 150 |
| \$D\$17 | 1-е маркетинговое Левая часть | 257,1428571 | \$D\$17>=\$F\$17 | не связан. | 57,14285714 |

Рис. 8. Отчет по результатам

Отчет по результатам полезен для анализа чувствительности только тем, что там явно указано, какие ограничения *связанные* и какие *несвязанные*. Эти данные приведены в отчете в таблице **Ограничения** в столбце **Статус**. В столбце **Разница** той же таблицы показаны значения разностей между левыми и правыми частями ограничений.

| Изменяемые ячейки | | | | | | |
|-------------------|-------------------------------|-------------------|-------------------|--------------------------|-----------------------|-----------------------|
| Ячейка | Имя | Результ. значение | Нормир. стоимость | Целевой Коэффициент | Допустимое Увеличение | Допустимое Уменьшение |
| \$B\$4 | x1 | 257,1428571 | 0 | 2000 | 187,5 | 2000 |
| \$C\$4 | x2 | 150 | 0 | 2500 | 1E+30 | 214,2857143 |
| Ограничения | | | | | | |
| Ячейка | Имя | Результ. значение | Теневая Цена | Ограничение Правая часть | Допустимое Увеличение | Допустимое Уменьшение |
| \$D\$11 | Производственное Левая часть | 407,1428571 | 0 | 500 | 1E+30 | 92,85714286 |
| \$D\$12 | 2-е маркетинговое Левая часть | 150 | 214,2857143 | 150 | 50 | 150 |
| \$D\$13 | Сырье 1 Левая часть | 27,85714286 | 0 | 50 | 1E+30 | 22,14285714 |
| \$D\$14 | Сырье 2 Левая часть | 30 | 28571,42857 | 30 | 6,5 | 4 |
| \$D\$15 | Сырье 3 Левая часть | 20,78571429 | 0 | 25 | 1E+30 | 4,214285714 |
| \$D\$16 | Неотрицательность Левая часть | 150 | 0 | 0 | 150 | 1E+30 |
| \$D\$17 | 1-е маркетинговое Левая часть | 257,1428571 | 0 | 200 | 57,14285714 | 1E+30 |

Рис. 9. Отчет по устойчивости

Более существенен для анализа чувствительности отчет по устойчивости. В таблице **Изменяемые ячейки** этого отчета приведена информация о значениях изменяемых ячеек:

- ◆ адреса изменяемых ячеек;

- ◆ их имена (созданные заранее или составленные из заголовков строк и столбцов, на пересечении которых находятся изменяемые ячейки); если имен нет, то это поле остается пустым;

- ◆ значения переменных в этих ячейках, найденные средством **Поиск решения**;

- ◆ *нормированная стоимость* — это неудачный перевод термина «reduced cost», который можно перевести как «цена, которая уменьшает целевую функцию». Она показывает, как изменится оптимальное значение целевой функции при выпуске продукции, *которой нет в оптимальном плане*. В нашем случае оптимальный план предполагает выпуск обоих видов красок, поэтому их нормированная стоимость равна нулю. Если бы оптимальное значение какой-либо из неизвестных было равно нулю ($x_i = 0$), а нормированная стоимость равнялась бы, например, -3 , то принудительный выпуск 2-х единиц этой переменной x_i (т. е. добавление нового ограничения $x_i \geq 2$) привел бы к изменению (уменьшению) целевой функции на $2 * (-3) = -6$ единиц. Отметим, что из равенства нулю оптимального значения неизвестной не следует автоматически, что ее нормированная стоимость будет отлична от нуля;

- ◆ целевой коэффициент — коэффициент, стоящий при данной изменяемой переменной в формуле целевой функции;

- ◆ значения в столбцах **Допустимое увеличение** и **Допустимое уменьшение** показывают, в каких пределах может изменяться целевой коэффициент при условии, что найденные значения переменных останутся неизменными.

В таблице **Ограничения** приведена информация об ограничениях:

- ◆ адреса ячеек, на значения которых наложены ограничения;

- ◆ их имена (созданные заранее или составленные из заголовков строк и столбцов, на пересечении которых находятся изменяемые ячейки); если имен нет, то это поле остается пустым;

- ◆ значения в этих ячейках, найденные средством **Поиск решения**;

- ◆ *теневая цена* показывает, насколько изменится значение целевой функции, если на единицу изменится значение правой части данного ограничения; теневая цена отлична от нуля только тогда, когда данное ограничение в оптимальном решении является связанным (и решение не вырождено);

- ◆ значения правых частей ограничений;

- ◆ значения в столбцах **Допустимое увеличение** и **Допустимое уменьшение** показывают пределы изменения правой части ограничения, в которых действует приведенное значение теневой цены данного ограничения.

Наиболее важными данными для анализа чувствительности в этом отчете являются нормированные стоимости и теневые цены, применение которых рассмотрим ниже. *Важно отметить*, что значения теневых цен подсчитаны в предположении, что изменяется значение правой части только *одного* ограничения при условии постоянства всех остальных параметров модели.

В отчете по пределам показано, в каких пределах с учетом всех ограничений могут изменяться переменные (значения в столбцах **Верхний предел** и **Нижний предел**) и какие при этом значения будет принимать целевая функция (значения в столбцах **Целевой результат**). Отметим, что если на значения переменной не налагаются явные ограничения, задающие ее

верхнюю (или нижнюю) границу, то в столбцах **Верхний предел** и **Целевой результат** (или **Нижний предел** и **Целевой результат**) для этой переменной будут стоять значения ошибки #Н/Д.

| Целевое | | | | | | |
|---------|--------------------------|-------------|---------------|-------------------|----------------|-------------------|
| Ячейка | Имя | Значение | | | | |
| \$D\$8 | Значение целевой функции | 889285,7143 | | | | |
| | | | Нижний предел | Целевой результат | Верхний предел | Целевой результат |
| Ячейка | Имя | Значение | | | | |
| \$B\$4 | x1 | 257,1428571 | 200 | 775000 | 257,1428571 | 889285,7143 |
| \$C\$4 | x2 | 150 | -1,10845E-10 | 514285,7143 | 150 | 889285,7143 |

Рис. 10. Отчет по пределам

Начнем анализ чувствительности для нашего примера. Во-первых, заметим, что переменные решения нулевые значения не принимают, и это облегчает нашу жизнь. Рассмотрим ограничения. Первое ограничение, задающее предельный объем производства, лимитирующим (связанным) не является. Отсюда следует простой вывод, что такой производственный план мощности завода задействует не в полной мере. Это большой «минус» данного плана.

Посмотрим, что сдерживает объемы производства. Лимитирующими являются второе маркетинговое ограничение и ограничение по сырью 2 (на это указывает отчет по результатам и ненулевые значения теневых цен для этих ограничений в отчете по устойчивости). Влиять на маркетинговое ограничение трудно, поскольку против отдела маркетинга просто так не попрешь, для этого нужны веские обоснования, а их, конечно, нет. Да это и не имеет особого смысла — чтобы полностью загрузить мощности производства, надо запланировать еще почти 93 тонны краски, а на такое увеличение производства краски типа Б «добро» никто не даст, так как даже объем в 150 тонн трудно продать.

Другое лимитирующее ограничение определяется наличием на складе запаса сырья 2. Разберемся с этим параметром. Взглянем на теневую цену этого ограничения, она равна 28 571,43. Это означает, что изменение на одну единицу величины правой части данного ограничения (т.е. изменение величины запаса сырья 2 на 1 тонну) приведет к изменению на 28 571,43 руб. величины прибыли (значения целевой функции). Очевидно, что в данном случае при увеличении значения правой части ограничения значение целевой функции будет возрастать, а при уменьшении — убывать. Насколько же нужно увеличить запас сырья 2, чтобы полностью загрузить все производственные мощности? К сожалению, отчет по устойчивости прямого ответа на этот вопрос не дает.

Посмотрим на число в столбце **Допустимое увеличение** для этого ограничения. Оно равно 6,5. Это значит, что, увеличивая значение правой части ограничения до величины 36,5, мы остаемся в рамках прежнего решения — значения переменных и целевой функции, конечно, будут изменяться, но лимитирующими и нелимитирующими останутся прежние ограничения. Если же значение правой части ограничения будет равно или превысит величину 36,5, то в качестве лимитирующего в игру вступит другое ограничение, которое на данный момент не является лимитирующим.

Чтобы узнать, что же получится при изменении правой части пятого ограничения до величины 36,5, надо опять запускать **Поиск решения**. Итак, вносим в ячейку F14 значение

36,5 и выбираем команду **Сервис->Поиск решения**. В диалоговом окне **Поиск решения** ничего менять не надо (средство **Поиск решения** сохраняет все установки своего предыдущего использования), можно сразу щелкнуть на кнопке **Выполнить**. Не забудьте также задать создание отчетов по результатам нового поиска.

Новое решение показано на рис. 11. В этом решении $x_1 = 350$, $x_2 = 150$ и $z = 1\,075\,000$. Новым лимитирующим ограничением стало первое ограничение, задающее предельный объем производства. Нам повезло, что изменение только одного параметра модели (значения правой части ограничения по сырью 2) уже привело к решению (производственному плану), где производственные мощности завода задействованы полностью. В общем случае, если действительно есть необходимость задействовать все мощности производства, скорее всего, пришлось бы проверять другие лимитирующие ограничения и пробовать изменять их правые части.

| Производственный план для завода "Олимп" | | | | |
|--|--------------|----------|--------------------------|--------------|
| Переменные решения | | | | |
| | x1 | x2 | | |
| | 350 | 150 | | |
| Коэффициенты целевой функции | | | Значение целевой функции | |
| | c1 | c2 | | |
| | 2000 | 2500 | 1075000 | |
| Ограничения | Коэффициенты | | Левая часть | Правая часть |
| Производственное | 1 | 1 | 500 <= | 500 |
| 2-е маркетинговое | 0 | 1 | 150 <= | 150 |
| Сырье 1 | 0,05 | 0,1 | 32,5 <= | 50 |
| Сырье 2 | 0,07 | 0,08 | 36,5 <= | 36,5 |
| Сырье 3 | 0,04 | 0,07 | 24,5 <= | 25 |
| Неотрицательность | 0 | 1 | 150 >= | 0 |
| 1-е маркетинговое | 1 | 0 | 350 >= | 200 |
| | x1 | x2 | z | |
| Решение | 350,00 т | 150,00 т | 1 075 000,00 р | |

Рис. 11. Новое оптимальное решение

Итак, что мы имеем? Оптимальным производственным планом будет производство 350 тонн краски типа А и 150 тонн краски типа Б. Однако, чтобы выполнить такой план, надо увеличить месячные запасы сырья 2 на 6,5 тонн, а месячные запасы сырья 1 и сырья 3 можно уменьшить на 17,5 и 0,5 тонн соответственно. Это уже не совсем очевидный результат. (Но и этот результат можно было получить другим способом, поскольку нетрудно подсчитать необходимые запасы сырья для производства 350 тонн краски А и 150 тонн краски Б, — однако до этого еще надо было бы додуматься.) Затем надо подсчитать, на сколько увеличится (и увеличится ли) себестоимость краски, если докупить дополнительные объемы сырья 2, так как возрастут расходы по крайней мере на хранение сырья. Это может повлиять на удельную прибыль краски, т. е. могут измениться значения коэффициентов при переменных в формуле целевой функции. А если это произойдет, то все вычисления надо начинать сначала. Кроме того, надо вспомнить, что значения этих коэффициентов известны нам только приближенно. Поэтому далее следует рассмотреть влияние коэффициентов при переменных в формуле целевой функции.

Напомним, что в отчете по устойчивости эти коэффициенты названы целевыми коэффициентами, мы также для краткости будем использовать это название. (Кроме того, как показано на рис. 7, этим коэффициентам с самого начала присвоены имена c1 и c2.) В

последнем отчете по устойчивости (рис. 12) в таблице **Изменяемые ячейки** в столбцах **Допустимое увеличение** и **Допустимое уменьшение** приведены значения, на которые могут изменяться целевые коэффициенты при условии сохранения решения. Сохранение решения здесь означает сохранение значений переменных решения, но значение целевой функции может изменяться. Однако следует учесть, что эти числа имеют смысл при выполнении дополнительного условия, а именно, что целевые коэффициенты изменяются по одному, а не совместно. Таким образом, на основании данных отчета по устойчивости можно утверждать, что если коэффициент c_1 при переменной x_1 будет изменяться в пределах от 0 до 2500 или коэффициент c_2 при переменной x_2 будет изменяться в пределах от 2000 до бесконечности, то значения этих переменных останутся прежними. Но каким будет решение, если изменятся *оба* целевых коэффициента? Отчет по устойчивости ответа на этот вопрос не дает. Ну, а если нет готового ответа, его следует найти самому. Что для этого надо сделать? Правильно, надо решить еще несколько задач.

В нашем примере целевой коэффициент c_1 при переменной x_1 может изменяться в пределах 1500 до 2300, а целевой коэффициент c_2 при переменной x_2 — в пределах от 2100 до 3000. Хотя эти пределы не перекрывают крайние значения, которые показаны в отчете по устойчивости, необходимо все-таки проверить решение при совместном изменении значений целевых коэффициентов. Здравый смысл подсказывает, что решение останется прежним до тех пор, пока целевой коэффициент c_1 , будет меньше целевого коэффициента c_2 . Поэтому проверим решение, если коэффициент c_1 будет равен 2300, а коэффициент c_2 будет равен 2100. Записываем эти числа в ячейки B8 и C8 соответственно и запускаем **Поиск решения**, ничего не меняя в его установках. Получим новое решение, показанное на рис. 13.

| Изменяемые ячейки | | | | | | |
|-------------------|-----|-------------------|-------------------|---------------------|-----------------------|-----------------------|
| Ячейка | Имя | Результ. значение | Нормир. стоимость | Целевой Коэффициент | Допустимое Увеличение | Допустимое Уменьшение |
| \$B\$4 | x1 | 350 | 0 | 2000 | 500 | 2000 |
| \$C\$4 | x2 | 150 | 0 | 2500 | 1E+30 | 500 |

| Ограничения | | | | | | |
|-------------|-------------------------------|-------------------|--------------|--------------------------|-----------------------|-----------------------|
| Ячейка | Имя | Результ. значение | Теневая Цена | Ограничение Правая часть | Допустимое Увеличение | Допустимое Уменьшение |
| \$D\$11 | Производственное Левая часть | 500 | 2000 | 500 | 0 | 150 |
| \$D\$12 | 2-е маркетинговое Левая часть | 150 | 500 | 150 | 0 | 150 |
| \$D\$13 | Сырье 1 Левая часть | 32,5 | 0 | 50 | 1E+30 | 17,5 |
| \$D\$14 | Сырье 2 Левая часть | 36,5 | 0 | 36,5 | 1E+30 | 0 |
| \$D\$15 | Сырье 3 Левая часть | 24,5 | 0 | 25 | 1E+30 | 0,5 |
| \$D\$16 | Неотрицательность Левая часть | 150 | 0 | 0 | 150 | 1E+30 |
| \$D\$17 | 1-е маркетинговое Левая часть | 350 | 0 | 200 | 150 | 1E+30 |

Рис. 12. Отчет по устойчивости для последнего решения

| Производственный план для завода "Олимп" | | | | |
|--|--------------|--------------|--------------------------|--------------|
| Переменные решения | | | | |
| | x1 | x2 | | |
| | 500 | -1,36453E-10 | | |
| Коэффициенты целевой функции | | | Значение целевой функции | |
| | c1 | c2 | | |
| | 2300 | 2100 | 1150000 | |
| Ограничения | Коэффициенты | | Левая часть | Правая часть |
| Производственное | 1 | 1 | 500 <= | 500 |
| 2-е маркетинговое | 0 | 1 | -1,36453E-10 <= | 150 |
| Сырье 1 | 0,05 | 0,1 | 25 <= | 50 |
| Сырье 2 | 0,07 | 0,08 | 35 <= | 36,5 |
| Сырье 3 | 0,04 | 0,07 | 20 <= | 25 |
| Неотрицательность | 0 | 1 | -1,36453E-10 >= | 0 |
| 1-е маркетинговое | 1 | 0 | 500 >= | 200 |
| | x1 | x2 | z | |
| Решение | 500,00 т | 0,00 т | 1 150 000,00 р | |

Рис. 13. Решение при крайних значениях целевых коэффициентов

Как можно было и предположить, если удельная прибыль краски Б меньше удельной прибыли краски А, то производить краску Б невыгодно (значение $1,4E-10$ можно считать нулем). Отметим, что прибыль при данном решении больше, чем в предыдущем решении (1 150 тыс. руб. против 1 075 тыс. руб.), а сырья всех видов потребуется меньше (ни одно ограничение по сырью не является лимитирующим). И все-таки, если для поддержания ассортимента продукции необходимо производить краску Б, то насколько надо увеличить ее удельную прибыль, чтобы ее производство стало выгодным? Здравый смысл опять подсказывает, что надо хотя бы сравнить удельные стоимости обоих типов краски. На это же указывает число 200 в столбце **Допустимое увеличение** и в строке **x2** таблицы **Изменяемые ячейки** отчета по устойчивости для данного решения (рис. 14).

| Изменяемые ячейки | | | | | | |
|-------------------|-------------------------------|-------------------|-------------------|--------------------------|-----------------------|-----------------------|
| Ячейка | Имя | Результ. значение | Нормир. стоимость | Целевой Коэффициент | Допустимое Увеличение | Допустимое Уменьшение |
| \$B\$4 | x1 | 500 | 0 | 2300 | 1E+30 | 200 |
| \$C\$4 | x2 | -1,36453E-10 | 0 | 2100 | 200 | 1E+30 |
| Ограничения | | | | | | |
| Ячейка | Имя | Результ. значение | Теневая Цена | Ограничение Правая часть | Допустимое Увеличение | Допустимое Уменьшение |
| \$D\$11 | Производственное Левая часть | 500 | 2300 | 500 | 21,42857143 | 300 |
| \$D\$12 | 2-е маркетинговое Левая часть | -1,36453E-10 | 0 | 150 | 1E+30 | 150 |
| \$D\$13 | Сырье 1 Левая часть | 25 | 0 | 50 | 1E+30 | 25 |
| \$D\$14 | Сырье 2 Левая часть | 35 | 0 | 36,5 | 1E+30 | 1,5 |
| \$D\$15 | Сырье 3 Левая часть | 20 | 0 | 25 | 1E+30 | 5 |
| \$D\$16 | Неотрицательность Левая часть | -1,36453E-10 | -200 | 0 | 150 | 1E+30 |
| \$D\$17 | 1-е маркетинговое Левая часть | 500 | 0 | 200 | 300 | 1E+30 |

Рис. 14. Отчет по устойчивости для решения при крайних значениях целевых коэффициентов

Если значения удельных прибылей равны, то получим случай **множественных альтернативных оптимальных решений** задачи линейной оптимизации: любая пара неотрицательных чисел x_1 и x_2 таких, что их сумма равна 500 и $x_2 \leq 150$ (ограничения должны выполняться), будет решением данной задачи, при этом значения целевой функции для любых таких решений будут одинаковыми. Чтобы убедиться в этом, введите в ячейки В8 и С8 одинаковые значения, например 2300. Затем в ячейки В4 и С4 введите числа, удовлетворяющие перечисленным выше условиям, и запустите **Поиск решения**. Наверняка

вы получите решение с введенными вами значениями переменных. Если же в ячейки B4 и C4 вы введете произвольные числа в качестве начальных значений для переменных x_1 и x_2 то получите либо решение $x_1 = 500$ и $x_2 = 0$ (рис. 15), либо решение $x_1 = 350$ и $x_2 = 150$ (рис. 16). Это так называемые «крайние» решения. Других решений, хотя их существует бесконечно много, вы не получите.

| Производственный план для завода "Олимп" | | | | | |
|--|--------------|--------|--------------------------|--------------|--|
| Переменные решения | | | | | |
| | x1 | x2 | | | |
| | 500 | 0 | | | |
| Коэффициенты целевой функции | | | Значение целевой функции | | |
| | c1 | c2 | | | |
| | 2300 | 2300 | 1150000 | | |
| Ограничения | Коэффициенты | | Левая часть | Правая часть | |
| Производственное | 1 | 1 | 500 <= | 500 | |
| 2-е маркетинговое | 0 | 1 | 0 <= | 150 | |
| Сырье 1 | 0,05 | 0,1 | 25 <= | 50 | |
| Сырье 2 | 0,07 | 0,08 | 35 <= | 36,5 | |
| Сырье 3 | 0,04 | 0,07 | 20 <= | 25 | |
| Неотрицательность | 0 | 1 | 0 >= | 0 | |
| 1-е маркетинговое | 1 | 0 | 500 >= | 200 | |
| | x1 | x2 | z | | |
| Решение | 500,00 т | 0,00 т | 1 150 000,00 р | | |

Рис. 15. Решение, предлагающее отказаться от краски B

На практике при решении задач линейной оптимизации множественные оптимальные решения встречаются относительно редко. Скорее, эта ситуация может проявиться при проведении анализа чувствительности, как в нашем примере. Признаком того, что при данном решении существуют другие альтернативные решения, опять дает отчет по устойчивости. Если в таблице **Изменяемые ячейки** в столбцах **Допустимое увеличение** и **Допустимое уменьшение** для некоторых переменных присутствуют нули, то это и является признаком того, что существуют альтернативные решения. Например, на рис. 17 показан отчет по устойчивости для нашей задачи, когда целевые коэффициенты равны 2300, а $x_1 = 350$ и $x_2 = 150$. Как видите, в столбцах **Допустимое увеличение** и **Допустимое уменьшение** таблицы **Изменяемые ячейки** действительно присутствуют нулевые значения. В других отчетах, показанных выше, нулей в этих столбцах вы не найдете, поскольку там множественных альтернативных решений не было.

| Производственный план для завода "Олимп" | | | | | |
|--|--------------|----------|--------------------------|--------------|--|
| Переменные решения | | | | | |
| | x1 | x2 | | | |
| | 350 | 150 | | | |
| Коэффициенты целевой функции | | | Значение целевой функции | | |
| | c1 | c2 | | | |
| | 2300 | 2300 | 1150000 | | |
| Ограничения | Коэффициенты | | Левая часть | Правая часть | |
| Производственное | 1 | 1 | 500 <= | 500 | |
| 2-е маркетинговое | 0 | 1 | 150 <= | 150 | |
| Сырье 1 | 0,05 | 0,1 | 32,5 <= | 50 | |
| Сырье 2 | 0,07 | 0,08 | 36,5 <= | 36,5 | |
| Сырье 3 | 0,04 | 0,07 | 24,5 <= | 25 | |
| Неотрицательность | 0 | 1 | 150 >= | 0 | |
| 1-е маркетинговое | 1 | 0 | 350 >= | 200 | |
| | x1 | x2 | z | | |
| Решение | 350,00 т | 150,00 т | 1 150 000,00 р | | |

Рис. 16. Альтернативное решение, сохраняющее производство краски B

Если некоторые переменные принимают нулевые значения, то еще одним признаком присутствия альтернативных решений будут нулевые значения нормированных стоимостей для этих переменных.

| Изменяемые ячейки | | | | | | |
|-------------------|-----|-------------------|-------------------|---------------------|-----------------------|-----------------------|
| Ячейка | Имя | Результ. значение | Нормир. стоимость | Целевой Коэффициент | Допустимое Увеличение | Допустимое Уменьшение |
| \$B\$4 | x1 | 350 | 0 | 2300 | 0 | 2300 |
| \$C\$4 | x2 | 150 | 0 | 2300 | 1E+30 | 0 |

| Ограничения | | | | | | | |
|-------------|-------------------|-------------------|--------------|--------------------------|-----------------------|-----------------------|-------|
| Ячейка | Имя | Результ. значение | Теневая Цена | Ограничение Правая часть | Допустимое Увеличение | Допустимое Уменьшение | |
| \$D\$11 | Производственное | Левая часть | 500 | 2300 | 500 | 0 | 150 |
| \$D\$12 | 2-е маркетинговое | Левая часть | 150 | 0 | 150 | 1E+30 | 0 |
| \$D\$13 | Сырье 1 | Левая часть | 32,5 | 0 | 50 | 1E+30 | 17,5 |
| \$D\$14 | Сырье 2 | Левая часть | 36,5 | 0 | 36,5 | 1E+30 | 0 |
| \$D\$15 | Сырье 3 | Левая часть | 24,5 | 0 | 25 | 1E+30 | 0,5 |
| \$D\$16 | Неотрицательность | Левая часть | 150 | 0 | 0 | 150 | 1E+30 |
| \$D\$17 | 1-е маркетинговое | Левая часть | 350 | 0 | 200 | 150 | 1E+30 |

Рис. 17. Отчет по устойчивости в случае множественных решений

Пересмотреть все альтернативные решения невозможно, поскольку они составляют бесконечное множество.

Что дает наличие альтернативных решений? Хорошо это или плохо? Плохо, поскольку решений бесконечно много, и надо сделать выбор из бесконечного множества решений. Хорошо — поскольку с «точки зрения» целевой функции все эти решения равнозначны, можно привлечь дополнительный критерий отбора решений, который изначально не учитывался в модели. Тем самым можно улучшить решение, сделать его «более оптимальным», но в соответствии с *новым критерием*. Например, в нашем примере среди альтернативных решений можно найти такое решение, которое обеспечивает минимальные суммарные запасы сырья при той же величине прибыли. Легко убедиться, что при решении $x_1 = 500$ и $x_2 = 0$ потребуется 80 тонн всех видов сырья, а при решении $x_1 = 350$ и $x_2 = 150$ — 93,5 тонн.

Прежде чем подвести итоги анализа чувствительности, надо как-то записать и структурировать ту информацию, которую мы получили в результате этого анализа. Для этого можно нарисовать таблицу, где для тех значений параметров модели, которые изменялись при проведении анализа чувствительности, были бы приведены значения переменных решения и соответствующие значения целевой функции. В Excel есть средство для создания подобных таблиц. Это средство называется *сценарии*.

Сценарий — это сохраненные как единое целое значения ячеек рабочего листа, содержащие значения и формулы. Excel имеет возможность быстрого переключения между различными сценариями. Поэтому, если сохранить в качестве сценария значения параметров модели и значения переменных решения, можно быстро восстановить табличную модель и ее решение при различных наборах параметров. Кроме того, на основе сохраненных сценариев Excel может создать отчет или в виде структурированной таблицы, или в виде сводной таблицы. Сценарии могут быть очень полезными при проведении анализа чувствительности (для сравнения различных решений) и для документирования результатов анализа.

Покажем на нашем примере, как создавать и сохранять сценарии и как на их основе затем построить отчет. Конечно, сценарии надо сохранять по мере их «созревания», т. е. после

каждого изменения, внесенного в табличную модель. Но, допустим, что мы забыли об этом правиле или вообще ничего не знали о сценариях. И сейчас хотим наверстать упущенное, создав кучу сценариев на все случаи жизни.

Перед началом создания сценариев сделаем маленькое, но существенное замечание о том, что следует сохранять в сценариях. В сценариях сохраняются *константы*, т. е. такие значения, которые в ячейки рабочего листа введены напрямую, а не вычислены по формулам. Значения переменных решения, хотя они вычисляются с помощью средства **Поиск решения**, также считаются константами, поскольку для их определения *не используются* формулы рабочего листа. Возникает естественный вопрос: как же сохранить результаты вычислений? Ответ простой: они не сохраняются, а вычисляются заново при восстановлении на рабочем листе ранее сохраненных констант сценария или при создании отчета по сценариям. В своих сценариях мы будем сохранять значения переменных решения, значения целевых коэффициентов и значения правых частей ограничений.

Итак, вспомним нашу первую модель и ее решение, где целевые коэффициенты c_1 и c_2 равнялись соответственно 2000 и 2500, а правая часть пятого ограничения равнялась 30. Восстановите на рабочем листе эти значения и запустите средство **Поиск решения** для получения решения. Надеюсь, вы получили прежнее решение: $x_1 = 257,14$, $x_2 = 150$ и $z = 889285,71$ (см. рис. 7).

Чтобы создать новый сценарий для текущего рабочего листа, выполните следующие действия.

1. Выберите команду **Сервис->Сценарии** (в Excel 2007 — **Данные->Анализ “что если”**).

2. В открывшемся диалоговом окне **Диспетчер сценариев** щелкните на кнопке **Добавить** (рис. 18).

3. В диалоговом окне **Изменение сценария** введите название сценария в поле ввода **Название сценария** (рис. 19). Желательно давать содержательные названия, показывающие отличия данного сценария от других. В нашем примере первый сценарий назовем **Исходный**.

4. В поле ввода **Изменяемые ячейки** введите адреса ячеек, содержащих константы, задающие параметры модели. Эти ячейки в сценариях называются *изменяемые ячейки*. В нашем примере надо ввести **В4:С4;В8:С8;F11:F17**. Проще всего вводить адреса ячеек путем выделения ячеек непосредственно на рабочем листе.

5. В поле ввода **Примечание** желательно ввести комментарии к создаваемому сценарию. Если вы не введете комментарии, то Excel автоматически создаст примечание, содержащее имя создателя сценария (по зарегистрированному имени пользователя) и дату его создания.

6. Щелкните в диалоговом окне **Изменение сценария** на кнопке **ОК**.

7. В открывшемся диалоговом окне **Значения ячеек сценария** проверьте и при необходимости измените значения для изменяемых ячеек (рис. 20).

8. Щелкните в диалоговом окне **Значения ячеек сценария** на кнопке **ОК**, что создает сценарий и возвращает в диалоговое окно **Диспетчер сценариев**.

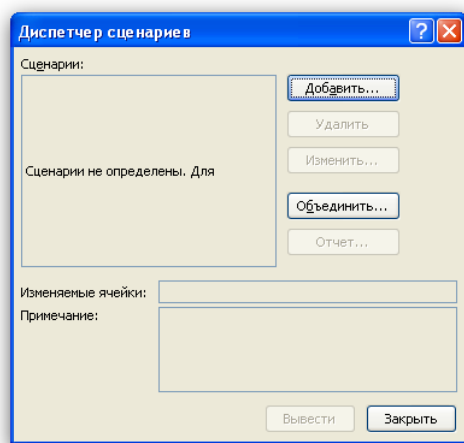


Рис. 18. Диалоговое окно **Диспетчер сценария** — основное окно для работы со сценариями

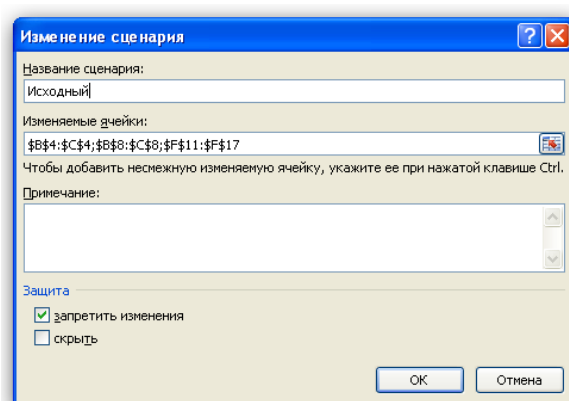


Рис. 19. Диалоговое окно **Изменение сценария** — создание нового сценария

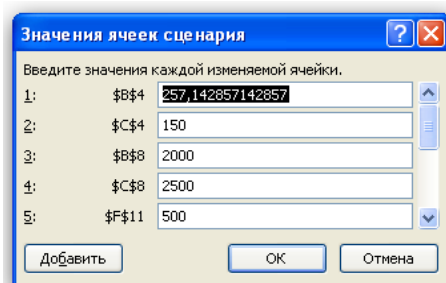


Рис. 20. Задание значений для нового сценария

Сценарий создан. Чтобы посмотреть, как сценарий вычисляет результаты (и для проверки сохраненных в сценарии значений), измените какие-либо значения на рабочем листе (например, измените значения переменных решения) и затем выполните следующие простые действия. Выберите команду **Сервис->Сценарии**, в открывшемся диалоговом окне **Диспетчер сценариев** в списке **Сценарии** выберите сценарий, который вы хотите отобразить, и щелкните на кнопке **Вывести**. Excel должен воспроизвести на рабочем листе решение нашей первой задачи, которое показано на рис. 7. Если есть какие-нибудь числовые расхождения между тем, что показано на рис. 7, и результатами восстановленного сценария, то проверьте в сценарии значения изменяемых ячеек.

Далее создаем сценарий для решения, где правая часть пятого ограничения заменена значением 36,5. Для этого введите в ячейку F14 данное значение и найдите решение с помощью средства **Поиск решения** (см. рис. 11). Затем повторите описанные выше действия по созданию сценария. Этот новый сценарий назовем, к примеру, **Полная загрузка**.

Подобным образом создаем сценарий, где удельные прибыли красок обоих типов равны, и поэтому Excel предлагает отказаться от производства краски **Б** (см. рис. 15). Этот сценарий назовем **Без краски Б**. Наконец, создадим еще один сценарий, где удельные прибыли красок также равны, но требуется произвести 150 тонн краски **Б** (см. рис. 16). Этому сценарию дадим название **Даешь краску Б!**.

Создать отчет по имеющимся сценариям можно следующим образом.

1. Выберите команду **Сервис->Сценарии**.
2. В открывшемся диалоговом окне **Диспетчер сценариев** щелкните на кнопке **Отчет**.
3. В диалоговом окне **Отчет по сценарию** укажите, какой тип отчета вы хотите создать — выберите переключатель **структура** для создания итогового отчета в виде структурированного рабочего листа либо переключатель **сводная таблица** — для создания итогового отчета в виде сводной таблицы (рис. 21). Для сценариев решения задач оптимизации наиболее подходит отчет в виде структурированного рабочего листа.
4. В поле ввода **Ячейки результата** введите адреса ячеек (вручную или путем выделения их непосредственно на рабочем листе), содержащих итоговые результаты. Для задач оптимизации *обязательно* надо указать ячейку с целевой функцией, а также, коль в сценариях сохраняются значения правых частей ограничений, ячейки с формулами, вычисляющими значения левых частей ограничений.
5. Щелкните на кнопке **ОК**.

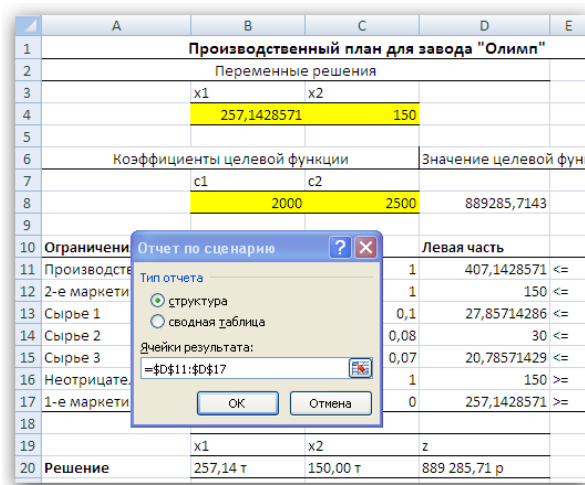


Рис. 21. Диалоговое окно **Отчет по сценарию**

Отчет по сценариям будет легко читаться и будет понятен с первого взгляда, если изменяемым ячейкам сценариев и ячейкам результатов (задаваемых при создании отчета) присвоить уникальные имена, соответствующие их «сущности». Присвоить имена ячейкам можно, в частности, с помощью команды **Вставка->Имя->Присвоить**. В противном случае ячейки в столбце В отчета останутся пустыми и заполнять их придется вручную.

