Министерство образования и науки Российской Федерации
Министерство сельского хозяйства Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования Иркутский государственный аграрный университет имени А.А. Ежевского

Институт экономики, управления и прикладной информатики
Кафедра информатики и математического моделирования

Учебное пособие по дисциплине «Моделирование производственных процессов в условиях рисков»

для направления подготовки 09.04.03 Прикладная информатика

Иркутск 2016

УДК 551.583.2

Печатается по решению научно-методического совета Иркутского государственного аграрного университета имени А.А. Ежевского.

Рецензенты: Зоркальцев В.И. д.т.н., профессор, заведующий лабораторией ИСЭМ СО РАН, Краковский Ю.М. д.т.н., профессор кафедры «Информационные системы и защита информации» ФГБОУ ВО «Иркутский государственный университет путей сообщения».

Бузина Т.С. Учебное пособие «Моделирование производственных процессов в условиях рисков» /Т.С. Бузина, Я.М. Иваньо, С.А. Петрова. - Иркутск: Изд-во Иркутский ГАУ, 2016. – 151 с.

Учебное пособие составлено для изучения магистрантами направления подготовки 09.04.03 – Прикладная информатика дисциплины «Моделирование производственных процессов в условиях рисков». Работа включает в себя разделы, связанные с построением моделей с детерминированными и неопределенными параметрами для решения задач оптимизации производства продовольственной продукции с учетом природных, техногенных событий и их сочетания. Основной целью пособия является формирование у студента навыков моделирования производственных процессов в условиях рисков, позволяющих обеспечить эффективные управленческие решения прикладных задач при влиянии на работу предприятий агропромышленного комплекса внешних экстремальных явлений. Примеры на реальных объектах, приведенные в работе, показывают возможности улучшения многолетнего планирования аграрного производства с учетом рисков.

Учебное пособие предназначено для студентов направления подготовки 09.04.03 Прикладная информатика. Вместе с тем работа может быть полезна студентам и магистрантам по укрупненным группам подготовки направлений 35.00.00 Сельское, лесное и рыбное хозяйство и 38.00.00 Экономика и управление.

ISBN 978-5-91777-204-2

СОДЕРЖАНИЕ

Введение

Учебное пособие «Моделирование производственных процессов в условиях рисков» подготовлено для студентов по направлению 09.04.03 - Прикладная информатика. Одноименная дисциплина входит в вариативную часть первого блока и посвящена формированию у магистрантов навыков моделирования производственных процессов с учетом рисков, обеспечивающих эффективные управленческие решения прикладных задач при влиянии на работу предприятий внешних экстремальных явлений и их последствий.

Подготовке учебного пособия предшествовала длительная многолетняя работа на кафедре информатики и математического моделирования по изучению изменчивости различных природных экстремальных явлений и их влиянию на аграрное производство. Полученные результаты использованы для оптимизации производства продовольственной продукции предприятиями агропромышленного комплекса Иркутской области. По указанной проблеме изданы две монографии: «Моделирование природных событий для управления народно-хозяйственными объектами региона» (Иваньо Я.М., Старкова Н.В., 2011), «Оптимизационные модели аграрного производства в решении задач оценки природных и техногенных рисков» (Иваньо Я.М., Петрова С.А., 2015).

Учебное пособие является продолжением работы авторов по планированию сельскохозяйственного производства в условиях рисков.

Работа состоит из введения, пяти глав и заключения.

Первый раздел посвящен определению цели и трудоемкости освоения дисциплины согласно учебному плану и ФГОС ВО. Основной компетенцией, которой должен обладать магистрант после освоения дисциплины является способность ставить и решать прикладные задачи в условиях неопределенности и определять методы и средства их эффективного решения.

Во второй главе приведено описание задач линейного программирования, специальных задач математического программирования и примеры их применения для оптимизации аграрного производства. В дополнение к ним описаны задачи со стохастическими и интервальными параметрами с примерами. Здесь приводятся методы определения оптимальных планов в условиях неопределенности. Особое значение уделяется методу статистических испытаний как эффективному средству определения множества оптимальных решений для задач с интервальными и случайными параметрами. Для освоения раздела приведены типовые примеры.

В третьей главе рассмотрены природные и техногенные риски, обусловленные природными и техногенными событиями. Выполнен их анализ и приведены примеры влияния параметров экстремальных явлений на работу предприятий агропромышленного комплекса. Здесь описана методика определения страховой стоимости и размера утраты (гибели) урожая сельскохозяйственной культуры и посадок многолетних насаждений, утраты (гибели) сельскохозяйственных животных. Глава сопровождается примерами оценки рисков и страховых возмещений.

В четвертой главе приводятся специальные задачи математического программирования определения рисков при планировании аграрного производства. При этом предлагается учитывать неблагоприятные природные события, их сочетание, техногенные явления и ситуации совместного проявления в один год техногенных и природных событий. Дана классификация моделей математического программирования, учитывающих риски, методика определения рисков и расчетных страховых возмещений с использованием данных моделей. Основной целью этой главы является рассмотрение студентами различных ситуаций, влияющих на аграрное производство и выбор наиболее приемлемых с учетом значений целевой функции для принятия управленческого решения.

В пятом разделе приведено описание специализированного программного комплекса «Управление рисками при планировании аграрного производства», разработанного Я.М. Иваньо и С.А. Петровой, и инструкция по его использованию, для решения задач оптимизации производства сельскохозяйственной продукции в условия проявления экстремальных явлений.

В работе сформулированы вопросы для контроля по каждой теме и подготовки к экзамену, тесты для оценки уровня освоения предоставленного материала и глоссарий.

Учебное пособие «Моделирование производственных процессов в условиях рисков» подготовлено для студентов по направлению 09.04.03 Прикладная информатика. Вместе с тем оно может быть полезно студентам и магистрантам по укрупненным группам подготовки направлений 35.00.00 Сельское, лесное и рыбное хозяйство и 38.00.00 Экономика и управление.

1 Цели освоения и структура дисциплины

Цель - сформировать у магистранта знания об основных понятиях и методах моделирования производственных процессов в условиях рисков для обеспечения навыков эффективного решения прикладных задач с неопределенными параметрами.

Задачи дисциплины:

- сформулировать понятия, определяющие природу рисков и методы их оценки;
- дать представление об основных математических методах, используемых для формализации экономико-математических моделей с учетом рисков;
- сформировать навыки решения задач математического программирования в условиях неопределенности с использованием эффективных численных методов;
- научить интерпретировать результаты экономико-математического моделирования с учетом рисков для обоснования управленческих решений.

Данный курс опирается на знания, полученные в процессе изучения предшествующую дисциплину «Математическое моделирование».

Знания, умения и навыки, полученные в результате освоения дисциплины, применимы при подготовке магистерской диссертации, в изучении дисциплин «Математические и инструментальные методы поддержки принятия решения», «Автоматизированные информационные системы в АПК», «Моделирование устойчивого развития территорий» других дисциплин, связанных с планированием производства, информационными и математическими технологиями.

Компетенции магистранта, формируемые в результате освоения дисциплины (модуля).

В результате освоения дисциплины студент должен:

Знать:

- природу рисков и методы их математического описания;
- методы построения задач линейного программирования с учетом рисков;
- методы математического программирования для решения прикладных задач с учетом рисков.

Уметь:

- сформулировать задачу математического программирования в условиях рисков;
- подготовить необходимую информацию для решения прикладных задач;
- реализовать экономико-математическую модель с учетом рисков.

Владеть навыками:

- построения экономико-математических моделей с учетом рисков;
- обоснования адекватности разработанных моделей в условиях рисков;

- использования прикладного программного обеспечения для реализации экономико-математических моделей с учетом рисков.

Обладать компетенцией

Код компетенции	Наименование результата обучения (сформированных компетенций)
(ПК-3)	способностью ставить и решать прикладные задачи в условиях неопределенности и определять методы и средства их эффективного решения

Структура дисциплины (модуля) «Моделирование производственных процессов в условиях риска»

Общая трудоёмкость дисциплины составляет 4 зачётных единицы 144 часа.

Таблица 1.1 - Трудоёмкость дисциплины и виды учебной работы

Вид учебной работы	Всего часов	Семестры			
1	2	1	2	3	4
Общая трудоемкость	**144**	**144**			
Аудиторная работа:	**44**	**44**			
Лекции (Л)	10	10			
Практические занятия (ПЗ)	34	34			
Лабораторные работы (ЛР)					
Самостоятельная работа:	**64**	**64**			
Курсовой проект (КП)					
Курсовая работа (КР)					
Расчетно-графическая работа (РГР)	20	20			
Реферат (Р)					
Эссе (Э)					
Контрольная работа					
Самостоятельное изучение разделов	24	24			
Самоподготовка (проработка и повторение лекционного материала и материала учебников и учебных пособий, подготовка к лабораторным и практическим занятиям, коллоквиумам, рубежному контролю и т.д.)	20	20			
Подготовка и сдача экзамена	36	36			
Форма промежуточной аттестации					

Таблица 1.2 - Содержание дисциплины (модуля) «Моделирование производственных процессов в условиях риска»

№ п/п	Раздел дисциплины (тема)	Семестр	Неделя семестра	Виды учебной работы, включая самостоятельную работу студентов и трудоемкость (в часах)				Формы текущего контроля успеваемости *(по неделям семестра)* Форма промежуточной аттестации *(по семестрам)*
				Лекции (Л)	Практ. (семинарские)	Лаб.работы (ЛР)	Самост.работа (СРС)	
Модуль 1 Задачи математического программирования.								
1	Задачи линейного программирования.			2	2		4	Опрос
2	Специальные задачи линейного программирования				2		4	Защита расчетно-графического задания
3	Задачи математического программирования в условиях неопределенности				2		4	Защита расчетно-графического задания
Модуль 2 Природа рисков								
1	Понятия и классификация рисков.			2	4		8	Взаимопроверка
2	Природные риски.			2	4		8	Взаимопроверка
3	Техногенные риски.				4		8	Письменная проверка задания
Модуль 3 Моделирование производственных процессов в условиях рисков								
1	Классификация моделей, учитывающих риски.			2	4		4	Опрос
2	Задачи математического программирования с учетом рисков. Моделирование природных рисков.			2	4		8	Защита расчетно-графического задания
3	Задачи математического программирования с учетом рисков. Моделирование техногенных рисков.				4		8	Защита расчетно-графического задания
4	Задачи математического программирования с учетом рисков. Моделирование совмещений природных и техногенных рисков.				4		8	Защита расчетно-графического задания
11	Итого			10	34		64	Экзамен

2 Задачи математического программирования

В математическом программировании как разделе прикладной математики рассматриваются экстремальные задачи и методы их решения. С помощью построения и решения таких задач возможно улучшение управления и организации производственных процессов. Экстремальные задачи представляют собой задачи условной оптимизации, в которые входят ограничения и целевые функции.

Задачи математического программирования широко используются в сельскохозяйственном производстве: для рационального использования посевных площадей, моделирования кормовых рационов, оптимизации межхозяйственной кооперации и др.

В литературе используется классификация задач математического программирования по типам переменных, их связям, учету времени, свойствам информации, количеству критериев оптимальности, проявлению экстремальных явлений.

В задачах математического программирования встречаются дискретные и непрерывные переменные. В частности, в целочисленных задачах неизвестные могут принимать только целые значения, а при оптимизации посевных площадей переменные соответствуют любым неотрицательным величинам. При этом в ограничениях или целевых функциях связи между переменными имеют линейный или нелинейный вид.

Если переменные задачи математического программирования зависят от времени, то их относят к динамическим. Если фактор времени не применяется, то задачи называют статическими.

Поскольку неизвестные могут принимать случайные или детерминированные значения, то рассматривают определенные и стохастические задачи математического программирования. В ряде случаев, когда неизвестны законы распределения вероятностей случайных величин, говорят о задачах математического программирования с неопределенными параметрами.

Во многих случаях приходится находить компромиссные решения, если в задачу входят участники с различными целями, то ее называю многокритериальной.

И, наконец, производственные процессы в сельском хозяйстве связаны с внешними факторами. При учете экстремальных природных явлений, наводнений, засух, раннего снега, заморозков и др., причиняющих значительный ущерб сельскохозяйственным предприятиям, интерес вызывают задачи математического программирования с учетом природных событий. Кроме того, не вызывает сомнения факт возрастающего влияния хозяйственной деятельности человека на окружающую среду и производство аграрной продукции в том числе. В связи с этим практически значимыми являются задачи оптимизации производства продовольственной продукции с учетом техногенных явлений.

2.1 Задачи линейного программирования

В общем виде задачу линейного программирования можно записать так:

$$f = \sum_{j \in J} c_j x_j \to \max(\min), \tag{2.1}$$

$$\sum_{j \in J} a_{ij} x_j \{\le = \ge\} b_i \ (i \in I), \tag{2.2}$$

$$x_j \ge 0 \ (j \in J), \tag{2.3}$$

где f - целевая функция или критерий оптимальности задачи, x_j - искомая переменная, a_{ij}, b_i, c_j - заданные постоянные величины.

Задачу (2.1)-(2.3) называют стандартной задачей линейного программирования. Числа $X=(x_1, x_2,...,x_n)$, удовлетворяющие условиям (2.2)-(2.3), представляют собой допустимое решение или план. План $X^* = (x_1^*, x_2^*,..., x_m^*)$, при котором критерий оптимальности (2.1) принимает экстремальное значение, принято называть оптимальным. Очевидно, что, если целевая функция (2.1) стремится к максимуму, то $f(X) \le f(X^*)$, в противном случае, когда целевая функция достигает минимума $f(X) \ge f(X^*)$.

С помощью задачи линейного программирования можно определить структуру сельскохозяйственного производства, таких его отраслей как скотоводство и растениеводство. Кроме того, при помощи задач линейного программирования оценивается кормопроизводство и распределение посевных площадей на различном уровне иерархии, от предприятия до муниципального образования и региона, и структура стада.

Любая стандартная задача линейного программирования может быть приведена к каноническому виду. В этом случае неравенства (2.2) преобразуются в равенства вводом дополнительных переменных. Если связь левой и правой частей условия (2.2) определяется символом «≤», тогда в левую часть добавляют неотрицательную переменную. При другом виде неравенства «≥» из левой части вычитают дополнительную неотрицательную переменную. Таким образом, ограничение (2.2) преобразуется в равенство:

$$\sum_{j \in J} a_{ij} x_j = b_i \quad i \in I, \ j \in J. \tag{2.4}$$

Кроме приведения стандартной задачи к каноническому виду возникает необходимость изменение условия целевой функции на противоположное. Для этого используют равенство $f_{max}=-f_{min}$ или $f_{min}=-f_{max}$.

При приведении стандартной задачи линейного программирования к каноническому виду вводятся дополнительные переменные для исключения неравенств. В этой ситуации часть переменных n-m приравнивают к нулю и решают m уравнений с m числом неизвестных. Переменные, приравниваемые к нулю, называют свободными или небазисными, а остальные – базисными. Полученные таким образом решения являются базисными. Если же решения допустимые, то их называют базисными допустимыми решениями. На основе приведенных определений можно составить таблицу и найти базисные допустимые решения, из которых затем выбрать оптимальное решение.

Пример 2.1. Фирма занимается производством двух видов полок. Дано 100 м^3 досок для изготовления полок двух образцов *A* и *B*. Для изготовления одной полки образца *A* требуется 1 м^3 досок, а для производства полки второго образца *B* – 2 м^3 материала. Для изготовления единицы первого образца полок используется 2 ч машинного времени. Одна полка второго образца производится за 3 ч. Общее количество времени для изготовления полок ограничено 180 ч. Согласно договоренности с потребителями фирме необходимо изготовлять не менее 20 изделий первого образца. Стоимость одной полки образца *A* составляет 5 денежных единиц (д.е.), а вида *B* – 8 д.е. Построить целевую функцию и ограничения задачи линейного программирования при условии получения максимального дохода.

Решение

Обозначим число полок *A* переменной x_1, *B* – x_2. Очевидно, что стоимость первой продукции равна $5x_1$, а второй – $8x_2$, поскольку 5 и 8 представляют собой стоимость одной полки разных образцов. Тогда целевая функция примет вид

$$f(X)=5x_1+8x_2 \rightarrow max.$$

Ограничение по затратам материалов на изготовление полок определяется так

$$1x_1+2x_2 \leq 100\ [м^3],$$

где $1x_1$ – затраты материала на изготовление полок первого образца, а $2x_2$ – объем досок для производства полок второго образца.

Условие не превышения заданного машинного времени записывается следующим образом

$$2x_1+3x_2 \leq 180\ [ч],$$

где $2x_1$ – затраты времени на производство полок первого образца, а $3x_2$ – количество часов на изготовление полок B.

Ограничение, связанное с необходимостью производства не менее 20 полок образца A, имеет вид

$$x_1 \geq 20.$$

Кроме того, должно соблюдаться условие неотрицательности переменных или $x_2 \geq 0$.

Таким образом, задача включает в себя 2 переменные, состоит из 4 ограничений и целевой функции, которую максимизируют.

Пример 2.2. Привести задачу линейного программирования к основной (канонической) форме:

$$f=x_1+2x_2 \rightarrow max,$$
$$x_1+x_2 \leq 6,$$
$$3x_1+10x_2 \leq 26,$$

$$x_1+11x_2 \le 20,$$
$$x_1, x_2 \ge 0.$$

Определить количество базисных допустимых решений и найти оптимальный план.

Решение

Приведение задачи линейного программирования (ЗЛП) к каноническому виду осуществляется введением в левую часть соответствующего ограничения дополнительной переменной со знаком «-» в случае ограничения типа «≥» и знаком «+» в случае ограничения типа «≤».

Таким образом, данная задача примет вид:

$$f=x_1 + 2x_2 \to max,$$
$$x_1 + x_2 + x_3 = 6,$$
$$3x_1+10x_2 + x_4 = 26,$$
$$x_1+11x_2 + x_5 = 20,$$
$$x_1 , x_2 \ge 0.$$

Решить задачу можно путем последовательного приравнивания части переменных *n-m* к 0. Поскольку число переменных *n=5*, а число ограничений, исключая последнее условие, *m=3*, тогда к нулю приравниваются две переменные, которые по определению называются небазисными. Остальные рассчитываемые неизвестные – базисные.

1. Пусть $x_1 = 0, x_2 = 0$, тогда подставляя эти значения в соответствующее уравнение, получим

$$0+0+x_3 = 6 \Rightarrow x_3 = 6,$$
$$0+0+x_4 = 26 \Rightarrow x_4 = 26,$$
$$0+0+x_5 = 20 \Rightarrow x_5 = 20,$$
$$f = 0+0 = 0.$$

2. Пусть $x_1 = 0, x_3 = 0$, тогда

$$0+x_2+0 = 6 \Rightarrow x_2 = 6,$$
$$0+10\cdot 6+x_4 = 26 \Rightarrow x_4 = 26-60 \Rightarrow x_4 = -34,$$
$$0+11\cdot 6+x_5 = 20 \Rightarrow x_5 = 20-66 \Rightarrow x_5 = -46.$$

Поскольку полученные переменные принимают отрицательные значения, задача не имеет допустимого базисного решения.

Аналогично путем перебора небазисных переменных находятся значения остальных неизвестных. Полученные результаты приведены в таблице 2.1.

Таблица 2.1 – Решения задачи линейного программирования на выпуклом множестве

Решение	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	f
1	0	0	6	26	20	0
2	0	6	0	-34	-46	-
3	0	2.6	3.4	0	-8,6	-
4	0	1,8	4,2	8	0	3,6
5	6	0	0	8	14	6
6	8,7	0	-2,7	0	11,3	-
7	20	0	-14	-34	0	-
8	4,9	1,1	0	0	3	7,1
9	4,6	1,4	0	-1,8	0	-
10	3,7	1,5	0,8	0	0	6,7

Таким образом, из таблицы видно, что количество допустимых решений в данной задаче равно 5.

Оптимальным будет являться решение $x_1 = 4{,}9, x_2 = 1{,}1$, при котором целевая функция достигает максимума (f_{max} = 7,1).

Двойственная задача линейного программирования

Любой задаче линейного программирования вида (2.1)-(2.3) можно поставить в соответствие двойственную задачу:

$$g(Y) = \sum_{i \in I} b_i y_i \to \min(\max)\ , \tag{2.5}$$

$$\sum_{j \in J} a_{ij}^T y_i \geq c_j\ ,\ j \in J \tag{2.6}$$

$$y_i \geq 0\ ,\ i \in I\ . \tag{2.7}$$

При построении двойственной задачи вводятся новые переменные y_i, которые называются двойственными или объективно обусловленными оценками.

Если целевая функция исходной задачи определена на максимум, то в двойственной задаче она должна должен достигать минимума и наоборот. Неравенства вида «≤» задачи (2.1)-(2.3) заменяют символом «≥» двойственной задачи.

Исходная матрица коэффициентов при неизвестных в левых частях ограничений исходной задачи A преобразуют в транспонированную матрицу A^T:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \tag{2.8}$$

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}. \tag{2.9}$$

Число переменных в двойственной задаче соответствует количеству ограничений исходной задачи, а число ограничений (2.6) равно количеству неизвестных исходной задачи. Коэффициентами при неизвестных в целевой функции двойственной задачи являются правые части ограничений исходной задачи. Правые же части условий двойственной задачи представляют собой коэффициенты при неизвестных целевой функции исходной задачи.

Каждому ограничению одной задачи соответствует одна переменная другой задачи. При этом номер переменной совпадает с номером ограничения. Неравенству, характеризуемому символом «≤», соответствует переменная, связанная с условием неотрицательности. Для равенств в ограничениях исходной задачи переменная двойственной задачи может принимать как положительные, так и отрицательные значения.

Пары двойственных задач могут быть симметричными и несимметричными. В симметричных задачах системы ограничений представляют собой неравенства. Кроме того, на двойственные переменные налагается условие неотрицательности. В несимметричных задачах ограничения исходной задачи имеют вид равенств, а условия двойственной задачи задаются неравенствами. При этом переменные двойственной задачи могут принимать положительные и отрицательные значения.

Между решениями исходной (2.1)-(2.3) и двойственной задачи (2.5)-(2.7) имеют место зависимости. Одна из лемм гласит, если X – некоторый план исходной задачи, а Y – произвольный план двойственной задачи, то справедливо неравенство $f(X) \le g(Y)$. При этом в исходной задаче определяется максимум целевой функции, а в двойственной – минимальное значение критерия оптимальности. Согласно второй лемме при $f(X^*)=g(Y^*)$ X^* и Y^* являются оптимальными планами исходной и двойственной задач.

Кроме приведенных лемм справедливы две теоремы. По первой из них, если одна из задач имеет оптимальный план, то и другая имеет оптимальный план, а значения целевых функций при оптимальных планах исходной и двойственной задачи равны. Причем, если целевая функция одной из пары двойственных задач не ограничена сверху, то другая задача не имеет планов.

Вторая теорема гласит, что планы X^* и Y^* являются оптимальными тогда и только тогда, когда для любых $j = \overline{1,n}$ выполняется равенство

$$\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* - c_j \right) x_j^* = 0 . \tag{2.10}$$

Переменные y_i представляют собой оценки влияния правых частей ограничений исходной задачи b_i на оптимальный план двойственной задачи. При экономической интерпретации двойственной задачи эти оценки должны быть такими, чтобы общая оценка сырья, используемого на производство единицы продукции каждого вида, была не меньше цены единицы продукции данного вида c_j. Здесь следует иметь в виду пару двойственных задач, в которой целевая функция исходной задачи определяется на максимум, а критерий оптимальности двойственной задачи достигает минимума.

Пример 2.3. Для задачи, состоящей в максимизации функции $f=4x_1+x_2-4x_3$ при условиях

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 4x_3 \le 12 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 13 \\ 2x_1 + 5x_2 - 6x_3 \le 11 \end{cases}$$

$$x_1, x_2, x_3 \ge 0$$

сформулировать двойственную задачу.

Решение

Вначале преобразуем матрицу коэффициентов при неизвестных левой части ограничений исходной задачи:

$$A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & 5 & -6 \end{vmatrix}, \ A^T = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 5 \\ 4 & -2 & -6 \end{vmatrix}.$$

Тогда ограничения двойственной задачи примут вид

$$\begin{cases} 2y_1 + y_2 + 2y_3 \ge 4 \\ -y_1 + 3y_2 + 5y_3 \ge 1 \\ 4y_1 - 2y_2 - 6y_3 \ge -4 \end{cases}$$

$$y_1, y_2, y_3 \ge 0$$

Используя правые части ограничений исходной задачи нетрудно определить целевую функцию $g(Y)=12y_1+13y_2+11y_3$, которая должна достигнуть минимума.

Задача распределения ресурсов

Задачи оптимального распределения ресурсов возникают в различных областях науки, техники и социальных сферах. Характер распределяемых ресурсов и смысл оптимальности может быть различным в зависимости от рассматриваемой прикладной области и конкретной задачи.

Распределительные задачи связаны с распределением ресурсов по работам, которые необходимо выполнить. Задачи этого класса возникают, когда имеющихся в наличии ресурсов не хватает для выполнения каждой работы наиболее эффективным образом. Целью решения задач данного типа является нахождение такого распределения ресурсов по работам, при котором либо минимизируются общие затраты, либо максимизируется получаемый в результате общий доход.

Теоретически распределительные задачи можно разделить на следующие группы.

1. Заданы ресурсы и работы. Требуется распределить ресурсы между работами таким образом, чтобы максимизировать определенный критерий

эффективности (например, прибыль) или минимизировать затраты (производственные издержки).

2. Заданы только работы. Требуется подобрать такие ресурсы, которые дают возможность выполнить их с минимальными производственными затратами.

3. Заданы только наличные ресурсы. Требуется определить, какие работы можно выполнить с этими ресурсами, чтобы обеспечить максимальную эффективность.

На практике удобно группировать распределительные задачи таким образом:

1) задачи производственного планирования;
2) задачи планирования инвестиций;
3) задачи планирования сельскохозяйственного производства;
4) задачи планирования производством.

Пример 2.4. Определение оптимального ассортимента продукции

Предприятие изготавливает два вида продукции – $П_1$ и $П_2$, которая поступает в оптовую продажу. Для производства продукции используются два вида сырья – S_1 и S_2 . Максимально возможные запасы сырья в сутки составляют b_1 и b_2 единиц соответственно. Расход сырья на единицу продукции вида $П_1$ и вида $П_2$ приведен в таблице 2.2.

Таблица 2.2 - Расход сырья на единицу продукции .

Сырье	Расход сырья на 1 ед. продукции		Запас сырья, ед.
	$П_1$	$П_2$	
A	a_{11}	a_{12}	b_1
B	a_{21}	a_{22}	b_2

Опыт работы показал, что суточный спрос на продукцию $П_1$ никогда не превышает спроса на продукцию $П_2$ более чем на k ед. Кроме того, известно, что спрос на продукцию $П_2$ никогда не превышает l ед. в сутки.

Оптовые цены единицы продукции равны: c_1 д.е. – для $П_1$ и c_2 д.е. – для $П_2$.

Требуется определить, какое количество продукции каждого вида должно производить предприятие, чтобы доход от реализация был максимальным.

Предположим, что предприятие изготовит x_1 единиц продукции $П_1$ и x_2 единиц продукции $П_2$. Поскольку производство продукции $П_1$ и $П_2$ ограничено имеющимися в распоряжении предприятия сырьем каждого вида и спросом на данную продукцию и с учетом того, что количество изготовляемых изделий не может быть отрицательным, должны выполняться следующие неравенства:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1,$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le b_2,$$
$$x_1 - x_2 \le kx_2 \le l,$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

Доход от реализации x_1 единиц продукции Π_1 и x_2 единиц продукции Π_2 составит

$$f = c_1 x_1 + c_2 x_2$$

Таким образом, мы приходим к математической задаче: среди всех неотрицательных решений данной системы линейных неравенств, требуется найти такое, при котором функция f принимает максимальное значение.

Пример 2.5. Задача о диете

Рассмотрим задачу составления душевого рациона питания минимальной стоимости, который бы содержал определенные питательные вещества в необходимых объемах. Предположим, что имеется известный перечень продуктов из n наименований (хлеб, сахар, масло, молоко, мясо и т. д.), которые мы будем обозначать буквами F_1 ,..., F_n . Кроме того, рассматриваются разные характеристики продуктов, например, количество белков, жиров, витаминов, минеральных веществ и др. Обозначим эти компоненты буквами P_1 , ..., P_m . Предположим, что для каждого продукта F_j ($j=1,....n$) известно количественное содержание в одной единице продукта указанных выше компонент. В этом случае можно составить таблицу, содержащую характеристику продуктов (таблица 2.3).

Таблица 2.3 - Табличное представление данных задачи о диете

	F_1	F_2	...	F_j	...	F_n
P_1	a_{11}	a_{12}		a_{1j}		a_{1n}
P_2	a_{21}	a_{22}		a_{2j}		a_{2n}
...	...	...	...	...	...	...
P_i	a_{i1}	a_{i2}		a_{ij}		a_{in}
...	...	...	...	...	...	...
P_m	a_{m1}	a_{m2}		a_{mj}		a_{mn}

Элементы этой таблицы образуют матрицу, имеющую m строк и n столбцов. Обозначим ее A и назовем матрицей питательности. Предположим, что мы составили рацион $x = x_1,....,x_n$ на некоторый период, например, месяц. Иными словами, мы планируем каждому человеку на месяц x_1 единиц (кг) продукта F_1 , x_2 единиц продукта F_2 и т.д. Нетрудно вычислить, какое количество витаминов, жиров, белков и прочих питательных веществ получит человек за этот период. Например, компонента P_1 присутствует в этом рационе в количестве

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n,$$

поскольку, согласно условию, в x_1 единице продукта F_1, согласно матрице питательности, содержится $a_{11}x_1$ единиц компоненты P_1; к этому количеству добавляется порция $a_{12}\,x_2$ вещества P_2 из x_2 единиц продукта F_2 и так далее. Аналогично можно определить и количество всех остальных веществ P_i в составляемом рационе $(x_1 ,..., x_n)$.

Допустим, что имеются определенные физиологические требования, касающиеся необходимого количества питательных веществ в P_i (i =1,..., m) в планируемый срок. Пусть эти требования заданы вектором $b = b_1 ,...,b_m$, i -я компонента которого b указывает минимально необходимое содержание компоненты P_i в рационе. Это означает, что коэффициенты x_i вектора x должны удовлетворять следующей системе ограничений:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \geq b_1;$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \geq b_2;$$
$$\cdots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \geq b_m.$$

Кроме того, из содержательного смысла задачи очевидно, что все переменные $(x_1 ,..., x_n)$ неотрицательны, и поэтому к уже указанным ограничениям добавляются еще неравенства

$$x_1 \geq 0,..., x_n \geq 0.$$

Учитывая, что в большинстве случаев указанным ограничениям удовлетворяет бесконечно много рационов, выберем тот из них, стоимость которого минимальна.

Пусть цены на продукты $F_1 ,..., F_n$ равны соответственно $c_1 ,...,c_n$. Тогда, стоимость всего рациона $x = (x_1 ,..., x_n)$ может быть записана в виде:

$$c_1\,x_1 + c_2\,x_2 + ... + c_n\,x_n \to \min.$$

Окончательно формулировка задачи о диете заключается в том, чтобы среди векторов $x = x_1 ,..., x_n$ удовлетворяющих описанным ограничениям выбрать такой, для которого целевая функция принимает минимальное значение.

Методы решения задач линейного программирования

Графический метод решения задачи линейного программирования

При рассмотрении задачи с двумя переменными можно сформулировать геометрический смысл задачи линейного программирования.

Каждое ограничение задачи линейного программирования вида (2.2)-(2.3) представляет собой полуплоскость с граничными прямыми. Эти прямые разделяют плоскость на две части. При неравенстве «≥» рассматривают верхнюю полуплоскость, в противном случае (для условия «≤») неравенство характеризует нижнюю полуплоскость.

Совокупность совместных ограничений формирует выпуклое множество. При этом выпуклое множество может быть замкнутым и разомкнутым.

Кроме того, встречаются случаи, когда система ограничений несовместна. Тогда отсутствует область допустимых решений (план). Выпуклое множество называют многоугольником или многогранником решения.

В многограннике решений находится точка, в которой целевая функция достигает экстремума. Эта точка существует тогда, когда целевая функция не ограничена сверху и многогранник решений не пуст (ограничения совместны).

Для нахождения оптимального плана или точки, в которой целевая функция достигнет экстремума, строят вектор $C=(c_1, c_2,...,c_j...,c_n)$. Прямую, перпендикулярную к этому вектору (задача с двумя переменными), передвигают вдоль него через многогранник решений, находя точку, в которой целевая функция достигает экстремума или устанавливают неограниченность критерия оптимальности на множестве планов.

Оптимальное решение задачи линейного программирования, если оно существует, достигается в вершинах многогранника. Другими словами, при нахождении оптимального решения интерес вызывают не внутренние точки многогранника, а его вершины.

Пример 2.6. Найти оптимальное решение задачи линейного программирования графическим методом:

$$f(X)=x_1+2x_2\rightarrow max,$$
$$-x_1+3x_2 \leq 10,$$
$$x_1+x_2 \leq 6,$$
$$x_1-x_2 \leq 3,$$
$$x_1+4x_2 \geq,4$$
$$x_1, x_2 \geq 0.$$

Решение

Прямые ограничения ($x_1, x_2 \geq 0$) означают, что область решений будет лежать в первой четверти декартовой системы координат (рис.1).

Этап 1. Определим множество решений первого неравенства. Оно состоит из решения уравнения и строгого неравенства.

Решением уравнения служат точки прямой - $x_1 +3x_2- 10 = 0$.

Построим прямую по двум точкам (0; 3,3) и (-10;0), которые получаем в результате последовательного обнуления одной из переменных (рисунок 2.1), на рисунке обозначим ее I.

Построенная прямая делит плоскость на две полуплоскости, одна из которых является множеством решений строгого неравенства. Какая из них является искомой, можно выяснить при помощи одной контрольной точки. Если в произвольно взятой точке, не принадлежащей прямой, неравенство выполняется, то оно выполняется и во всех точках той полуплоскости, которой принадлежит контрольная точка, и не выполняется во всех точках другой полуплоскости. В качестве такой точки удобно брать начало координат (0;0). Подставляя координаты (0;0) в неравенство $-x_1+3x_2-10\leq 0$, получим $-10\leq 0$, следовательно, областью решения неравенства служит нижняя полуплоскость.

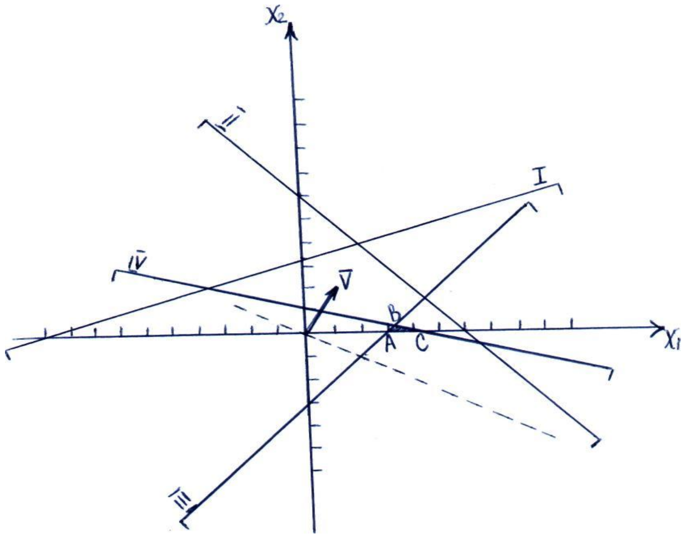


Рисунок 2.1 – Графическое решение задачи линейного программирования

Аналогичным образом построим области решения трех других неравенств:

$$\text{II)}\ x_1 + x_2 - 6 = 0; \qquad x_1 = 0, x_2 = 6; \qquad x_2 = 0, x_1 = 6,$$
$$\text{III)}\ x_1 - x_2 - 3 = 0; \qquad x_1 = 0, x_2 = -3; \qquad x_2 = 0, x_1 = 3,$$
$$\text{IV)}\ x_1 + 4x_2 - 4 = 0; \qquad x_1 = 0, x_2 = 1; \qquad x_2 = 0, x_1 = 4.$$

Заштрихуем общую область ABC для всех неравенств и определим координаты вершины *B* полученного треугольника, решая систему уравнений двух пересекающихся соответствующих прямых:

$$-\begin{cases} x_1 - x_2 = 3, \\ x_1 + 4x_2 = 4. \end{cases}$$

Результатом решения системы двух уравнений с двумя неизвестными являются $x_2 = 0{,}2$ и $x_1 = 3{,}2$.

Вычислим значения целевой функции в этой точке

$$f(x_1, x_2) = x_1 + 2x_2 = 3{,}2 + 2 \cdot 0{,}2 = 3{,}6.$$

Координаты двух других вершин известны, так как одна из сторон треугольника совпадает с осью абсцисс и соответствуют (3;0) для точки *A* и (4;0) для точки *C*.

Этап 2. Приравняем целевую функцию $f = x_1 + 2x_2$ к нулю и вычислим координаты двух точек, удовлетворяющих соответствующему уравнению $x_1 + 2x_2 = 0$. В качестве одной из этих точек удобно взять точку (0;0), а так как $x_1 = 2 \ \ x_2 = -1$, то в качестве второй точки возьмем точку (2;-1).

Через эти две точки проведем прямую, которая называется *линией уровня*.

Этап 3. Для определения направления движения к оптимуму построим вектор-градиент, координаты которого являются частными производными функции *f(X)*.

$$\frac{\partial(x_1+2x_2)}{\partial x_1}=1+0=1, \quad \frac{\partial(x_1+2x_2)}{\partial x_2}=0+2=2.$$

Чтобы построить этот вектор, нужно соединить точку (1;2) с началом координат. При максимизации целевой функции необходимо двигаться в направлении вектора-градиента, а при минимизации - в противоположном направлении.

Движение линии уровня осуществляем до ее пересечения с точкой *B*; далее она выходит из области допустимых решений. Следовательно, в этой точке достигается максимум целевой функции.

Таким образом, оптимальным решением данной ЗЛП является $f(X)_{max}=4$ при $x_1=4$; $x_2=0$.

