МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ИРКУТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени А.А. ЕЖЕВСКОГО

Институт экономики, управления и прикладной информатики
Кафедра информатики и математического моделирования

Учебное пособие

по математическому моделированию
для студентов направления подготовки 09.03.03 Прикладная информатика

Иркутск 2017

УДК 681.3

Печатается по решению научно-методического совета Иркутского ГАУ

Иваньо Я.М. Учебное пособие по математическому моделированию для студентов направления подготовки 09.03.03 Прикладная информатика /Я.М. Иваньо. – Иркутск, 2017. – 139 с.

Рецензент:

д.т.н., профессор Ю.М. Краковский,

д.т.н., профессор О.В. Репецкий

В учебном пособии определены общие принципы построения математических моделей и их классификация. Рассмотрены задачи линейного программирования, специальные задачи линейного программирования, нелинейные модели. Особое внимание уделено различным моделям с неопределенными параметрами, рассмотрены задачи линейного программирования с учетом рисков. Приведена многокритериальная задача математического программирования и методы ее решения. Даны основные понятия экспертного оценивания для решения задач математического программирования.

Работа предназначена для бакалавров направления подготовки 09.03.03 Прикладная информатика. Кроме того, она может быть полезна студентам экономических и технических специальностей.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1 ОБЩИЕ ПРИНЦИПЫ ПОСТРОЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ И ИХ КЛАССИФИКАЦИЯ

Социально-экономическая система – это сложная вероятностная динамическая система, охватывающая процессы производства, обмена, распределения и потребления материальных и других благ.

С системой тесно связано понятие «модель».

Модель – это образ реального объекта в материальной или идеальной форме, отражающий существенные свойства моделируемого объекта и замещающий его в ходе исследования и управления.

Моделирование - метод исследования явлений и процессов, основанный на замене конкретного объекта исследования другим, подобным ему.

К основным чертам моделирования относятся:

- выделение задачи;
- определение существенных особенностей объекта;
- идеализация системы;
- подмена действительности образцом;
- оценка адекватности и точности модели;
- получение новых знаний.

С моделями связано понятие «структура». Структура представляет собой определенные взаимосвязи элементов системы, ее строение. Что касается структуры системы, то это устойчивая пространственно-временная упорядоченность элементов и связей между ними.

Помимо структуры система выполняет некоторые функции. Функция системы с точки зрения кибернетики представляет собой способ преобразования входной информации в выходную. С функцией связано состояние системы как множество ее существенных свойств в определенный момент времени.

Математическую основу моделирования составляет системный анализ как совокупность методологических средств для подготовки и обоснования решений по сложным проблемам. При реализации методологии системного анализа необходимо руководствоваться определенными принципами: цели, внешнего дополнения, декомпозиции и целостности. Принцип – это основание, из которого надо исходить и которым нужно руководствоваться в деятельности для достижения цели.

Принцип цели предполагает объединение экономических объектов и разрозненных действий людей по их использованию в единую целенаправленную деятельность или в экономическую операцию.

В соответствии с *принципом декомпозиции* процесс исследования ситуации может быть расчленен на три взаимосвязанных уровня: концептуальный, операциональный и детальный (вертикальная декомпозиция). Некоторый процесс или *операция* (совокупность действий, объединенных общим замыслом и направленных на достижение цели) фиксируется на операциональном уровне. Концептуальный уровень формируется для вскрытия целей операции.

Объединение элементов операции является отражением *принципа целостности*, следование которому требует выделения эмерджентных свойств операций. Эмерджентность проявляется в том, что свойства операций не выступают простой суммой отдельных элементов операций.

В *принципе внешних дополнений* выявляется система проводимых операций, масштаб исследуемой операции с определением места в этой системе, подчиненность и взаимосвязи с другими операциями.

Выделяют следующие этапы моделирования:

- постановка экономической проблемы и ее анализ;
- построение математической модели;
- математический анализ модели;
- подготовка исходной информации;
- численное решение;
- анализ результатов и их применение.

Большое значение для описания реальной ситуации имеет моделирование различных его аспектов. Согласно одной из классификаций моделей они подразделяются следующим образом:

- по агрегированию:

а) микроэкономические,

б) макроэкономические;

- по характеру взаимосвязи между переменными:

а) линейные,

б) нелинейные;

- по характеру изменения переменных:

а) дискретные,

б) непрерывные;

- по наличию информации о переменных:

а) детерминированные,

б) стохастические,

в) интервальные;

- по влиянию на производственные процессы экстремальных природных явлений;
- с учетом фактора времени:

а) статические,

б) динамические.

Среди множества моделей определенное место занимают компьютерные модели. Компьютерное моделирование – это процесс исследования объекта с помощью его компьютерной модели.

Имитационное моделирование – это разновидность аналогового моделирования, реализуемого с помощью набора математических инструментальных средств, специальных имитирующих компьютерных программ и технологий программирования, позволяющих произвести целенаправленное исследование структуры и функций реального объекта.

В имитационном моделировании широко используется метод Монте-Карло. Это универсальный метод многократного повторения однотипных испытаний для решения различного класса задач. Сходным понятием метода Монте-Карло является метод статистических испытаний.

Большое значение для решения различных практических задач имеют методы математического моделирования, которые являются основными *методами исследования операций*, позволяющими получать количественные основания для принятия решений, связанных с организацией и осуществлением операций.

Математическую основу исследования операций составляют математический анализ, теория вероятностей и статики, линейная алгебра и другие.

Многие исследователи обращают внимание на глобальный кризис различных сферах общества, в том числе и в науке, указывая на междисциплинарность новых технологий XXI в. Они способны на основе знаний о человеке предоставлять конкретные прогнозы и методы и методы проектирования с использованием формализованных моделей и требуют целостного описания объекта, его взаимосвязей с биосферой, техносферой, со сценариями технологического развития.

Одним из наиболее успешных междисциплинарных подходов является теория самоорганизации или синергетика. По убеждениям ряда авторов синергетика включает в себя предметные знания, математическое моделирование и философии.

Синергетика рассматривает нелинейные и неустойчивые системы. Нелинейность означает получение нового качества в результате действия нескольких факторов (следствие не является механической суммой отдельных причин). Неустойчивость означает переход изучаемого объекта в новое состояние при наличии малых отклонений в системе.

К основным принципам синергетики относятся:

- гомеостатичность;
- иерархичность;
- нелинейность;
- незамкнутость;
- неустойчивость;
- динамическая иерархичность (эмерджентность);
- наблюдаемость;
- необратимость эволюционных процессов;
- бифуркационный характер эволюции;
- динамизм структуры саморазвивающихся систем;
- режимы с обострением;
- новое понимание будущего;
- принцип подчинения;
- фундаментальная роль случайностей;

- законы темпоритма процессов самоорганизации.

Согласно принципу гомеостатичности открытая система сохраняет постоянство своего внутреннего состояния посредством скоординированных реакций, направленных на поддержание динамического равновесия.

Иерархичность представляет собой структурные уровни материи, которые образованы из определенного множества объектов какого-либо класса и характеризуются особым типом взаимодействия между составляющими их элементами.

Нелинейность характеризует нарушение принципа суперпозиции – результат суммы воздействий на систему не равен сумме результатов этих воздействий.

Незамкнутость (открытость) - это невозможность пренебрежения взаимодействием системы со своим окружением.

Неустойчивость означает, что состояние, траектории неустойчивы, если малые отклонения от них со временем увеличиваются.

Эмерджентность – обобщение принципа подчинения на процессы становления.

Наблюдаемость представляет собой понимание ограниченности и относительности представлений о системе и конечном эксперименте.

Необратимость эволюционных процессов предполагает, что необратимость может возникнуть лишь в системах, поведение которых подчиняется законам случайности.

Бифуркационный характер эволюции предполагает чередование периодов относительно монотонного самодвижения в режиме аттракции и зон бифуркации - катастрофического, скачкообразного изменения хода исторического процесса.

Динамика структуры саморазвивающихся систем означает, что структура системы является динамичной категорией, нуждаясь в регулярной корректировке и перестройке.

Режимы с обострением, или сверх быстро развивающиеся кризисы предполагают нелинейные положительные обратные связи.

Новое понимание будущего связано с зонами бифуркации, к которым примыкает виртуальное пространство альтернативных ветвей эволюции, будущее как бы предначертано. Другими словами, под будущим понимается выбор альтернативных вариантов.

Принцип подчинения рассматривают как переход системы к эволюции по новой сценарной траектории, что степень ее свободы становится минимальной и основную роль в ее самовыдвижении в соответствии с этим сценарием начинают играть именно те параметры, которые определяют эти оставшиеся степени свободы.

Фундаментальная роль случайностей означает, что в зоне бифуркации система теряет устойчивость, малые флуктуации нелинейных положительных связей могут приобретать решающее значение.

Законы темпоритма процессов самоорганизации основаны на показателе внутренней связи различных элементов системы – относительная скорость процессов диссипации. При этом хаос на микроуровне может приводить к организованности на макроуровне.

Контрольные вопросы и задания

1. Дайте определение понятиям «система» и «комплекс». Какие сходства и различия между ними?
2. Что такое модель и моделирование?
3. Каковы основные свойства социально-экономической системы?
4. Приведите классификацию моделей.
5. Какое место занимает понятие «аналогия» в моделировании?
6. Что такое имитационное моделирование и имитационная модель??
7. Что изучает дисциплина исследование операций?
8. Методы математического моделирования.
9. Связь системного анализа и математического моделирования.
10. Основные принципы системного анализа.
11. Признаки классификации математических моделей.
12. Синергетика.
13. Основные принципы синергетики.
14. Гомеостатичность и иерархичность самоорганизующейся системы.
15. Нелинейность и незамкнутость самоорганизующейся системы.
16. Неустойчивость и динамическая иерархичность (эмерджентность) самоорганизующейся системы.
17. Наблюдаемость и необратимость эволюционных процессов самоорганизующейся системы.
18. Бифуркационный характер эволюции и динамизм структуры саморазвивающихся систем.
19. Режимы с обострением и новое понимание будущего самоорганизующейся системы.
20. Принцип подчинения, фундаментальная роль случайностей и законы темпоритма процессов самоорганизации..

2 СТАТИСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ИНФОРМАЦИИ: ОЦЕНКА И ПРОГНОЗИРОВАНИЕ

2.1 Вероятностное распределение и оценка статистических параметров

При построении стохастических моделей возникает задача определения вероятности появления случайной величины или оценки вероятности ее превышения. Например, практическое значение имеют расчеты частоты неурожайных лет, вероятности проявления катастрофических наводнений или повторяемости благоприятных условий для экономического роста предприятия.

Подобные задачи решаются по нескольким этапам.

Сначала строят гистограмму (рисунок 2.1) или кумулятивную кривую. Затем вычисляют ее статистические параметры, задают множество статистических распределений, из которых по критерию согласия отбирают оптимальный вариант. При этом следует иметь в виду разнообразие методов оценки статистических параметров и критериев согласия.

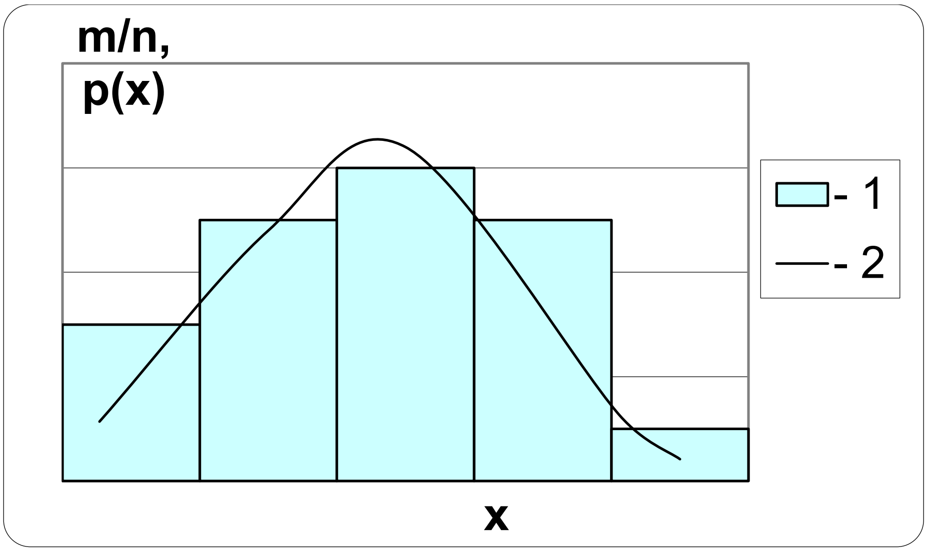


Рисунок 2.1 - Гистограмма (1) и кривая плотности вероятностей распределения (2)

Гистограмма представляет собой связь случайной величины *x* и ее относительной частоты или частости *m/n* (рисунок 1). Параметр *m* характеризует число значений *x*, попавших в заданные интервалы, а *n* – длину ряда случайных величин.

График, увязывающий накопленную частоту $\sum_{j=1}^{k} m/n$ и значения *x*, назван кумулятивной кривой (рисунок 2.2). Характеристика *k* определяет количество интервалов на отрезке размаха – разности максимального и минимального значений случайной величины (x_{max} - x_{min}). Гистограмма и кумулятивная кривая связаны между собой, поскольку накопленная частота равна последовательной сумме относительных частот.

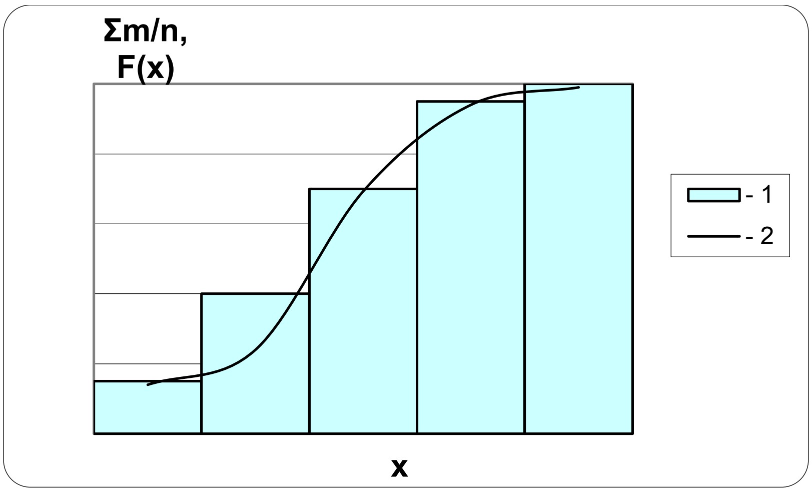


Рисунок 2.2 - Кумулятивная кривая (1) и интегральная функция распределения вероятностей (2)

Построив гистограмму и кумулятивную кривую, из множества законов распределения вероятностей выбирают оптимальный вариант, предварительно определив статистики ряда случайных величин.

Одномерный закон распределения вероятностей описывает зависимость плотности вероятностей распределения *p(x)* или интегральной функции *F(x)* от случайной величины *x*. В первом случае вероятностный закон представляет собой дифференциальную (рисунок 2.1), а во втором – интегральную функции распределения вероятностей (рисунок 2.2). В качестве случайной величины можно использовать урожайность, стоимость валовой продукции, погодные факторы и другие характеристики.

Интегральная функция распределения связана с дифференциальной кривой выражением

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(x)dx\,. \tag{2.1}$$

Подынтегральная функция *p(x)* определяется как предел относительной частоты попаданий *m/n* в заданные интервалы случайной величины при условии бесконечно длинного ряда *n*:

$$p(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{m}{n}\,. \tag{2.2}$$

Статистические распределения имеют различную форму. В зависимости от числа параметров, которые их определяют законы распределения подразделяют на однопараметрические, двухпараметрические и многопараметрические. Обычно в качестве статистических параметров применяются характеристики центра распределения, меры рассеяния и асимметрии. Остальные параметры, которые входят в вероятностные распределения, как правило, определяются через перечисленные статистики.

Наиболее часто используемой характеристикой центра распределения является среднее арифметическое значение ряда.

Среднее значение, или математическое ожидание дискретной случайной величины, вычисляется по формуле

$$M[X] = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i\,, \tag{2.3}$$

где x_i – возможные значения случайной величины *X*; p_i – вероятность появления *i*-го возможного значения случайной величины *X*.

Математическое ожидание является теоретической характеристикой случайной величины.

Эмпирической характеристикой случайной величины является эмпирическая средняя, вычисляемая по формуле

$$X = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \frac{m_i}{N}\,, \tag{2.4}$$

или

$$M^*[X] = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p^*(x_i), \qquad (2.5)$$

где $p^*(x_i) = \frac{m_i}{N}$ - частота значений x_i при N наблюдениях (испытаниях); $N = \sum_{i=1}^{n} m_i$; m_i – количество появлений значений x_i при N наблюдениях.

В качестве параметра рассеяния широко применяется среднее квадратическое отклонение или стандарт:

$$\sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - M[X])^2 \cdot \frac{m_i}{N}} \,. \qquad (2.6)$$

Асимметричность распределения оценивается с помощью коэффициента асимметрии:

$$c_s = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - M[X])^3 \frac{m_i}{N}}{\sigma^3} \quad . \qquad (2.7)$$

Для равновероятных значений $p_i=1/N$ формулы (2.3), (2.6) и (2.7) примут следующий вид:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}, \qquad (2.8)$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n-1}}, \qquad (2.9)$$

$$C_s = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^3 n}{\sigma^3 (n-1)(n-2)}. \qquad (2.10)$$

В формулах (2.8)-(2.10) учтена смещенность оценок статистических параметров выборок длиной n.

По полученным статистическим параметрам строят вероятностные распределения. В книге Н.Хастингс и Дж.Пикок «Справочник по статистическим распределениям» приведено 24 вероятностных закона с основными свойствами.

Примером однопараметрического статистического распределения является экспоненциальная кривая с плотностью вероятности

$$p(x,b) = \frac{1}{b} e^{-\frac{x}{b}}, \qquad (2.11)$$

где b – среднее арифметическое значение ряда. Здесь ординаты $p(x)$ зависят от одного параметра b.

К двухпараметрическим функциям относятся нормальный закон (кривая Гаусса), бета-распределение, логистическое распределение и др. Приведем распространенную в практических приложениях формулу нормального вероятностного распределения:

$$p(x,\bar{x},\sigma)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}}, \tag{2.12}$$

где $\bar{x}$- среднее значение ряда случайных чисел x, а σ – среднее квадратическое отклонение.

Популярностью среди непрерывных вероятностных функций, зависимых от трех статистических параметров, пользуются биномиальное распределение (кривая Пирсона III типа), логарифмически-нормальное и гамма-распределение. При этом третье статистическое распределение является частным случаем первого. В отличие от закона Гаусса гамма-распределение является асимметричным. Его формула имеет вид

$$p(x,b,c)=\left(\frac{x}{b}\right)^{c-1}e^{-\frac{x}{b}}\frac{1}{b\Gamma(c)}, \tag{2.13}$$

где $c=(\bar{x}/\sigma)^2$; $b=\sigma^2/\bar{x}$; $\Gamma(c)$ – гамма-функция, определяемая с помощью интеграла $\int\limits_0^\infty t^{\alpha-1}e^{-t}dt$. Для безразмерных величин ряда статистики c и b вычисляются по формулам: $c=1/c_v^2$ и $b=c_v^2$. В подынтегральном выражении переменная t исключается подстановкой пределов интегрирования. Коэффициент вариации c_v вычисляется по соотношению

$$c_v=\frac{\sigma}{\bar{x}}. \tag{2.14}$$

Статистики вероятностных распределений, в том числе $\bar{x}$, σ, c_v, c_s и α, рассчитываются различными методами. К ним относятся метод моментов, метод квантилей и метод максимального правдоподобия. Каждый из методов имеет свои особенности.

Метод квантилей (ординат заданной вероятности превышения) наиболее простой для применения. Он основан на том, что статистические параметры связаны со значениями квантилей, соответствующих заданному уровню вероятности превышения (Алексеев, 1960). С усредненной эмпирической интегральной кривой распределения снимаются ординаты вероятностью превышения 5, 50 и 95%. Затем по этим значениям вычисляются статистические параметры: меры центра, рассеяния и асимметрии распределения.

Наиболее распространенным способом оценки статистик является метод моментов.

При описании статистических рядов, как правило, используются понятия начального и центрального моментов, на которых основан метод расчета статистических параметров.

Начальный момент порядка s случайной дискретной совокупности x_i представим в виде формулы

$$m_s = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^s , \tag{2.15}$$

или

$$m_s = \sum_{i=1}^{n} x_i^s p_i , \tag{2.16}$$

где n – число значений ряда, p_i – вероятность появления i-го возможного значения случайной величины, s – порядковый номер момента, принимающий значения 0, 1, 2, и т.д. Не исключены случаи присвоения параметру s дробных чисел (Гриневич и др., 1972).

Если $s=0$, тогда нулевой начальный момент равен 1. Первый начальный момент соответствует выражению определения среднего арифметического ряда (2.8), т.е.

$$m_1 = \overline{x} . \tag{2.17}$$

Формула центрального момента порядка s отличается от выражения (2.15) вводом в сумму центра распределения, которым обычно является среднее значение совокупности:

$$\mu_s = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^s , \tag{2.18}$$

или

$$\mu_s = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^s \cdot p_i . \tag{2.19}$$

Центральный нулевой момент равен 1, а $\mu_1=0$. Подставив вместо s порядок 2, получим формулу дисперсии или квадрата среднего квадратического отклонения (2.9). Другими словами, стандарт связан со вторым центральным моментом соотношением

$$\sigma = \sqrt{\mu_2} . \tag{2.20}$$

Нетрудно показать, что коэффициент асимметрии вычисляется как функция третьего и второго центральных моментов

$$c_s = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = \frac{\mu_3}{\mu_2^{3/2}} . \tag{2.21}$$

Статистика, оценивающая островершинность распределения, называется эксцессом:

$$\varepsilon = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} - 3 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^4}{\left[\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2\right]^2} - 3 . \tag{2.22}$$

Приведенные формулы и их описание справедливы для выборки или ограниченного ряда данных. При этом задача состоит в определении статистик ограниченного ряда, наиболее близких параметрам генеральной совокупности.

По требованиям, предъявляемым к оценкам статистических параметров, последние должны быть состоятельными, несмещенными и эффективными.

Нахождения статистических параметров выборки является лишь частью решения задачи оптимального выбора статистического распределения. Учитывая ограниченность информации, необходима оценка точности вычисления статистических параметров. Для этого используется средняя квадратическая погрешность статистики, которая зависит от объема выборки или длины ряда, стандарта или коэффициента вариации и закона распределения.

Средняя квадратическая погрешность среднего арифметического значения выборки для нормального закона распределения рассчитывается по формуле

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \tag{2.23}$$

где n – длина или объем выборки, а σ - стандарт ряда.