Готовый отчет по нашим сценариям показан на рис. 22. Этот отчет может послужить необходимому делу документирования и обоснования принятия решения. Он послужит основой для заключительных выводов выполненного анализа чувствительности.

Подведем итоги выполнения анализа чувствительности в нашем примере.

1. Первоначальное решение (сценарий **Исходный** в отчете на рис. 22) — производить 257,14 т краски А и 150 т краски Б, при этом будет получена прибыль в размере 889 285,17 руб. — не загружает полностью производственные мощности.

| Структура сценария | | | | | | |
|--------------------|-------------------|-------------|-----------------|--------------|-----------------|--|
| | Текущие значения: | Исходный | Полная загрузка | Без краски Б | Даешь краску Б! | |
| Изменяемые: | | | | | | |
| \$B\$4 | 257,1428571 | 257,1428571 | 350 | 500 | 350 | |
| \$C\$4 | 150 | 150 | 150 | 0 | 150 | |
| \$B\$8 | 2000 | 2000 | 2000 | 2300 | 2300 | |
| \$C\$8 | 2500 | 2500 | 2500 | 2300 | 2300 | |
| \$F\$11 | 500 | 500 | 500 | 500 | 500 | |
| \$F\$12 | 150 | 150 | 150 | 150 | 150 | |
| \$F\$13 | 50 | 50 | 50 | 50 | 50 | |
| \$F\$14 | 30 | 30 | 36,5 | 36,5 | 36,5 | |
| \$F\$15 | 25 | 25 | 25 | 25 | 25 | |
| \$F\$16 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| \$F\$17 | 200 | 200 | 200 | 200 | 200 | |
| Результат: | | | | | | |
| \$D\$11 | 407,1428571 | 407,1428571 | 500 | 500 | 500 | |
| \$D\$12 | 150 | 150 | 150 | 0 | 150 | |
| \$D\$13 | 27,85714286 | 27,85714286 | 32,5 | 25 | 32,5 | |
| \$D\$14 | 30 | 30 | 36,5 | 35 | 36,5 | |
| \$D\$15 | 20,78571429 | 20,78571429 | 24,5 | 20 | 24,5 | |
| \$D\$16 | 150 | 150 | 150 | 0 | 150 | |
| \$D\$17 | 257,1428571 | 257,1428571 | 350 | 500 | 350 | |

Примечания: столбец "Текущие значения" представляет значения изменяемых ячеек в момент создания Итогового отчета по Сценарию. Изменяемые ячейки для каждого сценария выделены серым цветом.

Рис. 22. Отчет по сценариям

2. Чтобы полностью загрузить производственные мощности, надо увеличить месячный запас сырья 2 с 30 до 36,5 тонн (сценарий **Полная загрузка** в отчете на рис. 22), при этом следует производить 350 т краски А и 150 т краски Б, тогда будет получена прибыль в размере 1 075 000 руб.

3. Первые два решения имеют силу, если удельная прибыль краски Б превышает удельную прибыль краски А. Если удельная прибыль краски Б меньше удельной прибыли краски А, то производить краску Б нерентабельно.

4. Если удельная прибыль краски Б примерно равна удельной прибыли краски А, то прибыль не зависит от количества произведенной краски Б (сценарии **Без краски Б** и **Даешь краску Б!** в отчете на рис. 22). При этом рационально отказаться от производства краски Б или уменьшить ее производство до минимума, поскольку это сокращает необходимый для производства суммарный запас всех видов сырья (сценарий **Без краски Б**).

Вот так можно кратко подвести итоги анализа нашей *математической* модели реальной ситуации. Как эти итоги и полученные «оптимальные» решения будут интерпретированы в реальную ситуацию, какое влияние они окажут (и окажут ли) на процесс принятия реального решения, как это решение будет воплощаться в жизнь — это вопросы реальной жизни, ответить на которые может только сама жизнь.

Практическая работа №1

Тема: Решение задач линейного программирования и анализ чувствительности с помощью MS Excel.

Цель: Изучить возможности надстройки Поиск решения пакета MS Excel для решения однокритериальных задач теории принятия решений.

Порядок выполнения работы:

1. Изучение теории и примера.
2. Построение математической модели проблемы в виде задачи линейного программирования.
3. Решение задачи с использованием надстройки Поиск решения пакета MS Excel.
4. Анализ чувствительности решения с использованием сценариев.
5. Составление отчёта по лабораторной работе, в котором представляется:
 - формулировка индивидуального задания;
 - математическая модель и пояснение к её построению;
 - снимок экрана монитора, содержащий табличную модель задачи, снимки отчетов по результатам, устойчивости и пределам, а также снимок отчета по сценариям с содержательными пояснениями к ним;
 - выводы по лабораторной работе.

Варианты заданий

Вариант 1

На швейной фабрике для изготовления четырёх видов изделий может быть использована ткань трёх артикулов. Нормы расхода тканей всех артикулов на пошив одного изделия приведены в таблице. В ней так же указаны имеющиеся в распоряжении фабрики общее количество тканей каждого артикула и цена изделия данного вида. Определить, сколько изделий каждого вида должна произвести фабрика, чтобы стоимость изготовленной продукции была максимальной. Сколько ткани каждого из артикулов может сэкономить фабрика не теряя прибыли? Насколько минимально нужно поднять цену на четвертое изделие, чтобы это увеличило прибыль? Что произойдет с прибылью, если фабрике будет необходимо выпускать изделие 3 в количестве не меньше 5 штук?

| Артикул ткани | Норма расхода ткани (м) на одно изделие вида | | | | Общее количество ткани |
|----------------------------|--|---|-----|---|------------------------|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | |
| I | 1 | - | 2 | 1 | 180 |
| II | - | 1 | 3 | 2 | 210 |
| III | 4 | 2 | - | 4 | 800 |
| Цена одного изделия (руб.) | 9±2 | 6 | 4±3 | 7 | |

Вариант 2

Предприятие выпускает четыре вида продукции и использует три типа основного оборудования: токарное, фрезерное и шлифовальное. Затраты времени на изготовление единицы продукции для каждого из типов оборудования приведены в таблице. В ней же указаны общий фонд рабочего времени каждого из типов оборудования, а также прибыль от реализации одного изделия данного вида. Определить такой объем выпуска каждого из изделий, при котором общая прибыль от их реализации является максимальной. Что произойдет с общей прибылью, если прибыль от продажи продукции вида 4 вырастет втрое? Как изменится общая прибыль, если предприятию будет необходимо выпускать не меньше 1 единиц продукции 3? Если увеличить время использования фрезерных станков на 80 станко-часов, то можно ли будет уменьшить время использования других станков?

| Тип оборудования | Затраты времени (станко-ч) на единицу продукции вида | | | | Общий фонд рабочего времени (станко-ч) |
|--|--|---|-----|---|--|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | |
| Токарное | 2 | 1 | 1 | 3 | 300 |
| Фрезерное | 1 | - | 2 | 1 | 70 |
| Шлифовальное | 1 | 2 | 1 | - | 340 |
| Прибыль от реализации единицы продукции (руб.) | 8 | 3 | 2±1 | 1 | |

Вариант 3

Для перевозок груза на трёх линиях могут быть использованы суда трёх типов. Производительность судов при использовании их на различных линиях характеризуются данными, приведёнными в таблице. В ней же указаны общее время, в течение которого суда каждого типа находятся в эксплуатации, и минимально необходимые объёмы перевозок на каждой линии. Определить, какие суда, на какой линии и в течение какого времени следует использовать, чтобы обеспечить максимальную загрузку судов с учётом возможного времени их эксплуатации. Как изменится общий объем перевозок, если производительность судов вида III на третьей линии возрастет вдвое, а на второй — уменьшится до 8 млн. тонномиль в сутки? Возможно ли в этом случае выполнить заданный объем перевозок? На какой линии выгоднее всего использовать суда вида I?

| Тип судна | Производительность судов (млн. тонномиль в сутки) на линии | | | Общее время эксплуатации и судов |
|--|--|------|------|----------------------------------|
| | 1 | 2 | 3 | |
| I | 8 | 14 | 11 | 300 |
| II | 6 | 15 | 13 | 300 |
| III | 12 | 12 | 4 | 300 |
| Заданный объём перевозок (млн. Тонно-миль) | 3000 | 5400 | 3300 | |

Вариант 4

Компания "Bermuda Paint" специализируется на производстве технических лаков. Представленная ниже таблица содержит информацию о ценах продажи и соответствующих издержках производства единицы полировочного и матового лаков.

| Лак | Цена продажи 1 галлона, ф. ст. | Издержки производства 1 галлона, ф. ст. |
|--------------|-----------------------------------|---|
| Матовый | 13,0 | 9,0 |
| Полировочный | 16,0 | 10,0 |

Для производства 1 галлона матового лака необходимо затратить 6 мин. трудозатрат, а для производства одного галлона полировочного лака — 12 мин. Резерв фонда рабочего времени составляет 400 чел.-ч. в день. Размер ежедневного запаса необходимой химической смеси равен 100 унциям, тогда как ее расход на один галлон матового и полировочного лаков составляет 0,05 и 0,02 унции соответственно. Технологические возможности завода позволяют выпускать не более 3000 галлонов лака в день.

В соответствии с соглашением с основным оптовым покупателем компания должна поставлять ему 5000 галлонов матового лака и 2500 галлонов полировочного лака за каждую рабочую неделю (состоящую из 5 дней). Кроме того, существует профсоюзное соглашение, в котором оговаривается минимальный объем производства в день, равный 2000 галлонов. Администрации данной компании необходимо определить ежедневные объемы производства каждого вида лаков, которые позволяют получать максимальный общий доход.

Требуется:

а) Определить ежедневный оптимальный план производства и соответствующую ему величину дохода.

б) Для исходной задачи (не учитывающей сверхурочные работы) определить промежуток изменений показателя единичного дохода за 1 галлон полировочного лака, в котором исходное оптимальное решение остается прежним.

Вариант 5

Найти решение, состоящее в определении плана изготовления изделий А, В и С, обеспечивающего максимальный их выпуск, в стоимости выраженной с учётом ограничений на возможное использование сырья трёх видов. Нормы расхода сырья каждого вида на одно изделие, цена одного изделия соответствующего вида, а также имеющегося сырья, приведены в таблице. Можно ли сэкономить сырье не уменьшая общей прибыли? Что произойдет с прибылью, если перед предприятием поставлена задача выпустить не менее пяти изделий вида А?

| Вид сырья | Нормы затрат (кг) на одно изделие | | | Общее количество сырья (кг) |
|----------------------------|-----------------------------------|------|----|-----------------------------|
| | А | В | С | |
| I | 18 | 15 | 12 | 360 |
| II | 6 | 4 | 8 | 192 |
| III | 5 | 3 | 3 | 180 |
| Цена одного изделия (руб.) | 9±1 | 10±2 | 16 | - |

Вариант 6

Полиграфическая компания выпускает рекламные издания LinksLetter и Ragged Edge, которые покупатели могут брать в местных магазинах и ресторанах. Компания получает доход, продавая место для размещения рекламы в своих изданиях. Стоимость LinksLetter составляет \$50 за тысячу экземпляров, а стоимость Ragged Edge — \$100 за тысячу экземпляров. Чтобы напечатать тысячу экземпляров LinksLetter требуется один час, а печать тысячи экземпляров Ragged Edge занимает всего полчаса. На следующей неделе ресурс времени печати составит 120 ч. Обе рекламные газеты складываются фальцевальной машиной, ресурс рабочего времени которой составляет 200 ч в неделю, причем она складывает обе газеты с одинаковой скоростью 1000 экземпляров в час. Компания хочет полностью использовать время печатного станка, минимизировав при этом затраты на производство печатной продукции. Определите оптимальный производственный план и его минимальную стоимость.

Предположим, что цели менеджера полиграфической компании изменились. Теперь он решил максимизировать получаемую от публикаций прибыль. Он определил, что прибыль от тысячи экземпляров LinksLetter составляет \$25, а от тысячи экземпляров Ragged Edge — \$45. Необходимо напечатать не менее 60000 экземпляров LinksLetter и не менее 30000 экземпляров Ragged Edge. Ограничения на ресурс рабочего времени печатного станка и фальцевальной машины остаются прежними. Каким будет оптимальный производственный план? Какие ограничения являются связывающими?

Вариант 7

Завод может производить пять различных продуктов в произвольном соотношении. В выпуске каждого продукта принимают участие три станка, как показано в таблице. Все цифры даны в минутах на фунт продукта.

| Время работы станка, мин/фунт | | | |
|-------------------------------|----|----|----|
| Продукт | 1 | 2 | 3 |
| A | 12 | 8 | 5 |
| B | 7 | 9 | 10 |
| C | 8 | 4 | 7 |
| D | 10 | 0 | 3 |
| E | 7 | 11 | 2 |

Ресурс рабочего времени каждого станка составляет 128 ч в неделю. Все продукты конкурентоспособны и все их произведенное количество может быть продано по цене \$5, \$4, \$5, \$4 и \$4 за фунт продукта А, В, С, D и E соответственно. Переменные затраты на зарплату составляют \$4 в час для станков 1 и 2 и \$3 в час для станка 3. Стоимость материалов, затраченных на выпуск каждого фунта продуктов А и С, составляет \$2, а продуктов В, D и E — \$1. Руководство хочет максимизировать прибыль компании. Сколько часов отработает каждый станок, и в каких единицах измеряются теневые цены для ограничений, задающих ресурс рабочего времени для станков? Какую цену фирма может позволить себе заплатить за получение дополнительного часа рабочего времени станка 2? На сколько может увеличиться цена продажи продукта А, прежде чем изменится оптимальный производственный план?

Вариант 8

На ткацкой фабрике для изготовления трёх артикулов ткани используются станки двух типов, пряжа и красители. В таблице указаны производительность станка каждого типа, нормы расхода пряжи и красителей, цена 1 метра ткани данного артикула, а также общий фонд рабочего времени станков каждого типа, имеющихся в распоряжении фабрики, фонды пряжи и красителей и ограничения на возможный выпуск тканей данного артикула.

| Ресурсы | Нормы затрат на 1 м ткани артикула | | | Общее количество ресурсов |
|--|------------------------------------|------|-------|---------------------------|
| | 1 | 2 | 3 | |
| Производительность станков (станко-ч): | | | | |
| I типа | 0,02 | - | 0,04 | 200 |
| II типа | 0,04 | 0,03 | 0,01 | 500 |
| Пряжа (кг) | 1,0 | 1,5 | 2,0 | 15000 |
| Красители (кг) | 0,03 | 0,02 | 0,025 | 450 |
| Цена 1м ткани (руб.) | 5 | 8 | 8 | - |
| Выпуск ткани (м): | | | | |
| Минимальный | 1000 | 2000 | 2500 | - |
| Максимальный | 2000 | 9000 | 4000 | - |

Составить такой план изготовления тканей, согласно которому будет произведено возможное количество тканей данного артикула, а общая стоимость всех тканей максимальна. Можно ли будет при этом сэкономить ресурсы пряжи и красителей? Будут ли полностью загружены станки?

Вариант 9

Машиностроительное предприятие для изготовления четырёх видов продукции использует токарное, фрезерное, сверлильное, расточное и шлифовальное оборудование, а также комплектующие изделия.

Кроме того, сборка изделий требует выполнения определённых сборочно-наладочных работ. Нормы затрат всех видов на изготовление каждого из изделий приведены в таблице. В

этой же таблице указаны наличный фонд каждого из ресурсов, прибыль от реализации единицы продукции данного вида, а также ограничения на возможный выпуск продукции 2-го и 3-го вида.

Найти план выпуска продукции, при котором прибыль от её реализации является максимальной.

| Ресурсы | Нормы затрат на изготовление одного изделия | | | | Общий объём ресурсов |
|--|---|-----|-----|-----|----------------------|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | |
| Производительность оборудования (человек-ч): | | | | | |
| Токарного | 550 | - | 620 | - | 64270 |
| Фрезерного | 40 | 30 | 20 | 20 | 4800 |
| Сверлильного | 86 | 110 | 150 | 52 | 22360 |
| Расточного | 160 | 92 | 158 | 128 | 26240 |
| Шлифовального | - | 158 | 30 | 50 | 7900 |
| Комплекующие изделия (шт) | 3 | 4 | 3 | 3 | 520 |
| Сборочно-наладочные работы (человек-ч) | 4,5 | 4,5 | 4,5 | 4,5 | 720 |
| Прибыль от реализации одного изделия (руб.) | 315 | 278 | 573 | 370 | - |
| Выпуск (шт.): | | | | | |
| Минимальный | - | 40 | - | - | - |
| Максимальный | - | - | 120 | - | - |

Найти план выпуска продукции, при котором прибыль от ее реализации является максимальной. Можно ли будет при этом сэкономить комплекующие изделия? Будет ли полностью загружено оборудование?

Вариант 10

Для поддержания нормальной жизнедеятельности человеку необходимо потреблять не менее 118 г белков, 56 г жиров, 500 г углеводов, 8 г минеральных солей. Количество питательных веществ, содержащихся в 1 кг каждого вида потребляемых продуктов, а также цена 1 кг каждого из этих продуктов приведены в следующей таблице:

| Питательные вещества | Содержание (г) питательных веществ в 1 кг продуктов | | | | | | |
|----------------------------|---|------|--------|-------|-----|-------|-----------|
| | Мясо | рыба | молоко | Масло | сыр | крупа | картофель |
| Белки | 180 | 190 | 30 | 10 | 260 | 130 | 21 |
| Жиры | 20 | 3 | 40 | 865 | 310 | 30 | 2 |
| Углеводы | - | - | 50 | 6 | 20 | 650 | 200 |
| Минеральные соли | 9 | 10 | 7 | 12 | 60 | 20 | 10 |
| Цена 1 кг продуктов (руб.) | 1,8 | 1,0 | 0,28 | 3,4 | 2,9 | 0,5 | 0,1 |

Составить дневной рацион, содержащий не менее минимальной суточной нормы потребности человека в необходимых питательных веществах при минимальной общей стоимости потребляемых продуктов.

Вариант 11

Для перевозок трёх видов продукции предприятие использует два типа технологического оборудования и два вида сырья. Нормы затрат сырья и времени на изготовление одного изделия каждого вида приведены в таблице. В ней же указаны общий фонд рабочего времени каждой из групп технологического оборудования, объёмы имеющегося сырья каждого вида, а также цена одного изделия данного вида и ограничения на возможный выпуск каждого из изделий.

| Ресурсы | Нормы затрат на одно изделие вида | | | Общее количество ресурсов |
|---|-----------------------------------|----|-----|---------------------------|
| | 1 | 2 | 3 | |
| Производительность оборудования (норм-ч): | | | | |
| I типа | 2 | - | 4 | 200 |
| II типа | 4 | 3 | 1 | 500 |
| Сырьё (кг): | | | | |
| 1-го вида | 10 | 15 | 20 | 1495 |
| 2-го вида | 30 | 20 | 25 | 4500 |
| Цена одного изделия (руб.) | 10 | 15 | 20 | - |
| Выпуск (шт.): | | | | |
| Минимальный | 10 | 20 | 25 | - |
| Максимальный | 20 | 40 | 100 | - |

Составить такой план производства продукции, согласно которому будет изготовлено необходимое количество изделий каждого вида, а общая стоимость всей изготавливаемой продукции максимальна. Можно ли будет при этом получить экономию сырья? Будет ли полностью загружено оборудование? Что произойдет с величиной прибыли, если цену на изделие 1 увеличить на 20%?

Вариант 12

При производстве четырёх видов кабеля выполняется пять групп технологических операций. Нормы затрат на 1 км кабеля данного вида на каждой из групп операции, прибыль от реализации 1 км каждого вида кабеля, а также общий фонд рабочего времени, в течение которого могут выполняться эти операции, указаны в таблице.

| Технологическая операция | Нормы затрат времени (ч) на обработку 1 км кабеля вида | | | | Общий фонд рабочего времени (ч) |
|-----------------------------------|--|-----|-----|-----|---------------------------------|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | |
| Волочение | 1,2 | 1,8 | 1,6 | 2,4 | 7200 |
| Наложение изоляции | 1,0 | 0,4 | 0,8 | 0,7 | 5600 |
| Скручивание элементов в кабель | 6,4 | 5,6 | 6,0 | 8,0 | 11176 |
| Освинцевание | 3,0 | - | 1,8 | 2,4 | 3600 |
| Испытание и контроль | 2,1 | 1,5 | 0,8 | 3,0 | 4200 |
| Прибыль от реализации 1 км кабеля | 1,2 | 0,8 | 1,0 | 1,3 | - |

Определить такой план выпуска кабеля, при котором общая прибыль от реализации изготавливаемой продукции является максимальной. Кабель какого вида производить выгоднее всего?

Вариант 13

На мебельной фабрике изготавливается пять видов продукции: столы, шкафы, диваны-кровати, кресла-кровати и тахты. Нормы затрат труда, а также древесины и ткани на производство единицы продукции данного вида приведены в таблице.

| Ресурсы | Норма расхода ресурса на единицу продукции | | | | | Общее количество ресурсов |
|---|--|------|---------------|----------------|-------|---------------------------|
| | стол | шкаф | диван-кровать | кресло-кровать | тахта | |
| Трудозатраты (человека-ч) | 4 | 8 | 12 | 9 | 10 | 3456 |
| Древесина (м ³) | 0,4 | 0,6 | 0,3 | 0,2 | 0,3 | 432 |
| Ткань (м) | - | - | 6 | 4 | 5 | 2400 |
| Прибыль от реализации одного изделия (руб.) | 8 | 10 | 16 | 14 | 12 | - |
| Выпуск (шт.): | | | | | | |
| Минимальный | 120 | 90 | 20 | 40 | 30 | - |
| Максимальный | 480 | 560 | 180 | 160 | 120 | - |

В этой же таблице указана прибыль от реализации одного изделия каждого вида, приведено общее количество ресурсов данного вида, имеющееся в распоряжении фабрики, а также указано (на основе изучения спроса), в пределах каких объёмов может изготавливаться каждый вид продукции.

Определить план производства продукции мебельной фабрикой, согласно которому прибыль от её реализации является максимальной. Можно ли при этом будет сэкономить древесину и ткань?

Вариант 14

Из четырех видов сырья необходимо составить смесь, в состав которой должно входить не менее 26 ед. химического вещества А, 30 ед. – вещества В и 24 ед. – вещества С. Количество единиц химического вещества, содержащегося в 1 кг сырья каждого вида, указано в таблице. В ней же приведена цена 1 кг сырья каждого вида.

Составить смесь, содержащую не менее необходимого количества данного вида и имеющую минимальную стоимость.

| Вещество | Количество единиц вещества, содержащегося в 1 кг сырья вида | | | |
|------------------------|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 |
| А | 1 | 1 | - | 4 |
| В | 2 | - | 3 | 5 |
| С | 1 | 2 | 4 | 6 |
| Цена 1 кг сырья (руб.) | 5 | 6 | 7 | 8 |

2. Принятие решений при многих критериях с помощью метода анализа иерархий

Ежедневно мы сталкиваемся с необходимостью принимать решения с учетом множества целей и критериев. Перечислим некоторые из них

- Выбор работы из нескольких предложенных вакансий
- Выбор компьютера (автомобиля, холодильника и т. п.)
- Принятие решения о том, какой новый продукт выпускать первым.
- Выбор места для нового ресторана, отеля, производственного объекта и т. д.
- Выбор учебного заведения.
- Составление рейтинга городов по условиям проживания
- Выбор нового пакета прикладных программ от конкурирующих производителей.

При покупке автомобиля, например, необходимо учитывать такие факторы как: цена, безопасность, объем двигателя, экономия топлива и т. д. В каждом из перечисленных выше примеров при принятии сложных решений требуется учитывать множество факторов.

Простейшим способом принятия решений в подобных ситуациях является присвоение критериям, определяющим качество решения, весовых коэффициентов и вычисление для альтернативных решений оценок по шкале от 1 (наихудшее) до 10 (наилучшее) путем суммирования произведений значения каждого критерия на его весовой коэффициент. Решение с наивысшей суммой будет наиболее предпочтительным. Назовем такой метод выбора решения *методом рейтинга приоритетов*.

Рассмотрим пример, в котором необходимо выбрать компьютер для офиса. Выбор осуществляется среди трех моделей: модель А с процессором AMD Athlon II X2 с частотой 2.9 ГГц, модель В с процессором Intel Core 2 Duo с частотой 3 ГГц и модель С с процессором Intel Core i3-530 с частотой 2.93 ГГц. При выборе учитываются следующие критерии: цена, эффективность (частота процессора), емкость жесткого диска и наличие гарантии и обслуживания. Далее решаем, что при принятии решения цене присваивается весовой коэффициент, например, 0,50 (50% общего веса), эффективности — 0,15 (15%), емкости жесткого диска — 0,20 (20%) и наличию гарантии — 0,15 (15% общего веса). Затем производится оценка каждой модели компьютера по указанным четырем критериям. Их оценки по шкале от 1 до 10 (как описывалось выше) показаны в табличной модели на рис. 1.

| | A | B | C | D | E | F | G |
|---|----------|------|---|---|-------------------|----------|----------|
| 1 | | | | | | | |
| 2 | | | | | | | |
| 3 | | | | | Ранги альтернатив | | |
| 4 | Критерий | Вес | | | Модель А | Модель В | Модель С |
| 5 | Цена | 50% | | | 5 | 8 | 3 |
| 6 | Скорость | 15% | | | 7 | 5 | 9 |
| 7 | Ж. диск | 20% | | | 9 | 4 | 10 |
| 8 | Гарантия | 15% | | | 7 | 10 | 7 |
| 9 | | 100% | | | 6.4 | 7.05 | 5.9 |

| | B | C | D | E | F | G | |
|--|----------|--------------|---|---|----------------------------------|----------------------------------|----------------------------------|
| | | | | | | | |
| | | | | | Ранги альтернатив | | |
| | Критерий | Вес | | | Модель А | Модель В | Модель С |
| | Цена | 0,5 | | | 5 | 8 | 3 |
| | Скорость | 0,15 | | | 7 | 5 | 9 |
| | Ж. диск | 0,2 | | | 9 | 4 | 10 |
| | Гарантия | 0,15 | | | 7 | 10 | 7 |
| | | =СУММ(C4:C7) | | | =СУММПРОИЗВ(\$C\$4:\$C\$7;E4:E7) | =СУММПРОИЗВ(\$C\$4:\$C\$7;F4:F7) | =СУММПРОИЗВ(\$C\$4:\$C\$7;G4:G7) |

Рис. 1. Модель принятия решения при покупке компьютера

Как видим, наибольшую сумму баллов 7,05 набрала модель В, поэтому купить следует именно ее.

Метод рейтинга приоритетов прост в использовании, однако при его применении на практике возникает ряд сложностей (при задании оценочных шкал для разнородных критериев, при выставлении оценок альтернативам), преодолеть которые можно с помощью более совершенного метода — метода анализа иерархий.

Метод анализа иерархий также основан на идее использования взвешенных средних, однако в нем применяется более надежный и согласованный метод присвоения оценок и весовых коэффициентов. МАИ основывается на попарном сравнении альтернативных решений по каждому критерию. Затем проводится аналогичный ряд сравнений, чтобы оценить относительную важность каждого критерия и таким образом определить весовые коэффициенты. Основная процедура выглядит так.

1. Определяются рейтинги всех возможных вариантов решений по каждому критерию следующим образом.
 - создается матрица попарных сравнений по всем критериям,
 - полученная матрица нормализуется,
 - для получения соответствующих рейтингов усредняются значения в каждой строке,
 - вычисляются и проверяются коэффициенты согласованности.
2. Определяются весовые коэффициенты критериев.
 - создается матрица попарных сравнений по всем критериям,
 - полученная матрица нормализуется,
 - для получения весовых коэффициентов усредняются значения в каждой строке,
 - вычисляются и проверяются коэффициенты согласованности.
3. Вычисляется взвешенный средний рейтинг для каждого варианта решения и выбирается решение, набравшее наибольшее количество баллов

Продемонстрируем применение данной процедуры на новом примере. Компании Sleepwell Hotels нужно выбрать наилучший пакет бухгалтерского программного обеспечения из предлагаемых несколькими поставщиками. Эта задача была поручена заведующему отделом Марку Джеймсу. Он выделил трех поставщиков, предлагаемое программное обеспечение которых сможет удовлетворить основные потребности компании Revenue Technology Corporation (RTC), PRAISE Strategic Solutions (PSS) и El Cheapo (EC). Критерии, которые он считает важными в выборе программного обеспечения: 1) общая стоимость программной системы, 2) обеспечение обслуживания на протяжении следующего года, 3) сложность и надежность лежащих в основе математических процедур и 4) возможность адаптации системы под условия Sleepwell. Первый шаг процедуры МАИ состоит в попарном сравнении продавцов по каждому критерию. Для этого используем стандартную шкалу сравнения, приведенную в следующей таблице

| Рейтинг | Описание |
|---------|-------------------------|
| 1 | Одинаковое предпочтение |
| 3 | Умеренное предпочтение |
| 5 | Явное предпочтение |
| 7 | Очевидное предпочтение |
| 9 | Абсолютное предпочтение |

Также можно присваивать значения рейтинга 2, 4, 6 и 8, которые определяются как средние от ближайших рейтингов.

Марк начал с первого критерия (общая стоимость) и внес в лист Стоимость рабочей книги данные, показанные на рис. 2. Таблицу следует читать таким образом: указанный в строке поставщик сравнивается с поставщиком, указанным в столбце. Если указанный в строке поставщик предпочтительней, то соответствующее число от 1 до 9 записывается в ячейку на пересечении строки и столбца. Если же предпочтительней поставщик, указанный в столбце, то 1 делится на соответствующее число от 1 до 9, и результат записывается в ячейку на пересечении строки и столбца. Очевидно, что поскольку любой поставщик одинаково предпочтителен по сравнению с самим собой, то во все диагональные ячейки заносится значение 1. По показателю общей стоимости поставщику RTC отдается среднее между умеренным и явным предпочтением в сравнении с поставщиком PSS. Поэтому в ячейку второго столбца первой строки заносится число 4 (ячейка C4). Поставщику EC отдается предпочтение от одинакового до умеренного перед поставщиком RTC, поэтому в ячейке третьего столбца первой строки записано число 1/2 (ячейка D4). Марк так запрограммировал свою таблицу, что после ввода элементов справа от диагонали (ячейки C4, D4 и D5) обратные предпочтения вычисляются автоматически. Например, поскольку при сравнении поставщика 1 с поставщиком 2 было записано 4, то при сравнении поставщика 2 с поставщиком 1 автоматически получается 1/4 (ячейка B5).

| | A | B | C | D |
|-----|---|------|-----|----------|
| | | RTC | PSS | EC |
| RTC | | 1 | 4 | 0,5 |
| PSS | | 0,25 | 1 | 0,142857 |
| EC | | 2 | 7 | 1 |

| | A | B | C | D |
|-----|---|-------|-------|------|
| | | RTC | PSS | EC |
| RTC | | 1 | 4 | 0,5 |
| PSS | | =1/C3 | 1 | =1/7 |
| EC | | =1/D3 | =1/D4 | 1 |

Рис. 2. Парное сравнение по показателю стоимости

После выполнения всех попарных сравнений матрицу необходимо *нормализовать*. Это выполняется путем суммирования чисел в каждом столбце и последующего деления каждого элемента столбца на полученную для данного столбца сумму. Результаты данной операции представлены в ячейках B12.D14 на рис. 3. Следующий шаг состоит в вычислении балла для каждого продавца по критерию общей стоимости. Эти значения показаны на рис. 3 в столбце E. Видно, что наивысший средний балл по данному критерию имеет поставщик EC

| | A | B | C | D | E |
|----|---------------------|-------|-------|----------|---------|
| 1 | | | | | |
| 2 | | | | | |
| 3 | | RTC | PSS | EC | |
| 4 | RTC | 1 | 4 | 0,5 | |
| 5 | PSS | 0,25 | 1 | 0,142857 | |
| 6 | EC | 2 | 7 | 1 | |
| 7 | | | | | |
| 8 | Сумма | 3,25 | 12 | 1,642857 | |
| 9 | | | | | |
| 10 | НОРМАЛИЗАЦИЯ | | | | |
| 11 | | RTC | PSS | EC | Среднее |
| 12 | RTC | 0,308 | 0,333 | 0,304 | 0,315 |
| 13 | PSS | 0,077 | 0,083 | 0,087 | 0,082 |
| 14 | EC | 0,615 | 0,583 | 0,609 | 0,602 |

| | A | B | C | D | E |
|----|--------------|--------------|--------------|--------------|------------------|
| 7 | | | | | |
| 8 | Сумма | =СУММ(B4:B6) | =СУММ(C4:C6) | =СУММ(D4:D6) | |
| 9 | | | | | |
| 10 | НОРМ. | | | | |
| 11 | | RTC | PSS | EC | Среднее |
| 12 | RTC | =B4/B\$8 | =C4/C\$8 | =D4/D\$8 | =СРЗНАЧ(B12:D12) |
| 13 | PSS | =B5/B\$8 | =C5/C\$8 | =D5/D\$8 | =СРЗНАЧ(B13:D13) |
| 14 | EC | =B6/B\$8 | =C6/C\$8 | =D6/D\$8 | =СРЗНАЧ(B14:D14) |

Рис. 3. Нормализованная матрица для критерия общей стоимости

Завершив нормализацию матрицы, необходимо вычислить коэффициент согласованности и проверить его значение. Цель этой операции состоит в том, чтобы убедиться в согласованности задания предпочтений в исходной таблице. Например, если по критерию общей стоимости задана явная предпочтительность поставщика 1 перед поставщиком 2 и умеренная предпочтительность поставщика 2 по сравнению с поставщиком 3, то при сравнении поставщиков 1 и 3 задание одинаковой предпочтительности приведет к несогласованности, еще большая несогласованность возникнет при указании, что 3 предпочтительней 1. Вычисление коэффициента согласованности состоит из трех этапов.

1. Вычисляется мера согласованности для каждого поставщика.
2. Определяется индекс согласованности ИС.
3. Вычисляется коэффициент согласованности как отношение ИС/ИР, где ИР — индекс рандомизации.