Симплекс-метод решения задачи линейного программирования

Задача линейного программирования заключается в нахождении оптимального решения из допустимой области (оптимальное решение – это минимальное или максимальное значение целевой функции при заданных ограничениях). В предыдущем разделе приведены два метода решения задачи линейного программирования. Один из них графический, а второй основан на поиске базисных допустимых решений. Оба метода имеют ограничения. Графический метод применим для числа неизвестных, не превышающих $n \leq 3$. Что касается второго метода, то его рационально использовать при небольшом числе переменных, хотя возможностей у этого метода больше, чем у предыдущего.

Широкое распространение для решения задач линейного программирования нашел симплекс-метод, разработанный Дж. Данцигом. Этот метод позволяет решать задачи в 3 этапа:

1) определение исходного решения и построение симплекс-таблицы;
2) получение или определение допустимого решения;
3) определение оптимального решения путем последовательного улучшения исходного варианта за определенное число операций.

Симплекс-метод применим при наличии следующих условий: локальный экстремум не отличается от глобального; множество решений представляет собой выпуклый многогранник; целевая функция достигает экстремума в вершине многогранника; угловым точкам многогранника отвечает опорный план задачи.

При использовании симплекс-метода сначала стандартная задача линейного программирования приводится к каноническому виду. Затем строится симплекс-таблица. Первоначально может быть получено базисное допустимое решение. Вместе с тем не исключена ситуация недопустимого решения. Тогда переходят к преобразованию исходной таблицы для получения базисного допустимого решения. При переходе от одного опорного плана к другому осуществляется проверка достижения оптимальности целевой функцией. При проверке оптимальности используются следующие теоремы.

Первая из них гласит, что если для некоторого вектора, не входящего в базис, выполняется условие

$$\Delta_j = z_j - c_j , \tag{2.11}$$

где $z_j = \sum_{i=1}^{m} c_j a_{ij}$, $j = \overline{1,n}$, то можно получить новый опорный план, для которого значение целевой функции увеличится (максимизация критерия оптимальности). При этом рассматриваются два случая:

- если все координаты вектора, подлежащего вводу в базис, неотрицательны, то задача не имеет решения;

- если имеется хотя бы одна положительная координата у вектора, вводимого в базис, то можно получить новый опорный план.

По второй теореме, если для всех векторов выполняется условие $\Delta_j = z_j - c_j \geq 0$, то полученный план является оптимальным.

При преобразовании симплекс-таблиц вводятся следующие понятия: разрешающий элемент, разрешающая строка и столбец, другие элементы. Разрешающий элемент находится в столбце с отрицательными коэффициентами c_j. Он определяется как минимальное соотношение правых частей ограничений b_i и коэффициентов при переменных левых частей условий a_{ji}:

$$a_0 = \min \frac{b_i}{a_{ji}} . \tag{2.12}$$

После определения разрешающего элемента выполняются следующие операции по заполнению новой симплекс таблицы.

Осуществляется замена свободной переменной базисной на пересечении разрешающего столбца и строки.

Ячейка разрешающего элемента заполняется числом, обратным разрешающему элементу:

$$a_{0í} = a_0^{-1}. \tag{2.13}$$

Элементы разрешающей строки $a_{сн}$ и столбца $a_{кн}$ в новой таблице вычисляются по формулам:

$$a_{cí} = \frac{a_{ññ}}{a_0}, \tag{2.14}$$

$$a_{êí} = -\frac{a_{êñ}}{a_0}, \tag{2.15}$$

где $a_{сс}$ и $a_{кс}$ – предыдущие значения элементов разрешающей строки и столбца.

Остальные элементы $a_{онк}$ рассчитываются по выражению

$$a_{îík} = a_{îñ} - \frac{a_{ññk} a_{êñk}}{a_0} , \tag{2.16}$$

где $a_{онк}$ – остальные элементы предыдущей таблицы, $a_{сck}$ и $a_{кck}$ – элементы разрешающей строки и столбца, k – индекс остальных элементов из множества K.

В результате определенного числа итераций достигается оптимальное решение задачи.

Пример 2.7. Пусть требуется произвести два вида продукции *А* и *В*. Суммарное количество сырья на производство продукции не превышает 100 кг. Затраты на изготовление единицы продукции *А* составляют 1 кг, а затраты на единицу. продукции *В* – 2 кг сырья. На изготовление продукции *А* требуется 2 ч времени, а *В* – 3 ч. Максимальное количество времени на производство продукции в течение недели не превышает 180 ч. Причем количество продукции *А* должно быть не менее 20. Себестоимость продукции *А* составляет 5 денежных единиц, а *В* – 8. Решить задачу симплекс-методом.

Решение

Симплекс-метод позволяет решать задачи в три этапа.

В начале определяется исходное решение и строится исходная симплекс-таблица. При получении недопустимого решения находится допустимый план. Затем методом последующих приближений по правилам преобразования симплекс-таблицы определяют оптимальное решение.

В этой задаче обозначим x_1 – количество продукции *А*, x_2 – количество продукции *В*. В этом случае целевая функция и ограничения имеют вид:

$$f=5x_1+8\ x_2\rightarrow max,$$
$$x_1+2\ x_2\leq 100,$$
$$2\ x_1+3\ x_2\leq 180,$$
$$x_1\geq 20.$$

Приведем неравенства и целевую функцию к каноническому виду:

$$f=5x_1+8\ x_2,$$
$$x_1+2\ x_2+\ x_3\ =100,$$
$$2\ x_1+3\ x_2+\ x_4=180,$$
$$x_1-\ x_5=20.$$

В качестве базисных переменных примем дополнительные переменные – x_3, x_4, x_5, а другие неизвестные (небазисные переменные), приравниваем к нулю.

Преобразуем уравнения относительно базисных переменных:

$$x_3=100-(x_1+2\ x_2),$$
$$x_4=180-(2\ x_1+3\ x_2),$$
$$x_5=-20-(-x_1),$$
$$f=0-(-5\ x_1-8\ x_2).$$

Теперь составим исходную симплекс-таблицу (таблица 2.4).

Таблица 2.4 – Исходная симплекс-таблица

разрешающий столбец

Базисные переменные	Свободные члены	Свободные переменные	
		x_1	x_2
x_3	100	1	2
x_4	180	2	3
x_5	-20	-1	0
f	0	-5	-8

разрешающая строка

Исходное решение задачи: $x_1=0; x_2=0; x_3=100; x_4=180; x_5=-20$. Решение недопустимо, т.к. одно из значений переменных (x_5) является отрицательным.

Следовательно, необходимо найти допустимое решение.

Для расчета параметров следующей таблицы определяется разрешающий элемент.

Разрешающий элемент находится по правилу определения минимального соотношения между свободным членом и коэффициентом при свободных переменных. Разрешающий элемент $a_0=-20\ /\ -1=20$

На основании элемента a_0 выделяется разрешающая строка и разрешающий столбец. Таким образом, таблица делится на три вида элементов:

– данные разрешающего столбца;

– данные разрешающей строки;

– остальные данные.

Каждое симплексное преобразование системы сводится к переходу от одной симплексной таблицы к другой. Перед заполнением новой симплекс-таблицы осуществляется замена базисной переменной x_5 небазисной неизвестной x_1 на пересечении разрешающего столбца и строки. Таким образом, переменная x_1 становится базисной, а x_5 – свободной или небазисной неизвестной.

Переход ко второй симплексной таблице выполняется так:

– ячейка последующего разрешающего элемента

$$a_{0н}=1\ /-1=-1;$$

– элементы разрешающей строки:

$$a_{сн}=-20/-1=20 \text{ и } a_{сн}=0/-1=0;$$

– элементы разрешающего столбца:

$$a_{кн}=-(1/-1)=1,\ a_{кн}=-(2/-1)=2 \text{ и } a_{кн}=-(-5/-1)=-5;$$

– остальные элементы симплекс-таблицы:

$$a_{он}=100-\frac{1\cdot(-20)}{-1}=80,$$

$$a_{он} = 180 - \frac{2 \cdot (-20)}{-1} = 140,$$

$$a_{îí} = 0 - \frac{-5 \times -20}{-1} = 100,$$

$$a_{îí} = 2 - \frac{-1 \times 0}{-1} = 2,$$

$$a_{îí} = 3 - \frac{2 \times 0}{-1} = 3,$$

$$a_{îí} = -8 - \frac{1 \times 0}{-1} = -8.$$

На основе вычислений сформирована новая симплекс-таблица (таблица 2.5).

Итак, получено допустимое решение, $x_1=20;\ x_2=0;\ x_3=0;\ x_4=80;\ x_5=140.$

Таблица 2.5 –Симплекс-таблица первой итерации

Базисные переменные	Свободные члены	Свободные переменные	
		x_5	x_2
x_3	80	1	**2**
x_4	140	2	3
x_1	20	-1	0
f	100	-5	-8

Далее на основе правил преобразования элементов симплекс-таблицы находится последовательно оптимальное решение.

Следующий разрешающий элемент находится в столбце с отрицательными коэффициентами при переменных целевой функции. В данном случае разрешающим элементом является число *2* (таблица 2.5), выделенное полужирным шрифтом.

Согласно правилам преобразования разрешающего элемента, разрешающей строки, разрешающего столбца и остальных элементов получены таблицы 2.6 и 2.7.

Таблица 2.6 –Симплекс-таблица второй итерации

Базисные переменные	Свободные члены	Свободные переменные	
		x_5	x_3
x_2	40	0,5	0,5
x_4	20	0,5	-1,5
x_1	20	-1	0
f	120	-1	4

Таблица 2.7 –Симплекс-таблица третьей итерации

Базисные переменные	Свободные члены	Свободные переменные	
		x_5	x_4
x_2	20	-1	2
x_3	40	2	-3
x_1	60	2	-3
f	460	2	1

Оптимальное решение достигнуто в случае, когда переменные примут следующие значения: $x_1=60;\ x_2=20;\ x_3=40;\ x_4=0;\ x_5=0$. При этом $f=460$ денежных единиц. Максимум прибыли достигается при производстве 60 изделий A и 20 - B.

Решение задачи линейного программирования с использованием программного продукта MS Excel

Постановку и решение задачи линейного программирования с помощью MS Excel рассмотрим на следующем примере.

Хозяйство специализируется в полеводстве на производстве зерна, овощей и картофеля. Сельскохозяйственное предприятие располагает 3200 га пашни, трудовыми ресурсами - 7000 чел.-дней и минеральными удобрениями - 15000 ц.д.в. Требуется найти такое сочетание посевных площадей, которое обеспечило бы получение максимума прибыли.

Следует учесть, что

– площадь посева овощей и картофеля не должна превышать 25% общей площади пашни;

– хозяйством заключен договор на продажу зерна в объеме 65000 ц.

Для разработки экономико-математической модели необходима подготовка входной информации (таблица 2.8).

Таблица 2.8 – Данные для построения модели размещения посевов

Показатели	Сельскохозяйственные культуры		
	зерновые	овощи	картофель
Урожайность, ц/га	26	200	180
Цена реализации 1 ц продукции, руб./ц.	980	2500	2000
Стоимость товарной продукции с 1 га, руб.	25480	500000	360000
Затраты на 1 га: МДС, тыс. руб.	2,7	12,7	3,1
труда, чел.-дней.	1,5	4,5	1,5
минеральных удобрений, ц.д.в.	2	15	2,3
Прибыль с 1 га, руб.	2,89	7,93	3,63

За неизвестные примем площади посева сельскохозяйственных культур по видам:

x_1 - зерновых культур;

x_2 – овощи;

x_3 – картофель.

Для построения экономико-математической модели задачи необходимо учесть все условия. В данном случае, по этим условиям можно составить пять ограничений.

1. Сумма площадей посева сельскохозяйственных культур не должна превышать площади, имеющейся в хозяйстве (3200 га). Коэффициентами при неизвестных в этом ограничении характеризуют расход пашни на 1 га каждой сельскохозяйственной культуры. В данном случае технико-экономические коэффициенты по неизвестным будут равняться единице. В правой части записывается общая площадь пашни

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 3200.$$

2. Сумма площадей посева овощей и картофеля не должна превышать площади, которая может быть отведена для этой цели (3200×0,25=800 га). Коэффициентами при неизвестных в этом ограничении характеризуют расход пашни, отведенной под посевы овощей и картофеля на 1 га. В данном случае технико-экономические коэффициенты по неизвестным x2 и x3 будут равняться единице, а по зерновым культурам (x3) - нулю. В правой части записывается максимальная площадь пашни, которая может быть отведена под посевы овощей и картофеля

$$x_2 + x_3 \leq 800.$$

3. Третье и четвертое ограничения гарантируют, что использование трудовых ресурсов и минеральных удобрений не превысит их наличие в хозяйстве. Другими словами, сумма произведений норм затрат ресурсов на 1 га на площади посева соответствующих сельскохозяйственных культур не должна превышать объемов ресурсов, имеющихся в сельскохозяйственном предприятии. Коэффициентами при неизвестных в этих ограничениях будут являться нормы расхода ресурсов (в третьем ограничении – трудовых ресурсов, в четвертом – минеральных удобрений) на 1 га площади посева сельскохозяйственных культур. В данном случае технико-экономические коэффициенты взяты из таблицы 1. В правой части записывается наличие этих ресурсов в хозяйстве:

$$1{,}5x_1 + 4{,}5x_2 + 1{,}5x_3 \leq 7000,$$

$$2x_1 + 15x_2 + 2{,}3x_3 \leq 15000.$$

4. Пятое ограничение гарантирует производство запланированного объема зерна. В качестве коэффициентов при переменных выступает выход зерна с 1 га площади посева сельскохозяйственных культур. При неизвестной x1 это урожайность зерновых (таблица 1). При переменных x2 и x3 этот коэффициент равен нулю. В правой части записывается план производства зерна

$$26x_1 \geq 65000.$$

В результате получена система пяти линейных неравенств с тремя неизвестными. Требуется найти такие неотрицательные значения этих неизвестных x1>=0; x2>=0; x3>=0, которые бы удовлетворяли данной системе неравенств и обеспечивали получение максимума прибыли от отрасли растениеводства в целом:

$$f = 2{,}89x_1 + 7{,}93x_2 + 3{,}53x_3 \rightarrow \max .$$

В качестве коэффициентов при неизвестных в целевой функции выступает прибыль, получаемая с 1 га площади посева сельскохозяйственных культур. Эти коэффициенты рассчитаны на основании данных таблицы 1.

Поскольку данная задача решается с помощью MS Excel, то и подготовку всей входной информации для построения экономико-математической модели целесообразно осуществлять также с использованием этого табличного процессора. Это облегчает не только расчеты технико-экономических коэффициентов и других данных, но и дает в дальнейшем возможность автоматического обновления информации в экономико-математической модели.

Вся разработанная информация сводится в развернутую экономико-математическую модель и заносится в рабочий лист MS Excel (рис. 2.1).

Табличная запись числовой модели задачи оптимизации структуры посевных площадей

		Ед. измерения	Зерновые	Сахарная свекла	Подсолнечник	Формула	Тип ограничения	Размер и вид ограничений
			x_1	x_2	x_3			
1	Площадь посевов	га	1	1	1	0,00	<=	3200
2	Площадь технических культур	га		1	1	0,00	<=	800
3	Затраты труда	ч-дни	1,5	4,5	1,5	0,00	<=	7000
4	Мин удобрения	ц.д.в.	2	15	2,3	0,00	<=	15000
5	Валовое производство зерна	ц	26			0,00	>=	65000
	Прибыль	руб.	2,89	7,93	3,53	0,00		мах
	Результаты решения задачи							

Рисунок 2.1 – Табличная запись задачи оптимизации структуры посевных площадей

В столбцы **A** («№»), **B** («Ограничения»), **C** («Единицы измерения») и **H** («Тип ограничений») вводятся соответствующие данные непосредственно в модель (рисунок 2.1). Они не используются в расчетах и служат для информативности и облегчения понимания содержания модели. В столбец **I** («Размер ограничений») вводятся ссылки на ячейки, содержащие соответствующую названию столбца информацию (значения правых частей построенных ранее неравенств).

Для значений переменных x_1, x_2, x_3 были оставлены пустые ячейки - соответственно **D11**, **E11**, **F11**. Изначально пустые ячейки программа MS Excel воспринимает как ячейки, значение которых равно нулю. Столбец **G**, названный «**Формула**», предназначен для определения суммы произведений значений искомых неизвестных (ячейки **D11**, **E11**, **F11**) и технико-экономических коэффициентов по соответствующим ограничениям (строки 5-9) и целевой функции (строка 10). Таким образом, в столбце **G** определяется:

– количество используемых ресурсов (ячейка **G5** – общей площади посевов; **G6** – пашни, которая может быть использована под посевы технических культур; **G7** – трудовых ресурсов; **G8** – минеральных удобрений);

– количество произведенного зерна (ячейка **G9**);

– величина прибыли (ячейка **G10**).

G5 =СУММПРОИЗВ(D5:F5;$D$11:$F$11)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Табличная запись числовой модели задачи оптимизации структуры посевных площадей								
2									
3			Ед. измерения	Зерновые	Сахарная свекла	Подсолнечни	Формула	Тип ограничения	Размер и вид ограничений
4				x_1	x_2	x_3			
5	1	Площадь посевов	га	1	1	1	0,00	<=	3200
6	2	Площадь технических культур	га		1	1	0,00	<=	800
7	3	Затраты труда	ч-дни	1,5	4,5	1,5	0,00	<=	7000
8	4	Мин удобрения	ц.д.в.	2	15	2,3	0,00	<=	15000
9	5	Валовое производство зерна	ц	26			0,00	>=	65000
10	Прибыль		руб.	2,89	7,93	3,53	0,00		мах
11	Результаты решения задачи								
12									

Рисунок 2.2 – Фрагмент табличной записи задачи оптимизации структуры посевных площадей

На рисунке 2.2 показано, как в ячейке **G5** реализуется запись суммы произведений значений переменных (площадей посева с.-х. культур - ячейки **D11**, **E11**, **F11**) на соответствующие коэффициенты (ячейки **D5**, **E5**, **F5**) с помощью функции MS Excel «**СУММПРОИЗВ**». Так как при написании данной формулы использованы абсолютные адресации на ячейки от **D11** до **F11**, эта формула может быть скопирована в другие ячейки от **G6** до **G10**.

Таким образом, построен опорный план (рис. 2) и получено первое допустимое решение. Значения неизвестных $\mathbf{X_1}$, $\mathbf{X_2}$, $\mathbf{X_3}$ равны нулю (ячейки **D11**, **E11**, **F11 -** пустые ячейки), ячейки столбца **G** «Сумма произведений» по всем ограничениям (строкам 5-9) и целевой строке (строка 10) также имеют нулевые значения.

Экономическая интерпретация первого опорного плана звучит следующим образом: в хозяйстве имеются ресурсы, рассчитаны все технико-экономические коэффициенты, но процесс производства еще не начат; ресурсы не использовались, и, соответственно, прибыли нет.

Для оптимизации имеющегося плана воспользуемся инструментом **Поиск решения,** который находится в меню **«Данные»**. Если нет такой команды в меню **Данные,** необходимо в меню **Файл – Параметры - Надстройка** поставить галочку напротив «**Поиск решения**». После этого данная процедура станет доступной в меню **«Данные»**.

После выбора данной команды появится диалоговое окно (рис. 2.3).

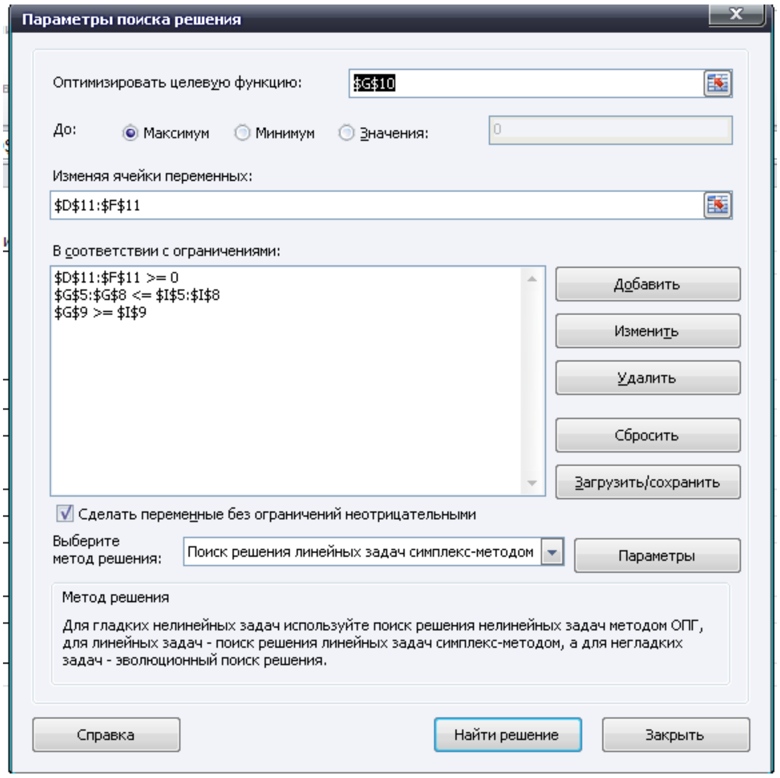


Рисунок 2.3 – Диалоговое окно надстройки «Поиск решения» в MS Excel

Поскольку в качестве критерия оптимизации нами выбрана максимизация прибыли, в поле «**Установить целевую ячейку (оптимизировать целевую функцию)»** введите ссылку на ячейку, содержащую формулу расчета прибыли. В нашем случае это ячейка **$G$10**. Чтобы максимизировать значение конечной ячейки путем изменения значений влияющих ячеек (влияющими, в данном случае это и изменяемые ячейки, являются ячейки, которые предназначены для хранения значений искомых неизвестных), переключатель установите в положение **максимальному значению**.

В поле «**Изменяя ячейки переменных»** введите ссылки на изменяемые ячейки, разделяя их запятыми; либо, если ячейки находятся рядом, указывая первую и последнюю ячейку, разделяя их двоеточием (**$D$11:$F$11**).

В поле «**В соответствии с ограничениями»** введите все ограничения, накладываемые на поиск решения. Добавление ограничения рассмотрим на примере добавления первого ограничения по общей площади пашни.

В разделе «**В соответствии с ограничениями»** диалогового окна «**Поиск решения»** нажмите кнопку **Добавить**. Появится следующее диалоговое окно (рис. 2.4)

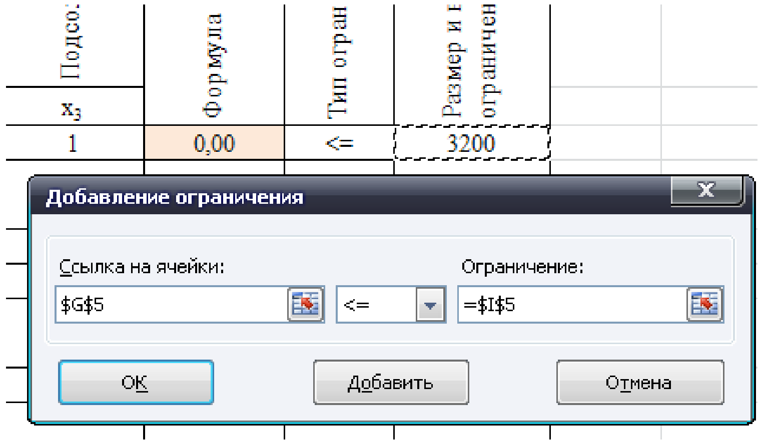


Рисунок 2.4 – Фрагмент решения задачи линейного программирования в надстройке MS Excel «Поиск решения»

В поле **Ссылка на ячейку** введите адрес ячейки, на значение которой накладываются ограничения. В нашем случае, это ячейка **$G$5**, где находится формула расчета используемой пашни в текущем плане.

Выберите из раскрывающегося списка условный оператор **<=**, который должен располагаться между ссылкой и ограничением.

В поле **Ограничение** введите ссылку на ячейку, в которой находится значение наличия площади посевов в хозяйстве, либо ссылка на это значение. В нашем случае, это ячейка **$I$5**

В результате диалоговое окно примет вид как на рисунке 4.

Чтобы принять ограничение и приступить к вводу нового, нажмите кнопку **Добавить**. Аналогично вводятся и другие ограничения. Чтобы вернуться в диалоговое окно **Поиск решения**, нажмите кнопку **ОК**.

После выполнения вышеперечисленных инструкций диалоговое окно **Поиск решения** будет иметь следующий вид (рис. 3).

Для изменения и удаления ограничений в списке **Ограничения** диалогового окна **Поиск решения** укажите ограничение, которое требуется изменить или удалить. Выберите команду **Изменить** и внесите изменения либо нажмите кнопку **Удалить.**

Поставьте флажок **Линейная модель** в диалоговом окне **Параметры Поиска решения** или выберите метод решения **«Поиск решения линейных задач симплекс-методом»**. Флажок **«Сделать переменные без ограничений неотрицательными»** позволит соблюсти условие неотрицательности переменных (при решении нашей задачи – поставить обязательно). Остальные параметры можно оставить без изменений, либо установить нужные для вас параметры, при необходимости используя справку.

Для запуска задачи на решение нажмите кнопку **Выполнить (Найти решение**) и выполните одно из следующих действий:

– чтобы сохранить найденное решение на листе, выберите в диалоговом окне **Результаты поиска** решения вариант **Сохранить найденное решение** (рис. 2.5);

– чтобы восстановить исходные данные, выберите вариант **Восстановить исходные значения**.

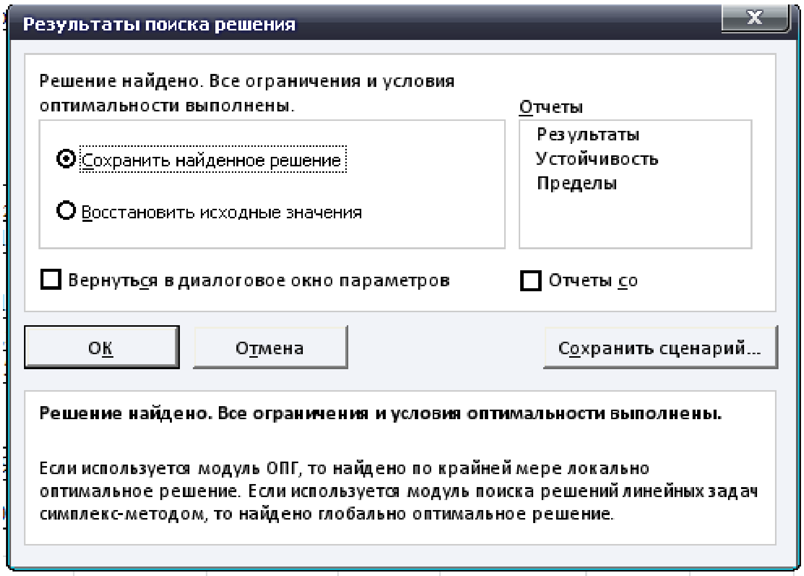
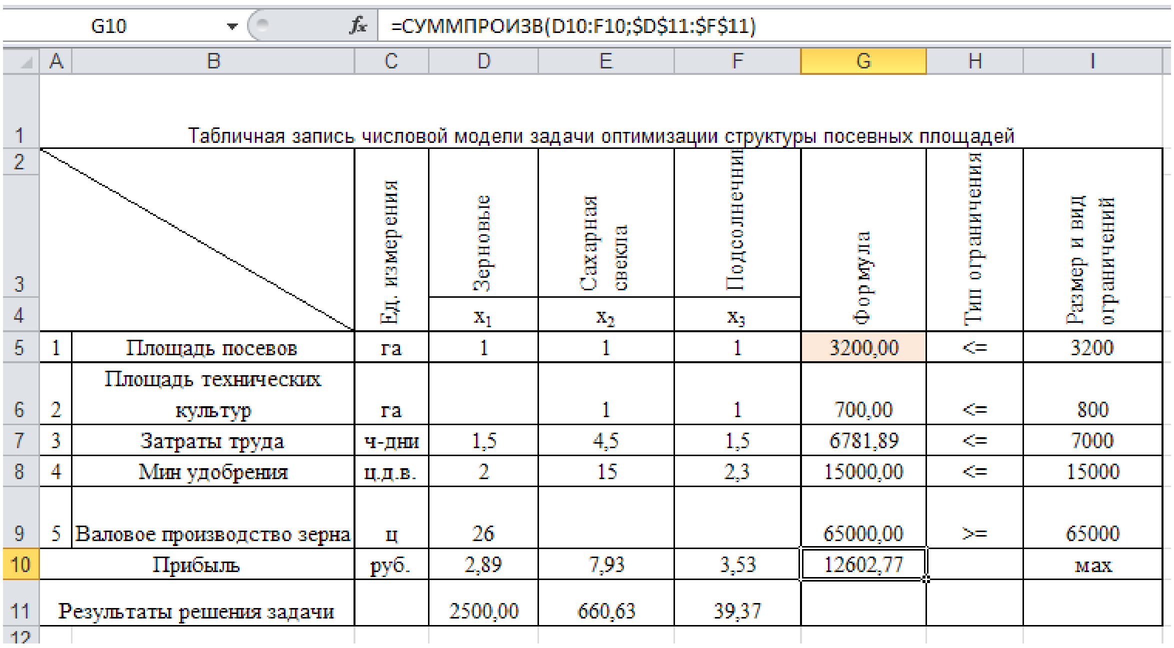


Рисунок 2.5 – Результаты поиска решения задачи линейного программирования

Для того чтобы прервать поиск решения, нажмите клавишу **ESC**.

Лист Microsoft Excel будет пересчитан с учетом найденных значений влияющих ячеек. В результате решения и сохранения результатов поиска на листе модель примет следующий вид (рис. 2.6).



G10 =СУММПРОИЗВ(D10:F10;$D$11:$F$11)

Табличная запись числовой модели задачи оптимизации структуры посевных площадей

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
3–4			Ед. измерения	Зерновые x_1	Сахарная свекла x_2	Подсолнечник x_3	Формула	Тип ограничения	Размер и вид ограничений
5	1	Площадь посевов	га	1	1	1	3200,00	<=	3200
6	2	Площадь технических культур	га		1	1	700,00	<=	800
7	3	Затраты труда	ч-дни	1,5	4,5	1,5	6781,89	<=	7000
8	4	Мин удобрения	ц.д.в.	2	15	2,3	15000,00	<=	15000
9	5	Валовое производство зерна	ц	26			65000,00	>=	65000
10		Прибыль	руб.	2,89	7,93	3,53	12602,77		мах
11		Результаты решения задачи		2500,00	660,63	39,37			

Рисунок 2.6 – Табличная запись решенной задачи линейного программирования

В ячейках **D11-F11** получены значения искомых неизвестных (площади посева равны: зерновых - 2500 га, сахарной свеклы - 661 га, подсолнечника – 39 га), в ячейках **G5-G8** определены объемы используемых ресурсов (общей площади пашни – 3200 га; площади пашни, которая может быть использована под посевы технических культур – 700 га; трудовых – 6781,9 чел.-дней; минеральных удобрений – 15000 ц.д.в.), в ячейке **G9** установлено количество произведенного зерна (65000 ц.). При всех этих значениях величина прибыли достигает 12602,77 тыс. руб. (ячейка **G10**).

В случае если в результате поиска не было найдено решение, удовлетворяющее заданным условиям, в диалоговом окне **Результаты поиска решения** появится соответствующее сообщение (рис. 2.7).

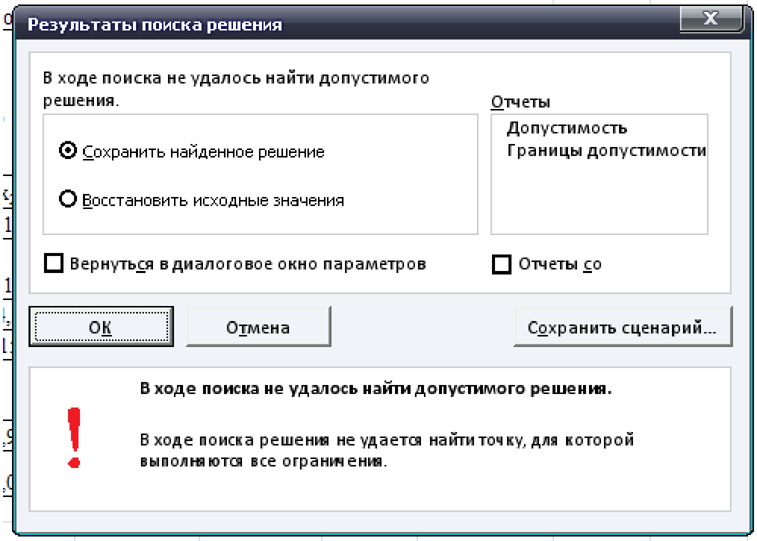


Рисунок 2.7 – Окно вывода результатов поиска решения в MS Excel

Одной из наиболее часто встречающихся причин невозможности найти оптимальное решение является такая ситуация, когда в результате решения задачи выясняется, что имеются ограничения, которые не выполняются. Сохранив найденное решение на листе, требуется построчно сравнить полученные значения столбцов «Сумма произведений» и «Объем ограничений» и проверить, удовлетворяет ли отношение между ними ограничению, стоящему в столбце «Тип ограничений». Найдя, таким образом, невыполняемые ограничения необходимо найти и ликвидировать причины, обуславливающие невозможность соблюдения данного конкретного условия (это может быть, например, слишком большие или, наоборот, очень маленькие запланированные объемы ограничений и т.п.).

2.2 Специальные задачи линейного программирования

В рамках задач линейного программирования выделяют задачи, отличающиеся некоторыми особенностями. Так, в ряде случаев приходится решать задачи, когда переменные могут принимать только целые неотрицательные значения. Такие задачи называют задачами целочисленного программирования. Их особенность заключается в поиске таких целочисленных неизвестных, значения которых позволяли бы получать экстремум целевой функции. Проблема при решении такой задачи заключается в том, что при стандартных методах поиска оптимального плана с округлением полученных значений можно получить неправильный результат. В этом случае применяются другие подходы для описания дискретных величин.

К специальным задачам линейного программирования относят задачу параметрического программирования, в которой коэффициенты при переменных целевой функции, правые части ограничений и множители возле неизвестных левых частей условий зависят от некоторого параметра или параметров. В качестве таковых используют время, предшествующие значения последовательностей и некоторые факторы, влияющие на перечисленные характеристики. В задаче параметрического программирования в отличие от обычной задачи линейного программирования коэффициенты при неизвестных и свободные члены (правые части ограничений) не являются постоянными величинами. Следовательно, в этом случае имеет место множество оптимальных планов, которое зависит от параметров.

В отдельную группу задач выделяют задачи дробно-линейного программирования. В целевую функцию этой задачи входят в качестве числителя и знаменателя два выражения. При несложных операциях эта задача может быть преобразована к задаче линейного программирования.

2.2.1 Задача целочисленного программирования

В рамках задач линейного программирования выделяют задачи, отличающиеся некоторыми особенностями. Так, в ряде случаев приходится решать задачи, когда переменные могут принимать только целые неотрицательные значения. Такие задачи называют задачами целочисленного программирования. Их особенность заключается в поиске таких целочисленных неизвестных, значения которых позволяли бы получать экстремум целевой функции. Проблема при решении такой задачи заключается в том, что при стандартных методах поиска оптимального плана с округлением полученных значений можно получить неправильный результат. В этом случае применяются другие подходы для описания дискретных величин.

Другими словами, формулируется и решается задача линейного программирования (см. примеры на графический метод, симплексный метод, двойственные задачи) с условием, что все переменные должны принимать целые значения. При этом решение задачи становится более объемным. Если речь идет о задаче с двумя переменными, можно применить графический метод, если же переменных больше, необходимо использовать специальные методы для этого класса задач: метод Гомори или метод ветвей и границ.

Сущность метода Гомори заключается в построении ограничений, отсекающих нецелочисленные решения задачи линейного программирования, но не отсекающих ни одного целочисленного плана. Алгоритм решения задачи линейного целочисленного программирования этим методом выглядит следующим образом.

1. Решается задача симплексным методом без учета условия целочисленности. Если все компоненты оптимального плана целые, то он является оптимальным и для задачи целочисленного программирования. Если обнаруживается неразрешимость задачи, то и неразрешима задача целочисленного программирования.
2. Если среди компонент оптимального решения есть нецелые, то к ограничениям задачи добавляется новое ограничение, обладающее следующими свойствами:
   - оно должно быть линейным;
   - должно отсекать найденный оптимальный нецелочисленный план;
   - не должно отсекать ни одного целочисленного плана.

Для построения ограничения выбирается компонента оптимального плана ***с наибольшей дробной частью*** и по соответствующей этой компоненте *k*-й строке симплексной таблицы записывается ограничение Гомори.

$$f_k = \sum_{j \notin Б} f_{kj} x_j - S^*, \; S^* \geq 0, \qquad (2.17)$$

где $f_k = x_j - [x_j]$;

$f_{kj} = z_{kj} - [z_{kj}]$;

S^* - новая переменная;

$[x_j], [z_{kj}]$ -ближайшее целое, не превосходящее x_j и z_{kj} соответственно.

3. Составленное ограничение добавляется к имеющимся в симплексной таблице, тем самым получается расширенная задача. Чтобы получить опорный план этой задачи, необходимо ввести в базис тот вектор, для которого величина $\left|\frac{\Delta_j}{f_{kj}}\right|$ минимальна. И если для этого вектора величина $\theta = \min\limits_{z_{ij}>0} \frac{x_j}{z_{ij}}$ получается по дополнительной строке, то в следующей симплексной таблице будет получен опорный план. Если же величина θ не соответствует дополнительной строке, то необходимо переходить к М-задаче (вводить искусственную переменную в ограничение Гомори).
4. Далее решается при помощи обычных симплексных преобразований полученная задача. Если решение этой задачи приводит к целочисленному оптимальному плану, то искомая задача решена. Если получено нецелочисленное решение, то снова добавляется одно дополнительное ограничение, и процесс вычислений повторяется. Проделав конечное число итераций, либо будет получен оптимальный план задачи целочисленного программирования, либо устанавлена ее неразрешимость.

<u>Замечания:</u>

1. Если дополнительная переменная S^* вошла в базис, то после пересчета какого-либо последующего плана соответствующие ей строку и столбец можно удалить (тем самым сокращается размерность задачи).
2. Если для дробного x_j обнаружится целочисленность всех коэффициентов соответствующего уравнения (строки), то задача не имеет целочисленного решения.

2.2.2 Транспортная задача

Среди специальных задач линейного программирования выделяется транспортная задача. Остановимся подробнее на формулировке этой задачи.