Применительно к нормальному распределению формулы расчета средних квадратических погрешностей стандарта σ и коэффициента вариации c_v как мер рассеяния имеют вид

$$\sigma_{\sigma} = \frac{\sigma}{\sqrt{2n}}, \tag{2.24}$$

$$\sigma_{c_v} = \frac{c_v}{\sqrt{2n}}. \tag{2.25}$$

Формулы (2.23)-(2.25) позволяют оценивать абсолютные средние квадратические погрешности. Для расчета относительных значений используются соотношения

$$E_{\bar{x}} = \frac{\sigma_{\bar{x}}}{\bar{x}} \cdot 100\%, \tag{2.26}$$

$$E_{c_v} = \frac{\sigma_{c_v}}{c_v} \cdot 100\%. \tag{2.27}$$

Следует помнить, что изложенная теория применяется для выборок с независимыми друг от друга значениями. Для связанных чисел ряда применяются иные модели оценок статистик и их погрешностей.

Пример 2.1. По данным таблицы 2.1 об урожайности зерновых (ц/га) и ее относительной частоте построить гистограмму, определив ее моду, размах и медиану:

Таблица 2.1 – Данные для построения гистограммы

Интервалы, x	6-7	7-8	8-9	9-10	10-11	11-12	12-13	13-14
Частота	0,05	0,09	0,15	0,22	0,19	0,12	0,10	0,08

Решение

В случае непрерывных равных интервалов с шириной *Δx*, гистограмма строится следующим образом (рисунок 2.3):

- на оси абсцисс наносится шкала для реализаций случайной величины *X*, на оси ординат - относительная частота попадания данной величины в заданный интервал;

- пользуясь этими шкалами, строят прямоугольники, основания которых соответствуют ширине интервала *Δx*, а высоты равны относительной частоте, с которой случайная величина *X* попадает в заданный интервал.

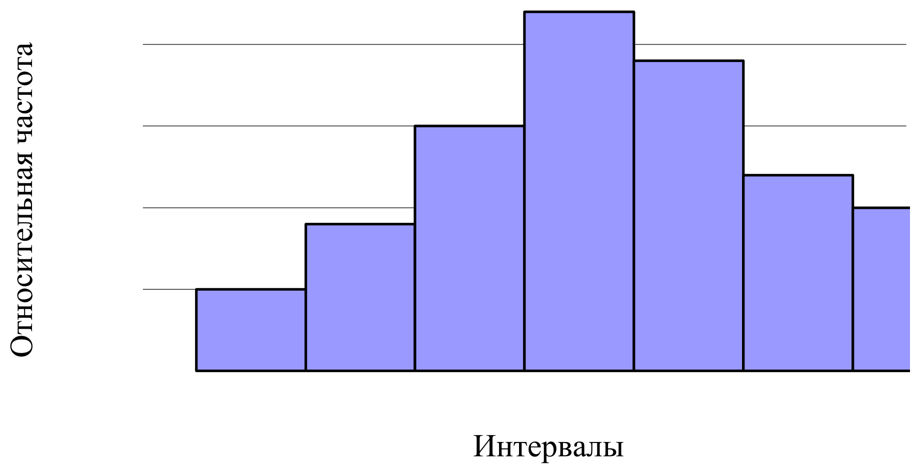


Рисунок 2.3 - Гистограмма урожайности зерновых культур, ц/га

Мода – величина, соответствующая наибольшей вероятности. В гистограмме она находится в интервале 9-10 д.е. Интервал этих значений повторяется с вероятностью 0,22 или 22%.

Медиана - значение, занимающее центральное положение в отсортированной по возрастанию (убыванию) выборке. При нечетном количестве наблюдений, она определяется как срединное значение ряда, а при четном – как средняя арифметическая величина из двух срединных значений. Так как в данном примере количество интервалов равно 8, медиана находится следующим образом

$$Me = \frac{9,5+10,5}{2} = 10 \text{ д.е.}$$

Размах гистограммы (амплитуда) – разность максимального и минимального значения ряда. Для определения размаха гистограммы, построенной нами, необходимо из нижней границы последнего интервала вычесть нижнюю границу первого интервала, или из верхней границы последнего интервала вычесть верхнюю границу первого интервала. Таким образом, амплитуда данного ряда равна 13-6 =7 д.е.

Пример 2.2. По данным таблицы 2.2 об урожайности *x* (ц/га) и ее относительной частоте построить огиву, определив ее математическое ожидание и дисперсию:

Таблица 2.2 – Данные для построения огивы

Интервалы, x	6-7	7-8	8-9	9-10	10-11	11-12	12-13	13-14
Частота, p	0,05	0,08	0,16	0,22	0,19	0,12	0,10	0,08

Решение

Накопленная частота равна последовательной сумме относительных частот (таблица 2.3).

Таблица 2.3 – Данные для построения огивы

Интервалы, x	Относительная частота	Накопленная частота
6-7	0,05	0,05
7-8	0,08	0,05+0,08 = 0,13
8-9	0,16	0,16+0,13=0,29
9-10	0,22	0,22+0,29=0,51
10-11	0,19	0,19+0,51=0,70
11-12	0,12	0,12+0,70=0,82
12-13	0,10	0,10+0,82=0,92
13-14	0,08	0,08+0,92=1,00

Далее график кумулятивной кривой распределения урожайности зерновых строится аналогично построению гистограммы, которое описано в примере 1 (рисунок 2.4).

Математическое ожидание является теоретической характеристикой случайной величины и находится следующим образом:

$$M[X]=6\cdot0,05+7\cdot0,08+8\cdot0,16+9\cdot0,22+10\cdot0,19+11\cdot0,12+12\cdot0,10+13\cdot0,08+14\cdot0,08 = 10,7.$$

Для расчета дисперсии случайной величины, в начале находится средняя арифметическая данного интервального ряда распределения, близкая к математическому ожиданию:

$$\bar{x} = M\,[X] = 10,\,7.$$

Затем, подставляя известные значения x и $\bar{x}$ в формулу, получаем следующее равенство

$\sigma_x^2 = ((6{,}5-10{,}7)^2\cdot 0{,}05)+((7{,}5-10{,}7)^2\cdot 0{,}08))+((8{,}5-10{,}7)^2\cdot 0{,}16)+((9{,}5-10{,}7)^2\cdot 0{,}22)+((10{,}5--10{,}7)^2\cdot 0{,}19)+((11{,}5-10{,}7)^2\cdot 0{,}12)+((12{,}5-10{,}7)^2\cdot 0{,}10)+((13{,}5-10{,}7)^2\cdot 0{,}08) = 3{,}9.$

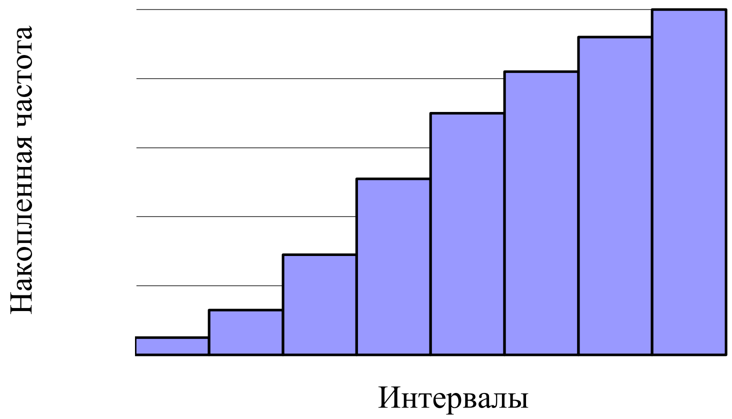


Рисунок 2.4 - Кумулятивная кривая (огива) урожайности зерновых культур

Пример 2.3. Найти третий центральный момент, первый начальный момент и коэффициент асимметрии по данным таблицы об урожайности зерновых x_i и вероятностях:

Таблица 2.4– Данные для определения моментов случайной величины

x_i, *ц/га*	10	13	16	19	22	25	29
p_i	0,04	0,14	0,16	0,25	0,17	0,14	0,10

Решение

Найдем сначала $M\,[X], D$ и σ по формулам:

$$M[X]=10\cdot 0,04+13\cdot 0,14+16\cdot 0,16+19\cdot 0,25+22\cdot 0,17+25\cdot 0,14+29\cdot 0,10=19,67;$$

$$D=(10-19,67)^2\cdot 0,04+(13-19,67)^2\cdot 0,14+(16-19,67)^2\cdot 0,16+(19-19,67)^2\cdot 0,25+$$
$$+(22-19,67)^2\cdot 0,17+(25-19,67)^2\cdot 0,14+(29-19,67)^2\cdot 0,10=25,84;$$

$$\sigma = \sqrt{25,84} = 5,08.$$

Используя формулы асимметрии и начального момента, определяем первый начальный момент и центральный момент третьего порядка:

$$m_1 = 10 \cdot 0,04 + 13 \cdot 0,14 + 16 \cdot 0,16 + 19 \cdot 0,25 + 22 \cdot 0,17 + 25 \cdot 0,14 + 29 \cdot 0,10 = 19,67;$$

$$\mu_3 = (10-19,67)^3 \cdot 0,04 + (13-19,67)^3 \cdot 0,14 + (16-19,67)^3 \cdot 0,16 + (19-19,67)^3 \cdot 0,25 +$$
$$+ (22-19,67)^3 \cdot 0,17 + (25-19,67)^3 \cdot 0,14 + (29-19,67)^3 \cdot 0,10 = 18,87.$$

Затем находим коэффициент асимметрии:

$$c_s = 18,87/5,08^3 = 0,144.$$

Таким образом, определены различные моменты задачи.

В литературе встречается другой способ построения эмпирической функции вместо огивы. Для этого используют эмпирическую функцию распределения вероятностей, по значениям которой подбирают закон распределения вероятностей. С помощью свойств выборки или благодаря критерию согласия.

Пример 2.4. По данным о годовых осадках Иркутска *x* (табл. 2.5) найти координаты эмпирической и аналитических функций распределения вероятностей (гамма и нормальный закон), построить их, предварительно вычислив статистические параметры ряда: среднее $\bar{x}$, стандартное отклонение σ, коэффициент вариации c_v и асимметрии.c_s.

Работа выполняется в следующем порядке.

1. По данным второго столбца определяются статистические параметры ряда среднее $\bar{x}$, стандартное отклонение σ, коэффициент вариации c_v и асимметрии.c_s. Для этого можно использовать статистические функции или программу Описательная статистика из пакета Анализ данных приложения MS Excel (табл. 2.6).

2. По данным столбцов 3, 4 и 5 вычисляют значения абсцисс и ординат эмпирической функции распределения вероятностей. В третьем столбце расположены номера, которые присваиваются каждому значению осадков, расположенных в порядке возрастания в четвертом столбце. Ордината эмпирической функции распределения рассчитывается по формуле $p_э=m/n+1$, где *m* – порядковый номер (значения третьего столбца), а *n* – число членов ряда, которое равно 60. Таким образом, в пятом столбце определены ординаты эмпирической функции распределения, которые с возрастанием *x* не убывают.

3. В шестом и седьмом столбцах рассчитаны ординаты двух аналитических функций: гамма- (2.13) и нормального распределения (2.12). Если вычисления осуществляются в приложении MS Excel, то используются следующие статистические функции: =гаммарасп() и нормрасп().

Таблица 2.5 – Расчет координат эмпирической ($p_э$) и аналитических функций распределения вероятностей гамма ($p_г$) и Гаусса ($p_н$) годовых осадков по данным Иркутска

Год	Иркутск	№п.п.	x, мм ранж.	$p_э$	$p_г$	$p_н$	$\|p_э - p_г\|$	$\|p_э - p_н\|$
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1946	375	1	251	0,016	0,0017	0,0065	0,0143	0,0095
1947	470	2	320	0,033	0,038	0,050	0,005	0,017
1948	544	3	330	0,049	0,052	0,064	0,003	0,015
1949	382	4	336	0,066	0,062	0,074	0,004	0,008
1950	564	5	340	0,082	0,070	0,081	0,012	0,001
1951	383	6	353	0,098	0,099	0,107	0,001	0,009
1952	585	7	369	0,115	0,145	0,148	0,03	0,033
1953	414	8	375	0,131	0,165	0,165	0,034	0,034
1954	395	9	376	0,148	0,168	0,168	0,02	0,02
1955	494	10	376	0,164	0,168	0,168	0,004	0,004
1956	410	11	381	0,180	0,186	0,184	0,006	0,004
1957	412	12	382	0,197	0,190	0,187	0,007	0,01
1958	251	13	382	0,213	0,190	0,187	0,023	0,026
1959	479	14	383	0,230	0,193	0,191	0,037	0,039
1961	395	15	383	0,246	0,193	0,191	0,053	0,055
1962	597	16	390	0,262	0,221	0,215	0,041	0,047
1963	353	17	394	0,279	0,237	0,229	0,042	0,05
1964	400	18	395	0,295	0,241	0,233	0,054	0,062
1965	521	19	395	0,311	0,241	0,233	0,07	0,078
1966	561	20	400	0,328	0,262	0,252	0,066	0,076
1967	540	21	410	0,344	0,307	0,292	0,037	0,052
1968	445	22	412	0,361	0,316	0,301	0,045	0,06
1969	491	23	412	0,377	0,316	0,301	0,061	0,076
1971	599	24	413	0,393	0,321	0,305	0,072	0,088
1972	369	25	414	0,410	0,325	0,309	0,085	0,101
1973	597	26	423	0,426	0,368	0,349	0,058	0,077
1974	546	27	423	0,443	0,368	0,349	0,075	0,094
1975	376	28	424	0,459	0,373	0,354	0,086	0,105
1976	394	29	443	0,475	0,466	0,443	0,009	0,032

1977	320	30	445	0,492	0,476	0,452	0,016	0,04
1978	424	31	453	0,508	0,515	0,491	0,007	0,017
1979	340	32	470	0,525	0,596	0,574	0,071	0,049
1980	484	33	478	0,541	0,632	0,611	0,091	0,07
1981	376	34	478	0,557	0,632	0,611	0,075	0,054
1982	512	35	479	0,574	0,637	0,616	0,063	0,042
1983	532	36	479	0,590	0,637	0,616	0,047	0,026
1984	479	37	484	0,607	0,659	0,639	0,052	0,032
1985	496	38	491	0,623	0,688	0,671	0,065	0,048
1986	383	39	494	0,639	0,700	0,684	0,061	0,045
1988	517	40	496	0,656	0,708	0,692	0,052	0,036
1989	412	41	496	0,672	0,708	0,692	0,036	0,02
1990	443	42	506	0,689	0,746	0,734	0,057	0,045
1991	568	43	512	0,705	0,767	0,757	0,062	0,052
1992	478	44	513	0,721	0,771	0,761	0,05	0,04
1993	453	45	517	0,738	0,784	0,776	0,046	0,038
2000	538	46	521	0,754	0,797	0,790	0,043	0,036
2002	336	47	532	0,770	0,830	0,827	0,06	0,057
2003	423	48	538	0,787	0,846	0,845	0,059	0,058
2004	579	49	540	0,803	0,851	0,851	0,048	0,048
2005	513	50	544	0,820	0,861	0,862	0,041	0,042
2006	413	51	545	0,836	0,863	0,864	0,027	0,028
2007	506	52	546	0,852	0,865	0,867	0,013	0,015
2008	545	53	561	0,869	0,897	0,902	0,028	0,033
2009	496	54	564	0,885	0,903	0,909	0,018	0,024
2010	382	55	568	0,902	0,910	0,916	0,008	0,014
2011	423	56	579	0,918	0,927	0,935	0,009	0,017
2012	478	57	585	0,934	0,935	0,944	0,001	0,01
2013	330	58	597	0,951	0,949	0,959	0,002	0,008
2014	390	59	597	0,967	0,949	0,959	0,018	0,008
2015	381	60	599	0,984	0,952	0,961	0,032	0,023

Таблица 2.6 – Статистические параметры ряда годовых осадков по данным Иркутска

Среднее	454,8
Стандартная ошибка	10,6
Медиана	449
Мода	376
Стандартное отклонение	82,0
Дисперсия выборки	6730
Эксцесс	-0,758
Асимметричность	-0,023
Интервал	348
Минимум	251
Максимум	599
Сумма	27292
Счет	60
Коэффициент вариации	0,180353232

Поскольку параметры указанных функций распределения вероятностей зависят от среднего значения ряда и стандартного отклонения, то запись статистических функций примет вид:

=гаммарасп(значение осадков x; $(\overline{x}/\sigma)^2$; $\sigma^2/\overline{x}$; 1),

=нормрасп(значение осадков x; $\overline{x}$; σ;1).

4. Заполнив шестой и седьмой столбцы нетрудно построить эмпирическую и аналитические функции распределения в виде точечной диаграммы, показанной на рис. 2.5.

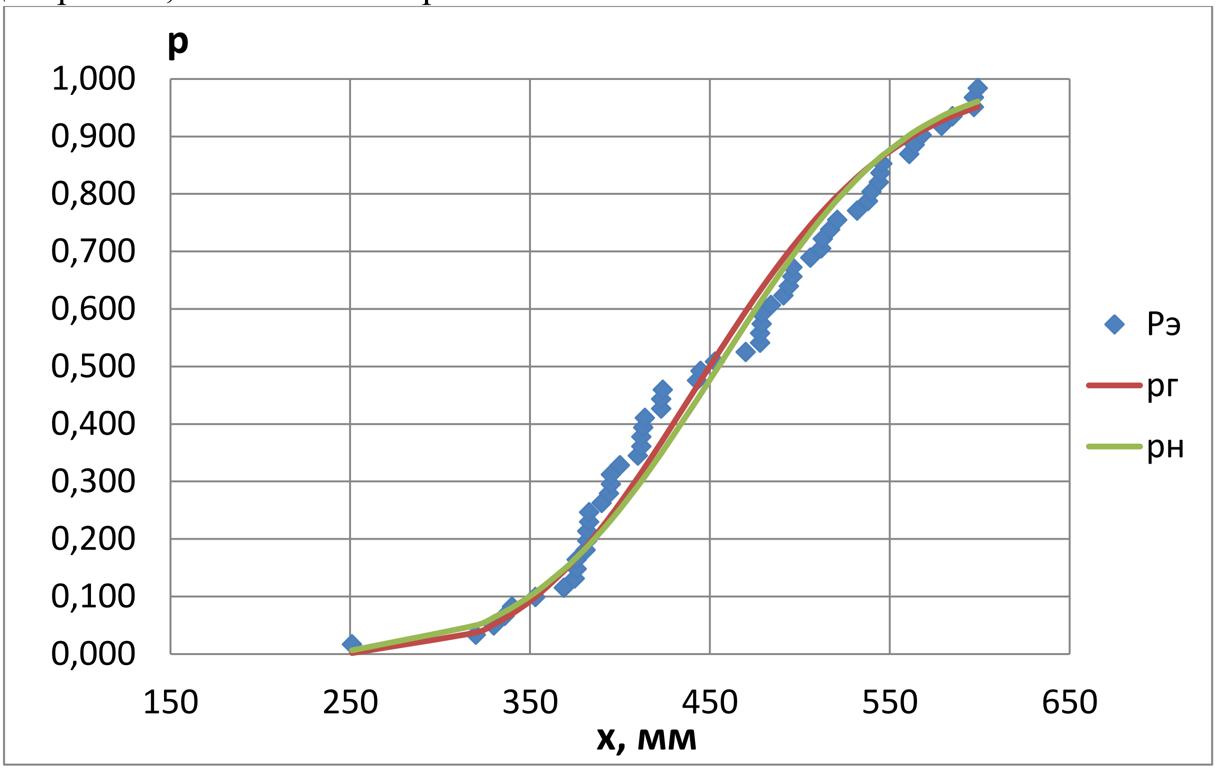


Рисунок 2.5 – Эмпирическая ($p_э$) и аналитические функции распределения вероятностей гамма ($p_г$) и Гаусса ($p_н$) годовых осадков по данным Иркутска за 1946-2015 гг.

С помощью построенных функций можно оценить повторяемость появления тех или иных значений годовых осадков с некоторой вероятностью.

.2.2 Выбор закона распределения

После расчета статистических параметров выборки, оценки связанности ее значений и получении окончательных уточненных статистик с учетом их погрешностей, выбирается аналитическая кривая распределения вероятностей из множества.

По исходной информации строится эмпирическое распределение, задается вероятностный закон и по критерию согласия принимается или опровергается гипотеза о соответствии теоретической кривой опытным данным.

По критерию согласия оценивается вероятность соответствия аналитического закона распределения эмпирическим данным. Обычно выбирается некоторая величина, характеризующая расхождение эмпирической и аналитической вероятностных кривых при заданном уровне значимости (Свешников А.А. и др., 1970). Если значение меры расхождения x, полученное по исходным данным, больше некоторого теоретического значения x_α, то гипотеза о соответствии аналитического закона распределения вероятностей эмпирической кривой не принимается. При $x_\alpha \geq x$ расхождение считается не значимым, и опытные данные не противоречат предположению о принятом законе распределения.

В качестве критериев согласия используются меры расхождения К.Пирсона или χ^2, Колмогорова, $n\omega^2$ и др. Рассмотрим первые два критерия и применим их для оценки соответствия эмпирических данных закону Гаусса и гамма-распределению.

Критерий χ_q^2 по информации об аналитическом распределении и эмпирическим данным вычисляется по формуле

$$\chi_q^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(m_i - np_i)^2}{np_i}, \qquad (2.28)$$

где k – число интервалов, на которое разделено расстояние между экстремальными значениями ряда, n – объем выборки, m_i – количество значений ряда, попадающее в i – ый интервал, p_i – вероятность попадания случайной величины для аналитического закона распределения.

Если объем выборки неограниченно возрастает ($n \to \infty$), то случайная величина стремится к закону распределения χ^2, который зависит от числа степеней свободы $l=k-r-1$. В приведенном выражении r представляет собой число параметров вероятностного распределения. По уровню значимости α и значению l находится ордината χ_α^2. Ее сравнение с величиной χ_q^2 позволяет оценить расхождение между аналитической и эмпирической кривыми распределения.

Критерий К.Пирсона применим для больших выборок, объемом более 50 значений. При этом он дает хорошие результаты при равномерном распределении точек в интервалах, количество которых соответствует условию $m_i \geq 5$.

В отличие от критерия χ^2 критерий согласия Колмогорова основан на определении максимального расхождения между эмпирической $F_э$ и аналитической F функциями распределения:

$$D_э = \max\left|F_э - F\right| . \qquad (2.29)$$

Если $n \to \infty$, то распределение параметра $\lambda = D_э\sqrt{n}$ не зависит от вида закона распределения случайной величины и стремится к вероятностному распределению Колмогорова. Таким образом, вычислив значение λ по опытным данным, выполняется его сравнение с критической величиной λ_α, приведенной в математических справочниках. Индекс α представляет собой уровень значимости. При $\lambda_\alpha \geq \lambda$ принимается гипотеза о соответствии аналитического закона распределения эмпирическим данным.

Критерий Колмогорова, как и критерий χ^2, применим для больших выборок ($n \geq 40$-50). Причем он используется тогда, когда известен закон распределения и его параметры. К сожалению, при решении практических задач приходится сталкиваться с ситуациями невыполнения этого условия. Поэтому возможны случаи получения ложного результата, если по критерию согласия аналитический закон распределения соответствует эмпирическим данным. Добавим к этому, что перечисленные меры расхождения не всегда применимы в хвостовых частях выборки, где расположены экстремумы.

Рассмотрим некоторые примеры.

Пример 2.5. Рассмотрим использование критериев согласия К. Пирсона и Колмогорова на конкретном примере (таблица 2.7).