Для вычисления меры согласованности можно воспользоваться функцией умножения матриц Excel МУМНОЖ. Как показано на рис. 4, для поставщика 1 (RTC) средний рейтинг каждого поставщика (ячейки E12:E14) умножается на соответствующее количество баллов в первой строке (ячейки B4:D4), эти произведения суммируются, и сумма делится на средний рейтинг первого поставщика (ячейка E12). Аналогичные вычисления осуществляются для 2 и 3 поставщика. В идеальном случае меры согласованности должны быть равны числу возможных альтернативных решений (в нашем случае имеется 3 решения, т.е. 3 поставщика). Для вычисления индекса согласованности определяется средняя мера согласованности всех трех поставщиков, из нее вычитается количество возможных вариантов решения n и результат делится на $n-1$. Индекс согласованности ИС показан на рис. 4 в ячейке F16, его значение равно 0,001. Последний этап определения коэффициента согласованности заключается в делении ИС

на индекс рандомизации ИР, значения которого для различных значений n вычисляются в методе МАИ специальным образом и приведены в таблице ниже.

| n | Индекс рандомизации |
|-----|---------------------|
| 2 | 0,00 |
| 3 | 0,58 |
| 4 | 0,90 |
| 5 | 1,12 |
| 6 | 1,24 |
| 7 | 1,32 |
| 8 | 1,41 |
| 9 | 1,45 |
| 10 | 1,51 |

Коэффициент согласованности записан в ячейке F20 и равен 0,002.

| | A | B | C | D | E | F |
|----|---------------------|-------|-------|----------|-------------------------|----------------------|
| 2 | | | | | | |
| 3 | | RTC | PSS | EC | | |
| 4 | RTC | 1 | 4 | 0,5 | | |
| 5 | PSS | 0,25 | 1 | 0,142857 | | |
| 6 | EC | 2 | 7 | 1 | | |
| 7 | | | | | | |
| 8 | Сумма | 3,25 | 12 | 1,642857 | | |
| 9 | | | | | | |
| 10 | НОРМАЛИЗАЦИЯ | | | | | |
| 11 | | RTC | PSS | EC | Среднее | Мера согласованности |
| 12 | RTC | 0,308 | 0,333 | 0,304 | 0,315 | 3,0019 |
| 13 | PSS | 0,077 | 0,083 | 0,087 | 0,082 | 3,000 |
| 14 | EC | 0,615 | 0,583 | 0,609 | 0,602 | 3,004 |
| 15 | | | | | | |
| 16 | | | | | ИС = | 0,001 |
| 17 | | | | | | |
| 18 | | | | | ИР = | 0,58 |
| 19 | | | | | | |
| 20 | | | | | Коэф. согласованности = | 0,002 |

| | E | F |
|----|----------------------|-------------------------------------|
| 11 | Среднее | Мера согласованности |
| 12 | =СРЗНАЧ(B12:D12) | =МУМНОЖ(B4:D4; \$E\$12:\$E\$14)/E12 |
| 13 | =СРЗНАЧ(B13:D13) | =МУМНОЖ(B5:D5; \$E\$12:\$E\$14)/E13 |
| 14 | =СРЗНАЧ(B14:D14) | =МУМНОЖ(B6:D6; \$E\$12:\$E\$14)/E14 |
| 15 | | |
| 16 | ИС = | =(СРЗНАЧ(F12:F14) - 3)/2 |
| 17 | | |
| 18 | ИР = | 0,58 |
| 19 | | |
| 20 | о. согласованности = | =F16/F18 |

Рис. 4. Коэффициент согласованности для критерия общей стоимости

| | A | B | C | D | E | F | G |
|----|---------------------|----------|-------|-------|-----------------------|----------------------|---|
| 2 | | | | | | | |
| 3 | | RTC | PSS | EC | | | |
| 4 | RTC | 1 | 0,5 | 6 | | | |
| 5 | PSS | 2 | 1 | 8 | | | |
| 6 | EC | 0,166667 | 0,125 | 1 | | | |
| 7 | | | | | | | |
| 8 | Сумма | 3,166667 | 1,625 | 15 | | | |
| 9 | | | | | | | |
| 10 | НОРМАЛИЗАЦИЯ | | | | | | |
| 11 | | RTC | PSS | EC | Среднее | Мера согласованности | |
| 12 | RTC | 0,316 | 0,308 | 0,400 | 0,341 | 3,0200 | |
| 13 | PSS | 0,632 | 0,615 | 0,533 | 0,593 | 3,0315 | |
| 14 | EC | 0,053 | 0,077 | 0,067 | 0,065 | 3,0034 | |
| 15 | | | | | | | |
| 16 | | | | | ИС = | 0,009 | |
| 17 | | | | | | | |
| 18 | | | | | ИР = | 0,58 | |
| 19 | | | | | | | |
| 20 | | | | | Козф. согласованности | 0,016 | |

Рис. 5. Коэффициент согласованности для критерия обслуживания

| | A | B | C | D | E | F | G |
|----|---------------------|-------|-------|-------|-------------------------|----------------------|---|
| 2 | | | | | | | |
| 3 | | RTC | PSS | EC | | | |
| 4 | RTC | 1 | 1 | 5 | | | |
| 5 | PSS | 1 | 1 | 5 | | | |
| 6 | EC | 0,2 | 0,2 | 1 | | | |
| 7 | | | | | | | |
| 8 | Сумма | 2,2 | 2,2 | 11 | | | |
| 9 | | | | | | | |
| 10 | НОРМАЛИЗАЦИЯ | | | | | | |
| 11 | | RTC | PSS | EC | Среднее | Мера согласованности | |
| 12 | RTC | 0,455 | 0,455 | 0,455 | 0,455 | 3,0000 | |
| 13 | PSS | 0,455 | 0,455 | 0,455 | 0,455 | 3,0000 | |
| 14 | EC | 0,091 | 0,091 | 0,091 | 0,091 | 3,0000 | |
| 15 | | | | | | | |
| 16 | | | | | ИС = | 0,000 | |
| 17 | | | | | | | |
| 18 | | | | | ИР = | 0,58 | |
| 19 | | | | | | | |
| 20 | | | | | Козф. согласованности = | 0,000 | |

Рис. 6. Коэффициент согласованности для критерия сложности

| | A | B | C | D | E | F | G |
|----|---------------------|----------|----------|-------|-------------------------|----------------------|---|
| 2 | | | | | | | |
| 3 | | RTC | PSS | EC | | | |
| 4 | RTC | 1 | 0,25 | 3 | | | |
| 5 | PSS | 4 | 1 | 6 | | | |
| 6 | EC | 0,333333 | 0,166667 | 1 | | | |
| 7 | | | | | | | |
| 8 | Сумма | 5,333333 | 1,416667 | 10 | | | |
| 9 | | | | | | | |
| 10 | НОРМАЛИЗАЦИЯ | | | | | | |
| 11 | | RTC | PSS | EC | Среднее | Мера согласованности | |
| 12 | RTC | 0,188 | 0,176 | 0,300 | 0,221 | 3,0399 | |
| 13 | PSS | 0,750 | 0,706 | 0,600 | 0,685 | 3,1094 | |
| 14 | EC | 0,063 | 0,118 | 0,100 | 0,093 | 3,0131 | |
| 15 | | | | | | | |
| 16 | | | | | ИС = | 0,027 | |
| 17 | | | | | | | |
| 18 | | | | | ИР = | 0,58 | |
| 19 | | | | | | | |
| 20 | | | | | Козф. согласованности = | 0,047 | |

Рис. 7. Коэффициент согласованности для критерия адаптации

В случае абсолютной согласованности предпочтений мера согласованности будет равна 3, следовательно, ИС будут равны нулю, и коэффициент согласованности также будет равен нулю. Если этот коэффициент слишком велик (больше 0,10 по оценке Саати), значит, менеджер был недостаточно последователен в своих оценках, поэтому следует вернуться назад и пересмотреть результаты попарных сравнений (в большинстве случаев обнаруживается элементарная ошибка, и коэффициент согласованности сигнализирует о ее наличии).

Теперь необходимо проделать то же самое для остальных трех критериев. Для этого следует трижды скопировать рабочий лист Стоимость, создав тем самым три новых рабочих листа (назовем их Обслуживание, Сложность и Адаптация), а затем надо просто изменить параметры попарных сравнений. Результаты этих действий показаны на рис. 5-7. Во всех случаях значения коэффициента согласованности заключены в пределах от 0 до 0,047, это означает, что Марк был достаточно последователен в своих оценках. Кроме того, можно заметить, что компания PSS оказалась лучшей по критерию обслуживания, RTC и PSS — лучшие по критерию сложности, а PSS — лучшая по критерию адаптации.

На этом первый этап работы заканчивается. На втором этапе осуществляются аналогичные попарные сравнения для определения весов критериев. Процесс аналогичен предыдущему в том, что опять производятся сравнения, однако теперь сравниваются не поставщики, как это было на этапе 1, а критерии. Эти действия выполняются на рабочем листе Веса, показанном на рис. 8.

| | A | B | C | D | E | F | G | H |
|----|---------------------|-----------|--------------|-----------|-----------|-------------------------|----------------------|---|
| 2 | | | | | | | | |
| 3 | | Стоимость | Обслуживание | Сложность | Адаптация | | | |
| 4 | Стоимость | 1 | 6 | 0,5 | 3 | | | |
| 5 | Обслуживание | 0,1666667 | 1 | 0,125 | 0,3333333 | | | |
| 6 | Сложность | 2 | 8 | 1 | 5 | | | |
| 7 | Адаптация | 0,3333333 | 3 | 0,2 | 1 | | | |
| 8 | Сумма | 3,500 | 18,000 | 1,825 | 9,333 | | | |
| 9 | | | | | | | | |
| 10 | НОРМАЛИЗАЦИЯ | | | | | | | |
| 11 | | Стоимость | Обслуживание | Сложность | Адаптация | Среднее | Мера согласованности | |
| 12 | Стоимость | 0,286 | 0,333 | 0,274 | 0,321 | 0,304 | 4,0713 | |
| 13 | Обслуживание | 0,048 | 0,056 | 0,068 | 0,036 | 0,052 | 4,0108 | |
| 14 | Сложность | 0,571 | 0,444 | 0,548 | 0,536 | 0,525 | 4,0869 | |
| 15 | Адаптация | 0,095 | 0,167 | 0,110 | 0,107 | 0,120 | 4,0229 | |
| 16 | | | | | | ИС = | 0,016 | |
| 17 | | | | | | | | |
| 18 | | | | | | ИР = | 0,9 | |
| 19 | | | | | | | | |
| 20 | | | | | | Коеф. согласованности = | 0,018 | |

| | C | D | E | F | G |
|----|--------------|--------------|--------------|-------------------|------------------------------------|
| 2 | | | | | |
| 3 | Обслуживание | Сложность | Адаптация | | |
| 4 | 6 | =1/2 | 3 | | |
| 5 | 1 | =1/8 | =1/3 | | |
| 6 | =1/D5 | 1 | 5 | | |
| 7 | =1/E5 | =1/E6 | 1 | | |
| 8 | =СУММ(C4:C7) | =СУММ(D4:D7) | =СУММ(E4:E7) | | |
| 9 | | | | | |
| 10 | | | | | |
| 11 | Обслуживание | Сложность | Адаптация | Среднее | Мера согласованности |
| 12 | =C4/C\$8 | =D4/D\$8 | =E4/E\$8 | =СРЗНАЧ(B12:E12) | =МУМНОЖ(B4:E4;\$F\$12:\$F\$15)/F12 |
| 13 | =C5/C\$8 | =D5/D\$8 | =E5/E\$8 | =СРЗНАЧ(B13:E13) | =МУМНОЖ(B5:E5;\$F\$12:\$F\$15)/F13 |
| 14 | =C6/C\$8 | =D6/D\$8 | =E6/E\$8 | =СРЗНАЧ(B14:E14) | =МУМНОЖ(B6:E6;\$F\$12:\$F\$15)/F14 |
| 15 | =C7/C\$8 | =D7/D\$8 | =E7/E\$8 | =СРЗНАЧ(B15:E15) | =МУМНОЖ(B7:E7;\$F\$12:\$F\$15)/F15 |
| 16 | | | | ИС = | =(СРЗНАЧ(G12:G15) - 4)/3 |
| 17 | | | | | |
| 18 | | | | ИР = | 0,9 |
| 19 | | | | | |
| 20 | | | | согласованности = | =G16/G18 |

Рис. 8. Коэффициент согласованности для весов критериев

Оказалось, что показатель сложности и надежности математических алгоритмов имеет наибольший вес (52,5% в ячейке F14), за ним идет стоимость (30,4% в ячейке F12). Приятно, что меры согласованности оказались близки к 4, поэтому индекс согласованности и коэффициент согласованности близки к нулю.

Последний шаг состоит в вычислении взвешенных средних оценок для каждого варианта решения и применении полученных результатов для принятия решения о том, у какого поставщика будет куплено новое программное обеспечение. Заключительные вычисления сделаны на листе Сравнение в той же самой рабочей книге (рис. 9). На основании полученных результатов можно сделать вывод, что компания RTC (показатель 0,378 в ячейке C8) несколько превосходит компанию PSS (0,376 в ячейке D8), а компания ЕС от них заметно отстала.

| | A | B | C | D | E |
|---|------------------------------------|-------------|------------|------------|-----------|
| 1 | <i>Рейтинги</i> | | | | |
| 2 | <i>Критерии</i> | <i>Веса</i> | <i>RTC</i> | <i>PSS</i> | <i>EC</i> |
| 3 | Стоимость | 0,304 | 0,315 | 0,082 | 0,602 |
| 4 | Обслуживание | 0,052 | 0,341 | 0,593 | 0,065 |
| 5 | Сложность | 0,525 | 0,455 | 0,455 | 0,091 |
| 6 | Адаптация | 0,120 | 0,221 | 0,685 | 0,093 |
| 7 | | | | | |
| 8 | <i>Взвешенные ср. рейтинги</i> | | 0,378 | 0,376 | 0,245 |

| | B | C | D | E |
|---|----------------------------------|-------------------|----------------------------------|----------------------------------|
| 2 | <i>Веса</i> | <i>RTC</i> | <i>PSS</i> | <i>EC</i> |
| 3 | =ВесalF12 | =Стоимость!E12 | =Стоимость!E13 | =Стоимость!E14 |
| 4 | =ВесalF13 | =Обслуживание!E12 | =Обслуживание!E13 | =Обслуживание!E14 |
| 5 | =ВесalF14 | =Сложность!E12 | =Сложность!E13 | =Сложность!E14 |
| 6 | =ВесalF15 | =Адаптация!E12 | =Адаптация!E13 | =Адаптация!E14 |
| 7 | | | | |
| 8 | =СУММПРОИЗВ(\$B\$3:\$B\$6;C3:C6) | | =СУММПРОИЗВ(\$B\$3:\$B\$6;D3:D6) | =СУММПРОИЗВ(\$B\$3:\$B\$6;E3:E6) |

Рис. 9. Взвешенное среднее рейтингов с использованием весов

Практическая работа №2

Тема: Принятие решений при многих критериях с помощью метода анализа иерархий

Цель: Приобрести навыки решения многокритериальных задач с использованием пакета MS Excel.

Порядок выполнения работы:

1) *Задание 1:* определение наилучшей альтернативы с помощью метода анализа иерархий (МАИ)

6. Изучение примера.
7. Построение иерархии «цели—критерии—альтернативы».
8. Парное сравнение критериев, перевод результатов сравнений в численную форму. Нормализация и проверка согласованности суждений с помощью пакета MS Excel.
9. Парное сравнение оценок альтернатив по каждому из критериев. Нормализация и проверка согласованности суждений с помощью пакета MS Excel.
10. Вычисление вектора приоритетов по каждому из критериев.
11. Определение наилучшей альтернативы.

2) *Задание 2:* выбор покупки

1. выбор покупки с помощью рейтинга приоритетов.
2. выбор покупки с помощью МАИ.

3) Составление отчёта по лабораторной работе, в котором представляется:

- формулировка индивидуального задания;
- иерархия «цели—критерии—альтернативы»;
- снимки экрана монитора, содержащие матрицы сравнений критериев и альтернатив, вычисление векторов приоритетов, проверку согласованности и определение наилучшей альтернативы;

- выводы по заданию.

Варианты заданий 1

Вариант 1

Нужно произвести выбор секретаря из девушек, подавших резюме. Отбор девушек происходит по пяти критериям:

1. Знание делопроизводства.
2. Внешний вид.
3. Знание английского языка.
4. Знание компьютера.
5. Умение разговаривать по телефону.

Собеседование прошли пять девушек:

1. Ольга
2. Елена
3. Светлана
4. Галина
5. Жанна

После собеседования получились следующие описания девушек:

1. Ольга. Приятная внешность. Отличное знание английского языка. Хорошее поведение. Нет навыков работы на компьютере, посредственное общение по телефону.

2. Елена. Красивая, приятная внешность, хорошее умение общаться по телефону. Незнание английского языка, нет навыков работы на компьютере, делопроизводство знает весьма плохо.

3. Светлана. Очень хорошее знание делопроизводства, хорошие навыки работы на компьютере, достаточно хорошо общается по телефону, очень исполнительная. Не очень приятная внешность, посредственное знание английского языка.

4. Галина. Достаточно хорошо знает делопроизводство, неплохие навыки работы на компьютере, по телефону общается на высоком уровне, достаточно хорошее поведение. Плохое знание английского языка, неприятная внешность.

5. Жанна. Приятная внешность, очень хорошее поведение, неплохие навыки работы на компьютере, достаточно хорошее знание английского языка. По телефону общается плохо, не знает делопроизводство.

Вариант 2

Джек выбирает университет, в котором бы он хотел получить высшее образование. Он остановился на двух из них: Гарварде и Стэнфорде и определил такие критерии выбора университета: размер стипендии, престиж университета, стоимость жизни и достоинства города, где находится университет.

Стипендия в Гарварде немного выше, чем в Стэнфорде. Престиж обоих университетов примерно одинаков. Стоимость жизни в Гарварде заметно дешевле, но зато достоинства города, где расположен Стэнфорд заметно выше.

Достоинства города, где расположен университет, для Джека немного более важны, чем стоимость жизни в нем. В свою очередь, престиж университета немного важнее, по

сравнению с городскими красотами. А вот размер стипендии значит гораздо больше даже по сравнению с престижем.

В какой университет вы посоветуете поступить Джеку? Чему равны средние рейтинги университетов по критерию престижа? Чему равны средние веса критериев?

Вариант 3

Необходимо выбрать один из вариантов программного обеспечения (ПО) для создания интернет-магазина. Пусть существуют два варианта такого ПО: А и Б. В качестве критериев отбора ПО принимаются:

1. Стоимость.
2. Сопровождение разработчиками.
3. Пользовательский интерфейс.
4. Предоставляемые функции.

Сопровождение разработчиками (например, бесплатная тех. поддержка, обучение персонала) при выборе ПО оцениваются как заметно более важные по сравнению с характеристиками пользовательского интерфейса. Еще более важным критерием являются предоставляемые ПО возможности (функции). Но основным при принятии решения все же является стоимость.

Предположим, А — это дорогая система с широким набором пользовательских функций, удобным пользовательским интерфейсом, сопровождаемая разработчиками а система Б — простая и недорогая разработка.

Покупка какого ПО будет более предпочтительной в соответствии с указанными критериями?

Вариант 4

Решив купить автомобиль, человек сузил свой выбор до трех моделей: *Mercedes*, *Mitsubishi* и *Honda*. Факторами, влияющими на его решение, являются: стоимость автомобиля (С), стоимость обслуживания (О), стоимость поездки по городу (Г) и сельской местности (М). Следующая таблица содержит необходимые данные, соответствующие трехгодичному сроку эксплуатации автомобиля.

| Модель автомобиля | С (долл.) | О (долл.) | Г (долл.) | М (долл.) |
|----------------------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| <i>Mercedes</i> | 62000 | 1800 | 4500 | 1500 |
| <i>Mitsubishi</i> | 35000 | 1200 | 2250 | 750 |
| <i>Honda</i> | 40000 | 600 | 1125 | 600 |

Наиболее существенными критериями при принятии решения являются стоимость автомобиля и стоимость его обслуживания. Поездки по сельской местности совершаются редко сравнительно с поездками по городу.

Используйте указанные стоимости для построения матриц сравнений. Оцените согласованность матриц и определите модель автомобиля, которую следует выбрать.

Вариант 5

Gert's Sports — быстро развивающаяся сеть спортивных магазинов на Восточном побережье США. Владелец сети Боб Гертц скопил солидный капитал, чтобы открыть новые магазины в районе Чикаго. Для снабжения новых магазинов компании Гертца потребуются расширить склады. За поддержкой он может обратиться к услугам одной из трех финансовых компаний. У каждой из них есть свои преимущества в условиях кредита и обслуживании клиентов Боб оценил рейтинги этих компаний:

Рейтинги по условиям кредита

| | Big Bank | Little Bank | US Bucks |
|-------------|----------|-------------|----------|
| Big Bank | 1 | 2 | 0,143 |
| Little Bank | 0,5 | 1 | 6 |
| US Bucks | 7 | 0,167 | 1 |

Рейтинги по обслуживанию клиентов

| | Big Bank | Little Bank | US Bucks |
|-------------|----------|-------------|----------|
| Big Bank | 1 | 0,25 | 1 |
| Little Bank | 4 | 1 | 0,5 |
| US Bucks | 1 | 2 | 1 |

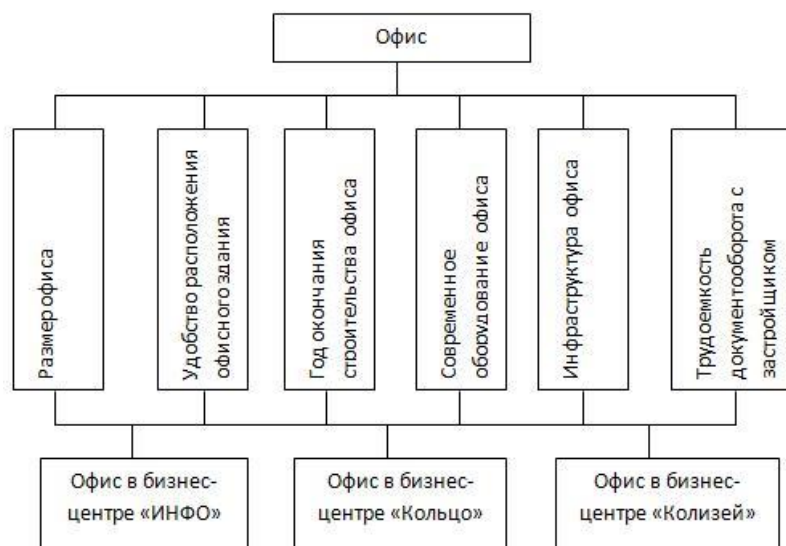
С помощью МАИ определите единственный источник финансирования для компании Гертца. Определите согласованность рейтингов.

Вариант 6

Индивидуальный предприниматель решил купить (или построить по договору со строительной компанией) нежилое помещение (офис), чтобы потом сдавать его в аренду. На рынке предлагаются три альтернативы с приблизительно одинаковой стоимостью (в целях исключения очевидного фактора предпочтения, хотя и не обязательно). У каждой альтернативы есть свои преимущества и недостатки по выделенным предпринимателем критериям:

- размеры офиса (площадь);
- удобство расположения офисного здания;
- год окончания строительства офиса;
- современное оборудование офиса (цифровая телефонная линия, высокоскоростной Интернет и др.);
- инфраструктура офиса (парковка, охрана, пункты питания, фитнеса и т.п.);
- трудоемкость документооборота с застройщиком.

Задача заключается в выборе одного из трех вариантов офиса, который наиболее полно удовлетворяет потребности предпринимателя.



Наиболее важными при оценки недвижимости предприниматель полагает удобство расположения офисного здание и инфраструктуру офиса. Менее важными он считает размеры офиса и его оборудование. Однако размеры офиса заметно важнее при принятии решения, по сравнению с трудоёмкостью документооборота и годом окончания строительства офиса.

При парной оценке трех вариантов по каждому из критериев были получены следующие матрицы сравнения

Размер офиса

| | ИНФО | Кольцо | Колизей |
|---------|------|--------|---------|
| ИНФО | 1 | 2 | 1/3 |
| Кольцо | 1/2 | 1 | 1/5 |
| Колизей | 3 | 5 | 1 |

Удобство расположения

| | ИНФО | Кольцо | Колизей |
|---------|------|--------|---------|
| ИНФО | 1 | 1 | 2 |
| Кольцо | 1 | 1 | 3 |
| Колизей | 1/2 | 1/3 | 1 |

Год окончания строительства

| | ИНФО | Кольцо | Колизей |
|---------|------|--------|---------|
| ИНФО | 1 | 1/5 | 1/7 |
| Кольцо | 5 | 1 | 1/3 |
| Колизей | 7 | 3 | 1 |

Современное оборудование офиса

| | ИНФО | Кольцо | Колизей |
|---------|------|--------|---------|
| ИНФО | 1 | 4 | 5 |
| Кольцо | 1/4 | 1 | 5 |
| Колизей | 1/5 | 1/5 | 1 |

Инфраструктура офиса

| | ИНФО | Кольцо | Колизей |
|---------|------|--------|---------|
| ИНФО | 1 | 1/2 | 3 |
| Кольцо | 2 | 1 | 3 |
| Колизей | 1/3 | 1/3 | 1 |

Трудоёмкость документооборота

| | ИНФО | Кольцо | Колизей |
|---------|------|--------|---------|
| ИНФО | 1 | 5 | 3 |
| Кольцо | 1/5 | 1 | 3 |
| Колизей | 1/3 | 1/3 | 1 |

Являются ли полученные оценки согласованными?

Вариант 7

Gert's Sports — быстро развивающаяся сеть спортивных магазинов на Восточном побережье США. Владелец сети Боб Герц скопил солидный капитал, чтобы открыть новые магазины в районе Чикаго. Он может построить магазины трех типов: супермаркеты, торговые центры и Интернет-магазин. Постройка одного супермаркета стоит \$3,5 млн., в нем работает

150 человек, постройка торгового центра стоит \$1,7 млн., в нем работает 65 человек, открытие интернет-магазина стоит \$1 млн. и в нем занято 50 человек. Ожидаемая прибыль для супермаркета, торгового магазина и интернет-магазина составляет 1, 0,5 и 1 млн. долл. соответственно.

Гертц может вложить в открытие магазинов до \$10 млн. При этом он хочет добиться максимального дохода с учетом своих предпочтений относительно количества занятых сотрудников. Оцените ситуацию с помощью МАИ. Предполагается, что учитываются два критерия — доход и количество занятых. Рейтинги по обоим критериям, данные Бобом, приведены в таблицах ниже.

Количество магазинов каждого типа ограничено демографическими факторами региона: интернет-магазинов может быть не более одного, супермаркетов — не более трех, а торговых центров — не более семи.

Рейтинг доходности

| | Супермаркет | Торговый центр | Интернет-магазин |
|------------------|-------------|----------------|------------------|
| Супермаркет | 1 | 0,25 | 0,142857 |
| Торговый центр | 4 | 1 | 0,2 |
| Интернет-магазин | 7 | 5 | 1 |

Рейтинг по количеству занятых

| | Супермаркет | Торговый центр | Интернет-магазин |
|------------------|-------------|----------------|------------------|
| Супермаркет | 1 | 0,25 | 0,3333 |
| Торговый центр | 4 | 1 | 0,5 |
| Интернет-магазин | 3 | 2 | 1 |

На основании данных рейтингов найдите наилучшие решения по строительству магазинов. Оцените согласованность рейтингов.

Вариант 8

Gert's Sports — быстро развивающаяся сеть спортивных магазинов на Восточном побережье США. Владелец сети Боб Гертц ищет поставщиков хоккейного снаряжения. Он ожидает резкого повышения уровня продаж в связи с необычно холодной зимой. Он пришел к выводу, что при выборе поставщика нужно исходить из его способности обеспечить своевременную доставку заказа. Рейтинги четырех возможных поставщиков Боб оценил так

| | Sticks Supply | Puck's House | Rinks Inc. | Goal Tenders |
|---------------|---------------|--------------|------------|--------------|
| Sticks Supply | 1 | 3 | 1 | 0,5 |
| Puck's House | 0,33333 | 1 | 0,5 | 0,25 |
| Rinks Inc. | 1 | 2 | 1 | 1 |
| Goal Tenders | 2 | 4 | 1 | 1 |

Методом МАИ выберите двух лучших поставщиков. Был ли Боб последователен при составлении рейтингов?

Вариант 9

Отдел кадров фирмы сузил поиск будущего сотрудника до трех кандидатур: Стива (S), Джейн (J) и Майлса (M). Конечный отбор основан на трех критериях: собеседование (C), опыт работы (O) и рекомендации (P).

Отдел кадров полагает, что наиболее важным критерием при приеме на работу являются рекомендации с предыдущих мест работы. Немного уступают ему по важности результаты собеседования с претендентом. Опыт работы по сравнению с рекомендациями имеет существенно меньшую важность.

После проведенного собеседования с тремя претендентами, сбора данных, относящихся к опыту их работы и рекомендациям, построены матрицы A_C , A_O и A_P . Какого из трех кандидатов следует принять на работу? Оцените согласованность данных.

$$A_C = \begin{matrix} & \begin{matrix} S & J & M \end{matrix} \\ \begin{matrix} S \\ J \\ M \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ \frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{4} & 5 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}, \quad A_O = \begin{matrix} & \begin{matrix} S & J & M \end{matrix} \\ \begin{matrix} S \\ J \\ M \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} & 2 \\ 3 & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 2 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}, \quad A_P = \begin{matrix} & \begin{matrix} S & J & M \end{matrix} \\ \begin{matrix} S \\ J \\ M \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 2 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

Вариант 10

Кевин и Джун (*K* и *J*) покупают новый дом. Рассматриваются три варианта — А, Б и С. Кевин и Джун согласовали два критерия для выбора дома: площадь зеленой лужайки (*L*) и близость к месту работы (*B*), а также разработали матрицы сравнений, приведенные ниже. Необходимо оценить три дома в порядке их приоритета и вычислить коэффициент согласованности каждой матрицы.

$$A_{KB} = \begin{matrix} & \begin{matrix} K & J \end{matrix} \\ \begin{matrix} K \\ J \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}, \quad A_{KL} = \begin{matrix} & \begin{matrix} L & B \end{matrix} \\ \begin{matrix} L \\ B \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}, \quad A_{JB} = \begin{matrix} & \begin{matrix} L & B \end{matrix} \\ \begin{matrix} L \\ B \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ \frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix} \end{matrix},$$

$$A_{KL} = \begin{matrix} & \begin{matrix} A & B & C \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{2} & 1 & 2 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}, \quad A_{KB} = \begin{matrix} & \begin{matrix} A & B & C \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{3} \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix},$$

$$A_{JL} = \begin{matrix} & \begin{matrix} A & B & C \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ \frac{1}{4} & 1 & 3 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}, \quad A_{LB} = \begin{matrix} & \begin{matrix} A & B & C \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

Задание 2

Предлагается выбрать покупку с помощью

а) рейтинга приоритетов;

б) с помощью МАИ. Для этого необходимо:

1. Сформулировать критерии выбора.

2. Определить и обосновать рейтинги альтернатив по каждому критерию.

Оценить их согласованность.

3. Определить рейтинг критериев. Оценить их согласованность.

4. Выбрать наиболее предпочтительное решение.

Количество критериев должно быть не меньше трех. Количество вариантов решений (товаров) — не меньше четырех (указать марки). Схема решения аналогична заданию 1.

Примеры товаров для выбора:

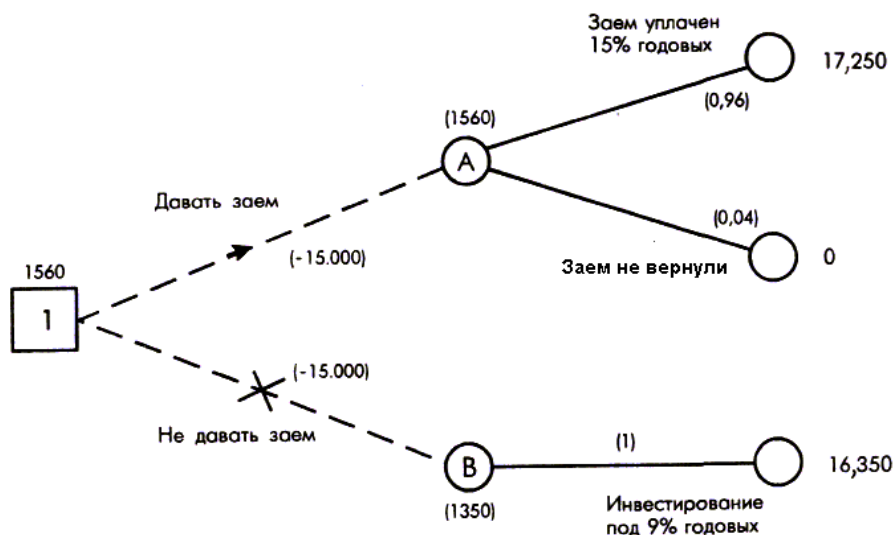
1. Стиральная машина
2. Телевизор
3. mp3-плеер
4. Мобильный телефон
5. Автомобиль
6. Кухонная плита
7. Кухонный комбайн
8. Ноутбук
9. Холодильник
10. Микроволновая печь
11. Цифровой фотоаппарат
12. DVD-плеер
13. Лазерный принтер
14. Сканер
15. Монитор

3. Принятие решений в условиях риска

К задачам принятия решений в условиях риска, относятся задачи, исходные данные в которых можно описать с помощью вероятностных распределений. В подобных моделях термин *риск* имеет вполне определенный смысл: рассматривается несколько состояний природы, и мы можем сделать *предположения о вероятностях наступления каждого возможного состояния природы*.

Если решение принимается в условиях риска, то стоимости альтернатив обычно описываются вероятностными распределениями. Т.е. прибыль (затраты), связанная с каждым альтернативным решением, является случайной величиной (вернут или вернут кредит: в одном случае мы получим прибыль, в другом — убытки). Поэтому в качестве критерия принятия решения используется *ожидаемое значение стоимости* — математическое ожидание (М). Все альтернативы сравниваются с точки зрения максимизации ожидаемой прибыли или минимизации ожидаемых затрат.

Пример 1. Для финансирования проекта бизнесмену нужно занять сроком на один год 15000 долл. Банк может одолжить ему эти деньги под 15% годовых или вложить в дело со 100%-ным возвратом суммы, но под 9% годовых. Из прошлого опыта банкиру известно, что 4% таких клиентов ссуду не возвращают. Что делать? Давать ему заем или нет?



Построение дерева решений.

- Квадратные "узлы" обозначают места, где принимается решение (из квадрата выходят альтернативы);
- Круглые "узлы" — появление исходов (случайный выбор состояния природы).

Численные значения доходов (исходы) просчитываются, начиная с конца "ветвей", постепенно приближаясь к исходному вопросу.

$$\text{Результат A1} = 15000 + 15\% \text{ от } 15000 = 17250$$

$$\text{Результат A0} = 0$$

$$\text{Результат B1} = 15000 + 9\% \text{ от } 15000 = 16350$$

Чистый доход, получаемый в случае выбора альтернативы А:

$$M(\text{давать заем}) = (17250 * 0,96 + 0 * 0,04) - 15000 = 16500 - 15000 = 1560 \text{ долл.}$$

Выбор альтернативы В дает:

$$M(\text{не давать заем}) = (16350 * 1,0 - 15000) = 1350 \text{ долл.}$$

Поскольку ожидаемый чистый доход больше для альтернативы А, то принимаем решение выдать заем.

Анализ чувствительности. Решения, принимаемые при помощи «дерева», зависят от вероятностей исходов. Чувствительность решения определяется размером изменений вероятности. Выбирая решение, мы должны знать, насколько оно зависит от изменений вероятностей, и, следовательно, насколько можно полагаться на этот выбор.

Проанализируем чувствительность в только что рассмотренном примере. Ожидаемые чистые доходы в «узлах» А и В довольно близки: 1560 и 1350 долл. Выбор решения зависит от значения вероятностей. Анализ чувствительности позволяет нам вычислить «разброс» вероятностей, которые меняют наш выбор.