В транспортной задаче рассматриваются пункты отправления $A_1, A_2,..., A_m$ и назначения $B_1, B_2,..., B_n$. Задача состоит в нахождении оптимального плана перевозки груза x_{ij} из пунктов отправления в пункты назначения. Если тариф перевозки единицы груза обозначить c_{ij} и целевая функция представляет собой минимальную стоимость перевозки, то транспортная задача записывается в следующем виде:

$$f = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}, \qquad (2.18)$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad (i = \overline{1,m}), \qquad (2.19)$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad (j = \overline{1,n}), \qquad (2.20)$$

$$x_{ij} \geq 0, \qquad (2.21)$$

a_i – объемы товара в пунктах отправления; b_j – потребности в грузе в пунктах назначения.

Неотрицательное решение уравнений (2.17) и (2.20), определенное матрицей $X=(x_{ij})$, является планом транспортной задачи. План $X^* = (x_{ij}^*)$ ($i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$), при котором функция (103) достигает минимума, называется оптимальным планом.

Если объем груза поставщиков соответствует его потребности, т.е.

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j, \qquad (2.22)$$

то задача считается закрытой. В противном случае, если равенство (2.21) представляет собой неравенство, транспортная задача называется открытой.

При преобладании левой части над правой вводится дополнительный пункт назначения *n+1*. Потребность в этом случае для дополнительного пункта равна $\sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$ с тарифом перевозки, равным нулю. Если же имеет место дефицит груза (правая часть равенства (2.21) преобладает на левой), тогда вводят дополнительный пункт поставки $m+1$ с запасом груза $\sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i$. Как и в предыдущем случае, тариф приравнивают к нулю.

Пример 2.8. На двух полях A_1 и A_2 собран урожай картофеля 1800 и 2400 т. Полученную продукцию необходимо поставить в три склада B_1, B_2 и B_3. В первом из них может храниться 1200 т картофеля, во втором – 2000 т и в третьем – 1000 т. Известна стоимость перевозки, приведенная в таблице 2.9. Требуется сформулировать транспортную задачу, в которой целевая функция характеризует минимальные затраты на перевозку продукции.

Таблица 2.9 – Тариф перевозки картофеля, д.е./т

Поля	Склады			Запасы
	B_1	B_2	B_3	
A_1	11	9	12	1800
A_2	10	13	14	2400
Потребности	1200	2000	1000	4200

Целевая функция с учетом тарифов примет вид

$$f=11x_{11}+9x_{12}+12x_{13}+10x_{21}+13x_{22}+14x_{23}\rightarrow min.$$

Ограничения по перевозке продукции из полей в хранилища записываются так:

$$x_{11}+x_{12}+x_{13}=1800\ [т],$$
$$x_{21}+x_{22}+x_{23}=2400\ [т].$$

Условия, связанные с возможностями хранилищ, имеют вид:

$${}_{11}+x_{21}=1200\ [т],$$
$$x_{12}+x_{21}=2000\ [т],$$
$$x_{13}+x_{23}=1000\ [т].$$

Задача является закрытой, поскольку объемы картофеля соответствуют емкостям хранилищ.

2.2.3 Параметрическая задача

Отдельным классом задач линейного программирования являются ***параметрические задачи***, в которых исходные данные зависят от некоторого параметра или параметров.

В научной и учебной литературе многократно встречаются разделы, посвященные параметрическому программированию. Данное направление в линейном программировании достаточно изучено с теоретической точки зрения, но практическое их применение не имеет широкого распространения. При этом в сельском хозяйстве модели задач параметрического программирования почти не используются.

На практике выделяют следующие виды параметрической задачи:

1) задача, в которой коэффициенты целевой функции линейно зависят от параметра t

$$f = \sum_{j \in J} c_j(t) x_j, \tag{2.23}$$

при условиях

$$\sum_{j \in J} a_{ij} x_j = b_i,\ i \in I, \tag{2.24}$$

$$x_j \geq 0,\ j \in J, \tag{2.25}$$

где f – целевая функция, x_j – переменная, t - параметр, c_j, a_{ij}, b_i – коэффициенты;

2) от параметра t линейно зависят свободные члены системы ограничений

$$F = \sum_{j \in J} c_j x_j, \tag{2.26}$$

при условиях

$$\sum_{j \in J} a_{ij} x_j = b_i(t),\ i \in I, \tag{2.27}$$

$$x_j \geq 0,\ j \in J; \tag{2.28}$$

3) от параметра t линейно зависят коэффициенты целевой функции и свободные члены системы ограничений

$$f = \sum_{j \in J} c_j(t) x_j, \tag{2.29}$$

при условиях

$$\sum_{j \in J} a_{ij} x_j = b_i(t),\ i \in I, \tag{2.30}$$

$$x_j \geq 0,\ j \in J. \tag{2.31}$$

Обобщением этих задач является задача параметрического программирования, в которой от параметра t линейно зависят коэффициенты при неизвестных в целевой функции, коэффициенты при неизвестных в системе уравнений и свободные члены системы уравнений. Для каждого значения параметра t из некоторого промежутка его изменения $[\alpha, \beta]$ требуется найти максимальное значение функции:

$$f = \sum_{j \in J} c_j(t) x_j, \tag{2.32}$$

$$\sum_{j \in J} a_{ij}(t) x_j = b_i(t),\ i \in I, \tag{2.33}$$

$$x_j \geq 0,\ j \in J. \tag{2.34}$$

Вместе с тем возможно использование многопараметрических задач, в которых коэффициенты при неизвестных в целевой функции, коэффициенты при неизвестных в системе уравнений и свободные члены системы уравнений линейно зависят от нескольких параметров:

$$\sum_{j \in J} c_j (t_1, t_2, t_3, \ldots t_e) x_j \ , \ i \in I \ , \qquad (2.35)$$

$$\sum_{j \in J} a_{ij} (t_1, t_2, t_3, \ldots t_e) x_j \le b_i (t_1, t_2, t_3, \ldots t_e), \ i \in I \ , \ e \in E \ , \qquad (2.36)$$

$$x_j \ge 0 \ , \ j \in J \ , \qquad (2.37)$$

где параметр t_e изменяется в промежутке $[\alpha_e, \beta_e]$.

В задачах параметрического программирования коэффициенты при переменных в ограничениях и целевой функции зависят от некоторого параметра или параметров. В качестве таковых используется время, предшествующее значение и другие факторы, влияющие на характеристики модели.

Пример 2.9. Известно, что цена единицы продукции может изменяться для изделия А от 2 до 12 у.е., а для изделия *В* - от 13 до 3 у.е., причем эти изменения определяются соотношениями $c_1 = 2 + t$, $c_2 = 13 - t$, где $0 \le t \le 1$.

Для каждого из возможных значений цены единицы продукции каждого из видов найти такой план их производства, при котором общая стоимость продукции является максимальной.

Решение

Предположим, что предприятие изготовит x_1 единиц продукции *А* и x_2 единиц продукции *В*. Тогда математическая постановка задачи состоит в определении для каждого значения параметра $t(0 \le t \le 10)$ - максимального значения функции

$$f = (2+t)x_1 + (13-t)x_2$$

при условиях

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 \le 16 \\ 2x_1 + 2x_2 \le 22 \\ 6x_1 + 3x_2 \le 36 \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \ge 0.$$

Чтобы найти решение задачи, строим многоугольник решений, определяемый системой линейных неравенств и условием неотрицательности переменных (рис. 2.8).

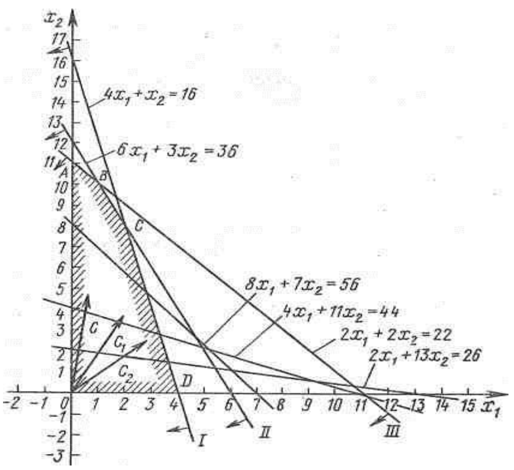


Рисунок 2.8 – Графическая интерпретация решения задачи

параметрического программирования

После этого, полагая, что $t = 0$, строим прямую $2x_1 + 13x_2 = 26$ (число 26 взято произвольно) и вектор $C = (2, 13)$. Передвигая построенную прямую в направлении вектора С, определяем, что последней общей точкой ее с многоугольником решений *OABCD* является точка *A* (0, 11). Следовательно, задача, полученная из исходной задачи при $t = 0$, имеет оптимальный план $X_0^* = (0,11)$.

Это означает, что если цена единицы продукции *A* равна 2 + 0 = 2 у.е., а цена единицы продукции *B* составляет 13 - 0 = 13 у.е., то оптимальным планом производства является план, согласно которому производится 11 изделий *B* и не производятся изделия *A*.

При таком плане производства продукции ее стоимость максимальна и равна $f_{\max} = 143.$

Положим теперь $t=2$ и построим прямую $(2+2)x_1 + (13-2)x_2 = 4x_1 + 11x_2 = 44$ (число 44 взято произвольно) и вектор C_1 = (4, 11), В результате задача, полученная из исходной задачи при $t = 2$, имеет оптимальный план $X_0^* = (0,11)$. Это означает, что если цена единицы продукции А равна 2 + 2 = 4 у.е., а цена единицы продукции *B* составляет 13 - 2 = 11 у.е., то предприятию также наиболее целесообразно производить 11 ед. продукции вида *B* и совсем не производить продукцию вида *A*.

При таком плане производства продукции ее общая стоимость является максимальной и составляет $f_{max} = 121$.

Как видно из рисунка 7, данный план производства продукции будет оставаться оптимальным для всякого значения *t*, пока прямая $(2+t)x_1 + (13-t)x_2 = h$ не станет параллельной прямой $2x_1 + 2x_2 = 22$. Это произойдет тогда, когда $(2+t)/2 = (13-t)/2$, т. е. при t =5,5. При этом значении *t* координаты любой точки отрезка *AB* дают оптимальный план задачи.

Таким образом, для всякого $0 \le t \le 5{,}5$ задача имеет оптимальный план $X_0^* = (0,11)$, при котором значение целевой функции есть $f_{\max} = (2+t)0 + (13-t)11 = 143 - 11t$.

Если $t \geq 5{,}5$, например, 6, то получим прямую $(2+6)x_1+(13-6)x_2=8x_1+7x_2=56$. Правая часть равенства взята произвольно. Вектор целевой функции имеет координаты $C_2(8, 7)$. Передвигая прямую в направлении этого вектора получим оптимальное решение задачи в точке *B(1, 10)* или $X^*(1, 10)$. В этом случае целевая функция достигнет максимума $f_{max}=8\cdot1+7\cdot10=78$. Нетрудно показать, что приведенная точка $X^*(1, 10)$ является оптимальным планом на отрезке $5{,}5 \leq t \leq 8$. Тогда целевая функция примет вид $f_{max}=(2+t)\cdot1+(13-t)\cdot10=132-9t$. Для периода времени $8 < t \leq 10$ оптимальным планом является $X^*(2, 8)$, а целевая функция соответствует $f_{max}=108-6t$ (Акулич, 1993).

Методы решения задач специальных задач линейного программирования

Метод потенциалов

При решении транспортной задачи можно использовать симплекс-метод. Вместе с тем он не всегда является эффективным. Поэтому применяются другие методы, учитывающие особенности транспортных задач.

Рассмотрим метод потенциалов, который состоит из нескольких этапов. Вначале составляется опорный план перевозок. На этом этапе можно использовать следующие методы: наименьших стоимостей, северо-западного угла и аппроксимации Фогеля. На втором этапе применимы методы потенциалов и дифференциальных рент. Здесь осуществляется проверка оптимальности опорного плана. Если опорный план не оптимален, то выполняется корректировка плана (третий этап). Итерации второго и третьего этапов завершаются при получении оптимального решения.

В учебном пособии рассмотрено определение оптимального плана на примере. При этом использованы методы наименьших стоимостей и потенциалов. Предложенные методы применены для закрытой транспортной задачи, когда суммы поставляемых и потребляемых товаров равны. Следует подчеркнуть, что число базисных ячеек равно $m+n-1$, где m, n – число потребителей и поставщиков. Поскольку задача является закрытой, то количество отличных от нуля неизвестных (базисные переменные) на единицу меньше суммы $m+n$.

Пример 2.10. В таблице 2.10 приведены исходные данные транспортной задачи. Определить оптимальный план.

На первом этапе определяется опорный план. Для наименьшей стоимости (9), которая находится на пересечении первой строки и второго столбца, присваиваем максимальное значение переменной x_{12}, равное 1800 (таблица 2.8).

Таблица 2.10 – Определение опорного плана

Поставщики	Потребители		
	1200	2000	1000
1800	11	9 / 1800	12
2400	10 / 1200	13 / 200	14 / 1000

Поскольку во втором столбце сумма должна соответствовать 2000, определяем значение x_{23} =200. Следующая наименьшая стоимость равна 10, поэтому x_{12} = 1200, что соответствует суммарному значению первого потребителя. Для того чтобы во второй строке сумма равнялась 2400, переменной x_{23} присвоено значение 1000.

В результате суммарные затраты составят

$$f(x) = c_{12} \times x_{12} + c_{21} \times x_{21} + c_{22} \times x_{22} + c_{23} \times x_{23} =$$

$$9 \times 1800 + 10 \times 1200 + 13 \times 200 + 14 \times 1000 = 48000 \text{ д.е.}$$

На втором этапе проверяется оптимальность полученного плана. Для этого вводятся переменные u_i и v_j , соответствующие строкам и столбцам (таблица 2.11). Эти переменные характеризуют потенциал или цены товаров в соответствующих пунктах поставщиков и потребителей. Потенциалы определяются по формуле

$$v_j = u_i + c_{ij}.$$

Таблица 2.11 – Нахождение потенциалов поставщиков и потребителей

Поставщики	Потребители			u_i
	1200	2000	1000	
1800	11	9 / 1800	12	0
2400	10 / 1200	13 / 200	14 / 1000	-4
v_j	6	9	10	

При этом одно из неизвестных, например, u_1 может быть равно 0.

В таблице 2.9 приведены значения u_i и v_j, полученные на основе базисных переменных. В начале значение потенциала стоит приравнять к 0 (u_1 = 0). Тогда согласно формуле потенциалов v_2 = 9. По тому же выражению нетрудно найти u_2=9 – 13 = -4.

Зная это значение, получаем v_1 = 10 – 4 =6 и v_3 = 14 – 4 =10.

Для оценки оптимальности плана используется формула

$$d_{ij} = (u_i + c_{ij}) - V_j .$$

Это выражение позволяет определить матрицу, размер которой соответствует числу строк и столбцов исходной таблицы $m \times n$. Исходя из этой формулы, матрица оценок оптимального плана имеет вид

$$d_{ij} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Поскольку все оценки неотрицательны, то полученный план не может быть улучшен. Следовательно, определено оптимальное решение. Третий этап, связанный с улучшением плана, не понадобился.

Пример 2.11. Пусть задан опорный план (таблица 2.12). Требуется получить оптимальное решение, используя метод потенциала.

Используя формулу оценки оптимальности плана d_{ij}, получим следующую матрицу

$$d_{ij} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Целевая функция при этом $f(x) = 9\times800 + 12\times1000 + 10\times1200 + 13\times1200 = 46800$

Приведенный план не является оптимальным ввиду наличия отрицательного элемента в матрице. Построим контур перераспределения значений x_{ij} в виде штриховой (таблица 2.13). Началом контура является ячейка с наименьшим потенциалом. При этом потенциалам, располагаемым по диагонали, присваивается символ + или - .

Таблица 2.12 – Опорный план транспортной задачи

Поставщики	Потребители		
	1200	2000	1000
1800	11	9 / 800	12 / 1000
2400	10 / 1200	13 / 1200	14

Таблица 2.13 – Транспортная задача с потенциалами потребителей и поставщиков

Поставщики	Потребители			u_i
	1200	2000	1000	
1800	11	9+ / 800	12- / 1000	0
2400	10 / 1200	13- / 1200	14+	-4
v_j	6	9	12	

Перераспределение осуществляется с отрицательных в положительные ячейки. Тогда значение x_{13}=1000 перенесем в соседнюю клетку, увеличив величину x_{12} до 1800. В этом случае x_{13}=0. Что касается значения x_{22} =1200, то оно распределено так: x_{22} =200 и x_{23}=1000 (таблица 2.14).

Матрица оценок полученного плана примет вид

$$d_{ij} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Таблица 2.14 - Итерация получения нового плана.

Поставщики	Потребители			u_i
	1200	2000	1000	
1800	11	9 1800	12	0
2400	10 1200	13 200	14 1000	-4
v_j	6	9	10	

Поскольку отрицательные элементы в матрице отсутствуют, определено оптимальное решение: $f(x) = 9 \times 1800 + 10 \times 1200 + 13 \times 200 + 14 \times 1000 = 44800$ д.е.

Таким образом, первая итерация позволила получить оптимальный результат.

Методика решения транспортной задачи с использованием программного продукта MS Excel

Транспортная задача является классической задачей исследования операций. Множество задач распределения ресурсов сводится именно к этой задаче. Рассмотрим постановку и решение транспортной задачи с помощью MS Excel на следующем примере.

В хозяйстве имеются пять складов минеральных удобрений и четыре пункта, куда их необходимо доставить. Потребность каждого пункта в минеральных удобрениях различна, и запасы на каждом складе ограничены. Требуется определить, с какого склада, в какой пункт поставлять минеральные удобрения, оптимальные объемы поставок минеральных удобрений для минимизации грузооборота перевозок.

Имеются следующие исходные данные (таблицы 2.15-2.17)

Таблица 2.15 - Наличие минеральных удобрений на складах

Склады	Наличие удобрений, т.
Склад №1	200
Склад №2	190
Склад №3	220
Склад №4	145
Склад №5	280

Таблица 2.16 - Потребность в минеральных удобрениях на различных пунктах

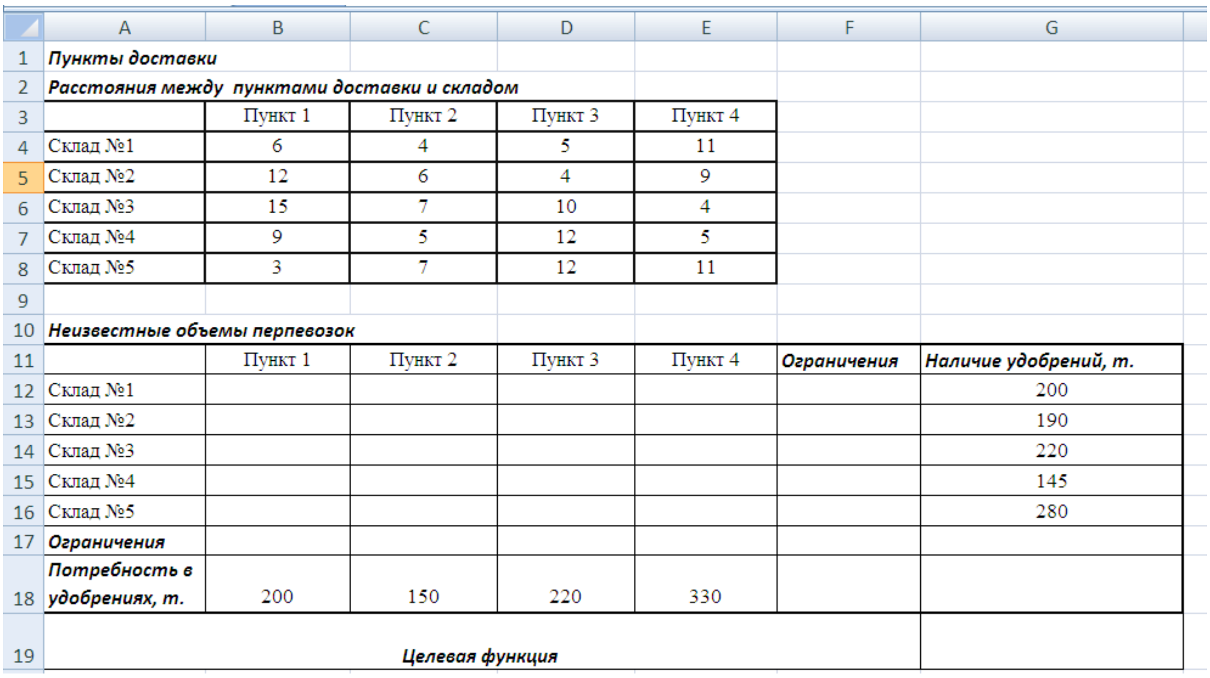
Пункты	Потребность в удобрениях, т.
1 пункт	200
2 пункт	150
3 пункт	220
4 пункт	330

Таблица 2.17 - Расстояния между складами и пунктами доставки

	Пункт 1	Пункт 2	Пункт 3	Пункт 4
Склад №1	6	4	5	11
Склад №2	12	6	4	9
Склад №3	15	7	10	4
Склад №4	9	5	12	5
Склад №5	3	7	12	11

На пересечении столбца конкретного пункта доставки со строкой склада находится информация о расстояниях между этими пунктом доставки и складом. Например, расстояние между 3 пунктом и складом №3 равно 10 километрам.

Для решения задачи подготовим необходимые таблицы (рис. 2.9).



	A	B	C	D	E	F	G
1	*Пункты доставки*						
2	*Расстояния между пунктами доставки и складом*						
3		Пункт 1	Пункт 2	Пункт 3	Пункт 4		
4	Склад №1	6	4	5	11		
5	Склад №2	12	6	4	9		
6	Склад №3	15	7	10	4		
7	Склад №4	9	5	12	5		
8	Склад №5	3	7	12	11		
9							
10	*Неизвестные объемы перпевозок*						
11		Пункт 1	Пункт 2	Пункт 3	Пункт 4	*Ограничения*	*Наличие удобрений, т.*
12	Склад №1						200
13	Склад №2						190
14	Склад №3						220
15	Склад №4						145
16	Склад №5						280
17	*Ограничения*						
18	*Потребность в удобрениях, т.*	200	150	220	330		
19	*Целевая функция*						

Рисунок 2.9 - Изменяемые ячейки в таблицах для решения транспортной задачи

Значения ячеек по столбцу ***F*** с двенадцатой по шестнадцатую строки определяются суммированием данных ячеек соответствующих строк начиная со столбца ***B*** до столбца ***E*** .

Например, значение ячейки ***F12=СУММ(B12:E12).***

Значения ячеек по строке ***17*** по столбцам от ***B*** до ***E*** ся суммированием данных ячеек соответствующих столбцов с 12 по 16 строкам.

Например, значение ячейки ***B17=СУММ(B12:B16).***

Каждое значение в ячейках на пересечении столбца конкретного пункта доставки и строки склада означает количество тонн, поставляемых с этого склада в данный пункт потребления. В нижней строке (**строка *17***) суммируется общее количество минеральных удобрений, поставляемых в определенный пункт доставки, а в столбце ***F*** суммируется количество минеральных удобрений, доставленных с конкретного склада.

Теперь, используя исходные данные, введем на этом же листе требуемые объемы поставок и расстояния между складами и пунктами доставки (рис. 2.10).

	A	B	C	D	E	F	G
1	*Пункты доставки*						
2	*Расстояния между пунктами доставки и складом*						
3		Пункт 1	Пункт 2	Пункт 3	Пункт 4		
4	Склад №1	6	4	5	11		
5	Склад №2	12	6	4	9		
6	Склад №3	15	7	10	4		
7	Склад №4	9	5	12	5		
8	Склад №5	3	7	12	11		
9							
10	*Неизвестные объемы перпевозок*						
11		Пункт 1	Пункт 2	Пункт 3	Пункт 4	*Ограничения*	*Наличие удобрений, т.*
12	Склад №1					=СУММ(B12:E12)	200
13	Склад №2					=СУММ(B13:E13)	190
14	Склад №3					=СУММ(B14:E14)	220
15	Склад №4					=СУММ(B15:E15)	145
16	Склад №5					=СУММ(B16:E16)	280
17	*Ограничения*	=СУММ(B12:B16)	=СУММ(C12:C16)	=СУММ(D12:D16)	=СУММ(E12:E16)		
18	*Потребность в удобрениях, т.*	200	150	220	330		

Рисунок 2.10 - Исходная информация для транспортной задачи

В диапазоне ячеек **B12:E16**, будет вычисляться количество минеральных удобрений, перевозимых с каждого склада в соответствующий пункт доставки. Пока эти ячейки остаются пустыми. В диапазоне ячеек **B4:E8** – показано расстояние от каждого склада до конкретного пункта. Соответственно грузооборот перевозок минеральных удобрений с каждого склада в каждый пункт доставки вычисляется умножением соответствующих ячеек, например грузооборот перевозки удобрений с 1 склада в 1 пункт назначения вычисляется по формуле ***B4*B12.***

Таким образом, общий объем грузооборота минеральных удобрений будет вычисляться суммированием всех произведений соответствующих ячеек по каждому пункту доставки и с каждого склада. Для этого можно использовать функцию **СУММПРОИЗВ().**

В ячейку ***G19*** поместим формулу **=СУММПРОИЗВ(*B4:E8;B12:E16*),** где ***B4:E8-*** матрица коэффициентов при целевой функции, обозначающих **расстояния между пунктами доставки и складами** а ***B12:E16-*** матрица неизвестных модели, обозначающих ***количество перевозимых удобрений или объемы перевозок.*** Таким образом, информация на рабочем листе примет следующий вид (рис. 2.11).

	A	B	C	D	E	F	G
1	*Пункты доставки*						
2	*Расстояния между пунктами доставки и складом*						
3		Пункт 1	Пункт 2	Пункт 3	Пункт 4		
4	Склад №1	6	4	5	11		
5	Склад №2	12	6	4	9		
6	Склад №3	15	7	10	4		
7	Склад №4	9	5	12	5		
8	Склад №5	3	7	12	11		
9							
10	*Неизвестные объемы перпевозок*						
11		Пункт 1	Пункт 2	Пункт 3	Пункт 4	*Ограничения*	*Наличие удобрений, т.*
12	Склад №1					=СУММ(B12:E12)	200
13	Склад №2					=СУММ(B13:E13)	190
14	Склад №3					=СУММ(B14:E14)	220
15	Склад №4					=СУММ(B15:E15)	145
16	Склад №5					=СУММ(B16:E16)	280
17	*Ограничения*	=СУММ(B12:B16)	=СУММ(C12:C16)	=СУММ(D12:D16)	=СУММ(E12:E16)		
18	*Потребность в удобрениях, т.*	200	150	220	330		
19				*Целевая функция*			=СУММПРОИЗВ(B4:E8;B12:E16)

Рисунок 2.11 - Рабочий лист, подготовленный для решения транспортной задачи

Для решения транспортной задачи воспользуемся процедурой **Поиск решения,** которая находится в меню **Данные**.

После выбора данной команды появится диалоговое окно (рис. 2.12).

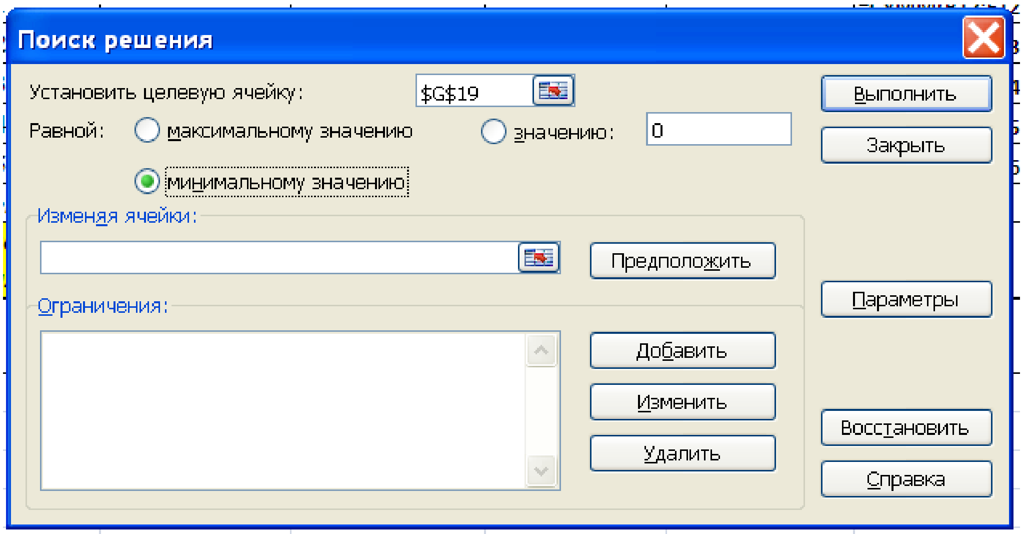


Рисунок 2.12 - Диалоговое окно **Поиск решения**

Поскольку в качестве критерия оптимизации нами выбрана минимизация грузооборота, в поле **Установить целевую ячейку** введите ссылку на ячейку, содержащую формулу расчета общего объема грузооборота минеральных удобрений. В нашем случае это ячейка ***$G$19***. Чтобы минимизировать значение конечной ячейки путем изменения значений влияющих ячеек (влияющими, в данном случае это и изменяемые ячейки, являются ячейки, которые предназначены для хранения значений искомых неизвестных), переключатель установите в положение **минимальному значению**.

В поле **Изменяя ячейки** введите ссылки на изменяемые ячейки, разделяя их запятыми; либо, если ячейки находятся рядом, указывая первую и последнюю ячейку, разделяя их двоеточием ***($B$12:$E$16)***. Это означает, что для достижения минимального грузооборота перевозок будут меняться значения в ячейках с ***B12*** по ***E16***, то есть будут изменяться количество груза, перевезенного по конкретному маршруту.

Если сейчас запустить процесс подбора параметров, то будет найден вариант, где все переменные равны нулю. И это правильно - если не перевозить ничего, то это самый дешевый вариант. Но нам необходимо перевезти минеральные удобрения, поэтому надо наложить некоторые ограничения для поиска решения.

В группе полей **Ограничения** нажмите кнопку **Добавить.** Появится диалог **Добавление ограничения** (рис. 2.13).

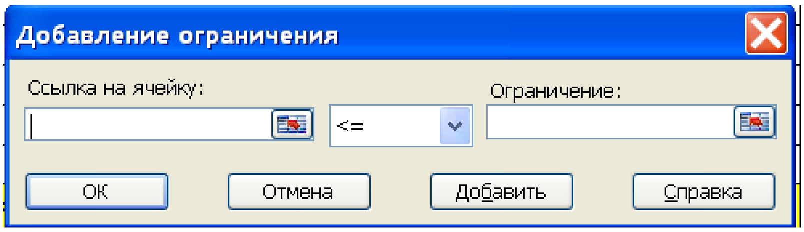


Рисунок 2.13 - Диалоговое окно «**Добавление ограничения»**

Следует ввести левую часть ограничения в левое поле, выбрать знак условия, накладываемого на значение и ввести правую часть ограничения. Как и в других случаях, можно не вводить ссылки на ячейки, а выделить мышью эти ячейки. После ввода одного ограничения следует нажать кнопку Добавить и ввести следующее. По окончании ввода всех ограничений нажмите на кнопку ОК. В диалоге появятся строки введенных ограничений (рис. 2.14).

Для изменения и удаления ограничений в списке **Ограничения** диалогового окна **Поиск решения** укажите ограничение, которое требуется изменить или удалить. Выберите команду **Изменить** и внесите изменения либо нажмите кнопку **Удалить.**

Рассмотрим более подробно условия, которые следует наложить на значения в некоторых ячейках для правильного решения задачи.

Первое условие **$B$12:$E$16>=0**. Оно означает, что объем перевозок не может быть отрицательным, то есть, если на складе не хватает минеральных удобрений, их не везут с пункта доставки, на который эти минеральные удобрения были завезены ранее. Грузопоток имеет только одно направление - от складов к пунктам доставки удобрений.

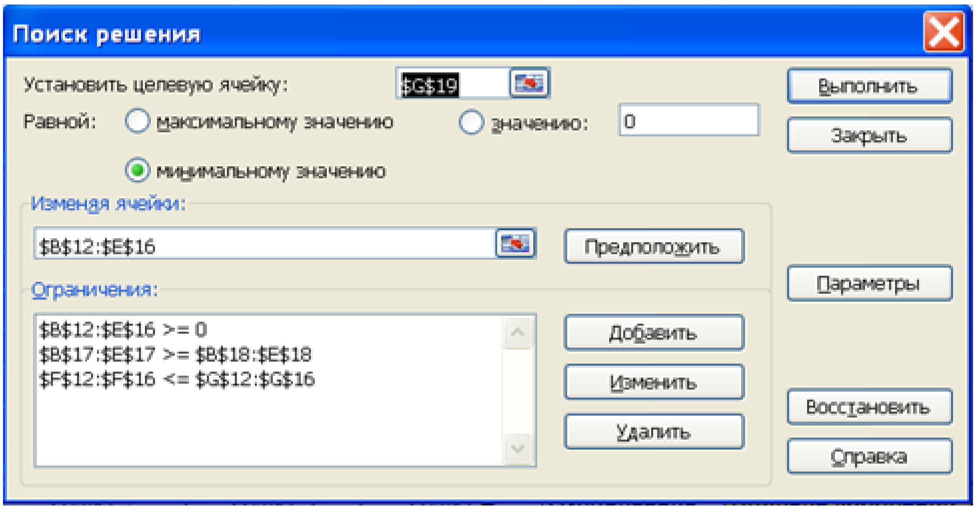


Рисунок 2.14 - Диалоговое окно «**Поиск решения»**
с заполненными полями

Второе условие **$B$17:$E$17>=$B$18:$E$18**. Оно означает, что значения в ячейках семнадцатой строки должны быть больше или равны значениям в ячейках восемнадцатой строки, то есть запросы пунктов доставки минеральных удобрений должны быть выполнены полностью. Перевыполнение объема поставок допустимо, а недовыполнение - нет.

Третье условие **$F$12:$F$16 <=$G$12:$G$16**. Оно означает, что значение в ячейке **F12** должно быть меньше или равно значению в **G12**, в **F13** меньше или равно, чем в **G13**, и так далее до **F16** и **G16**.

В ячейках с **F12** по **F16** на листе находятся объемы поставок с конкретных складов. В ячейках с **G12** по **G16** - запасы на этих же складах. Так как невозможно вывести со склада больше, чем на нем есть, первое значение должно быть не больше второго.

Введенные условия позволяют найти оптимальный вариант решения задачи. Нажмите кнопку **Выполнить** для подбора решения.

После нахождения решения появляется диалог **Результаты поиска решения** (рис. 2.15)

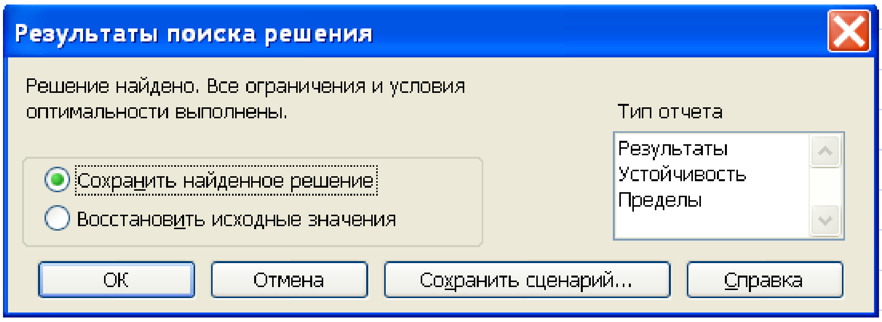


Рисунок 2.15 - Диалоговое окно **«Результаты поиска решения»**

Нажав кнопку **ОК,** вы занесете вариант решения на рабочий лист (рис. 2.16).

	A	B	C	D	E	F	G
1	***Пункты доставки***						
2	***Расстояния между пунктами доставки и складом***						
3		Пункт 1	Пункт 2	Пункт 3	Пункт 4		
4	Склад №1	6	4	5	11		
5	Склад №2	12	6	4	9		
6	Склад №3	15	7	10	4		
7	Склад №4	9	5	12	5		
8	Склад №5	3	7	12	11		
9							
10	***Неизвестные объемы перпевозок***						
11		Пункт 1	Пункт 2	Пункт 3	Пункт 4	***Ограничения***	***Наличие удобрений, т.***
12	Склад №1	0	150	30	0	180	200
13	Склад №2	0	0	190	0	190	190
14	Склад №3	0	0	0	220	220	220
15	Склад №4	0	0	0	110	110	145
16	Склад №5	200	0	0	0	200	280
17	***Ограничения***	200	150	220	330		
18	***Потребность в удобрениях, т.***	200	150	220	330		
19	***Целевая функция***						3540

Рисунок 2.16 - Решенная транспортная задача

Минимальный грузооборот перевозок при соблюдении всех условий равен 3540 т.- км.

2.3 Задачи математического программирования в условиях неопределенности

2.3.1 Задача с интервальными параметрами

Большинство реальных задач, связанных с моделированием сельскохозяйственного производства описывается множеством параметров, многие из которых является неопределенными.

Выделяют несколько различных видов неопределенностей, часть из которых связана с недостаточностью знаний о природных явлениях и процессах:

- неопределенности, связанные с недостаточными знаниями о природе (например, неизвестен точный объем полезных ископаемых в конкретном месторождении);
- неопределенности природных явлений, таких, как погода, влияющая на урожайность, на затраты и др.;
- неопределенности климатических условий, влияющих на урожайность, на затраты и др.;
- неопределенности, связанные с осуществлением действующих и проектируемых технологических процессов.

Источники неопределенной информации можно разделить на две категории: недостаточно полное знание предметной области и недостаточная информация о конкретной ситуации.

Особенно распространенными являются ситуации, когда выбор решения осуществляется в условиях рисков: существует неопределенность в виде множества частных исходов результата принятия решения, причем вероятности появления этих исходов либо определяемы тем или иным способом, либо неизвестны или не имеют смысла.