Исходные данные для определения эмпирического критерия согласия χ^2 и расчетные значения приведены в предыдущей таблице. В первом столбце приведены статистические параметры исходной выборки, а во втором – их значения. Задано число интервалов 7, минимальное и максимальное значение ряда валового сбора зерновых 529 и 1483,4, амплитуда как разность этих двух значений и интервал 159,07. Среднее значение ряда равно 1126, а коэффициент вариации -0,23. Задача состоит в том, чтобы найти расхождение между полученной кумулятивной кривой, координаты которой определены в таблице, и нормальным вероятностным законом.

В четвертом столбце по данным третьего столбца определены модульные коэффициенты по соотношению значений интервалов и средней величины ряда, приведенной во втором столбце. Число попаданий в заданные интервалы дано в пятой графе. Шестой столбец получаем как отношение значений предыдущего столбца и количества данных, которых 36. Последовательная сумма чисел, приведенных в шестом столбце, позволяет получить значения накопленных частот (графа 7).

Таблица 2.7 – Определение критерия χ^2

Параметр	Значение	Значения интервалов валового сбора зерновых, тыс. т	Модульный коэффициент, k	Попадания в заданные интервалы	Относительная частота m/n, %	Накопленная частота Σm/n, %	Нормальный закон распределения	p_i	np_i	$(m_i\text{-}np_i)^2/np_i$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Количество интервалов	7	688,1	0,61	1	2,77	2,778	4,54	0,045	1,64	0,25
Минимум	529	847,1	0,75	7	19,4	22,222	14,08	0,095	3,43	3,71
Максимум	1483,4	1006,2	0,89	1	2,77	25,000	32,18	0,181	6,52	4,67
Амплитуда	954,4	1165,3	1,03	6	16,7	41,667	56,03	0,238	8,58	0,78
Интервал	159,07	1324,3	1,18	13	36,11	77,778	77,81	0,218	7,84	3,39
Среднее	1126	1483,4	1,32	8	22,22	100,00	100,0	0,222	7,99	0,00
Коэффициент вариации	0,23			Сумма 36					36	12,8

Ординаты интегральной функции нормального закона распределения вычисляют по формуле $\int_0^k \frac{1}{c_v\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(k-\bar{k})^2}{2c_v^2}} dk$. На основе этого выражения в математических справочниках приведены значения интеграла. Кроме того, ординаты функции распределения могут быть получены с помощью прикладных программ. В работе значения ординат функции распределения получены с помощью функции Excel *=нормрасп(k;1;0,23; 1)*, в которой вместо k подставляем значения модульных коэффициентов. Второе число 1 характеризует среднее значение модульных коэффициентов, а третье – коэффициент вариации 0,23. И, наконец, последняя единица позволяет получать ординаты функции распределения, а не значения плотности вероятностей распределения.

Значения девятого столбца находятся как разность последующего и предыдущего значения. При этом результаты переводятся в доли путем деления на 100. Например, (14,08-4,54)/100, что равно 0,095.

Ожидаемое число попаданий значений ряда np_i вычисляется путем умножения количества данных 36 на величины девятой графы. Сумма полученных чисел десятого столбца соответствует объему выборки, равному 36.

В 11 графе приведены расчеты слагаемых формулы (2.28), сумма которых равна эмпирическому значению критерия χ^2 =12,8. В частности, первое слагаемое определено как $(1\text{-}1{,}64)^2/1{,}64$.

Теоретическая величина меры расхождения К. Пирсона находится по таблице при заданном уровне значимости и числу степеней свободы *l*.

Поскольку количество интервалов для кумулятивной кривой равно 6, а число параметров нормального закона распределения – 2, то *l=6-2-1*. Как правило, в качестве уровня значимости используют значение 0,05.

Опытное значение $\chi_q^2 = 12{,}8$ больше теоретической величины $\chi_\alpha^2 = 7{,}8$, поэтому гипотеза о соответствии нормального закона распределения эмпирическим данным отвергается.

При определении критерия Колмогорова вычисляются абсолютные значения разностей эмпирической и аналитической функций распределений вероятностей. Наибольшая разность между значениями столбцов 7 и 8 равна (56,03-41,67)/100=0,144. При этом эмпирическое значение $\lambda_э = 0{,}144 \times 36^{0{,}5} = 0{,}862$.

Для уровня значимости α = 0,05 по таблице 2.8 получаем теоретические значение $\lambda_\alpha = 1{,}358$, что больше эмпирической величины, $\lambda_\alpha > \lambda_э$.

Таблица 2.8- Критические значения λ_α для распределения Колмогорова

α	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1
λ_α	0,828	0,895	0,974	1,073	1,224
α	0,05	0,02	0,01	0,001	
λ_α	1,358	1,52	1,627	1,95	

Поэтому в отличие от критерия χ^2 может быть принята гипотеза о соответствии нормального распределения опытным данным.

Таким образом, получены противоречивые результаты. По критерию Колмогорова гипотеза о соответствии законов распределения эмпирическим данным принимается, а по критерию χ^2 – отвергается.

Пример 2.6. В табл. 2.5 приведены ординаты эмпирической $p_э$ и аналитических функций распределения вероятностей гамма $p_г$ и Гаусса $p_н$ (столбцы 5-7). Выбрать закон распределения согласно критерию Колмогорова.

Для решения задачи вычисляем разности по модулю $|p_э - p_г|$ и $|p_э - p_н|$, которые приведены в столбцах 8 и 9. Затем находим максимальные из них в соответствии с формулой (2.29). Первая разность составила 0,091, а вторая – 0,105. После этого определяем параметр $\lambda = D_э\sqrt{n} = 0{,}091 \times \sqrt{60} = 0{,}704$ для гамма-распределения и нормального закона – 0.813. Исходя из табл. 2.8 для $\alpha=0{,}05$ $\lambda_\alpha=1{,}358$, что предполагает принятие гипотезы о соответствии обоих законов распределения эмпирической функции. Между тем параметр λ для гамма-распределения меньше, чем для нормального закона, поэтому первую функцию можно принять для описания эмпирических значений.

Варианты заданий

Урожайность овса за 1996-2015 гг. по данным муниципальных районов Иркутской области

Годы	Балаганский	Братский	Жигаловский	Заларинский	Зиминский	Иркутский	Качугский
	1	2	3	4	5	6	7
1996	3,4	12,5	6,3	10,9	6	18,8	7,9
1997	4,8	15,4	10,1	15,7	7,6	16,1	5,6
1998	12,8	10,3	4,3	10,6	17,7	13,9	7,8
1999	8,4	12,6	7	15,6	18,3	11,8	4,8
2000	8,8	11,9	6,2	10,1	18,6	16,6	7,3
2001	11,2	14,3	7,9	20,8	24	16,7	7
2002	8,8	10,5	9,3	10,1	21,8	12,1	5,2
2003	9,5	6,6	7,3	8,2	18,6	7,9	2,8
2004	11,3	12,6	10,7	11,4	23,5	19,8	5,1
2005	8,3	13,5	14	12,5	21,7	12	4,8
2006	6,6	11	17,3	11,8	15	16,1	8,4
2007	7,6	18,7	12,6	14,7	19,1	18,3	9,5
2008	8	18,3	7,3	13,8	18,7	20,3	11,9
2009	4,9	17,8	9	17,4	18,4	16,7	5,6
2010	10,6	11,1	24,4	11,1	15,5	19,2	7,4
2011	5,9	7,5	16,1	12	15,3	16,5	5,9
2012	11,3	14,9	11,4	16,5	16,3	16,7	8,3
2013	10,6	16	8	15,7	17,5	16,7	7,1
2014	13,6	17,6	10,2	15	17,4	16,7	10,7
2015	8,7	20,6	11,3	15,1	13,7	8,8	6,8

Годы	Киренский	Куйтунский	Нижнеудинский	Тайшетский	Тулунский	Усольский	Усть-Кутский
	8	9	10	11	12	13	14
1996	11,8	8,1	4,7	9,5	13,8	16	7,6
1997	15,5	10,1	13,5	18,6	18,1	17,1	14,6
1998	13,8	11,3	1,2	8,2	13,9	21,3	7,9
1999	12,3	13,9	9,1	10,5	16,7	20	1,2
2000	15,4	14,1	7,9	11,4	20,9	19,2	5,4
2001	14,9	11	7,6	12	16	23,1	13,2
2002	9,8	10	15,5	10,4	14,6	19,2	6,5
2003	14,8	9,6	7,8	11,3	17,4	14,4	
2004	13,7	9,6	10,4	13,4	20,3	23,4	2,5
2005	12,6	18,1	10,2	10,5	18,4	20,8	4,5
2006	11,6	10,4	11,8	12,6	13	24,4	0,5
2007	12,7	18,3	12,8	13,5	17,7	23,4	
2008	11,7	18,1	14,8	16,4	21,5	20,8	3,1
2009	8,9	11,8	14	16,5	17,7	25,8	9,2

2010	10,1	15	11,9	11,8	15,9	21,8	2,8
2011	6,8	19,2	10,9	9,6	14,7	19,3	6,2
2012	10	19,9	12,5	10,8	17	21,4	2,9
2013	11	22,5	11,1	13,1	22	23,4	3,5
2014	6,7	20,4	14,7	13,5	23	23,2	18,9
2015	12,1	20,6	13	12,7	20,4	20,9	19,7

Годы	УстьУдинский	Черемховский	Чунский	Аларский	Баяндаевский	Боханский	Нукутский
	15	16	17	18	19	20	21
1996	4,1	9,8	6,4	6,4	7,5	8,3	1,7
1997	3,8	13,7	11,8	14,3	6,9	14,7	3,8
1998	6	17,5	5,2	14,6	3,6	13,9	12,8
1999	4,3	15,2	5,5				
2000	6	19,2	7,7	25,9	7	14,8	13,1
2001	6,7	18,2	10	22,7	5,9	13,7	17,2
2002	4,5	15,1	10,5	17,2	10	14,2	15,4
2003	4	12,3	4,2	15,3	8,2	11,4	13,6
2004	8,7	20,4	6,5	19,8	6,5	14,2	22,4
2005	10,3	20,4	13	10,4	6,2	10,9	15,6
2006	12,5	22,1	13,7	12,1	7,1	8,7	17,3
2007	14,6	22,8	15,4	15,8	10,7	10,4	17,7
2008	7,4	27,9	15,4	17	12,4	12,3	10,8
2009	10,6	15,9	15,1	17,7	9,8	10,5	21,5
2010	10,7	22,8	9,8	12,5	10,7	13,8	15,8
2011	14	21,2	11,4	15,7	11,6	13,3	13,9
2012	7,2	18,4	12,1	17	15,4	14,9	17,6
2013	18	24,7	14,3	22,5	14,7	15	18,9
2014	17,4	23,4	16,3	19,7	15,3	18	12,5
2015	9,8	13,3	14,7	10,1	7,2	11,8	9,7

2.3 Модели роста

Трендовые модели описывают изменения показателя экономического процесса во времени. При этом предполагается, что в последовательности имеет место устойчивая тенденция, которая не изменится в будущем. При построении трендовых моделей могут использоваться кривые роста.

Задача ставится следующим образом. Зная формулу кривой роста и значения временного ряда, на основе некоторого критерия определяют параметры формулы кривой роста.

При использовании линейного тренда

$$\hat{y}_i = at_i + b \tag{2.30}$$

вычисляются его параметры a и b. В этой формуле a – средняя величина изменения уровней ряда за единицу изменения времени; b –свободный член уравнения; t_i - номера моментов или периодов времени, к которым относятся уровни временного ряда (год, квартал, месяц, дата).

Часто в качестве критерия применяют метод наименьших квадратов:

$$S = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{y}_i)^2 \to \min , \tag{2.31}$$

где y_i - значения ряда, $\hat{y}_i$ - уровни, полученные с помощью аналитического выражения.

Применение метода наименьших квадратов для линейной зависимости (2.29) приводит в конечном итоге к следующим результатам:

$$a = r\frac{\sigma_y}{\sigma_t}, \tag{2.32}$$

$$b = \overline{y} + a\overline{t}, \tag{2.33}$$

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y})(t_i - \overline{t})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y})^2 \sum_{i=1}^{n}(t_i - \overline{t})^2}}, \tag{2.34}$$

где r – коэффициент корреляции между переменными; $\overline{y}, \overline{t}$ - средние значения рядов y_i и t_i, а σ_y, σ_t – их средние квадратические отклонения.

Помимо линейной функции роста применяют нелинейные выражения. В частности, распространение нашел полином с числом параметров m:

$$y = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + ... a_i t^{i1} + a_m t^m , \tag{2.35}$$

где a_0 – свободный член, $a_1, a_3, ..., a_m$ – коэффициенты формулы, $i= 1, 2,..., m$.

Нетрудно показать, что из выражения (2.35) при $m=1$ можно получить линейную зависимость, а в случае $m=2$ –параболу второй степени. Как правило, эти две зависимости наиболее часто используют при выделении тренда.

Кроме полинома применяют степенные, показательные и логарифмические функции роста. Перечисленные выражения имеют недостаток, который состоит в том, что при возрастании времени в бесконечность $t\to\infty$, значение функции увеличивается без ограничения, $y\to\infty$.

Во многих случаях производственный процесс имеет некоторое предельное значение. В частности, потенциал получения урожайности в той или иной физико-географической зоне, среднегодовой надой молока, среднесуточный привес, настриг шерсти ограничены некоторой верхней границей.

Рассмотренные тенденции производственно-экономических характеристик описывают с помощью логистических кривых или кривых асимптотического роста.

Простейшая логистическая кривая рассматривается в виде следующего дифференциального уравнения

$$\frac{dy}{dt} = K_1 y(A - y), \qquad (2.36)$$

где A – уровень насыщения, $K_1 y$ – фактор насыщения, $(A\text{-}y)$- фактор торможения, K_1 – параметр, y – характеристика.

Уравнение изменения во времени y в этом случае можно записать в виде

$$y = \frac{A}{1 + be^{-AK_1(t - t_0)}}. \qquad (2.37)$$

Математический закон асимптотического роста выражают уравнением

$$\frac{dy}{dt} = k(A - y), \qquad (2.38)$$

где k – коэффициент роста, A – уровень насыщения некоторой характеристики y за время t.

Уровень изменения y во времени можно записать следующим образом

$$y = A - (A - y_0)e^{-k(t - t_0)}, \qquad (2.39)$$

где t_0 и y_0 – начальное и граничное условия.

При составлении перечисленных функций немаловажное значение имеет определение технологических предельных значений производственных процессов.

Предельные значения могут быть получены в виде оценки наибольших (наименьших) реальных предельных границ или на основе определения возможного потенциала системы.

Принимая во внимание то, что сельскохозяйственные предприятия стремятся получать наибольшую прибыль за наименьший промежуток времени, необходимо сокращать периоды достижения предельных значений.

Достигнуть физического или производственного предела возможно за счет варьирования параметра K.

Пример 2.7. По данным, приведенным в таблице построить линейный тренд.

Годы	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999
y, ц/га	20	18	33	16	21	15	20	18

Решение

Для определения функциональной зависимости между урожайностью и годами воспользуемся формулами (2.30)-(2.31). В результате получим: $\bar{y} = 20{,}12$, $\bar{t} = 1995.5$, σ_y=5.59, σ_t=2.45, r=-0,28, a=-0.63, b=1279. Таким образом, линейная функция примет вид *y=-0,63t +1279*.

2.4 Прогнозирование и оценки устойчивости экономических процессов

Наличие устойчивой тенденции изменения экономического показателя во времени (тренда) позволяет отобразить ее в виде математического выражения. При сохранении выявленного развития можно прогнозировать значения экономического параметра с некоторым упреждением или заблаговременностью. Таким образом, прогнозирование с привлечением трендовой модели – это экстраполяция тенденции в будущее.

В прогнозировании экономических показателей применяют точечные и интервальные оценки. Точечный прогноз представляет собой единственное значение прогнозируемого показателя. В интервальном прогнозе указывается вероятный диапазон изменчивости прогностической величины.

Прогнозирование имеет смысл, если модель качественная. Качество модели определяется адекватностью и точностью. Модель считается адекватной при условии, что остаток ряда (разность между эмпирическими и аналитическими значениями $\varepsilon_i = y_i - \hat{y}_i$) является случайной величиной. Для выполнения этого требования необходимо, чтобы выполнялись следующие условия: колебания значений остатка ряда были случайными; ряд остатка соответствовал нормальному закону распределения; среднее значение последовательности ε_i равнялось бы нулю; значения ряда остатка являлись бы независимыми.

Проверка случайности колебаний уровней остаточной последовательности означает проверку гипотезы о правильности выбора тренда. Характер этих отклонений изучается с помощью ряда непараметрических критериев, одним из которых является критерий серий, основанный на медиане выборки.

Ряд из величин ε_t располагают в порядке возрастания их значений и находят медиану ε_m полученного вариационного ряда. Медиана - срединное значение при нечетном n или среднее арифметическую из двух срединных значений при n четном. Возвращаясь к исходной последовательности ε_t и сравнивая значения этой последовательности с ε_m , ставится знак «+», если значение ε_t превосходит медиану, и знак «-», если оно меньше медианы. В случае равенства сравниваемых величин соответствующее значение ε_t опускается. Таким образом, получается последовательность, состоящая из плюсов и минусов, общее число которых не превосходит n. Последовательность подряд идущих плюсов или минусов называется *серией*.

Протяженность самой длинной серии обозначается через $K_{\max}$, а общее число серий – через V. Выборка признается случайной, если выполняются следующие неравенства для уровня значимости 5%:

$$K_{\max} \langle \left[3{,}3(\lg n + 1)\right] ; \quad (2.40)$$

$$V \rangle \left[\tfrac{1}{2} n + 1 - 1{,}96\sqrt{n-1}\right]. \quad (2.41)$$

Что касается выполнения остальных требований к адекватности модели, то поскольку нормальный закон распределения вероятностей является симметричным, то коэффициент асимметрии c_S должен быть близок к нулю или незначимым. Поэтому по формуле вычисляют коэффициент асимметрии ряда остатка ε_i, а затем определяют его среднюю квадратическую погрешность:

$$\sigma_{c_S} = \sqrt{\frac{6(n-2)}{(n+1)(n+3)}}, \qquad (2.42)$$

где n – длина ряда.

Если выполняется неравенство $|c_S| \le 1{,}5\sigma_{c_S}$, тогда считается, что коэффициент асимметрии незначим и принимается гипотеза о соответствии значений остатка нормальному распределению.

Кроме предложенного способа определения соответствия ряда остатка закону распределения Гаусса, можно воспользоваться критерием согласия χ^2 или Колмогорова.

Для проверки выполнения третьего условия, соответствия нулю среднего значения остаточной последовательности ε_i, определяется среднее арифметическое ряда остатка (2.8) и его средняя квадратическая погрешность (2.9). Если их соотношение меньше табличного значения, т.е. $\frac{\bar{\varepsilon}}{\sigma_{\bar{\varepsilon}}} \le t_\alpha$, тогда принимается утверждение о соответствии нулю ряда остатка. Табличное значение критерия Стъюдента t_α зависит от уровня значимости α и числа степеней свободы n-1. Этот критерий определяется с помощью математических справочников или функций, заложенных в различных программных продуктах. В частности, критерий t_α можно определить в приложении Excel.

Последним требованием адекватности модели является отсутствие внутрирядных связей между значениями остаточной последовательности. Для решения этой задачи определяется первый коэффициент автокорреляции исследуемого ряда и его средняя квадратическая погрешность. При коэффициенте автокорреляции близком к нулю и преобладании средней квадратической погрешности над ним принимается, что значения ряда остатка независимы.

Только при выполнении перечисленных четырех требований модель считается адекватной. Добавим к этому, что существуют и другие способы оценки адекватности модели, с которыми можно познакомиться в рекомендуемой литературе.

Для оценки точности модели применяют коэффициент детерминации r^2, среднее квадратическое отклонение аналитических значений от эмпирических величин и среднюю относительную ошибку аппроксимации.

Коэффициент детерминации представляет собой квадрат коэффициента корреляции. Среднее квадратическое отклонение аналитических значений от эмпирических величин находится по формуле (2.2), в которой вместо $\bar{y}$

используется значение аналитической функции $\hat{y}$. И, наконец, средняя относительная ошибка аппроксимации, имеет вид

$$\delta = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{y-\hat{y}}{y}\right| \times 100\%, \qquad (2.43)$$

где $y,\ \hat{y}$ – эмпирические и модельные значения

При использовании линейного тренда точечный прогноз определяется по уравнению (2.30). Вместо t_i подставляют значение с учетом упреждения. Если это прогноз, например, на 2009 г. по данным до 2008 г., то в качестве значения используется число 2009.

Для расчета доверительного интервала V можно использовать формулу

$$V = t_\alpha \sigma_y \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{3(n+2k-1)^2}{n(n^2-1)}}\ , \qquad (2.44)$$

где t_α - значение критерия Стъюдента для уровня значимости α и числа степеней свободы n-2; n – длина ряда; k – период заблаговременности. Средняя квадратическая погрешность уравнения регрессии вычисляется по формуле

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(y-\hat{y})^2}{n-m}}\ , \qquad (2.45)$$

где m – число параметров модели.

Используя точечный прогноз и доверительный интервал, интервальное значение прогноза может быть представлено в следующей редакции

$$V_y = y_{t+k} \pm V, \qquad (2.46)$$

где y_{t+k} - точечный прогноз по уравнению (2.9) с заблаговременностью k. Чем меньше полученный интервал, тем точнее считается прогноз.

При рассмотрении будущих ситуаций для проверки модели имеет смысл использовать ретроспективный прогноз. В этом случае из n значений ряда делят на две последовательности, которые имеют длину n_1 и n_2. По первой последовательности n_1 осуществляется точечный и интервальный прогноз, значения которого сравниваются с фактическими данными второго ряда длиной n_2. Очевидно, чем ближе прогностические величины к фактическим данным, тем качественнее прогноз.

В заключении обратим внимание на некоторые недостатки прогнозирования с помощью трендовых моделей. Во-первых, хронологическая последовательность может содержать в себе неоднородные данные или несколько трендов. Во-вторых, тренд описывает инерционные процессы (те условия, которые были, не изменятся). И, наконец, они не определяют природу колебаний прогнозируемой характеристики. Тем не менее, тренды позволяют относительно несложно определять будущие ситуации. Следует отметить ограничение периода упреждения или заблаговременности прогноза k. Обычно эта величина не должна превышать третью часть длины последовательности, т.е. $n/3$.

Пример 2.8. Оценить случайность колебания уровней остаточной последовательности от тренда по данным таблицы 2.9.

Остаток оценивается как $\varepsilon_i = y_i - \hat{y}_i$ по критерию серий, где $\hat{y}_i$ - значения, снятые с линии тренда, y_i – исходные данные.

Таблица 2.9– Остаточная последовательность

ε_i	2,3	4,1	5,2	1,7	3,3	1,9	2,5

В данном примере, используя формулы правых частей неравенств (2.19) и (2.20), получаем [3,3(lg n +1)] = 6, $\left[\frac{1}{2}n + 1 - 1{,}96\sqrt{n-1}\right]$ = 1.

Зная медиану ε_m = 2,10, определим серии (таблица 2.10).