Обозначим вероятность «невозврата» займа через процесса через p . Тогда вариант А дает чистый доход

$$17250*(1-p) + 0*p - 15000 = 2250 - 17250*p$$

Вариант В дает чистый доход 1350 долл. Уравнение этих результатов дает:

$$2250 - 17250*p = 1350 \Rightarrow p = 900/17250 = 0,052$$

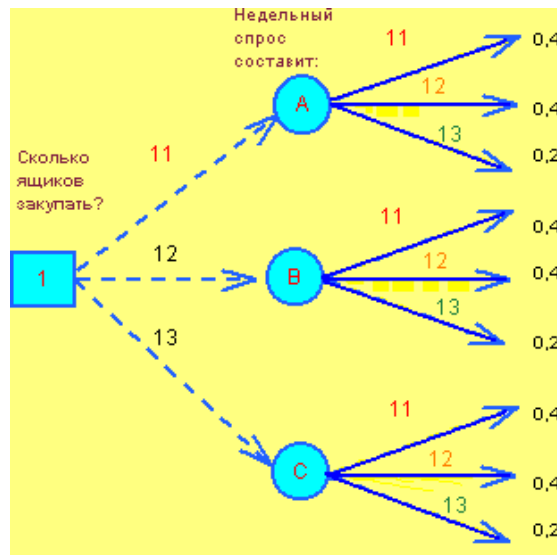
Поскольку результат $p \approx 0,05$ оказался близок к $p \approx 0,04$, это показывает, что выбор решения очень чувствителен к расчетам величины вероятности, и малейшая ошибка может привести к смене выбора. Что показывает важность анализа чувствительности в процессе принятия решений.

Пример 2. Посредническая фирма еженедельно закупает и распространяет химические реактивы для фотолабораторий. Стоимость закупки ящика составляет 50 долл., прибыль от продажи ящика — 80 долл. Статистика исследования спроса приведена в таблице.

| Недельный спрос, ящиков | Вероятность |
|-------------------------|-------------|
| 11 | 0,4 |
| 12 | 0,4 |
| 13 | 0,2 |

Если закупленный ящик остался непроданным, фирма несет убыток 50 долларов. Определить размер запаса, который целесообразно создать фирме. Изменится ли решение, если неудовлетворенный спрос клиента будет оценен в 45 долларов?

Дерево решений запишется в виде



Итоговая таблица решения задачи в Excel имеет вид

| | | | Вероятность спроса | Закупка | Спрос | Продано | Не продано | Неудовл. спрос | Ожидаемый чистый доход | То же, с учетом неудовл. спроса |
|--------------------------|----|-----|--------------------|---------|-------|---------|------------|----------------|------------------------|---------------------------------|
| Сколько ящиков закупать? | A | 11 | 0.4 | 11 | 11 | 11 | 0 | 0 | 330 | 330 |
| | | 12 | 0.4 | 11 | 12 | 11 | 0 | 1 | 330 | 285 |
| | | 13 | 0.2 | 11 | 13 | 11 | 0 | 2 | 330 | 240 |
| | | | | | | | | | 330 | 294 |
| | B | 11 | 0.4 | 12 | 11 | 11 | 1 | 0 | 280 | 280 |
| | | 12 | 0.4 | 12 | 12 | 12 | 0 | 0 | 360 | 360 |
| | | 13 | 0.2 | 12 | 13 | 12 | 0 | 1 | 360 | 315 |
| | | | | | | | | | 328 | 319 |
| | C | 11 | 0.4 | 13 | 11 | 11 | 2 | 0 | 230 | 230 |
| 12 | | 0.4 | 13 | 12 | 12 | 1 | 0 | 310 | 310 | |
| 13 | | 0.2 | 13 | 13 | 13 | 0 | 0 | 390 | 390 | |
| | | | | | | | | 294 | 294 | |
| Стоимость закупки | 50 | | | | | | | | | |
| Стоимость продажи | 80 | | | | | | | | | |
| Штраф за неудовл. спрос | 45 | | | | | | | | | |

Ожидаемый чистый доход максимален при выборе альтернативы А (330 долл.). С учетом штрафов за неудовлетворенный спрос максимальный чистый доход дает альтернатива В (319 долл.).

Пример 3. Банк решает вопрос, проверять ли конкурентоспособность клиента, перед тем, как выдавать заем. Аудиторская фирма берет с банка 80 ф. ст. за проверку. В результате этого перед банком встают две проблемы: первая проводить или нет проверку, вторая — выдавать после этого заем или нет.

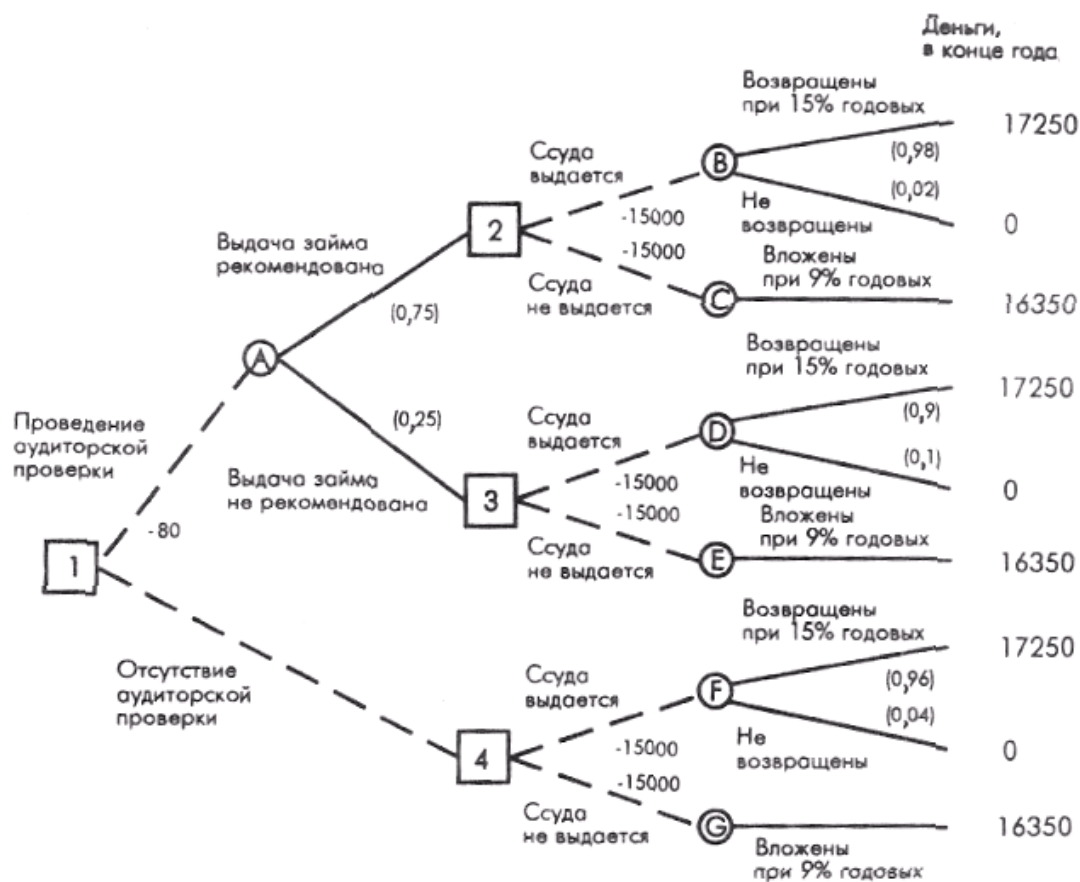
Решая первую проблему, банк проверяет правильность выдаваемых аудиторской фирмой сведений. Для этого выбираются 1000 человек, которые были проверены и которым впоследствии выдавались ссуды.

Рекомендации аудиторской фирмы и возврат ссуды

| Рекомендации после проверки кредитоспособности | Фактический результат | | Всего |
|---|------------------------|---------------------------|-------|
| | Клиент ссуду вернул | Клиент ссуду не вернул | |
| Давать ссуду | 735 | 15 | 750 |
| Не давать ссуду | 225 | 25 | 250 |
| | 960 | 40 | 1000 |

Решение задачи состоит из следующих этапов.

Этап. 1. Строим дерево решений (см. ниже).



Этап 2. Используя данные таблицы, вычислим вероятности каждого исхода:

- P (клиент ссуду вернет; фирма рекомендовала) = $735/750 = 0,98$;
- P (клиент ссуду не вернет; фирма рекомендовала) = $15/750 = 0,02$;
- P (клиент ссуду вернет; фирма не рекомендовала) = $225/250 = 0,9$;
- P (клиент ссуду не вернет; фирма не рекомендовала) = $25/250 = 0,1$.

Этап 3. Слева направо проставим денежные исходы каждого из «узлов», используя результаты, вычисленные ранее. Любые встречающиеся расходы вычитаем из ожидаемых доходов. Таким образом подсчитываем все «дерево». После того, как пройдены квадраты «решений», выбирается «ветвь», ведущая к наибольшему из возможных при данном решении ожидаемому доходу.

Сначала посмотрим на кружки исходов В и С, являющиеся следствием квадрата 2 (выдавать ли заем клиенту?)

Доход, ожидаемый от исхода В: $M(B) = 17250 \text{ долл.} \times 0,98 + 0 \times 0,02 = 16905 \text{ долл.}$;
чистый ожидаемый доход: $NM(B) = 16905 - 15000 = 1905 \text{ долл.}$

Доход, ожидаемый от исхода С: $M(C) = 16350 \text{ долл.} \times 1,0 = 16350 \text{ долл.}$; чистый ожидаемый доход: $NM(C) = 16350 - 15000 = 1350 \text{ ф. ст.}$

Предположим, что мы сейчас в квадрате 2. Максимальный ожидаемый доход 1905 долл. достигается в кружке В, поэтому принимаем решение выдать заем.

Приняв решение, корректируем «дерево», проставив чистый ожидаемый доход 1905 долл. над квадратом 2. «Ветвь» «не давать заем» зачеркивается.

То же самое делаем с кружками исходов D и E. Доход, ожидаемый от исхода D: $M(D) = (17250 \text{ долл.} \times 0,9) + (0 \times 0,1) = 15525 \text{ долл.}$; чистый ожидаемый доход: $NM(D) = 15525 - 15000 = 525 \text{ долл.}$

Аналогично для исхода E: $M(E) = 16350 \text{ долл.} \times 1,0 = 16350 \text{ долл.}$; чистый ожидаемый доход: $NM(E) = 16350 - 15000 = 1350 \text{ долл.}$

Если бы мы были в квадрате 3, то максимальный ожидаемый доход был бы равен 1350 долл. и можно было бы принять решение не выдавать заем.

Наконец приступаем к расчету кружков исходов F и G, которые являются результатами решения 4.

$M(F) = 17250 \text{ долл.} \times 0,96 + 0 \times 0,04 = 16560 \text{ долл.}$;

$NM(F) = 16560 - 15000 = 1560 \text{ долл.}$;

$M(G) = 16350 \text{ долл.} \times 1,0 = 16350 \text{ долл.}$;

$NM(G) = 16350 - 15000 = 1350 \text{ долл.}$

В квадрате 4 максимальный ожидаемый чистый доход составляет 1560 долл., и поэтому принимаем решение выдать клиенту ссуду. Сумма 1560 долл. надписывается над квадратом 4, а альтернативная «ветвь» перечеркивается.

Теперь вернемся к «узлам» А и 1. Используя ожидаемые чистые доходы над квадратами 2 и 3, рассчитаем математическое ожидание для кружка А:

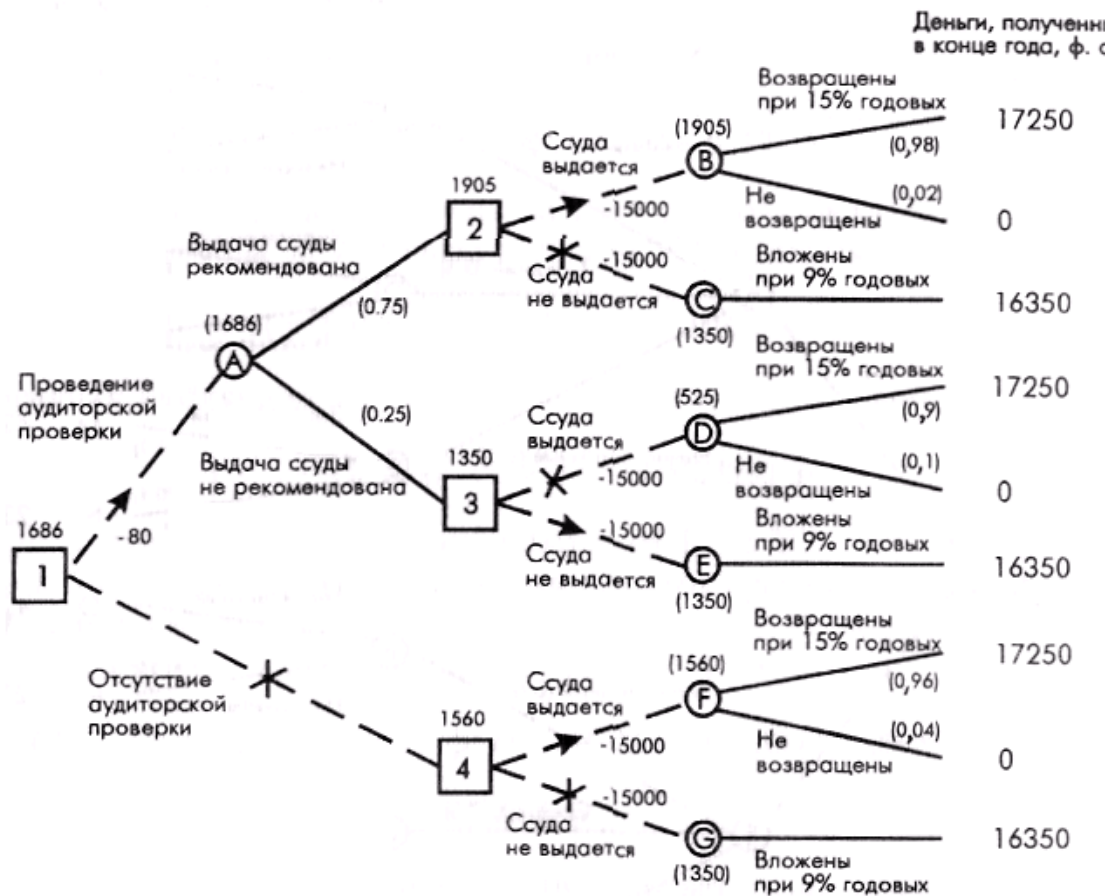
$M(A) = (1905 \text{ долл.} \times 0,75) + (1350 \text{ долл.} \times 0,25) = 1766 \text{ долл.}$

Так как аудиторская проверка стоит 80 долл., ожидаемый чистый доход составит:

$NM(A) = 1766 - 80 = 1686 \text{ долл.}$

Теперь можно проставить значения первого решения квадрата 1. Должен ли банк воспользоваться аудиторской проверкой? В этом «узле» максимальное математическое ожидание — 1686 долл., поэтому перечеркиваем альтернативную «ветвь».

На рис. ниже стрелками показана последовательность решений, ведущая к максимальному чистому доходу: в квадрате 1 воспользуемся аудиторской проверкой. Если выдача займа рекомендуется фирмой, тогда в квадрате 2 — выдать ссуду, если не рекомендуется, то в квадрате 3 — не выдавать ссуду, а инвестировать эти деньги под стабильные 9% годовых.



Построение индивидуальной функции полезности. В предыдущих примерах платежи выражались в виде реальных денег. Зачастую возникают ситуации, когда при анализе следует использовать скорее «полезность», чем реальную величину платежей. Для демонстрации этого предположим следующее. Существует шанс 50 на 50, что инвестиция в 20 000 долл. или принесет прибыль в 40 000 долл., или будет полностью потеряна. Соответствующая ожидаемая прибыль равна

$$40\,000 \times 0,5 - 20\,000 \times 0,5 = 10\,000 \text{ долл.}$$

Хотя ожидается прибыль в виде чистого дохода, разные люди могут по-разному интерпретировать полученный результат. Инвестор, который идет на риск (или миллионер), может вложить деньги, чтобы с вероятностью 50 % получить прибыль в 40 000 долл. Наоборот, осторожный инвестор (студент?) может не захотеть рисковать потерей 20 000 долл.

Определение полезности является субъективным. Оно зависит от нашего отношения к риску. Рассмотрим, как можно построить функцию полезности отражающую наше отношение к деньгам, например, к риску выиграть или проиграть определенную сумму.

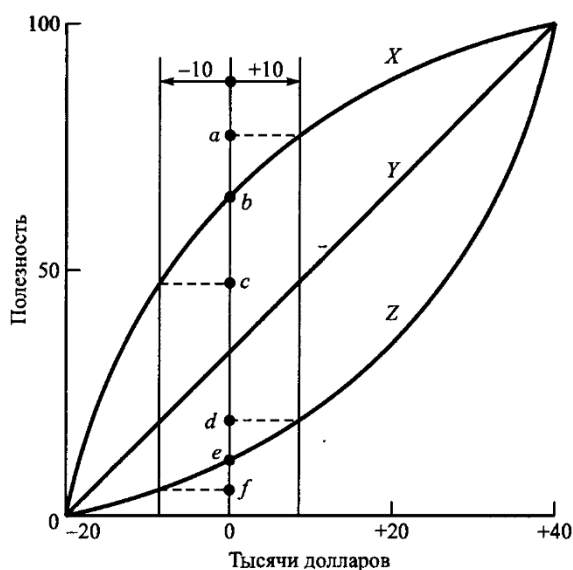
В примере, приведенном выше, наилучший платеж равен 40 000 долл., а наихудший (–20 000) долл. Мы устанавливаем шкалу полезности U (utility), изменяющуюся от 0 до 100, где 0 соответствует полезности –20 000, а 100 — 40 000, т.е. $U(-20\,000) = 0$ и $U(40\,000) = 100$. Разумеется, 0 и 100 как границы шкалы выбраны произвольно

Если отношение ЛПР беспристрастно к риску, то результирующая функция полезности является прямой линией, соединяющей точки (0, –20 000) и (100, 40 000). В этом случае полезность равна денежной оценке результата. В более реальных ситуациях функция

полезности может принимать другой вид. Ниже на рисунке иллюстрируется вид функции полезности для трех индивидуумов X, Y и Z.

X осторожен и не склонен к риску, так как проявляет большую чувствительность к потере, чем к прибыли. Это следует из того, что для индивидуума X при изменении в 10 000 долл. вправо и влево от точки, соответствующей 0 долларов, увеличение прибыли изменяет полезность на величину ab , которая меньше изменения полезности bc , обусловленной потерями такой же величины, т.е. $ab < bc$. Z, наоборот, настроен на риск. Такие же изменения в $\pm 10 000$ долл., обнаруживают противоположное поведение; здесь $de > ef$. А индивидуум Y является нейтральным к риску, так как упомянутые изменения порождают одинаковые изменения полезности.

В общем случае индивидуум может быть, как не расположен к риску, так и настроен на риск, в зависимости от суммы риска. В этом случае соответствующая кривая полезности будет иметь вид удлинённой буквы S.



Определим теперь полезность, соответствующую промежуточным значениям платежей, например, -10 000, 0, 10 000, 20 000 или 30 000. Для определения полезности суммы реальных денег x , будем использовать такую формулу

$$U(x) = p \cdot U(-20000) + (1-p) \cdot U(40000) = 100 \cdot (1-p), \quad 0 < p < 1.$$

Для определения значения $U(x)$ просят ЛПР сообщить свое предпочтение между гарантированной наличной суммой x и возможностью сыграть в лотерею, в которой с вероятностью p реализуется проигрыш в сумме 20000 долл. и с вероятностью $1-p$ имеет место выигрыш в 40000 долл. Под *предпочтением* понимается выбор значения «нейтральной» вероятности p , при котором, с точки зрения лица, принимающего решение, возможности сыграть в лотерею или получить гарантированную сумму x являются одинаково привлекательными. Например, если $x = 10000$ долл., лицо, принимающее решение, может заявить, что гарантированные 10000 долл. наличными и лотерея одинаково привлекательны при $p = 0,3$. В этом случае вычисляется полезность для $x = 10000$ по следующей формуле.

$$U(10000) = 100 \cdot (1 - 0,3) = 70.$$

Эта процедура продолжается до тех пор, пока не будет получено достаточное количество точек $(x, U(x))$ для определения формы функции полезности. Затем можно определить $U(x)$ путем интерполяции между полученными точками.

Практическая работа №3

Тема: Принятие решений в условиях риска

Цель: Приобрести навыки поиска рациональных решений в условиях риска с использованием пакета MS Excel.

Порядок выполнения работы:

- 1) *Задание 1:* определение наилучшей альтернативы в условиях риска
 12. Изучение примеров.
 13. Построение дерева принятия решений или таблицы платежей.
 14. Выбор критерия оценки качества решения (например, максимизация прибыли или минимизация затрат)
 15. Оценка полезности каждого из вариантов решений и выбор наилучшего решения.
 16. Анализ чувствительности полученного решения.
- 2) *Задание 2:* построение индивидуальной функции полезности
 1. Построение собственной функции полезности (в виде графика в MS Excel). Диапазон денежных сумм выбрать по своему усмотрению.
 2. Для сравнения, на том же графике построить прямую, отражающую нейтральное отношение к риску.
 3. Анализ полученной функции на предмет отношения к риску.
- 3) Составление отчёта по лабораторной работе, в котором представляется:
 - формулировка индивидуального задания;
 - дерево принятия решений (таблица платежей);
 - снимки экрана монитора, содержащие результаты расчетов прибылей (затрат) возможных исходов, в соответствии с «деревом» и выводы о выбранном варианте решения;
 - анализ чувствительности принятого решения. Выводы по результатам анализа;
 - снимок экрана с построенной собственной функцией полезности и выводы, касающиеся собственного отношения к риску.

Варианты заданий.

Вариант 1

Вас пригласили на телевизионную игру «Колесо фортуны». Колесо управляется с помощью двух кнопок, которые сообщают ему сильное (В) или слабое (Н) вращение. Само колесо разделено на равные области — белую (Б) и черную (Ч). Вам сообщили, что в белой области колесо останавливается с вероятностью 0,3, а в черной — 0,7. Плата, которую вы получаете за игру, равна (в долл.) следующему. Построить дерево решений. Каково ожидаемое значение прибыли?

| | | |
|---|-------|------|
| | Б | Ч |
| Н | 800 | 200 |
| В | -2500 | 1000 |

Вариант 2

Фермер может выращивать либо кукурузу, либо соевые бобы. Вероятность того, что цены на будущий урожай этих культур повысятся, останутся на том же уровне или понизятся,

равна соответственно 0,25, 0,30 и 0,45. Если цены возрастут, урожай кукурузы даст 30 000 долл. чистого дохода, а урожай соевых бобов — 10 000 долл. Если цены останутся неизменными, фермер лишь покроет расходы. Но если цены станут ниже, урожай кукурузы и соевых бобов приведет к потерям в 35 000 и 5 000 долл. соответственно. Постройте дерево решений. Какую культуру следует выращивать фермеру? Каково ожидаемое значение его прибыли?

Вариант 3

Фирма планирует открыть новое предприятие в Арканзасе. В настоящее время имеется возможность построить либо крупное предприятие, либо небольшое, которое через два года можно будет расширить при условии высокого спроса на выпускаемую им продукцию. Рассматривается задача принятия решений на десятилетний период. Фирма оценивает, что на протяжении этих 10 лет вероятность высокого и низкого спроса на производимую продукцию будет равна 0,75 и 0,25 соответственно. Стоимость немедленного строительства крупного предприятия равна 5 млн. долл., а небольшого — 1 млн. долл.

Расширение малого предприятия через два года обойдется фирме в 4,2 млн. долл. Прибыль, получаемая от функционирования производственных мощностей на протяжении 10 лет, приводится в следующей таблице.

| Альтернатива | Ожидаемый доход за год (тыс. долл.) | |
|--------------------------------------|-------------------------------------|--------------|
| | Высокий спрос | Низкий спрос |
| Крупное предприятие сейчас | 1000 | 300 |
| Небольшое предприятие сейчас | 250 | 200 |
| Расширенное предприятие через 2 года | 900 | 200 |

Постройте соответствующее дерево решений, принимая во внимание, что через два года фирма может либо расширить небольшое предприятие, либо не расширять его. Сформулируйте стратегию строительства для фирмы на планируемый 10-летний период. (Для простоты не принимайте во внимание возможную инфляцию.)

Вариант 4

Допустим, у вас имеется возможность вложить деньги в три инвестиционных фонда открытого типа: простой, специальный (обеспечивающий максимальную долгосрочную прибыль от акций мелких компаний) и глобальный. Прибыль от инвестиции может измениться в зависимости от условий рынка. Существует 10%-ная вероятность, что ситуация на рынке ценных бумаг ухудшится, 50%-ная — что рынок останется умеренным и 40%-ная — что рынок будет возрастать. Следующая таблица содержит значения процентов прибыли от суммы инвестиции при трех возможностях развития рынка.

Постройте дерево решений. Какой фонд открытого типа вам следует выбрать? Какой процент прибыли при этом ожидается?

| Альтернатива (фонды) | Процент прибыли от инвестиции, % | | |
|----------------------|----------------------------------|-----------------|----------------|
| | Ухудшающийся рынок | Умеренный рынок | Растущий рынок |
| Простой | +5 | +7 | +8 |
| Специальный | -10 | +5 | +30 |
| Глобальный | +2 | +7 | +20 |

Вариант 5

Предположим, у вас имеется возможность вложить деньги либо в 7,5%-ные облигации, которые продаются по номинальной цене, либо в специальный фонд, который выплачивает лишь 1% дивидендов. Если существует вероятность инфляции, процентная ставка возрастет до 8%, и в этом случае номинальная стоимость облигаций увеличится на 10%, а цена акций фонда — на 20%. Если прогнозируется спад, то процентная ставка понизится до 6%. При этих условиях ожидается, что номинальная стоимость облигаций поднимется на 5%, а цена акций фонда увеличится на 20%. Если состояние экономики останется неизменным, цена акций фонда увеличится на 8%, а номинальная стоимость облигаций не изменится. Экономисты оценивают в 20% шансы наступления инфляции и в 15% — наступление спада. Ваше решение относительно инвестиций принимается с учетом экономических условий следующего года.

Представьте задачу в виде дерева решений. Будете ли вы покупать акции фонда или облигации? Какая прибыль при этом ожидается?

Вариант 6

Издатель обратился в отдел маркетинга, чтобы выяснить предполагаемый спрос на книгу. Исследования отдела маркетинга показали:

| | | | | |
|---|------|------|------|------|
| <i>Спрос на книгу в ближайшие три года, количество экз.</i> | 2000 | 3000 | 4000 | 5000 |
| <i>Вероятность</i> | 0,1 | 0,5 | 0,2 | 0,2 |

Прибыль от продажи составляет 9 ф. ст. за книгу. Если книга не продается, убытки составляют 4 ф. ст. за штуку. Если издатель не удовлетворяет спрос, убытки по неудовлетворенному спросу составят 1 ф. ст. (для поддержания репутации фирмы и будущего спроса).

Определите, сколько должно быть издано книг в расчете на трехлетний период.

Вариант 7

Фирма планирует производство новой продукции быстрого питания в национальном масштабе. Исследовательский отдел убежден в большом успехе новой продукции и хочет внедрить ее немедленно, без рекламной кампании на рынках сбыта фирмы. Отдел маркетинга положение вещей оценивает иначе и предлагает провести интенсивную рекламную кампанию. Такая кампания обойдется в 100 тыс. долл., а в случае успеха принесет 950 тыс. долл. годового дохода. В случае провала рекламной кампании (вероятность этого составляет 30%) годовой доход оценивается лишь в 200 тыс. долл. Если рекламная кампания не проводится вовсе, годовой доход оценивается в 400 тыс. долл. при условии, что покупателям понравится новая

продукция (вероятность этого равна 0,8), и в 200 тыс. долл. с вероятностью 0,2, если покупатели останутся равнодушными к новой продукции.

Постройте соответствующее дерево решений. Как должна поступить фирма в связи с производством новой продукции?

Вариант 8

Небольшая химическая фирма «Hetros Hetrosone Ltd» выпускает дорогой промышленный растворитель «Hetrosone», который быстро портится. Поэтому запасы «Hetrosone» нельзя держать больше, чем один месяц. Объемы выпуска продукции планируются в начале каждого месяца, и под эти планы закупается необходимое сырье. Продажная цена «Hetrosone» — 2400 ф. ст. за 1 т, производственные расходы — 1500 ф. ст. за 1 т.

Анализируя спрос за последние несколько месяцев, менеджер по сбыту установил, что спрос колеблется между 10 и 20 т в месяц. Для того чтобы упростить анализ спроса, он подразделил его на три типа — «низкий» (10 т), «средний» (15 т) и «высокий» (20 т) с соответствующими вероятностями:

| <i>Спрос, т</i> | <i>Вероятность</i> |
|-----------------|--------------------|
| 10 | 0,3 |
| 15 | 0,6 |
| 20 | 0,1 |

1. Учитывая уровни спроса, составьте «дерево» решений, охватывающее все возможности, открывающиеся перед компанией, а также их исходы.
2. Предположим, уровни спроса не изменяются. Какой объем производства вы бы могли посоветовать, чтобы максимизировать прибыль в долгосрочной перспективе?

Вариант 9

Пекарня печет хлеб на продажу магазинам. Себестоимость одной булки составляет 30 пенсов, ее продают за 40 пенсов. В таблице приведены данные о спросе за последние 50 дней:

| | | | | | |
|-------------------------------|----|----|----|----|----|
| <i>Спрос в день, тыс. шт.</i> | 10 | 12 | 14 | 16 | 18 |
| <i>Число дней</i> | 5 | 10 | 15 | 15 | 5 |

Если булка испечена, но не продана, то убытки составят 20 пенсов за штуку. Определите, сколько булок нужно выпекать в день.

Вариант 10

Фирма производит партии продукции с 0,8, 1, 1,2 и 1,4 % бракованных изделий с вероятностями 0,4, 0,3, 0,25 и 0,05 соответственно. Три потребителя А, В и С заключили контракт на получение партий изделий с процентом некачественных изделий не выше 0,8, 1,2 и 1,4% соответственно. Фирма штрафует в сумме 1000 долл. за каждый пункт процента (одна десятая процента) в случае, если процент некачественных изделий выше указанного. Наоборот, поставка партий изделий с меньшим процентом бракованных изделий, чем

оговорено в контракте, приносит фирме прибыль в 500 долл. за каждый пункт процента. Предполагается, что партии изделий перед отправкой не проверяются.

Постройте соответствующее дерево решений. Какой из потребителей должен иметь наивысший приоритет при получении своего заказа?

Вариант 11

Ежедневный спрос на булочки в продовольственном магазине задается следующим распределением вероятностей.

| | | | | | |
|-------|------|------|------|------|------|
| n | 100 | 150 | 200 | 250 | 300 |
| p_n | 0,20 | 0,25 | 0,30 | 0,15 | 0,10 |

Магазин покупает булочку по 55 центов, а продает по 1,20 долл. Если булочка не продана в тот же день, то к концу дня она может быть реализована за 25 центов. Величина запаса булочек может принимать одно из возможных значений спроса, которые перечислены выше.

Постройте соответствующее дерево решений. Сколько булочек необходимо заказывать ежедневно?

Вариант 12

Компания «Brownhill Manufacturing Company» собирается производить новый товар, для чего нужно будет построить новый завод. После рассмотрения нескольких вариантов были оставлены три основных.

А. Построить завод стоимостью 600000 ф. ст. При этом варианте возможны: большой спрос с вероятностью 0,7 и низкий спрос с вероятностью 0,3. Если спрос будет большим, то ожидается годовой доход в размере 250000 ф. ст. в течение следующих пяти лет; если спрос низкий, то ежегодные убытки из-за больших капиталовложений составят 50000 ф. ст.

Б. Построить маленький завод стоимостью 350000 ф. ст. Здесь также возможны большой спрос с вероятностью 0,7 и низкий спрос с вероятностью 0,3. В случае большого спроса ежегодный доход в течение пяти лет составит 150000 ф. ст., при низком спросе — 25000 ф. ст.

В. Сразу завод не строить, а отложить решение этого вопроса на один год для сбора дополнительной информации, которая может быть позитивной или негативной с вероятностями 0,8 и 0,2 соответственно. Через год, если информация окажется позитивной, можно построить большой или маленький завод по указанным выше ценам. Руководство компании может решить вообще никакого завода не строить, если информация будет негативной. Вне зависимости от типа завода вероятности большого и низкого спроса меняются на 0,9 и 0,1 соответственно, если будет получена позитивная информация. Доходы на последующие четыре года остаются такими же, какими они были в вариантах А и Б.

Все расходы выражены в текущей стоимости и не должны дисконтироваться.

1. Нарисуйте «дерево», охватывающее все возможности, открывающиеся перед компанией.
2. Определите наиболее эффективную последовательность действий руководства фирмы, основываясь на ожидаемых доходах каждого варианта.

4. Теория игр и принятие решений в условиях неопределенности

В теории игр рассматриваются ситуации, связанные с принятием решений, в которых два или более разумных противника имеют конфликтующие цели. Само слово «игра» применяется для обозначения некоторого набора правил и соглашений, составляющих данный вид игры, например: футбол, карточная игра, шахматы. Эти ситуации принятия решений отличаются от рассмотренных ранее, где природа, хотя и могла находиться в различных состояниях, но не преследовала каких-либо целей и, следовательно, не рассматривалась в роли соперника.

В игре заинтересованные стороны называются *игроками*, каждый из которых имеет некоторое множество вариантов выбора (не меньше двух, иначе он фактически не участвует в игре, поскольку заранее известно, что он предпримет). В экономике модель поведения лиц в виде игры возникает, например, при попытке нескольких фирм завоевать наиболее выгодное место на конкурентном рынке, или, например, при желании нескольких лиц (компаний) разделить некоторое количество продукта (ресурса, финансовых средств) между собой так, чтобы каждому досталось как можно больше. Игроками в конфликтных экономических ситуациях, моделируемых в виде игры, являются производственные и непроизводственные фирмы, банки, отдельные люди и другие экономические агенты. В военных приложениях модель игры используется, например, для наилучшего выбора средств (из имеющихся или потенциально возможных) поражения военных целей противника или защиты от его нападения.

Для игр характерна неопределенность результата. Причины или источники неопределенности относятся к трем группам:

- 1) Комбинаторные источники (шахматы);
- 2) Случайные факторы (игра в орлянку, кости, карточные игры, где случаен расклад);
- 3) Неопределенность имеет стратегическое происхождение: игрок не знает, какого рода образа действий придерживается его противник. Здесь неопределенность исходит от другого лица.

Далее мы будем рассматривать игровые модели конфликтов, в которых участвуют два противника, каждый из которых имеет конечное число вариантов выбора решений. С каждой парой решений связан платеж, который один из игроков выплачивает другому (т.е. выигрыш одного игрока равен проигрышу другого). Такие игры принято называть *конечными играми двух лиц с нулевой суммой*.

В игре принимают участие два игрока: А и В. В распоряжении каждого игрока имеется конечное множество вариантов выбора — *стратегий*. Пусть $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ — множество стратегий игрока А, $\{b_1, b_2, \dots, b_m\}$ — множество стратегий игрока В. С каждой парой стратегий связан платеж, который один из игроков выплачивает другому. Т.е., когда игрок А выбирает стратегию a_i (свою i -ю стратегию), а игрок В — стратегию b_j , то результатом такого выбора становится платеж $H(a_i, b_j)$. Поскольку стратегий конечное число, то платежи $H(a_i, b_j)$ образуют матрицу размерности $n \times m$, называемую *матрицей платежей* (или *матрицей игры*). Строки этой матрицы соответствуют стратегиям игрока А, а столбцы — стратегиям игрока В.