Если никаких предположений о стохастической устойчивости параметров не существует, то говорят о нестохастической неопределенности. Когда нельзя сопоставить вероятности результатов при выборе того или иного решения, хотя возможный набор результатов известен, для оптимизации производства продукции на сельскохозяйственном предприятии можно использовать модели с интервальными параметрами в целевой функции и ограничениях:

$$f = \sum_{J=1}^{n} \tilde{c}_j x_j \to \max , \tag{2.38}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \tilde{a}_{ij} x_j \leq (\geq) \tilde{b}_i \quad (i = \overline{1,m}) , \tag{2.39}$$

$$x_j \geq 0, \; (j = \overline{1,n}), \tag{2.40}$$

где $\tilde{c}_j$, $\tilde{a}_{ij}$, и $\tilde{b}_i$ являются компактными интервалами. Другими словами, $\tilde{c}_j = \left[\bar{c}_j, \underline{c}_j\right]$, $\tilde{a}_{ij} = \left[\bar{a}_{ij}, \underline{a}_{ij}\right]$, $\tilde{b}_i = \left[\bar{b}_i, \underline{b}_i\right]$, где $\bar{c}_j$, $\underline{c}_j$, $\bar{a}_{ij}$ $\underline{a}_{ij}$, $\bar{b}_i$, $\underline{b}_i$ - верхние и нижние границы соответствующих интервалов.

Следует отметить, что в моделях сложных систем для решения задач с интервальными и вероятностными параметрами можно использовать метод статистических испытаний, позволяющий случайным образом моделировать неопределенные величины и параметры, подчиненные законам распределения вероятностей. Возможность использования метода обусловлена адекватным отображением имитационных значений реальным данным. При этом на предварительном этапе необходимо оценить верхние и нижние оценки параметров, определить законы распределения, которым они подчиняются. С помощью методов имитационного моделирования можно оценить устойчивость результатов в зависимости от различной степени возмущений, влияющих на рассматриваемую систему.

Пример 2.12. Рассмотрим задачу оптимизации производства аграрной продукции на примере сельскохозяйственного предприятия Иркутского района ООО «Академия».

Запишем упрощенную модель оптимизации растениеводческой продукции. Целью задачи является максимизация дохода:

$$\mathbf{18960}x_1 + 15457x_2 + 18328x_3 + 1280x_4 + 1620x_5 \to max,$$

где x_1 – посевная площадь пшеницы, га; x_2 – посевная площадь овса, га; x_3 – посевная площадь ячменя, га; x_4 – площадь однолетних трав на силос, га; x_5 – площадь однолетних трав на зеленый корм, га. В выражении коэффициент при x_1 (стоимость реализации пшеницы с одного га) будет изменяться в заданном интервале.

Далее обозначим ограничения задачи.

В хозяйстве имеется 2000 га посевных площадей, это обозначается в правой части ограничения со знаком непревышения, коэффициент 1,1 означает дополнительную на 10% площадь зерновых для выращивания семян. Такое ограничение запишется так:

$$1{,}1x_1 + 1{,}1x_2 + 1{,}1x_3 + x_4 + x_5 \leq 2000.$$

Далее запишем условие непревышения затрат на горюче-смазочные материалы:

$$1600x_1 + 1600x_2 + 1600x_3 + 1000x_4 + 300x_5 \leq 2600000$$

и ограничение затрат на оплату труда

$$450x_1 + 450x_2 + 450x_3 + 410x_4 + 160x_5 \leq 800000.$$

Затем обозначим минимальные объемы производства растениеводческой продукции, которые отражены в правых частях уравнений, коэффициенты при соответствующих переменных в левых частях обозначают урожайность культуры:

- пшеницы $15{,}8x_1 \geq 6030$;
- овса $15{,}9x_2 \geq 4000$;
- ячменя $15{,}8x_3 \geq 8000$;
- однолетних трав на силос $80x_4 \geq 3500$;
- однолетних трав на зеленый корм $90x_5 \geq 20000$.

На рис. 2.17 приведена матрица коэффициентов задачи и ее решение при помощи надстройки «Поиск решения» в табличном процессоре MS Execel. Алгоритм использования инструмента «Поиск решения» приведен в параграфе 2.2.3 данного учебного пособия.

I12 =СУММПРОИЗВ(D12:H12;D15:H15)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1		Расшифровка переменной		Пшеница, га	Овес, га	Ячмень, га	Однолетние травы на силос, га	Однолетние травы на зеленый корм, га			
2	№ п/п	Переменная	Ед. изм.	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Результат расчета по ограничению	Знак	Значение ограничения
3		Название ограничения		га	га	га	га	га			
4	1	Посевная площадь	га	1,1	1,1	1,1	1	1	1 978	≤	2 000
5	2	Затраты на ГСМ	руб.	1600	1600	1600	1000	300	2 600 000	≤	2 600 000
6	3	Затраты на оплату труда	руб.	450	450	450	410	160	753 688	≤	800 000
7	4	Однолетние травы на силос	ц	0	0	0	80	0	3 500	≥	3 500
8	5	Однолетние травы на зеленый корм	ц	0	0	0	0	90	20 000	≥	20 000
9	6	Пшеница	ц	15,8	0	0	0	0	12 610	≥	6 030
10	7	Овес	ц	0	15,9	0	0	0	4 000	≥	4 000
11	8	Ячмень	ц	0	0	15,8	0	0	8 000	≥	8 000
12	Целевая функция (доход)		руб.	18960	16457	18328	1280	1620	28 967 751р.	→	max
13											
14				x_1	x_2	x_3	x_4	x_5			
15				798	252	506	44	222			
16											

Рисунок 2.17 - Матрица коэффициентов задачи и ее решение

На рис. 2.17 в ячейке I12 приведено значение целевой функции, а в диапазоне D15:H15 - оптимальный план производства, представляющий собой структуру посевных площадей. Иллюстрация отражения условий задачи в окне надстройки «Поиск решения» приведены на рис. 2.18.

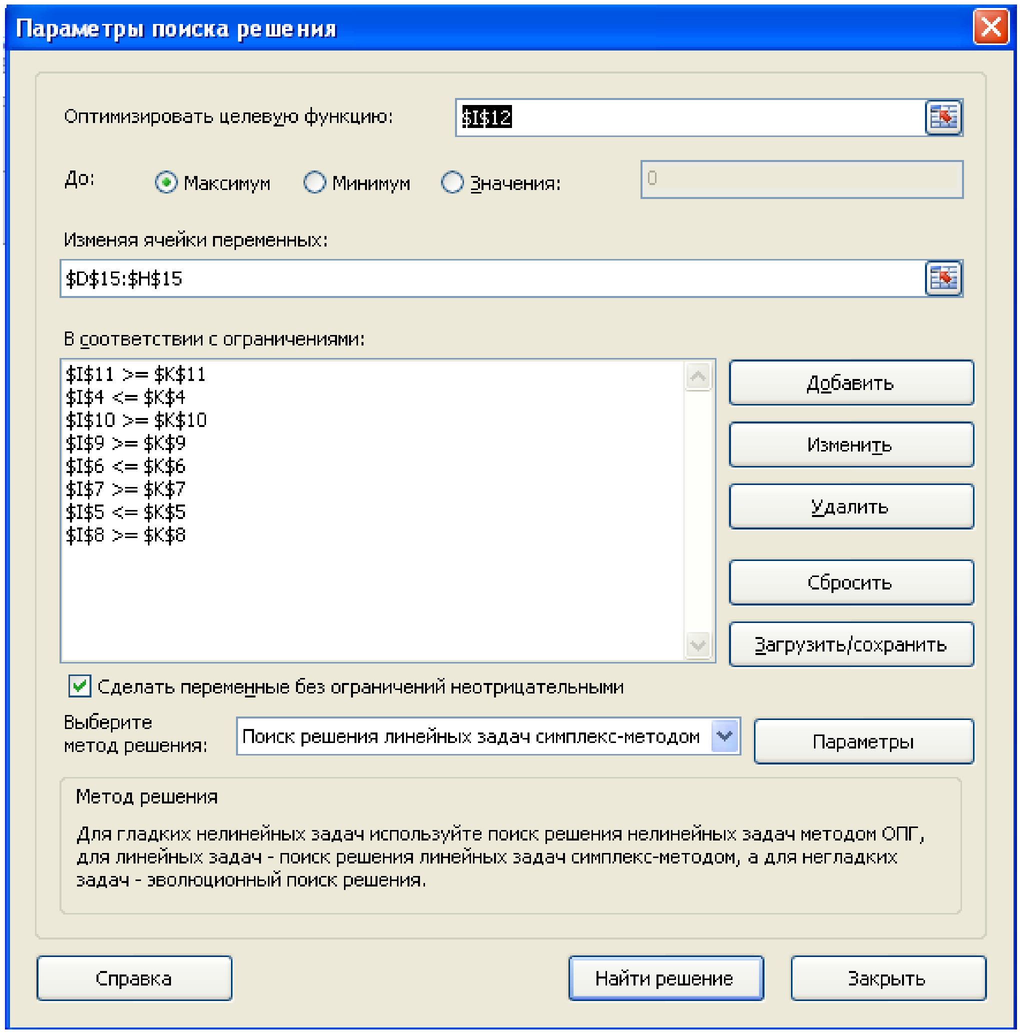


Рисунок 2.18 - Условия задачи в окне надстройки MS Execel «Поиск решения»

Как уже отмечено выше результатом решения задачи является максимум дохода. Коэффициенты в целевой функции обозначают доход от реализации продукции с единицы площади с учетом биопродуктивности культуры. При этом в современной системе рыночных отношений знакома ситуация несоответствия цен ожиданиям, они могут изменяться в большую или меньшую сторону по разным причинам. Поэтому разумно будет предположить, что доход в целевой функции может изменяться в некотором интервале.

Рассмотрим подобную ситуацию на примере изменчивости одного коэффициента в целевой функции при переменной x_1, который в исходной задаче означает реализацию пшеницы по цене 1200 руб. за центнер. Другие коэффициенты примем неизменными, чтобы не усложнять реализацию решения.

Предположим, основываясь на данных предыдущих лет, что стоимость реализации зерновых изменяется от 900 до 1200 руб. за центнер. На формирование цены влияет множество факторов, которые зачастую не поддаются точному прогнозированию. Поэтому примем, что цена на пшеницу изменяется в заданном интервале (900-1200 руб. за центнер) случайным образом. Найдем решение задачи для 10 смоделированных ситуаций изменения закупочных цен на пшеницу. Случайное изменение стоимости реализации в заданном интервале в MS Excel можно реализовать при помощи функции *СЛУЧМЕЖДУ(нижн_граница, верхн_граница)*, что можно увидеть в строке формул на рис. 2.19.

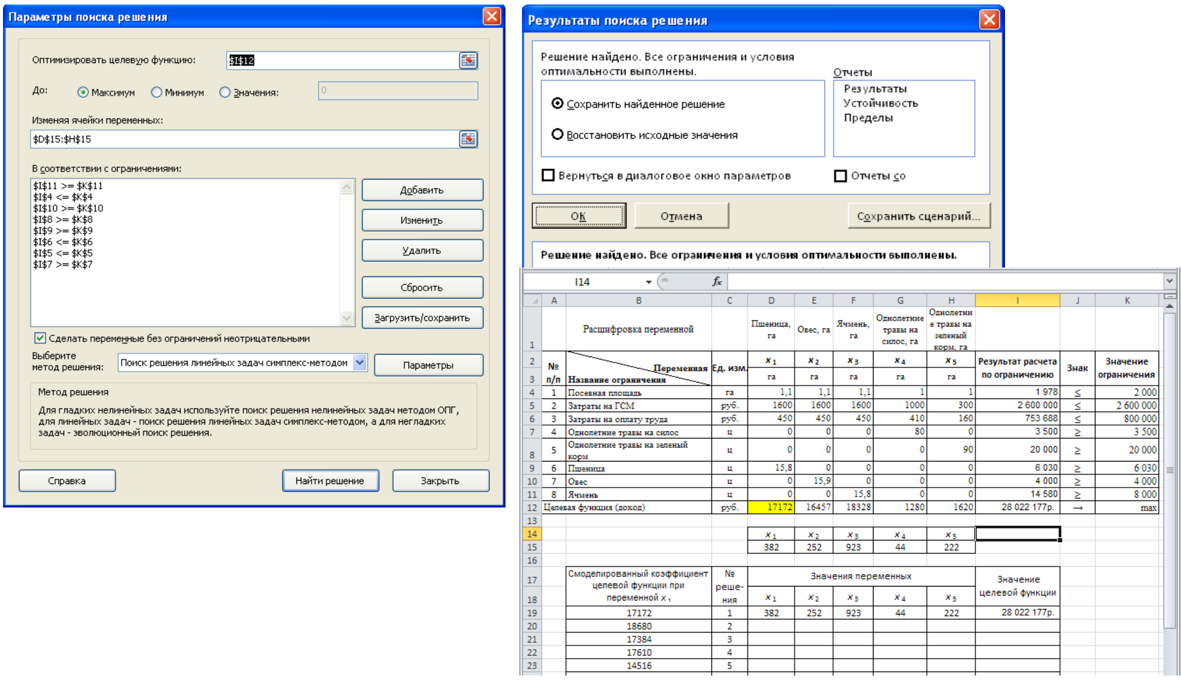
B34 =СЛУЧМЕЖДУ(15,8*900;15,8*1200)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
34	1	17172							
35	2	18680							
36	3	17384							
37	4	17610							
38	5	14516							
39	6	16570							
40	7	16558							
41	8	15749							
42	9	14934							
43	10	16744							

Рисунок 2.19 – Моделирование случайным образом стоимости закупочной цены на пшеницу с одного га при помощи функции *СЛУЧМЕЖДУ(нижн_граница, верхн_граница)*

На рис. 2.19 в диапазоне B34:B43 приведены смоделированные случайным образом коэффициенты целевой функции при переменной x_1. Далее, полученные в результате моделирования, значения поочередно подставляются в ячейку D12 (рис. 2.18) и с учетом каждого из них определяется результат решения задачи оптимизации производства растениеводческой продукции. При этом значение коэффициента в критерии оптимальности и соответствующие ему результаты решения задачи (значение целевой функции и план производства) будем фиксировать в диапазоне B17:I28 (рис 2.20).

Шаг 1



Шаг 2

I12 f_x =СУММПРОИЗВ(D12:H12;D15:H15)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1		Расшифровка переменной		Пшеница, га	Овес, га	Ячмень, га	Однолетние травы на силос, га	Однолетние травы на зеленый корм, га			
2	№	Переменная	Ед. изм.	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Результат расчета	Знак	Значение
3	п/п	Название ограничения		га	га	га	га	га	по ограничению		ограничения
4	1	Посевная площадь	га	1,1	1,1	1,1	1	1	1 978	≤	2 000
5	2	Затраты на ГСМ	руб.	1600	1600	1600	1000	300	2 600 000	≤	2 600 000
6	3	Затраты на оплату труда	руб.	450	450	450	410	160	753 688	≤	800 000
7	4	Однолетние травы на силос	ц	0	0	0	80	0	3 500	≥	3 500
8	5	Однолетние травы на зеленый корм	ц	0	0	0	0	90	20 000	≥	20 000
9	6	Пшеница	ц	15,8	0	0	0	0	12 610	≥	6 030
10	7	Овес	ц	0	15,9	0	0	0	4 000	≥	4 000
11	8	Ячмень	ц	0	0	15,8	0	0	8 000	≥	8 000
12	Целевая функция (доход)		руб.	18680	16457	18328	1280	1620	28 744 286р.	→	max
13											
14				x_1	x_2	x_3	x_4	x_5			
15				798	252	506	44	222			
16											
17		Смоделированный коэффициент целевой функции при переменной x_1	№ реше-ния	Значения переменных					Значение целевой функции		
18				x_1	x_2	x_3	x_4	x_5			
19		17172	1	382	252	923	44	222	28 022 177р.		
20		18680	2	798	252	506	44	222	28 744 286р.		
21		17384	3								
22		17610	4								
23		14516	5								
24		16570	6								

…

…

Шаг 10

I12 =СУММПРОИЗВ(D12:H12;D15:H15)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1		Расшифровка переменной		Пшеница, га	Овес, га	Ячмень, га	Однолетние травы на силос, га	Однолетние травы на зеленый корм, га			
2	№ п/п	Переменная	Ед. изм.	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Результат расчета по ограничению	Знак	Значение ограничения
3		Название ограничения		га	га	га	га	га			
4	1	Посевная площадь	га	1,1	1,1	1,1	1	1	1 978	≤	2 000
5	2	Затраты на ГСМ	руб.	1600	1600	1600	1000	300	2 600 000	≤	2 600 000
6	3	Затраты на оплату труда	руб.	450	450	450	410	160	753 688	≤	800 000
7	4	Однолетние травы на силос	ц	0	0	0	80	0	3 500	≥	3 500
8	5	Однолетние травы на зеленый корм	ц	0	0	0	0	90	20 000	≥	20 000
9	6	Пшеница	ц	15,8	0	0	0	0	6 030	≥	6 030
10	7	Овес	ц	0	15,9	0	0	0	4 000	≥	4 000
11	8	Ячмень	ц	0	0	15,8	0	0	14 580	≥	8 000
12	Целевая функция (доход)		руб.	16744	16457	18328	1280	1620	27 858 833р.	→	max
13											
14				x_1	x_2	x_3	x_4	x_5			
15				382	252	923	44	222			

	Смоделированный коэффициент целевой функции при переменной x_1	№ решения	Значения переменных					Значение целевой функции
17–18			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
19	17172	1	382	252	923	44	222	28 022 177р.
20	18680	2	798	252	506	44	222	28 744 286р.
21	17384	3	382	252	923	44	222	28 103 086р.
22	17610	4	382	252	923	44	222	28 189 338р.
23	14516	5	382	252	923	44	222	27 008 527р.
24	16570	6	382	252	923	44	222	27 792 427р.
25	16558	7	382	252	923	44	222	27 787 847р.
26	15749	8	382	252	923	44	222	27 479 096р.
27	14934	9	382	252	923	44	222	27 168 054р.
28	16744	10	382	252	923	44	222	27 858 833р.

Рисунок 2.20 – Результаты решения задачи при условии меняющейся цены реализации пшеницы

В результате десятикратного решения задачи в условиях изменяющейся цены на пшеницу, можно заключить, что доход сельскохозяйственного предприятия ООО «Академия» может изменяться в пределах 27 008 527-28 744 286 руб., а посевная площадь пшеницы варьирует в диапазоне 382-798 га (строки 23 и 20 на рис. 2.20).

2.3.2 Задача со случайными параметрами

Стохастическая (вероятностная) неопределенность возникает, когда неизвестные факторы статистически устойчивы и представляют собой случайные величины, для которых известны или определены законы распределения и их параметры.

Подобная ситуация описывается задачей стохастического программирования которая имеет вид:

$$f(x) = M\left(\sum_{j\in J} c_j x_j\right) \to \min(\max), \tag{2.41}$$

$$P\left\{\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_{ij} \le b_i\right\} \ge \alpha_i \ (i \in I), \tag{2.42}$$

где $f(X)$ - целевая функция, удовлетворяющий системе ограничений, x_j – искомая переменная, c_j – коэффициенты целевой функции, a_{ij}, b_i – параметры ограничений, α_i – заданная вероятность выполнения системы, P – вероятность выполнения каждого заданного ограничения.

Для планирования производства продукции может быть использован вариант задачи (2.41)-(2.42), когда коэффициенты ограничений, целевой функции и правых частей условий c_j, a_{ij}, и b_i представляют собой случайные величины, связанные с вероятностью превышения P:

$$f = \sum_{J=1}^{n} c_j(P) x_j \to \max, \tag{2.43}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(P) x_j \le (\ge)\, b_i(P) \ \ (i = \overline{1,m}), \tag{2.44}$$

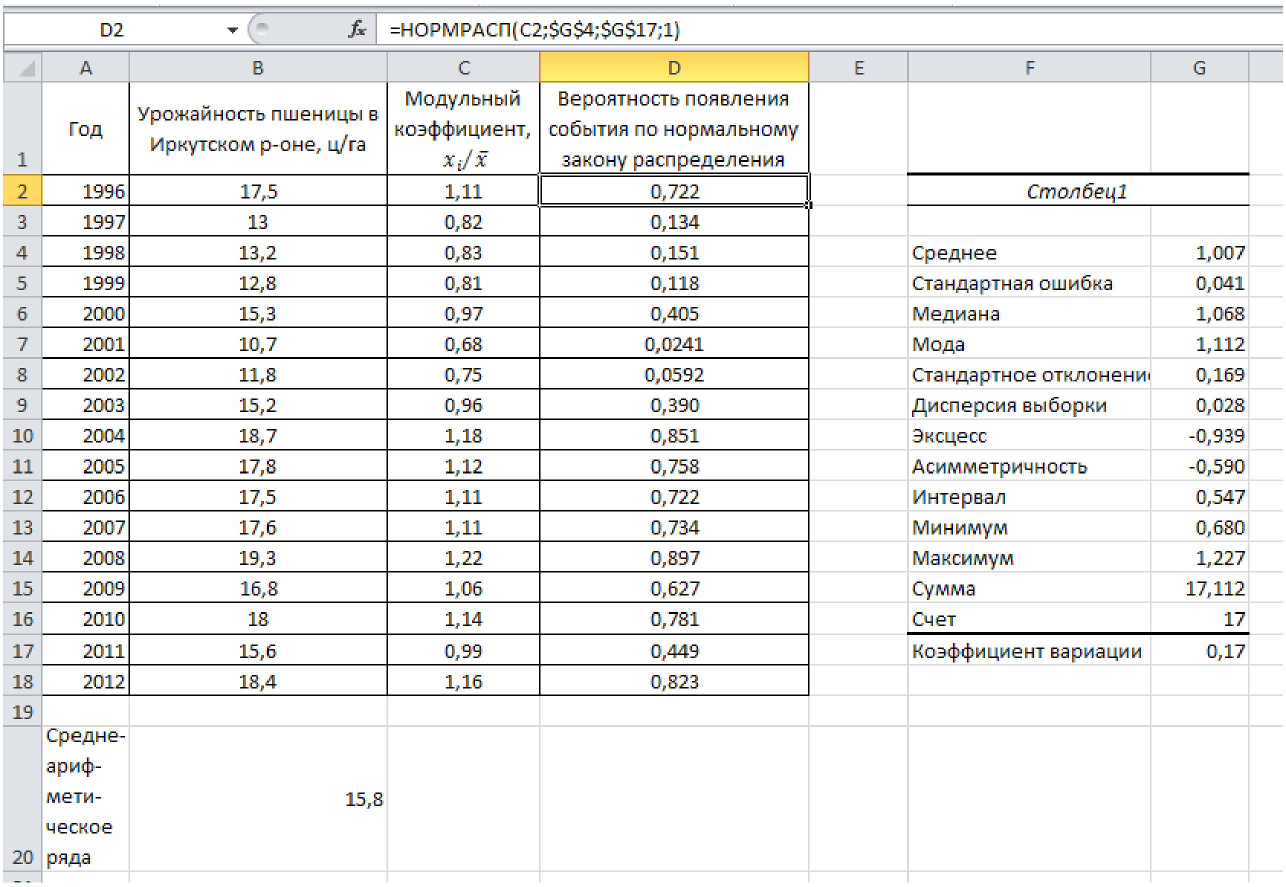
$$x_j \ge 0, \ (j = \overline{1,n}). \tag{2.45}$$

Так как представленная задача является сложной, возможным методом ее решения является переход к детерминированному эквиваленту. В основе этого перехода лежит использование закона распределения случайной величины. В практике наиболее часто используются семейство нормальных законов распределения и гамма-распределение.

Пример 2.13. Рассмотрим решение упрощенной задачи оптимизации производства аграрной продукции со случайными параметрами для ООО «Академия». При этом условия задачи примем аналогичными примеру 2.12 за исключением целевой функции, коэффициенты при неизвестных в которой теперь не будем изменять: $12840x_1 + 15457x_2 + 18328x_3 + 1280x_4 + 1620x_5 \to max,$

и урожайности пшеницы в ограничениях, которая будет зависеть от вероятности: $y^p x_1 \ge 6030$ (здесь y^p – урожайность пшеницы, зависящая от вероятности p).

Для того чтобы определить параметр y^p в условии задачи используем многолетний ряд наблюдений урожайности пшеницы в Иркутском районе (рис. 2.21). Сначала определим среднеарифметическое значение ряда наблюдений. С этой целью в ячейке B20 введена формула «=СРЗНАЧ(B2:B18)» (использована встроенная функция MS Excel СРЗНАЧ(число1; [число2];...)). После этого для урожайности пшеницы рассчитаем модульный коэффициент, который определяется как отношение каждого значения урожайности к среднеарифметическому значению многолетнего ряда, с этой целью в ячейку C2 введена формула «=B2/$B$20», которая затем скопирована в диапазон ячеек C3:C18. Обратите внимание, что знак «$» служит для создания абсолютной ссылки на ячейку в формуле (иными словами при копировании или протягивании формулы данный аргумент не смещается).

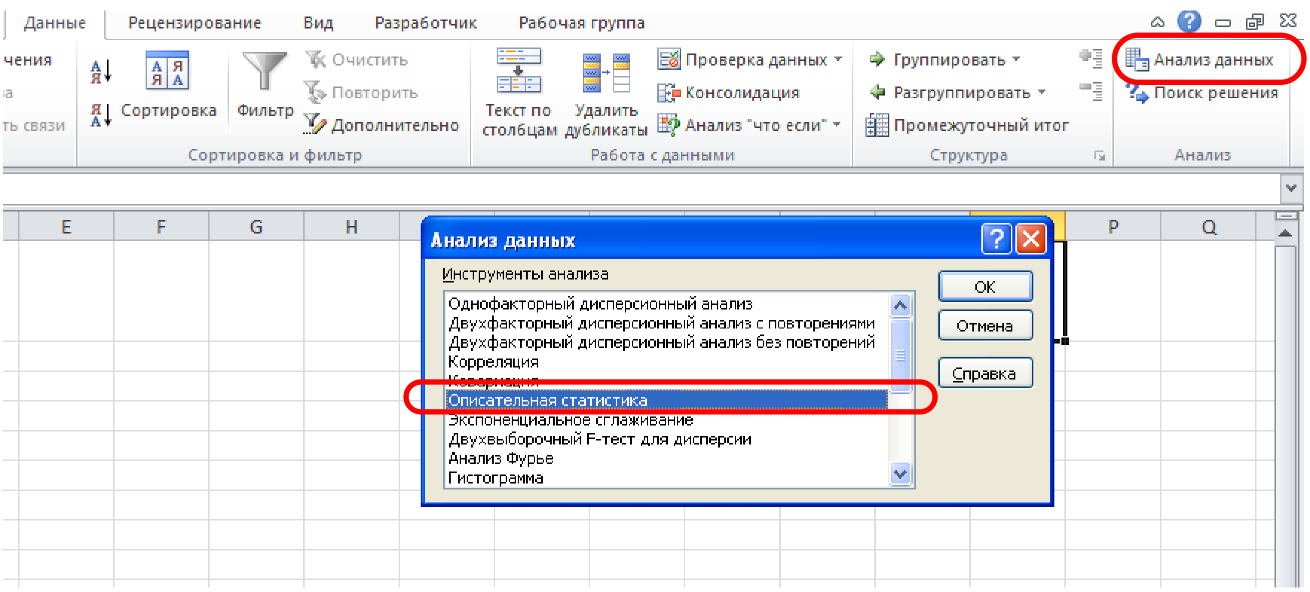


D2 =НОРМРАСП(C2;$G$4;$G$17;1)

	A	B	C	D	E	F	G
1	Год	Урожайность пшеницы в Иркутском р-оне, ц/га	Модульный коэффициент, $x_i/\bar{x}$	Вероятность появления события по нормальному закону распределения			
2	1996	17,5	1,11	0,722		*Столбец1*	
3	1997	13	0,82	0,134			
4	1998	13,2	0,83	0,151		Среднее	1,007
5	1999	12,8	0,81	0,118		Стандартная ошибка	0,041
6	2000	15,3	0,97	0,405		Медиана	1,068
7	2001	10,7	0,68	0,0241		Мода	1,112
8	2002	11,8	0,75	0,0592		Стандартное отклонени	0,169
9	2003	15,2	0,96	0,390		Дисперсия выборки	0,028
10	2004	18,7	1,18	0,851		Эксцесс	-0,939
11	2005	17,8	1,12	0,758		Асимметричность	-0,590
12	2006	17,5	1,11	0,722		Интервал	0,547
13	2007	17,6	1,11	0,734		Минимум	0,680
14	2008	19,3	1,22	0,897		Максимум	1,227
15	2009	16,8	1,06	0,627		Сумма	17,112
16	2010	18	1,14	0,781		Счет	17
17	2011	15,6	0,99	0,449		Коэффициент вариации	0,17
18	2012	18,4	1,16	0,823			
19							
20	Средне-арифметическое ряда	15,8					

Рисунок 2.21 – Определение вероятности появления события по нормальному закону распределения вероятностей для значений многолетнего ряда урожайности пшеницы в Иркутском районе

Затем для ряда модульных коэффициентов, расположенного в диапазоне ячеек C2:C18 найдем некоторый статистические параметры, используя инструмент MS Excel «Описательная статистика», расположенного на вкладке «Данные», панель инструментов «Анализ», кнопка «Анализ данных» (рис. 2.22). Результат выведен в диапазон ячеек F2:G16.



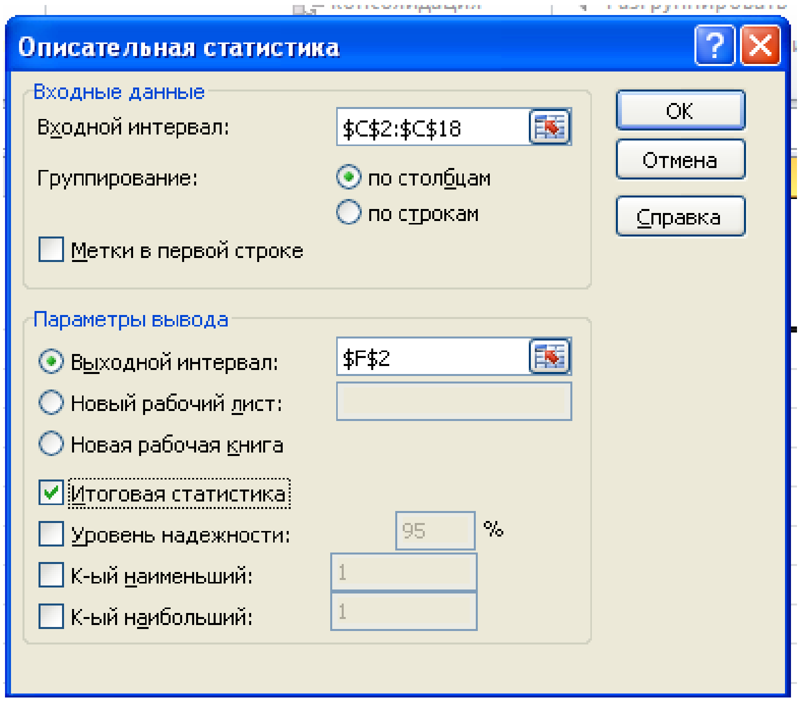


Рисунок 2.22 – Определение статистических параметров ряда модульных коэффициентов урожайности пшеницы в Иркутском районе

Дополнительно в ячейке G16 рассчитаем коэффициент вариации путем деления стандартного отклонения на среднее значение ряда (в ячейку G16 введена формула «=G8/G4»).

Затем в ячейку D2 введем формулу «=НОРМРАСП(C2;$G$4;$G$17;1)», которая позволяет определить вероятность появления события по нормальному закону распределения, и скопируем ее в диапазон D3: D18 (рис. 2.21). Здесь использована встроенная функция MS Excel «НОРМРАСП(x,среднее,стандартное_откл)».

Как можно видеть минимальное значение урожайности в Иркутском районе за рассматриваемый период (1996-2012 гг.) составило 10,7 ц/га в 2001 г. (рис. 2.21). Согласно определению вероятности она для данного события составляет 0,0241 (ячейка D7). Это и является составляющим условия задачи.

Теперь решим задачу оптимизации производства аграрной продукции с минимальной урожайностью пшеницы (рис. 2.23 и 2.24).

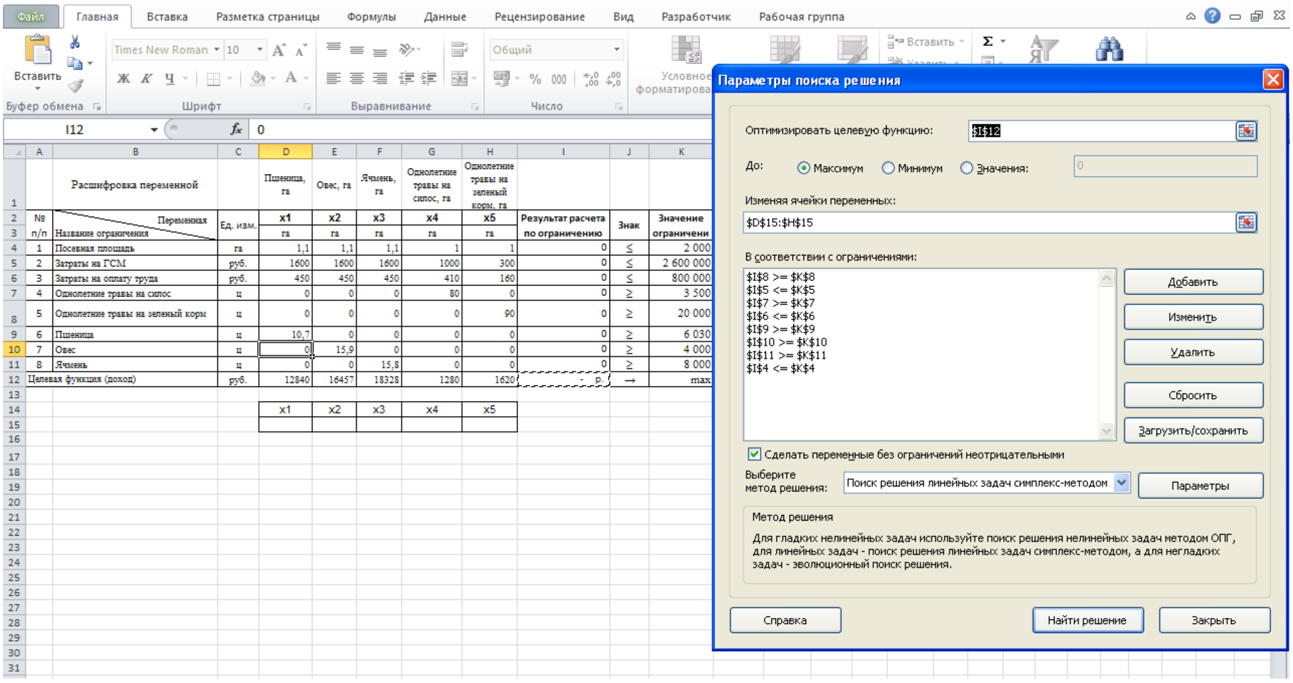
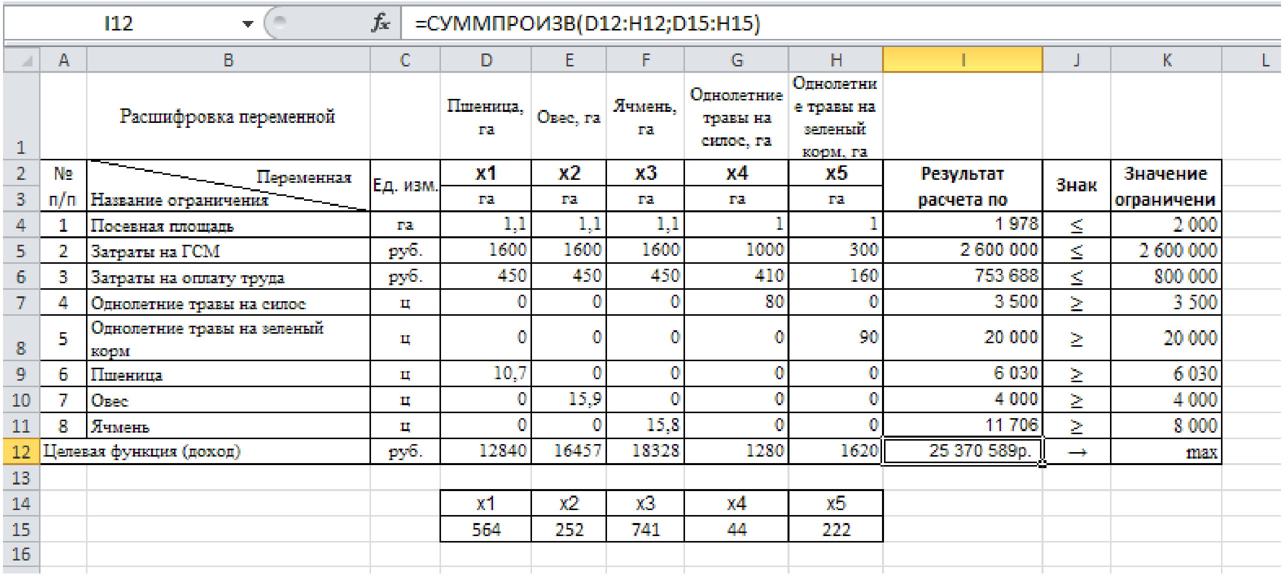


Рисунок 2.23 – Решение задачи оптимизации производства аграрной продукции со случайными параметрами



I12 =СУММПРОИЗВ(D12:H12;D15:H15)

№ п/п	Название ограничения / Переменная (Расшифровка переменной)	Ед. изм.	x1 Пшеница, га	x2 Овес, га	x3 Ячмень, га	x4 Однолетние травы на силос, га	x5 Однолетние травы на зеленый корм, га	Результат расчета по	Знак	Значение ограничени
			га	га	га	га	га			
1	Посевная площадь	га	1,1	1,1	1,1	1	1	1 978	≤	2 000
2	Затраты на ГСМ	руб.	1600	1600	1600	1000	300	2 600 000	≤	2 600 000
3	Затраты на оплату труда	руб.	450	450	450	410	160	753 688	≤	800 000
4	Однолетние травы на силос	ц	0	0	0	80	0	3 500	≥	3 500
5	Однолетние травы на зеленый корм	ц	0	0	0	0	90	20 000	≥	20 000
6	Пшеница	ц	10,7	0	0	0	0	6 030	≥	6 030
7	Овес	ц	0	15,9	0	0	0	4 000	≥	4 000
8	Ячмень	ц	0	0	15,8	0	0	11 706	≥	8 000
Целевая функция (доход)		руб.	12840	16457	18328	1280	1620	25 370 589р.	→	max

x1	x2	x3	x4	x5
564	252	741	44	222

Рисунок 2.24 – Результаты решения задачи оптимизации производства аграрной продукции со случайными параметрами

В результате решения задачи оптимизации производства аграрной продукции со случайными параметрами мы получаем план производства (ячейки D15:H15), согласно которому посевная площадь пшеница составляет 564 га, овса – 252 га, ячменя – 741, однолетних трав на силос – 44 га, однолетних трав на зеленый корм – 222 га и значение целевой функции 5 370 589 руб., соответствующие вероятности 0,0241.