Таблица 2.10 – Определение серий

ε_t	2,3	4,1	5,2	1,7	3,3	1,9	2,5
«+» или «-»	-	+	+	-	+	-	

Поскольку K_{max} = 2 меньше, чем 6, а $V=5$ превышает 1, то гипотеза о случайном характере отклонений уровней временного ряда принимается и трендовая модель признается адекватной.

Пример 2.9. Привести интервальный прогноз демографического показателя сельского населения старше трудоспособного возраста (тыс. человек) с заблаговременностью 2 года, используя уравнения тренда $Y = 1{,}42t - 2753{,}5$, стандартную ошибку уравнения регрессии σ_y =2,5, табличное значение критерия Стьюдента t_α =1,32 при α =20%. Коэффициент детерминации равен 0,92. Продолжительность ряда составила 23 года, 1979-2001 гг.

Решение

Период временного ряда составляет 1979-2001 гг., следовательно прогноз выполняется на *2002* и *2003 гг.*

Подставляя в уравнение модели $Y = 1{,}42t - 2753{,}5$ значения t, получим точечные прогнозы демографического показателя на 2002 и 2003 годы:

$\hat{Y}_{2002}$ = 1,42 · 2002 – 2753,5 = 89,34;

$\hat{y}_{2003}$ = 1,42 ·2003 – 2753,5 = 90,76.

Подставляя известные значения в формулу расчета доверительного интервала, получим

$$U_{2003} = 90{,}76 + 1{,}32 \cdot 2{,}5 \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{23} + (3 \cdot (23 + 2 \cdot 2 - 1)^2)/(23 \cdot (23^2 - 1)))} = 94{,}75 \text{ -}$$

верхняя граница;

$$U_{2003} = 90{,}76 - 1{,}32 \cdot 2{,}5 \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{23} + (3 \cdot (23 + 2 \cdot 2 - 1)^2)/(23 \cdot (23^2 - 1)))} = 86{,}76 \text{ -}$$

нижняя граница.

Таким образом, с доверительной вероятностью 80% (уровень значимости – 20%) можно утверждать, что при сохранении сложившихся закономерностей развития прогнозируемая величина демографического показателя в 2003 г. попадет в интервал от 86,76 до 94,75 тыс. человек.

2.5 Автокорреляционная функция

Строго говоря, методы оценки статистических параметров и их погрешностей, приведенные выше справедливы для выборки с независимыми значениями. Однако в реальных ситуациях может оказаться, что условие независимости между членами ряда не выполняется. В частности, логически трудно представить, чтобы ежегодные доходы хозяйства, составляющие многолетний ряд, были несвязанными. Очевидно, что для устойчиво работающего хозяйства доходы, полученные, по крайней мере, в соседние годы, зависимы. Другими словами, экономический показатель последующего года может оказаться зависимым от значения предыдущего года.

Для связанных данных разработаны другие методы обработки информации.

При выявлении зависимости между значениями выборки или опровержении этой гипотезы можно воспользоваться анализом автокорреляционной функции. Для ее вычисления применяется формула

$$R_\tau = \frac{\sum_{i=1}^{n-\tau} (x_i - \bar{x}_i) \cdot (x_{i+\tau} - \bar{x}_{i+\tau})}{\sigma_i \sigma_{i+\tau} (n - \tau - 1)}, \qquad (2.47)$$

где n – объем выборки; τ - порядок сдвига, изменяющийся от 0 до m ($\tau = 0$, 1, 2,…, m); x_i – значения ряда от x_1 до $x_{n-\tau}$; $\bar{x}_i$ и σ_i – среднее значение и стандарт для части выборки от 1 до $n - \tau$; $x_{i+\tau}$ - значения ряда от $x_{1+\tau}$ до x_n; $\bar{x}_{i+\tau}$ и $\sigma_{i+\tau}$ - среднее значение и стандарт для выборки размером от $1 + \tau$ до n.

Ординаты автокорреляционной функции изменяются от –1 до 1. При сдвиге $\tau = 0$ коэффициент автокорреляции R_0=1. Обычно связь считается значимой, если $R_\tau \geq 0{,}3$.

Помимо расчета ординат автокорреляционной функции, необходимо определить их средние квадратические погрешности. Для нормального закона распределения и совокупностей, подчиняющихся близким к нему статистическим распределениям, формула средней квадратической погрешности ординаты автокорреляционной функции имеет вид

$$\sigma_{R_\tau} = \frac{1 - R_\tau^2}{\sqrt{n - \tau - 1}}. \tag{2.48}$$

Чем длиннее выборка и ближе к 1 коэффициент автокорреляции, тем его точность выше. С увеличением параметра сдвига τ значение погрешности возрастает. Другими словами, более точно определяются ординаты R_τ при малых значениях τ. Следовательно, достоверность первого коэффициента автокорреляции наибольшая. Заметим, что формула (2.48) справедлива для незначительных по модулю ординат автокорреляционной функции, колеблющихся вокруг 0,3.

Наличие внутрирядных связей увеличивает значения коэффициента вариации и коэффициента асимметрии, рассчитанные по формулам справедливым для выборок с независимыми членами. В традиционные выражения средних квадратических погрешностей вводятся поправки, учитывающие ординаты автокорреляционной функции.

Пример 2.10. Выполнить расчет двух первых коэффициентов автокорреляции и их погрешностей для ряда валового сбора зерновых за 1965-2000гг. (второй столбец).

Таблица 2.11 - Расчет коэффициентов автокорреляции валового сбора зерновых

Годы	Зерновые, тыс. т			τ	R_τ	σ_{R_τ}
2000	529	753,2	741,9	0	1	0
1999	753,2	741,9	740,5	1	0,434	0,139
1998	741,9	740,5	706,2	2	0,502	0,130
1997	740,5	706,2	873,7			
1996	706,2	873,7	1072,3			
1995	873,7	1072,3	746,9			
1994	1072,3	746,9	1199,1			
1993	746,9	1199,1	1037			
1992	1199,1	1037	744,8			
1991	1037	744,8	1470			
1990	744,8	1470	1264			
1989	1470	1264	1150,6			
1988	1264	1150,6	1358			
1987	1150,6	1358	1298,4			
1986	1358	1298,4	1213,3			
1985	1298,4	1213,3	1299,4			
1984	1213,3	1299,4	1326,6			
1983	1299,4	1326,6	1195,3			

1982	1326,6	1195,3	1062,4			
1981	1195,3	1062,4	762,4			
1980	1062,4	762,4	1469,6			
1979	762,4	1469,6	1173,7			
1978	1469,6	1173,7	1199,1			
1977	1173,7	1199,1	1442,9			
1976	1199,1	1442,9	1046,1			
1975	1442,9	1046,1	1281,2			
1974	1046,1	1281,2	1372,8			
1973	1281,2	1372,8	1234			
1972	1372,8	1234	1483,4			
1971	1234	1483,4	1126,2			
1970	1483,4	1126,2	1342,3			
1969	1126,2	1342,3	1213			
1968	1342,3	1213	1309,1			
1967	1213	1309,1	1301,5			
1966	1309,1	1301,5				
1965	1301,5					

Для вычисления коэффициентов автокорреляции воспользуемся встроенной в MS Excel функцией *Коррел(массив1;массив2)*.

В начале необходимо преобразовать исходный ряд, значения которого даны в таблице 2.11. Для этого информация, указанная во втором столбце сдвигается на шаг вперед, то есть ряд валового сбора зерновых копируется без первого значения. Отметим, что данные столбца, в которых указаны годы, не используются в расчетах и имеют вспомогательное значение.

По данным второго (без последнего значения) и третьего столбца рассчитывается коэффициент автокорреляции с использованием функции *Коррел(массив1;массив2)*. В результате получен коэффициент автокорреляции при сдвиге $\tau=1$, приведенный в таблице 2.11.

Следующий шаг заключается в вычислении второго коэффициента автокорреляции R_2, соответствующего сдвигу 2, для чего преобразованный ряд вновь уменьшается на первое значение. Он найден по данным второго (без двух последних значений) и четвертого столбцов.

Для определения стандартных погрешностей полученных коэффициентов использована формула (2.48). Стандартные погрешности первого и второго коэффициентов корреляции равны 0,14 и 0,13 соответственно.

Ряд валового сбора зерновых обладает внутрирядной связанностью. Первый коэффициент автокорреляции равен 0,434, а его средняя квадратическая погрешность - 0,139 (таблица 2.11). В таком случае значение R_1 необходимо учитывать при вычислении статистических параметров выборки c_v и c_s.

При наличии значений автокорреляционных функций $R_\tau \geq 0.7$ строят уравнения авторегессии для оценки будущих ситуаций.

Пример 2.11. В качестве исходных данных используем поголовье крупного рогатого скота по Иркутской области за 1982-2010 гг. (табл. 2.12). Требуется построить авторегрессионную модель.

Определим порядок расчетов.

1. Вычисляются значения автокорреляционной функции согласно данным табл. 2.13.. В результате полученные значения показаны в виде коррелограммы (рис. 2.6).
2. Для выявления изменчивости ряда можно воспользоваться авторегрессионной зависимостью при любом τ. Построим авторегрессионные зависимости при τ=1 и 2 (рис. 2.7, 2.8).

Таблица 2.12 – Поголовье крупного рогатого скот по Иркутской области за 1982-2010 гг.

Год	КРС, тыс. гол.
1982	804,6
1983	825,6
1984	836,8
1985	832,5
1986	848,0
1987	849,9
1988	853,8
1989	865,1
1990	835,5
1991	800,5
1992	766,6
1993	717,4
1994	644,3
1995	613,1
1996	564,7
1997	491,9
1998	440,9
1999	429,3
2000	419,4
2001	418,6
2002	417,4
2003	421,3
2004	385,2
2005	346,3
2006	321,9
2007	318,2
2008	314,2
2009	329,9
2010	296,3

Таблица 2.13 – Данные для построения автокорреляционной функции

Год	x_i	x_{i+1}	x_{i+2}	x_{i+3}	x_{i+4}	x_{i+5}	x_{i+6}	x_{i+7}	x_{i+8}	x_{i+9}
1982	804,6	825,6	836,8	832,5	848	849,9	853,8	865,1	835,5	800,5
1983	825,6	836,8	832,5	848	849,9	853,8	865,1	835,5	800,5	766,6
1984	836,8	832,5	848	849,9	853,8	865,1	835,5	800,5	766,6	717,4
1985	832,5	848	849,9	853,8	865,1	835,5	800,5	766,6	717,4	644,3
1986	848	849,9	853,8	865,1	835,5	800,5	766,6	717,4	644,3	613,1
1987	849,9	853,8	865,1	835,5	800,5	766,6	717,4	644,3	613,1	564,7
1988	853,8	865,1	835,5	800,5	766,6	717,4	644,3	613,1	564,7	491,9
1989	865,1	835,5	800,5	766,6	717,4	644,3	613,1	564,7	491,9	440,9
1990	835,5	800,5	766,6	717,4	644,3	613,1	564,7	491,9	440,9	429,3
1991	800,5	766,6	717,4	644,3	613,1	564,7	491,9	440,9	429,3	419,4
1992	766,6	717,4	644,3	613,1	564,7	491,9	440,9	429,3	419,4	418,6
1993	717,4	644,3	613,1	564,7	491,9	440,9	429,3	419,4	418,6	417,4
1994	644,3	613,1	564,7	491,9	440,9	429,3	419,4	418,6	417,4	421,3
1995	613,1	564,7	491,9	440,9	429,3	419,4	418,6	417,4	421,3	385,2
1996	564,7	491,9	440,9	429,3	419,4	418,6	417,4	421,3	385,2	346,3
1997	491,9	440,9	429,3	419,4	418,6	417,4	421,3	385,2	346,3	321,9
1998	440,9	429,3	419,4	418,6	417,4	421,3	385,2	346,3	321,9	318,2
1999	429,3	419,4	418,6	417,4	421,3	385,2	346,3	321,9	318,2	314,2
2000	419,4	418,6	417,4	421,3	385,2	346,3	321,9	318,2	314,2	329,9
2001	418,6	417,4	421,3	385,2	346,3	321,9	318,2	314,2	329,9	296,3
2002	417,4	421,3	385,2	346,3	321,9	318,2	314,2	329,9	296,3	
2003	421,3	385,2	346,3	321,9	318,2	314,2	329,9	296,3		
2004	385,2	346,3	321,9	318,2	314,2	329,9	296,3			
2005	346,3	321,9	318,2	314,2	329,9	296,3				
2006	321,9	318,2	314,2	329,9	296,3					
2007	318,2	314,2	329,9	296,3						
2008	314,2	329,9	296,3							
2009	329,9	296,3								
2010	296,3									
R	1	0,992	0,975	0,950	0,918	0,881	0,843	0,802	0,765	0,729

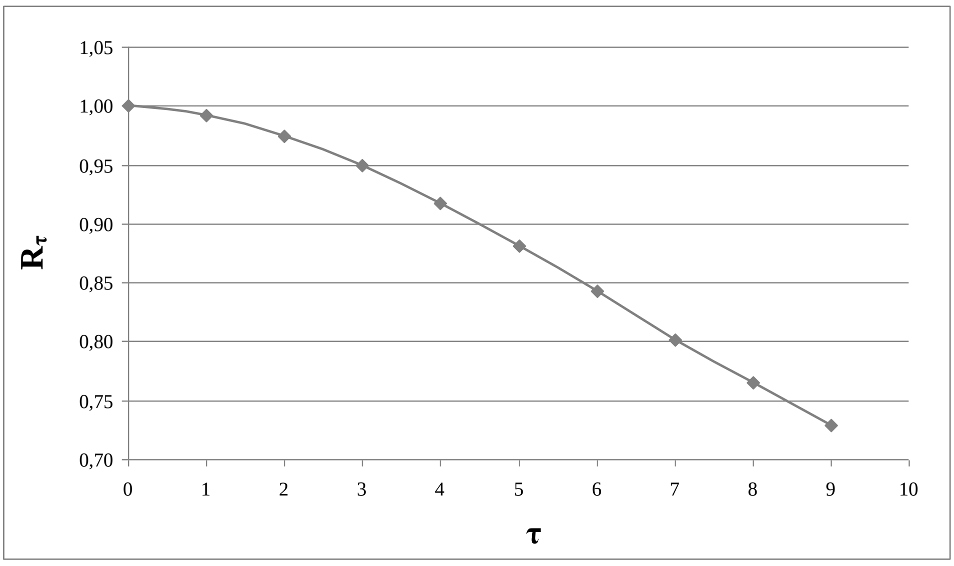


Рисунок 2.6 – Автокорреляционная функция поголовья КРС по данным Иркутской области за 1982-2010 гг.

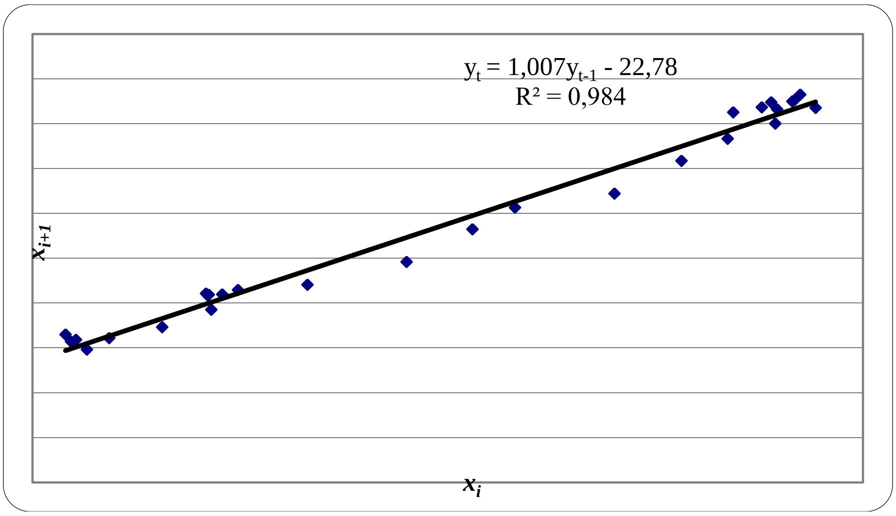


Рисунок 2.7 – Авторегрессионная функция при сдвиге $\tau = 1$

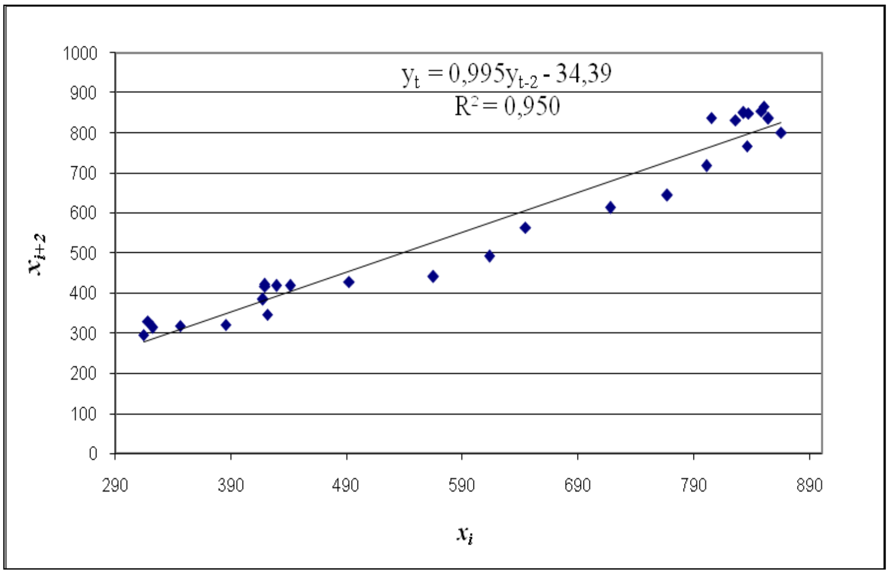


Рисунок 2.8 – Авторегрессионная функция при сдвиге $\tau = 2$

Согласно уравнениям авторегрессии и их точности ($R_\tau^2 \approx 0{,}98 - 0{,}95$) модели являются качественными.

3. Согласно точечному прогнозу на основании авторегрессионной модели y_t*=1.00* y_{t-1}*+22.78 = 1.007×296,3+22.78* (рис.2.7) значение поголовья крупного рогатого скота на 2011 г. составило 275,6 тыс. гол. Интервал, рассчитанный по формуле $V = t_\alpha \sigma_\varepsilon \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{3(n+2k-1)^2}{n(n^2-1)}}$, соответствует $\pm 81{,}8$ тыс. гол.

Помимо модели авторегрессии иногда рассматривают регрессию с учетом времени. Приведем пример подобной модели.

Пример 2.12. По данным трудоспособного сельского населения в Иркутской области за 1990-2015 гг. (табл. 2.14) построить модель авторегрессии с учетом времени.

Таблица 2.14 - Трудоспособное сельское население в Иркутской области

Год	Номер года (t)	Численность, тыс.чел.(y_{t-1})	Численность, тыс.чел., сдвиг 1 (y_t)
1990	1	285,2	283,9
1991	2	283,9	283,9
1992	3	283,9	300,0
1993	4	300,0	299,1
1994	5	299,1	297,9
1995	6	297,9	296,7
1996	7	296,7	296,7
1997	8	296,7	296,2
1998	9	296,2	297,8
1999	10	297,8	297,9
2000	11	297,9	303,1
2001	12	303,1	302,5
2002	13	302,5	306,2
2003	14	306,2	311,1
2004	15	311,1	315,7
2005	16	315,7	317,1
2006	17	317,1	315,5
2007	18	315,5	314,1
2008	19	314,1	309,8
2009	20	309,8	304,0
2010	21	304,0	295,6
2011	22	295,6	290,4
2012	23	290,4	286,0
2013	24	286,0	282,2
2014	25	282,2	281,7
2015	26	281,7	

При решении задачи выполним следующие операции.

1. В четвертом столбце сформируем новый ряд из исходного путем сдвига на одно значение вперед во времени (y_t).
2. Четвертый столбец представляет собой результативный признак y_t, а второй и третий – факторы t и y_{t-1}, оказывающие на него влияние. С помощью статистического анализа методом наименьших квадратов определяем зависимость $y_t,=f(t, \; y_{t-1})$, которая для приведенного примера имеет вид $y_t=0.975y_{t-1}-0.299t+11.29$. Точность уравнения, оцениваемая коэффициентом детерминации, составила 0,85.

На рис.2.9 приведено сравнение авторегрессионной модели с учетом и без учета времени.

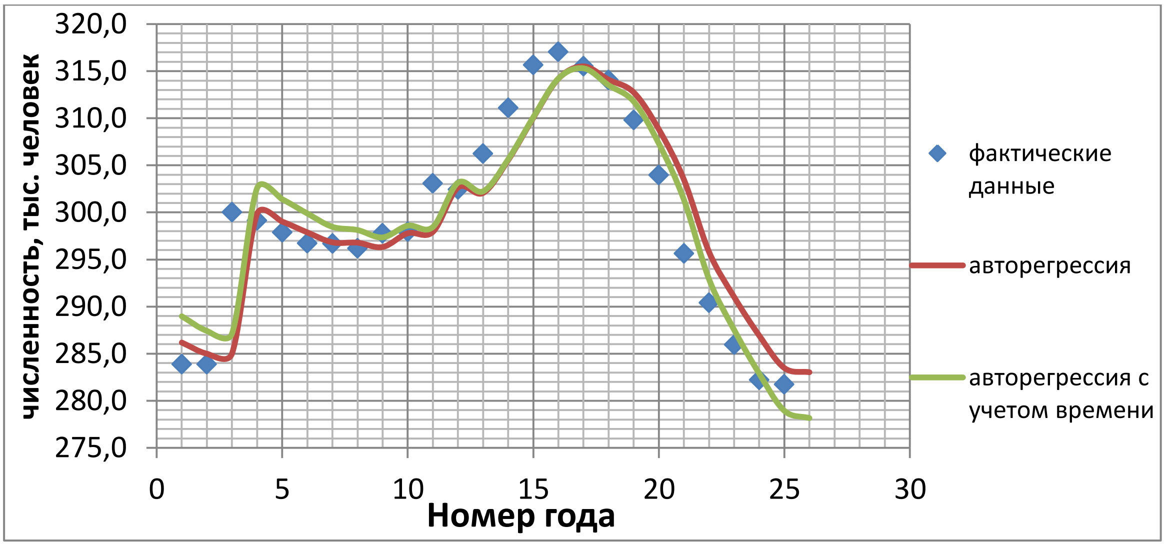


Рисунок.2.9 – Сравнение результатов моделирования изменчивости трудоспособного сельского населения Иркутской области с помощью авторегрессии с учетом и без учета времени по данным 1990-2015 гг.

Из рисунка следует, что модель без учета времени несколько завышает значения параметра, а вторая модель – занижает численность трудоспособного сельского населения.

3 ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

В математическом программировании как разделе прикладной математики рассматриваются экстремальные задачи и методы их решения. С помощью построения и решения таких задач возможно улучшение управления и организации производственных процессов. Экстремальные задачи представляют собой задачи условной оптимизации, в которые входят ограничения и целевые функции.