Пусть два игрока А и В играют в игру, основанную на подбрасывании монеты. Игроки одновременно и независимо друг от друга выбирают герб (Г) или решку (Р). Если результаты двух подбрасываний монеты совпадают (т.е. ГГ или РР), то игрок А получает один доллар от игрока В. Иначе игрок А платит один доллар игроку В.

Для каждого из игроков возможны 2 варианта результатов: выпадения герба или решки, следовательно матрица платежей имеет размерность 2 x 2.

| | | |
|----|----|----|
| | ВГ | ВР |
| АГ | | |
| АР | | |

Если результаты двух подбрасываний (т.е. подбрасываний монеты игроками А и В) совпадают, то платеж в 1 доллар получает игрок А. Будем строить матрицу игры, с точки зрения игрока А, т.е. его выигрыши оценивать как положительные, а проигрыши — как отрицательные (с точки зрения В все будет наоборот и мы вполне могли бы построить матрицы платежей, ориентируясь на его точку зрения).

| | | |
|----|----|----|
| | ВГ | ВР |
| АГ | 1 | |
| АР | | 1 |

Если результаты подбрасывания различаются, то доллар получает В, значит платеж А равняется -1 доллар. В игре с нулевой суммой выигрыш игрока В равносителен проигрышу игрока А и равен поэтому $-H(a_i, b_j)$.

| | | |
|----|------|------|
| | ВГ | ВР |
| АГ | 1 | -1 |
| АР | -1 | 1 |

Т.о., мы построили матрицу игры, описывающую заданную ситуацию. Предполагается, что матрица игры обоим игрокам известна.

Исход игры зависит от поведения обоих игроков, которое основывается на выборе правильных стратегий игры, т.е. таких вариантов, при которых так платеж данному игроку будет наибольшим. Однако, в отличие от методов оптимизации, в теории игр игрок не может просто стремиться к максимуму, он вынужден считаться с действиями соперника. Существенно, что ни один из партнеров не знает, какую стратегию применит его противник. Таким образом, имеет место ситуация полной неопределенности, при которой теория вероятности также не может помочь игрокам в выборе решения.

Рассмотрим процесс принятия решений обеими сторонами, предполагая, что оба игрока будут действовать рационально. Если игрок А не знает, как поступит его противник, то, действуя наиболее целесообразно и не желая рисковать, он выберет такую стратегию, которая гарантирует ему наибольший из наименьших выигрышей при любой стратегии противника.

| | | | |
|----------------|----------------|----------------|----------------|
| | B ₁ | B ₂ | B ₃ |
| A ₁ | 2 | -3 | 4 |
| A ₂ | -3 | 4 | -5 |
| A ₃ | 4 | -5 | 6 |

Т.е., А предполагает, что В умен и будет вести себя так, чтобы доставить противнику наибольшие неприятности. Тогда, при выборе 1-й стратегии, А может рассчитывать лишь на худший для себя результат -3. При выборе 2-й и 3-й стратегий он может рассчитывать на -5. Из всех возможных стратегий целесообразнее выбрать ту, что принесет максимальный возможный доход (минимальные возможные убытки, как в нашем случае). В нашем случае это стратегия 1.

Принято говорить, что при таком образе действий игрок А руководствуется *принципом максиминного выигрыша*. Этот выигрыш определяется формулой

$$\alpha = \max_i \min_j a_{ij}.$$

Величина α называется *нижней ценой игры, максиминным выигрышем*, или сокращенно *максимином*. Это тот гарантированный минимум, который игрок А может себе обеспечить, придерживаясь наиболее осторожной стратегии.

Очевидно, аналогичное рассуждение можно провести и за игрока В. Так как он заинтересован в том, чтобы обратить выигрыш А в минимум, он должен просмотреть каждую свою стратегию с точки зрения максимального выигрыша при этой стратегии. Поэтому внизу матрицы мы выпишем максимальные значения по каждому столбцу

$$\beta_j = \max_i a_{ij}.$$

Все эти максимумы хороши для А, но крайне неприятны для В. Поскольку противник также учитывает нашу разумность, то выбирает из этих вариантов наименьший

$$\beta = \min_j \max_i a_{ij}$$

— больше этой суммы игрок В точно не потеряет. Величина β называется *верхней ценой игры*, иначе — «минимаксом».

Принцип осторожности, который определяет выбор партнерами стратегий, соответствующих максиминному выигрышу или минимаксному проигрышу, часто называют принципом минимакса, а стратегии, вытекающие из этого принципа, — *минимаксными стратегиями*. Можно доказать, что всегда $\alpha \leq \beta$, чем и объясняются названия "нижняя цена" и "верхняя цена".

| | | | | |
|----------------|----------------|----------------|----------------|------------|
| | B ₁ | B ₂ | B ₃ | α_i |
| A ₁ | 2 | -3 | 4 | - |
| A ₂ | -3 | 4 | -5 | - |
| A ₃ | 4 | -5 | 6 | - |
| β_j | 4 | 4 | 6 | |

Матрица игры в общем виде

| | | | | | |
|--|----------------|----------------|-----|----------------|------------|
| | B ₁ | B ₂ | ... | B _m | α_i |
|--|----------------|----------------|-----|----------------|------------|

| | | | | | |
|-----------|-----------|-----------|-----|-----------|------------|
| A_1 | a_{11} | a_{12} | ... | a_{1m} | α_1 |
| A_2 | a_{21} | a_{22} | ... | a_{2m} | α_2 |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| A_n | a_{n1} | a_{n2} | ... | a_{nm} | α_m |
| β_j | β_1 | β_2 | ... | β_n | |

Нижняя цена игры $\alpha = -3$; верхняя цена игры $\beta = 4$. Наша максиминная стратегия есть A_1 ; применяя ее систематически, мы можем твердо рассчитывать выиграть не менее -3 (проиграть не более 3). Минимаксная стратегия противника есть любая из стратегий B_1 и B_2 , применяя их систематически, он, во всяком случае, может гарантировать, что проигрывает не более 4 . Если мы отступим от своей максиминной стратегии (например, выберем стратегию A_2), противник может нас «наказать» за это, применив стратегию B_3 и сведя наш выигрыш к -5 . Но если противник выберет стратегию B_3 , то мы в свою очередь можем выбрать A_3 и он проигрывает 6 и т.д. Таким образом, положение, при котором оба игрока пользуются своими минимаксными стратегиями, является неустойчивым и может быть нарушено поступившими сведениями о стратегии противной стороны.

Однако существуют некоторые игры, для которых минимаксные стратегии являются устойчивыми. Это те игры, для которых нижняя цена равна верхней:

$$\alpha = \beta$$

Если нижняя цена игры равна верхней, то их общее значение называется *ценой игры*, и обозначают γ .

Например, в игре, матрица которой приведена ниже, верхняя и нижняя цены игры оказываются равными: $\alpha = \beta = \gamma = 0.6$.

Элемент $0,6$, выделенный в платежной матрице, является одновременно минимальным в своей строке и максимальным в своем столбце. В геометрии точку на поверхности, обладающую аналогичным свойством (одновременный минимум по одной координате и максимум по другой), называют *седловой точкой*. По аналогии этот термин применяется и в теории игр. Элемент матрицы, обладающий этим свойством, называется седловой точкой матрицы, а про игру говорят, что она имеет *седловую точку*.

| | | | | | |
|-----------|-------|------------|-------|-------|------------|
| | B_1 | B_2 | B_3 | B_4 | α_i |
| A_1 | 0,4 | 0,5 | 0,7 | 0,3 | 0,3 |
| A_2 | 0,8 | 0,4 | 0,3 | 0,7 | 0,3 |
| A_3 | 0,7 | 0,6 | 0,8 | 0,9 | 0,6 |
| A_4 | 0,7 | 0,2 | 0,4 | 0,6 | 0,2 |
| β_j | 0,8 | 0,6 | 0,8 | 0,9 | |

Для игр с седловой точкой решение игры обладает следующим замечательным свойством. Если один из игроков (например A) придерживается своей оптимальной стратегии, а другой игрок (B) будет любым способом отклоняться от своей оптимальной стратегии, то для игрока, допустившего отклонение, это никогда не может оказаться выгодным. Это утверждение легко проверить на примере рассматриваемой игры с седловой точкой.

В этом случае наличие у любого игрока сведений о том, что противник избрал свою оптимальную стратегию, не может изменить собственного поведения игрока: если он не хочет действовать против своих же интересов, он должен придерживаться своей оптимальной

стратегии. Т.е. пара оптимальных стратегий в игре с седловой точкой является как бы «положением равновесия».

Анализируя матрицу игры, мы пришли к заключению, что если каждому игроку предоставлен выбор одной-единственной стратегии, то в расчете на разумно действующего противника этот выбор должен определяться принципом минимакса. Придерживаясь этой стратегии, мы при любом поведении противника заведомо гарантируем себе выигрыш, равный нижней цене игры α . Возникает естественный вопрос: нельзя ли гарантировать себе средний выигрыш, больший α , если применять не одну-единственную «чистую» стратегию, а чередовать случайным образом несколько стратегий? Такие комбинированные стратегии, состоящие в применении нескольких чистых стратегий, чередующихся по случайному закону с определенным соотношением частот, в теории игр называются *смешанными стратегиями*.

Для матричной игры $n \times m$ обозначим через $P = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ — смешанную стратегию игрока А, где $p_1 \geq 0, p_2 \geq 0, \dots, p_n \geq 0$ и $\sum_{i=1}^n p_i = 1$. Через $Q = (q_1, q_2, \dots, q_m)$ обозначим смешанную стратегию игрока В, где $q_1 \geq 0, q_2 \geq 0, \dots, q_m \geq 0$ и $\sum_{j=1}^m q_j = 1$. Здесь p_1, p_2, \dots, p_n — вероятности использования игроком А в смешанной стратегии своих чистых стратегий a_i . и q_1, q_2, \dots, q_m — вероятности использования игроком В в смешанной стратегии своих чистых стратегий b_j .

Математическое ожидание выигрыша игрока А запишется в виде

$$M(P, Q) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ij} p_i q_j .$$

Смешанная стратегия, которая гарантирует игроку наибольший возможный средний выигрыш (или наименьший возможный средний проигрыш), называется его *оптимальной смешанной стратегией*. Пусть P^* — смешанная стратегия игрока А, Q^* — смешанная стратегия игрока В. Пара смешанных стратегий (P^*, Q^*) , при которой $M(P, Q^*) \leq M(P^*, Q^*) \leq M(P^*, Q)$, называют *седловой точкой игры*, а математическое ожидание выигрыша $\gamma = M(P^*, Q^*)$ — *ценой игры*, причем всегда $\alpha \leq \gamma \leq \beta$.

Общим методом нахождения решения игры любой конечной размерности является ее сведение к задаче линейного программирования. Из основного положения теории игр следует, что при использовании смешанных стратегий такое оптимальное решение всегда существует и цена игры γ находится между верхним и нижним значениями игры ($\alpha \leq \gamma \leq \beta$).

Допустим, что смешанная стратегия игрока А складывается из стратегий a_1, a_2, \dots, a_n с вероятностями p_i (некоторые из значений вероятностей могут быть равны нулю). Оптимальная смешанная стратегия игрока В складывается из стратегий b_1, b_2, \dots, b_m с вероятностями q_j . Условия игры определяются платежной матрицей $H(a_i, b_j)$ с элементами $a_{ij} > 0, i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, m$. Если игрок А применяет оптимальную смешанную стратегию, а игрок В — чистую стратегию b_j , то средний выигрыш игрока А (математическое ожидание выигрыша) составит

$$p_1 a_{1j} + p_2 a_{2j} + \dots + p_n a_{nj}.$$

Игрок А стремится к тому, чтобы при любой стратегии игрока В его выигрыш был не меньше, чем цена игры γ , а сама цена игры была максимальной. Такое поведение игрока А описывается следующей задачей линейного программирования:

$$\gamma \rightarrow \max \text{ (игрок А стремится максимизировать свой выигрыш)}$$

$$p_1 a_{11} + p_2 a_{21} + \dots + p_n a_{n1} \geq \gamma,$$

$$p_1 a_{12} + p_2 a_{22} + \dots + p_n a_{n2} \geq \gamma,$$

...

$$p_1 a_{1m} + p_2 a_{2m} + \dots + p_n a_{nm} \geq \gamma,$$

$$p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1,$$

$$p_i \geq 0, i = 1, \dots, n.$$

Используя обозначения $x_i = p_i/\gamma$ и соотношение $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$, получим $\gamma = 1/(x_1 + x_2 + \dots + x_n)$. Отсюда

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n \rightarrow \min$$

$$a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \dots + a_{n1}x_n \geq 1,$$

$$a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{n2}x_n \geq 1,$$

...

$$a_{1m}x_1 + a_{2m}x_2 + \dots + a_{nm}x_n \geq 1,$$

$$x_i \geq 0, i = 1, \dots, n.$$

Эта задача *всегда* имеет решение $x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*$, получив которое (например, с помощью надстройки Поиск решения MS Excel) можно найти цену игры $\gamma = 1/(x_1^* + x_2^* + \dots + x_n^*)$ и оптимальные значения вероятностей p_1, p_2, \dots, p_n — оптимальную смешанную стратегию игрока А.

Обратите внимание на то, что матрица игры представлена в неравенствах в транспонированном виде.

Поведению игрока В соответствует двойственная задача линейного программирования:

$$y_1 + y_2 + \dots + y_n \rightarrow \max$$

(эквивалентно $\gamma \rightarrow \min$: игрок В стремится минимизировать свой средний проигрыш)

$$a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \dots + a_{1n}y_n \leq 1,$$

$$a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{2n}y_n \leq 1,$$

...

$$a_{m1}y_1 + a_{m2}y_2 + \dots + a_{mn}y_n \leq 1,$$

$$y_j \geq 0, j = 1, \dots, m.$$

Здесь $y_j = q_j/\gamma$.

Если в исходной платежной матрице имеется хотя бы один неположительный элемент, то первым шагом в процедуре сведения игры к задаче линейного программирования должно быть ее преобразование к матрице, все элементы которой строго положительны. Для этого достаточно увеличить все элементы исходной матрицы на одно и то же число

$$d > \max_i \max_j |a_{ij}|, \quad a_{ij} \leq 0.$$

При таком преобразовании матрицы оптимальные стратегии игроков не изменятся. Если исходная матрица увеличивалась на d , то для получения цены первоначальной игры, γ нужно уменьшить на d .

Практическая работа №4

Тема: Теория игр и принятие решений в условиях неопределенности

Цель: Приобрести навыки поиска рациональных решений в условиях неопределенности вызванной конфликтом интересов.

Порядок выполнения работы:

- 1) *Задание 1:* решение игры с заданной матрицей платежей
 4. Изучение теории.
 5. Определение по заданной матрице платежей нижней и верхней цены игры. Существует ли в игре равновесие в чистых стратегиях?
 6. Сведение задачи теории матричных игр к задаче линейного программирования (ЛП)
 7. Решение задачи ЛП с помощью пакета MS Excel (определение цены игры и оптимальной стратегии для каждого из игроков).
- 2) *Задание 2:* решение игры
 17. Изучение примеров.
 18. Построение матрицы платежей.
 19. Сведение задачи теории матричных игр к задаче ЛП
 20. Решение задачи ЛП с помощью пакета MS Excel и ответы на дополнительные вопросы задания.
- 3) Составление отчёта по лабораторной работе, в котором для каждого задания представляется:
 - формулировка задания;
 - снимки экрана монитора, содержащие матрицу игры, формулировку задачи ЛП, найденное решение (цену игры и оптимальные стратегии игроков) и ответы на дополнительные вопросы.

Варианты заданий 1

Вариант 1

| | B1 | B2 | B3 | B4 |
|----|----|----|----|----|
| A1 | 8 | 6 | 2 | 8 |
| A2 | 8 | 9 | 4 | 5 |
| A3 | 7 | 5 | 3 | 5 |

Вариант 2

| | B1 | B2 | B3 | B4 |
|--|----|----|----|----|
| | | | | |

| | | | | |
|----|----|----|----|----|
| A1 | 4 | -4 | -5 | 6 |
| A2 | -3 | -4 | -9 | -2 |
| A3 | 6 | 7 | -8 | -9 |
| A4 | 7 | 3 | -9 | 5 |

Вариант 3

| | | | | |
|----|----|----|----|----|
| | B1 | B2 | B3 | B4 |
| A1 | 1 | 9 | 6 | 0 |
| A2 | -2 | 3 | 8 | 4 |
| A3 | -5 | -2 | 10 | -3 |
| A4 | 7 | 4 | -2 | -5 |

Вариант 4

| | | | | |
|----|----|----|----|----|
| | B1 | B2 | B3 | B4 |
| A1 | -1 | 9 | 6 | 8 |
| A2 | -2 | 10 | 4 | 6 |
| A3 | 5 | 3 | 0 | 7 |
| A4 | 7 | -2 | 8 | 4 |

Вариант 5

| | | | | |
|----|------|-----|------|------|
| | B1 | B2 | B3 | B4 |
| A1 | 0,8 | 0,6 | 0,2 | -0,8 |
| A2 | -0,8 | 0,9 | -0,4 | 0,5 |
| A3 | 1,7 | 0,5 | 0,3 | 0,6 |

Вариант 6

| | | | |
|----|----|----|----|
| | B1 | B2 | B3 |
| A1 | 3 | 6 | 1 |
| A2 | 5 | 2 | 3 |
| A3 | 2 | 2 | -5 |

Вариант 7

| | | | | |
|----|----|----|----|----|
| | B1 | B2 | B3 | B4 |
| A1 | 3 | 7 | 1 | 3 |
| A2 | 4 | 8 | 0 | -6 |
| A3 | 6 | -9 | -2 | 4 |

Вариант 8

| | | | | |
|----|----|----|----|----|
| | B1 | B2 | B3 | B4 |
| A1 | 10 | 40 | 12 | 9 |
| A2 | 17 | 16 | 13 | 14 |
| A3 | 23 | 8 | 10 | 25 |

Вариант 9

| | B1 | B2 | B3 | B4 |
|----|----|----|----|----|
| A1 | -2 | 1 | 9 | -2 |
| A2 | -2 | 5 | 4 | 6 |
| A3 | 3 | 2 | 0 | 0 |
| A4 | 7 | -2 | 8 | 4 |

Вариант 10

| | B1 | B2 | B3 | B4 |
|----|----|----|----|----|
| A1 | -3 | 2 | 9 | 6 |
| A2 | -2 | 5 | 4 | 6 |
| A3 | 5 | 3 | 1 | -5 |
| A4 | 8 | -2 | 8 | 4 |

Вариант 11

| | B1 | B2 | B3 | B4 |
|----|----|----|----|----|
| A1 | -8 | 6 | 0 | 7 |
| A2 | 3 | -1 | 4 | 4 |
| A3 | 5 | 4 | 3 | 4 |

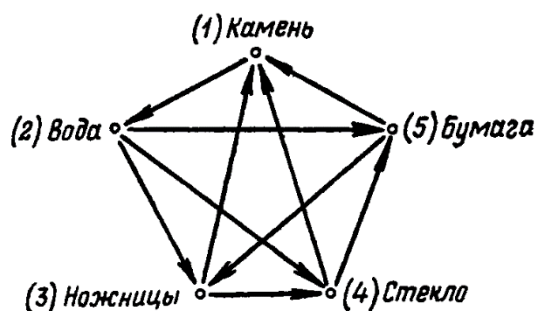
Варианты заданий 2

Вариант 1

По условиям игры «Камень—вода—ножницы—стекло—бумага»:

- вода смачивает камень;
- бумага горит лучше воды;
- ножницы режут бумагу;
- камень разбивает ножницы;
- ножницы стоят дороже, чем вода;
- стекло более хрупкое, чем вода и ножницы;
- камень толще, чем стекло и бумага;
- бумага гибче, чем стекло.

Эти соотношения можно выразить с помощью следующего рисунка, на котором стрелками указаны направления подчинения:



Обозначив выигрыш, проигрыш и ничью соответственно как 1, -1 и 0, постройте платежную матрицу и определите оптимальные стратегии игроков и цену игры.

Вариант 2

Известный актер обдумывает, где бы ему провести в текущем году отпуск. Он рассматривает 6 возможных вариантов: Монте-Карло (МК), Гавайские острова (Г), Багамские острова (Б), Канарские острова (К), Сочи (С), озеро Байкал (ОБ). Единственный критерий для выбора места отдыха — стремление избежать журналистов, которые могут испортить ему отдых. Если они его «выследят», отдых будет испорчен (полезность равна 0). В противном случае, все будет, как запланировано (полезность равна 1). Вследствие различных географических условий, журналисты могут обнаружить актера с определенной (известной) вероятностью: в Монте-Карло с вероятностью 0,34; на Гавайских островах с вероятностью 0,12; на Багамских островах с вероятностью 0,16; на Канарских островах с вероятностью 0,4; в Сочи с вероятностью 0,5; на озере Байкал с вероятностью 0,2.

Опишите данную ситуацию, как игру двух лиц с нулевой суммой (актер — игрок 1, журналисты — игрок 2).

Вычислите цену игры и определите минимаксные стратегии обоих игроков. Чему равна максимальная ожидаемая полезность отпуска актера? С какой вероятностью актер поедет в отпуск на Байкал? Чему равна верхняя цена игры? В каком из мест наиболее вероятно будет отдыхать актер?

Вариант 3

Однажды на «Диком Западе» произошел следующий случай. Группа из пяти индейцев осадила лагерь, охраняемый четырьмя белыми. У лагеря два входа E_1 и E_2 . Белый разведчик установил, что перед входом E_1 находится как минимум один индеец, а перед входом E_2 как минимум два индейца. Расположение других индейцев неизвестно. Командир осажденных может расположить себя и трех солдат у входов E_1 и E_2 . Причем, у каждого входа должен быть как минимум один человек. Предполагается, что численно превосходящая (у каждого входа) группа берет в плен всю группу противника без собственных потерь, в то время как при равенстве сил перед каким-либо входом потерь с обеих сторон нет. В качестве платежа (выигрыша) выступает разность числа пленных.

- а) Определите все чистые стратегии обоих противников.
- б) Постройте платежную матрицу, считая игроком 1 обороняющуюся сторону.
- в) Упростите матрицу насколько это возможно и найдите оптимальные стратегии сторон.
- г) с какой частотой следует белым использовать стратегию: расположить по два человека у каждого входа?
- д) кто больше в среднем захватит пленных, белые или индейцы? (1 - белые, 2 - индейцы)
- е) какова абсолютная величина разности числа захваченных обеими сторонами пленных?
- ж) с какой частотой следует белым использовать стратегию: расположить у первого входа одного, а у второго трех человека?

з) с какой частотой следует индейцам использовать стратегию: расположить у первого входа трех, а у второго двух воинов?

Вариант 4

В нашем распоряжении имеются три вида вооружения: А1, А2, А3; у противника — три вида самолетов: В1, В2, В3. Наша задача — поразить самолет; задача противника — сохранить его непораженным. Самолеты В1, В2 и В3 поражаются при использовании вооружения А1 соответственно с вероятностями 0,9, 0,4 и 0,2; при использовании А2 — с вероятностями 0,3, 0,6 и 0,8; при использовании А3 — с вероятностями 0,5, 0,7 и 0,2.

Вариант 5

Сельскохозяйственное предприятие производит картофель. Посевная площадь картофеля составляет 100 га. Хозяйство имеет договор с магазином, который гарантированно закупит весь произведённый картофель по цене 4 у.д.е. за 1 кг. При выращивании картофеля хозяйство может принять одно из трёх решений, различающихся по сумме затрат на производство продукции:

А1. Провести комплексную обработку растений для предотвращения поражения сорняками, вредителями и болезнями (затраты — 6 млн. у.д.е.).

А2. Провести частичную обработку растений (затраты — 4 млн. у.д.е.).

А3. Не проводить обработку растений (затраты — 2.5 млн. у.д.е.).

В зависимости от погодных условий, наличия и развития сорняков, вредителей и болезней возможны следующие ситуации:

С1. Условия для развития сорняков, вредителей и болезней неблагоприятные.

С2. Условия для развития сорняков, вредителей и болезней обычные.

С3. Условия для развития сорняков, вредителей и болезней благоприятные.

Значения урожайности картофеля (ц/га) в зависимости от решений сельскохозяйственного предприятия и развития сорняков, вредителей и болезней приведены в таблице

| Стратегии хозяйства | Развитие сорняков, вредителей и болезней | | |
|---------------------|--|-----|------|
| | S1 | S2 | S3 |
| A1 | 260 | 260 | 260 |
| A2 | 255 | 200 | 1450 |
| A3 | 250 | 100 | 40 |

Определите наиболее оптимальную стратегию предприятия и цену игры. Дайте экономическую интерпретацию результатов решения задачи.

Вариант 6

Сторона В засылает подводную лодку в один из двух районов. Сторона А, располагая тремя противолодочными кораблями, стремится обнаружить лодку противника. Сторона В

стремится этого избежать. Вероятность обнаружения подводной лодки в 1-м районе одним противолодочным кораблем равна $p_1 = 0,4$, во втором — $p_2 = 0,6$.

Предполагается, что обнаружение лодки каждым кораблем является независимым событием. Сторона А может посылать в различные районы разное количество кораблей (распределение кораблей по районам и есть ее стратегия).

Считая сторону А игроком 1, построить игру и найти оптимальное распределение противолодочных кораблей по регионам.

Какова цена игры? С какой частотой стороне А следует посылать в регион 2 три противолодочных корабля? С какой частотой стороне А следует посылать в регион 1 один противолодочный корабль? С какой частотой стороне В следует посылать подлодку в регион 2?

Вариант 7

В одном сельскохозяйственном районе погода в течение вегетационного периода в среднем может быть холодной или теплой. На ферме с площадью в 1500 акров планируется посев двух культур. Если вегетационный период холодный, то ожидаемая прибыль от урожая составляет 20 долларов на акр для культуры I и 10 долларов на акр для культуры II. Если же вегетационный период теплый, то ожидаемая прибыль оценивается в 10 долларов за акр для культуры I и 30 долларов за акр для культуры II.

Опишите конкуренцию между фермером и погодой как матричную игру.

Какова оптимальная стратегия фермера, когда нет никакой информации относительно вероятностей теплой или холодной погоды? Если погода с равной вероятностью может быть теплой или холодной, то сколько акров следует отвести фермеру под каждую культуру?

Вариант 8

В экспериментах ворон и попугайчиков обучают распознаванию чисел до семи. Используется следующая схема эксперимента. Рацион вороны R и попугайчика С должен определяться матричной игрой. Каждой птице показывают три карточки с нанесенными на них двумя, четырьмя и семью точками. Если обе птицы выбирают одну и ту же карточку, то R получает из рациона С количество червяков, равное удвоенному числу точек на карточке. Если они выбирают разные карточки, то С получает из рациона R количество червей, равное разнице в числе точек на карточках.

В предположении, что ходы делаются независимо (например, с помощью двух наборов карточек), требуется описать этот эксперимент как матричную игру. Найти оптимальные чистые стратегии игроков. Чьи шансы на выигрыш предпочтительнее в случае чистых стратегий? Найти оптимальные смешанные стратегии. Чьи шансы предпочтительнее в этом случае?

Вариант 9

В игре двух лиц, именуемой двухпальцевой игрой Морра, каждый игрок показывает один или два пальца и одновременно отгадывает число пальцев, которые покажет его противник. Игрок, который угадал, выигрывает сумму, равную суммарному числу показанных противниками пальцев. Иначе игра заканчивается вничью.

Сформулируйте задачу в виде игры двух лиц с нулевой суммой и решите игру методами линейного программирования. Существует ли в данной игре седловая точка в чистых стратегиях? Кто из игроков в среднем выигрывает и сколько? Как часто игрок А должен говорить, что его противник показал два пальца?

Вариант 10

Джек часто ездит между двумя городами. При этом есть возможность выбрать один из двух маршрутов: маршрут А представляет собой скоростное шоссе в четыре полосы, маршрут В — узкую объездную дорогу.

Патрулирование дорог осуществляется ограниченным числом полицейских. Если все полицейские расположены на одном маршруте, то Джек, обычно едущий «на грани фола», несомненно, получит штраф в 100 долл. за превышение скорости. Если полицейские патрулируют на двух маршрутах в соотношении 50 на 50, то имеется 50 % -ная вероятность, что Джек получит штраф в 100 долл. на маршруте А и 30 % -ная вероятность, что он получит такой же штраф на маршруте В. Кроме того, маршрут В длиннее, поэтому бензина расходуется на 15 долл. больше, чем на маршруте А. Определите наилучшую стратегию для Джека.

Вариант 11

В магазине работает охранная служба — двое полицейских в штатском. Торговый зал магазина делится на две условные зоны — в зоне А почти всегда посетителей значительно больше, чем в зоне В. Имеется некоторая позиция Т вне торговой площади, в Т установлена телекамера. В каждой из двух условных зон может находиться вор. Полицейские же могут находиться в А, в В или в Т. Предполагается, что известны вероятности обнаружения вора в определенной зоне при условии, что полицейский находится в фиксированном месте. Так, вора, находящегося в А, полицейский на том же месте заметит с вероятностью 0.4; из зоны Т он заметит его в зоне А с вероятностью 0.3; и т.д. в соответствии с таблицей

| | Т | А | В |
|---|-----|-----|-----|
| А | 0.3 | 0.4 | 0.1 |
| В | 0.5 | 0.2 | 0.7 |

Так как полицейских двое, то они могут находиться вместе или в разных местах.

Для каждой из ситуаций необходимо подсчитать вероятность обнаружения вора в каждой зоне и построить на ее основе матрицу игры (название строки — место вора, столбца — охраны). Определить, существует ли в игре седловая точка. Найти оптимальные стратегии игроков и цену игры.

5. Методы сетевого планирования

В лабораторной работе рассматриваются возможности использования сетевого планирования для контроля сроков выполнения проектов. *Проектом* может быть разработка нового продукта или производственного процесса; строительство предприятия, здания или сооружения; ремонт сложного оборудования и т.д. При реализации проекта составляется график выполнения работ. Для того, чтобы проект был завершен вовремя, необходимо контролировать сроки выполнения этих работ. Усложняющим фактором является то, что работы взаимосвязаны. Одни работы зависят от выполнения других и не могут начаться, пока предшествующие работы не будут завершены.

Основные этапы методов сетевого планирования показаны на рис. 1. На первом этапе определяются отдельные процессы, составляющие проект, их отношения последовательности (т.е. какой процесс должен предшествовать другому) и длительность. Далее проект представляется в виде сети (сетевого графика), показывающей последовательность процессов, составляющих проект. На третьем этапе на основе построенной сети выполняются вычисления, в результате которых составляется временной график реализации проекта.

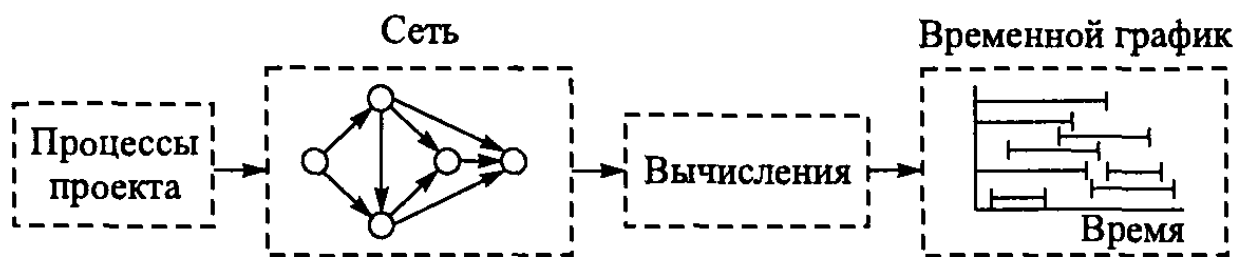


Рис. 1

Построение сетевой модели начинается с разбиения проекта на четко определенные работы, для которых определяется продолжительность. *Работа* — это некоторый процесс, приводящий к достижению определенного результата, требующий затрат ресурсов и имеющий протяженность во времени.

Исходные данные для построения сетевой модели могут задаваться различными способами, например,

- описанием предполагаемого проекта. В этом случае необходимо самостоятельно разбить его на отдельные работы и установить их взаимные связи;
- списком работ проекта. В этом случае необходимо проанализировать содержание работ и установить существующие между ними связи;
- списком работ проекта с указанием их упорядочения. В этом случае необходимо только отобразить работы на сетевом графике.

Построение сетевого графика. Исходным шагом для применения методов сетевого планирования является описание проекта в виде перечня выполняемых работ с указанием их взаимосвязи. Для описания проекта используются два основных способа: табличный и графический. Рассмотрим следующую таблицу, описывающую проект.

Таблица 1

| Работа | Непосредственно предшествующая работа | Время выполнения |
|--------|---------------------------------------|------------------|
| A | - | t_A |
| B | - | t_B |
| C | B | t_C |
| D | A, C | t_D |

В первом столбце указаны наименования всех работ проекта. Их четыре: A, B, C, D. Во втором столбце указаны работы, непосредственно предшествующие данной. У работ A и B нет предшествующих. Работе C непосредственно предшествует работа B. Это означает, что работа C может быть начата только после того, как завершится работа B. Работе D непосредственно предшествуют две работы: A и C. Это означает, что работа D может быть начата только после того, как завершатся работы A и C. В третьем столбце таблицы для каждой работы указано время ее выполнения. На основе этой таблицы может быть построено следующее графическое описание проекта (рис. 2).

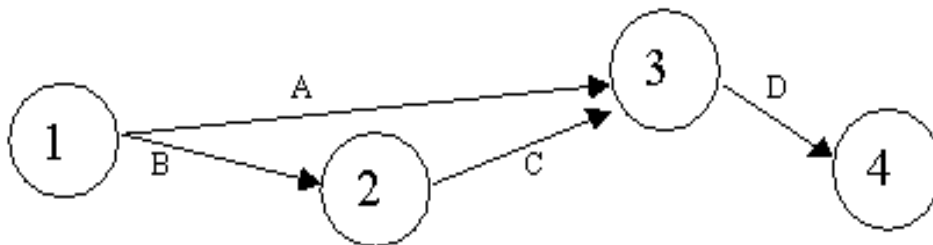


Рис. 2

На рис. 2 проект представлен в виде графа с вершинами 1, 2, 3, 4 и дугами A, B, C, D — *сетевого графика*. Каждая вершина графа отображает *событие* (момент времени, когда завершаются одни работы и начинаются другие). Событие 1 означает начало выполнения проекта. Иногда такое событие обозначают буквой S (start). Событие 4 означает завершение проекта. Для обозначения такого события иногда используется буква F (finish). Любая работа проекта — это упорядоченная пара двух событий. Например, работа A есть упорядоченная пара событий (1,3). Работа D — упорядоченная пара событий (3,4). Событие проекта состоит в том, что завершены все работы, «входящие» в соответствующую вершину. Например, событие 3 состоит в том, что завершены работы A и C.

Построение сети проекта основано на следующих правилах.

Правило 1. Каждая работа в проекте представляется одной и только одной дугой.

Правило 2. Каждая работа идентифицируется двумя концевыми узлами.