Контрольные задания к главе 2

Задача 1

Составьте ограничения задачи для оптимизации структуры посевных площадей сельскохозяйственного предприятия при критерии оптимальности - максимум стоимости товарной продукции, сведите их в матрицу и решите задачу с использованием надстройки «Поиск решения» в MS Excel.

Исходная информация

В ООО «Парижское» имеется 4 бригады занимающихся производством зерновых расположенных на участках с различным естественным плодородием почвы. В хозяйстве выращивают следующие культуры: пшеница, ячмень, овёс, рожь озимая. Площадь пашни в хозяйстве составляет 6753 га, а площадь посевов – 5269 га. Общие ресурсы живого труда 4590 чел-дней.

Определено, что площадь под пшеницей должна составлять не менее 50% площади посевов. Площадь под ячменем должна находиться в пределах 100-150 га. Площадь под озимыми должна составлять не менее 10% от площади зерновых, но и не более 50% площади посевов. Хозяйство планирует получить пшеницы – 75000 ц, ячменя – 3000ц, овса – 25000ц, ржи – 1600 ц.

На основании технологических карт определены урожайность, трудоемкость, себестоимость и цена реализации 1ц (приложение А, табл. А.1).

Задача 2

Определите оптимальное распределение ресурсов сельскохозяйственного предприятия при критерии оптимальности - максимум стоимости, товарной продукции.

Исходная информация:

1. В сельскохозяйственном предприятии получили развитие отрасли: зерновые, картофель, многолетние травы на сено; коровы.
2. Производственные ресурсы предприятия: пашня - 1600 га, трудовые ресурсы - 39000 чел.-дн., корма - 6000 ц.к.ед.
3. Технологические ограничения на размеры отраслей: зерновые не менее 700 га, картофель не более 160 га, коровы не менее 700 голов. Показатели эффективности развития отраслей приведены в табл. А.2 приложения А.

Задача 3

Определить оптимальный вариант суточного рациона кормления сельскохозяйственных животных при условии, что общая себестоимость рациона должна быть минимальной. Исходные данные (по вариантам) приведены в приложении А (табл. А.3 и А.4).

Задача 4

Исходная информация:

. Совхоз обладает тракторами следующих марок: К-700 – 4 шт., Т-75 – 2 шт., МТЗ – 5 шт., ДТ-28 – 26 шт. В период весеннее полевых работ эти тракторы могут выработать такие объемы работ (в га у. п.): К-700 – 500, Т-75 – 260, МТЗ – 380, ДТ-28 – 360. За период надо провести следующие работы: пахота – 400, боронование – 300, посев зерновых – 250, посев пропашных культур – 550 га у. п. Себестоимость проведения тракторных работ в расчете на 1 га у. п. задана (приложение А, табл. А.5). Требуется составить такой план распределения тракторов по видам работ, который обеспечивает минимальную себестоимость их проведения.

Задача 5

Решить задачу с интервальным параметром по вариантам согласно условиям приведенным ниже.

Целью задачи является максимизация дохода:

$$\boldsymbol{\rho_1} x_1 + 15457x_2 + 18328x_3 + 1280x_4 + 1620x_5 \to max,$$

где $\boldsymbol{\rho_1}$ – доход от реализации пшеницы с единицы площади (доход от реализации пшеницы с одного гектара); x_1 – посевная площадь пшеницы, га; x_2 – посевная площадь овса, га; x_3 – посевная площадь ячменя, га; x_4 – площадь однолетних трав на силос, га; x_5 – площадь однолетних трав на зеленый корм, га. В выражении коэффициент при x_1 (стоимость реализации пшеницы с одного га) будет изменяться в заданном интервале.

Ограничения задачи.

В хозяйстве имеется 2000 га посевных площадей, это обозначается в правой части ограничения со знаком непревышения, коэффициент 1,1 означает дополнительную на 10% площадь зерновых для выращивания семян. Такое ограничение запишется так:

$$1{,}1x_1 + 1{,}1x_2 + 1{,}1x_3 + x_4 + x_5 \leq 2000.$$

Далее запишем условие непревышения затрат на горюче-смазочные материалы:

$$1600x_1 + 1600x_2 + 1600x_3 + 1000x_4 + 300x_5 \leq 2600000$$

и ограничение затрат на оплату труда

$$450x_1 + 450x_2 + 450x_3 + 410x_4 + 160x_5 \leq 800000.$$

Затем обозначим минимальные объемы производства растениеводческой продукции, которые отражены в правых частях уравнений, коэффициенты при соответствующих переменных в левых частях обозначают урожайность культуры:

- пшеницы $15{,}8x_1 \geq 6030$;
- овса $15{,}9x_2 \geq 4000$;
- ячменя $15{,}8x_3 \geq 8000$;
- однолетних трав на силос $80x_4 \geq 3500$;
- однолетних трав на зеленый корм $90x_5 \geq 20000$.

Диапазоны изменения параметра $\boldsymbol{\rho_1}$ в целевой функции приведены в табл. А.6 приложения А.

Необходимо смоделировать 10 значений параметра $\boldsymbol{\rho_1}$ используя функцию MS Excel СЛУЧМЕЖДУ(нижн_граница, верхн_граница) или любой другой компьютерный генератор случайных чисел. После моделирования поочередно подставить данные в модель. Результаты решений* сохранить и сделать выводы.

***Примечание:** результатом решения задачи является план производства и значение целевой функции.

Задача 6

Решить задачу с вероятностным параметром по вариантам согласно условиям приведенным ниже.

Целью задачи является максимизация дохода:

$$\rho_1 x_1 + 15457x_2 + 18328x_3 + 1280x_4 + 1620x_5 \to max,$$

где ρ_1 – доход от реализации пшеницы с единицы площади (доход от реализации пшеницы с одного гектара), определяется по формуле: $\rho_1 = 1200\nu_1$ (где ν_1 – урожайность пшеницы); x_1 – посевная площадь пшеницы, га; x_2 – посевная площадь овса, га; x_3 – посевная площадь ячменя, га; x_4 – площадь однолетних трав на силос, га; x_5 – площадь однолетних трав на зеленый корм, га. В выражении коэффициент при x_1 (стоимость реализации пшеницы с одного га) будет изменяться в заданном интервале.

Ограничения задачи.

В хозяйстве имеется 2000 га посевных площадей, это обозначается в правой части ограничения со знаком непревышения, коэффициент 1,1 означает дополнительную на 10% площадь зерновых для выращивания семян. Такое ограничение запишется так:

$$1{,}1x_1 + 1{,}1x_2 + 1{,}1x_3 + x_4 + x_5 \leq 2000.$$

Далее запишем условие непревышения затрат на горюче-смазочные материалы:

$$1600x_1 + 1600x_2 + 1600x_3 + 1000x_4 + 300x_5 \leq 2600000$$

и ограничение затрат на оплату труда

$$450x_1 + 450x_2 + 450x_3 + 410x_4 + 160x_5 \leq 800000.$$

Затем обозначим минимальные объемы производства растениеводческой продукции, которые отражены в правых частях уравнений, коэффициенты при соответствующих переменных в левых частях обозначают урожайность культуры:

- пшеницы $\boldsymbol{\nu_1} x_1 \geq 6030$;
- овса $15{,}9x_2 \geq 4000$;
- ячменя $15{,}8x_3 \geq 8000$;
- однолетних трав на силос $80x_4 \geq 3500$;
- однолетних трав на зеленый корм $90x_5 \geq 20000$.

Многолетние значения урожайности пшеницы ($\boldsymbol{\nu_1}$) по вариантам приведены в табл. А.7 приложения А.

Необходимо определить вероятность самой низкой в ряду урожайности и использовать ее для решения задачи, подставив в соответствующее ограничение. Решить задачу и сделать выводы.

3 Природа рисков

3.1 Понятие и классификация рисков

Под риском понимается возможное наступление неблагоприятной ситуации, являющейся причиной материального ущерба. Так дождевым паводком может быть затоплена часть сельскохозяйственных угодий, расположенных в пойменных зонах, что станет причиной потери части урожая и дополнительных агротехнологических работ.

Существует множество различных классификаций рисков, основанных на различных их характеристиках.

По роду опасности:

– техногенные риски, по причинам возникновения эти риски связаны с деятельностью человека (огневые риски, аварии, кражи, загрязнение окружающей среды т.д.);

– природные риски, возникновение рисков не зависит от человеческой деятельности и не подлежит контролю; в основном это риски стихийных бедствий: землетрясения, ураганы, удар молнии, извержения вулкана и т.д.;

– смешанные, представляют собой события природного характера, но связанные с хозяйственной деятельностью человека (например, оползень, связанный со строительными работами) или наоборот техногенные, которые стали следствием природного события (например, разлив цистерны нефти в результате весеннего половодья).

По объему ответственности страховщика:

– индивидуальные, здесь понимается нестандартный случай страхования (например, на время транспортировки дорогостоящего объекта искусства);

– универсальные (например, кража).

Специфические риски:

– аномальные, их невозможно отнести к тем или иным группам страховой совокупности;

– катастрофические, эти риски причиняют значительный ущерб в особо крупных размерах.

По общей классификации:

– экологические;

– транспортные;

– политические;

– специальные.

По сферам проявления:

– политические, риски прямых убытков и потерь или недополучения прибыли из-за неблагоприятных изменений политической ситуации в государстве или действий местной власти;

– социальные, связанны с социальными кризисами;

– экологические, связанны с вероятностью наступления гражданской ответственности за нанесение ущерба окружающей среде, а также жизни и здоровью третьих лиц;

– коммерческие, риски экономических потерь, возникающие в любой коммерческой, производственно-хозяйственной деятельности;

– профессиональные, связанны с выполнением профессиональных обязанностей (например, риски, связанные с профессиональной деятельностью врачей, нотариусов и т.д.).

По возможности предвидения:

– прогнозируемые, связаны с циклическим развитием экономики, сменой стадий конъюнктуры финансового рынка, предсказуемым развитием конкуренции и т.п.; здесь предсказуемость рисков носит относительный характер, так как прогнозирование со стопроцентным результатом исключает рассматриваемое явление из категории рисков;

– непрогнозируемые, отличаются полной непредсказуемостью проявления (например, форс- мажорные риски, налоговый риск и др.).

Соответственно этому классификационному признаку риски подразделяются также на регулируемые и нерегулируемые в рамках предприятия.

По размеру возможного ущерба:

– допустимый, потери по которому не превышают расчётной суммы прибыли по осуществляемой операции;

– критический, потери по которому не превышают расчётной суммы валового дохода по осуществляемой операции;

– катастрофический, потери по которому определяются частичной или полной утратой собственного капитала (может сопровождаться утратой заёмного капитала).

При изучении данной дисциплины будут рассматриваться природные, техногенные риски и их совмещение.

3.2 Природные риски

По данным МЧС России в стране в 2012 г. отмечено 469 опасных природных явлений гидрометеорологического характера, нанесших материальный и социальный ущерб населению и отраслям экономики, что на 147 случаев (31%) больше, чем в 2011 году (322 происшествия). При этом в разных регионах РФ природные события, как значения климатического параметра, превышающие (непревышающие) некоторую критическую отметку, характеризуются различной изменчивостью. В частности, в Иркутской области их количество уменьшилось с 10 до 3 за указанный период, хотя в Сибирском федеральном округе эти значения увеличились с 52 до 112. Аналогичным образом число опасных природных явлений, формирующихся на территории страны, отличается от количества стихий, причиняющих ущербы в других странах мира. На рис. 3.1 приведена классификация природных явлений, которые характерны для Иркутской области и систематически наносят ущербы сельскохозяйственным предприятиям региона.

Особый интерес для исследования представляют редкие природные события, которые характеризуют наиболее сильные возмущения и, как следствие, причиняют наибольшие материальные ущербы. Понятно, что классические принципы математической статистики ориентируют на изучение усредненных величин как наиболее стабильных. Между тем параметры редких явлений характеризуют некоторое экстремальное состояние аспекта природной среды, которое в наибольшей степени влияет на экономику. Как правило, антропогенное воздействие оказывает на формирование редких явлений значительно меньшее влияние, чем на усредненные процессы.

Кроме того, с практической точки зрения адекватным является рассмотрение не только отдельных природных событий, но и совмещение явлений. Другими словами, анализируются случаи проявления в один и тот же год нескольких природных событий различного происхождения, природного и техногенного события, множества природных и одного техногенного явления. В сумме эти ситуации могут наносить значительный ущерб хозяйствам населения.

Негативные последствия, которые оказывают на сельскохозяйственное производство природные события разумно страховать, определяя сумму возможных потерь, и планировать производство для смягчения потерь за счет оптимизации структуры производства.

Существует методика оценки страховой стоимости урожая сельскохозяйственной культуры. Согласно этой разработке формула страховой стоимости урожая конкретной сельскохозяйственной культуры C_c имеет вид:

$$C_c = QU_{\text{п}}, \tag{3.1}$$

где Q - средняя цена производителей соответствующего основного вида продукции растениеводства по конкретной сельскохозяйственной культуре, сложившаяся по субъекту Российской Федерации за год, предшествующий году заключения договора сельскохозяйственного страхования, по данным Федеральной службы государственной статистики, а по кормовым культурам - по фактической себестоимости, сложившейся у сельскохозяйственного товаропроизводителя за год, предшествующий году заключения договора сельскохозяйственного страхования (руб./ц); $U_{\text{п}}$ - планируемый урожай конкретной сельскохозяйственной культуры (ц), определяемый по формуле $U_{\text{п}} = SY_m$. В формуле планируемого урожая $U_{\text{п}}$ символ S характеризует размер посевной (посадочной) площади под сельскохозяйственную культуру в текущем году (га), а Y_m представляет собой среднюю урожайность сельскохозяйственной культуры, сложившуюся за пять лет, предшествующих году заключения договора сельскохозяйственного страхования (ц/га).

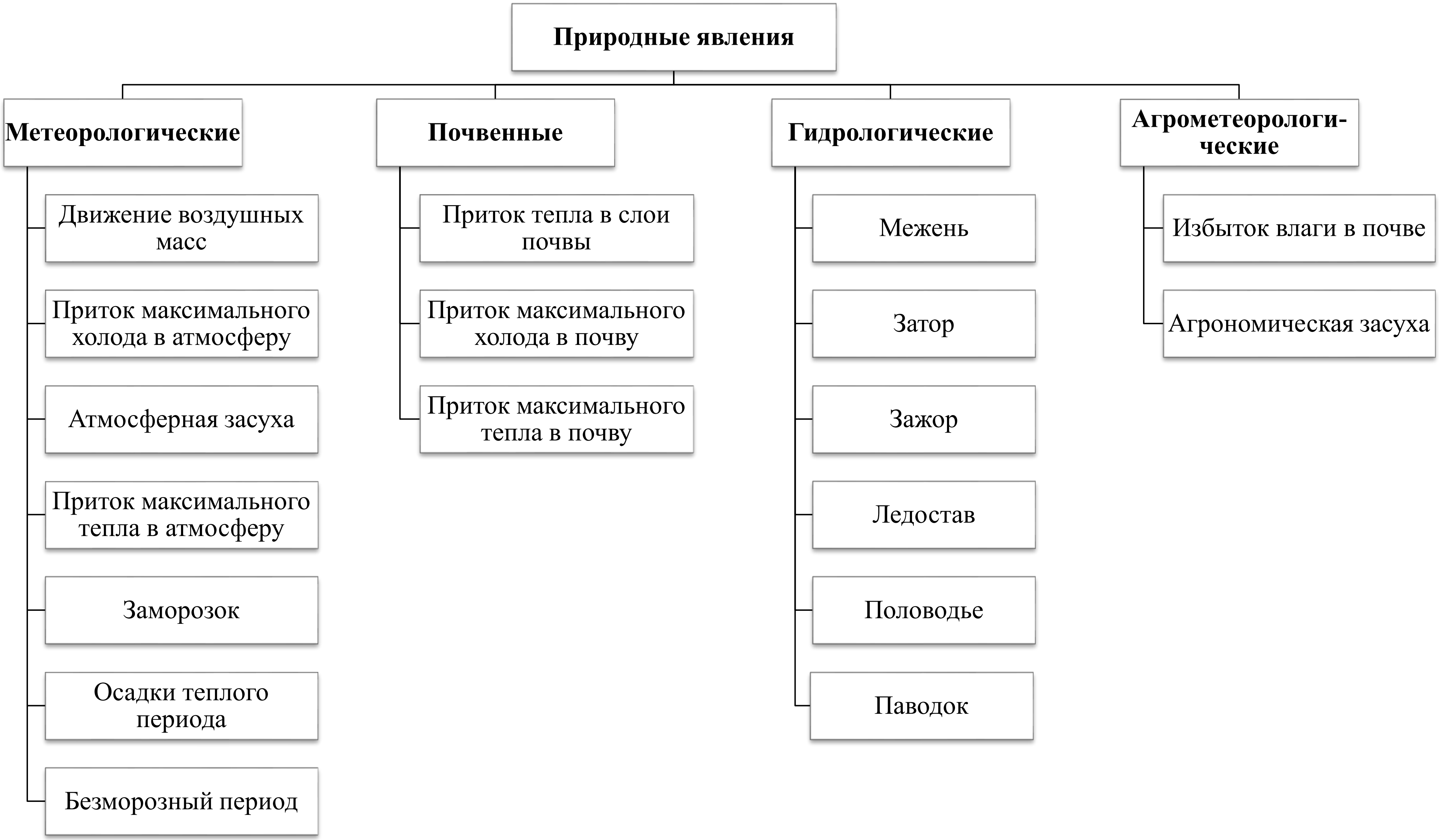


Рисунок 3.1 - Классификация природных явлений, характерных для Иркутской области и систематически наносящих ущербы сельскому хозяйству региона

В случае отсутствия у сельскохозяйственного товаропроизводителя данных для определения средней урожайности сельскохозяйственных культур за предшествующие пять лет при заключении договора сельскохозяйственного страхования в расчет принимается средняя урожайность с посевной (посадочной) площади за период, данные по которому отсутствуют (за пять лет или несколько лет из пяти лет), по мере наличия данных в следующем порядке:

- по муниципальному району, городскому округу субъекта Российской Федерации, в котором сельскохозяйственный товаропроизводитель возделывает сельскохозяйственную культуру;
- по муниципальному району, городскому округу субъекта Российской Федерации, находящемуся на ближайшем расстоянии от места возделывания сельскохозяйственным товаропроизводителем сельскохозяйственной культуры;
- по субъекту Российской Федерации, в котором сельскохозяйственный товаропроизводитель возделывает сельскохозяйственную культуру;
- по субъекту Российской Федерации, находящемуся на ближайшем расстоянии от места возделывания сельскохозяйственным товаропроизводителем сельскохозяйственной культуры.

Сельскохозяйственные товаропроизводители, которые начали осуществлять свою деятельность или были реорганизованы в течение последних четырех лет, предшествующих году заключения договора сельскохозяйственного страхования, могут определять среднюю урожайность сельскохозяйственной культуры за период своей деятельности при условии, что она составляет не менее двух лет.

В случае отсутствия официальной статистической информации по Российской Федерации и данных бухгалтерского учета для определения урожайности сельскохозяйственной культуры за пять лет, предшествующих году заключения договора сельскохозяйственного страхования, сельскохозяйственные товаропроизводители определяют среднюю урожайность сельскохозяйственной культуры за период, по которому имеются данные Федеральной службы государственной статистики или данные бухгалтерского учета.

Сельскохозяйственные товаропроизводители, возделывающие сельскохозяйственную культуру, риск утраты (гибели) которой подлежит страхованию и посевные (посадочные) площади которой находятся в обособленных подразделениях в разных муниципальных районах (городских округах) субъекта Российской Федерации, определяют среднюю урожайность сельскохозяйственной культуры в отдельности по каждому обособленному подразделению.

Размер утраты (гибели) урожая конкретной сельскохозяйственной культуры в результате наступления событий, предусмотренных договором сельскохозяйственного страхования, определяется как количественные потери урожая конкретной сельскохозяйственной культуры с площади посева (посадки), исчисленные как разница между планируемым урожаем, принятым при заключении договора сельскохозяйственного страхования, и полученным урожаем в текущем году:

$$A_c = \begin{cases} 0, \text{если } \left(U_{\text{п}} - U_{\text{ф}}\right)/U_{\text{п}} < 0{,}3 \\ U_{\text{п}} - U_{\text{ф}}, \text{если } \left(U_{\text{п}} - U_{\text{ф}}\right)/U_{\text{п}} \ge 0{,}3 \end{cases}, \tag{3.2}$$

где A_c - размер утраты (гибели) урожая конкретной сельскохозяйственной культуры с площади посева (посадок) конкретной сельскохозяйственной культуры в текущем году в результате наступления событий, предусмотренных договором сельскохозяйственного страхования (ц); $U_{\text{п}}$ - планируемый урожай конкретной сельскохозяйственной культуры, принятый при заключении договора сельскохозяйственного страхования (ц); $U_{\text{ф}}$ - урожай конкретной сельскохозяйственной культуры в текущем году, определяемый как произведение фактической урожайности на площадь посева (посадки), предусмотренной договором сельскохозяйственного страхования (ц) сельскохозяйственной культуры в текущем году определяется так:

$$U_{\text{ф}} = SY_{\text{ф}}, \tag{3.3}$$

где S - размер посевной (посадочной) площади, предусмотренной договором сельскохозяйственного страхования (га); $Y_{\text{ф}}$ - урожайность конкретной сельскохозяйственной культуры с посевной (посадочной) площади, сложившаяся у страхователя в текущем году (ц/га), которая определяется $Y_{\text{ф}} = \dfrac{v_{\text{ф}}}{s_{\text{ф}}}$.

Здесь $v_{\text{ф}}$ - валовой сбор урожая конкретной сельскохозяйственной культуры в текущем году по данным Федеральной службы государственной статистики (формы N 29-СХ, N 2-фермер) (ц/га), в случае отсутствия данных Федеральной службы государственной статистики - по имеющимся данным бухгалтерского учета; $s_{\text{ф}}$ - посевная (посадочная) площадь конкретной сельскохозяйственной культуры страхователя в текущем году по данным Федеральной службы государственной статистики (формы N 4-СХ, N 1-фермер) (га), в случае отсутствия данных Федеральной службы государственной статистики - по имеющимся данным бухгалтерского учета.

Исходя из сказанного, научно-практическое значение имеет задача оценки потерь урожая для возмещения страховой стоимости в условиях проявления природных событий. Поскольку согласно методике расчета страховой стоимости потери урожая соответствуют не менее 30% от планируемой продукции сельскохозяйственной культуры, то интерес вызывает задача определения вероятности такой ситуации.

Пример 3.1 Урожай зерновых текущего года на сельскохозяйственном предприятии, работающем с 1990 г. требуется застраховать для обеспечения его стабильной работы.

Урожайность зерновых в хозяйстве за последние пять лет была следующей: в 2011 г. собрали 25 ц/га, 2012 – 23 ц/га, 2013 - 18 ц/га, 2014 – 22 ц/га, 2015 - 28 ц/га. Средняя цена реализации зерновых, сложившаяся по субъекту Российской Федерации за год, предшествующий году заключения договора сельскохозяйственного страхования, по данным Федеральной службы государственной статистики составила 1,1 тыс. руб. за ц. Посевная площадь зерновых культур в хозяйстве составляет 1200 га. В текущем году летом наблюдалось малое количество осадков и во многих районах области была сильная засуха. На рассматриваемом предприятии урожай был так же снижен и составил по факту 16 ц/га.

Требуется определить страховую стоимость урожая зерновых и размер утраты (гибели) зерновых.

Решение. Определим среднюю урожайность зерновых в хозяйстве за пять лет, предшествующих году страхования $Y_m = (25+23+18+22+28)/5 = 23$ (ц/га), отсюда планируемый урожай найдем как $U_{\text{ï}} = 1200 \times 23 = 27600$ (ц). Далее рассчитываем страховую стоимость урожая зерновых $C_c = 1{,}1 \times 27600 = 30360$ (тыс. руб.).

Теперь определим размер утраты (гибели) урожая зерновых на сельскохозяйственном предприятии. Для этого нетрудно расчитать фактический урожай зерновых, который составил $U_{ф} = 16 \times 1200 = 19200$ (ц). Долю погибшего урожая рассчитаем по формуле $(U_{\text{ï}} - U_{\text{ô}})/U_{\text{ï}} = (27600 - 19200)/27600 = 0{,}304$ или 30,4%. Как видим потери превышают 30%, что удовлетворяет условию выражения (3.2) наступления страхового случая. При этом размер утраты (гибели) урожая составляет $A_c = 27600 - 19200 = 8400$ (ц).

3.3 Техногенные риски

Техногенные риски – это ущербы, наносимые экономике и экологии хозяйственной деятельностью человека. Иными словами они являются негативным для окружающей среды продуктом человеческого труда.

Кроме того, иногда встречаются ситуации, когда природные явления являются причиной техногенных аварий. Так, в 1994 г. на р. Н. Тунгуска в период весеннего половодья произошло затопление дизельной электростанции с. Преображенка, принадлежащей Киренским электрическим сетям, расположенной в водоохранной зоне реки. Льдиной прорвало трубопровод от расходной емкости к дизелям в районе бензонасоса. В результате аварии с расходной емкости дизельной электростанции произошел сброс в Н. Тунгуску дизтоплива в объеме 28 м^3, нефтяное пятно которого наблюдалось по всей ширине реки на протяжении 11 км. Величина экологического ущерба составила 324,6 млн. руб.

Кроме того, в период этого же половодья (16-17 мая 1994 г.) в зону затопления попала территория филиала Усть-Кутской нефтебазы. В результате внезапного наводнения произошел аварийный сброс в Н. Тунгуску расходной емкости с бензином А-76 в объеме 9 м^3. В месте затопления около берега образовалось масляное черное пятно размером 200×20 м. Причиненный ущерб оценивается в 83,8 млн. руб.

Рассмотрим данные о техногенных событиях за период 1990-2009 гг. на территории Иркутской области, основываясь на информации государственных докладов о состоянии окружающей среды в Иркутской области. На рис. 3.2 приведено количество промышленных аварий и катастроф в регионе за период 1990-2009 гг. Здесь особо выделяется 1998 г. В этот год зарегистрировано рекордное количество лесных пожаров – 1403 ед.

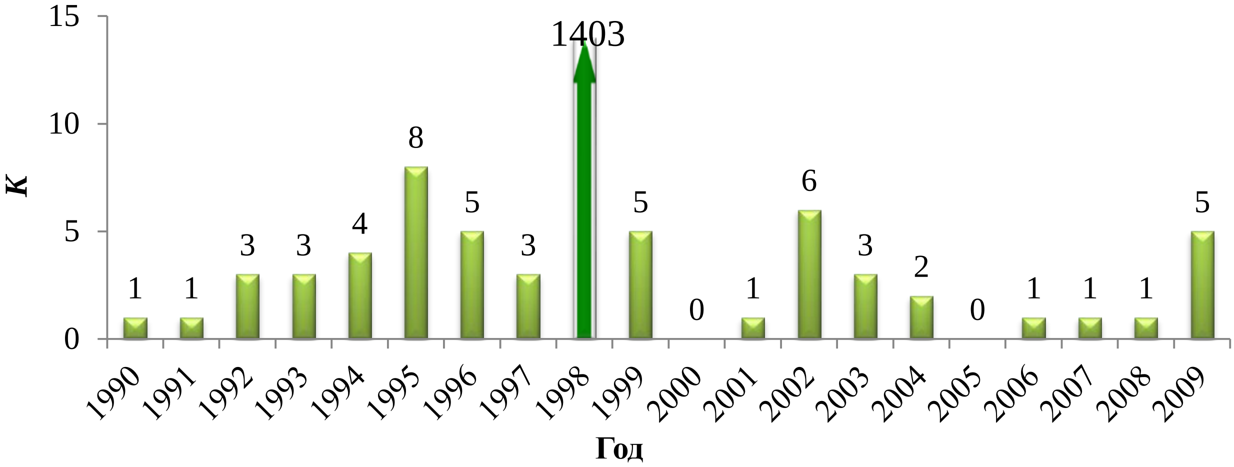


Рисунок 3.2 – Количество промышленных аварий и катастроф (*K*) на территории Иркутской области за период 1990-2009 гг.

Общее количество техногенных аварий составило:

1) транспортные аварии – 16 ед.;

2) пожары на промышленных предприятиях области с выбросом химически опасных веществ в атмосферу – 4 ед.;

3) взрывы – 1 ед.;

4) разливы нефти – 10 ед.;

5) аварии на системах коммунального обеспечения – 4 ед.;

6) сбросы на природные объекты опасных химических и радиоактивных веществ – 5 ед. (из них 2 случая сброса дизтоплива и бензина в воды реки в результате весеннего половодья);

7) случаи попадания радиоактивных элементов в окружающую среду – 6 ед.;

8) случаи выброса хлора в атмосферу, при выполнении нерегламентной технологической операции – 1 ед.;

9) газовые утечки – 6 ед.;

10) лесные пожары в результате человеческой деятельности – 1404 ед.

Причиной приблизительно 60% событий стал человеческий фактор (халатное отношение к работе), 30% – изношенность оборудования и лишь 10% произошли в результате несчастных случаев.

Материальные потери от техногенных аварий примерно равны ущербам от природных стихий. Вместе с тем преобладающее число человеческих жертв вызвано техногенными событиями.

Установлено, что наиболее часто техногенные события связаны с транспортными происшествиями, причиной большинства из которых является человеческий фактор.

В рамках изучаемой дисциплины будут рассматриваться экономические потери, которые терпит сельскохозяйственное предприятие в результате наступления неблагоприятного события.

Ущербы, нанесенные техногенным событием можно определить путем исчисления конкретных материальных потерь, которые наступили на предприятии и упущенной выгоды (например, гибель части урожая, который по истечении месяца мы могли реализовать на определенную денежную сумму).

Пример 3.2. На сельскохозяйственном предприятии часть сельскохозяйственных угодий была загрязнена разливом нефти из проходящего недалеко от земель предприятия нефтепровода. Хозяйство располагает 1200 га земель, 50 из которых вышли из оборота в результате аварии незадолго до начала уборки урожая. На загрязненных площадях были засеяны зерновые культуры. Для рекультивации земель (восстановление почвы) по предварительной оценке требуется 17 тыс. руб. на 1 га сельхозугодий, восстановление может быть осуществлено до наступления зимних холодов. При этом в следующий посевной период эти земли необходимо засеять травами, которые после уборки будут уничтожены, что обеспечит завершение очистки почвы. Затраты на обработку 1 га зерновых на сельскохозяйственном предприятии составили 10,9 тыс. руб., планируемая урожайность 15 ц/га при договоренности реализации по цене 1,1 тыс. руб./ц. Требуется оценить ущерб, нанесенный сельскохозяйственному предприятию аварией на нефтепроводе.

Решение. Для начала определим ущерб непосредственно от гибели урожая ($У_п$) как сумму произведенных затрат на обработку почвы и убыток от недополученного дохода за счет несостоявшейся реализации зерна: $У_п = 10{,}9 \times 50 + 15 \times 50 \times 1{,}1 = 1370$ (тыс. руб.).

На втором этапе несложно определить затраты, которые необходимы для рекультивации земель ($У_р$). Здесь так же учтем затраты будущего года на финальный этап очистки - выращивание трав, которые составляют порядка 3,5 тыс. руб./га: $У_р = 17 \times 50 + 3{,}5 \times 50 = 1025$(тыс. руб.).

Сложив 1370 и 1025 тыс. руб. получим, что общий ущерб сельскохозяйственного предприятия составил 2395 тыс. руб.

Кроме того, следует учитывать, что 50 гектаров земель выбыло из производства полезной продукции на один год, следующий за годом аварии. Здесь можно предположить, что разумно будет засеять зерновыми культурами площади менее рентабельных культур, чтобы смягчить ущерб. Но и в этом случае предприятие получит продукции менее возможного, если бы в обороте находились все его площади.

Контрольные задания к главе 3

Задача 1

Урожай зерновых текущего года на сельскохозяйственном предприятии, работающем с 1990 г. требуется застраховать для обеспечения его стабильной работы.

Урожайность зерновых в хозяйстве за последние пять лет была следующей: в 2011 г. собрали 15 ц/га, 2012 – 23 ц/га, 2013 - $\boldsymbol{v_{2013}}$ ц/га, 2014 – 22 ц/га, 2015 - 28 ц/га. Средняя цена производителей зерновых, сложившаяся по субъекту Российской Федерации за год, предшествующий году заключения договора сельскохозяйственного страхования, по данным Федеральной службы государственной статистики составила $\boldsymbol{\rho}$ тыс. руб. за ц. Посевная площадь зерновых культур в хозяйстве составляет x га. В текущем году летом наблюдалось малое количество осадков и во многих районах области была сильная засуха. На рассматриваемом предприятии урожай был так же снижен и составил по факту 16 ц/га.

Требуется определить страховую стоимость урожая зерновых и размер утраты (гибели) зерновых.

Переменные задачи, обозначенные в условии $\boldsymbol{v_{2013}}$, $\boldsymbol{\rho}$ и $\boldsymbol{x}$ приведены в табл. Б.1 приложения Б.

Задача 2

На сельскохозяйственном предприятии часть сельскохозяйственных угодий была загрязнена химическим веществом, выброшенным в результате аварии нефтеперерабатывающим заводом, находящимся неподалеку. Хозяйство имеет $\boldsymbol{x}_{\text{общ}}$ га земель, $\boldsymbol{x}_{\text{загр}}$ из которых вышли из оборота в результате загрязнения. На загрязненных площадях были засеяны зерновые культуры. Для рекультивации земель (восстановление почвы) по предварительной оценке требуется 17 тыс. руб. на 1 га сельхозугодий, восстановление может быть осуществлено до наступления зимних холодов. При этом в следующий посевной период эти земли необходимо засеять травами, которые после уборки будут уничтожены, что обеспечит завершение очистки почвы. Затраты сельскохозяйственного предприятия на обработку 1 га зерновых, включая семенной материал, на момент аварии составили $\boldsymbol{c}$ тыс. руб., планируемая урожайность 25 ц/га при договоренности реализации по цене 1,15 тыс. руб./ц. Требуется оценить ущерб, нанесенный сельскохозяйственному предприятию аварией на нефтепроводе.

Переменные задачи, обозначенные в условии $\boldsymbol{x}_{\text{общ}}$, $\boldsymbol{x}_{\text{загр}}$ и $\boldsymbol{c}$ приведены в табл. Б.2 приложения Б.

4 Моделирование производственных процессов в условиях рисков

4.1 Классификация моделей, учитывающих риски

В дополнение к негативному влиянию природных событий на производственные процессы возрастает техногенное воздействие на окружающую среду и, как следствие, на производство продовольственной продукции. Очевидно, что для уменьшения ущербов, как от природных, так и техногенных событий необходимо моделирование смешанного воздействия явлений на производство продукции. На рис. 4.1 приведены три группы моделей оптимизации получения сельскохозяйственной продукции, учитывающие редкие природные, техногенные явления и их совмещение. Под редким явлением понимается экстремальное (максимальное или минимальное) значение параметра многолетнего ряда наблюдений. Аналогично можно применить приведенную классификацию не только к редким явлениям, но и событиям менее разрушительной силы проявления.

Во многих странах мира создана обязательная система страхования от различных природных стихийных явлений. В частности, в США возмещение от воздействия гидрологического явления определяется в зависимости от трех зон. Первая из них называется специальной областью опасности, вторая - областью умеренной опасности, а третья - областью малой опасности наводнения. Эти зоны определяются в зависимости от вероятности проявления гидрологического события: в первом случае вероятность появления события рассчитана на 0,01 или 1 раз в 100 лет, во втором - 0,002-0,01 (1 раз в 200-500 лет), в третьем - менее 0,002 или повторяемость реже одного раза в 500 лет.

В России вероятность превышения расчетного уровня воды для сооружений 1 класса, защищающих сельскохозяйственные территории площадью свыше 100 тыс. га, соответствует 0,005; для сооружений IV класса, защищающие территории оздоровительно-рекреационного и санитарно-защитного назначения, - 0,1. Исходя из этого, необходимы знания вероятности проявления гидрологического события. Между тем система страхования должна учитывать и другие природные события, наносящие ущерб экономике страны и региона, например, засуху или ливни. По данным сильной засухи 2003 г. на территории Иркутской области потерянные площади посевов в различных муниципальных образованиях колебались от 8 до 44%. При этом медианное значение потерь составило 25%. Вероятность засухи, оцениваемая в виде низкой урожайности зерновых культур (не выше 80% от среднего многолетнего значения), соответствовала 0,0162-0,141. Очевидно, что сельскохозяйственные товаропроизводители в таких ситуациях должны получать объективную сумму денежных средств возмещения.