Задачи оптимального или математического программирования широко используются для планирования отраслей сельского хозяйства, рационального использования посевных площадей, моделирования кормовых рационов, оптимизации межхозяйственной кооперации и т.д.

В литературе используется классификация задач математического программирования по типам переменных, их связям, учету времени, свойствам информации, количеству критериев оптимальности, проявлению экстремальных явлений.

В задачах математического программирования встречаются дискретные и непрерывные переменные. В частности, в целочисленных задачах неизвестные могут принимать только целые значения, а при оптимизации посевных площадей переменные соответствуют любым неотрицательным величинам. При этом в ограничениях или целевых функциях связи между переменными имеют линейный или нелинейный вид.

Если переменные задачи оптимального программирования зависят от времени, то их относят к динамическим в отличие от статических задач, где фактор времени не применяется.

Поскольку неизвестные могут принимать случайные или детерминированные значения, то рассматривают определенные и стохастические задачи математического программирования. В ряде случаев, когда неизвестны законы распределения вероятностей случайных величин, говорят о задачах математического программирования с неопределенными параметрами.

Во многих случаях приходится находить компромиссные решения, если в задачу входят участники с различными целями. В этом случае возникают многокритериальные задачи.

И, наконец, производственные процессы в сельском хозяйстве связаны с внешними факторами. При учете экстремальных природных явлений, наводнений, засух, раннего снега, заморозков и др., причиняющих значительный ущерб сельскохозяйственным предприятиям, интерес вызывают задачи математического программирования с учетом природных событий.

Следует отметить, что многие территория страны относятся к зонам рискованного земледелия, где часто наблюдаются экстремальные природные явления, приносящие значительные ущербы сельскохозяйственным товаропроизводителям. Поэтому модели производственных процессов должны учитывать влияние на сельское хозяйство стихийных явлений.

3.1 Задачи линейного программирования

В общем виде задача линейного программирования записывается следующим образом:

$$f = \sum_{j \in J} c_j x_j \to \max(\min), \tag{3.1}$$

$$\sum_{j \in J} a_{ij} x_j \le b_i, \quad i \in I, \tag{3.2}$$

$$x_j \ge 0, \; j \in J, \tag{3.3}$$

где f - целевая функция или критерий эффективности задачи, x_j - переменная, a_{ij}, b_i, c_j - заданные постоянные величины, i, j – индексы.

Задачу (2.1) – (2.3) называют стандартной задачей линейного программирования. Совокупность чисел $X=(x_1, x_2,...,x_n)$, удовлетворяющих условиям (2.1)– (2.3), представляет собой допустимое решение или план. План $X^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_m^*)$, при котором критерий оптимальности (2.1) принимает экстремальное значение, принято называть оптимальным. Очевидно, что, если целевая функция (2.1) стремится к максимуму, тогда $f(X) \le f(X^*)$, в противном случае, когда целевая функция достигает минимума, - $f(X) \geq f(X^*)$.

С помощью задачи линейного программирования определяется структура сельскохозяйственного производства предприятия и его отраслей, скотоводства и растениеводства. Кроме того, на основе задач линейного программирования оценивается кормопроизводство и распределение посевных площадей на различном уровне иерархии, от предприятия до муниципального образования и региона, и структура стада.

Любая стандартная задача линейного программирования может быть приведена к каноническому виду. В этом случае неравенства (2.2) преобразуются в равенства вводом дополнительных переменных. Если связь левой и правой частей условия (2.2) определяется символом «≤», тогда в левую часть добавляют неотрицательную переменную. При другом виде неравенства «≥» из левой части вычитают дополнительную неотрицательную переменную. Таким образом, ограничение (2.2) преобразуется в равенство:

$$\sum_{j \in J} a_{ij} x_j = b_i \quad i \in I . \tag{3.4}$$

Кроме преобразования стандартной задачи к каноническому виду возникают задачи замены минимизации целевой функции ее максимизацией и наоборот. Для этого используют равенство $f_{max}=-f_{min}$ или $f_{min}=-f_{max}$.

При рассмотрении задачи с двумя переменными можно сформулировать геометрический смысл задачи линейного программирования.

Каждое ограничение задачи линейного программирования (3.1)-(3.3) представляет собой полуплоскость с граничными прямыми. Эти прямые разделяют плоскость на две части. При неравенстве «≥» рассматривают верхнюю полуплоскость, в противном случае – для условия «≤», неравенство характеризует нижнюю полуплоскость.

Совокупность совместных ограничений формирует выпуклое множество. При этом выпуклое множество может быть замкнутым и разомкнутым. Кроме того, встречаются случаи, когда система ограничений несовместна. Тогда отсутствует область допустимых решений (план). Выпуклое множество называют многоугольником или многогранником решения.

В многограннике решений находится точка, в которой целевая функция достигает экстремума. Эта точка существует тогда, когда целевая функция не ограничена сверху и многогранник решений не пуст (ограничения совместны).

Для нахождения оптимального плана или точки, в которой целевая функция достигнет экстремума, строят вектор $C=(c_1, c_2,...,c_j...,c_n)$. Прямую, перпендикулярную к этому вектору (задача с двумя переменными), передвигают вдоль него через многогранник решений, находя точку, в которой целевая функция достигает экстремума или устанавливают неограниченность критерия оптимальности на множестве планов.

Оптимальное решение задачи линейного программирования, если оно существует, достигается в вершинах многогранника. Другими словами, при нахождении оптимального решения интерес вызывают не внутренние точки многогранника, а его вершины.

При приведении стандартной задачи линейного программирования к каноническому виду увеличивается число переменных для избавления от неравенств. В этой ситуации часть переменных n-m приравнивают к нулю и решают m уравнений с m числом неизвестных. Переменные, приравниваемые к нулю, называют свободными или небазисными, а остальные – базисными. Полученные таким образом решения являются базисными. Если же решения допустимые, то их называют базисными допустимыми решениями. На основе приведенных определений можно составить таблицу и найти базисные допустимые решения, из которых затем выбрать оптимальное решение.

Пример 3.1. Фирма занимается производством двух видов полок. Дано 100 м^3 досок для изготовления полок двух образцов *А* и *В*. Для изготовления 1 полки образца *А* требуется 1 м^3 досок, а для производства полок второго образца *В* – 2 м^3 материала. Для изготовления единицы первого образца полок используется 2 ч машинного времени. Одна полка второго образца производится за 3 ч. Общее количество времени для изготовления полок ограничено 180 ч. Согласно договоренности с потребителями фирме необходимо изготовлять не менее 20 изделий первого образца. Стоимость одной полки образца *А* составляет 5 денежных единиц, а одного изделия вида *В* – 8 д.е. Построить целевую функцию и ограничения задачи линейного программирования при условии получения максимального дохода.

Решение

Обозначим число полок *А* переменной x_1, а количество изделий *В* – x_2. Очевидно, что стоимость первой продукции равна $5x_1$, а второй – $8x_2$, поскольку 5 и 8 представляют собой стоимость одной полки разных образцов. Тогда целевая функция примет вид

$$f(X)=5x_1+8x_2 \rightarrow max.$$

Ограничение по затратам материалов на изготовление полок определяется так

$$1x_1+2x_2 \leq 100\ [м^3],$$

где $1x_1$ – затраты материала на изготовление полок первого образца, а $2x_2$ – объем досок для производства полок второго образца.

Условие не превышения заданного машинного времени записывается следующим образом

$$2x_1+3x_2 \leq 180\ [ч],$$

где $2x_1$ – затраты времени на производство полок первого образца, а $3x_2$ – количество часов на изготовление полок В.

Ограничение, связанное с необходимостью производства не менее 20 полок образца А, имеет вид

$$x_1 \geq 20.$$

Кроме того, должно соблюдаться условие неотрицательности переменных или $x_2 \geq 0$.

Таким образом, задача включает в себя 2 переменные, состоит из 4 ограничений и целевой функции, которую максимизируют.

Пример 3.2. Найти максимум и минимум функции $f = x_1 + x_2$ при условиях

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \leq 16, \\ -4x_1 + 2x_2 \leq 8, \\ x_1 + 3x_2 \geq 9, \end{cases}$$
$$x_1, x_2 \geq 0.$$

Решение

Построим многоугольник решений. Для этого в неравенствах системы ограничений и условиях неотрицательности переменных знаки неравенств заменим на знаки точных равенств:

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 = 16, \\ -4x_1 + 2x_2 = 8, \\ x_1 + 3x_2 = 9, \end{cases}$$
$$x_1 = 0,$$
$$x_2 = 0.$$

Построив полученные прямые, найдем соответствующие полуплоскости их пересечение (рисунок 6).

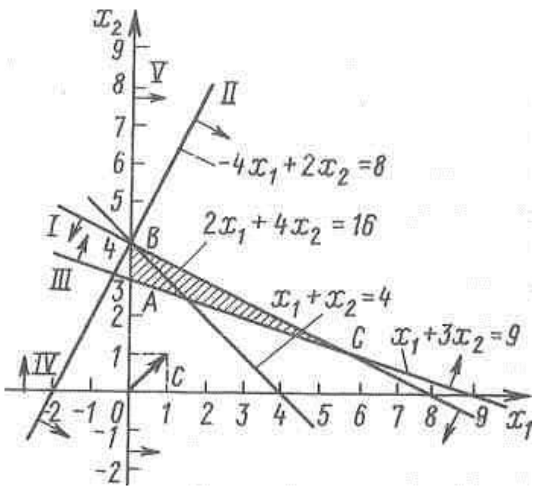


Рисунок 3.1 - Графическая интерпретация решения задачи линейного программирования

Из рисунка 3.1 следует, что многоугольником решений задачи является треугольник *ABC*. Координаты точек этого треугольника удовлетворяют условию неотрицательности и неравенствам системы ограничений задачи. Следовательно, задача будет решена, если среди точек треугольника *ABC* найти такие, в которых функция $f = x_1 + x_2$ принимает максимальное и минимальное значения. Для нахождения этих точек построим прямую $x_1 + x_2 = 4$ (число 4 взято произвольно).

Координаты вектор *C = (1,1)* получены как частные производные целевой функции:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 1,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = 1.$$

Передвигая данную прямую параллельно самой себе в направлении вектора *C*, определяем, что ее последней общей точкой с многоугольником решений является точка *C*. Следовательно, в этой точке функция *f* принимает максимальное значение. Так как *C* – точка пересечения прямых I и III, то ее координаты удовлетворяют уравнениям этих прямых:

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 = 16, \\ x_1 + 3x_2 = 9. \end{cases}$$

Решив эту систему уравнений, получим $x_1^* = 6,\ x_2^* = 1.$ Таким образом, максимальное значение функции $f_{\max} = 7.$

Для нахождения минимального значения целевой функции задачи передвигаем прямую $x_1 + x_2 = 4$ в направлении, противоположном направлению вектора *C = (1,1)*. В этом случае последней точкой является точка *A*. Для определения координат решаем систему уравнений, откуда $x_1^* = 0$, $x_2^* = 3$, $f_{min}=3$

Пример 3.3. Привести задачу линейного программирования к основной (канонической) форме:

$$f=x_1+2x_2 \to max,$$

$$x_1+x_2 \le 6,$$

$$3x_1+10x_2 \le 26,$$

$$x_1+11x_2 \le 20,$$

$$x_1, x_2 \ge 0.$$

Определить количество базисных допустимых решений и найти оптимальный план.

Решение

Приведение задачи линейного программирования (ЗЛП) к каноническому виду осуществляется введением в левую часть соответствующего ограничения дополнительной переменной со знаком «-» в случае ограничения типа «≥» и знаком «+» в случае ограничения типа «≤».

Таким образом, данная задача примет вид:

$$F = x_1 + 2x_2 \to max,$$
$$x_1 + x_2 + x_3 = 6,$$
$$3x_1 + 10x_2 + x_4 = 26,$$
$$x_1 + 11x_2 + x_5 = 20,$$
$$x_1, x_2 \geq 0.$$

Решить задачу можно путем последовательного приравнивания части переменных n-m к 0. Поскольку число переменных $n=5$, а число ограничений, исключая последнее условие, $m=3$, тогда к нулю приравниваются две переменные, которые по определению называются небазисными. Остальные рассчитываемые неизвестные – базисные.

1) Пусть $x_1 = 0, x_2 = 0$, тогда подставляя эти значения в соответствующее уравнение, получим

$$0 + 0 + x_3 = 6, x_3 = 6,$$
$$0 + 0 + x_4 = 26, x_4 = 26,$$
$$0 + 0 + x_5 = 20, x_5 = 20,$$
$$f = 0 + 0 = 0.$$

2) Пусть $x_1=0$, $x_3=0$, тогда

$$0 + x_2 + 0 = 6, x_2 = 6,$$
$$0 + 10 \cdot 6 + x_4 = 26, x_4 = 26 - 60, x_4 = -34,$$
$$0 + 11 \cdot 6 + x_5 = 20, x_5 = 20 - 66, x_5 = -46.$$

Поскольку полученные переменные принимают отрицательные значения, задача не имеет допустимого базисного решения.

Аналогично путем перебора небазисных переменных находятся значения остальных неизвестных. Полученные результаты занесены в таблицу 2.1.

Таблица 3.1 – Решения задачи линейного программирования на выпуклом множестве

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	F
1	0	0	6	26	20	0
2	0	6	0	-34	-46	-
3	0	2.6	3.4	0	-8,6	-
4	0	1,8	4,2	8	0	3,6

5	6	0	0	8	14	6
6	8,7	0	-2,7	0	11,3	-
7	20	0	-14	-34	0	-
8	4,9	1,1	0	0	3	7,1
9	4,6	1,4	0	-1,8	0	-
10	3,7	1,5	0,8	0	0	6,7

Таким образом, из таблицы видно, что количество допустимых решений в данной задаче равно *5*.

Оптимальным будет являться решение $x_1 = 4{,}9, x_2 = 1{,}1$, при котором целевая функция достигает максимума - $f_{\max} = 7{,}1$.

3.2 Симплекс-метод решения задачи линейного программирования

Задача линейного программирования заключается в нахождении оптимального решения из допустимой области. В предыдущем разделе приведены два метода решения задачи линейного программирования. Один из них графический, а второй - основан на поиске базисных допустимых решений. Оба метода имеют ограничения. Графический метод применим для числа неизвестных, не превышающих $n \leq 3$. Что касается второго метода, то его рационально использовать при небольшом числе переменных, хотя возможностей у этого метода больше, чем у предыдущего.

Широкое распространение для решения задач линейного программирования нашел симплекс-метод, разработанный Дж. Данцигом. Этот метод позволяет решать задачи в 3 этапа:

1) определение исходного решения и построение симплекс-таблицы;
2) получение или определение допустимого решения;
3) определение оптимального решения путем последовательного улучшения исходного варианта за определенное число операций.

Симплекс-метод применим при следующих условиях: локальный экстремум не отличается от глобального; множество решений представляет собой выпуклый многогранник; целевая функция достигает экстремума в вершине многогранника; угловым точкам многогранника отвечает опорный план задачи.

При использовании симплекс-метода в начале стандартная задача линейного программирования приводится к каноническому виду. Затем строится симплекс-таблица. Первоначально может быть получено базисное допустимое решение. Вместе с тем не исключена ситуация недопустимого решения. Тогда переходят к преобразованию исходной таблицы для получения базисного допустимого решения. При переходе от одного опорного плана к другому осуществляется проверка достижения оптимальности целевой функцией. При проверке оптимальности используются следующие теоремы.

Первая из них гласит, что если для некоторого вектора, не входящего в базис, выполняется условие

$$\Delta_j = z_j - c_j\,, \tag{3.5}$$

где $z_j = \sum_{i=1}^{m} c_j a_{ij}$, $j = \overline{1,n}$, то можно получить новый опорный план, для которого значение целевой функции увеличится (максимизация критерия оптимальности). При этом рассматриваются два случая:

- если все координаты вектора, подлежащего вводу в базис, неотрицательны, то задача не имеет решения;

- если имеется хотя бы одна положительная координата у вектора, вводимого в базис, то можно получить новый опорный план.

По второй теореме, если для всех векторов выполняется условие $\Delta_j = z_j - c_j \geq 0$, то полученный план является оптимальным.

При преобразовании симплекс-таблиц вводятся следующие понятия: разрешающий элемент, разрешающая строка и столбец и другие элементы. Разрешающий элемент находится в столбце с отрицательными коэффициентами c_j. Он определяется как минимальное соотношение правых частей ограничений b_i и коэффициентов при переменных левых частей условий a_{ji}:

$$a_0 = \min \frac{b_i}{a_{ji}}\,. \tag{3.6}$$

После определения разрешающего элемента выполняются следующие операции по заполнению новой симплекс таблицы.

Осуществляется замена свободной переменной базисной на пересечении разрешающего столбца и строки.

Ячейка разрешающего элемента заполняется числом, обратным разрешающему элементу:

$$a_{0í} = a_0^{-1} \tag{3.7}$$

Элементы разрешающей строки $a_{сн}$ и столбца $a_{кн}$ в новой таблице вычисляются по формулам:

$$a_{cí} = \frac{a_{ññ}}{a_0}, \tag{3.8}$$

$$a_{êí} = -\frac{a_{êñ}}{a_0}, \tag{3.9}$$

где $a_{сс}$ и $a_{кс}$ – предыдущие значения элементов разрешающей строки и столбца.

Остальные элементы $a_{онk}$ рассчитываются по выражению

$$a_{îík} = a_{îñ} - \frac{a_{ññk} a_{êñk}}{a_0}, \tag{3.10}$$

где $a_{онk}$ – остальные элементы предыдущей таблицы, $a_{ссk}$ и $a_{кскk}$ – элементы разрешающей строки и столбца, k – индекс остальных элементов из множества K.

В результате определенного числа итераций достигается оптимальное решение задачи.

Пример 3.4. Пусть требуется произвести 2 вида продукции *А* и *В*. Суммарное количество сырья на производство продукции не превышает 100 кг. Затраты на изготовление единицы продукции *А* составляют 1 кг, а затраты на еденицу. продукции *В* – 2 кг сырья. На изготовление продукции *А* требуется 2 ч времени, а изделий *В* – 3 ч. Максимальное количество времени на производство продукции в течение недели не превышает 180 ч. Причем количество 1–й продукции должно быть не менее 20. Себестоимость продукции *А* составляет 5 денежных единиц, а *В* – 8. Решить задачу симплекс-методом.

Решение

Симплекс-метод позволяет решать задачи в 3 этапа:

В начале определяется исходное решения и строится исходная симплекс-таблица. При получении недопустимого решения находится допустимый план. Затем методом последующих приближений по правила преобразования симплекс-таблицы определяют оптимального решение.

В этой задаче x_1 – количество продукции *А*, а x_2 – количество продукции *В*.

Целевая функция и ограничения имеют вид:

$$F=5x_1+8\,x_2\to max,$$
$$x_1+2\,x_2\le 100,$$
$$2\,x_1+3\,x_2\le 180,$$
$$x_1\ge 20,$$
$$x_2\ge 0.$$

Приведем неравенства и целевую функцию к каноническому виду:

$$F=5x_1+8\,x_2,$$
$$x_1+2\,x_2+\,x_3=100,$$
$$2\,x_1+3\,x_2+\,x_4=180,$$
$$x_1-\,x_5=20$$
$$x_2\ge 0.$$

В качестве базисных переменных примем дополнительные переменные – x_3, x_4, x_5, а другие неизвестные (небазисные переменные), приравниваем к нулю,

Преобразуем уравнения относительно базисных переменных, т.е.

$$x_3=100-(x_1+2\,x_2)$$
$$x_4=180-(2\,x_1+3\,x_2)$$
$$x_5=-20-(-x_1)$$
$$F=0-(-5\,x_1-8\,x_2)$$

Составим исходную симплекс-таблицу

Таблица 3.2 – Исходная симплекс-таблица

разрешающий столбец

Базисные переменные	Свободные члены	Свободные переменные	
		x_1	x_2
x_3	100	1	2
x_4	180	2	3
x_5	-20	-1	0
f	0	-5	-8

разрешающая строка

Исходное решение задачи: $x_1=0;\ x_2=0;\ x_3=100;\ x_4=180;\ x_5=-20$. Решение недопустимо, т.к. среди значений переменных одно x_5 является отрицательным.

Следовательно, необходимо найти допустимое решение.

Для расчета параметров следующей таблицы определяется разрешающий элемент.

Разрешающий элемент находится по правилу определения минимального соотношения между свободным членом и коэффициентом при свободных переменных. Разрешающий элемент $a_0=-20\ /\ -1=20$

На основании элемента a_0 выделяется разрешающая строка и разрешающий столбец. Таким образом, таблица делится на 3 вида элементов:

- данные разрешающего столбца;
- данные разрешающей строки;
- остальные данные.

Каждое симплексное преобразование системы сводится к переходу от одной симплексной таблицы к другой. Перед заполнением новой симплекс-таблицы осуществляется замена базисной переменной x_5 небазисной неизвестной x_1 на пересечении разрешающего столбца и строки. Таким образом, переменная x_1 становится базисной, а x_5 – свободной или небазисной неизвестной.

Переход ко второй симплексной таблице выполняется согласно следующему правилам (3.6)-(3.10):

- ячейка последующего разрешающего элемента

$$a_{0н}=1\ /-1=-1;$$

- элементы разрешающей строки:

$$a_{сн}=-20/-1=20 \text{ и } a_{сн}=0/-1=0;$$

- элементы разрешающего столбца:

$$a_{кн}=-(1/-1)=1,\ \ a_{кн}=-(2/-1)=2 \text{ и } a_{кн}=-(-5/-1)=-5;$$

- остальные элементы симплекс-таблицы:

$$a_{он}=100-\frac{1\cdot(-20)}{-1}=80,$$

$$a_{он}=180-\frac{2\cdot(-20)}{-1}=140,$$

$$a_{îí}=0-\frac{-5\times-20}{-1}=100,$$

$$a_{îí}=2-\frac{-1\times0}{-1}=2,$$

$$a_{\hat{\imath}\acute{\imath}} = 3 - \frac{2 \times 0}{-1} = 3,$$

$$a_{\hat{\imath}\acute{\imath}} = -8 - \frac{1 \times 0}{-1} = -8.$$

На основе вычислений сформирована новая симплекс-таблица.

Итак, получено допустимое решение, $x_1=20$; $x_2=0$; $x_3=0$; $x_4=80$; $x_5=140$. Вместе с тем полученное решение при $f=100$ не является оптимальным, поскольку возможно увеличение целевой функции ввиду отрицательности свободных переменных в строке f.

Таблица 3.3 – Симплекс-таблица первой итерации

Базисные переменные	Свободные члены	Свободные переменные	
		x_5	x_2
x_3	80	1	**2**
x_4	140	2	3
x_1	20	-1	0
f	100	-5	-8

Поэтому на основе правил преобразования элементов симплекс-таблицы находится следующая вершина многогранника или допустимое решение.

Разрешающий элемент находится в столбце с отрицательными коэффициентами при переменных целевой функции. В данном случае разрешающим элементом является число *2* (таблица 3.3), выделенное полужирным шрифтом.

Согласно правилам преобразования разрешающего элемента, разрешающей строки, разрешающего столбца и остальных элементов получены таблицы 3.4 и3.5.