На рис. 3 показано, как с помощью введения фиктивной работы можно представить две параллельных работы A и B. По определению фиктивная работа (которая на сетевом графике обычно обозначается пунктирной дугой) не поглощает временных или других ресурсов. Вставив фиктивную работу одним из четырех способов, показанных на рис. 3, мы получаем возможность идентифицировать работы A и B по крайней мере одним уникальным концевым узлом (как требует правило 2).

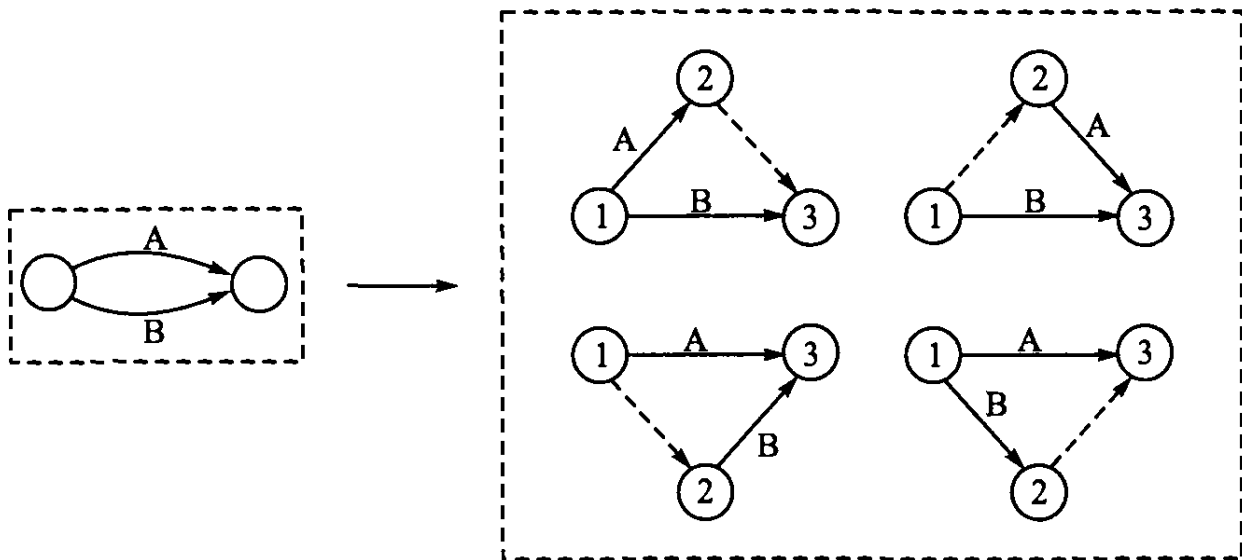


Рис. 3

Правило 3. Для поддержания правильных отношений предшествования при включении в сетевой график любой работы необходимо ответить на следующие вопросы.

1. Какая работа непосредственно предшествует текущей?
2. Какая работа должна выполняться после завершения текущей работы?
3. Какая работа конкурирует (выполняется параллельно) с текущей?

Ответы на эти вопросы, возможно, потребуют включить в сеть фиктивные работы, чтобы правильно отобразить последовательность выполнения работ. Предположим, например, что четыре работы должны удовлетворять следующим условиям.

1. Работа С должна начаться сразу после завершения работ А и В.
2. Работа Е должна начаться непосредственно после завершения работы В.

На рис. 4а показано неправильное представление работ, так как из него следует, что работа Е должна начаться после завершения как работы В, так и А. На рис. 4б показано, как с помощью фиктивной работы D решить эту проблему.

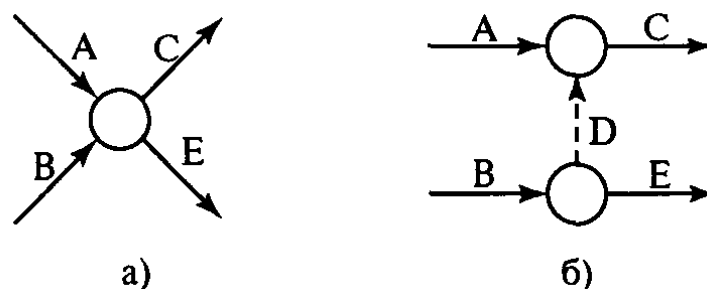


Рис. 4

Фиктивная работа может реально существовать, например, «передача документов от одного отдела к другому». Если продолжительность такой работы несоизмеримо мала по сравнению с продолжительностью других работ проекта, то формально ее принимают равной 0.

В сетевом графике не должно быть:

- «висячих» событий (т.е. не имеющих предшествующих событий), кроме исходного;
- тупиковых событий (т.е. не имеющих последующих событий), кроме завершающего;
- циклов (рис. 5).

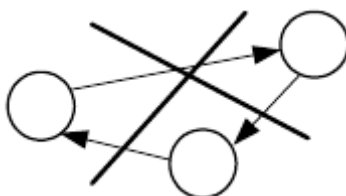


Рис. 5

Определение критического пути. Будем предполагать, что время выполнения каждой работы точно известно. Введем следующие определения.

Путь — последовательность взаимосвязанных работ, ведущая из одной вершины проекта в другую вершину. Например (см. рис. 6), {A, D, G} и {C, F} — два различных пути.

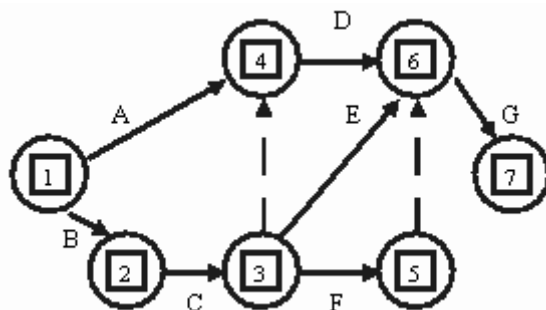


Рис. 6

Длина пути — суммарная продолжительность выполнения всех работ пути.

Полный путь — это путь от исходного к завершающему событию.

Критический путь — полный путь, суммарная продолжительность выполнения всех работ которого является наибольшей.

Ясно, что минимальное время, необходимое для выполнения любого проекта равно длине критического пути. Именно на работы, принадлежащие критическому пути, следует обращать особое внимание. Если такая работа будет отложена на некоторое время, то время окончания проекта будет отложено на то же время. Если необходимо сократить время выполнения проекта, то в первую очередь нужно сократить время выполнения хотя бы одной работы на критическом пути.

Для того, чтобы найти критический путь, достаточно перебрать все пути и выбрать тот, или те из них, которые имеют наибольшую суммарную продолжительность выполнения работ. Однако для больших проектов реализация такого подхода связана с вычислительными трудностями. Метод критического пути (метод СРМ — Critical Path Method) позволяет получить критический путь намного проще.

Расчет сетевой модели начинают с временных параметров событий, которые вписывают непосредственно в вершины сетевого графика (рис. 7):

- $T_p(i)$ — ранний срок наступления события i , минимально необходимый для выполнения всех работ, которые предшествуют событию i ;

- $T_n(i)$ — поздний срок наступления события i , превышение которого вызовет аналогичную задержку наступления завершающего события сети;
- $R(i) = T_n(i) - T_p(i)$ — резерв события i , т.е. время, на которое может быть отсрочено наступление события i без нарушения сроков завершения.

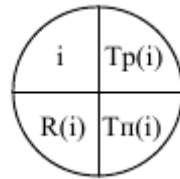


Рис. 7

Ранние сроки наступления событий $T_p(i)$ рассчитываются от исходного (S) к завершающему (F) событию следующим образом:

- 1) для исходного события S: $T_p(S) = 0$;
- 2) для всех остальных событий i : $T_p(i) = \max_{\forall(k,i)} [T_p(k) + t(k,i)]$,

где максимум берется по всем работам (k,i), входящим в событие i ; $t(k,i)$ — длительность работы (k,i) (рис. 8).

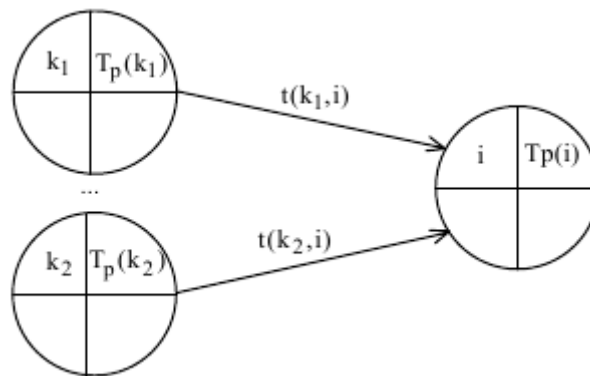


Рис. 8

Поздние сроки наступления событий $T_n(i)$ рассчитываются от завершающего к исходному событию:

- 1) для завершающего события F: $T_p(F) = T_n(F)$;
- 2) для всех остальных событий i : $T_n(i) = \min_{\forall(j,i)} [T_n(j) - t(i,j)]$,

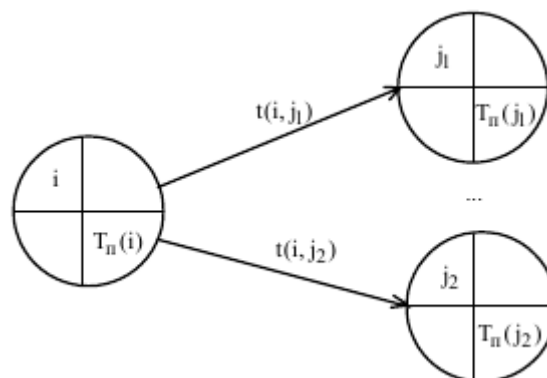


Рис. 9

где минимум берется по всем работам (i,j), выходящим из события i; $t(i, j)$ — длительность работы (i,j) (рис. 9).

Условия критичности пути

- **необходимое условие:** нулевые резервы событий, лежащих на критическом пути $R(i) = 0$;

- **достаточное условие:** нулевые полные резервы работ, лежащих на критическом пути $R_n(i, j) = 0$. $R_n(i, j) = T_n(j) - T_p(i) - t(i, j)$ — показывает максимальное время, на которое можно увеличить длительность работы (i,j) или отсрочить ее начало, чтобы не нарушился срок завершения проекта в целом.

Рассмотрим следующий пример. Компания разрабатывает строительный проект. Исходные данные по основным операциям проекта представлены в таблице. Нужно построить сетевую модель проекта, определить критические пути и проанализировать, как влияет на ход выполнения проекта задержка работы D на 4 недели.

Таблица 2

| Работа | Непосредственно предшествующая работа | Длительность, недели |
|--------|---------------------------------------|----------------------|
| A | - | 4 |
| B | - | 6 |
| C | A, B | 7 |
| D | B | 3 |
| E | C | 4 |
| F | D | 5 |
| G | E, F | 3 |

Сетевой график проекта показан на рис. 10.

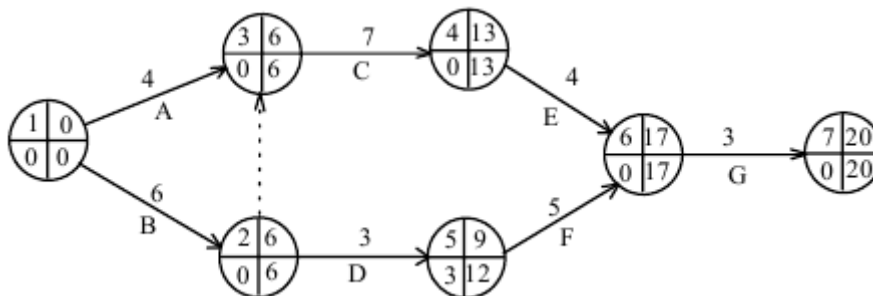


Рис. 10

Согласно необходимому условию два полных пути сетевой модели (см. рис. 10) $L_1 = 1,2,3,4,6,7$ и $L_2 = 1,3,4,6,7$ могут быть критическими. Проверим достаточное условие критичности для работ (1,2) и (1,3)

$$R_n(1,2) = T_n(2) - T_p(1) - t(1,2) = 6 - 0 - 6 = 0,$$

$$R_n(1,3) = T_n(3) - T_p(1) - t(1,3) = 6 - 0 - 4 = 2.$$

Путь L_2 , начинающийся с работы (1,3) не является критическим, т.к. поскольку как минимум одна из его работ не является критической. Работа (1,3) имеет ненулевой полный резерв, а значит может быть задержана с выполнением, что недопустимо для критических работ.

Таким образом, сетевая модель имеет единственный критический путь $L_{\text{кр}} = 1,2,3,4,6,7$ длительностью 20 недель. За выполнением работ этого пути необходим особый контроль, т.к. любое увеличение их длительности нарушит срок выполнения проекта в целом.

Работа D или (2,5) не является критической, ее полный резерв равен 3-м неделям. Это означает, что при задержке работы в пределах 3-х недель срок выполнения проекта не будет нарушен. Поэтому если согласно условию работа D задержится на 4 недели, то весь проект закончится на 1 неделю позже.

Построение календарного плана. Пусть сетевой график построен и критический путь на нем определен. Результаты решения задачи планирования теперь необходимо отобразить в виде календарного плана. В табл. 3 приведены данные о кодах и длительностях работ в днях из рассмотренного выше примера

Таблица 3

| (i,j) | 1,2 | 1,3 | 2,5 | 3,4 | 4,6 | 5,6 | 6,7 |
|-------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| t(i,j), дни | 6 | 4 | 3 | 7 | 4 | 5 | 3 |

К критическому пути относятся работы (1,2), (3,4), (4,6) и (6,7) (фиктивной работой (2,3) на плане пренебрегаем). Их на календарном плане выделяют сплошной линией. Работы (1,3), (2,5), (5,6), не относящиеся к критическому пути, рисуют пунктиром.

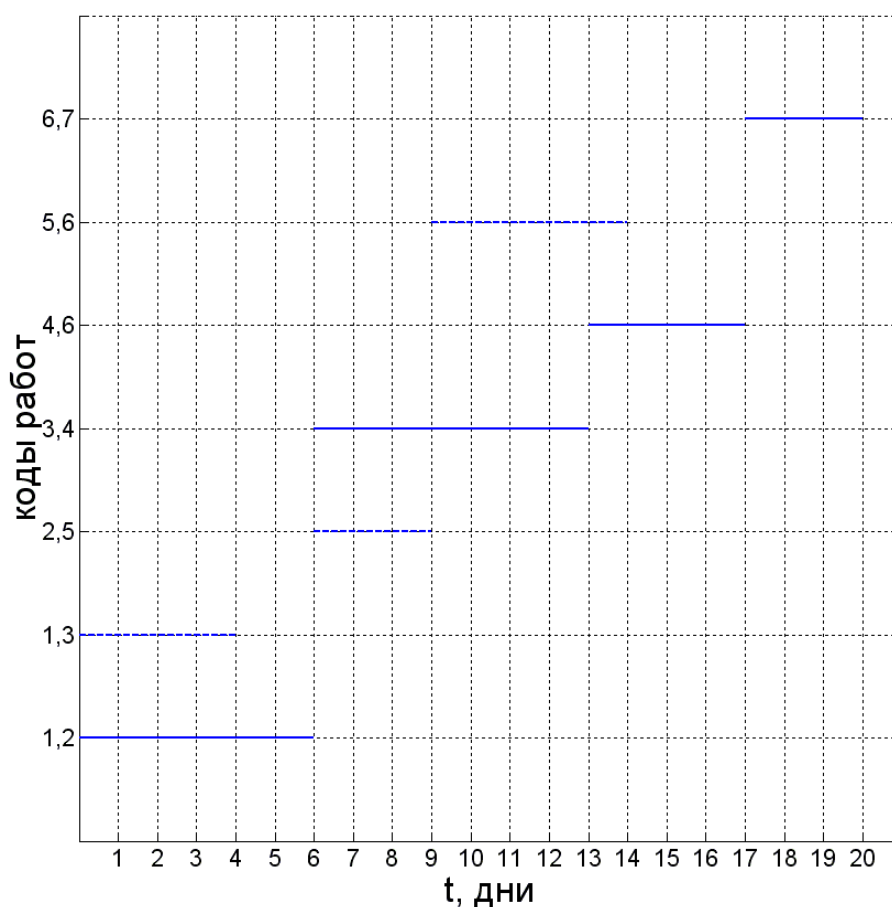


Рис. 11

Практическая работа №5

Тема: Методы сетевого планирования

Цель: Приобрести навыки использования методов сетевого планирования для решения задач управления проектами.

Порядок выполнения работы:

1) Определение сроков выполнения проекта.

8. Изучить теорию.
9. Выбрать вариант задания.
10. Построить сетевой график.
11. Определить критический путь.
12. Ответить на другие вопросы задачи.
13. Построить календарный план работ.

2) Составление отчёта по лабораторной работе, в котором представляется:

- формулировка индивидуального задания;
- ответы на вопросы задания;
- при необходимости, снимки экрана монитора, содержащие основные моменты решения задачи;
- сетевой график, формулировка критического пути и ответов на другие вопросы задания, календарный план работ.

Варианты заданий

Вариант 1

Руководитель проекта разработал следующий перечень работ:

| Работа | Непосредственно предшествующая работа | Время выполнения |
|--------|---------------------------------------|------------------|
| A | - | 4 |
| B | - | 6 |
| C | - | 5 |
| D | B | 2 |
| E | A | 9 |
| F | B | 4 |
| G | C, D | 8 |
| H | B, E | 3 |
| I | F, G | 5 |
| J | H | 7 |

Вопросы:

Какова длина критического пути?

Сколько работ находится на критическом пути?

Можно ли отложить выполнение работы F без отсрочки завершения проекта в целом ?

Вариант 2

Проект пусконаладки компьютерной системы состоит из восьми работ. Непосредственно предшествующие работы и продолжительность выполнения работ показаны ниже.

| Работа | Непосредственно предшествующая работа | Время выполнения |
|--------|---------------------------------------|------------------|
| A | - | 3 |
| B | - | 6 |
| C | A | 2 |
| D | B, C | 5 |
| E | D | 4 |
| F | E | 3 |
| G | B, C | 9 |
| H | F, G | 3 |

Вопросы:

Сколько времени потребуется для выполнения проекта?

Сколько работ на критическом пути?

Чему равно наиболее раннее время начала работы C?

Вариант 3

Рассмотрите следующую сеть проекта (продолжительность работ показана в неделях):

| Работа | Непосредственно предшествующая работа | Время выполнения |
|--------|---------------------------------------|------------------|
| A | - | 5 |
| B | - | 3 |
| C | A | 7 |
| D | A | 6 |
| E | B | 7 |
| F | D, E | 3 |
| G | D, E | 10 |
| H | C, F | 8 |

Вопросы

За какое минимальное время может быть выполнен проект?

Сколько работ находится на критическом пути?

На сколько недель можно отложить выполнение работы D без отсрочки завершения проекта в целом ?

Вариант 4

Экономический факультет МГУ разрабатывает новую программу повышения квалификации преподавателей количественных методов анализа экономики. Желательно, чтобы эту программу можно было реализовать в наиболее сжатые сроки. Существуют взаимосвязи между дисциплинами, которые необходимо отразить, составляя расписание занятий по

программе. Например, сетевые методы планирования должны рассматриваться лишь после того, как слушатели обсудят различные аспекты (коммерческие, финансовые, экономические, технические и т.д.) проектного анализа, связанные с жизненным циклом проекта. Дисциплины и их взаимосвязь указаны в следующей таблице.

| Дисциплина | Непосредственно предшествующая дисциплина | Время изучения в днях |
|------------|---|-----------------------|
| A | - | 4 |
| B | - | 6 |
| C | A | 2 |
| D | A | 6 |
| E | C, B | 3 |
| F | C, B | 3 |
| G | D, E | 5 |

Вопросы:

Найдите минимальное время, за которое можно выполнить программу.

Какое количество дисциплин находится на критическом пути?

Каков резерв времени изучения дисциплины F?

Вариант 5

В таблице показаны этапы покупки нового автомобиля.

| Работа | Предшествующая работа | Длительность (дни) |
|--|-----------------------|--------------------|
| A: Принятие окончательного решения о покупке автомобиля | - | 3 |
| B: Поиск потенциального покупателя имеющегося автомобиля | A | 14 |
| C: Составление списка желаемых моделей машин | A | 1 |
| D: Исследование желаемых моделей | C | 3 |
| E: Консультации у автомехаников | C | 1 |
| F: Сбор рекламных материалов продавцов автомобилей | C | 2 |
| G: Обобщение полученной информации | D, E, F | 1 |
| H: Выбор трех наиболее подходящих моделей | G | 1 |
| I: Знакомство "в натуре" с выбранными моделями | H | 3 |

| Работа | Предшествующая работа | Длительность (дни) |
|---|-----------------------|--------------------|
| J: Сбор финансовой информации | H | 2 |
| K: Выбор одного автомобиля | I, J | 2 |
| L: Выбор продавца автомобиля | K | 2 |
| M: Выбор автомобиля желаемого цвета | L | 4 |
| N: Повторная дорожная проверка выбранной модели | L | 1 |
| O: Покупка нового автомобиля | B, M, N | 3 |

Вопросы:

Сколько работ на критическом пути?

На сколько можно отложить начало выполнения работы J, чтобы это не повлияло на срок выполнения проекта?

Вариант 6

Городская администрация рассматривает возможность переустройства рынка. После сноса старых палаток проектом предусматривается строительство павильонов с последующей сдачей их в аренду торговым фирмам. Работы, которые необходимо выполнить при реализации проекта, их взаимосвязь и время выполнения каждой из работ указаны в следующей таблице.

| Работа | Содержание работы | Непосредственно предшествующая работа | Время выполнения (недель) |
|--------|--|---------------------------------------|---------------------------|
| A | Подготовить архитектурный проект | - | 5 |
| B | Определить будущих арендаторов | - | 6 |
| C | Подготовить проспект для арендаторов | A | 4 |
| D | Выбрать подрядчика | A | 3 |
| E | Подготовить документы для получения разрешения | A | 1 |
| F | Получить разрешение на строительство | E | 4 |
| G | Осуществить строительство | D, F | 14 |
| H | Заключить контракты с арендаторами | B, C | 12 |
| I | Вселить арендаторов в павильоны | G, H | 2 |

Вопросы:

Сколько работ на критическом пути?

На сколько можно отложить начало выполнения работы E, чтобы это не повлияло на срок выполнения проекта?

На сколько можно отложить начало выполнения работы B, чтобы это не повлияло на срок выполнения проекта (полный резерв времени)?

Вариант 7

Рассмотрите следующую сеть проекта:

| Работа | Непосредственно предшествующая работа | Время выполнения |
|--------|---------------------------------------|------------------|
| A | - | 3 |
| B | - | 8 |
| C | A | 6 |
| D | A | 6 |
| E | B | 9 |
| F | D, E | 3 |
| G | D, E | 7 |
| H | C, F | 8 |

Вопросы

За какое минимальное время может быть выполнен проект?

Сколько работ находится на критическом пути?

На сколько недель можно отложить выполнение работы E без отсрочки завершения проекта в целом ?

Вариант 8

В таблице приведены работы, выполняемые при строительстве нового каркасного дома.

| Работа | Предшествующие работы | Длительность (дни) |
|--------------------------------------|-----------------------|--------------------|
| A - Очистка строительного участка | – | 1 |
| B - Завоз оборудования | – | 2 |
| C - Земляные работы | A | 1 |
| D - Заливка фундамента | C | 2 |
| E - Наружные сантехнические работы | B, | 6 |
| F - Возведение каркаса дома | D | 10 |
| G - Прокладка электропроводки | F | 3 |
| H - Создание перекрытий | G | 1 |
| I - Создание каркаса крыши | F | 1 |
| J - Внутренние сантехнические работы | E, | 5 |
| K - Покрытие крыши | I | 2 |
| L - Наружные изоляционные работы | F, | 1 |
| M - Вставка окон и наружных дверей | F | 2 |
| N - Обкладка дома кирпичом | L | 4 |
| O - Штукатурка стен и потолков | G | 2 |

| | | |
|---|---|---|
| Р - Облицовка стен и потолков | О | 2 |
| Q - Изоляция крыши | I | 1 |
| R - Окончание внутренних отделочных работ | P | 7 |
| S - Окончание наружных отделочных работ | I | 7 |
| T - Ландшафтные работы | S | 3 |

Вариант 9

Московский государственный университет рассматривает предложение о строительстве новой библиотеки. Работы, которые следует выполнить перед началом строительства, представлены ниже. Продолжительность работ показана в неделях.

| Работа | Содержание работы | Непосредственно предшествующая работа | Время выполнения (недель) |
|--------|---|---------------------------------------|---------------------------|
| A | Определить место строительства | - | 6 |
| B | Разработать первоначальный проект | - | 8 |
| C | Получить разрешение на строительство | A, B | 12 |
| D | Выбрать архитектурную мастерскую | C | 4 |
| E | Разработать смету затрат на строительство | C | 6 |
| F | Разработать проект строительства | D, E | 15 |
| G | Получить финансирование | E | 12 |
| H | Нанять подрядчика | F, G | 8 |

Вопросы:

Сколько работ находится на критическом пути (фиктивные работы не учитываются)?

Через какое минимальное время после принятия решения о реализации проекта можно начать работу по строительству библиотеки?

На сколько недель можно отложить выбор архитектурной мастерской?

Вариант 10

В таблице приведены этапы выполнения работ по замене линии электропередач.

| Работа | Предшествующие работы | Длительность (дни) |
|---|-----------------------|--------------------|
| A: Определение объема работ | - | 1 |
| B: Извещение пользователей о временном отключении электросети | A | 0,5 |
| C: Подвозка материалов и оборудования | A | 1 |
| D: Предварительные работы | A | 0,5 |
| E: Заготовка опор и материалов | C, D | 3 |
| F: Развозка опор | E | 3,5 |
| G: Определение нового местоположения опор | D | 0,5 |
| H: Разметка местоположения опор | G | 0,5 |
| I: Земляные работы для установки новых опор | H | 3 |
| J: Установка новых опор | F, I | 4 |
| K: Ограждение старой линии | F, I | 1 |
| L: Прокладка новых проводов | J, K | 2 |
| M: Обустройство новой линии | L | 2 |
| N: Натяжка проводов | L | 2 |
| O: Подрезка деревьев | D | 2 |
| P: Отключение старой электролинии | B, M, N, O | 0,1 |
| Q: Подключение новой электролинии | P | 0,5 |
| R: Уборка территории | Q | 1 |
| S: Удаление проводов старой линии | Q | 1 |
| T: Удаление опор старой линии | S | 2 |
| U: Возврат материалов и оборудования | R, T | 2 |

Вопросы:

Сколько работ находится на критическом пути (фиктивные работы не учитываются)?

За какое минимальное время может быть выполнен проект?

Вариант 11

Компания готовит бюджет производства нового изделия. В таблице представлены этапы подготовки бюджета и их длительность.

| Работа | Предшествующие работы | Длительность (дни) |
|---|-----------------------|--------------------|
| A: Прогнозирование объема продаж | — | 10 |
| B: Изучение рынка конкурирующих товаров | — | 7 |
| C: Доводка изделия | A | 5 |
| D: Подготовка производственного плана | C | 3 |
| E: Оценка стоимости производства | D | 2 |
| F: Определение отпускной цены | B, E | 1 |
| G: Подготовка бюджета | E, F | 14 |

Вопросы:

Сколько работ находится на критическом пути (фиктивные работы не учитываются)?

За какое минимальное время может быть выполнен проект?

Вариант 12

В таблице приведена последовательность работ по разработке и производству станков.

| Работа | Предшествующие работы | Длительность |
|---|-----------------------|--------------|
| А – составление сметы затрат | – | 3 |
| В – согласование оценок | А | 6 |
| С – покупка собственного оборудования | В | 1 |
| Д – подготовка конструкторских проектов | В | 2 |
| Е – строительство основного цеха | Д | 10 |
| F – монтаж оборудования | С,Е | 5 |
| G – испытание оборудования | F | 4 |
| Н – определение типа модели | Д | 9 |
| I – проектирование внешнего корпуса | Д | 7 |
| J – создание внешнего корпуса | Н,И | 6 |
| К – конечная сборка | G, J | 3 |
| L – контрольная проверка | К | 7 |

Вопросы:

Сколько работ находится на критическом пути (фиктивные работы не учитываются)?

За какое минимальное время может быть выполнен проект?

6. Методы анализа временных рядов

Временным рядом называется последовательность значений некоторого показателя во времени (например, объемов продаж, как на рис. 1).



Рис. 1

Анализ временных рядов является способом выявления тенденций прошлого и продления их в будущее. Методы анализа временных рядов осуществляют прогноз путем экстраполяции значений отдельной переменной на основе статистических данных за прошлый временной период. *Основное допущение*, которое при этом делается, заключается в том, что происшедшее в прошлом дает хорошее приближение в оценке будущего.

Развитие процессов, реально наблюдаемых в жизни, складывается из некоторой *устойчивой тенденции (тренда)* и некоторой *случайной составляющей*, выражающейся в колебании значений показателя вокруг тренда. На рис. 2 показано, как могут зависеть объемы продаж одного и того же товара на двух стадиях его жизненного цикла (в начале и в конце продаж).

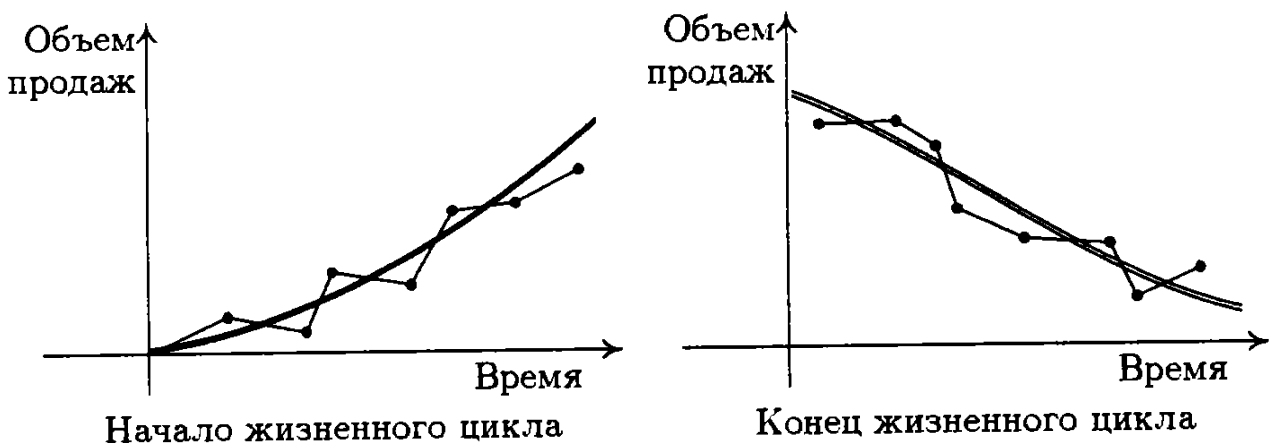


Рис. 2

Кривые тренда сглаживают временной ряд значений показателя, выделяя общую тенденцию. Именно выбор кривой тренда во многом определяет результаты прогнозирования.

В большинстве случаев временной ряд, кроме тренда и случайных отклонений от него, характеризуется еще *сезонной составляющей*. Сезонная составляющая — это периодические

изменения показателя. Обычная продолжительность сезонной составляющей измеряется днями, неделями или месяцами.

Вначале рассмотрим несколько простейших методов прогнозирования, не учитывающих наличия сезонности во временном ряде. Предположим, что в журнале Wall Street Journal приведена сводка за последние 12 дней (включая сегодняшний) цен на апельсины, сложившихся на момент закрытия биржи. Используя эти данные, нужно предсказать завтрашнюю цену на какао (также на момент закрытия биржи). Рассмотрим несколько способов сделать это.

1. Если последнее (сегодняшнее) значение наиболее значимо по сравнению с остальными, то оно является наилучшим прогнозом на завтра.
2. Возможно, из-за быстрого изменения цен на бирже первые шесть значений уже устарели и не актуальны, в то время как последние шесть значимы и имеют равную ценность для прогноза. Тогда в качестве прогноза на завтра можно взять среднее последних шести значений.
3. Если все значения существенны, но сегодняшнее 12-е значение наиболее значимо, а предыдущие 11-е, 10-е, 9-е и т.д. имеют все меньшую и меньшую значимость, следует найти взвешенное среднее всех 12 значений. Причем весовые коэффициенты для последних значений должны быть больше, чем для предыдущих, и сумма всех весовых коэффициентов должна равняться 1.

Первый способ называется «наивным» прогнозом и достаточно очевиден. Рассмотрим подробнее остальные способы.

Метод скользящего среднего. Одним из предположений, лежащих в основе данного метода, является то, что более точный прогноз на будущее можно получить, если использовались недавние наблюдения, причем, чем «новее» данные, тем их вес для прогноза должен быть больше. Удивительно, но такой «наивный» подход оказывается чрезвычайно полезным для практики. Например, многие авиакомпании используют частный тип скользящего среднего для создания прогнозов спроса на авиаперелеты, которые, в свою очередь, используются в сложных механизмах управления и оптимизации доходов. Более того, практически все программные пакеты управления запасами содержат модули, выполняющие прогнозы на основе того или иного типа скользящего среднего.

Рассмотрим следующий пример. Менеджеру нужно спрогнозировать спрос на производимые его компанией станки.

Простое скользящее среднее. В этом методе среднее фиксированного числа N последних наблюдений используется для оценки следующего значения временно ряда. Например, используя данные о продажах станков за первые три месяца года, менеджер получает для апреля значение

$$\hat{x}_4 = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} = \frac{20 + 24 + 27}{3} \approx 23,67.$$

В случае произвольного числа N узлов расчетная формула выглядит так

$$\hat{x}_k = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_{k-i}.$$

Менеджер вычислил объем продаж на основе простого скользящего среднего за 3 и 4 месяца. Но какое количество узлов даст более точный прогноз? Для оценки точности

прогнозов используются *среднее абсолютных отклонений* (САО) и *среднее относительных ошибок*, в процентах (СООП), вычисляемые по формулам

$$\tilde{N}\hat{A} = \frac{\sum |x_i - \hat{x}_i|}{N},$$

$$\tilde{N}\hat{O} = \frac{\sum \frac{|x_i - \hat{x}_i|}{x_i} \times 100\%}{N},$$

где N — количество прогнозов.

Согласно результатам (рис. 3), скользящее среднее за три месяца имеет значение САО равное 12,67 (ячейка D16), тогда как для скользящего среднего за 4 месяца значение САО равно 15,59 (ячейка F16). Это значит, что использование большего количества статистических данных скорее ухудшает, чем улучшает точность прогноза методом скользящего среднего.

| | A | B | C | D | E | F |
|----|----------|---------------------|--|-------------------|--|-------------------|
| | | Объемы продаж, тыс. | Прогноз на основе ск. среднего за 3 месяца | Абсолютная ошибка | Прогноз на основе ск. среднего за 4 месяца | Абсолютная ошибка |
| 1 | Месяц | | | | | |
| 2 | Январь | 20 | | | | |
| 3 | Февраль | 24 | | | | |
| 4 | Март | 27 | | | | |
| 5 | Апрель | 31 | 23,67 | 7,33 | | |
| 6 | Май | 37 | 27,33 | 9,67 | 25,50 | 11,50 |
| 7 | Июнь | 47 | 31,67 | 15,33 | 29,75 | 17,25 |
| 8 | Июль | 53 | 38,33 | 14,67 | 35,50 | 17,50 |
| 9 | Август | 62 | 45,67 | 16,33 | 42,00 | 20,00 |
| 10 | Сентябрь | 54 | 54,00 | 0,00 | 49,75 | 4,25 |
| 11 | Октябрь | 36 | 56,33 | 20,33 | 54,00 | 18,00 |
| 12 | Ноябрь | 32 | 50,67 | 18,67 | 51,25 | 19,25 |
| 13 | Декабрь | 29 | 40,67 | 11,67 | 46,00 | 17,00 |
| 14 | | | | | | |
| 15 | | Сумма = | | 114,00 | Сумма = | 124,75 |
| 16 | | САО = | | 12,67 | САО = | 15,59 |

Рис. 3

На графике (рис. 4), построенном по результатам наблюдений и прогнозов с интервалом 3 месяца, можно заметить ряд особенностей, общих для всех применений метода скользящего среднего.