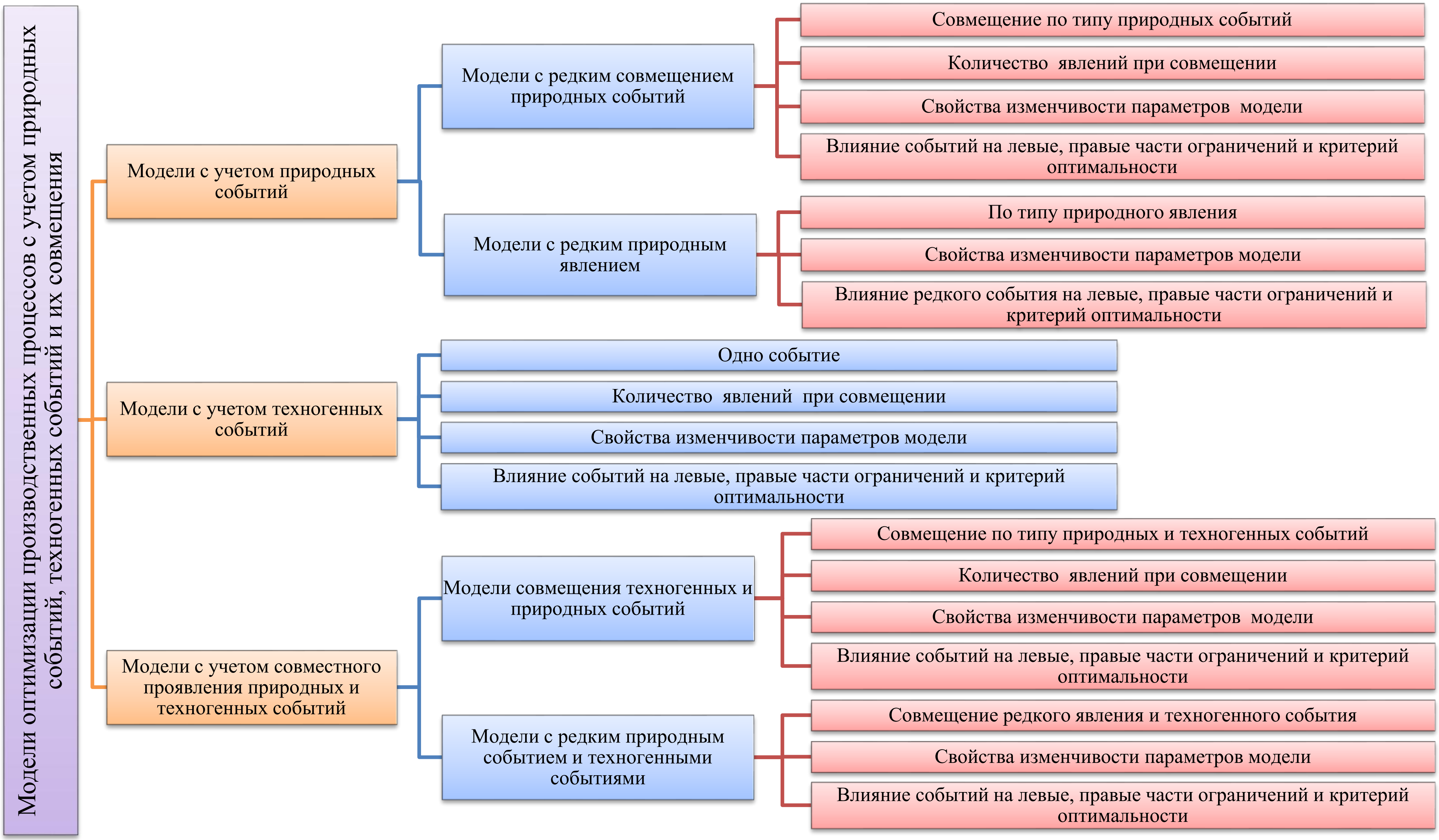


Рисунок 4.1 – Классификация задач оптимизации производства сельскохозяйственной продукции с учетом влияния экстремальных природных явлений и техногенных событий

Научно-практическое значение имеет задача оценки потерь урожая для возмещения страховой стоимости в условиях проявления природных событий. Поскольку согласно методике расчета страховой стоимости потери урожая соответствуют не менее 30% от планируемой продукции сельскохозяйственной культуры, то интерес вызывает задача определения вероятности такой ситуации.

Учитывая возможности моделирования производства сельскохозяйственной продукции согласно задачам математического программирования, приведенным на рис. 4.1, методику определения страховой стоимости и размера утраты (гибели) урожая сельскохозяйственной культуры и посадок многолетних насаждений, утраты (гибели) сельскохозяйственных животных и планирование в благоприятных условиях, предлагается методика оценки рисков и страховых возмещений предприятию агропромышленного комплекса.

Во-первых, определяется оптимальный план производства сельскохозяйственной продукции для благоприятных природно-климатических условий. Во-вторых, оценивается вероятность неблагоприятного события. В-третьих, определяется влияние природного события на производственные ресурсы. В-четвертых, строятся оптимальные планы производства сельскохозяйственной продукции с учетом проявления природного события по разности оптимальных планов в благоприятных и неблагоприятных условиях с учетом методики определения страховой стоимости и размера утраты (гибели) урожая сельскохозяйственной культуры и посадок многолетних насаждений, утраты (гибели) сельскохозяйственных животных. И наконец, в-пятых, определяются природные риски и страховые возмещения в случае проявления неблагоприятного природного события.

Способы оценки вероятностей события и совмещения событий и определение влияния каждого события на производственные ресурсы (вторая и третья операции) приведены выше. Здесь же рассмотрим четвертую операцию методики, связанную с получением оптимальных планов в условиях влияния природных событий и их совмещения на основе моделей, показанных на рис. 4.1.

Кроме того, следует иметь в виду дополнительные экономические потери сельскохозяйственными предприятиями от техногенных воздействий, которые, как и природные события, являются случайными величинами. Не следует при этом забывать, что недостаточность информации о техногенных событиях затрудняет их описание с помощью закона распределения вероятностей.

Оценка ущербов усложняется при совмещении различных по происхождению природных событий и совмещений техногенных и природных событий. В реальных условиях имеет место влияние на сельскохозяйственное производство совмещения событий, например, весеннего половодья и дождевого паводка; весеннего половодья и засухи; ливня и дождевого паводка; засухи и раннего снега и др. В этом случае сельскохозяйственные предприятия должны получать двойную компенсацию за потери. Согласно результатам исследований некоторых авторов максимальное количество совмещенных событий в регионе соответствует трем.

При этом возможны совмещения природных и техногенных событий или ситуации, когда техногенные аварии являются следствием природных событий.

Из этих групп моделей в особый класс выделены модели, описывающие неблагоприятные природные или техногенные события и их совмещение. В этом случае в группу моделей с учетом экстремальных природных явлений включены модели с их совмещением. По аналогии в группу моделей с совместным проявлением природных и техногенных событий вошли модели совмещения техногенных и природных событий и модели с природным событием и техногенными воздействиями.

В классификации (рис. 4.1) отсутствует второй уровень иерархии для группы моделей с учетом техногенных событий, что вызвано соответствием каждого техногенного явления любому уровню техногенной аварии в отличие от природного события. В последнем случае события являются частью многолетнего ряда.

На третьем уровне иерархии используются следующие признаки группировки моделей: тип или происхождение природного события, число явлений в совмещении, свойства параметров, линейность (нелинейность) связей, зависимость (независимость) параметров, влияние событий на составляющие моделей (целевая функция и ограничения).

Категория задач с совмещением природных событий обусловлена генетическими особенностями формирования природных явлений. Очевидно, что последствия техногенных событий вызваны другими причинами по сравнению с природными. Между тем часто природные явления проявляют себя на фоне техногенных воздействий, в ряде случаев провоцируют их. Поэтому создание моделей совмещения техногенных и природных событий имеет особую физическую и математическую интерпретацию.

Существуют математические модели сочетания отраслей сельскохозяйственного производства для усредненных природно-климатических условий, модели оптимизации сочетания отраслей растениеводства и животноводства с учетом природных событий. На основе первой и второй групп моделей можно рассматривать различные ситуации оптимизации производства продовольственной продукции с учетом: 1) влияния техногенного события и экстремального природного явления; 2) влияния техногенного явления и совмещения природных событий; 3) влияния совмещения природных и техногенных событий. Такие модели позволяют уменьшить экономические ущербы предприятия в неблагоприятных ситуациях за счет адекватного планирования. При этом не следует забывать о количестве рассматриваемых событий и их генетическом происхождении. В первом случае имеет место усложнение модели ввиду увеличения переменных за счет числа явлений и различных видов связей между параметрами, отражающими изменчивость событий. В частности, описание совмещения ливней и последствий техногенных аварий, вызванных загрязнением почвы, уменьшением ее плодородия отличается от отражения ситуаций совмещения гидрологического и техногенного явления. Иначе будет выглядеть модель, включающая в себя засухи, гидрологические явления и последствия различных техногенных событий. Между тем приведенный пример согласно анализу проявления совмещения событий различного происхождения является крайне редкой ситуацией, значительно уступающей частоте формирования в календарный год одного техногенного и одного природного события.

Большое значение при моделировании производства сельскохозяйственной продукции с учетом природных и техногенных событий имеют свойства параметров модели. При этом их можно разделить на производственно-экономические, природные и техногенные, которые могут быть связаны и независимы. Эти параметры обладают неопределенностью и могут изменяться функционально, часть их описывается с помощью закона распределения вероятностей с учетом автокорреляционных связей и при их отсутствии. Между тем неоднородность выборок и их непродолжительность не всегда позволяет использовать функции распределения. В этом случае возможны интервальные оценки параметров. Другая часть параметров может быть описана функционально ввиду их связи с факторами или наличием устойчивых тенденций. Таким образом, как показал анализ свойств параметров моделей оптимизации производства сельскохозяйственной продукции, они представляют собой сочетание неопределенных и детерминированных значений, что в значительной степени усложняет получение множества оптимальных планов. При этом возникает вторая задача выбора из них наиболее приемлемых для решения реальных задач.

К этому следует добавить, что любой неопределенный параметр обладает степенью рассеяния. В частности, случайная величина, по сути, характеризуется некоторой усредненной вероятностью и значением. Эта вероятность и значение варьируют. Оценка рассеяния имеет теоретическое и практическое значение для событий.

Следует подчеркнуть, что параметры, входящие в модели оптимизации производства сельскохозяйственной продукции, как правило, являются нелинейными. Например, значения природных событий и их серии подчиняются законам распределения вероятностей Пирсона III типа, семейству нормальных законов распределения, экспоненциальному и др. Кроме того, производственно-экономические параметры могут описываться полиномом второго порядка, степенной и экспоненциальной функциями. Некоторые урожайности и сроки посева связаны с факторами тепла и увлажнения нелинейными многофакторными выражениями.

Неопределенность параметров, нелинейность их изменчивости, значительное их количество, учет рассеяния определяет сложность задачи математического программирования, позволяя определять множество оптимальных планов.

4.2 Моделирование природных рисков

4.2.1 Моделирование рисков в условиях проявления природного события

Природное явление влияет на себестоимость продукции - увеличиваются затраты на производство. При этом необходимо использовать дополнительные производственные ресурсы для уменьшения потерь продукции и устранения разрушительных последствий от проявления природного события. Иными словами, что природное явление способствует снижению ресурсного потенциала предприятия, сокращению выхода продукции с единицы площади различных видов сельскохозяйственных культур. Общее уменьшение объема произведенной продукции влияет на заданные объемы производства, в конечном итоге снижая их.

В планировании производства и снижения рисков влияния природного события могут помочь модели математического программирования оптимизации производства аграрной продукции. Используя их и методику оценки страховой стоимости урожая сельскохозяйственной культуры описанную в параграфе 3.2 учебного пособия можно моделировать различные варианты развития событий, давать оценку возможных потерь в лучшем и худшем случаях, определять потери с некоторой вероятностью их наступления. Все это расширяет информацию о производственных процессах, последствиях, которые природное событие может причинить производству, увидеть возможные варианты развития событий и определить сумму страховых выплат и, что немаловажно страховых возмещений, т.к. создание резервов и страхование помогают обеспечить стабильность ведения хозяйственной деятельности, в том числе и в неблагоприятных ситуациях.

Запишем возможную математическую модель определения оптимальных планов производства продовольственной продукции в условиях проявления природного явления с вероятностными параметрами (описание и пример решения задачи математического программирования с вероятностными параметрами приведены в разделе 2.3.2 учебного пособия).

4.3 Моделирование техногенных рисков

В предыдущих разделах мы рассмотрелимодели оптимизации производства аграрной продукции в условиях проявления природных событий. И с учетом проявления техногенных событий. На основе первой и второй групп моделей можно рассматривать различные ситуации оптимизации производства продовольственной продукции с учетом природных событий и техногенных воздействий: 1) влияние техногенного события; 2) влияние техногенного события и природного явления; 3) влияние техногенного возмущения и совмещения природных событий; 4) влияние совмещения техногенных событий; 5) влияние совмещения природных и техногенных событий. Такие модели позволяют оценить техногенные и природные риски предприятий агропромышленного комплекса.

В продолжение пройденного материала по определению адекватных моделей планирования производства предлагается модель в условиях проявления техногенных и природных событий.

5 Описание специализированного программного комплекса

Для моделирования ситуаций планирования производственной продукции в условиях рисков разработан программный комплекс «Управление рисками при планировании аграрного производства». Его математическое обеспечение основано на методах статистической обработки природных и техногенных событий, а так же производственно-экономических параметров. Кроме того, сюда вошли разработанные Я.М. Иваньо и С.А. Петровой модели математического программирования, классификация которых приведены выше. Они позволяют получать оптимальные планы с учетом влияния различных природных и техногенных событий и их сочетания. Поскольку при решении задач математического программирования в условиях неопределенности рассчитывается множество оптимальных планов в зависимости от неопределенных параметров, для получения решений предложены алгоритмы имитационного моделирования. Из них основополагающими являются два алгоритма: 1) моделирование события в пределах периода его повторяемости; 2) моделирование события по условию превышения заданного его значения.

В первом случае методом статистических испытаний по заданному закону распределения вероятностей моделируется множество выборок в пределах периода повторяемости события и оценивается его распределение, которое используется для определения оптимальных планов, связанных с полученной вероятностью. Исследования показали, что в качестве закона распределения вероятностей природных событий можно использовать функцию Пирсона III типа. Для оценки агрономических засух во многих случаях применим нормальный закон распределения.

Во втором случае случайная выборка согласно закону распределения моделируется до тех пор, пока заданное значение события не будет превышено. Подобная процедура осуществляется многократно. В результате рассчитывается вероятность события и ее рассеяние, которая связана с оптимальным планом производства сельскохозяйственной продукции в условиях воздействия события.

К сожалению, при коротких и неоднородных рядах, описывающих природные события, приходится использовать интервальные оценки. В этом случае не представляется возможным увязать полученные оптимальные решения с вероятностями. Результатом моделирования являются верхние, нижние и медианные оценки целевой функции и оптимальные планы, соответствующие им. В частности, в ряде случаев в качестве интервального параметра применима урожайность зерновых культур, характеризующая агрономическую засуху. Аналогичная сложность возникает при оценке загрязнения почвы как результата выбросов в атмосферу вредных химических соединений.

База данных включает в себя группы природных, техногенных и производственно-экономических параметров, которая может периодически дополняться вручную или автоматизировано с официальных сайтов гидрометеорологической службы и министерства сельского хозяйства региона. Кроме того, аналогичным образом пополняются данные о техногенных явлениях, влияющих на сельскохозяйственное производство.

Интерфейс программного комплекса состоит из пяти пунктов меню: «Анализ», «Оптимизация», «Исходные данные», «Импортирование», «Классификаторы».

С помощью пункта меню «Анализ» осуществляется статистическая обработка данных с использование метода моментов и приближенно максимального правдоподобия с учетом и без учета историко-архивных свидетельств. Кроме того, этот пункт меню позволяет выделять из ряда многолетних наблюдений редкое явление и события, осуществлять пространственно-временную оценку событий, серий событий в различные эпохи с построением регрессионных зависимостей, подбирать закон распределения случайной величины, выделять редкое совмещение событий.

Согласно пункту меню «Оптимизация» решаются задачи математического программирования для получения оптимальных планов производства продовольственной продукции с учетом влияния природных и техногенных событий, по оценкам параметров, полученных с помощью меню «Анализ»

По пункту меню «Исходные данные» осуществляется дополнение, обновление и удаление сведений в базе данных; просмотр, их загрузка для произведения расчетов.

Для перечня сущностей базы данных создан пункт меню «Классификаторы».

5.1 Моделирование техногенных рисков

В общем случае влияние экстремальных явлений, вызванных антропогенной деятельностью человека в зависимости от происхождения имеет различные последствия. При воздействии техногенных событий на сельскохозяйственное производство следует выделить: загрязнение почвы как результат переноса вредных веществ и их оседания; воздействие на плодородие минеральных удобрений и пестицидов; разрушение почвы при авариях (разлив нефтепродуктов, отравляющих веществ) и др. Очевидно, что последствия техногенних аварий не всегда можно описать с помощью законов распределения. Поэтому в моделях планирования производства значения техногенных событий могут быть оценены как с помощью интервальных оценок, так и случайными параметрами.

Исходная задача оптимизации производства продовольственной продукции с учетом влияния техногенных событий

Из моделей оптимизации производства сельскохозяйственной продукции, приведенных в разделе 4.1, рассмотрим случай влияния на производство техногенного события с интервальными параметрами. При непредсказуемости изменения себестоимости продукции ее можно оценивать верхними и нижними значениями. Кроме того, в некоторых пределах может изменяться расход i-го ресурса на единицу площади s-культуры и единицу поголовья h-вида животных; ресурсный потенциал хозяйства (например, часть площадей может выходить из оборота, деградировать); выход кормов с единицы площади, урожайность сельскохозяйственных культур и объемы их производства. В этом случае целевая функция математической модели сочетания отраслей растениеводства и животноводства в виде минимума затрат примет вид:

$$\sum_{s\in S} c_s x_s + \sum_{s\in S} \tilde{c}_s^{(II)}\omega_s + \sum_{h\in H} c_h x_h + \sum_{h\in H} \tilde{c}_h^{(II)}\omega_h - \left(\sum_{j\in J} c_j x_j + \sum_{j\in J} \tilde{c}_j^{(II)}\omega_j\right) \to \min, \quad (4.44)$$

где c_s, $\tilde{c}_s^{(II)}$ - себестоимость и затраты единицы продукции s-культуры $(s \in S)$, связанные с влиянием техногенного события; c_h, $\tilde{c}_h^{(II)}$ - себестоимость и затраты единицы h-вида животных ($h \in H$) ввиду проявления техногенного события; c_j, $\tilde{c}_j^{(II)}$ - себестоимость и затраты единицы j-вида корма ($j \in J$) при воздействии техногенного события; x_s, x_h и x_j - искомые переменные, площадь s-культуры, поголовье h-вида скота, количество кормов j-вида; S – множество видов культур; ω_s, ω_h и ω_j - искомые переменные, площадь s-культуры, поголовье h-вида скота, количество кормов j-вида с учетом проявления техногенного события; S – множество видов культур; H – множество групп животных; J – множество видов кормов. Параметры $\tilde{c}_s^{(II)}$, $\tilde{c}_h^{(II)}$ и $\tilde{c}_j^{(II)}$ являются интервальными, оцениваемыми верхними и нижними значениями: $\underline{\tilde{c}}_s^{(II)} \le \tilde{c}_s^{(II)} \le \overline{\tilde{c}}_s^{(II)}$, $\underline{\tilde{c}}_h^{(II)} \le \tilde{c}_h^{(II)} \le \overline{\tilde{c}}_h^{(II)}$, $\underline{\tilde{c}}_j^{(II)} \le \tilde{c}_j^{(II)} \le \overline{\tilde{c}}_j^{(II)}$.

Целевая функция (4.44) соответствует выражению (4.15) с той лишь разницей, что в первом случае на производство сельскохозяйственной продукции влияют техногенные события, а во втором - природные. При этом смысл составляющих критерия оптимальности (4.44) аналогичен целевой функции (4.15).

По аналогии с ограничениями задачи (4.15)-(4.23) построены условия с учетом влияния техногенного события. В качестве критерия оптимальности можно использовать преобразованную функцию (4.44), в которую входят затраты, соответствующие потере продукции:

$$\sum_{s\in S}\tilde{c}_s^{(II)}\omega_s+\sum_{h\in H}\tilde{c}_h^{(II)}\omega_h-\sum_{j\in J}\tilde{c}_j^{(II)}\omega_j\to\min. \qquad (4.45)$$

В этой задаче затраты и параметры ограничений, связанные с производственными ресурсами, получением побочной продукции, производством конечной продукции, сочетанием растениеводства и животноводства по элементам питания, представляют собой интервальные оценки. При этом рассматриваются различные ситуации возможного получения продукции на землях, подверженных влиянию техногенных событий. Очевидно, что частичное использование сельскохозяйственных угодий в конечном итоге скажется на себестоимости продукции благодаря потерям.

Ограничения по получению продукции на сельскохозяйственных угодьях, подверженных влиянию техногенного события, которая может быть потеряна, включают в себя следующие неравенства.

Во-первых, производственные ресурсы расходуются на получение растениеводческой и животноводческой продукции:

$$\sum_{s\in S}\tilde{b}_{is}^{(II)}\omega_s+\sum_{h\in h}\tilde{b}_{ih}^{(II)}\omega_h\le\tilde{B}_i^{(II)}\ (i\in I), \qquad (4.46)$$

где $\tilde{b}_{is}^{(II)}$ – расход i-го ресурса на единицу площади s-культуры ввиду проявления техногенного события, изменяющийся в пределах $\underline{\tilde{b}}_{is}^{(II)}\le\tilde{b}_{is}^{(II)}\le\overline{\tilde{b}}_{is}^{(II)}$; $\tilde{\mathrm{b}}_{\mathrm{ih}}^{(\mathrm{II})}$ – расход i-го ресурса на единицу поголовья h-вида животных как результат проявления техногенного события, находящийся в интервале $\underline{\tilde{\mathrm{b}}}_{\mathrm{ih}}^{(\mathrm{II})}\le\tilde{\mathrm{b}}_{\mathrm{ih}}^{(\mathrm{II})}\le\overline{\tilde{\mathrm{b}}}_{\mathrm{ih}}^{(\mathrm{II})}$; $\tilde{\mathrm{B}}_{\mathrm{i}}^{(\mathrm{II})}$ – потери i-го ресурса под воздействием техногенного события, расположенные в интервале $\underline{\tilde{B}}_i^{(II)}\le\tilde{B}_i^{(II)}\le\overline{\tilde{B}}_i^{(II)}$; i – вид ресурса; I – множество видов ресурсов.

Во-вторых, применение в животноводстве побочной продукции растениеводства должно быть не менее заданного объема:

$$\sum_{s\in S}\tilde{v}_{js}^{(II)'}\omega_s\ge\tilde{V}_j^{(II)}\ (j\in J), \qquad (4.47)$$

где $\tilde{v}_{js}^{(II)}$ – выход с единицы s-площади j-вида корма, варьирующий в пределах $\underline{\tilde{v}}_{js}^{(II)}\le\tilde{v}_{js}^{(II)}\le\overline{\tilde{v}}_{js}^{(II)}$; $\tilde{\mathrm{V}}_{\mathrm{j}}^{(\mathrm{II})}$ - потери количества кормов j-вида вследствие влияния техногенного возмущения, изменяющиеся в интервалах $\underline{\tilde{V}}_j^{(II)}\le\tilde{V}_j^{(II)}\le\overline{\tilde{V}}_j^{(II)}$.

В-третьих, ограниченность размера отраслей имеет вид:

- растениеводства:

$$\psi_r^{(II)} \le \sum_{s \in S} (1+\alpha_s)\omega_s \le \Psi_r^{(II)} \ (r \in R), \tag{4.48}$$

где $\psi_r^{(II)}$, $\Psi_r^{(II)}$ – минимальная (максимальная) площадь r-группы культур, подверженная воздействию техногенного события; α_s – коэффициент, учитывающий площадь посевов семян для s-культур; R – множество агротехнических групп культур;

- животноводства:

$$\omega_h = \lambda_{hh'}\omega_{h'} \ (h, h' \in H), \tag{4.49}$$

где λ_{hh}– коэффициент пропорциональности между поголовьем животных h и их группами h'.

В-четвертых, необходимо ограничивать производство конечной продукции заданными объемами:

- растениеводства:

$$\sum_{s \in S} \tilde{y}_{q_1 s}\omega_s \ge \tilde{Y}_{q_1}^{(II)} \ (q_1 \in Q_1), \tag{4.50}$$

где q – вид товарной продукции; $\tilde{y}_{q_1 s}$ – выход продукции с единицы площади s-культуры, изменяющийся в пределах $\underline{\tilde{y}}_{q_1 s} \le \tilde{y}_{q_1 s} \le \overline{\tilde{y}}_{q_1 s}$; $\tilde{Y}_{q_1}^{(II)}$ - объем, на который уменьшается производство продукции под воздействием техногенного события, оцениваемый верхними и нижними значениями $\underline{\tilde{Y}}_{q_1}^{(II)} \le \tilde{Y}_{q_1}^{(II)} \le \overline{\tilde{Y}}_{q_1}^{(II)}$; Q_1 – множество товарной продукции растениеводства;

- животноводства:

$$\sum_{h \in H} y_{q_2 h}\omega_h \ge Y_{q_2} \ (q_2 \in Q_2), \tag{4.51}$$

где y_{qh} – выход продукции с единицы поголовья h-вида животных; Y_{q_2} - заданный объем производства продукции животноводства; Q_2 – множество товарной продукции животноводства.

В-пятых, сочетание растениеводства и животноводства характеризуется балансом элементов питания:

$$\sum_{s \in S} a_{ls}\tilde{v}_s^{(II)}\omega_s + \sum_{j \in J} a_{lj}\omega_j \ge \sum_{h \in H} b_{lh} \ (l \in L), \tag{4.52}$$

где a_{ls} - содержание l-элемента питания в единице кормовой продукции, полученной от s-культуры; $\tilde{v}_s^{(II)}$ – выход основных кормовых культур с единицы площади, подверженной влиянию техногенного события, расположенный в интервале $\underline{\tilde{v}}_s^{(II)} \le \tilde{v}_s^{(II)} \le \overline{\tilde{v}}_s^{(II)}$; a_{lj} - содержание l-элемента питания в j-виде корма; b_{lh} - минимальная потребность в l-элементе питания единицы поголовья h-вида животных; l (L) – элемент (множество элементов) питания.

При этом переменные модели являются неотрицательными:

$$\omega_s, \omega_h, \omega_j \ge 0. \tag{4.53}$$

Задачу (4.45)-(4.53) можно решить для нескольких ситуаций. В работе рассмотрены следующие из них: 1) интервальные параметры моделируют случайным образом за исключением себестоимости, которая зависит от урожайности сельскохозяйственных культур; 2) интервальные параметры моделируют случайным образом за исключением себестоимости, связанной с площадью сельскохозяйственных угодий; 3) интервальные параметры моделируют случайным образом за исключением себестоимости, которая зависит от площади сельскохозяйственных угодий и урожайности; 4) интервальные параметры моделируют случайным образом, при этом получают множество решений с учетом изменения параметров в заданных интервалах.

Решение задачи и его сравнение с оптимальным планом, полученным в благоприятных условиях, позволяет оценить техногенные риски и определить расчетные страховые возмещения.

Модель с критерием оптимальности в виде зависимости себестоимости от урожайности

По данным одиннадцати муниципальных районов Иркутской области с развитым сельскохозяйственным производством в работе определены зависимости себестоимости от урожайности зерновых культур, исходя из предположения наличия нижнего предельного значения для себестоимости c_{min}. Для оценки этого параметра использованы функции гиперболического вида:

$$c = \frac{c_{\min}}{\alpha_1 y + \alpha_0}, \tag{4.54}$$

$$c = \frac{c_{\min}}{\alpha_1 \ln y + \alpha_0}, \tag{4.55}$$

где y – урожайность зерновых культур, α_0 и α_1 – коэффициенты выражений.

Точность предложенных формул (4.54) и (4.55) соответствует коэффициентам детерминации около 0,5 и 0,56. При этом выражения значимы согласно критерию Фишера при уровнях значимости 0,25 и 0,15. Другими словами, формулы (4.54) и (4.55) можно использовать для оценки себестоимости с некоторым приближением.

По аналогии полученные выражения применены для оценки себестоимости других сельскохозяйственных культур: однолетних трав на сенаж, многолетних трав на сено и зеленый корм. Для каждой сельскохозяйственной культуры определены минимальные значения себестоимости c_{min} в виде средних минимальных значений согласно данным различных муниципальных образований.

С учетом выражения (4.54) и (4.55) критерий оптимальности (4.45) запишется в следующей редакции:

$$\sum_{s\in S} \frac{c_{s_{\min}}}{\alpha_{1s} y_s + \alpha_{0s}} \omega_s + \sum_{h\in H} \tilde{\tilde{n}}_h^{(II)} \omega_h - \sum_{j\in J} \frac{c_{j_{\min}}}{\alpha_{1j} y_j + \alpha_{0j}} \omega_j \to \min, \tag{4.56}$$

$$\sum_{s\in S} \frac{c_{s_{\min}}}{\alpha_{1s} \ln y_s + \alpha_{0s}} \omega_s + \sum_{h\in H} \tilde{\tilde{n}}_h^{(II)} \omega_h - \sum_{j\in J} \frac{c_{j_{\min}}}{\alpha_{1j} \ln y_s + \alpha_{0j}} \omega_j \to \min, \tag{4.57}$$

где y_s и y_j – урожайность товарных и кормовых сельскохозяйственных культур вида s и j.

При решении задачи (4.46)-(4.53), (4.57) интервальные параметры (урожайность сельскохозяйственных культур, площади угодий) моделировались с помощью метода Монте-Карло в пределах верхних и нижних оценок, а затраты определялась по формуле (4.54). Предельные значения интервальных оценок связаны с особенностями техногенных событий, уменьшающих возможности производства сельскохозяйственной продукции за счет сокращения возделываемых площадей и биопродуктивности культур. Очевидно, что от масштаба техногенного события зависит значение ущерба. По аналогии с влиянием природных рассматривается воздействие на производственно-экономические параметры техногенных событий. Согласно анализу влияния на сельскохозяйственные угодья выбросов вредных химических веществ и их оседания уменьшение возделываемых площадей и урожайности сельскохозяйственных культур может достигать 40-50%.

Задача оптимизации сочетания отраслей в виде (4.46)-(4.53), (4.57) решена для ООО «Талинка» Тайшетского района Иркутской области. Получено множество оптимальных решений, из которых выбраны минимальное и максимальное значения целевой функции f_{min}^{min} и f_{max}^{max}, составившие 1,246 и 6,718 млн. руб., и им соответствующие оптимальные планы. При этом расчетные страховые выплаты соответствуют 2,245 млн. руб. для ситуации с наибольшим ущербом с учетом методики определения страховой стоимости урожая и полученных оптимальных планов.

В случае использования гиперболической зависимости (4.54) теснота связи между себестоимостью и урожайностью сельскохозяйственных культур характеризуется меньшим значением коэффициента детерминации, чем для ситуации (4.55). При этом во втором случае колебание полученных оптимальных решений описывается коэффициентами вариации, колеблющемся в пределах 0,38-0,51.

Очевидно, что число получаемых решений m в результате реализации модели влияет на рассеяние искомых значений и целевой функции. Поэтому при моделировании использовалось следующее число экспериментов m=30, 50, 100 с многократной повторяемостью. Устойчивость решения достигнута при m=50.

При решении задачи (4.46)-(4.53), (4.56) величины целевой функции отличаются от первой задачи: наименьшее значение ущерба составило 1,256, а наибольшее – 6,631 млн. руб. При этом коэффициенты вариации полученных планов производства колеблются от 0,47 до 0,50. Наибольшее значение C_v имеет место для товарных зерновых. Полученные площади под товарными и кормовыми зерновыми культурами колеблются в пределах: 52-262 и 2-11 га.

Исходя из реализации первой и второй моделей, можно сделать вывод, что результаты моделирования второй ситуации являются более устойчивыми. Это связано с тем, что зависимость (4.55) обладает большей точностью по сравнению с выражением (4.54). Другими словами, для оптимизации производства сельскохозяйственной продукции в условиях влияния техногенных загрязнений рекомендуется использование задачи (4.46)-(4.53), (4.57). Первая модель может быть применена для упрощенных расчетов.

Модель с целевой функцией в виде зависимости себестоимости от сокращения сельскохозяйственных угодий

Помимо приведенных задач рассмотрена вторая ситуация – влияние на себестоимость продукции деградации посевов в виде уменьшения площадей.

Алгоритм решения состоит из следующих операций: 1) определяются интервалы колебаний деградированных площадей зерновых и пастбищ и урожайности различных сельскохозяйственных культур; 2) с помощью метода Монте-Карло моделируются перечисленные параметры; 3) рассчитываются дополнительные затраты в зависимости от смоделированных деградированных площадей; 4) для полученных параметров решается задача математического программирования; 5) предыдущие операции повторяются многократно (m раз); 6) из множества оптимальных планов выбираются экстремальные значения f_{min}^{min} и f_{max}^{max}.

При решении задачи предполагается, что дополнительные затраты, увеличивающие себестоимость производства продукции в условиях техногенных событий, линейно зависят от деградированных площадей:

$$\tilde{c}^{(II)} = k_1 \omega_s^d + c_{min}, \tag{4.58}$$

где ω_s^d - деградированные площади сельскохозяйственных культур, k_1 – коэффициент скорости роста, изменяющийся в пределах $0 < k_1 < 1$. Другими словами, скорость изменения функции (4.58) ниже скорости изменения аргумента. В работе $k_1 = 0,8$.

На величину потерянных площадей влияет удаленность от урбанизированных территорий. Потери могут соответствовать 10-50% от общей площади сельскохозяйственных угодий.

Результатом решения задачи (4.45)-(4.53), (4.58) являются различные значения целевой функции, размеры площадей и объемы производства, которые им соответствуют в зависимости от влияния техногенных возмущений.

Согласно полученным значениям определялось m оптимальных планов задачи. Эксперименты показали, что при m=50 экстремальные значения критерия оптимальности по сравнению с аналогами, соответствующими большим числам экспериментов, отличаются в пределах 1%.

Реализация модели для ООО «Талинка» позволила получить минимум и максимум целевой функции – 0,740 и 3,770 млн. руб., которым соответствуют оптимальные планы, приведенные в приложении Е. При этом расчетные страховые выплаты в ситуации с наибольшим ущербом составили 2,2480 млн. руб.

Модель с критерием оптимальности в виде зависимости себестоимости от изменчивости урожайности и сельскохозяйственных угодий

Кроме предложенных моделей, в которых себестоимость зависела от биопродуктивности (4.54)-(4.55) и площадей сельскохозяйственных угодий (4.58), в работе рассмотрим третья ситуация, когда дополнительные затраты линейно зависит от этих двух параметров:

$$\tilde{c}^{(II)} = k_1 \omega_s^d + \rho_s y_s + c_{\min}, \tag{4.59}$$

где k_1, ρ_s – коэффициенты уменьшения площади и урожайности в результате деградации; k_1=0,8, ρ_s=1.

Для этого случая осуществлялась следующая последовательность операций по определению искомых неизвестных: 1) методом статистических испытаний смоделированы площади сельскохозяйственных культур и урожайности; 2) с помощью формулы (4.59) рассчитывается себестоимость в зависимости от смоделированных значений угодий и урожайностей сельскохозяйственных культур; 3) с учетом полученных параметров решается задача математического программирования; 4) предыдущие операции повторяются m раз; 5) из множеств оптимальных планов выбираются экстремальные значения f_{min}^{min} и f_{max}^{max} и соответствующие им решения.

В результате получены минимальные и максимальные значения целевой функции, соответствующие 0,206 и 3,129 млн. руб. В последнем случае расчетные страховые выплаты соответствуют 1,997 млн. руб. При этом для моделирования решений достаточен объем рассматриваемых ситуаций m=50. Некоторые полученные оптимальные планы, приведены в приложении Ж.

Модель с независимыми интервальными параметрами

К сожалению, не всегда удается определить зависимость себестоимости от урожайности и деградированных площадей. В большинстве случаев параметры модели в целевой функции и ограничениях являются независимыми. Поэтому с помощью метода Монте-Карло определялись значения каждого интервального параметра, которые затем подставлялись в задачу математического программирования для получения оптимальных решений. Такой подход адекватен реальным ситуациям, поскольку параметры модели в действительности изменяются непредсказуемо и не всегда связаны между собой.

Таким образом, для четвертой задачи с интервальными параметрами, не зависящими друг от друга, получены следующие результаты по данным предприятия ООО «Талинка»: минимальное значение критерия оптимальности равно 0,303, а максимальное – 3,045 млн. руб. При этом согласно методике оптимизации производства сельскохозяйственной продукции страховые возмещения в ситуации с наибольшим значением ущерба составят 1,762 млн. руб. Эти решения определены при m=50.

В работе рассмотрены модели оптимизации производства сочетания отраслей с интервальными параметрами, учитывающими влияние техногенных событий на деградацию сельскохозяйственных площадей, уменьшение валовой продукции и увеличение себестоимости.

Сравнение результатов моделирования с зависимыми и независимыми параметрами показывает, что в первом случае наиболее устойчивое решение получено, если себестоимость связана с урожайностью зависимостью (4.55). Большое расхождение между экстремумами целевой функции имеет место для зависимости (4.59), когда на ущербы влияют как сокращение сельскохозяйственных угодий в результате деградации земель, так и уменьшение урожайности. Наиболее распространенной ситуацией является непредсказуемость колебания интервальных параметров, что приводит к увеличению затрат более чем на 30%.

Использование той или иной предложенной модели соответствует свойствам параметров и связям между ними.

Полученные диапазоны решений в приведенных моделях позволяют выделить варианты для улучшения управления сельскохозяйственным предприятием за счет оценки природных рисков и сумм страховых возмещений.