Таблица 3.4 –Симплекс-таблица второй итерации

Базисные переменные	Свободные члены	Свободные переменные	
		x_5	x_3
x_2	40	0,5	0,5
x_4	20	**0,5**	-1,5
x_1	20	-1	0
f	120	-1	4

Таблица 3.5 –Симплекс-таблица третьей итерации

Базисные переменные	Свободные члены	Свободные переменные	
		x_4	x_4
x_2	20	-1	2
x_5	40	2	-3
x_1	60	2	-3
f	460	2	1

Оптимальное решение достигнуто в случае, когда переменные примут следующие значения: $x_1=60;\ x_2=20;\ x_3=40;\ x_4=0;\ x_5=0$. При этом $f_{max}=460$ денежных единиц. Максимум прибыли достигается при производстве 60 изделий A и 20 - продукции B.

3.3 Двойственная задача линейного программирования

Каждой исходной задаче линейного программирования (3.1)–(3.3) ставится в соответствие двойственная задача:

$$g(Y)=\sum_{i\in I} b_i y_i \to \min(\max)\ , \tag{3.11}$$

$$\sum_{i\in I} a_{ij}^T y_i \ge c_j\ ,\ j\in J \tag{3.12}$$

$$y_i \ge 0,\ i\in I\ . \tag{3.13}$$

При построении двойственной задачи вводятся новые переменные y_i, которые называются двойственными или объективно обусловленными оценками.

Если целевая функция исходной задачи максимизируют, то критерий оптимальности двойственной задачи должен достигать минимума. Неравенства вида «≤» задачи (3.1)-(3.3) заменяют символом «≥» двойственной задачи.

Исходная матрица коэффициентов при неизвестных в левых частях ограничений исходной задачи A преобразуют в транспонированную матрицу A^T:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \tag{3.14}$$

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}. \qquad (3.15)$$

Число переменных в двойственной задаче соответствует количеству ограничений исходной задачи, а число ограничений (3.12) равно количеству неизвестных исходной задачи. Коэффициентами при неизвестных в целевой функции двойственной задачи являются правые части ограничений исходной задачи. Правые же части условий двойственной задачи представляют собой коэффициенты при неизвестных целевой функции исходной задачи.

Каждому ограничению одной задачи соответствует одна переменная другой задачи. При этом номер переменной совпадает с номером ограничения. Неравенству, характеризуемому символом «≤», соответствует переменная, связанная с условием неотрицательности. Для равенств в ограничениях исходной задачи переменная двойственной задачи может принимать как положительные, так и отрицательные значения.

Пары двойственных задач могут быть симметричными и несимметричными. В симметричных задачах системы ограничений представляют собой неравенства. Кроме того, на двойственные переменные налагается условие неотрицательности. В несимметричных задачах ограничения исходной задачи имеют вид равенств, а условия двойственной задачи задаются неравенствами. При этом переменные двойственной задачи могут принимать положительные и отрицательные значения.

Между решениями исходной (3.1)-(3.3) и двойственной задачи (3.11)-(3.13) имеют место зависимости. Одна из лемм гласит, если X – некоторый план исходной задачи, а Y – произвольный план двойственной задачи, то справедливо неравенство $f(X) \le g(Y)$. При этом в исходной задаче определяется максимум целевой функции, а в двойственной – минимальное значение критерия оптимальности. Согласно второй лемме при $f(X^*)=g(Y^*)$ X^* и Y^* являются оптимальными планами исходной и двойственной задач.

Кроме приведенных лемм справедливы две теоремы. По первой из них, если одна из задач имеет оптимальный план, то и другая имеет оптимальный план, а значения целевых функций при оптимальных планах исходной и двойственной задачи равны. Причем, если целевая функция одной из пары двойственных задач не ограничена сверху, то другая задача не имеет планов.

Вторая теорема гласит, что планы X^* и Y^* являются оптимальными тогда и только тогда, когда для любых $j=\overline{1,n}$ выполняется равенство

$$\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* - c_j\right) x_j^* = 0 . \qquad (3.16)$$

Переменные y_i представляют собой оценки влияния правых частей ограничений исходной задачи b_i на оптимальный план двойственной задачи. При экономической интерпретации двойственной задачи эти оценки должны быть такими, чтобы общая оценка сырья, используемого на производство единицы продукции каждого вида, была не меньше цены единицы продукции данного вида c_j. Здесь следует иметь в виду пару двойственных задач, в которой целевая функция исходной задачи определяется на максимум, а критерий оптимальности двойственной задачи достигает минимума.

Пример 3.5. Для задачи, состоящей в максимизации функции $f=4x_1+x_2-4x_3$ при условиях

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 4x_3 \le 12 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 13 \\ 2x_1 + 5x_2 - 6x_3 \le 11 \end{cases}$$

$$x_1, x_2, x_3 \ge 0$$

сформулировать двойственную задачу.

Решение

В начале преобразуем матрицу коэффициентов при неизвестных левой части ограничений исходной задачи:

$$A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & 5 & -6 \end{vmatrix}, \; A^T = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 5 \\ 4 & -2 & -6 \end{vmatrix}.$$

Тогда ограничения двойственной задачи примут вид

$$\begin{cases} 2y_1 + y_2 + 2y_3 \ge 4 \\ -y_1 + 3y_2 + 5y_3 \ge 1 \\ 4y_1 - 2y_2 - 6y_3 \ge -4 \end{cases}$$

$$y_1, y_3 \ge 0$$

Используя правые части ограничений исходной задачи нетрудно определить целевую функцию $g(Y)=12y_1+13y_2+11y_3$, которая должна достигнуть минимума.

3.4 Решение задачи линейного программирования с использованием программного продукта MS Excel

Постановку и решение задачи линейного программирования с помощью MS Excel рассмотрим на следующем примере.

Хозяйство специализируется в полеводстве на производстве зерна, овощей и картофеля. Сельскохозяйственное предприятие располагает 3200 га пашни, трудовыми ресурсами - 7000 чел.-дней и минеральными удобрениями - 15000 ц.д.в. Требуется найти такое сочетание посевных площадей, которое обеспечило бы получение максимума прибыли.

Следует учесть, что

– площадь посева овощей и картофеля не должна превышать 25% общей площади пашни;

– хозяйством заключен договор на продажу зерна в объеме 65000 ц.

Для разработки экономико-математической модели необходима подготовка входной информации (таблица 3.6).

Таблица3.6– Данные для построения модели размещения посевов

Показатели	Сельскохозяйственные культуры		
	зерновые	овощи	картофель
Урожайность, ц/га	26	200	180
Цена реализации 1 ц продукции, руб./ц.	980	2500	2000
Стоимость товарной продукции с 1 га, руб.	25480	500000	360000
Затраты на 1 га: МДС, тыс. руб.	2,7	12,7	3,1
труда, чел.-дней.	1,5	4,5	1,5
минеральных удобрений, ц.д.в.	2	15	2,3
Прибыль с 1 га, руб.	2,89	7,93	3,63

За неизвестные примем площади посева сельскохозяйственных культур по видам:

x_1 - зерновых культур;

x_2 – овощи;

x_3 – картофель.

Для построения экономико-математической модели задачи необходимо учесть все условия. В данном случае, по этим условиям можно составить пять ограничений.

1. Сумма площадей посева сельскохозяйственных культур не должна превышать площади, имеющейся в хозяйстве (3200 га). Коэффициентами при неизвестных в этом ограничении характеризуют расход пашни на 1 га каждой сельскохозяйственной культуры. В данном случае технико-экономические коэффициенты по неизвестным будут равняться единице. В правой части записывается общая площадь пашни

$$x_1 + x_2 + x_3 \le 3200.$$

2. Сумма площадей посева овощей и картофеля не должна превышать площади, которая может быть отведена для этой цели (3200×0,25=800 га). Коэффициентами при неизвестных в этом ограничении характеризуют расход пашни, отведенной под посевы овощей и картофеля на 1 га. В данном случае технико-экономические коэффициенты по неизвестным x_2 и x_3 будут равняться единице, а по зерновым культурам (x_3) - нулю. В правой части записывается максимальная площадь пашни, которая может быть отведена под посевы овощей и картофеля

$$x_2 + x_3 \le 800.$$

3. Третье и четвертое ограничения гарантируют, что использование трудовых ресурсов и минеральных удобрений не превысит их наличие в хозяйстве. Другими словами, сумма произведений норм затрат ресурсов на 1 га на площади посева соответствующих сельскохозяйственных культур не должна превышать объемов ресурсов, имеющихся в сельскохозяйственном предприятии. Коэффициентами при неизвестных в этих ограничениях будут

являться нормы расхода ресурсов (в третьем ограничении – трудовых ресурсов, в четвертом – минеральных удобрений) на 1 га площади посева сельскохозяйственных культур. В данном случае технико-экономические коэффициенты взяты из таблицы 1. В правой части записывается наличие этих ресурсов в хозяйстве:

$$1{,}5x_1 + 4{,}5x_2 + 1{,}5x_3 \le 7000,$$

$$2x_1 + 15x_2 + 2{,}3x_3 \le 15000.$$

4. Пятое ограничение гарантирует производство запланированного объема зерна. В качестве коэффициентов при переменных выступает выход зерна с 1 га площади посева сельскохозяйственных культур. При неизвестной x_1 это урожайность зерновых (таблица 1). При переменных x_2 и x_3 этот коэффициент равен нулю. В правой части записывается план производства зерна

$$26x_1 \ge 65000.$$

В результате получена система пяти линейных неравенств с тремя неизвестными. Требуется найти такие неотрицательные значения этих неизвестных $x_1>=0$; $x_2>=0$; $x_3>=0$, которые бы удовлетворяли данной системе неравенств и обеспечивали получение максимума прибыли от отрасли растениеводства в целом:

$$f = 2{,}89x_1 + 7{,}93x_2 + 3{,}53x_3 \to \max.$$

В качестве коэффициентов при неизвестных в целевой функции выступает прибыль, получаемая с 1 га площади посева сельскохозяйственных культур. Эти коэффициенты рассчитаны на основании данных таблицы 1.

Поскольку данная задача решается с помощью MS Excel, то и подготовку всей входной информации для построения экономико-математической модели целесообразно осуществлять также с использованием этого табличного процессора. Это облегчает не только расчеты технико-экономических коэффициентов и других данных, но и дает в дальнейшем возможность автоматического обновления информации в экономико-математической модели.

Вся разработанная информация сводится в развернутую экономико-математическую модель и заносится в рабочий лист MS Excel (рис. 3.2).

В столбцы **A** («№»), **B** («Ограничения»), **C** («Единицы измерения») и **H** («Тип ограничений») вводятся соответствующие данные непосредственно в модель (рисунок 3.2). Они не используются в расчетах и служат для информативности и облегчения понимания содержания модели. В столбец **I** («Размер ограничений») вводятся ссылки на ячейки, содержащие соответствующую названию столбца информацию (значения правых частей построенных ранее неравенств).

Для значений переменных x_1, x_2, x_3 были оставлены пустые ячейки - соответственно **D11**, **E11**, **F11**. Изначально пустые ячейки программа MS Excel воспринимает как ячейки, значение которых равно нулю. Столбец **G**, названный «**Формула**», предназначен для определения суммы произведений значений искомых неизвестных (ячейки **D11**, **E11**, **F11**) и технико-экономических коэффициентов по соответствующим ограничениям (строки 5-9) и целевой функции (строка 10).

Q9

Табличная запись числовой модели задачи оптимизации структуры посевных площадей

		Ед. измерения	Зерновые x_1	Сахарная свекла x_2	Подсолнечник x_3	Формула	Тип ограничения	Размер и вид ограничений
1	Площадь посевов	га	1	1	1	0,00	<=	3200
2	Площадь технических культур	га		1	1	0,00	<=	800
3	Затраты труда	ч-дни	1,5	4,5	1,5	0,00	<=	7000
4	Мин удобрения	ц.д.в.	2	15	2,3	0,00	<=	15000
5	Валовое производство зерна	ц	26			0,00	>=	65000
	Прибыль	руб.	2,89	7,93	3,53	0,00		мах
	Результаты решения задачи							

Рисунок 3.2 – Табличная запись задачи оптимизации структуры посевных площадей

Таким образом, в столбце **G** определяется:

– количество используемых ресурсов (ячейка **G5** – общей площади посевов; **G6** – пашни, которая может быть использована под посевы технических культур; **G7** – трудовых ресурсов; **G8** – минеральных удобрений);

– количество произведенного зерна (ячейка **G9**);

– величина прибыли (ячейка **G10**).

G5 =СУММПРОИЗВ(D5:F5;$D$11:$F$11)

Табличная запись числовой модели задачи оптимизации структуры посевных площадей

		Ед. измерения	Зерновые x_1	Сахарная свекла x_2	Подсолнечник x_3	Формула	Тип ограничения	Размер и вид ограничений
1	Площадь посевов	га	1	1	1	0,00	<=	3200
2	Площадь технических культур	га		1	1	0,00	<=	800
3	Затраты труда	ч-дни	1,5	4,5	1,5	0,00	<=	7000
4	Мин удобрения	ц.д.в.	2	15	2,3	0,00	<=	15000
5	Валовое производство зерна	ц	26			0,00	>=	65000
	Прибыль	руб.	2,89	7,93	3,53	0,00		мах
	Результаты решения задачи							

Рисунок 3.3 – Фрагмент табличной записи задачи оптимизации структуры посевных площадей

На рисунке 3.3 показано, как в ячейке **G5** реализуется запись суммы произведений значений переменных (площадей посева с.-х. культур - ячейки **D11**, **E11**, **F11**) на соответствующие коэффициенты (ячейки **D5**, **E5**, **F5**) с помощью функции MS Excel «**СУММПРОИЗВ**». Так как при написании данной формулы использованы абсолютные адресации на ячейки от **D11** до **F11**, эта формула может быть скопирована в другие ячейки от **G6** до **G10**.

Таким образом, построен опорный план (рис. 3.3) и получено первое допустимое решение. Значения неизвестных $\mathbf{X_1}$, $\mathbf{X_2}$, $\mathbf{X_3}$ равны нулю (ячейки **D11**, **E11**, **F11 -** пустые ячейки), ячейки столбца **G** «Сумма произведений» по всем ограничениям (строкам 5-9) и целевой строке (строка 10) также имеют нулевые значения.

Экономическая интерпретация первого опорного плана звучит следующим образом: в хозяйстве имеются ресурсы, рассчитаны все технико-экономические коэффициенты, но процесс производства еще не начат; ресурсы не использовались, и, соответственно, прибыли нет.

Для оптимизации имеющегося плана воспользуемся инструментом **Поиск решения,** который находится в меню **«Данные»**. Если нет такой команды в меню **Данные,** необходимо в меню **Файл – Параметры - Надстройка** поставить галочку напротив «**Поиск решения»**. После этого данная процедура станет доступной в меню **«Данные»**.

После выбора данной команды появится диалоговое окно (рис. 3.4).

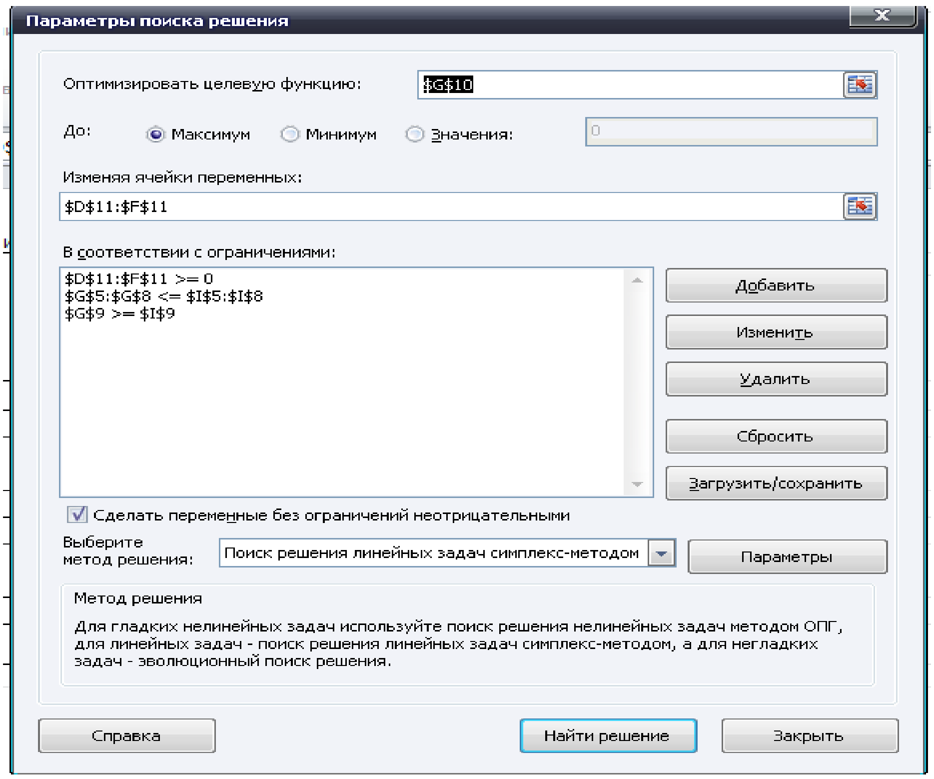


Рисунок 3.4 – Диалоговое окно надстройки «Поиск решения» в MS Excel

Поскольку в качестве критерия оптимизации нами выбрана максимизация прибыли, в поле «**Установить целевую ячейку**

(оптимизировать целевую функцию)» введите ссылку на ячейку, содержащую формулу расчета прибыли. В нашем случае это ячейка **$G$10**. Чтобы максимизировать значение конечной ячейки путем изменения значений влияющих ячеек (влияющими, в данном случае это и изменяемые ячейки, являются ячейки, которые предназначены для хранения значений искомых неизвестных), переключатель установите в положение **максимальному значению**.

В поле «**Изменяя ячейки переменных»** введите ссылки на изменяемые ячейки, разделяя их запятыми; либо, если ячейки находятся рядом, указывая первую и последнюю ячейку, разделяя их двоеточием (**$D$11:$F$11**).

В поле «**В соответствии с ограничениями»** введите все ограничения, накладываемые на поиск решения. Добавление ограничения рассмотрим на примере добавления первого ограничения по общей площади пашни.

В разделе «**В соответствии с ограничениями»** диалогового окна «**Поиск решения»** нажмите кнопку **Добавить**. Появится следующее диалоговое окно (рис. 3.5)

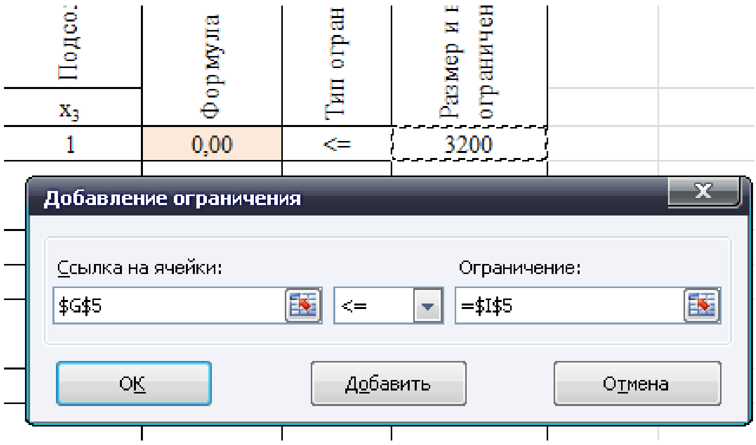


Рисунок 3.5 – Фрагмент решения задачи линейного программирования в надстройке MS Excel «Поиск решения»

В поле **Ссылка на ячейку** введите адрес ячейки, на значение которой накладываются ограничения. В нашем случае, это ячейка **$G$5**, где находится формула расчета используемой пашни в текущем плане.

Выберите из раскрывающегося списка условный оператор <=, который должен располагаться между ссылкой и ограничением.

В поле **Ограничение** введите ссылку на ячейку, в которой находится значение наличия площади посевов в хозяйстве, либо ссылка на это значение. В нашем случае, это ячейка **$I$5**

В результате диалоговое окно примет вид как на рисунке 2.5

Чтобы принять ограничение и приступить к вводу нового, нажмите кнопку **Добавить**. Аналогично вводятся и другие ограничения. Чтобы вернуться в диалоговое окно **Поиск решения**, нажмите кнопку **OK**.

После выполнения вышеперечисленных инструкций диалоговое окно **Поиск решения** будет иметь следующий вид (рис. 3.4).

Для изменения и удаления ограничений в списке **Ограничения** диалогового окна **Поиск решения** укажите ограничение, которое требуется изменить или удалить. Выберите команду **Изменить** и внесите изменения либо нажмите кнопку **Удалить**.

Поставьте флажок **Линейная модель** в диалоговом окне **Параметры Поиска решения** или выберите метод решения **«Поиск решения линейных задач симплекс-методом»**. Флажок **«Сделать переменные без ограничений неотрицательными»** позволит соблюсти условие неотрицательности переменных (при решении нашей задачи – поставить обязательно). Остальные параметры можно оставить без изменений, либо установить нужные для вас параметры, при необходимости используя справку.

Для запуска задачи на решение нажмите кнопку **Выполнить** (**Найти решение**) и выполните одно из следующих действий:

– чтобы сохранить найденное решение на листе, выберите в диалоговом окне **Результаты поиска** решения вариант **Сохранить найденное решение** (рис. 3.6);

– чтобы восстановить исходные данные, выберите вариант **Восстановить исходные значения**.

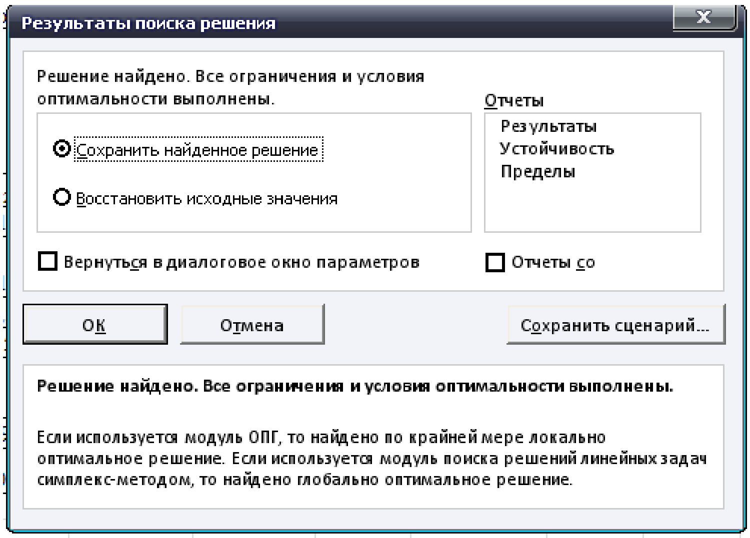


Рисунок 3.6 – Результаты поиска решения задачи линейного программирования

Для того чтобы прервать поиск решения, нажмите клавишу **ESC**.

Лист Microsoft Excel будет пересчитан с учетом найденных значений влияющих ячеек. В результате решения и сохранения результатов поиска на листе модель примет следующий вид (рис. 3.7).