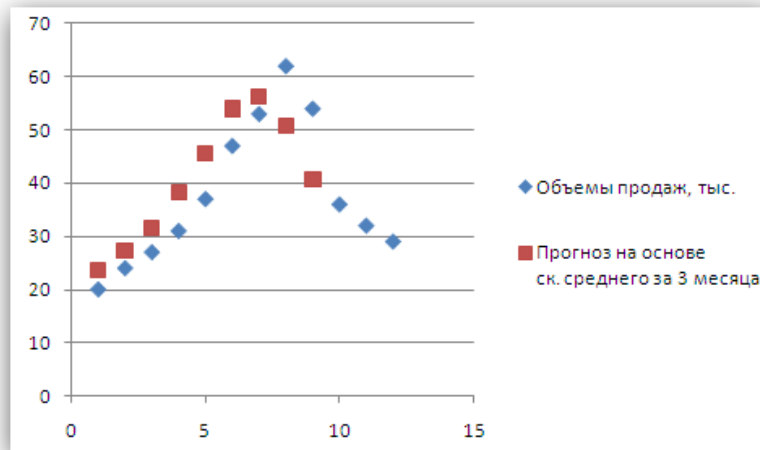


Рис. 4

Значение прогноза, полученное методом простого скользящего среднего, всегда меньше фактического значения, если исходные данные монотонно возрастают, и больше фактического значения, если исходные данные монотонно убывают. Поэтому, если данные монотонно возрастают или убывают, то с помощью простого скользящего среднего нельзя получить точных прогнозов. Этот метод лучше всего подходит для данных с небольшими случайными отклонениями от некоторого постоянного или медленно меняющегося значения.

Основной недостаток метода простого скользящего среднего возникает в результате того, что при вычислении прогнозируемого значения самое последнее наблюдение имеет такой же вес (т. е. значимость), как и предыдущие. Это происходит потому, что вес всех N последних наблюдений, участвующих в вычислении скользящего среднего, равен $1/N$. Присвоение равного веса противоречит интуитивному представлению о том, что во многих случаях последние данные могут больше сказать о том, что произойдет в ближайшем будущем, чем предыдущие.

Взвешенное скользящее среднее. Вклад различных моментов времени можно учесть, вводя вес для каждого значения показателя в скользящем интервале. В результате приходим к методу взвешенного скользящего среднего, который математически можно записать так

$$\hat{x}_k = \frac{\sum_{i=1}^N w_{k-i} x_{k-i}}{\sum_{i=1}^N w_{k-i}},$$

где w_{k-i} — вес, с которым используется показатель x_{k-i} при расчете.

Вес — это всегда положительное число. В случае, когда все веса одинаковы, мы возвращаемся к простому скользящему среднему.

Теперь наш менеджер может использовать метод взвешенного скользящего среднего за 3 месяца. Но как ему выбрать веса? Конечно, это всегда можно сделать «методом проб и ошибок», выбирая веса произвольно, и оценивая точность прогноза при помощи САО (САО меньше, точность прогноза выше). Однако, пробы и ошибки могут продолжаться довольно долго. Есть более простой путь.

Используя средство Поиск решения, можно определить оптимальный вес узлов. Чтобы определить вес узлов с помощью средства Поиск решения, при котором значение среднего абсолютных отклонений было бы минимально, выполните такие действия

1. Выберите команду Сервис -> Поиск решения.
2. В открывшемся диалоговом окне Поиск решения установите ячейку G16 целевой (см. лист «Вес») и укажите, что ее значение должно быть минимальным.
3. В поле Изменяя ячейки введите диапазон B1:B3.
4. Введите ограничения $B4 = 1,0$, $B1:B3 \geq 0$, $B1:B3 \leq 1$, $B1 \leq B2$ и $B2 \leq B3$.
5. Щелкнув на кнопке Выполнить, получите результат, показанный на рис. 5.

| | A | B | C | D | E | F | G |
|----|---------------|-------|---|----------|---------------------|--|-------------------|
| | | | | | | Прогноз на основе ск. среднего за 3 месяца | Абсолютная ошибка |
| 1 | альфа2 = | 0,000 | | Месяц | Объемы продаж, тыс. | | |
| 2 | альфа1 = | 0,000 | | Январь | 20 | | |
| 3 | альфа0 = | 1,000 | | Февраль | 24 | | |
| 4 | Сумма весов = | 1,00 | | Март | 27 | | |
| 5 | | | | Апрель | 31 | 27,00 | 4,00 |
| 6 | | | | Май | 37 | 31,00 | 6,00 |
| 7 | | | | Июнь | 47 | 37,00 | 10,00 |
| 8 | | | | Июль | 53 | 47,00 | 6,00 |
| 9 | | | | Август | 62 | 53,00 | 9,00 |
| 10 | | | | Сентябрь | 54 | 62,00 | 8,00 |
| 11 | | | | Октябрь | 36 | 54,00 | 18,00 |
| 12 | | | | Ноябрь | 32 | 36,00 | 4,00 |
| 13 | | | | Декабрь | 29 | 32,00 | 3,00 |
| 14 | | | | | | | |
| 15 | | | | | | Сумма = | 68,00 |
| 16 | | | | | | CAO = | 7,56 |

Рис. 5

Полученные результаты показывают, что оптимальное распределение весов таково, что весь вес сосредоточен на самом последнем наблюдении, при этом значение среднего абсолютных отклонений равно 7,56. Этот результат подтверждает предположение о том, что более поздние наблюдения должны иметь больший вес.

Прогнозы в методах скользящего среднего зависят от предыдущих значений показателя временного ряда, но не от качества предыдущих прогнозов. Рассмотрим метод один из методов прогнозирования, который учитывает отклонение предыдущего прогноза от реального значения показателя ряда.

Метод экспоненциального сглаживания. Очевидно, что в методе взвешенного скользящего среднего существует множество способов задавать значения весов так, чтобы их сумма была равной 1. Один из таких способов называется экспоненциальным сглаживанием. В этой схеме метода взвешенного среднего для любого $t > 1$ прогнозируемое значение \hat{x}_{t+1} в момент времени $t+1$ представляет собой взвешенную сумму фактического объема продаж x_t , за период времени t и прогнозируемого объема продаж \hat{x}_t , за период времени t . Другими словами,

$$\hat{x}_{t+1} = \alpha x_t + (1 - \alpha) \hat{x}_t.$$

Экспоненциальное сглаживание имеет вычислительные преимущества перед скользящим средним. Здесь, чтобы вычислить \hat{x}_{t+1} , необходимо знать только значения x_t , и \hat{x}_t , (а также значение α), вместо значений показателя ряда во всех узлах, по которым происходит сглаживание. Сохраняя значение α и последний прогноз, мы также неявно сохраняем и все предыдущие прогнозы.

Рассмотрим некоторые свойства модели экспоненциального сглаживания. Для начала заметим, что если $t > 2$, то в формуле (1) t можно заменить на $t-1$, т.е. $\hat{x}_t = \alpha x_{t-1} + (1 - \alpha) \hat{x}_{t-1}$. Подставив это выражение в первоначальную формулу (1), получим

$$\hat{x}_{t+1} = \alpha x_t + \alpha(1 - \alpha)x_{t-1} + (1 - \alpha)^2 \hat{x}_{t-1}.$$

Выполняя последовательно аналогичные подстановки, получим следующее выражение для \hat{x}_{t+1}

$$\hat{x}_{t+1} = \alpha x_t + \alpha(1 - \alpha)x_{t-1} + \alpha(1 - \alpha)^2 x_{t-2} + \dots + \alpha(1 - \alpha)^{t-1} x_1 + (1 - \alpha)^t \hat{x}_1.$$

Поскольку из неравенства $0 < \alpha < 1$ следует, что $0 < 1 - \alpha < 1$, то $\alpha > \alpha(1 - \alpha) > \alpha(1 - \alpha)^2 \dots$. Другими словами, наблюдение x_t , имеет больший вес, чем наблюдение x_{t-1} , которое, в свою очередь, имеет больший вес, чем x_{t-2} . Это иллюстрирует основное свойство модели экспоненциального сглаживания — коэффициенты при x_k убывают при уменьшении номера k . Также можно показать, что сумма всех коэффициентов (включая коэффициент при x_1), равна 1.

Из приведенной формулы видно также, что значение \hat{x}_{t+1} является взвешенной суммой всех предыдущих наблюдений (включая последнее наблюдение x_t). Последнее слагаемое этой суммы является не статистическим наблюдением, а «предположением» \hat{x}_1 (можно предположить, например, что $\hat{x}_1 = x_1$). Очевидно, что с ростом t влияние \hat{x}_1 , на прогноз уменьшается, и в определенный момент им можно будет пренебречь. Даже если значение α достаточно малое (такое, что $(1 - \alpha)$ приблизительно равно 1), значение $(1 - \alpha)^t$ будет быстро убывать.

Значение параметра α сильно влияет на функционирование модели прогнозирования, поскольку α представляет собой вес самого последнего наблюдения x_t . Это значит, что следует назначать большее значение α в том случае, когда в модели наиболее прогностическим является именно последнее наблюдение. Если же α близко к 0, это означает практически полное доверие к прошлому прогнозу и игнорирование последнего наблюдения.

Перед менеджером возникает проблема: как наилучшим образом подобрать значение α ? В этом поможет средство Поиск решения. Чтобы найти оптимальное значение α (т.е. такое, при котором прогнозная кривая будет менее всего отклоняться от кривой значений временного ряда), выполните следующие действия.

1. Выберите команду Сервис -> Поиск решения.
2. В открывшемся диалоговом окне Поиск решения установите целевую ячейку G16 (см. лист «Экспо») и укажите, что ее значение должно быть минимальным.

3. Укажите, что изменяемой ячейкой является ячейка В1.
4. Введите ограничения $B1 > 0$ и $B1 < 1$
5. Щелкнув на кнопке Выполнить, получите результат, показанный на рис. 6.

| | A | B | C | D | E | F | G |
|----|---------|-------|---|----------|---------------------|---------|-------------------|
| 1 | альфа = | 1,000 | | Месяц | Объемы продаж, тыс. | Прогноз | Абсолютная ошибка |
| 2 | | | | Январь | 20 | 20,00 | |
| 3 | | | | Февраль | 24 | 20,00 | 4,00 |
| 4 | | | | Март | 27 | 24,00 | 3,00 |
| 5 | | | | Апрель | 31 | 27,00 | 4,00 |
| 6 | | | | Май | 37 | 31,00 | 6,00 |
| 7 | | | | Июнь | 47 | 37,00 | 10,00 |
| 8 | | | | Июль | 53 | 47,00 | 6,00 |
| 9 | | | | Август | 62 | 53,00 | 9,00 |
| 10 | | | | Сентябрь | 54 | 62,00 | 8,00 |
| 11 | | | | Октябрь | 36 | 54,00 | 18,00 |
| 12 | | | | Ноябрь | 32 | 36,00 | 4,00 |
| 13 | | | | Декабрь | 29 | 32,00 | 3,00 |
| 14 | | | | | | | |
| 15 | | | | | | Сумма = | 75,00 |
| 16 | | | | | | САО = | 6,82 |

Рис. 6

Опять, как и в методе взвешенного скользящего среднего, наилучший прогноз будет получен, если назначить весь вес последнему наблюдению. Следовательно, оптимальное значение α равно 1, при этом среднее абсолютных отклонений равно 6,82 (ячейка G16).

Метод экспоненциального сглаживания хорошо работает в ситуациях, когда интересующая нас переменная ведет себя стационарно, а ее отклонения от постоянного значения вызваны случайными факторами и не носят регулярного характера. Но этим методом, как и методами скользящего среднего не удастся спрогнозировать монотонно возрастающие или монотонно убывающие данные. Прогнозируемые значения будут всегда меньше или больше наблюдаемых, соответственно, а точность данных будет сравнима с точностью «наивного прогноза». Эти методы также не учитывают сезонных изменений показателя ряда.

Если статистические данные монотонно изменяются или подвержены сезонным изменениям, необходимы специальные методы прогнозирования, которые будут рассмотрены ниже.

Подбор кривой тренда. В качестве примера, воспользуемся данными объемов продаж, приведенные в таблице.

| Месяц | Объемы продаж, тыс. |
|-------|---------------------|
| 1 | 20 |
| 2 | 24 |

| | |
|----|----|
| 3 | 27 |
| 4 | 31 |
| 5 | 37 |
| 6 | 47 |
| 7 | 53 |
| 8 | 62 |
| 9 | 61 |
| 10 | 66 |
| 11 | 72 |
| 12 | 79 |

Вначале построим точечную диаграмму, отображающие реальные объемы продаж. Чтобы теперь построить по этим данным линию тренда, отражающую тенденцию в изменении объемов продаж, надо выполнить такие действия.

1. Кликните на любой точке выбранного ряда данных. В результате будут выделены все точки ряда.
2. Кликните правой кнопкой, и в появившемся меню выберите Добавить линию тренда.
3. В диалоговом окне Линия тренда по умолчанию будет выбран линейный тип функции.
4. Кликните на кнопке ОК.

После этого на графике появится прямая линия тренда (рис. 7).

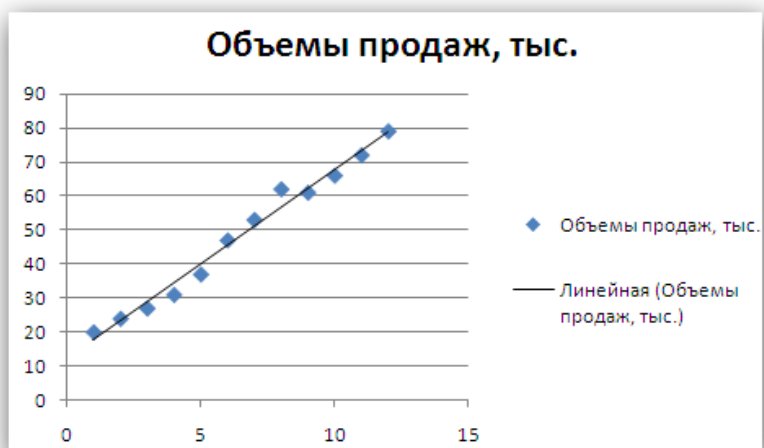


Рис. 7

Для того чтобы осуществить прогноз, нужно в диалоговом окне Линия тренда отметить интересующий интервал времени в пункте вперед на (или назад на).

В меню Линия тренда можно также задать параметры подбираемой кривой. Например, он может быть экспоненциальной или полиномом заданной степени.

В нашем случае кривой тренда является прямая линия с уравнением $x = at + b$. Коэффициенты a и b для этой кривой можно также найти с помощью надстройки Пакет Анализа, выбрав средство Регрессия.

Метод Хольта — представляет собой развитие метода экспоненциального сглаживания, с учетом наличия тренда. Формулировка метода имеет вид

$$\hat{y}_{t+k} = L_t + kT_t,$$

где

$$L_t = \alpha x_t + (1 - \alpha)(L_{t-1} + T_{t-1}),$$

$$T_t = \beta(L_t - L_{t-1}) + (1 - \beta)T_{t-1}.$$

Метод Хольта позволяет прогнозировать на k периодов времени вперед. Метод, как видно, использует два параметра α и β , значения которых находятся в пределах от 0 до 1. Переменная L , указывает на долгосрочный уровень значений или базовое значение данных временного ряда. Переменная T указывает на возможное возрастание или убывание значений за один период, т. е. на присутствие тренда.

Рассмотрим работу этого метода на следующем примере. Светлана работает аналитиком в большой брокерской фирме. На основе имеющихся у нее квартальных отчетов компании Startup Airlines она хочет спрогнозировать доход этой компании в следующем квартале. Имеющиеся данные и диаграмма, построенная на их основе, показаны на рисунке 8. Видно, что данные имеют явный тренд (почти монотонно возрастают). Светлана хочет применить метод Хольта, чтобы спрогнозировать значение прибыли на одну акцию на тринадцатый квартал. Для этого необходимо задать начальные значения для L и T . Есть несколько вариантов выбора: 1) L равно значению прибыли на одну акцию за первый квартал и $T = 0$; 2) L равно среднему значению прибыли на одну акцию за 12 кварталов и T равно среднему изменению за все 12 кварталов. Существуют и другие варианты начальных значений для L и T , но Светлана выбрала первый вариант.

Она решила воспользоваться средством Поиск решения, чтобы найти оптимальное значение параметров α и β , при которых значение среднего абсолютных ошибок в процентах было бы минимально. Для этого нужно выполнить такие действия.

1. Выбрать команду Сервис -> Поиск решения.
2. В открывшемся диалоговом окне Поиск решения задать ячейку F18 целевой и указать, что ее значение следует минимизировать.
3. В поле Изменяя ячейки ввести диапазон ячеек B1:B2. Добавить ограничения B1:B2 > 0 и B1:B2 < 1.
4. Кликнуть на кнопке Выполнить.

Полученный прогноз показан на рис. 9, 10. Как видно, оптимальными оказались значения $\alpha = 0,59$ и $\beta = 0,42$, при этом среднее абсолютных ошибок в процентах равно около 38%.

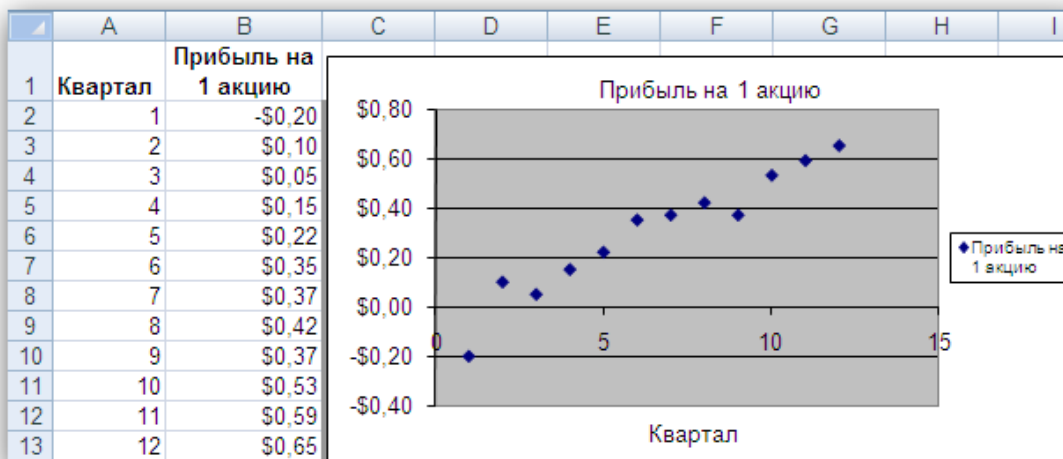


Рис. 8

| | A | B | C | D | E | F | G |
|----|---------|----------|----------|-------|---------------|----------------|--------|
| 1 | alpha = | 0,59 | | | | | |
| 2 | beta = | 0,42 | | | | | |
| 3 | | | | | | | |
| 4 | Квартал | П/А | Li | Ti | Прогноз П/А | Абс. ошибка, % | |
| 5 | 1 | \$ -0,20 | \$ -0,20 | 0 | Не определено | Не определено | |
| 6 | 2 | \$ 0,10 | \$ -0,02 | 0,074 | \$ -0,20 | 300,0% | |
| 7 | 3 | \$ 0,05 | \$ 0,05 | 0,074 | \$ 0,05 | 2,7% | |
| 8 | 4 | \$ 0,15 | \$ 0,14 | 0,080 | \$ 0,12 | 17,0% | |
| 9 | 5 | \$ 0,22 | \$ 0,22 | 0,080 | \$ 0,22 | 0,1% | |
| 10 | 6 | \$ 0,35 | \$ 0,33 | 0,093 | \$ 0,30 | 14,2% | |
| 11 | 7 | \$ 0,37 | \$ 0,39 | 0,080 | \$ 0,42 | 14,1% | |
| 12 | 8 | \$ 0,42 | \$ 0,44 | 0,067 | \$ 0,47 | 12,2% | |
| 13 | 9 | \$ 0,37 | \$ 0,43 | 0,033 | \$ 0,51 | 37,3% | |
| 14 | 10 | \$ 0,53 | \$ 0,50 | 0,050 | \$ 0,46 | 13,3% | |
| 15 | 11 | \$ 0,59 | \$ 0,57 | 0,060 | \$ 0,55 | 6,5% | |
| 16 | 12 | \$ 0,65 | \$ 0,64 | 0,064 | \$ 0,63 | 2,5% | |
| 17 | | | | | \$ 0,71 | | |
| 18 | | | | | | 38,2% | = СООП |

Рис. 9

| | A | B | C | D | E | F |
|----|---------|------|----------------------------|----------------------------|----------------|-------------------|
| 1 | alpha = | 0,59 | | | | |
| 2 | beta = | 0,42 | | | | |
| 3 | | | | | | |
| 4 | Квартал | П/А | Li | Ti | Прогноз П/А | Абс. ошибка, % |
| 5 | 1 | -0,2 | =B5 | 0 | Не определено | Не определено |
| 6 | 2 | 0,1 | =BS1*B6+(1-BS1)*(C5+D5) | =BS2*(C6-C5)+(1-BS2)*D5 | =СУММ(C5:D5) | =ABS(B6-E6)/B6 |
| 7 | 3 | 0,05 | =BS1*B7+(1-BS1)*(C6+D6) | =BS2*(C7-C6)+(1-BS2)*D6 | =СУММ(C6:D6) | =ABS(B7-E7)/B7 |
| 8 | 4 | 0,15 | =BS1*B8+(1-BS1)*(C7+D7) | =BS2*(C8-C7)+(1-BS2)*D7 | =СУММ(C7:D7) | =ABS(B8-E8)/B8 |
| 9 | 5 | 0,22 | =BS1*B9+(1-BS1)*(C8+D8) | =BS2*(C9-C8)+(1-BS2)*D8 | =СУММ(C8:D8) | =ABS(B9-E9)/B9 |
| 10 | 6 | 0,35 | =BS1*B10+(1-BS1)*(C9+D9) | =BS2*(C10-C9)+(1-BS2)*D9 | =СУММ(C9:D9) | =ABS(B10-E10)/B10 |
| 11 | 7 | 0,37 | =BS1*B11+(1-BS1)*(C10+D10) | =BS2*(C11-C10)+(1-BS2)*D10 | =СУММ(C10:D10) | =ABS(B11-E11)/B11 |
| 12 | 8 | 0,42 | =BS1*B12+(1-BS1)*(C11+D11) | =BS2*(C12-C11)+(1-BS2)*D11 | =СУММ(C11:D11) | =ABS(B12-E12)/B12 |
| 13 | 9 | 0,37 | =BS1*B13+(1-BS1)*(C12+D12) | =BS2*(C13-C12)+(1-BS2)*D12 | =СУММ(C12:D12) | =ABS(B13-E13)/B13 |
| 14 | 10 | 0,53 | =BS1*B14+(1-BS1)*(C13+D13) | =BS2*(C14-C13)+(1-BS2)*D13 | =СУММ(C13:D13) | =ABS(B14-E14)/B14 |
| 15 | 11 | 0,59 | =BS1*B15+(1-BS1)*(C14+D14) | =BS2*(C15-C14)+(1-BS2)*D14 | =СУММ(C14:D14) | =ABS(B15-E15)/B15 |
| 16 | 12 | 0,65 | =BS1*B16+(1-BS1)*(C15+D15) | =BS2*(C16-C15)+(1-BS2)*D15 | =СУММ(C15:D15) | =ABS(B16-E16)/B16 |
| 17 | | | | | =СУММ(C16:D16) | |
| 18 | | | | | | =СРЗНАЧ(F6:F16) |

Рис. 10

Однако метод Хольта, как и рассмотренные ранее простейшие методы прогнозирования, не учитывает наличие во временном ряде сезонных изменений.

Учет сезонных изменений. Спрос на значительное число товаров меняется в течение года. Например, если посмотреть на объемы продаж мороженого по месяцам, то можно увидеть в теплые месяцы (с июня по август в северном полушарии) более высокий уровень продаж, чем зимой, и так каждый год. Здесь сезонные колебания имеют период в 12 месяцев. Другой пример: анализируются еженедельные отчеты о количестве постояльцев, которые оставались на ночь в отеле, расположенном в бизнес-центре города. Предположительно можно сказать, что большое число клиентов ожидается в ночи на вторник, среду и четверг, меньше всего клиентов будет в ночи на субботу и воскресенье, и среднее число постояльцев ожидается в ночи на пятницу и понедельник. Такая структура данных, отображающая количество клиентов в разные дни недели, будет повторяться через каждые семь дней.

Подобные циклические изменения показателя временного ряда носят название *сезонных колебаний* (хотя сезон, как мы видели, может продлиться и неделю и год). Процедура, которая позволяет сделать прогноз с учетом сезонных изменений, состоит из следующих этапов.

1. На основе исходных данных определяется структура сезонных колебаний и период этих колебаний.
2. Используя численный метод, описанный далее, из исходных данных исключают сезонную составляющую.
3. На основе данных, из которых исключена сезонная составляющая, делается наилучший возможный прогноз.
4. К полученному прогнозу добавляется сезонная составляющая.

Проиллюстрируем этот подход на данных об объемах сбыта угля (измеряемого в тысячах тонн) в США на протяжении девяти лет. Пусть некто Фрэнк работает менеджером в компании Gillette Coal Mine, и ему необходимо спрогнозировать спрос на уголь на ближайшие два квартала. Он ввел данные по всей угольной отрасли в рабочую книгу (рис. 11) и построил по этим данным график (рис. 12).

| <u>Период</u> <u>год-квартал</u> | <u>Исходные</u> <u>данные</u> |
|-------------------------------------|----------------------------------|
| 1-1 | 2 159 |
| 1-2 | 1 203 |
| 1-3 | 1 094 |
| 1-4 | 1 996 |
| 2-1 | 2 081 |
| 2-2 | 1 332 |
| 2-3 | 1 476 |
| 2-4 | 2 533 |
| 3-1 | 2 249 |
| 3-2 | 1 533 |
| 3-3 | 1 935 |
| 3-4 | 2 523 |
| 4-1 | 2 208 |
| 4-2 | 1 597 |
| 4-3 | 1 917 |
| 4-4 | 2 726 |
| 5-1 | 2 612 |
| 5-2 | 1 931 |
| 5-3 | 2 223 |
| 5-4 | 2 363 |
| 6-1 | 2 074 |
| 6-2 | 1 589 |
| 6-3 | 1 673 |
| 6-4 | 2 443 |
| 7-1 | 2 231 |
| 7-2 | 1 675 |
| 7-3 | 1 503 |
| 7-4 | 2 259 |
| 8-1 | 1 809 |
| 8-2 | 1 254 |
| 8-3 | 1 613 |
| 8-4 | 2 238 |
| 9-1 | 2 004 |
| 9-2 | 1 406 |
| 9-3 | 1 725 |
| 9-4 | 1 994 |
| 10-1 | |
| 10-2 | |

Рис. 11

Определение структура и периода сезонных колебаний. Из графика на рис. 12 видно, что объемы продаж выше среднего уровня в первом и четвертом кварталах (зимнее время года) и ниже среднего во втором и третьем кварталах (весенне-летние месяцы).

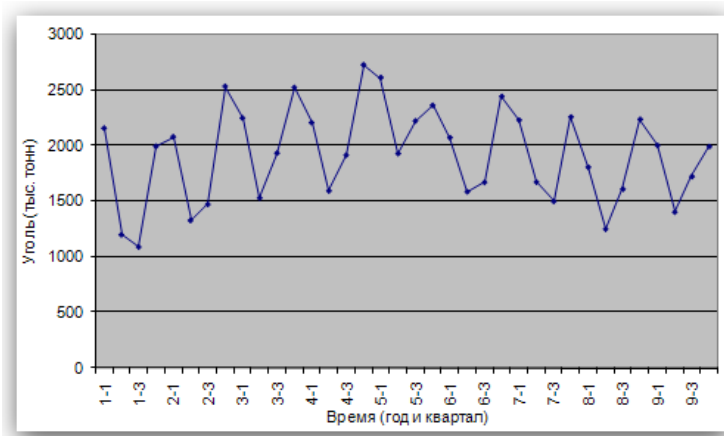


Рис. 12

Исключение сезонной составляющей. Сначала необходимо вычислить среднее значение всех отклонений за один период сезонных изменений. Чтобы исключить сезонную составляющую в пределах одного года, используются данные за четыре периода (квартала). А чтобы исключить сезонную составляющую из всего временного ряда, вычисляется последовательность скользящих средних по T узлам, где T — продолжительность сезонных колебаний. Для выполнения необходимых вычислений Фрэнк использовал столбцы C и D, как показано на рис. ниже. Столбец C содержит значения скользящего среднего по 4 узлам на основе данных, которые находятся в столбце B.

Теперь надо назначить полученные значения скользящего среднего средним точкам последовательности данных, на основе которых эти значения были вычислены. Эта операция называется *центрированием* значений. Если T нечетное, то первое значение скользящего среднего (среднее значений от первой до T -й точки) надо присвоить $(T + 1)/2$ точке (например, если $T = 7$, то первое скользящее среднее будет назначено четвертой точке). Аналогично среднее значений от второй до $(T + 1)$ -й точки центрируется в $(T + 3)/2$ точке и т. д. Центр n -го интервала находится в точке $(T + (2n - 1))/2$.

Если T четное, как в рассматриваемом случае, то задача несколько усложняется, поскольку здесь центральные (средние) точки расположены между точками, по которым вычислялось значение скользящего среднего. Поэтому центрированное значение для третьей точки вычисляется как среднее первого и второго значений скользящего среднего. Например, первое число в столбце D отцентрированных средних на рис. 13, слева равняется $(1613 + 1594)/2 = 1603$.

| | A | B | C | D | | A | B | C | D |
|----|-------------|--------|---------|---------|----|-------------|--------|--------------------|--------------------|
| 7 | год-квартал | данные | средние | средние | 7 | год-квартал | данные | средние | средние |
| 8 | 1-1 | 2 159 | ----- | ----- | 8 | 1-1 | 2159 | ----- | ----- |
| 9 | 1-2 | 1 203 | ----- | ----- | 9 | 1-2 | 1203 | ----- | ----- |
| 10 | 1-3 | 1 094 | ✓ 1 613 | 1 603 | 10 | 1-3 | 1094 | =CPSНАЧ (B9: B11) | =CPSНАЧ (C10: C11) |
| 11 | 1-4 | 1 996 | ✓ 1 594 | 1 610 | 11 | 1-4 | 1996 | =CPSНАЧ (B9: B12) | =CPSНАЧ (C11: C12) |
| 12 | 2-1 | 2 081 | ✓ 1 626 | 1 674 | 12 | 2-1 | 2081 | =CPSНАЧ (B10: B13) | =CPSНАЧ (C12: C13) |
| 13 | 2-2 | 1 332 | ✓ 1 721 | 1 788 | 13 | 2-2 | 1332 | =CPSНАЧ (B11: B14) | =CPSНАЧ (C13: C14) |
| 14 | 2-3 | 1 476 | ✓ 1 856 | 1 877 | 14 | 2-3 | 1476 | =CPSНАЧ (B12: B15) | =CPSНАЧ (C14: C15) |
| 15 | 2-4 | 2 533 | ✓ 1 898 | 1 923 | 15 | 2-4 | 2533 | =CPSНАЧ (B13: B16) | =CPSНАЧ (C15: C16) |
| 16 | 3-1 | 2 249 | ✓ 1 948 | 2 005 | 16 | 3-1 | 2249 | =CPSНАЧ (B14: B17) | =CPSНАЧ (C16: C17) |
| 17 | 3-2 | 1 533 | ✓ 2 063 | 2 061 | 17 | 3-2 | 1533 | =CPSНАЧ (B15: B18) | =CPSНАЧ (C17: C18) |
| 18 | 3-3 | 1 935 | ✓ 2 060 | 2 055 | 18 | 3-3 | 1935 | =CPSНАЧ (B16: B19) | =CPSНАЧ (C18: C19) |
| 19 | 3-4 | 2 523 | ✓ 2 050 | 2 058 | 19 | 3-4 | 2523 | =CPSНАЧ (B17: B20) | =CPSНАЧ (C19: C20) |
| 20 | 4-1 | 2 208 | ✓ 2 066 | 2 064 | 20 | 4-1 | 2208 | =CPSНАЧ (B18: B21) | =CPSНАЧ (C20: C21) |
| 21 | 4-2 | 1 597 | ✓ 2 061 | 2 087 | 21 | 4-2 | 1597 | =CPSНАЧ (B19: B22) | =CPSНАЧ (C21: C22) |
| 22 | 4-3 | 1 917 | ✓ 2 112 | 2 163 | 22 | 4-3 | 1917 | =CPSНАЧ (B20: B23) | =CPSНАЧ (C22: C23) |
| 23 | 4-4 | 2 726 | ✓ 2 213 | 2 255 | 23 | 4-4 | 2726 | =CPSНАЧ (B21: B24) | =CPSНАЧ (C23: C24) |
| 24 | 5-1 | 2 612 | ✓ 2 297 | 2 335 | 24 | 5-1 | 2612 | =CPSНАЧ (B22: B25) | =CPSНАЧ (C24: C25) |
| 25 | 5-2 | 1 931 | ✓ 2 373 | 2 328 | 25 | 5-2 | 1931 | =CPSНАЧ (B23: B26) | =CPSНАЧ (C25: C26) |
| 26 | 5-3 | 2 223 | ✓ 2 282 | 2 215 | 26 | 5-3 | 2223 | =CPSНАЧ (B24: B27) | =CPSНАЧ (C26: C27) |
| 27 | 5-4 | 2 363 | ✓ 2 148 | 2 105 | 27 | 5-4 | 2363 | =CPSНАЧ (B25: B28) | =CPSНАЧ (C27: C28) |
| 28 | 6-1 | 2 074 | ✓ 2 062 | 1 994 | 28 | 6-1 | 2074 | =CPSНАЧ (B26: B29) | =CPSНАЧ (C28: C29) |
| 29 | 6-2 | 1 589 | ✓ 1 925 | 1 935 | 29 | 6-2 | 1589 | =CPSНАЧ (B27: B30) | =CPSНАЧ (C29: C30) |
| 30 | 6-3 | 1 673 | ✓ 1 945 | 1 964 | 30 | 6-3 | 1673 | =CPSНАЧ (B28: B31) | =CPSНАЧ (C30: C31) |
| 31 | 6-4 | 2 443 | ✓ 1 984 | 1 995 | 31 | 6-4 | 2443 | =CPSНАЧ (B29: B32) | =CPSНАЧ (C31: C32) |
| 32 | 7-1 | 2 231 | ✓ 2 006 | 1 984 | 32 | 7-1 | 2231 | =CPSНАЧ (B30: B33) | =CPSНАЧ (C32: C33) |
| 33 | 7-2 | 1 675 | ✓ 1 963 | 1 940 | 33 | 7-2 | 1675 | =CPSНАЧ (B31: B34) | =CPSНАЧ (C33: C34) |
| 34 | 7-3 | 1 503 | ✓ 1 917 | 1 864 | 34 | 7-3 | 1503 | =CPSНАЧ (B32: B35) | =CPSНАЧ (C34: C35) |
| 35 | 7-4 | 2 259 | ✓ 1 812 | 1 759 | 35 | 7-4 | 2259 | =CPSНАЧ (B33: B36) | =CPSНАЧ (C35: C36) |
| 36 | 8-1 | 1 809 | ✓ 1 706 | 1 720 | 36 | 8-1 | 1809 | =CPSНАЧ (B34: B37) | =CPSНАЧ (C36: C37) |
| 37 | 8-2 | 1 254 | ✓ 1 734 | 1 731 | 37 | 8-2 | 1254 | =CPSНАЧ (B35: B38) | =CPSНАЧ (C37: C38) |
| 38 | 8-3 | 1 613 | ✓ 1 729 | 1 753 | 38 | 8-3 | 1613 | =CPSНАЧ (B36: B39) | =CPSНАЧ (C38: C39) |
| 39 | 8-4 | 2 238 | ✓ 1 777 | 1 796 | 39 | 8-4 | 2238 | =CPSНАЧ (B37: B40) | =CPSНАЧ (C39: C40) |
| 40 | 9-1 | 2 004 | ✓ 1 815 | 1 829 | 40 | 9-1 | 2004 | =CPSНАЧ (B38: B41) | =CPSНАЧ (C40: C41) |
| 41 | 9-2 | 1 406 | ✓ 1 843 | 1 813 | 41 | 9-2 | 1406 | =CPSНАЧ (B39: B42) | =CPSНАЧ (C41: C42) |
| 42 | 9-3 | 1 725 | ✓ 1 782 | ----- | 42 | 9-3 | 1725 | =CPSНАЧ (B40: B43) | ----- |
| 43 | 9-4 | 1 994 | ----- | ----- | 43 | 9-4 | 1994 | ----- | ----- |
| 44 | 10-1 | | | | 44 | 10-1 | | | |
| 45 | 10-2 | | | | 45 | 10-2 | | | |

Рис. 13

На рис. 14 показаны графики исходных данных и отцентрированных средних.