Литература

1. Абасов, Н.В. Исследование наводнений и максимального стока Восточной Сибири: генетический и статистический анализ, методы прогнозирования / Т.В. Бережных, Н.В. Кичигина, Л.М. Корытный, // Труды Восточно-Сибирского отделения Академии проблем водохозяйственных наук «Пути решения водных проблем Прибайкалья и Забайкалья».- Иркутск: ИСЭМ СО РАН, 2002. – С. 18-28.
2. Асалханов, П.Г. Моделирование оптимальных сроков посевов зерновых культур на основе многофакторного анализа / П.Г. Асалханов, Я.М. Иваньо, Н.И. Федурина // Природа и сельскохозяйственная деятельность человека: материалы международной научно-практической конференции, Иркутск 23-27 мая 2011 г. – Иркутск: Изд-во ИрГСХА, 2011. – Ч.2. – С. 152-157.
3. Асалханов, П.Г. О некоторых алгоритмах прогнозирования дат технологических операций возделывания зерновых культур / П.Г. Асалханов, Я.М. Иваньо // Научно-практический журнал «Вестник ИрГСХА». – 2011. - Вып.47. – С. 133-141.
4. Астафьева, М.Н. Моделирование пространственно-временной изменчивости урожайности сельскохозяйственных культур для оптимизации размещения посевов / М.Н. Астафьева, Я.М. Иваньо // Труды XVII Байкальской Всероссийской конференции «Информационные и математические технологии в науке и управлении». – Ч. I. – Иркутск: ИСЭМ СО РАН, 2012. - С. 238-244.
5. Белякова, А.Ю. Вероятностные модели экстремальных гидрологических явлений в задачах оптимизации сельскохозяйственного производства / А.Ю. Белякова, Я.М. Иваньо. – Иркутск: Изд-во ИрГСХА, 2009. – 155 с.
6. Белякова, А.Ю. Оценка редких гидрологических явлений в задаче определения ущербов аграрному производству / А.Ю. Белякова, Я.М. Иваньо, С.А. Петрова // Научно-практический журнал «Вестник КрасГАУ». – Красноярск: КрасГАУ, 2014. – Вып. 60. – 2014. – С. 80-86.
7. Белякова, А.Ю. Тенденции изменчивости природных событий юга Восточной Сибири / А.Ю. Белякова, Е.В. Вашукевич, Я.М. Иваньо, С.А. Петрова // Научный журнал «Вестник ИрГТУ». – Иркутск: ИрГТУ, 2014. – №10. – 2014. – С. 80-85.
8. Бутырин, М.В. Оценка загрязнения почвенного покрова тяжелыми металлами и мышьяком МО г. Свирск Иркутской области /Ш.К. Хуснидинов, Т.Н. Сосницкая, М.В. Бутырин, Р.В. Замащиков //Вестник БГСХА. – Улан-Удэ. – 2014. – №1(34) – С. 45-50.
9. Вашукевич, Е.В. Имитационное моделирование в задачах оценки параметров аграрного производства / Е.В. Вашукевич, В.Р. Елохин,

Я.М. Иваньо // Тр. XV Байкальской международной школы-семинара «Методы оптимизации и их приложения», посвященной памяти профессора В.П. Булатова. – Иркутск: ИДСТУ СО РАН, 2011. – С.70-76.

10. Вашукевич, Е.В. Математические модели аграрного производства с вероятностными характеристиками засух и гидрологических событий / Е.В. Вашукевич, Я.М. Иваньо. – Иркутск: Изд-во ИрГСХА, 2012. – 150 с.

11. Иваньо, Я.М. и др. Статистика с применением Excel / Я.М. Иваньо, А.Ф. Зверев, Т.Д. Ким, Л.М. Кузнецова / под ред. Я.М. Иваньо, А.Ф. Зверева // Учеб. пособие / Иркутск: ИрГСХА, 2006.-138 с.

12. Иваньо, Я.М. Моделирование природных событий для управления региональными народно-хозяйственными объектами /Я.М. Иваньо, Н.В. Старкова – Иркутск: Изд-во ИрГСХА, 2011. – 158 с.

13. Иваньо, Я.М. О двух алгоритмах оптимизации производства растениеводческой продукции с учетом оценок редких природных событий / С.А. Петрова, Я.М. Иваньо // Научно-практический и информационно-аналитический журнал «Экологический вестник».– Минск: МГЭУ им. А.Д. Сахарова, 2013. - №2 (24). – С. 91-97.

14. Иваньо, Я.М. О модели оптимизации производства продовольственной продукции с учетом сочетания природного события и техногенных последствий / Я.М. Иваньо, С.А. Петрова // Научный журнал «Вестник ИрГТУ». – Иркутск: ИрГТУ, 2014. – № 9. – 2014. – С. 29-33.

15. Иваньо, Я.М. О модели оптимизации производства сельскохозяйственной продукции со случайными параметрами с учетом редких гидрологических событий / С.А. Петрова, Я.М. Иваньо // Научно-практический журнал «Вестник ИрГСХА». – Иркутск: ИрГСХА, 2013. – Вып. 55. – 2013. – С. 147-154.

16. Иваньо, Я.М. О некоторых задачах оптимизации производства сельскохозяйственной продукции в условиях проявления редких гидрологических событий / Я.М. Иваньо, С.А. Петрова // Труды XVIII Байкальской Всероссийской конференции «Информационные и математические технологии в науке и управлении». – Иркутск: ИСЭМ СО РАН, 2013. – Т.2. Ч.2. – С. 212-219.

17. Иваньо, Я.М. Оптимизационные модели аграрного производства в решении задач оценки природных и техногенных рисков \ Я.М. Иваньо, С.А. Петрова Монография. – Иркутск: Изд-во Иркутского ГАУ, 2015. – 180 с.

18. Иваньо, Я.М. Оптимизационные модели планирования производства стабильных сельскохозяйственных предприятий / М.Н. Барсукова, Я.М. Иваньо. – Иркутск: Изд-во ИрГСХА, 2011. – 160 с.

19. Иваньо, Я.М. Природные события, техногенные возмущения и оптимизация производственных процессов / Я.М. Иваньо, Н.В. Старкова // Міжнародна науково-практична конференція «Карпатська конференція з проблем охорони довкілля» Мукачево-Ужгород, Україна, 15-18 травня 2011 р. – Мукачево-Ужгород, 2011. – С. 179-180.

20. Иваньо, Я.М. Программный комплекс моделирования природных и техногенных рисков / Я.М. Иваньо, С.А. Петрова // Известия ИГЭА. - Иркутск: ИПО БГУЭП. - 2015. - Т. 25, № 3. - С. 533-541.

21. Иваньо, Я.М. Редкие природные и техногенные явления и их влияние на производство / С.А. Петрова, Я.М. Иваньо // Труды XVI Байкальской Всероссийской конференции «Информационные и математические технологии в науке и управлении». – Иркутск: ИСЭМ СО РАН, 2011. – Ч.1. – С. 238-244.

22. Иваньо, Я.М. Решение задач управления аграрным производством в условиях неполной информации. Монография / Я.М. Иваньо, В.Р. Елохин и др. / Под редакцией Я.М. Иваньо. - Иркутск: Изд-во ИрГСХА, 2012. - 200 с.

23. Никитин, А.В. Экономический механизм страхования и преодоления рисков в сельском хозяйстве России при вступлении в ВТО /А.В. Никитин, А.В. Федоренко. - М.: ФГНУ «Росинформагротех», 2006. – 220 с.

24. Петрова, С.А. Об одной модели производства сельскохозяйственной продукции в условиях техногенных загрязнений и проявления природных событий / С.А. Петрова // Научные исследования и разработки к внедрению в АПК: Материалы международной научно-практической конференции молодых ученых (28-29 апреля 2014 г.) – Иркутск: ИрГСХА, 2014. – С. 56-61.

25. Петрова, С.А. Природные и техногенные события на территории Иркутской области / С.А. Петрова // Научные достижения производству: Материалы научно-практической конференции молодых ученых с международным участием. – Иркутск: Изд-во ИрГСХА, 2011. – С. 280-285.

26. Петрова, С.А. Статистический анализ редких природных событий на территории Иркутской области / С.А. Петрова // Научные исследования и разработки к внедрению в АПК: Материалы международной научно-практической конференции молодых ученых (19-20 апреля 2012 г.) – Иркутск: ИрГСХА, 2012. – С. 444-448.

27. Приказ Минсельхоза России от 14 марта 2013 г. № 133 «Об утверждении методик определения страховой стоимости и размера утраты (гибели) урожая сельскохозяйственной культуры и посадок многолетних насаждений, утраты (гибели) сельскохозяйственных животных».

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение А

Таблица А.1 – Варианты контрольных заданий для задачи 1 главы 2
Урожайность, трудоемкость и цена реализации продукции

Показатели / Варианты	Урожайность, ц/га				Трудоемкость (ч-дней на 1ц)			
	Пшеница	Ячмень	Овес	Рожь озимая	Пшеница	Ячмень	Овес	Рожь озимая
1	20,6	25,8	22,1	17,5	0,1	0,1	0,2	0,2
2	28,6	35,8	30,7	24,2	0,1	0,1	0,2	0,2
3	28,9	36,1	31,0	24,5	0,2	0,2	0,3	0,3
4	13,8	17,2	14,8	11,7	0,2	0,2	0,4	0,4
5	22,2	27,7	23,8	18,8	0,1	0,1	0,2	0,2
6	24,9	31,1	26,7	21,1	0,2	0,2	0,2	0,2
7	13,4	16,8	14,4	11,4	0,1	0,1	0,2	0,2
8	13,6	17,1	14,6	11,6	0,1	0,1	0,2	0,2
9	14,0	17,6	15,1	11,9	0,2	0,2	0,3	0,3
10	11,3	14,1	12,1	9,6	0,2	0,2	0,3	0,3
11	18,3	22,9	19,6	15,5	0,2	0,2	0,2	0,2
12	20,0	25,0	21,4	16,9	0,3	0,3	0,4	0,4
13	24,6	30,7	26,4	20,8	0,2	0,2	0,3	0,3
14	17,6	22,1	18,9	15,0	0,2	0,2	0,3	0,3
15	14,0	17,5	15,0	11,9	0,1	0,1	0,2	0,2
Показатели Варианты	Себестоимость (руб/ц)				Цена реализации (руб/ц)			
	Пшеница	Ячмень	Овес	Рожь озимая	Пшеница	Ячмень	Овес	Рожь озимая
1	265,0	300,0	270,0	320,0	500,0	430,0	410,0	440,0
2	261,8	296,3	266,7	316,1	614,6	528,6	504,0	540,9
3	194,5	220,2	198,2	234,9	356,8	306,9	292,6	314,0
4	294,9	333,8	300,5	356,1	316,9	272,5	259,8	278,8
5	253,3	286,8	258,1	305,9	669,0	575,3	548,6	588,7
6	335,2	379,5	341,5	404,8	626,6	538,9	513,8	551,4
7	361,3	409,0	368,1	436,3	470,5	404,6	385,8	414,0
8	394,7	446,8	402,1	476,6	601,5	517,3	493,3	529,4
9	320,5	362,9	326,6	387,1	508,1	437,0	416,7	447,2
10	340,7	385,7	347,1	411,4	438,2	376,8	359,3	385,6
11	254,9	288,6	259,8	307,9	651,6	560,4	534,3	573,4
12	296,6	335,8	302,2	358,1	385,2	331,3	315,9	339,0
13	346,7	392,5	353,2	418,7	310,9	267,4	255,0	273,6
14	175,7	199,0	179,1	212,2	385,9	331,9	316,5	339,6
15	202,6	229,3	206,4	244,6	740,5	636,9	607,2	651,7

Таблица А.2 – Варианты контрольных заданий для задачи 2 главы 2
Экономические показатели развития отраслей в расчете на единицу их измерения

Показатели Варианты	Расход пашни в расчете на 1 га посева или голову скота, га				Затраты труда в расчете на 1 га посева или голову скота, га , чел.-дн.			
	Зерновые	Картофель	Многол. травы на сено	Коровы	Зерновые	Картофель	Многол. травы на сено	Коровы
1	1	1	1	-	10	25	5	30
2	1	1	1	-	7	30	4	36
3	1	1	1	-	15	19	7	22
4	1	1	1	-	11	36	6	44
5	1	1	1	-	14	28	7	34
6	1	1	1	-	6	35	3	42
7	1	1	1	-	5	15	3	18
8	1	1	1	-	6	14	3	16
9	1	1	1	-	13	16	6	19
10	1	1	1	-	14	32	7	39
11	1	1	1	-	7	35	3	42
12	1	1	1	-	8	17	4	21
13	1	1	1	-	5	21	3	25
14	1	1	1	-	7	13	3	16
15	1	1	1	-	15	16	7	20
Показатели Варианты	Выход кормов с 1 га, ц к. ед.				Стоимость товарной продукции в расчете на 1 га посева или голову скота, руб.			
	Зерновые	Картофель	Многол. травы на сено	Коровы	Зерновые	Картофель	Многол. травы на сено	Коровы
1	25	10	30	-	200	1200		1000
2	17	12	35	-	132	795		662
3	36	7	20	-	287	1725		1437
4	19	14	43	-	151	908		756
5	23	8	23	-	185	1108		923
6	34	9	28	-	270	1618		1349
7	20	13	40	-	160	958		798
8	25	8	24	-	202	1213		1010
9	18	10	30	-	143	857		714
10	21	7	21	-	165	988		823
11	20	8	25	-	163	980		817
12	33	8	24	-	264	1584		1320
13	32	13	40	-	252	1514		1261
14	36	13	38	-	292	1751		1459
15	21	15	44	-	170	1020		850

Таблица А.3 – Варианты контрольных заданий для задачи 3 главы 2
Содержание питательных веществ и себестоимость единицы корма

Показатели Варианты	Содержание корм. ед., кг			Содержание протеина, кг			Себестоимость, р.			Требуется в сутки не менее	
	кон-центр.	гру-бые	си-лос-ные	кон-центр.	гру-бые	силос-лос-ные	кон-центр.	гру-бые	си-лос-ные	Корм. ед., кг	Пер. про-теина, кг
1	100,0	20,0	30,0	10,0	4,0	1,0	8,0	2,0	1,0	14,0	2,0
2	62,4	12,5	18,7	6,2	2,5	0,6	5,0	1,2	0,6	8,7	1,2
3	114,5	22,9	34,4	11,5	4,6	1,1	9,2	2,3	1,1	16,0	2,3
4	138,5	27,7	41,6	13,9	5,5	1,4	11,1	2,8	1,4	19,4	2,8
5	81,7	16,3	24,5	8,2	3,3	0,8	6,5	1,6	0,8	11,4	1,6
6	55,8	11,2	16,8	5,6	2,2	0,6	4,5	1,1	0,6	7,8	1,1
7	53,4	10,7	16,0	5,3	2,1	0,5	4,3	1,1	0,5	7,5	1,1
8	69,4	13,9	20,8	6,9	2,8	0,7	5,6	1,4	0,7	9,7	1,4
9	135,6	27,1	40,7	13,6	5,4	1,4	10,8	2,7	1,4	19,0	2,7
10	51,2	10,2	15,4	5,1	2,0	0,5	4,1	1,0	0,5	7,2	1,0
11	93,8	18,8	28,2	9,4	3,8	0,9	7,5	1,9	0,9	13,1	1,9
12	71,7	14,3	21,5	7,2	2,9	0,7	5,7	1,4	0,7	10,0	1,4
13	54,5	10,9	16,3	5,4	2,2	0,5	4,4	1,1	0,5	7,6	1,1
14	124,5	24,9	37,3	12,4	5,0	1,2	10,0	2,5	1,2	17,4	2,5
15	81,4	16,3	24,4	8,1	3,3	0,8	6,5	1,6	0,8	11,4	1,6

Таблица А.4 – Допустимые вариации отдельных групп и видов кормов в рационах кормления скота, % питательности

Группы живот-ных	Концентраты	Грубые корма	Силос и сенаж	Корнеклубне-плоды	Зеленые корма
Коровы	16-23	16-22	24-29	2-8	27-30

Таблица А.5 - Стоимость проведения тракторных работ, руб.

	Марка трактора							
	К-700	Т-75	МТЗ	ДТ-28	К-700	Т-75	МТЗ	ДТ-28
Вид работ Варианты	Пахота				Боронование			
1	4	3,4	4,7	6,3	4,5	3,9	4,2	5,7
2	4,0	3,4	5,8	6,3	4,5	3,9	4,2	5,7
3	5,1	4,3	7,3	8,0	5,7	5,0	5,4	7,3
4	2,8	2,4	4,0	4,4	3,1	2,7	2,9	4,0
5	5,8	4,9	8,3	9,2	6,5	5,7	6,1	8,3
6	4,1	3,4	5,8	6,4	4,6	4,0	4,3	5,8
7	4,3	3,7	6,2	6,8	4,8	4,2	4,5	6,1
8	2,2	1,9	3,2	3,5	2,5	2,2	2,3	3,2
9	5,4	4,6	7,8	8,5	6,1	5,3	5,7	7,7
10	5,3	4,5	7,6	8,4	6,0	5,2	5,6	7,6
11	3,7	3,1	5,2	5,8	4,1	3,6	3,8	5,2

12	3,0	2,6	4,3	4,7	3,4	2,9	3,2	4,3
13	4,8	4,1	6,9	7,6	5,4	4,7	5,1	6,9
14	4,8	4,1	6,9	7,6	5,4	4,7	5,0	6,8
15	4,2	3,6	6,0	6,6	4,7	4,1	4,4	6,0
Вид работ Варианты	Посев зерновых				Посев пропашных			
	4,9	5,2	4,9	3,7	5,0	5,1	6,5	4,9
1	6,9	3,1	2,9	2,2	3,0	3,0	3,9	2,9
2	2,9	4,5	4,2	3,2	4,3	4,4	5,6	4,2
3	4,2	3,5	3,3	2,5	3,3	3,4	4,3	3,3
4	3,3	5,2	4,9	3,7	5,0	5,1	6,6	4,9
5	4,9	6,4	6,0	4,5	6,1	6,2	7,9	6,0
6	6,0	7,4	7,0	5,3	7,2	7,3	9,3	7,0
7	7,0	5,7	5,4	4,0	5,5	5,6	7,1	5,4
8	5,4	7,0	6,6	5,0	6,7	6,9	8,8	6,6
9	6,6	5,8	5,4	4,1	5,5	5,7	7,2	5,4
10	5,4	6,8	6,4	4,9	6,6	6,7	8,5	6,4
11	6,4	5,5	5,2	3,9	5,3	5,4	6,9	5,2
12	5,2	5,6	5,3	4,0	5,4	5,5	7,0	5,3
13	5,3	2,7	2,6	1,9	2,6	2,7	3,4	2,6
14	2,6	4,3	4,0	3,0	4,1	4,2	5,3	4,0
15	4,0	5,3	5,0	3,8	5,1	5,2	6,6	5,0

Таблица А.6 – Варианты контрольных заданий для задачи 5 главы 2

№ п/п	Вариант	Диапазон изменения параметра
1.		$\rho_1 \in [14200; 22300]$
2.		$\rho_1 \in [16325; 18200]$
3.		$\rho_1 \in [14200; 17000]$
4.		$\rho_1 \in [13560; 18970]$
5.		$\rho_1 \in [14635; 21978]$
6.		$\rho_1 \in [12234; 19140]$
7.		$\rho_1 \in [14850; 18753]$
8.		$\rho_1 \in [15560; 19870]$
9.		$\rho_1 \in [16300; 23463]$
10.		$\rho_1 \in [14577; 21320]$
11.		$\rho_1 \in [15638; 22988]$
12.		$\rho_1 \in [17320; 24560]$
13.		$\rho_1 \in [17430; 23400]$
14.		$\rho_1 \in [14333; 17600]$
15.		$\rho_1 \in [18905; 28200]$

Таблица А.7– Варианты контрольных заданий для задачи 6 главы 2

№ п/п	Вариант	Многолетние значения урожайности
1.		2000 г. – 10,1 ц/га; 2001 г. – 10,8 ц/га; 2002 г. – 11,2 ц/га; 2003 г. – 16,1 ц/га; 2004 г. – 15,8 ц/га; 2005 г. – 15,4 ц/га; 2006 г. – 14,6 ц/га; 2007 г. – 10,8 ц/га; 2008 г. – 15,8 ц/га; 2009 г. – 16 ц/га; 2010 г. – 9,8 ц/га; 2011 г. – 13,6 ц/га; 2012 г. – 12,3 ц/га;
2.		2000 г. – 13,2 ц/га; 2001 г. – 12,2 ц/га; 2002 г. – 3,8 ц/га; 2003 г. – 4,2 ц/га; 2004 г. – 2,9 ц/га; 2005 г. – 13,1 ц/га; 2006 г. – 10 ц/га; 2007 г. – 10,2 ц/га; 2008 г. – 9,5 ц/га; 2009 г. – 11,6 ц/га; 2010 г. – 10,9 ц/га; 2011 г. – 10,1 ц/га; 2012 г. – 9,6 ц/га;
3.		2000 г. – 10,5 ц/га; 2001 г. – 12 ц/га; 2002 г. – 9,4 ц/га; 2003 г. – 12,6 ц/га; 2004 г. – 12,5 ц/га; 2005 г. – 11,7 ц/га; 2006 г. – 13,5 ц/га; 2007 г. – 12,4 ц/га; 2008 г. – 13,9 ц/га; 2009 г. – 15,5 ц/га; 2010 г. – 8,3 ц/га; 2011 г. – 14,2 ц/га; 2012 г. – 13,1 ц/га;
4.		2000 г. – 11,7 ц/га; 2001 г. – 8,8 ц/га; 2002 г. – 8,3 ц/га; 2003 г. – 8,5 ц/га; 2004 г. – 9,4 ц/га; 2005 г. – 7,2 ц/га; 2006 г. – 5,5 ц/га; 2007 г. – 8,5 ц/га; 2008 г. – 7 ц/га;

		2009 г. – 6,5 ц/га; 2010 г. – 11,6 ц/га; 2011 г. – 8,9 ц/га; 2012 г. – 9 ц/га;
5.		2000 г. – 9,6 ц/га; 2001 г. – 18,5 ц/га; 2002 г. – 12,1 ц/га; 2003 г. – 12,3 ц/га; 2004 г. – 14 ц/га; 2005 г. – 13,4 ц/га; 2006 г. – 16,1 ц/га; 2007 г. – 10,8 ц/га; 2008 г. – 16,1 ц/га; 2009 г. – 10 ц/га; 2010 г. – 11,7 ц/га; 2011 г. – 11,5 ц/га; 2012 г. – 10,9 ц/га;
6.		2000 г. – 9,1 ц/га; 2001 г. – 14,2 ц/га; 2002 г. – 12,4 ц/га; 2003 г. – 5,9 ц/га; 2004 г. – 8,3 ц/га; 2005 г. – 16,2 ц/га; 2006 г. – 15,1 ц/га; 2007 г. – 13,5 ц/га; 2008 г. – 15,3 ц/га; 2009 г. – 16,1 ц/га; 2010 г. – 18,1 ц/га; 2011 г. – 17,7 ц/га; 2012 г. – 17,5 ц/га;
7.		2000 г. – 14,7 ц/га; 2001 г. – 15,3 ц/га; 2002 г. – 17,1 ц/га; 2003 г. – 16,6 ц/га; 2004 г. – 12,4 ц/га; 2005 г. – 13,7 ц/га; 2006 г. – 12,1 ц/га; 2007 г. – 17 ц/га; 2008 г. – 11,8 ц/га; 2009 г. – 11,6 ц/га; 2010 г. – 13,7 ц/га; 2011 г. – 17,8 ц/га; 2012 г. – 14,9 ц/га;
8.		2000 г. – 4,5 ц/га; 2001 г. – 3,8 ц/га; 2002 г. – 10,6 ц/га; 2003 г. – 6,8 ц/га; 2004 г. – 6,6 ц/га; 2005 г. – 5,4 ц/га; 2006 г. – 6,8 ц/га; 2007 г. – 9 ц/га; 2008 г. – 8,6 ц/га;

		2009 г. – 5,6 ц/га; 2010 г. – 6,7 ц/га; 2011 г. – 14,9 ц/га; 2012 г. – 7,1 ц/га;
9.		2000 г. – 10,4 ц/га; 2001 г. – 9,8 ц/га; 2002 г. – 10,6 ц/га; 2003 г. – 7,8 ц/га; 2004 г. – 6,6 ц/га; 2005 г. – 11,5 ц/га; 2006 г. – 6,8 ц/га; 2007 г. – 11,3 ц/га; 2008 г. – 7,1 ц/га; 2009 г. – 5,9 ц/га; 2010 г. – 6 ц/га; 2011 г. – 8,8 ц/га; 2012 г. – 7,7 ц/га;
10.		2000 г. – 9,3 ц/га; 2001 г. – 7,6 ц/га; 2002 г. – 12,7 ц/га; 2003 г. – 9,7 ц/га; 2004 г. – 11,2 ц/га; 2005 г. – 12,7 ц/га; 2006 г. – 10,2 ц/га; 2007 г. – 13 ц/га; 2008 г. – 11,6 ц/га; 2009 г. – 8,6 ц/га; 2010 г. – 13,5 ц/га; 2011 г. – 14 ц/га; 2012 г. – 12 ц/га;
11.		2000 г. – 13 ц/га; 2001 г. – 17,1 ц/га; 2002 г. – 13,9 ц/га; 2003 г. – 10,4 ц/га; 2004 г. – 12,8 ц/га; 2005 г. – 8 ц/га; 2006 г. – 15,5 ц/га; 2007 г. – 14,2 ц/га; 2008 г. – 13,4 ц/га; 2009 г. – 12,1 ц/га; 2010 г. – 14,9 ц/га; 2011 г. – 14,7 ц/га; 2012 г. – 16,8 ц/га;
12.		2000 г. – 7,9 ц/га; 2001 г. – 10,6 ц/га; 2002 г. – 14,5 ц/га; 2003 г. – 3,6 ц/га; 2004 г. – 10,8 ц/га; 2005 г. – 2,4 ц/га; 2006 г. – 4,1 ц/га; 2007 г. – 8,9 ц/га; 2008 г. – 7,8 ц/га;

		2009 г. – 10,3 ц/га; 2010 г. – 2 ц/га; 2011 г. – 7 ц/га; 2012 г. – 11,4 ц/га;
13.		2000 г. – 10,4 ц/га; 2001 г. – 13,6 ц/га; 2002 г. – 13,4 ц/га; 2003 г. – 6,9 ц/га; 2004 г. – 11,6 ц/га; 2005 г. – 8 ц/га; 2006 г. – 9,9 ц/га; 2007 г. – 9,6 ц/га; 2008 г. – 9,1 ц/га; 2009 г. – 14,4 ц/га; 2010 г. – 12,5 ц/га; 2011 г. – 11,9 ц/га; 2012 г. – 10,3 ц/га;
14.		2000 г. – 10,9 ц/га; 2001 г. – 19,2 ц/га; 2002 г. – 16,9 ц/га; 2003 г. – 14,9 ц/га; 2004 г. – 19,4 ц/га; 2005 г. – 20,2 ц/га; 2006 г. – 17 ц/га; 2007 г. – 20,2 ц/га; 2008 г. – 17,7 ц/га; 2009 г. – 17,9 ц/га; 2010 г. – 23,9 ц/га; 2011 г. – 17 ц/га; 2012 г. – 16,8 ц/га;
15.		2000 г. – 10,9 ц/га; 2001 г. – 16,3 ц/га; 2002 г. – 19,6 ц/га; 2003 г. – 16,3 ц/га; 2004 г. – 17 ц/га; 2005 г. – 7,5 ц/га; 2006 г. – 20,6 ц/га; 2007 г. – 16,5 ц/га; 2008 г. – 20,2 ц/га; 2009 г. – 18,8 ц/га; 2010 г. – 17,6 ц/га; 2011 г. – 25,7 ц/га; 2012 г. – 22,3 ц/га;

Приложение Б

Таблица Б.1 – Варианты контрольных заданий для задачи 1 главы 3

№ п/п	Вариант	Задание
1.		v_{2013} = 22 ц/га; ρ = 1,2 тыс. руб. за ц; x = 600 га
2.		v_{2013} = 22 ц/га; ρ = 0,9 тыс. руб. за ц; x = 900 га
3.		v_{2013} = 15 ц/га; ρ = 1,2 тыс. руб. за ц; x = 300 га
4.		v_{2013} = 28 ц/га; ρ = 1,2 тыс. руб. за ц; x = 700 га
5.		v_{2013} = 22 ц/га; ρ = 1,2 тыс. руб. за ц; x = 1500 га
6.		v_{2013} = 22 ц/га; ρ = 1,2 тыс. руб. за ц; x = 600 га
7.		v_{2013} = 22 ц/га; ρ = 1,1 тыс. руб. за ц; x = 2000 га
8.		v_{2013} = 17 ц/га; ρ = 1,2 тыс. руб. за ц; x = 2000 га
9.		v_{2013} = 20 ц/га; ρ = 1,2 тыс. руб. за ц; x = 1000 га
10.		v_{2013} = 21 ц/га; ρ = 1,3 тыс. руб. за ц; x = 7000 га
11.		v_{2013} = 25 ц/га; ρ = 1,1 тыс. руб. за ц; x = 500 га
12.		v_{2013} = 23 ц/га; ρ = 1,1 тыс. руб. за ц; x = 700 га
13.		v_{2013} = 23 ц/га; ρ = 1,2 тыс. руб. за ц; x = 400 га
14.		v_{2013} = 24 ц/га; ρ = 1,0 тыс. руб. за ц; x = 600 га
15.		v_{2013} = 19 ц/га; ρ = 1,2 тыс. руб. за ц; x = 800 га

Таблица Б.2 – Варианты контрольных заданий для задачи 2 главы 3

№ п/п	Вариант	Задание
1.		$x_{общ} = 1250$ га; $x_{загр} = 200$ га; c = 8 тыс. руб.
2.		$x_{общ} = 1500$ га; $x_{загр} = 200$ га; c = 8 тыс. руб.
3.		$x_{общ} = 1250$ га; $x_{загр} = 200$ га; c = 12 тыс. руб.
4.		$x_{общ} = 1200$ га; $x_{загр} = 800$ га; c = 8 тыс. руб.
5.		$x_{общ} = 1000$ га; $x_{загр} = 80$ га; c = 8 тыс. руб.
6.		$x_{общ} = 1250$ га; $x_{загр} = 100$ га; c = 11 тыс. руб.
7.		$x_{общ} = 1300$ га; $x_{загр} = 900$ га; c = 7 тыс. руб.
8.		$x_{общ} = 2250$ га; $x_{загр} = 1100$ га; c = 10 тыс. руб.
9.		$x_{общ} = 800$ га; $x_{загр} = 100$ га; c = 12 тыс. руб.
10.		$x_{общ} = 1350$ га; $x_{загр} = 600$ га; c = 8 тыс. руб.
11.		$x_{общ} = 1250$ га; $x_{загр} = 700$ га; c = 9,5 тыс. руб.
12.		$x_{общ} = 1100$ га; $x_{загр} = 300$ га; c = 16 тыс. руб.
13.		$x_{общ} = 1450$ га; $x_{загр} = 800$ га; c = 7,5 тыс. руб.
14.		$x_{общ} = 1600$ га; $x_{загр} = 1300$ га; c = 7 тыс. руб.
15.		$x_{общ} = 2500$ га; $x_{загр} = 100$ га; c = 9 тыс. руб.

Приложение А

Вопросы по дисциплине для подготовки магистрантов к экзамену

1. Понятие «модель», свойства моделей. Виды моделирования.
2. Понятие «экономико-математическая модель». Классификация экономико-математических моделей.
3. Этапы экономико-математического моделирования.
4. Математическая структура модели.
5. Понятие о моделировании производственных процессов.
6. Линейное программирование: основные понятия и формы записи задачи.
7. Двойственная задача линейного программирования.
8. Анализ оптимального решения (исследование устойчивости).
9. Транспортная задача линейного программирования
10. Специальные задачи линейного программирования и методы их решения.
11. Методы решения задач линейного программирования.
12. Методы решения задач целочисленного программирования.
13. Задачи многокритериальной оптимизации и методы их решения.
14. Моделирование процессов формирования оптимального ассортимента.
15. Моделирование процессов перевозок и назначения.
16. Распределительные модели.
17. Моделирование процессов смешивания.
18. Модели оптимального раскроя материала.
19. Имитационная модель и ее особенности.
20. Этапы имитационного эксперимента.
21. Основные принципы построения имитационной модели.
22. Понятие риска. Классификация рисков.
23. Система неопределенностей.
24. Процесс управления риском.
25. Методы оценки экономических рисков.
26. Принятие оптимальных решений в условиях неопределенности: матричные игры.
27. Критерии оптимальности в условиях полной неопределенности: критерий гарантированного результата.
28. Критерии оптимальности в условиях полной неопределенности: критерий оптимизма.
29. Критерии оптимальности в условиях полной неопределенности: критерий пессимизма.
30. Критерии оптимальности в условиях полной неопределенности: критерий минимаксного риска Сэвиджа.
31. Критерии оптимальности в условиях полной неопределенности: критерий обобщенного максимина Гурвица.

32. Сравнительная оценка вариантов решений в зависимости от критериев эффективности.

33. Оптимальность по Парето.

34. Вероятностная постановка принятия предпочтительных решений.

35. Оценка степени риска в условиях определенности.

36. Статистические методы принятия решений в условиях риска.

37. Сравнительная оценка вариантов решений: выбор оптимального решения с помощью статистических оценок.

38. Сравнительная оценка вариантов решений: нормальное распределение.

39. Сравнительная оценка вариантов решений: кривая рисков.

40. Сравнительная оценка вариантов решений: выбор оптимального решения с помощью доверительных интервалов.

Приложение Б

Глоссарий терминов

Аддитивность - свойство величин, состоящее в том, что значение величины, соответствующее целому объекту, равно сумме значений величин, соответствующих его частям при любом разбиении объекта на части. Характеристика системы аддитивна, если она равна сумме тех же характеристик для всех составляющих систему подсистем и элементов.

Адекватность модели - ее соответствие моделируемому объекту или процессу. При моделировании имеется в виду адекватность не вообще, а по тем свойствам модели, которые для исследования считаются существенными.

Аппроксимация - приближенное выражение сложной функции с помощью более простых, что часто значительно упрощает решение задачи.

Вариантные прогнозы - прогнозы, основанные на сопоставлении различных вариантов возможного развития экономики при разных предположениях относительно того, как будет развиваться техника, какие будут приниматься экономические меры и т. д.

Векторная оптимизация - решение задач математического программирования, в которых критерий оптимальности представляет собой вектор, компонентами которого являются в свою очередь различные несводимые друг к другу критерии оптимальности подсистем, входящих в данную систему, например критерии разных социальных групп в социально-экономическом планировании.

Верификация имитационной модели - проверка соответствия ее поведения предположениям экспериментатора.

Вероятностная модель - модель, которая в отличие от детерминированной модели содержит случайные элементы. Таким образом, при задании на входе модели некоторой совокупности значений, на ёе выходе могут получаться различающиеся между собой результаты в зависимости от действия случайного фактора.

Взаимозаменяемость ресурсов — возможность использования разных ресурсов для достижения оптимума. Именно этим обусловлена проблема выбора: там, где нет заменяемости, нет и выбора, и тогда фундаментальное понятие оптимальности теряет смысл.

Генетический прогноз («поисковый») — прогноз, показывающий, к каким состояниям придет прогнозируемый объект в заданное время при определенных начальных условиях.

Глобальное моделирование или моделирование глобального развития — область исследований, посвященная разработке моделей наиболее масштабных социальных, экономических и экологических процессов, охватывающих земной шар.

Градиентные методы решения задач математического программирования - методы, основанные на поиске экстремума (максимума или минимума) функции путем последовательного перехода к нему с помощью градиента этой функции.

Декомпозиционные методы решения оптимальных задач - основанные на рациональном расчленении сложной задачи и решении отдельных подзадач с последующим согласованием частых решений для получения общего оптимального решения.

Дескриптивная модель - модель, предназначенная для описания и объяснения наблюдаемых фактов или прогноза поведения объектов - в отличие от нормативных моделей, предназначенных для нахождения желательного состояния объекта (например, оптимального).

Детерминированная модель - аналитическое представление закономерности, операции и т. п., при которых для данной совокупности входных значений на выходе системы может быть получен единственный результат. Такая модель может отображать как вероятностную систему (тогда она является некоторым ее упрощением), так и детерминированную систему.

Детерминированная система - такая система, выходы которой (результаты действия, конечные состояния и т.п.) однозначно определяются оказанными на нее управляющими воздействиями.

Динамическая система - всякая система, которая изменяется во времени (в отличие от статической системы). Математически это принято выражать через переменные (координаты), изменяющиеся во времени. Процесс изменения характеризуется траекторией (т. е. наборами координат, каждая из которых является функцией времени).

Динамические модели межотраслевого баланса - частный случай динамических моделей экономики, основаны на принципе межотраслевого баланса, в который дополнительно вводятся уравнения, характеризующие изменения отраслевых связей во времени.

Итеративные (итерационные) методы решения задач - заключаются в том, что вычислительный процесс начинают с некоторого пробного (произвольного) допустимого решения, а затем применяют алгоритм, обеспечивающий последовательное улучшение этого решения.

Итерация - повторное применение математической операции (с измененными данными) при решении вычислительных задач для постепенною приближения к нужному результату. Итеративные расчеты на ЭВМ характерны для решения экономических (особенно оптимизационных и балансовых) задач. Чем меньше требуется пересчетов, тем быстрее сходится алгоритм.

Коэффициенты полных материальных затрат в межотраслевом балансе - средние затраты i-го продукта на производство конечного продукта j по всей цепи сопряженных производств. Таким образом, они складываются из прямых затрат каждой отрасли на данный продукт и косвенных затрат.

Коэффициенты прямых затрат (технологические **коэффициенты)** в межотраслевом балансе - средние величины непосредственных затрат продукции одной отрасли (в качестве средств производства) на выпуск единицы продукции другой отрасли. Они могут быть выражены в натуральной форме (кВт/ч и т. д.) или стоимостной (руб.).

Коэффициенты прямых затрат (технологические коэффициенты) в межотраслевом балансе - средние величины непосредственных затрат продукции одной отрасли (в качестве средств производства) на выпуск единицы продукции другой отрасли. Они могут быть выражены в натуральной форме (кВт/ч и т. д.) или стоимостной (руб.).

Критерий оптимальности - показатель, выражающий меру экономического эффекта принимаемого хозяйственного решения для сравнительной оценки возможных решений (альтернатив) и выбора наилучшего из них (например, максимум прибыли, минимум трудовых затрат, кратчайшее время достижения цели и т. д.)

Математическое программирование (оптимальное программирование) - область математики, объединяющая различные математические методы и дисциплины: линейное программирование, нелинейное программирование, динамическое программирование, выпуклое программирование и др. Общая задача математического программирования состоит в нахождении оптимального (максимального или минимального) значения целевой функции, причем значения переменных должны принадлежать некоторой области допустимых значений.

Матричные модели - модели, построенные в виде таблиц (матриц). Они отображают соотношения между затратами на производство и его результатами, нормативы затрат, производственную и экономическую структуру хозяйства. Применяются в межотраслевом балансе, матричном плане предприятия и др.

Машинная имитация - экспериментальный метод изучения объекта с помощью электронных вычислительных машин, Процесс имитации заключается в следующем: сначала строится математическая модель изучаемого объекта (имитационная модель), затем эта модель преобразуется в программу работы ЭВМ.

Межотраслевой баланс (МОБ) - каркасная модель экономики, таблица, в которой показываются многообразные натуральные и стоимостные связи в народном хозяйстве. Анализ МОБ дает комплексную характеристику процесса формирования и использования совокупного общественного продукта в отраслевом разрезе.