В ячейках **D11**-**F11** получены значения искомых неизвестных (площади посева равны: зерновых - 2500 га, сахарной свеклы - 661 га, подсолнечника – 39 га), в ячейках **G5**-**G8** определены объемы используемых ресурсов (общей площади пашни – 3200 га; площади пашни, которая может быть использована под посевы технических культур – 700 га; трудовых – 6781,9 чел.-дней; минеральных удобрений – 15000 ц.д.в.), в ячейке **G9** установлено количество произведенного зерна (65000 ц.). При всех этих значениях величина прибыли достигает 12602,77 тыс. руб. (ячейка **G10**).

G10 | f_x | =СУММПРОИЗВ(D10:F10;$D$11:$F$11)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Табличная запись числовой модели задачи оптимизации структуры посевных площадей								
2–3			Ед. измерения	Зерновые	Сахарная свекла	Подсолнечник	Формула	Тип ограничения	Размер и вид ограничений
4				x_1	x_2	x_3			
5	1	Площадь посевов	га	1	1	1	3200,00	<=	3200
6	2	Площадь технических культур	га		1	1	700,00	<=	800
7	3	Затраты труда	ч-дни	1,5	4,5	1,5	6781,89	<=	7000
8	4	Мин удобрения	ц.д.в.	2	15	2,3	15000,00	<=	15000
9	5	Валовое производство зерна	ц	26			65000,00	>=	65000
10		Прибыль	руб.	2,89	7,93	3,53	12602,77		max
11		Результаты решения задачи		2500,00	660,63	39,37			

Рисунок 3.7 – Табличная запись решенной задачи линейного программирования

В случае если в результате поиска не было найдено решение, удовлетворяющее заданным условиям, в диалоговом окне **Результаты поиска решения** появится соответствующее сообщение (рис. 3.8).

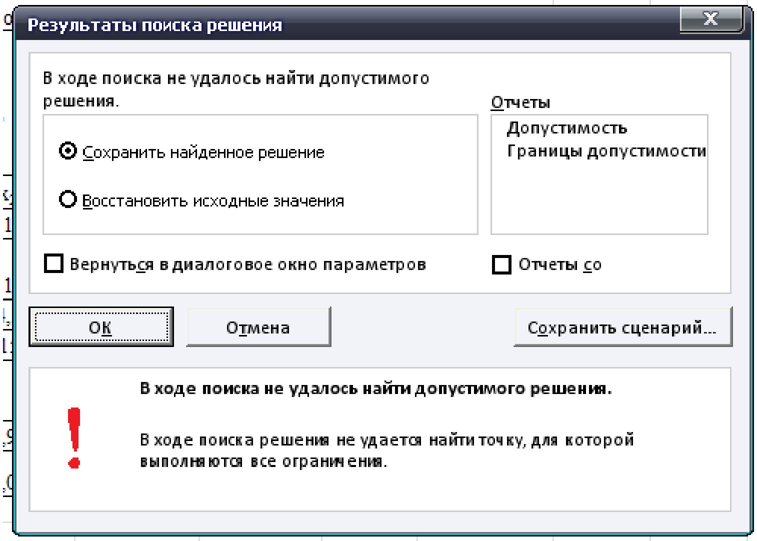


Рисунок 3.8 – Окно вывода результатов поиска решения в MS Excel

Одной из наиболее часто встречающихся причин невозможности найти оптимальное решение является такая ситуация, когда в результате решения задачи выясняется, что имеются ограничения, которые не выполняются. Сохранив найденное решение на листе, требуется построчно сравнить полученные значения столбцов «Сумма произведений» и «Объем ограничений» и проверить, удовлетворяет ли отношение между ними ограничению, стоящему в столбце «Тип ограничений». Найдя, таким образом, невыполняемые ограничения необходимо найти и ликвидировать причины, обуславливающие невозможность соблюдения данного конкретного условия (это может быть, например, слишком большие или, наоборот, очень маленькие запланированные объемы ограничений и т.п.).

Варианты заданий

1. Хозяйство производит 2 вида продукции. за единицу производства культуры А оно получает прибыль 5.д.е, а культуры В – 4 д.е. Площадь посевов составляет 100 га. Ограничение трудовых ресурсов соответствует 110. чел.-дней. Для обработки единицы площади культуры А необходимо 2.. чел.-дней, а культуры В - …1..чел.- дней. Кроме того, нужно поставить на рынок не менее 30. т. продукции культуры В при урожайности 2 т/га. Требуется разделить площадь таким образом, чтобы получить максимальную прибыль.
2. Хозяйство производит 2 вида продукции. за единицу производства культуры А оно получает прибыль 3..д.е, а культуры В – 2 д.е. Площадь посевов составляет 50. га. Ограничение трудовых ресурсов соответствует 168.. чел.-дней. Для обработки единицы площади культуры А необходимо 4.. чел.-дней, а культуры В - …3..чел.- дней. Кроме того, необходимо поставить на рынок не менее …20. т. продукции культуры В при урожайности 2 т/га. Требуется разделить площадь таким образом, чтобы получить максимальную прибыль.
3. Хозяйство производит 2 вида продукции. за единицу производства культуры А оно получает прибыль 2..д.е, а культуры В – 3 д.е. Площадь посевов составляет 25. га. Ограничение трудовых ресурсов соответствует 105.. чел.-дней. Для обработки единицы площади культуры А необходимо 3.. чел.-дней, а культуры В - 4..чел.- дней. Кроме того, необходимо поставить на рынок не менее 25. т. продукции культуры А при урожайности 2,5…т/га. Требуется разделить площадь таким образом, чтобы получить максимальную прибыль.
4. Хозяйство производит 2 вида продукции. за единицу производства культуры А оно получает прибыль…3..д.е, а культуры В – 5 д.е. Площадь посевов составляет …60. га. Ограничение трудовых ресурсов соответствует …150.. чел.-дней. Для обработки единицы площади культуры А необходимо …2.. чел.-дней, а культуры В - …3..чел.-дней. Кроме того, необходимо поставить на рынок не менее 30 т. продукции культуры А при урожайности 2…т/га. Требуется разделить площадь таким образом, чтобы получить максимальную прибыль.
5. Хозяйство производит 2 вида продукции. за единицу производства культуры А оно получает прибыль 5…..д.е, а культуры В – 2 д.е. Площадь посевов составляет 90. га. Ограничение трудовых ресурсов соответствует 210. чел.-дней. Для обработки единицы площади культуры А необходимо …3.. чел.-дней, а культуры В - …2..чел.-дней. Кроме того, необходимо поставить на рынок не менее 40…. т. продукции культуры А при урожайности 2…т/га. Требуется разделить площадь таким образом, чтобы получить максимальную прибыль.
6. Хозяйство производит 2 вида продукции. за единицу производства культуры А оно получает прибыль 4…..д.е, а культуры В – 3 д.е. Площадь посевов составляет 50…. га. Ограничение трудовых ресурсов соответствует 135. чел.-дней. Для обработки единицы площади культуры А необходимо 3.. чел.-дней, а культуры В - …2..чел.- дней. Кроме того необходимо поставить на рынок не менее 35 т. продукции культуры В при урожайности …2 т/га. Требуется разделить площадь таким образом, чтобы получить максимальную прибыль.

7. Хозяйство производит 2 вида продукции. за единицу производства культуры А оно получает прибыль …3..д.е, а культуры В – 7 д.е. Площадь посевов составляет 75. га. Ограничение трудовых ресурсов соответствует 180.. чел.-дней. Для обработки единицы площади культуры А необходимо 2.. чел.-дней, а культуры В - 5..чел.-дней. Кроме того необходимо поставить на рынок не менее …40. т. продукции культуры А при урожайности 2т/га. Требуется разделить площадь таким образом, чтобы получить максимальную прибыль.

8. Хозяйство производит 2 вида продукции за единицу производства культуры А оно получает прибыль …4..д.е, а культуры В – 3 д.е. Площадь посевов составляет 65. га. Ограничение трудовых ресурсов соответствует 165.. чел.-дней. Для обработки единицы площади культуры А необходимо …3.. чел.-дней, а культуры В - …2..чел.-дней. Кроме того, необходимо поставить на рынок не менее 30. т. продукции культуры В при урожайности 1,5…т/га. Требуется разделить площадь таким образом, чтобы получить максимальную прибыль.

9. Хозяйство производит 2 вида продукции за единицу производства культуры А оно получает прибыль 3.д.е, а культуры В – 5 д.е. Площадь посевов составляет 50 га. Ограничение трудовых ресурсов соответствует 180 чел.-дней. Для обработки единицы площади культуры А необходимо 3.. чел.-дней, а культуры В - 4..чел.- дней. Кроме того, нужно поставить на рынок не менее 45. т. продукции культуры А при урожайности 2 т/га. Требуется разделить площадь таким образом, чтобы получить максимальную прибыль.

10. Хозяйство производит 2 вида продукции. За единицу производства культуры А оно получает прибыль 5.д.е, а культуры В – 6 д.е. Площадь посевов составляет 35 га. Ограничение трудовых ресурсов соответствует 135 чел.-дней. Для обработки единицы площади культуры А необходимо 3.. чел.-дней, а культуры В - 5..чел.-дней. Кроме того, нужно поставить на рынок не менее 42. т. продукции культуры А при урожайности 2 т/га. Требуется разделить площадь таким образом, чтобы получить максимальную прибыль.

11. Хозяйство производит 2 вида продукции. За единицу производства культуры А оно получает прибыль 5.д.е, а культуры В – 3 д.е. Площадь посевов составляет 55 га. Ограничение трудовых ресурсов соответствует 132. чел.-дней. Для обработки единицы площади культуры А необходимо 3.. чел.-дней, а культуры В - 2..чел.-дней. Кроме того, нужно поставить на рынок не менее 30. т. продукции культуры В при урожайности 2 т/га. Требуется разделить площадь таким образом, чтобы получить максимальную прибыль.

12. Хозяйство производит 2 вида продукции. За единицу производства культуры А оно получает прибыль 4.д.е, а культуры В – 7 д.е. Площадь посевов составляет 40 га. Ограничение трудовых ресурсов соответствует 132. чел.-дней. Для обработки единицы площади культуры А необходимо 3.. чел.-дней, а культуры В - …4..чел.- дней. Кроме того, нужно поставить на рынок не менее 36. т. продукции культуры А при урожайности 2 т/га. Требуется разделить площадь таким образом, чтобы получить максимальную прибыль.

13. Хозяйство производит 2 вида продукции. За единицу производства культуры А оно получает прибыль 2 .д.е, а культуры В – 4 д.е. Площадь посевов составляет 38 га. Ограничение трудовых ресурсов соответствует 90. чел.-дней. Для обработки единицы площади культуры А необходимо 2. чел.-дней, а культуры А - 3..чел.-дней. Кроме того, нужно поставить на рынок не менее 60 т. продукции культуры А при урожайности 2 т/га. Требуется разделить площадь таким образом, чтобы получить максимальную прибыль.

14. Хозяйство производит 2 вида продукции. За единицу производства культуры А оно получает прибыль 6.д.е, а культуры В – 3 д.е. Площадь посевов составляет 50 га. Ограничение трудовых ресурсов соответствует 132. чел.-дней. Для обработки единицы площади культуры А необходимо 4.. чел.-дней, а культуры В - 2..чел.-

дней. Кроме того, нужно поставить на рынок не менее 40. т. продукции культуры В при урожайности 2 т/га. Требуется разделить площадь таким образом, чтобы получить максимальную прибыль.

15. Хозяйство производит 2 вида продукции. За единицу производства культуры А оно получает прибыль 5.д.е, а культуры В – 7 д.е. Площадь посевов составляет 40 га. Ограничение трудовых ресурсов соответствует 156. чел.-дней. Для обработки единицы площади культуры А необходимо 3.. чел.-дней, а культуры В - …4..чел.- дней. Кроме того, нужно поставить на рынок не менее 46. т. продукции культуры А при урожайности 2 т/га. Требуется разделить площадь таким образом, чтобы получить максимальную прибыль.

16. Хозяйство производит 2 вида продукции. За единицу производства культуры А оно получает прибыль 3 .д.е, а культуры В – 5 д.е. Площадь посевов составляет 52 га. Ограничение трудовых ресурсов соответствует 126. чел.-дней. Для обработки единицы площади культуры А необходимо 2. чел.-дней, а культуры А - 3..чел.-дней. Кроме того, нужно поставить на рынок не менее 35 т. продукции культуры А при урожайности 2 т/га. Требуется разделить площадь таким образом, чтобы получить максимальную прибыль.

4 СПЕЦИАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

В рамках задач линейного программирования выделяют задачи, отличающиеся некоторыми особенностями. Так, в ряде случаев приходится решать задачи, когда переменные могут принимать только целые неотрицательные значения. Такие задачи называют задачами целочисленного программирования. Их особенность заключается в поиске таких целочисленных неизвестных, значения которых позволяли бы получать экстремум целевой функции. Проблема при решении такой задачи заключается в том, что при стандартных методах поиска оптимального плана с округлением полученных значений можно получить неправильный результат. В этом случае применяются другие подходы для описания дискретных величин.

К специальным задачам линейного программирования относят задачу параметрического программирования, в которой коэффициенты при переменных целевой функции, правые части ограничений и множители возле неизвестных левых частей условий зависят от некоторого параметра или параметров. В качестве таковых используют время, предшествующие значения последовательностей и некоторые факторы, влияющие на перечисленные характеристики. В задаче параметрического программирования в отличие от обычной задачи линейного программирования коэффициенты при неизвестных и свободные члены (правые части ограничений) не являются постоянными величинами. Следовательно, в этом случае имеет место множество оптимальных планов, которое зависит от параметров.

В отдельную группу задач выделяют задачи дробно-линейного программирования. В целевую функцию этой задачи входят в качестве числителя и знаменателя два выражения. При несложных операциях эта задача может быть преобразована к задаче линейного программирования.

4.1 Транспортная задача

Среди специальных задач линейного программирования выделяется транспортная задача. Остановимся подробнее на формулировке этой задачи.

В транспортной задаче рассматриваются пункты отправления $A_1, A_2,..., A_m$ и назначения $B_1, B_2,..., B_n$. Задача состоит в нахождении оптимального плана перевозки груза x_{ij} из пунктов отправления в пункты назначения. Если тариф перевозки единицы груза обозначить c_{ij} и целевая функция представляет собой минимальную стоимость перевозки, то транспортная задача записывается в следующем виде:

$$f = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}, \tag{4.1}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad (i = \overline{1,m}), \tag{4.2}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad (j = \overline{1,n}), \tag{4.3}$$

$$x_{ij} \geq 0, \tag{4.4}$$

a_i – объемы товара в пунктах отправления; b_j – потребности в грузе в пунктах назначения.

Неотрицательное решение уравнений (4.2) и (4.3), определенное матрицей $X=(x_{ij})$, является планом транспортной задачи. План $X^* = (x_{ij}^*)$ ($i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$), при котором функция (4.1) достигает минимума, называется оптимальным планом.

Если объем груза поставщиков соответствует его потребности, т.е.

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j, \tag{4.5}$$

то задача считается закрытой. В противном случае, если равенство (4.5) представляет собой неравенство, транспортная задача называется открытой. При преобладании левой части над правой вводится дополнительный пункт назначения $n+1$. Потребность в этом случае для дополнительного пункта равна $\sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$ с тарифом перевозки, равным нулю. Если же имеет место дефицит груза (правая часть равенства (4.5) преобладает на левой), тогда вводят дополнительный пункт поставки $m+1$ с запасом груза $\sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i$. Как и в предыдущем случае тариф приравнивают к нулю.

При решении транспортной задачи можно использовать симплекс-метод. Вместе с тем он не всегда является эффективным. Поэтому применяются другие методы, учитывающие особенности транспортных задач.

Рассмотрим метод потенциалов, который состоит из нескольких этапов. В начале составляется опорный план перевозок. На этом этапе можно использовать следующие методы: наименьших стоимостей, северо-западного угла и аппроксимации Фогеля. На втором этапе применимы методы потенциалов и дифференциальных рент. Здесь осуществляется проверка оптимальности оперного плана. Если опорный план не оптимален, то выполняется корректировка плана (третий этап). Итерации второго и третьего этапов завершаются при получении оптимального решения.

В учебном пособии рассмотрено определение оптимального плана на примере. При этом использованы методы наименьших стоимостей и потенциалов. Предложенные методы применены для закрытой транспортной задачи, когда суммы поставляемых и потребляемых товаров равны. Следует подчеркнуть, что число базисных ячеек равно $m+n-1$, где m, n – число потребителей и поставщиков. Поскольку задача является закрытой, то количество отличных от нуля неизвестных (базисные переменные) на единицу меньше суммы $m+n$.

Пример 4.1. На двух полях A_1 и A_2 собран урожай картофеля 1800 и 2400 т. Полученную продукцию необходимо поставить в три склада B_1, B_2 и B_3. В первом из них может храниться 1200 т картофеля, во втором – 2000 т и в третьем – 1000 т. Известна стоимость перевозки, приведенная в таблице 28. Требуется сформулировать транспортную задачу, в которой целевая функция характеризует минимальные затраты на перевозку продукции.

Таблица 4.1 – Тариф перевозки картофеля, д.е./т

Поля	Склады			Запасы
	B_1	B_2	B_3	
A_1	11	9	12	1800
A_2	10	13	14	2400
Потребности	1200	2000	1000	4200

Целевая функция с учетом тарифов примет вид

$$f=11x_{11}+9x_{12}+12x_{13}+10x_{21}+13x_{22}+14x_{23}\rightarrow min.$$

Ограничения по перевозке продукции из полей в хранилища записываются так:

$$x_{11}+x_{12}+x_{13}=1800\ [m],$$
$$x_{21}+x_{22}+x_{23}=2400\ [m].$$

Условия, связанные с возможностями хранилищ имеют вид:

$$x_{11}+x_{21}=1200\ [m],$$
$$x_{12}+x_{21}=2000\ [m],$$
$$x_{13}+x_{23}=1000\ [m].$$

Задача является закрытой, поскольку объемы картофеля соответствуют емкостям хранилищ.

Пример 4.2. В таблице 3.1 приведены исходные данные транспортной задачи. Определить оптимальный план.

На первом этапе определяется опорный план. Для наименьшей стоимости (9), которая находится на пересечении первой строки и второго столбца, присваиваем максимальное значение переменной x_{12}, равное 1800 (таблица 4.2).

Таблица 4.2 – Определение опорного плана

Поставщики	Потребители		
	1200	2000	1000
1800	11	9 / 1800	12
2400	10 / 1200	13 / 200	14 / 1000

Поскольку во втором столбце сумма должна соответствовать 2000, определяем значение x_{23} =200. Следующая наименьшая стоимость равна 10, поэтому x_{12} = 1200, что соответствует суммарному значению первого потребителя. Для того чтобы во второй строке сумма равнялась 2400, переменной x_{23} присвоено значение 1000.

В результате суммарные затраты составят

$$f(x)=c_{12}\times x_{12}+c_{21}\times x_{21}+c_{22}\times x_{22}+c_{23}\times x_{23}=$$
$$9\times 1800+10\times 1200+13\times 200+14\times 1000=48000 \text{ д.е.}$$

На втором этапе проверяется оптимальность полученного плана. Для этого вводятся переменные u_i и v_{j} , соответствующие строкам и столбцам (таблица 4.3). Эти переменные характеризуют потенциал или цены товаров в соответствующих пунктах поставщиков и потребителей. Потенциалы определяются по формуле

$$v_j = u_i + c_{ij}.$$

Таблица 4.3 – Нахождение потенциалов поставщиков и потребителей

Поставщики	Потребители			u_i
	1200	2000	1000	
1800	11	9 / 1800	12	0
2400	10 / 1200	13 / 200	14 / 1000	-4
v_j	6	9	10	

При этом одно из неизвестных, например, u_1 может быть равно 0.

В таблице 4.3 приведены значения u_i и v_j, полученные на основе базисных переменных. В начале значение потенциала стоит приравнять к 0 ($u_1 = 0$). Тогда согласно формуле потенциалов $v_2 = 9$. По тому же выражению нетрудно найти $u_2 = 9 - 13 = -4$.

Зная это значение, получаем $v_1 = 10 - 4 = 6$ и $v_3 = 14 - 4 = 10$.

Для оценки оптимальности плана используется формула

$$d_{ij} = (u_i + c_{ij}) - V_j .$$

Это выражение позволяет определить матрицу, размер которой соответствует числу строк и столбцов исходной таблицы $m \times n$. Исходя из этой формулы, матрица оценок оптимального плана имеет вид

$$d_{ij} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Поскольку все оценки неотрицательны, то полученный план не может быть улучшен. Следовательно, определено оптимальное решение. Третий этап, связанный с улучшением плана не понадобился.

Пример 4.3. Пусть задан опорный план (таблица 3.4). Требуется получить оптимальное решение, используя метод потенциала.

Используя формулу оценки оптимальности плана d_{ij}, получим следующую матрицу

$$d_{ij} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Целевая функция при этом

$$f(x) = 9 \times 800 + 12 \times 1000 + 10 \times 1200 + 13 \times 1200 = 46800$$

Приведенный план не является оптимальным ввиду наличия отрицательного элемента в матрице. Построим контур перераспределения значений x_{ij} в виде штриховой (таблица 4.5). Началом контура является ячейка с наименьшим потенциалом. При этом потенциалам, располагаемым по диагонали, присваивается символ + или - .

Таблица 4.4 – Опорный план транспортной задачи

Поставщики	Потребители		
	1200	2000	1000
1800	11	9 800	12 1000
2400	10 1200	13 1200	14

Таблица 4.5 – Транспортная задача с потенциалами потребителей и поставщиков

Поставщики	Потребители			u_i
	1200	2000	1000	
1800	11	9+ 800	12- 1000	0
2400	10 1200	13- 1200	14+	-4
v_j	6	9	12	

Перераспределение осуществляется с отрицательных в положительные ячейки. Тогда значение x_{13}=1000 перенесем в соседнюю клетку, увеличив величину x_{12} до 1800. В этом случае x_{13}=0. Что касается значения x_{22} =1200, то оно распределено так: x_{22} =200 и x_{23}=1000 (таблица 4.6).

Матрица оценок полученного плана примет вид

$$d_{ij} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Таблица 4.6 - Итерация получения нового плана

Поставщики	Потребители			u_i
	1200	2000	1000	
1800	11	9 / 1800	12	0
2400	10 / 1200	13 / 200	14 / 1000	-4
v_j	6	9	10	

Поскольку отрицательные элементы в матрице отсутствуют, определено оптимальное решение: $f(x) = 9\times1800 + 10\times1200 + 13\times200 + 14\times1000 = 44800$ д.е.

Таким образом, первая итерация позволила получить оптимальный результат.

Варианты заданий

1. На двух полях A_1 и A_2 собран урожай картофеля 1400 и 2000 т. Полученную продукцию необходимо поставить в три склада B_1, B_2 и B_3. В первом из них может храниться 1200 т картофеля, во втором – 1300 т и в третьем – 900 т. Известна стоимость перевозки, приведенная в таблице. Требуется сформулировать транспортную задачу, в которой целевая функция характеризует минимальные затраты на перевозку продукции.