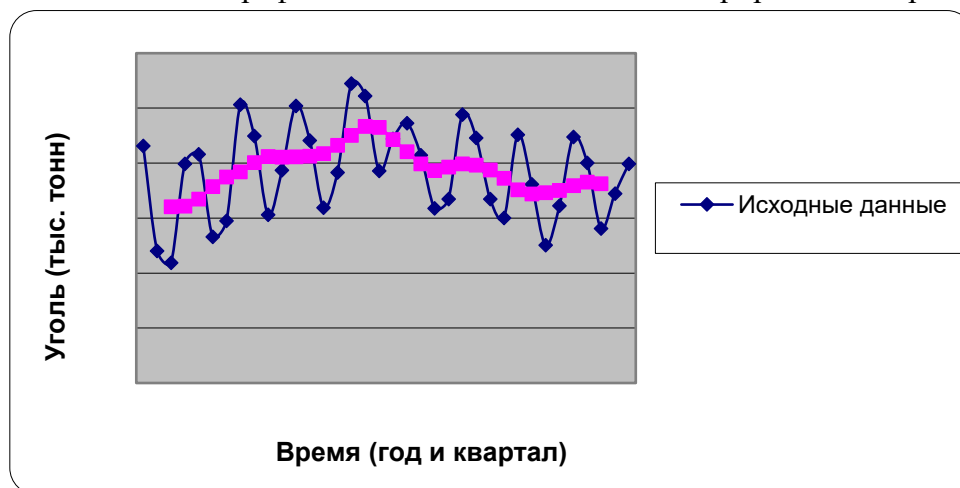


Рис. 14

Далее находим отношения значений точек данных к соответствующим значениям отцентрированных средних (рис. 15). Поскольку точкам в начале и конце последовательности данных нет соответствующих отцентрированных средних (см. первые и последние значения в столбце D), такое действие на эти точки не распространяется. Эти отношения показывают

степень отклонения значений данных относительно типового уровня, определяемого отцентрированными средними. Заметим, что значения отношений для третьих кварталов меньше 1, а для четвертых — больше 1.

| | В | С | Д | Е | | А | Е |
|----|----------|--------------------|--------------------|------------------------|----|-------------|------------------------|
| 6 | Исходные | Смользящие | Центрированные | Отношения данных к | 6 | Период | Отношения данных к |
| 7 | данные | средние | средние | центрированным средним | 7 | год-квартал | центрированным средним |
| 8 | 2159 | ----- | ----- | ----- | 8 | 1-1 | ----- |
| 9 | 1203 | ----- | ----- | ----- | 9 | 1-2 | ----- |
| 10 | 1094 | =СРСНАЧ (В8: В11) | =СРСНАЧ (С10: С11) | =В10/Д10 | 10 | 1-3 | 0,682 |
| 11 | 1996 | =СРСНАЧ (В9: В12) | =СРСНАЧ (С11: С12) | =В11/Д11 | 11 | 1-4 | 1,240 |
| 12 | 2081 | =СРСНАЧ (В10: В13) | =СРСНАЧ (С12: С13) | =В12/Д12 | 12 | 2-1 | 1,244 |
| 13 | 1332 | =СРСНАЧ (В11: В14) | =СРСНАЧ (С13: С14) | =В13/Д13 | 13 | 2-2 | 0,745 |
| 14 | 1476 | =СРСНАЧ (В12: В15) | =СРСНАЧ (С14: С15) | =В14/Д14 | 14 | 2-3 | 0,787 |
| 15 | 2533 | =СРСНАЧ (В13: В16) | =СРСНАЧ (С15: С16) | =В15/Д15 | 15 | 2-4 | 1,317 |
| 16 | 2249 | =СРСНАЧ (В14: В17) | =СРСНАЧ (С16: С17) | =В16/Д16 | 16 | 3-1 | 1,122 |
| 17 | 1533 | =СРСНАЧ (В15: В18) | =СРСНАЧ (С17: С18) | =В17/Д17 | 17 | 3-2 | 0,744 |
| 18 | 1935 | =СРСНАЧ (В16: В19) | =СРСНАЧ (С18: С19) | =В18/Д18 | 18 | 3-3 | 0,942 |
| 19 | 2523 | =СРСНАЧ (В17: В20) | =СРСНАЧ (С19: С20) | =В19/Д19 | 19 | 3-4 | 1,226 |
| 20 | 2208 | =СРСНАЧ (В18: В21) | =СРСНАЧ (С20: С21) | =В20/Д20 | 20 | 4-1 | 1,070 |
| 21 | 1597 | =СРСНАЧ (В19: В22) | =СРСНАЧ (С21: С22) | =В21/Д21 | 21 | 4-2 | 0,765 |
| 22 | 1917 | =СРСНАЧ (В20: В23) | =СРСНАЧ (С22: С23) | =В22/Д22 | 22 | 4-3 | 0,886 |
| 23 | 2726 | =СРСНАЧ (В21: В24) | =СРСНАЧ (С23: С24) | =В23/Д23 | 23 | 4-4 | 1,209 |
| 24 | 2612 | =СРСНАЧ (В22: В25) | =СРСНАЧ (С24: С25) | =В24/Д24 | 24 | 5-1 | 1,119 |
| 25 | 1931 | =СРСНАЧ (В23: В26) | =СРСНАЧ (С25: С26) | =В25/Д25 | 25 | 5-2 | 0,830 |
| 26 | 2223 | =СРСНАЧ (В24: В27) | =СРСНАЧ (С26: С27) | =В26/Д26 | 26 | 5-3 | 1,004 |
| 27 | 2363 | =СРСНАЧ (В25: В28) | =СРСНАЧ (С27: С28) | =В27/Д27 | 27 | 5-4 | 1,123 |
| 28 | 2074 | =СРСНАЧ (В26: В29) | =СРСНАЧ (С28: С29) | =В28/Д28 | 28 | 6-1 | 1,040 |
| 29 | 1589 | =СРСНАЧ (В27: В30) | =СРСНАЧ (С29: С30) | =В29/Д29 | 29 | 6-2 | 0,821 |
| 30 | 1673 | =СРСНАЧ (В28: В31) | =СРСНАЧ (С30: С31) | =В30/Д30 | 30 | 6-3 | 0,852 |
| 31 | 2443 | =СРСНАЧ (В29: В32) | =СРСНАЧ (С31: С32) | =В31/Д31 | 31 | 6-4 | 1,225 |
| 32 | 2231 | =СРСНАЧ (В30: В33) | =СРСНАЧ (С32: С33) | =В32/Д32 | 32 | 7-1 | 1,124 |
| 33 | 1675 | =СРСНАЧ (В31: В34) | =СРСНАЧ (С33: С34) | =В33/Д33 | 33 | 7-2 | 0,863 |
| 34 | 1503 | =СРСНАЧ (В32: В35) | =СРСНАЧ (С34: С35) | =В34/Д34 | 34 | 7-3 | 0,806 |
| 35 | 2259 | =СРСНАЧ (В33: В36) | =СРСНАЧ (С35: С36) | =В35/Д35 | 35 | 7-4 | 1,284 |
| 36 | 1809 | =СРСНАЧ (В34: В37) | =СРСНАЧ (С36: С37) | =В36/Д36 | 36 | 8-1 | 1,052 |
| 37 | 1254 | =СРСНАЧ (В35: В38) | =СРСНАЧ (С37: С38) | =В37/Д37 | 37 | 8-2 | 0,724 |
| 38 | 1613 | =СРСНАЧ (В36: В39) | =СРСНАЧ (С38: С39) | =В38/Д38 | 38 | 8-3 | 0,920 |
| 39 | 2238 | =СРСНАЧ (В37: В40) | =СРСНАЧ (С39: С40) | =В39/Д39 | 39 | 8-4 | 1,246 |
| 40 | 2004 | =СРСНАЧ (В38: В41) | =СРСНАЧ (С40: С41) | =В40/Д40 | 40 | 9-1 | 1,096 |
| 41 | 1406 | =СРСНАЧ (В39: В42) | =СРСНАЧ (С41: С42) | =В41/Д41 | 41 | 9-2 | 0,776 |
| 42 | 1725 | ----- | ----- | ----- | 42 | 9-3 | ----- |
| 43 | 1994 | ----- | ----- | ----- | 43 | 9-4 | ----- |
| 44 | | | | | 44 | 10-1 | |
| 45 | | | | | 45 | 10-2 | |

Рис. 15

Эти отношения являются основой для создания сезонных индексов. Для их вычисления группируются вычисленные отношения по кварталам, как показано на рис. 16 в столбцах G—O.

| Е | Г | Д | Е | Ж | З | И | К | Л | М | Н | О |
|-------|---------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|---|
| 1,108 | 1-й кв. | ----- | 1,244 | ##### | 1,070 | 1,119 | 1,040 | 1,124 | 1,052 | 1,096 | |
| 0,784 | 2-й кв. | ----- | 0,745 | ##### | 0,765 | 0,830 | 0,821 | 0,863 | 0,724 | 0,776 | |
| 0,860 | 3-й кв. | 0,682 | 0,787 | ##### | 0,886 | 1,004 | 0,852 | 0,806 | 0,920 | ----- | |
| 1,234 | 4-й кв. | 1,240 | 1,317 | ##### | 1,209 | 1,123 | 1,225 | 1,284 | 1,246 | ----- | |

Рис. 16

Затем находятся средние значения отношений по каждому кварталу (столбец Е на рис. 15). Например, среднее всех отношений для первого квартала равно 1,108. Это значение является сезонным индексом первого квартала, на основе которого можно сделать вывод, что объем сбыта угля за первый квартал составляет в среднем около 110,8% относительного среднего годового объема сбыта.

Сезонный индекс — это среднее отношение данных, относящихся к одному сезону (в данном случае сезоном является квартал), ко всем данным. Если сезонный индекс больше 1, значит, показатели этого сезона выше средних показателей за год, аналогично, если сезонный индекс ниже 1, то показатели сезона ниже средних показателей за год.

Наконец, чтобы исключить из исходных данных сезонную составляющую, следует поделить значения исходных данных на соответствующий сезонный индекс. Результаты этой операции приведены в столбцах F и G (рис. 17). График данных, которые уже не содержат сезонной составляющей, представлен на рис. 18.

| № | Б | Г | Д | Е |
|----|----------|----------|---------------------|---------|
| 6 | Исходные | Сезонные | Данные без сезонной | Н |
| 7 | данные | индекс | составляющей | Прогноз |
| 8 | 2 159 | 1,108 | 1 948,1 | 1 948,1 |
| 9 | 1 203 | 0,784 | 1 535,4 | 1 948,1 |
| 10 | 1 094 | 0,860 | 1 272,3 | 1 678,5 |
| 11 | 1 996 | 1,234 | 1 617,8 | 1 413,1 |
| 12 | 2 081 | 1,108 | 1 877,8 | 1 546,8 |
| 13 | 1 332 | 0,784 | 1 700,0 | 1 763,0 |
| 14 | 1 476 | 0,860 | 1 716,6 | 1 721,9 |
| 15 | 2 533 | 1,234 | 2 059,1 | 1 718,4 |
| 16 | 2 249 | 1,108 | 2 029,3 | 1 937,1 |
| 17 | 1 533 | 0,784 | 1 956,5 | 1 997,4 |
| 18 | 1 935 | 0,860 | 2 250,4 | 1 970,7 |
| 19 | 2 523 | 1,234 | 2 045,0 | 2 153,4 |
| 20 | 2 208 | 1,108 | 1 992,3 | 2 082,6 |
| 21 | 1 597 | 0,784 | 2 038,2 | 2 023,6 |
| 22 | 1 917 | 0,860 | 2 229,5 | 2 033,2 |
| 23 | 2 726 | 1,234 | 2 209,5 | 2 161,4 |
| 24 | 2 612 | 1,108 | 2 356,9 | 2 192,8 |
| 25 | 1 931 | 0,784 | 2 464,5 | 2 300,0 |
| 26 | 2 223 | 0,860 | 2 585,3 | 2 407,5 |
| 27 | 2 363 | 1,234 | 1 915,3 | 2 523,7 |
| 28 | 2 074 | 1,108 | 1 871,4 | 2 126,2 |
| 29 | 1 589 | 0,784 | 2 028,0 | 1 959,7 |
| 30 | 1 673 | 0,860 | 1 945,7 | 2 004,4 |
| 31 | 2 443 | 1,234 | 1 980,1 | 1 966,0 |
| 32 | 2 231 | 1,108 | 2 013,1 | 1 975,2 |
| 33 | 1 675 | 0,784 | 2 137,8 | 2 000,0 |
| 34 | 1 503 | 0,860 | 1 748,0 | 2 090,0 |
| 35 | 2 259 | 1,234 | 1 831,0 | 1 866,5 |
| 36 | 1 809 | 1,108 | 1 632,3 | 1 843,3 |
| 37 | 1 254 | 0,784 | 1 600,5 | 1 705,5 |
| 38 | 1 613 | 0,860 | 1 875,9 | 1 636,9 |
| 39 | 2 238 | 1,234 | 1 814,0 | 1 793,0 |
| 40 | 2 004 | 1,108 | 1 808,3 | 1 806,7 |
| 41 | 1 406 | 0,784 | 1 794,5 | 1 807,7 |
| 42 | 1 725 | 0,860 | 2 006,2 | 1 799,1 |
| 43 | 1 994 | 1,234 | 1 616,2 | 1 934,4 |
| 44 | | | | 1 726,5 |

| № | Б | Г | Д |
|----|----------|----------|---------------------|
| 6 | Исходные | Сезонные | Данные без сезонной |
| 7 | данные | индекс | составляющей |
| 8 | 2159 | =B8/F8 | =B8/F8 |
| 9 | 1203 | =B9/F9 | =B9/F9 |
| 10 | 1094 | =B10/F10 | =B10/F10 |
| 11 | 1996 | =B11/F11 | =B11/F11 |
| 12 | 2081 | =B12/F12 | =B12/F12 |
| 13 | 1332 | =B13/F13 | =B13/F13 |
| 14 | 1476 | =B14/F14 | =B14/F14 |
| 15 | 2533 | =B15/F15 | =B15/F15 |
| 16 | 2249 | =B16/F16 | =B16/F16 |
| 17 | 1533 | =B17/F17 | =B17/F17 |
| 18 | 1935 | =B18/F18 | =B18/F18 |
| 19 | 2523 | =B19/F19 | =B19/F19 |
| 20 | 2208 | =B20/F20 | =B20/F20 |
| 21 | 1597 | =B21/F21 | =B21/F21 |
| 22 | 1917 | =B22/F22 | =B22/F22 |
| 23 | 2726 | =B23/F23 | =B23/F23 |
| 24 | 2612 | =B24/F24 | =B24/F24 |
| 25 | 1931 | =B25/F25 | =B25/F25 |
| 26 | 2223 | =B26/F26 | =B26/F26 |
| 27 | 2363 | =B27/F27 | =B27/F27 |
| 28 | 2074 | =B28/F28 | =B28/F28 |
| 29 | 1589 | =B29/F29 | =B29/F29 |
| 30 | 1673 | =B30/F30 | =B30/F30 |
| 31 | 2443 | =B31/F31 | =B31/F31 |
| 32 | 2231 | =B32/F32 | =B32/F32 |
| 33 | 1675 | =B33/F33 | =B33/F33 |
| 34 | 1503 | =B34/F34 | =B34/F34 |
| 35 | 2259 | =B35/F35 | =B35/F35 |
| 36 | 1809 | =B36/F36 | =B36/F36 |
| 37 | 1254 | =B37/F37 | =B37/F37 |
| 38 | 1613 | =B38/F38 | =B38/F38 |
| 39 | 2238 | =B39/F39 | =B39/F39 |
| 40 | 2004 | =B40/F40 | =B40/F40 |
| 41 | 1406 | =B41/F41 | =B41/F41 |
| 42 | 1725 | =B42/F42 | =B42/F42 |
| 43 | 1994 | =B43/F43 | =B43/F43 |
| 44 | | | |

Рис. 17

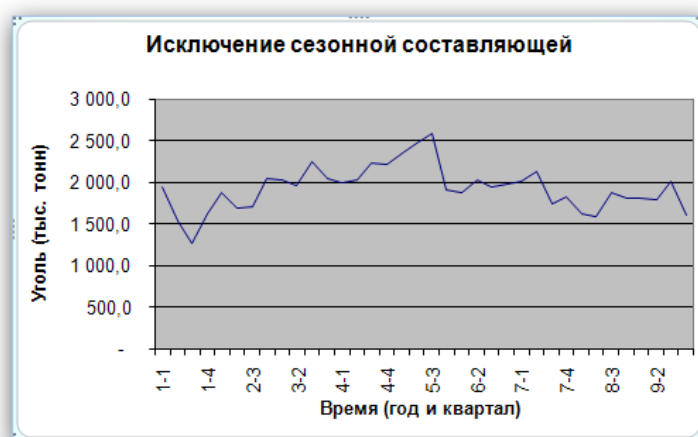


Рис. 18

Прогнозирование без сезонной составляющей. На основе данных, из которых исключена сезонная составляющая, строится прогноз. Для этого используется

соответствующий метод, который учитывает характер поведения данных (например, данные имеют тренд или относительно постоянны). В этом примере прогноз строится с помощью простого экспоненциального сглаживания. Оптимальное значение параметра α находится с помощью средства Поиск решения. Графики прогноза и реальных данных с исключенной сезонной составляющей приведены на рис. 19.

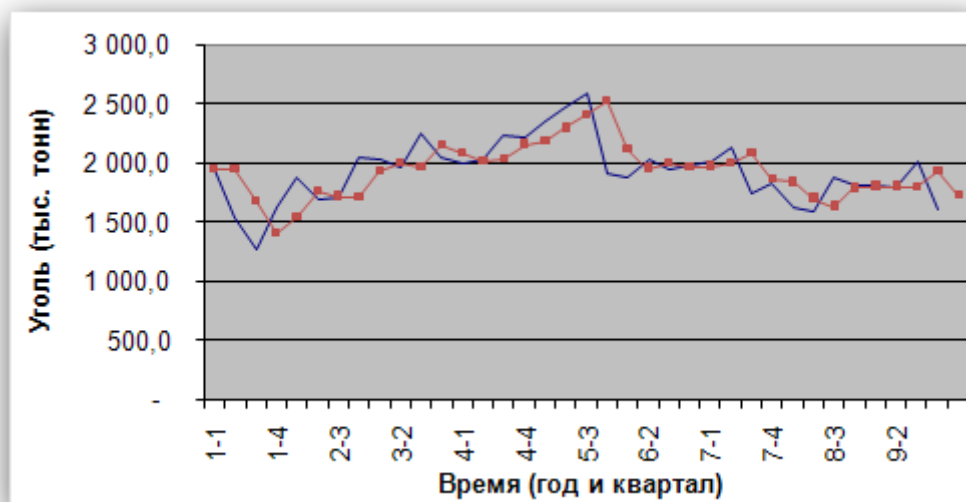


Рис. 19

Учет сезонной структуры. Теперь нужно учесть в полученном прогнозе (1726,5) сезонную составляющую. Для этого следует умножить 1726 на сезонный индекс первого квартала 1,108, в результате чего получим значение 1912. Аналогичная операция (умножение 1726 на сезонный индекс 0,784) даст прогноз на второй квартал, равный 1353. Результат добавления сезонной структуры к полученному прогнозу показан на рис. 20.

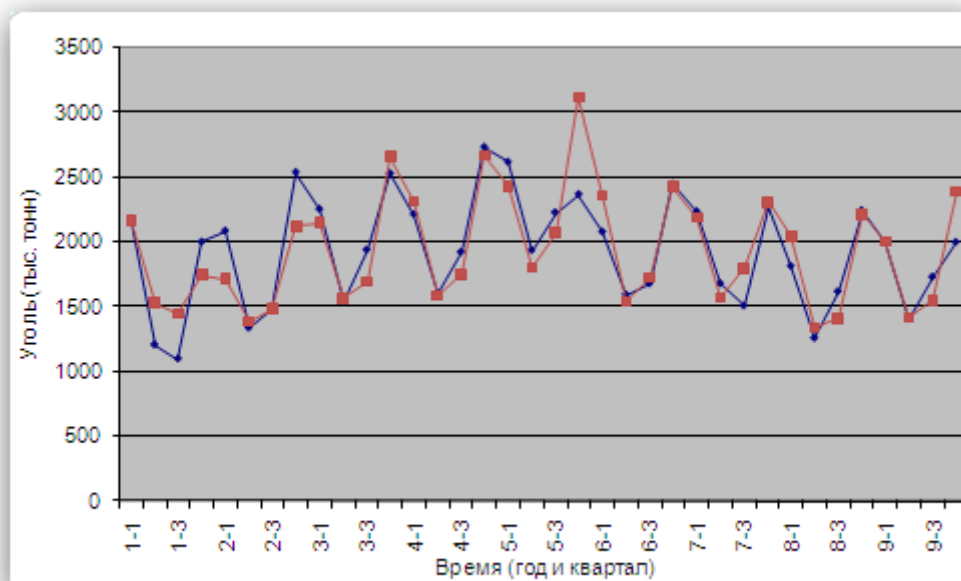


Рис. 20

Практическая работа №6

Тема: Методы анализа временных рядов

Цель: Приобрести навыки прогнозирования значений временного ряда, в частности, выделения тренда и учета сезонной составляющей, а также навыки использования средств Пакет Анализа и Поиск решения, входящих в MS Excel.

Порядок выполнения работы:

- 1) Прогнозирование значений временного ряда. Для каждой задачи необходимо:
 14. Изучить теорию.
 15. Построить график значений временного ряда.
 16. Построить графики прогнозируемых значений (для каждого из полученных прогнозов).
 17. Вычислить САО или СООП
 18. Ответить на вопросы задачи.
- 2) Составление отчёта по лабораторной работе, в котором представляется:
 - формулировка индивидуального задания;
 - ответы на вопросы задачи;
 - при необходимости, снимки экрана монитора, содержащие основные моменты решения задачи;
 - графики значений временного ряда и прогноза.

Варианты заданий

Вариант 1

Дан временной ряд

| t | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| x | 57 | 40 | 35 | 33 | 56 | 46 | 45 | 26 | 26 | 53 |

1. Постройте график зависимости $x = x(t)$.
2. Используя простое скользящее среднее по 4 узлам, спрогнозируйте спрос в 11-й момент времени.
3. Найдите среднее абсолютных отклонений.
4. Подходит ли такой метод прогнозирования для этих данных или нет? Почему?
5. Является ли данное приближение более предпочтительным по отношению к простому скользящему среднему по 3 узлам? Почему?
6. Подберите линейную функцию приближения данных методом наименьших квадратов.
7. Воспользуйтесь для прогноза методом экспоненциального сглаживания. Какой из использованных методов дает лучший результат?

Вариант 2

Пользуясь моделью прогнозов доходов компании Startup Airlines

| Квартал | Прибыль на 1 акцию |
|---------|--------------------|
| 1 | -\$0,20 |
| 2 | \$0,10 |
| 3 | \$0,05 |
| 4 | \$0,15 |
| 5 | \$0,22 |
| 6 | \$0,35 |
| 7 | \$0,37 |
| 8 | \$0,42 |
| 9 | \$0,37 |
| 10 | \$0,53 |
| 11 | \$0,59 |
| 12 | \$0,65 |

выполните:

1. Постройте прогноз значений прибыли с помощью взвешенного скользящего среднего по 4 узлам. Подберите оптимальные значения весов узлов с помощью средства Поиск решения.
2. Постройте прогноз значений прибыли с помощью метода экспоненциального сглаживания. Определите с помощью средства Поиск решения оптимальное значение α .
3. Постройте линию тренда.
4. Сравните точность построенных прогнозов с прогнозом, полученным по методу Хольта. Какой из методов дает более точные результаты?

Вариант 3

Для временного ряда

| t | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| x | 50 | 40 | 37 | 33 | 56 | 46 | 45 | 29 | 26 | 53 |

выполните:

1. Используя взвешенное скользящее среднее по 4 узлам, и назначив веса 4/10, 3/10, 2/10, 1/10, спрогнозируйте спрос в 11-й момент времени. Большой вес следует назначать более поздним наблюдениям.
2. Является ли данное приближение более предпочтительным по отношению к простому скользящему среднему по 4 узлам? Почему?
3. Найдите среднее абсолютных отклонений.
4. С помощью средства Поиск решения найдите оптимальные веса узлов. Насколько уменьшилась ошибка приближения?
5. Воспользуйтесь для прогноза методом экспоненциального сглаживания. Какой из использованных методов дает лучший результат?

Вариант 4

Проанализируйте временной ряд

| Время | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|-------|---|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| Спрос | 8 | 14 | 21 | 26 | 31 | 35 | 40 | 44 | 51 | 55 | 59 | 55 |

1. Воспользуйтесь методом взвешенного скользящего среднего по 4 узлам, назначив веса $4/10, 3/10, 2/10, 1/10$, чтобы получить прогноз в моменты времени 5—13. Большой вес следует назначать более поздним наблюдениям.
2. Найдите среднее абсолютных отклонений.
3. Считаете ли вы, что данное приближение более предпочтительно по сравнению с моделью простого скользящего среднего по 4 узлам? Почему?
4. С помощью средства Поиск решения найдите оптимальные веса узлов. На сколько удалось уменьшить значение ошибки?
5. Воспользуйтесь для прогноза методом экспоненциального сглаживания. Какой из использованных методов дает лучший результат?

Вариант 5

Дан временной ряд

| | | | | | | | | | | |
|----------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| t | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| x | 53 | 40 | 37 | 36 | 55 | 46 | 42 | 29 | 26 | 53 |

На основе данных этого ряда выполните следующее:

1. Пусть $\hat{x}_1 = 22$ и $\alpha = 0,4$. Спрогнозируйте спрос в 11-й момент времени методом экспоненциального сглаживания.
2. Если бы вы использовали метод экспоненциального сглаживания для прогнозов этого временного ряда, вы бы предпочли большее ($\geq 0,4$) или меньшее значение параметра α ? Почему?
3. Путем минимизации среднего абсолютных ошибок в процентах определите с помощью средства Поиск решения оптимальное значение α . Насколько изменилось при этом СООП?
4. Выполните аналогичный прогноз методом простого скользящего среднего с 3 узлами. Какой из полученных прогнозов кажется вам наилучшим? Почему?

Вариант 6

Проанализируйте временной ряд

| | | | | | | | | | | | | |
|-------|---|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| Время | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
| Спрос | 8 | 13 | 17 | 23 | 30 | 35 | 40 | 42 | 51 | 55 | 57 | 53 |

1. Пусть $\hat{x}_1 = 8$ и $\alpha = 0,3$. Используйте метод экспоненциального сглаживания для прогноза спроса в периоды 2—13.
2. Найдите значение СООП для этого прогноза.
3. Повторите п.1 и 2, используя значение $\alpha = 0,5$.
4. Если бы вы использовали метод экспоненциального сглаживания для прогнозов этого временного ряда, какое значение параметра α вы бы выбрали? Почему?
5. Чему равно оптимальное значение α ? На сколько при этом меньше СООП по сравнению с п. 1.?
6. Выполните аналогичный прогноз методом простого скользящего среднего с 4 узлами. Сравните результаты с теми, что были получены в п. 1 Какой из полученных прогнозов кажется вам наилучшим? Почему?

Вариант 7

Менеджер по маркетингу небольшой развивающейся компании, содержащей сеть продовольственных магазинов, обладает информацией об объемах продаж за все время существования самого прибыльного магазина (см. табл.).

Используя простое скользящее среднее по 3 узлам, спрогнозируйте значения в узлах с 4 до 11.

Используя взвешенное скользящее среднее по 3 узлам, спрогнозируйте значения в узлах с 4 до 11. Для определения оптимальных весов воспользуйтесь средством Поиск решения.

Методом экспоненциального сглаживания спрогнозируйте значения в узлах 2—11.

Определите оптимальное значение параметра α с помощью средства Поиск решения.

Какой из полученных прогнозов наиболее точный и почему?

| Период | Объем продаж, тыс. долл. |
|--------|--------------------------|
| 1 | 750 |
| 2 | 790 |
| 3 | 810 |
| 4 | 875 |
| 5 | 990 |
| 6 | 1090 |
| 7 | 950 |
| 8 | 1050 |
| 9 | 1150 |
| 10 | 1200 |
| 11 | 1250 |

Вариант 8

Дан временной ряд

| t | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| x | 57 | 40 | 35 | 33 | 56 | 46 | 45 | 26 | 26 | 53 |

1. Используя метод экспоненциального сглаживания, спрогнозируйте значения спроса в моменты 2–11.
2. Используя метод Хольта со значением $\hat{x}_1 = 22$, спрогнозируйте значения спроса в моменты 2–11.
3. Используя среднее абсолютных ошибок, определите, какой из двух методов дает более точный прогноз.

Вариант 9

Рассмотрите следующую последовательность данных.

| Время | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|-------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| Спрос | 10 | 14 | 19 | 26 | 31 | 35 | 39 | 44 | 51 | 55 | 61 | 54 |

1. Постройте график этого временного ряда. Соедините точки отрезками прямых.
2. Используя простое скользящее среднее по 4 узлам, спрогнозируйте спрос для узлов 5–13.

3. Найдите среднее абсолютных отклонений.
4. Целесообразно ли использовать данный метод прогнозирования для представленных данных?
5. Является ли данное приближение более предпочтительным по отношению к простому скользящему среднему по 3 узлам? Почему?
6. Постройте по данным линейный и квадратичный тренд.
7. Воспользуйтесь для прогноза методом экспоненциального сглаживания. Какой их использованных методов дает лучший результат?

Вариант 10

За последние 11 кварталов товарооборот компании «Amada plc», скорректированный на инфляцию, составил:

| Год | 1 | | | | 2 | | | | 3 | | |
|--------------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| Квартал | 1 | 2 | 3 | 4 | 1 | 2 | 3 | 4 | 1 | 2 | 3 |
| Товарооборот | 22 | 28 | 34 | 27 | 31 | 43 | 43 | 41 | 46 | 53 | 56 |

Требуется:

1. В предположении существования линейного тренда построить модель с аддитивной компонентой.
2. Сделать прогноз на ближайшие три квартала. Прокомментировать вопрос о вероятной точности ваших прогнозов.

Вариант 11

Спрос на стулья, которые продает компания «Peace Retailers», составил:

| Год | 1 | | | 2 | | | | 3 | | | |
|---------|-----|-----|--|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| Квартал | 3 | 4 | | 1 | 2 | 3 | 4 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| Спрос | 157 | 137 | | 156 | 151 | 153 | 141 | 154 | 152 | 154 | 142 |

Требуется:

1. Построить соответствующую модель с аддитивной компонентой.
2. Дать прогноз на первые два квартала четвертого года.

Вариант 12

Ниже приведены квартальные объемы выпуска продукции компании «Cobournes plc»:

| Год | 1 | | | | 2 | | | | 3 | | |
|---------------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|-----|----|
| Квартал | 1 | 2 | 3 | 4 | 1 | 2 | 3 | 4 | 1 | 2 | 3 |
| Объем выпуска | 24 | 50 | 56 | 63 | 79 | 89 | 79 | 80 | 93 | 100 | 88 |

Требуется:

1. Проанализировать значения квартальных объемов выпуска на основе модели с аддитивной компонентой.
2. Прокомментировать поведение тренда.
3. Дать прогноз на последний квартал третьего года.

Вариант 13

Данные временного ряда объема выпуска товаров приведены в таблице.

| Год | Измеренный объем выпуска | Год | Измеренный объем выпуска |
|------|--------------------------------|------|--------------------------------|
| 1970 | 2,8 | 1982 | 10,8 |
| 1971 | 3 | 1983 | 10,2 |
| 1972 | 3,5 | 1984 | 10,6 |
| 1973 | 4 | 1985 | 10,6 |
| 1974 | 4,6 | 1986 | 11,5 |
| 1975 | 5 | 1987 | 13,3 |
| 1976 | 5,4 | 1988 | 17 |
| 1977 | 6 | 1989 | 18,4 |
| 1978 | 7 | 1990 | 18,9 |
| 1979 | 8 | 1991 | 19,4 |
| 1980 | 9,7 | 1992 | 20,1 |
| 1981 | 10,3 | | |

Требуется:

1. Дать прогноз объемов выпуска на четыре следующих года методом Хольта.
2. Построить и прокомментировать поведение кривой тренда.

Петр Георгиевич Асалханов
Надежда Владимировна Бендик

Математические методы и модели поддержки принятия решения
Учебное пособие

Лицензия на издательскую деятельность
ЛР № 070444 от 11.03.98 г.
Подписано в печать 28.06.2020 г.
Тираж 30 экз.

Издательство Иркутского государственного аграрного
университета имени А.А. Ежевского
664038, Иркутская обл., Иркутский р-н, пос. Молодежный