Объективно обусловленные (оптимальные) оценки - одно из основных понятий линейного программирования. Это оценки продуктов, ресурсов, работ, вытекающие из условий решаемой оптимизационной задачи. Их называют также двойственными оценками, разрешающими множителями, множителями Лагранжа и целым рядом других терминов.

Ограничения модели - запись условий, в которых действительны расчеты, использующие эту модель. Обычно представляя собою систему уравнений и неравенств, они в совокупности определяют область допустимых решений (допустимое множество). Распространены линейные и нелинейные ограничения (на графике первые изображаются прямыми, вторые - кривыми линиями).

Определенность в системе - ситуация, когда имеется точная информация о возможных состояниях системы в случае принятия тех или иных решений.

Оптимальное планирование - комплекс методов, позволяющих выбрать из многих возможных (альтернативных) вариантов плана или программы один оптимальный вариант, т. е. наилучший с точки зрения заданного критерия оптимальности и определенных ограничений.

Оптимальное программирование - применение в экономике методов математического программирования.

Оптимальное управление - основное понятие математической теории оптимальных процессов (принадлежащей разделу математики под тем же названием: оптимальное управление); означает выбор таких управляющих параметров, которые обеспечивали бы наилучшее, с точки зрения заданного критерия, протекание процесса, или, иначе, наилучшее поведение системы, ее развитие к цели по оптимальной траектории.

Оптимизационная задача - экономико-математическая задача, цель которой состоит в нахождении наилучшего (с точки зрения какого-то критерия) распределения наличных ресурсов. Решается с помощью оптимизационной модели методами математического программирования.

Оптимизация - 1) процесс нахождения экстремума функции, т. е. выбор наилучшего варианта из множества возможных; 2) процесс приведения системы в наилучшее (оптимальное) состояние. Очередь — в теории массового обслуживания — последовательность требований или заявок, которые, заставая систему обслуживания занятой, не выбывают, а ожидают ее освобождения (затем они обслуживаются в том или ином порядке). Очередью можно назвать также и совокупность ожидающих (простаивающих) каналов или средств обслуживания.

Пассивный (безусловный) статистический прогноз - прогноз развития, основанный на изучении статистических данных за прошлый период и переносе выявленных закономерностей на будущее. При этом внешние факторы, воздействующие на систему, принимаются неизменными и считается, что ее развитие основывается только на собственных, внутренних тенденциях.

Предельные и приростные величины в экономике. Предельная величина характеризует не состояние (как суммарная или средняя величины), а процесс, изменение. Поскольку в экономике большинство процессов (например, рост производства или изменение его эффективности) являются функциями ряда аргументов (факторов), то предельные величины здесь обычно выступают как частные производные процесса по каждому из факторов.

Природные риски - это риски, возникновение которых не зависит от человеческой деятельности и не подлежит контролю; в основном это риски стихийных бедствий: землетрясения, ураганы, удар молнии, извержения вулкана и т.д.

Прогнозирование - система научных исследований качественного и количественного характера, направленных на выяснение тенденций развития народного хозяйства и поиск *оптимальных* путей достижения *целей* этого развития.

Прогнозирование спроса - исследование будущего (возможного) спроса на товары и услуги в целях лучшего обоснования соответствующих производственных планов. Прогнозирование подразделяется на краткосрочное (конъюнктурное), среднесрочное и долгосрочное.

Производственная функция - экономико-математическое уравнение, связывающее переменные величины затрат (ресурсов) с величинами продукции (выпуска). Математически производственные функции (ПФ) могут быть представлены в различных формах — от столь простых, как линейная зависимость результата производства от одного исследуемого фактора, до весьма сложных систем уравнений, включающих рекуррентные соотношения, которыми связываются состояния изучаемого объекта в разные периоды времени. Широко распространены мультипликативные формы ПФ.

Равновесие - состояние экономической системы, которое характеризуется равенством спроса и предложения всех ресурсов.

Регрессия - зависимость среднего значения какой-либо случайной величины от некоторой другой величины или нескольких величин. Распределение этих значений называется условным распределением y при данном x. Множественная регрессия в определенных условиях позволяет исследовать влияние причинных факторов.

Редкое природное явление - это наиболее сильное возмущение и, как следствие, причиняют наибольшие материальные ущербы

Редкое событие – это наибольшее или наименьшее значение события за исторический период.

Рекурсия - в общем смысле вычисление функции по определенному алгоритму. Примерами таких алгоритмов являются рекуррентные формулы, выводящие вычисление заданного члена последовательности (чаще всего числовой) из вычисления нескольких предыдущих ее членов.

Риск - возможное наступление неблагоприятной ситуации, являющейся причиной материального ущерба.

Смешанные риски – это риски, представляющие собой события природного характера, но связанные с хозяйственной деятельностью человека (например, оползень, связанный со строительными работами) или наоборот техногенные, которые стали следствием природного события (например, разлив цистерны нефти в результате весеннего половодья).

Событие - это значение параметра, превышающее некоторый критический уровень или находящееся ниже него.

Совмещение событий – ситуация проявления в один и тот же год двух или более событий различного происхождения, оказывающие ущерб хозяйственной деятельности человека.

Статистическое моделирование - способ исследования процессов поведения вероятностных систем в условиях, когда неизвестны внутренние взаимодействия в этих системах.

Стохастическая имитация - вид машинной имитации, отличающийся от детерминированной тем, что включает в модель в том или ином виде случайные возмущения, отражающие вероятностный характер моделируемой системы.

Техногенные риски – это риски, причины возникновения которых связаны с деятельностью человека (огневые риски, аварии, кражи, загрязнение окружающей среды т.д.)/

Устойчивость решения — обычно, говоря об устойчивости решения задачи, имеют в виду, что малые изменения каких-либо характеристик, например, начальных условий, ограничений или целевого функционала, не приводят к качественному изменению решения.

Целевая функция в экстремальных задачах - функция, минимум или максимум которой нужно найти. Это ключевое понятие оптимального программирования. Найдя экстремум целевой функции и, следовательно, определив значения управляемых переменных, которые k нему приводят, мы тем самым находим оптимальное решение задачи.

Приложение В

Тестовые задания

ВАРИАНТ 1

Тесты 1. Общие принципы построения моделей и их классификация

1.1. Метод моделирования – это:
1) совокупность подходов решения задачи;
2) оценка соответствия модели реальному объекту;
3) способ теоретического анализа и практических действий, направленных на разработку и исследование моделей;
4) определение динамики экономических процессов.

1.2. Какой этап экономико-математического моделирования является неправильным:
1) постановка проблемы и ее качественный анализ;
2) построение математической модели;
3) подготовка исходной информации;
4) проведение экспериментов.

1.3. К методам математической статистики относятся:
1) оптимальное программирование, методы ветвей и границ;
2) методы машинной имитации и деловые игры;
3) системный анализ, теория информации и теория управляющих систем;
4) выборочный метод, дисперсионный анализ, факторный анализ, регрессионный анализ.

1.4. Экономическая информация – это:
1) сведения об объектах, которые уменьшают имеющуюся о них степень неопределенности;
2) совокупность сведений о социально-экономических процессах, служащих для управления этими процессами и коллективами людей;
3) данные об экономических процессах;
4) сведения, уменьшающие социальную энтропию.

1.5. Репрезентативность информации – это:
1) степень близости получаемой информации к реальному состоянию объекта;
2) степень сохранения ценности информации для управления в момент ее использования;
3) правильность ее отбора и формирования в целях адекватного отражения свойств объекта;
4) способность реагировать на изменения исходных данных без нарушения необходимой точности.

Тесты 2. Линейное программирование

2.1. Задача условной оптимизации – это:

1) поиск экстремума функции при наложении ограничений на функции, характеризующие качественные свойства объекта системы;
2) поиск экстремума функции при отсутствии ограничений на качественные свойства объекта;
3) определение области допустимых решений;
4) выработка и осуществление воздействия на объект.

2.2. Общая задача линейного программирования состоит в определении максимального значения функции

$$F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \qquad (1)$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \quad (\mathrm{i} = \overline{1, \mathrm{k}}), \qquad (2)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \quad (\mathrm{i} = \overline{\mathrm{k}+1, \mathrm{m}}), \qquad (3)$$

$$x_j \ge 0 \quad (\mathrm{j} = \overline{1, \mathrm{l}}, \mathrm{l} \le \mathrm{n}) \quad . \qquad (4)$$

Стандартной задачей линейного программирования называется задача, которая состоит в том, чтобы:

1) максимизировать значение функции (1) при выполнении условий (2) и (4), где $k=m$ и $l=n$;
2) максимизировать значение функции (1) при выполнении условий (3) и (4), где $k=0$ и $l=n$;
3) определить план X^*, при котором функция (1) принимает максимальное значение;
4) максимизировать целевую функцию (1).

2.3. Косвенные методы безусловной оптимизации отыскания экстремума функции сводятся к:

1) итерационному переходу от больших (меньших) значений функции и меньшим (большим) до получения результата с заданной точностью;
2) деформированию многогранника;
3) решению системы нелинейных уравнений, являющихся следствием условий экстремума функции;
4) вращению системы координат в соответствии с изменением скорости убывания целевой функции.

2.4. В задаче линейного программирования при максимизации целевой функции исходной задачи целевая функция двойственной задачи задается на:

1) максимум;
2) минимум, при этом формируется новая целевая функция, включающая в себя переменные и свободные члены исходной задачи;
3) максимум, при этом формируется новая целевая функция, включающая в себя переменные и свободные члены исходной задачи;
4) минимум;

Тесты 3. Специальные задачи математического программирование

3.1. Какая задача не относится к специальным задачам математического программирования:

1) транспортная задача;
2) задача параметрического программирования;
3) задача о кратчайшем пути;
4) задача целочисленного программирования.

3.2. Для решения задачи целочисленного программирования используют:

1) алгоритм Гомори;
2) метод моментов;
3) принцип Беллмана;
4) метод Монте-Карло.

Тесты 4. Нелинейное программирование

4.1. Задача нелинейного программирования отличается от задачи линейного программирования:

1) нелинейностью целевой функции;
2) нелинейностью ограничений;
3) наличием нелинейных функций, входящих в систему ограничений и цели;
4) структурой.

4.2. Задача выпуклого программирования – это:

1) частная задача нелинейного программирования, когда целевая функция вогнутая (выпуклая) и область допустимых решений, определяемая ограничениями выпуклая;
2) частная задача нелинейного программирования, которая может быть решена;
3) разновидность задач нелинейного программирования;
4) разновидность задач линейного программирования;

Тесты 5. Задачи математического программирования в условиях неопределенности

5.1. К случайным параметрам относятся:

1) величины, подчиняющиеся закону распределения вероятностей;
2) величины с верхними и нижними оценками;
3) определенные величины;
4) величины с низкой точностью.

5.2. К задачам математического программирования с интервальными параметрами относятся:

1) задачи с нелинейными параметрами;
2) задачи со стохастическими параметрами;
3) задачи с параметрами в виде верхних и нижних оценок;
4) задачи с детерминированными параметрами.

Тесты 6. Многокритериальная задача математического программирования

6.1. Многокритериальная задача – это:

1) выбор оптимального решения по комплексу критериев;
2) образование обобщенной функции для свертывания критериев;
3) нормализация критериев;
4) упорядочение заданного множества критериев.

6.2. Метод выделения основного критерия при решении многокритериальной задачи – это:

1) исключение из рассмотрения заведомо плохих вариантов решения;
2) получение компромиссного решения для двух равнозначных критериев;
3) сведение многокритериальной задачи к однокритериальной с учетом весовых коэффициентов;
4) определение наиболее важного критерия и наложение ограничений на остальные критерии.

Тесты 7. Экспертное оценивание

7.1. Экспертная оценка это:

1) метод поиска и результат применения метода, полученный на основании использования персонального мнения эксперта или коллективного мнения группы экспертов;

2) мнение специалиста в некоторой области знаний;

3) нормативно-справочный параметр;

4) коэффициент, полученный по мнению специалистов.

7.2. Методы экспертных оценок это:

1) методы получения новых знаний;

2) методы прогнозирования производственных параметров;

3) методы анализа экономических задач;

4) методы организации работы со специалистами-экспертами и обработки мнений экспертов.

ВАРИАНТ 2

Тесты 1. Общие принципы построения моделей и их классификация

1.1.Система – это:

1) упорядоченные части, связанные в целое;
2) совокупность связанных объектов;
3) комплекс величин одной природы;
4) упорядоченные элементы.

1.2.Модель – это:

1) уравнения и математические соотношения;
2) образ реального объекта в материальной или идеальной форме, отражающий существенные свойства объекта и замещающий его в ходе исследования и управления;

3) образец реального объекта;
4) упрощение реальной ситуации.

1.3.Этап математического моделирования «построение математической модели» - это:
1) выражение экономической проблемы в виде математических зависимостей;
2) выявление общих свойств модели;
3) формулировка сущности проблемы с предпосылками и допущениями;
4) разработка алгоритмов численного решения задачи.

1.4. Детерминированная переменная – это:
1) величина, выражающая устойчивую тенденцию;
2) величина, имеющая случайный характер;
3) величина, зависимая от времени;
4) величина, которая точно измеряется и ею можно управлять.

1.5. Точность информации – это:
5) степень близости получаемой информации к реальному состоянию объекта;
6) степень сохранения ценности информации для управления в момент ее использования;
7) правильность ее отбора и формирования в целях адекватного отражения свойств объекта;
8) способность реагировать на изменения исходных данных без нарушения необходимой точности.

Тесты 2. Линейное программирование

2.1. Задача безусловной оптимизации – это:
1) поиск экстремума функции при наложении ограничений на функции, характеризующие качественные свойства объекта системы;
2) поиск экстремума функции при отсутствии ограничений на качественные свойства объекта;
3) определение области допустимых решений;
4) выработка и осуществление воздействия на объект.

2.2. Общая задача линейного программирования состоит в определении максимального значения функции

$$F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \qquad (1)$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \quad (\mathrm{i} = \overline{1, \mathrm{k}}), \qquad (2)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \quad (\mathrm{i} = \overline{\mathrm{k}+1, \mathrm{m}}), \qquad (3)$$

$$x_j \ge 0 \ \ (\mathrm{j} = \overline{1, \mathrm{l}}, \mathrm{l} \le \mathrm{n}) \ . \qquad (4)$$

Основной задачей линейного программирования называется задача, которая состоит в том, чтобы:

1) максимизировать значение функции (1) при выполнении условий (2) и (4), где $k=m$ и $l=n$;
2) максимизировать целевую функцию (1).
3) определить план X^*, при котором функция (1) принимает максимальное значение;
4) максимизировать значение функции (1) при выполнении условий (3) и (4), где $k=0$ и $l=n$.

2.3. Прямые методы безусловной оптимизации отыскания экстремума функции сводятся к:

1) итерационному переходу от больших (меньших) значений функции и меньшим (большим) до получения результата с заданной точностью;
2) деформированию многогранника;
3) решению системы нелинейных уравнений, являющихся следствием условий экстремума функции;
4) вращению системы координат в соответствии с изменением скорости убывания целевой функции.

2.4. При сопоставлении переменных исходной и двойственной задачи:

1) число ограничений в исходной задаче равно числу переменных в двойственной задаче;
2) число ограничений в исходной задаче меньше числа переменных в двойственной задаче;
3) число ограничений в исходной задаче больше числа переменных в двойственной задаче;
4) число ограничений в исходной задаче не равно числа переменных в двойственной задаче.

Тесты 3. Специальные задачи математического программирование

3.1. В какой задаче, относящейся к специальным задачам математического программирования, в качестве ограничений используются равенства:

1) транспортная задача;
2) задача параметрического программирования;
3) задача о кратчайшем пути;
4) задача целочисленного программирования.

3.2. В какой задаче специального математического программирования оптимальные решения зависят от параметров:

1) транспортной;
2) целочисленной;
3) задаче параметрического программирования;
4) дробно-линейного программирования.

Тесты 4. Задачи нелинейного программирования

4.1. Задача нелинейного программирования сводится к задаче линейного программирования, если:

1) целевая функция является линейной;
2) функции ограничений являются линейными;

3) функции цели и условий являются линейными;
4) целевая функция стремится к максимуму.

4.2. Градиентный метод решения задач выпуклого программирования – это:
1) итерационные переходы от точки к точке, не выходя за области допустимых решений, до определения результата;
2) итерационные переходы от точки к точке, которые могут принадлежать и не принадлежать области допустимых решений, до определения результата;
3) один из методов решения задач математического программирования;
4) последовательный переход от начальной точки к другим точкам до выявления приемлемого решения.

Тесты 5. Задачи математического программирования в условиях неопределенности

5.1. К интервальным параметрам относятся:
1) величины, подчиняющиеся закону распределения вероятностей;
2) величины с верхними и нижними оценками;
3) определенные величины;
4) величины с низкой точностью.

5.2. При решении задачи математического программирования в условиях неопределенности получают:
1) множество оптимальных решений в зависимости от неопределенных параметров;
2) одно оптимальное решение;
3) верхние и нижние оценки оптимальных решений;
4) некоторую функцию оптимальных решений.

Тесты 6. Многокритериальная задача математического программирования

6.1. Критерий оптимальности Парето – это:
1) выбор оптимального решения по комплексу критериев;
2) определение наиболее важного критерия из множества;
3) оптимизация, при которой улучшаются одни показатели при условии, чтобы другие не ухудшались;
4) условие нормализации критериев.

6.2. Метод процедурной свертки критериев – это:
1) исключение из рассмотрения заведомо плохих вариантов решения;
2) образование обобщенной функции, монотонно зависящей от критериев;
3) сведение многокритериальной задачи к однокритериальной с учетом весовых коэффициентов;
4) проведение ранжирование целевых функций с последующим их уменьшением на некоторую величину, назначаемую экспертным путем.

Тесты 7. Экспертное оценивание

7.1. Одним из методов коллективных экспертных оценок является:
1) мозговая атака;

2) статистический анализ;
3) выбор из множества мнений одного;
4) оптимизация мнений.

7.2. Эксперт это:
1) лицо, принимающее решение;
2) специалист по планированию;
3) прогнозист;
4) компетентное для выработки оценки лицо, имеющее специальный опыт в конкретной области и участвующее в исследовании в качестве источника получения информации.

ВАРИАНТ 3

Тесты 1. Общие принципы построения моделей и их классификация

1.1.Экономико-математические методы – это:
1) разделы теории вероятности и математической статистики, применяемые к экономическим процессам;
2) комплекс экономических и математических дисциплин, объединенных для изучения социально-экономических систем и процессов;
3) способы изучения производственных процессов;
4) принципы и подходы к построению моделей.

1.2.Адекватность модели – это:
1) изучение реального объекта через подобный ему;
2) получение новых знаний;
3) соответствие модели реальному объекту или процессу;
4) идеализация реального объекта или процесса.

1.3. Этап экономико-математического моделирования «постановка экономической проблемы и ее качественный анализ» - это:
1) выражение экономической проблемы в виде математических зависимостей;
2) выявление общих свойств модели;
3) формулировка сущности проблемы с предпосылками и допущениями;
4) разработка алгоритмов численного решения задачи.

1.4. По учету фактора времени модели подразделяют на:
1) статические и динамические;
2) аналитические и идентифицируемые;
3) стохастические и детерминистические;
4) линейного и нелинейного программирования.

1.5. Актуальность информации – это:
1) степень близости получаемой информации к реальному состоянию объекта;
2) степень сохранения ценности информации для управления в момент ее использования;
3) правильность ее отбора и формирования в целях адекватного отражения

свойств объекта;
4) способность реагировать на изменения исходных данных без нарушения необходимой точности.

Тесты 2. Линейное программирование

2.1. Математическое программирование – это:
1) раздел прикладной математики о процессах, связанных с удовлетворением массового спроса на обслуживание какого-либо вида объекта;
2) раздел теории вероятностей, который изучает системы с отказами и устанавливает связи между параметрами надежности системы;
3) раздел прикладной математики, разрабатывающей теорию и методы решения условных экстремальных задач;
4) раздел математического программирования, в котором решаются задачи отыскания экстремума линейной функции при линейных ограничениях.

2.2. Общая задача линейного программирования состоит в определении максимального значения функции

$$F=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \qquad (1)$$

при условиях:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \quad (\mathrm{i}=\overline{1,\mathrm{k}}), \qquad (2)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \quad (\mathrm{i}=\overline{\mathrm{k}+1,\mathrm{m}}), \qquad (3)$$

$$x_j \ge 0 \quad (\mathrm{j}=\overline{1,\mathrm{l}}, \mathrm{l} \le \mathrm{n}) \quad . \qquad (4)$$

Оптимальный план – это:
1) значения $X^*=(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$, при котором функция (1) достигает экстремума;
2) максимизированное значение функции (1) при выполнении условий (3) и (4), где $k=0$ и $l=n$;
3) максимизированное значение функции (1) при выполнении условий (2) и (4), где $k=m$ и $l=n$;
4) максимизировать целевую функцию (1).

2.3. Для решения задач линейного программирования широко используется:
1) метод прямого поиска (Хука-Дживса);
2) симплекс-метод;
3) метод деформируемого многогранника;
4) метод наискорейшего спуска.

2.4. Коэффициенты при неизвестных в целевой функции двойственной задачи - это:
1) коэффициенты исходной задачи;
2) свободные члены ограничений исходной задачи;
3) преобразованные коэффициенты исходной задачи;
4) коэффициенты при неизвестных в системе ограничений исходной задачи.

Тесты 3. Специальные задачи математического программирование

3.1. Полностью целочисленная задача математического программирования это:

1) задача с целочисленными условиями на некоторые переменные;
2) задача с целочисленными условиями на все переменные;
3) задача с целочисленными условиями на все переменные и линейными ограничениями и целевой функцией;
4) задача с детерминированными переменными.

3.2. В какой задаче специального математического программирования оптимальные решения связано с минимизацией затрат на перевозку продукции:

1) транспортной;
2) целочисленной;
3) задаче параметрического программирования;
4) дробно-линейного программирования.

Тесты 4. Нелинейное программирование

4.1. Задача нелинейного программирования сводится к задаче на условный экстремум, если:

1) отсутствуют условия неотрицательности переменных и функции непрерывны;
2) система ограничений содержит уравнения;
3) система ограничений содержит уравнения, отсутствуют условия неотрицательности переменных и функции и их частные производные непрерывны;
4) система ограничений содержит уравнения и функции и их частные производные непрерывны.

4.2. К градиентному методу решения задач выпуклого программирования без выхода точек за пределы допустимых решений относится:

1) метод штрафных функций;
2) метод Франка-Вулфа;
3) метод Эрроу-Гурвица;
4) Метод Лагранжа.

Тесты 5. Задачи математического программирования в условиях неопределенности

5.1. К каким величинам относятся параметры внешней среды:

1) детерминированным;
2) случайным;
3) независимым;
4) линейным.

5.2. При решении задачи математического программирования со случайными параметрами получают:

1) множество оптимальных решений в зависимости от неопределенных параметров;
2) одно оптимальное решение;
3) верхние и нижние оценки оптимальных решений;

4) множество оптимальных решений, связанных с вероятностями.

Тесты 6. Многокритериальная задача математического программирования

6.1. Метод последовательных уступок решения многокритериальной задачи – это:

1) сведение многокритериальной задачи к однокритериальной;
2) получение компромиссного решения для двух равнозначных критериев;
3) сведение многокритериальной задачи к однокритериальной с учетом весовых коэффициентов;
4) проведение ранжирование целевых функций с последующим их уменьшением на некоторую величину, назначаемую экспертным путем.

6.2. Метод определения области эффективных решений при решении многокритериальной задачи – это:

1) образование обобщенной функции, монотонно зависящей от критериев;
2) сведение многокритериальной задачи к однокритериальной с учетом весовых коэффициентов;
3) исключение из рассмотрения заведомо плохих вариантов решения;
4) проведение ранжирование целевых функций с последующим их уменьшением на некоторую величину, назначаемую экспертным путем.

Тесты 7. Экспертное оценивание

7.1. *Индивидуальные оценки* основаны на:

1) использовании мнения отдельных экспертов, независимых друг от друга;
2) коллективного мнения экспертов;
3) знании специалиста;
4) выборе из множества мнений одного.

7.2. Метод ассоциаций основан на:

1) наборе альтернативных вариантов и выборе наиболее предпочтительного;
2) изучении схожего по свойствам объекта с другим объектом;
3) перенесении признаков случайно отобранных аналогов на исследуемый объект;
4) сопоставлении экспертом альтернативных вариантов, из которых выбирают наиболее предпочтительные;

ВАРИАНТ 4

Тесты 1. Общие принципы построения моделей и их классификация

1.1. Детерминистическая модель – это:

1) модель, построенная на априорной информации;
2) модель, результаты на выходе которой однозначно определяются управляющими воздействиями;

3) модель, в которой все зависимости отнесены к одному моменту времени;
4) модель, в которой развитие моделируемой системы отражается через длительную тенденцию.

1.2. Эмерджентность социально-экономической системы – это:
1) свойство прежде всего целостности системы;
2) массовый характер явлений и процессов;
3) динамичность процесса;
4) активная реакция на новые факторы.

1.3. Этап экономико-математического моделирования «подготовка исходной информации» - это:
1) выражение экономической проблемы в виде математических зависимостей;
2) выявление общих свойств модели;
3) сбор и систематизация данных требуемого качества;
4) разработка алгоритмов численного решения задачи.

1.4. По целевому назначению модели подразделяют на:
1) макроэкономические и микроэкономические;
2) аналитические и идентифицируемые;
3) стохастические и детерминистические;
4) теоретико-аналитические и прикладные.

1.5. Устойчивость информации – это:
1) степень близости получаемой информации к реальному состоянию объекта;
2) степень сохранения ценности информации для управления в момент ее использования;
3) правильность ее отбора и формирования в целях адекватного отражения свойств объекта;
4) способность реагировать на изменения исходных данных без нарушения необходимой точности.

Тесты 2. Линейное программирование

2.1. По числу критериев альтернатив задачи математического программирования классифицируют на:
1) полной определенности и неполной информации;
2) статические и динамические;
3) непрерывные и дискретные;
4) однокритериальные и многокритериальные.

2.2. Общая задача линейного программирования состоит в определении максимального значения функции

$$F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \qquad (1)$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \quad (\mathrm{i} = \overline{1, \mathrm{k}}), \qquad (2)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \quad (\mathrm{i} = \overline{\mathrm{k}+1, \mathrm{m}}), \tag{3}$$

$$x_j \geq 0 \quad (\mathrm{j} = \overline{1, \mathrm{l}}, \mathrm{l} \leq \mathrm{n}) \quad . \tag{4}$$

Область допустимых решений – это:

1) значения $X^*=(x_1^*, x_2^*,..., x_n^*)$, при котором функция (1) достигает экстремума;
2) максимизированное значение функции (1) при выполнении условий (3) и (4), где $k=0$ и $l=n$;
3) максимизированное значение функции (1) при выполнении условий (2) и (4), где $k=m$ и $l=n$;
4) вектор $X=(x_1, x_2,..., x_m)$, удовлетворяющий условиям (2) и (4).

2.3. Симплекс-метод - это:

1) универсальный метод получения начального опорного решения с последовательным улучшением исходного варианта для определения оптимального;
2) метод последовательных уступок;
3) метод последовательных приближений;
4) метод решения системы линейных уравнений.

2.4. В симметричной паре двойственных задач:

1) ограничения исходной задачи задаются в виде равенств, а двойственной – в виде неравенств;
2) ограничения исходной и двойственной задач задаются в виде неравенств, причем двойственные переменные – неотрицательны;
3) ограничения исходной задачи задаются в виде неравенств двойственной – в виде равенств;
4) транспонируется матрица коэффициентов при неизвестных в ограничениях.

Тесты 3. Специальные задачи математического программирование

3.1. Сбалансированная транспортная задача это:

1) задача с ограничениями в виде равенств;
2) задача с ограничениями в виде неравенств;
3) задача с линейной целевой функцией;
4) задача с детерминированными переменными.

3.2. Какой из методов нахождения опорного плана транспортной задачи используется:

1) метод золотого сечения;
2) метод Франка-Вулфа;
3) графический;
4) наименьших стоимостей.

Тесты 4. Нелинейное программирование

4.1. Метод множителей Лагранжа применим, если:

1) отсутствуют условия неотрицательности переменных и функции непре-

рывны;
2) система ограничений содержит уравнения;
3) система ограничений содержит уравнения, переменных и функции и их частные производные непрерывны;
4) система ограничений содержит только уравнения, функции цели и ограничений и их частные производные непрерывны, отсутствуют условия отрицательности переменных

4.2. Определить выражение градиента функции f:

1) $\nabla f(X^{(k)}) = \left[\frac{\partial f(X^{(k)})}{\partial x_1}, \frac{\partial f(X^{(k)})}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f(X^{(k)})}{\partial x_n}\right]$;

2) $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$;

3) $F = \frac{\partial f(X^{(k)})}{\partial x_1} x_1 + \frac{\partial f(X^{(k)})}{\partial x_2} x_2 + \ldots + \frac{\partial f(X^{(k)})}{\partial x_n} x_n$;

4) $\left| f(X^{(k+1)}) - f(X^{(k)}) \right| \le \varepsilon$.

Тесты 5. Задачи математического программирования в условиях неопределенности

5.1. Метод статистических испытаний - это:

1) моделирование случайных величин;
2) моделирование функций распределения вероятностей;
3) численный метод, основанный на моделировании случайных величин и построении статистических оценок для искомых величин;
4) моделирование распределений систем массового обслуживания.

5.2. Неопределенность - это:

1) недостаток статистических данных;
2) отсутствие или недостаток определения или информации о чём-либо;
3) полное отсутствие информации;
4) приближенные данные.

Тесты 6. Многокритериальная задача математического программирования

6.1. Задача многокритериальной оптимизации сводится к:

1) свертке частных критериев;
2) нахождению точки области допустимых решений, которая минимизирует или максимизирует частные критерии;
3) оптимизации наиболее важного критерия;
4) упорядочению частных критериев.

6.2. Метод весовых коэффициентов при решении многокритериальной задачи – это:

1) образование обобщенной функции, монотонно зависящей от критериев;
2) упорядочение заданного множества критериев;
3) введение экспертных оценок для каждого из критериев по важности;
4) проведение ранжирование целевых функций с последующим их уменьшением на некоторую величину, назначаемую экспертным путем.

Тесты 7. Экспертное оценивание

7.1. Метод Дельфи - это:

1) мнения отдельных экспертов, независимых друг от друга;
2) серии последовательных действий – опросов, интервью, мозговых штурмов – добиться максимального согласия при определении правильного решения;
3) анализ исследуемой ситуации;
4) разновидность опроса, в ходе которого респондентами являются эксперты — высококвалифицированные специалисты в определенной области деятельности.

7.2. Метод парных сравнений основан на:

1) наборе альтернативных вариантов и выборе наиболее предпочтительного;
2) изучении схожего по свойствам объекта с другим объектом;
3) сопоставлении экспертом альтернативных вариантов, из которых выбирают наиболее предпочтительные;
4) на опросе в форме интервью или в виде анализа экспертных оценок.

ВАРИАНТ 5

Тесты 1. Общие принципы построения моделей и их классификация

1.1. Трендовая модель – это:

1) модель, построенная на априорной информации;
2) модель, результаты на выходе которой однозначно определяются управляющими воздействиями;
3) модель, в которой все зависимости отнесены к одному моменту времени;
4) модель, в которой развитие моделируемой системы отражается через длительную тенденцию.

1.2. Свойство социально-экономической системы, заключающееся в изменении параметров и структуры под влиянием среды – это:

1) неопределенность;
2) массовость;
3) динамичность;
4) целостность.

1.3. Этап экономико-математического моделирования «численное решение» - это:

1) выражение экономической проблемы в виде математических зависимостей;
2) разработка алгоритмов решения задами, подготовка программ и проведение расчетов;
3) формулировка сущности проблемы с предпосылками и допущениями;
4) разработка алгоритмов численного решения задачи.

1.4. По степени агрегирования объектов модели подразделяют на:

1) статические и динамические;
2) аналитические и идентифицируемые;
3) макроэкономические и микроэкономические;
4) балансовые и трендовые.

1.5. Своевременность информации – это:
1) поступление информации не позже назначенного момента времени;
2) достаточность информации для принятия правильного решения;
3) правильность ее отбора и формирования в целях адекватного отражения свойств объекта;
4) способность реагировать на изменения исходных данных без нарушения необходимой точности.

Тесты 2. Линейное программирование

2.1. По характеру взаимосвязи между переменными задачи математического программирования классифицируют на:
1) однокритериальные и многокритериальные;
2) статические и динамические;
3) непрерывные и дискретные;
4) линейные и нелинейные.

2.2. Общая задача линейного программирования состоит в определении максимального значения функции

$$F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{1}$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \quad (\mathrm{i} = \overline{1, \mathrm{k}}), \tag{2}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \quad (\mathrm{i} = \overline{\mathrm{k}+1, \mathrm{m}}), \tag{3}$$

$$x_j \ge 0 \ (\mathrm{j} = \overline{1, \mathrm{l}}, \mathrm{l} \le \mathrm{n}) \ . \tag{4}$$

Переход к задаче на определение минимума функции (1) осуществляется:
1) полным преобразованием задачи линейного программирования;
2) изменением символа неравенства (2) на противоположный;
3) изменением знака целевой функции (1);
4) изменением знака целевой функции (1) и символа неравенства (2) на противоположные.

2.3. Какое из свойств, на которых основан симплекс-метод, является неверным:
1) угловые точки многогранника не соответствуют опорному плану задачи линейного программирования;
2) не существует локального экстремума, отличного от глобального;
3) множество всех планов задачи линейного программирования выпукло;
4) целевая функция достигает своего максимального (минимального) значения в угловой точке многогранника решений.

2.4. Какое из правил преобразования исходной задачи линейного программирования в двойственную задачу является неверным:

1) целевая функция исходной задачи формулируется на максимум, а целевая функция двойственной задачи – на минимум, при этом неравенства $\leq$ изменяются на неравенства $\geq$;
2) матрица коэффициентов при неизвестных в ограничениях исходной задачи преобразовывается в обратную матрицу двойственной задачи;
3) число переменных в двойственной задаче равно числу функциональных ограничений исходной задачи;
4) коэффициенты при неизвестных в целевой функции двойственной задачи являются свободные члены в системе ограничений исходной задачи.

Тесты 3. Специальные задачи математического программирование

3.1. В задаче о распределении ресурсов определяют:

1) оптимальный план перевозок;
2) необходимые единицы вида товара для получения максимальной прибыли;
3) оптимальные планы в зависимости от параметра;
4) оптимальный рацион питания.

3.2. К каким задачам относится задача параметрического программирования:

1) линейным;
2) детерминированным;
3) случайным;
4) многокритериальным.

Тесты 4. Нелинейное программирование

4.1. К задачам квадратичного программирования относят задачу, в которой:

1) целевая функция может быть записана как сумма линейной и квадратичной форм;
2) целевая функция является сепарабельной;
3) целевая функция – нелинейная, а ограничения - линейны;
4) система ограничений содержит уравнения и функции и их частные производные, являющиеся непрерывными.

4.2. Градиентный метод Франка-Вулфа используется в том случае, когда:

1) определяется минимум вогнутой целевой функции при линейных ограничениях;
2) целевая функция и ограничения являются нелинейными;
3) определяется максимум вогнутой целевой функции при линейных ограничениях;
4) целевая функция - линейна, а ограничения – нелинейные функции.

Тесты 5. Задачи математического программирования в условиях неопределенности

5.1. Какой параметр является мерой оценки неопределенности:

1) данные;
2) сведения;
3) информация;

4) энтропия.

5.2. Риск - это:

1) характеристика ситуации, имеющей неопределенность исхода, при обязательном наличии неблагоприятных последствий;

2) отсутствие или недостаток определения или информации об экономической ситуации;

3) инвестиции в выгодное дело;

4) сочетание вероятности и последствий наступления рассматриваемых событий.

Тесты 6. Многокритериальная задача математического программирования

6.1. Каково отношение между частными критериями в многокритериальной задаче:

1) не противоречат друг другу;
2) противоречат друг другу;
3) противоречат друг другу, действуют в одном направлении и безразличны друг к другу;
4) безразличны друг к другу.

6.2. Метод последовательных уступок применяется в том случае, когда:

1) найдена область допустимых решений;
2) невозможно использование другие методы решения многокритериальной задачи;
3) исключены из рассмотрения заведомо плохие варианты решения;
4) частные критерии могут быть упорядочены в порядке убывания их важности.

Тесты 7. Экспертное оценивание

7.1. Экспертная система - это

1) компьютерная система, способная частично заменить специалиста-эксперта в разрешении проблемной ситуации;

2) программное обеспечение для моделирования различных ситуаций;

3) система искусственного интеллекта;

4) система с использованием базы знаний.

7.2. База знаний состоит из:

1) набора альтернативных вариантов и выборе наиболее предпочтительного;

2) правил анализа информации от пользователя по конкретной проблеме;

3) базы данных и средств обработки данных;

4) инструментальных и историко-архивных свидетельств.

Ответы на тестовые задания

№ задани	Варианты																			
	1				2				3				4				5			
	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
1.1			+		+					+				+						+
1.2				+		+					+		+						+	
1.3				+	+						+				+			+		
1.4		+						+	+							+			+	
1.5			+		+					+						+	+			
2.1	+				+						+					+				+
2.2	+							+			+					+			+	
2.3			+		+					+			+				+			
2.4		+			+					+				+				+		
3.1			+		+					+			+					+		
3.2	+						+		+							+		+		
4.1			+				+				+					+			+	
4.2	+							+		+			+						+	
5.1	+					+				+					+					+
5.2			+		+							+		+			+			
6.1	+						+					+		+					+	
6.2				+			+				+				+					+
7.1	+				+				+					+			+			
7.2				+				+		+					+			+		

Бузина Татьяна Сергеевна
Иваньо Ярослав Михайлович
Петрова Софья Андреевна

Моделирование производственных процессов в условиях рисков

Учебное пособие

Лицензия на издательскую деятельность
ЛР № 070444 от 11.03.98 г.
Подписано в печать 29.06.2016 г.
Тираж 300 экз.

9 785917 772042

Издательство ФГБОУ ВО Иркутский ГАУ
664038 Иркутская обл., Иркутский район,
пос. Молодежный