Тариф перевозки картофеля, д.е./т

Поля	Склады			Запасы
	B_1	B_2	B_3	
A_1	10	9	12	1400
A_2	11	13	14	2000
Потребности	1200	1300	900	3400

2. На двух полях A_1 и A_2 собран урожай картофеля 2200 и 2000 т. Полученную продукцию необходимо поставить в три склада B_1, B_2 и B_3. В первом из них может храниться 1200 т картофеля, во втором – 1600 т и в третьем – 1400 т. Известна стоимость перевозки, приведенная в таблице. Требуется сформулировать транспортную задачу, в которой целевая функция характеризует минимальные затраты на перевозку продукции.

Тариф перевозки картофеля, д.е./т

Поля	Склады			Запасы
	B_1	B_2	B_3	
A_1	12	9	12	2200
A_2	10	15	14	2000
Потребности	1200	1600	1400	4200

3. На двух полях A_1 и A_2 собран урожай картофеля 1800 и 2000 т. Полученную продукцию необходимо поставить в три склада B_1, B_2 и B_3. В первом из них может храниться 1000 т картофеля, во втором – 1600 т и в третьем – 1200 т. Известна стоимость перевозки, приведенная в таблице. Требуется сформулировать транспортную задачу, в которой целевая функция характеризует минимальные затраты на перевозку продукции.

Тариф перевозки картофеля, д.е./т

Поля	Склады			Запасы
	B_1	B_2	B_3	
A_1	11	9	14	1800
A_2	10	13	12	2000
Потребности	1000	1600	1200	3800

4. На двух полях A_1 и A_2 собран урожай картофеля 1900 и 2100 т. Полученную продукцию необходимо поставить в три склада B_1, B_2 и B_3. В первом из них может храниться 1100 т картофеля, во втором – 1600 т и в третьем – 1300 т. Известна стоимость перевозки, приведенная в таблице. Требуется сформулировать транспортную задачу, в которой целевая функция характеризует минимальные затраты на перевозку продукции.

Тариф перевозки картофеля, д.е./т

Поля	Склады			Запасы
	B_1	B_2	B_3	
A_1	12	9	13	1900
A_2	10	13	11	2100
Потребности	1100	1600	1300	4000

5. На двух полях A_1 и A_2 собран урожай картофеля 2500 и 2100 т. Полученную продукцию необходимо поставить в три склада B_1, B_2 и B_3. В первом из них может храниться 1500 т картофеля, во втором – 1700 т и в третьем – 1400 т. Известна стоимость перевозки, приведенная в таблице. Требуется сформулировать транспортную задачу, в которой целевая функция характеризует минимальные затраты на перевозку продукции.

Тариф перевозки картофеля, д.е./т

Поля	Склады			Запасы
	B_1	B_2	B_3	
A_1	13	10	15	2500
A_2	11	14	12	2100
Потребности	1500	1700	1400	4600

6. На двух полях A_1 и A_2 собран урожай картофеля 2400 и 2200 т. Полученную продукцию необходимо поставить в три склада B_1, B_2 и B_3. В первом из них может храниться 1500 т картофеля, во втором – 1800 т и в третьем – 1300 т. Известна стоимость перевозки, приведенная в таблице.

Требуется сформулировать транспортную задачу, в которой целевая функция характеризует минимальные затраты на перевозку продукции.

Тариф перевозки картофеля, д.е./т

Поля	Склады			Запасы
	B_1	B_2	B_3	
A_1	14	11	15	2400
A_2	12	14	12	2200
Потребности	1500	1800	1300	4600

7. На двух полях A_1 и A_2 собран урожай картофеля 2600 и 2200 т. Полученную продукцию необходимо поставить в три склада B_1, B_2 и B_3. В первом из них может храниться 1400 т картофеля, во втором – 1900 т и в третьем – 1500 т. Известна стоимость перевозки, приведенная в таблице. Требуется сформулировать транспортную задачу, в которой целевая функция характеризует минимальные затраты на перевозку продукции.

Тариф перевозки картофеля, д.е./т

Поля	Склады			Запасы
	B_1	B_2	B_3	
A_1	13	11	15	2600
A_2	12	14	10	2200
Потребности	1400	1900	1500	4800

8. На двух полях A_1 и A_2 собран урожай картофеля 1500 и 2000 т. Полученную продукцию необходимо поставить в три склада B_1, B_2 и B_3. В первом из них может храниться 1200 т картофеля, во втором – 1300 т и в третьем – 1000 т. Известна стоимость перевозки, приведенная в таблице. Требуется сформулировать транспортную задачу, в которой целевая функция характеризует минимальные затраты на перевозку продукции.

Тариф перевозки картофеля, д.е./т

Поля	Склады			Запасы
	B_1	B_2	B_3	
A_1	13	12	15	1500
A_2	11	14	10	2000
Потребности	1200	1300	1000	3500

9. На двух полях A_1 и A_2 собран урожай картофеля 1900 и 2100 т. Полученную продукцию необходимо поставить в три склада B_1, B_2 и B_3. В первом из них может храниться 1300 т картофеля, во втором – 1200 т и в третьем – 1500 т. Известна стоимость перевозки, приведенная в таблице. Требуется сформулировать транспортную задачу, в которой целевая функция характеризует минимальные затраты на перевозку продукции.

Тариф перевозки картофеля, д.е./т

Поля	Склады			Запасы
	B_1	B_2	B_3	
A_1	12	13	14	1900
A_2	11	15	10	2100
Потребности	1300	1200	1500	4000

10. На двух полях A_1 и A_2 собран урожай картофеля 1600 и 2000 т. Полученную продукцию необходимо поставить в три склада B_1, B_2 и B_3. В первом из них может храниться 1000 т картофеля, во втором – 1200 т и в третьем – 1400 т. Известна стоимость перевозки, приведенная в таблице. Требуется сформулировать транспортную задачу, в которой целевая функция характеризует минимальные затраты на перевозку продукции.

Тариф перевозки картофеля, д.е./т

Поля	Склады			Запасы
	B_1	B_2	B_3	
A_1	13	12	14	1600
A_2	10	15	11	2000
Потребности	1000	1200	1400	3600

11. На двух полях A_1 и A_2 собран урожай картофеля 2600 и 2100 т. Полученную продукцию необходимо поставить в три склада B_1, B_2 и B_3. В первом из них может храниться 1800 т картофеля, во втором – 1700 т и в третьем – 1200 т. Известна стоимость перевозки, приведенная в таблице. Требуется сформулировать транспортную задачу, в которой целевая функция характеризует минимальные затраты на перевозку продукции.

Тариф перевозки картофеля, д.е./т

Поля	Склады			Запасы
	B_1	B_2	B_3	
A_1	13	13	14	2600
A_2	11	15	12	2100
Потребности	1800	1700	1200	4700

12. На двух полях A_1 и A_2 собран урожай картофеля 1800 и 2100 т. Полученную продукцию необходимо поставить в три склада B_1, B_2 и B_3. В первом из них может храниться 1300 т картофеля, во втором – 1200 т и в третьем – 1400 т. Известна стоимость перевозки, приведенная в таблице. Требуется сформулировать транспортную задачу, в которой целевая функция характеризует минимальные затраты на перевозку продукции.

Тариф перевозки картофеля, д.е./т

Поля	Склады			Запасы
	B_1	B_2	B_3	
A_1	13	11	15	1800
A_2	12	14	12	2100
Потребности	1300	1200	1400	3900

13. На двух полях A_1 и A_2 собран урожай картофеля 2000 и 2500 т. Полученную продукцию необходимо поставить в три склада B_1, B_2 и B_3. В первом из них может храниться 1400 т картофеля, во втором – 1200 т и в третьем – 1900 т. Известна стоимость перевозки, приведенная в таблице. Требуется сформулировать транспортную задачу, в которой целевая функция характеризует минимальные затраты на перевозку продукции.

Тариф перевозки картофеля, д.е./т

Поля	Склады			Запасы
	B_1	B_2	B_3	
A_1	13	11	12	2000
A_2	10	14	15	2500
Потребности	1400	1200	1900	4500

14. На двух полях A_1 и A_2 собран урожай картофеля 1400 и 1700 т. Полученную продукцию необходимо поставить в три склада B_1, B_2 и B_3. В первом из них может храниться 1400 т картофеля, во втором – 1200 т и в третьем – 1900 т. Известна стоимость перевозки, приведенная в таблице. Требуется сформулировать транспортную задачу, в которой целевая функция характеризует минимальные затраты на перевозку продукции.

Тариф перевозки картофеля, д.е./т

Поля	Склады			Запасы
	B_1	B_2	B_3	
A_1	12	10	12	1400
A_2	9	13	14	1700
Потребности	1000	1200	900	3100

15. На двух полях A_1 и A_2 собран урожай картофеля 1800 и 1700 т. Полученную продукцию необходимо поставить в три склада B_1, B_2 и B_3. В первом из них может храниться 1200 т картофеля, во втором – 1300 т и в третьем – 1000 т. Известна стоимость перевозки, приведенная в таблице. Требуется сформулировать транспортную задачу, в которой целевая функция характеризует минимальные затраты на перевозку продукции.

Тариф перевозки картофеля, д.е./т

Поля	Склады			Запасы
	B_1	B_2	B_3	
A_1	12	9	12	1800
A_2	10	13	14	1700
Потребности	1200	1300	1000	3500

16. На двух полях A_1 и A_2 собран урожай картофеля 1900 и 1800 т. Полученную продукцию необходимо поставить в три склада B_1, B_2 и B_3. В первом из них может храниться 1100 т картофеля, во втором – 1200 т и в третьем – 1400 т. Известна стоимость перевозки, приведенная в таблице. Требуется сформулировать транспортную задачу, в которой целевая функция

характеризует минимальные затраты на перевозку продукции.

Тариф перевозки картофеля, д.е./т

Поля	Склады			Запасы
	B_1	B_2	B_3	
A_1	14	9	11	1900
A_2	10	13	14	1800
Потребности	1100	1200	1400	3700

4.2 Параметрическая задача

Отдельным классом задач линейного программирования являются ***параметрические задачи***, в которых исходные данные зависят от некоторого параметра или параметров.

В научной и учебной литературе многократно встречаются разделы, посвященные параметрическому программированию. Данное направление в линейном программировании достаточно изучено с теоретической точки зрения, но практическое их применение не имеет широкого распространения. При этом в сельском хозяйстве модели задач параметрического программирования почти не используются.

На практике выделяют следующие виды параметрической задачи:

1) задача, в которой коэффициенты целевой функции линейно зависят от параметра t

$$f = \sum_{j \in J} c_j(t) x_j, \tag{4.6}$$

при условиях

$$\sum_{j \in J} a_{ij} x_j = b_i, \; i \in I, \tag{4.7}$$

$$x_j \geq 0, \; j \in J, \tag{4.8}$$

где f – целевая функция, x_j – переменная, t - параметр, c_j, a_{ij}, b_i – коэффициенты;

2) от параметра t линейно зависят свободные члены системы ограничений

$$F = \sum_{j \in J} c_j x_j, \tag{4.9}$$

при условиях

$$\sum_{j \in J} a_{ij} x_j = b_i(t), \; i \in I, \tag{4.10}$$

$$x_j \geq 0, \; j \in J; \tag{4.11}$$

3) от параметра t линейно зависят коэффициенты целевой функции и свободные члены системы ограничений

$$f = \sum_{j \in J} c_j(t) x_j, \qquad (4.12)$$

при условиях

$$\sum_{j \in J} a_{ij} x_j = b_i(t),\ i \in I, \qquad (4.13)$$

$$x_j \geq 0,\ j \in J. \qquad (3.14)$$

Обобщением этих задач является задача параметрического программирования, в которой от параметра t линейно зависят коэффициенты при неизвестных в целевой функции, коэффициенты при неизвестных в системе уравнений и свободные члены системы уравнений. Для каждого значения параметра t из некоторого промежутка его изменения $[\alpha, \beta]$ требуется найти максимальное значение функции:

$$f = \sum_{j \in J} c_j(t) x_j, \qquad (4.15)$$

$$\sum_{j \in J} a_{ij}(t) x_j = b_i(t),\ i \in I, \qquad (4.16)$$

$$x_j \geq 0,\ j \in J. \qquad (4.17)$$

Вместе с тем возможно использование многопараметрических задач, в которых коэффициенты при неизвестных в целевой функции, коэффициенты при неизвестных в системе уравнений и свободные члены системы уравнений линейно зависят от нескольких параметров:

$$\sum_{j \in J} c_j(t_1, t_2, t_3, \ldots t_e) x_j,\ i \in I, \qquad (4.18)$$

$$\sum_{j \in J} a_{ij}(t_1, t_2, t_3, \ldots t_e) x_j \leq b_i(t_1, t_2, t_3, \ldots t_e),\ i \in I,\ e \in E, \qquad (4.19)$$

$$x_j \geq 0,\ j \in J, \qquad (4.20)$$

где параметр t_e изменяется в промежутке $[\alpha_e, \beta_e]$.

В задачах параметрического программирования коэффициенты при переменных в ограничениях и целевой функции зависят от некоторого параметра или параметров. В качестве таковых используется время, предшествующее значение и другие факторы, влияющие на характеристики модели.

Пример 4.4. Известно, что цена единицы продукции может изменяться для изделия А от 2 до 12 руб., а для изделия *В* - от 13 до 3 руб., причем эти изменения определяются соотношениями $c_1 = 2 + t, c_2 = 13 - t$, где $0 \leq t \leq 1/$.

Для каждого из возможных значений цены единицы продукции каждого из видов найти такой план их производства, при котором общая стоимость продукции является максимальной.

Решение

Предположим, что предприятие изготовит x_1 единиц продукции *А* и x_2

единиц продукции *B*. Тогда математическая постановка задачи состоит в определении для каждого значения параметра $t(0 \le t \le 10)$.максимального значения функции

$$f = (2+t)x_1 + (13-t)x_2$$

при условиях

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 \le 16 \\ 2x_1 + 2x_2 \le 22 \\ 6x_1 + 3x_2 \le 36 \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \ge 0.$$

Чтобы найти решение задачи, строим многоугольник решений, определяемый системой линейных неравенств и условием неотрицательности переменных (рисунок 4.1).

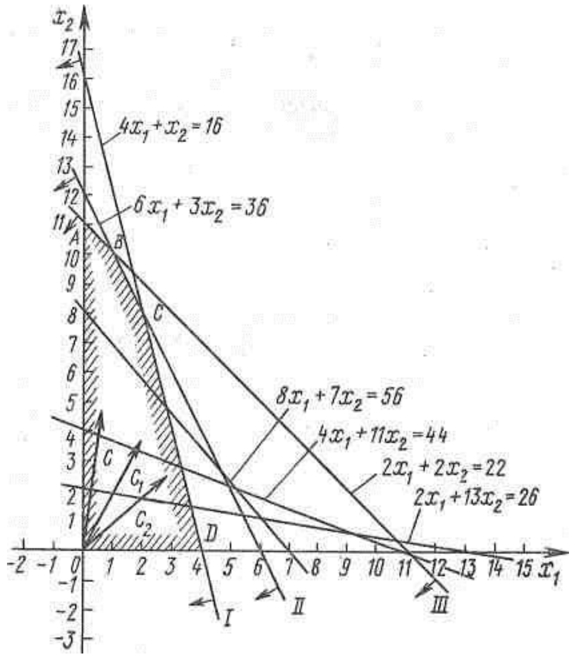


Рисунок 4.1 – Графическая интерпретация решения задачи параметрического программирования

После этого, полагая, что *t = 0*, строим прямую $2x_1 + 13x_2 = 26$ (число 26 взято произвольно) и вектор *C* = (2, 13). Передвигая построенную прямую в направлении вектора С, определяем, что последней общей точкой ее с многоугольником решений *OABCD* является точка *A* (0, 11). Следовательно, задача, полученная из исходной задачи при *t = 0*, имеет оптимальный план $X_0^* = (0,11)$. Это означает, что если цена единицы продукции *A* равна 2 + 0 = 2 руб., а цена единицы продукции *B* составляет 13 - 0 = 13 руб., то оптимальным планом производства является план, согласно которому производится 11 изделий *B* и не производятся изделия *A*.

При таком плане производства продукции ее стоимость максимальна и равна $f_{\max} = 143$.

Положим теперь *t=2* и построим прямую $\left(2+2\right)x_1+\left(13-2\right)x_2=4x_1+11x_2=44$ (число 44 взято произвольно) и вектор C_1 = (4, 11). В результате, задача, полученная из исходной задачи при *t = 2*, имеет оптимальный план $X_0^*=\left(0,11\right)$. Это означает, что если цена единицы продукции А равна 2 + 2 = 4 руб., а цена единицы продукции *В* составляет 13 - 2 = 11 руб., то предприятию также наиболее целесообразно производить 11 ед. продукции вида *В* и совсем не производить продукцию вида *А*.

При таком плане производства продукции ее общая стоимость является максимальной и составляет $f_{\max}=121$.

Как видно из рисунка 4.1, данный план производства продукции будет оставаться оптимальным для всякого значения *t*, пока прямая $\left(2+t\right)x_1+\left(13-t\right)x_2=h$ не станет параллельной прямой $2x_1+2x_2=22$. Это произойдет тогда, когда $\left(2+t\right)/2=\left(13-t\right)/2$, т. е. при *t* =5,5. При этом значении *t* координаты любой точки отрезка *АВ* дают оптимальный план задачи.

Таким образом, для всякого $0\le t\le 5{,}5$ задача имеет оптимальный план $X_0^*=\left(0,11\right)$, при котором значение целевой функции есть $f_{\max}=\left(2+t\right)0+\left(13-t\right)11=143-11t$.

Если $t\ge 5{,}5$, например, 6, то получим прямую $(2+6)x_1+(13-6)x_2=8x_1+7x_2=56$. Правая часть равенства взята произвольно. Вектор целевой функции имеет координаты $C_2(8, 7)$. Передвигая прямую в направлении этого вектора получим оптимальное решение задачи в точке *В(1, 10)* или $X^*(1, 10)$. В этом случае целевая функция достигнет максимума $f_{max}=8\cdot 1+7\cdot 10=78$. Нетрудно показать, что приведенная точка $X^*(1, 10)$ является оптимальным планом на отрезке $5{,}5\le t\le 8$. Тогда целевая функция примет вид $f_{max}=(2+t)\cdot 1+(13-t)\cdot 10=132-9t$. Для периода времени $8 < t\le 10$ оптимальным планом является $X^*(2, 8)$, а целевая функция соответствует $f_{max}=108-6t$ (Акулич, 1993).

Варианты заданий

Задача 1. Предприятие изготавливает x_1 единиц продукции *А* и x_2 единиц продукции *В*. Математическая постановка задачи состоит в определении для каждого значения параметра $\left(0\le t\le 14\right)$ максимального значения функции

$$f=(1+t)x_1+(15-t)x_2$$

при условиях

$$\begin{aligned}&4x_1+x_2\le 16\\&x_1+x_2\le 11\\&2x_1+x_2\le 12\\&x_1, x_2\ge 0\end{aligned}$$

1. Решается задача при $0\le t\le 2$.
2. Решается задача при $3\le t\le 4$.

3. Решается задача при $5 \le t \le 6$.
4. Решается задача при $7 \le t \le 8$.
5. Решается задача при $9 \le t \le 10$.
6. Решается задача при $11 \le t \le 12$.
7. Решается задача при $13 \le t \le 14$.

Задача 2. Предприятие изготавливает x_1 единиц продукции A и x_2 единиц продукции B. Математическая постановка задачи состоит в определении для каждого значения параметра $(0 \le t \le 10)$ максимального значения функции

$$f = (2+t)x_1 + (11-t)x_2$$

при условиях

$$\begin{aligned} &4x_1 + x_2 \le 16 \\ &x_1 + x_2 \le 11 \\ &2x_1 + x_2 \le 12 \\ &x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

8. Решается задача при $0 \le t \le 2$.
9. Решается задача при $3 \le t \le 4$.
10. Решается задача при $5 \le t \le 6$.
11. Решается задача при $7 \le t \le 8$.
12. Решается задача при $9 \le t \le 10$.

4.3 Задача дробно-линейного программирования

В задаче дробно-линейного программирования целевая функция является нелинейной и состоит из числителя и знаменателя:

$$f = \frac{q_0 + \sum_{j=1}^{n} q_j x_j}{s_0 + \sum_{j=1}^{n} s_j x_j}, \tag{4.21}$$

где x_j- количество реализуемой продукции j-го вида, q_j – прибыль от реализации единицы продукции j-го вида, s_j – себестоимость единицы продукции j-го вида.

Ограничения описываются линейными равенствами:

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \ i = \overline{1, m}, \\ &x_j \ge 0, \end{aligned} \tag{4.22}$$

где a_{ij}, b_i – постоянные коэффициенты. При этом

где xj- количество реализуемой продукции j-го вида, qj – прибыль от реализации единицы продукции j-го вида, sj – себестоимость единицы продукции j-го вида.

Ограничения описываются линейными равенствами:

$$\sum_{j=1}^{n} s_j x_j \neq 0. \tag{4.23}$$

Сведем задачу дробно-линейного программирования к задаче линейного программирования.

Для этого вводятся новые переменные

$$y_0 = \frac{1}{s_0 + \sum_{j=1}^{n} s_j x_j}. \tag{4.24}$$

В этом случае целевая функция становится линейной

$$f = q_0 y_0 + \sum_{j=1}^{n} q_j y_j. \tag{4.25}$$

При этом ограничения примут вид:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j - b_i y_0 = 0, \; i = \overline{1, m}, \tag{4.26}$$

$$y_0 (s_0 + \sum_{j=1}^{n} s_j x_j) = 1. \tag{4.27}$$

Приведем пример задачи дробно-линейного программирования.

Пример 4.5. Требуется максимизировать целевую функцию вида

$$f = \frac{2x_1 - x_2}{1 + x_1 + 2x_2}.$$

При этом ограничения записываются следующим образом:

$$x_1 - 2x_2 + x_3 = 2,$$
$$2x_1 + x_2 + x_4 = 6,$$
$$x_j \geq 0, \; j = 1, 2, 3, 4.$$

Решение. Введем обозначение

$$y_0 = \frac{1}{1 + x_1 + 2x_2},$$

$$y_0 > 0,\ y_1 = x_1 y_0,\ y_2 = x_2 y_0,\ y_3 = x_3 y_0,\ y_4 = x_4 y_0.$$

Исходная задача примет вид:

$$f = 2y_1 - y_2$$
$$y_1 - 2y_2 + y_3 = 2y_0,$$
$$2y_1 + y_2 + y_4 = 6y_0,$$
$$y_0 + y_1 + 2y_2 = 1,\ y_0 > 0.$$

Результатом решения системы трех уравнений с тремя неизвестными будут следующие значения переменных

$$y_0 = 1/3,\ y_1 = 2/3,\ y_2 = y_3 = 0,\ y_4 = 2/3$$

или $x_1 = y_1 / y_0 = 2,\ x_2 = y_2 / y_0 = 0,\ x_3 = y_3 / y_0 = 0,\ x_4 = y_4 / y_0 = 2.$

При этом максимальное значение целевой функции соответствует $f_{max}=4/3$.

Задания к разделу

Найти оптимальное решение задачи дробно-линейного программирования.

1. $f = \dfrac{2x_1 + 3x_2}{x_1 + x_2} \to \min,$

$2x_1 + 8x_2 \le 26,$

$x_1 + x_2 \ge 4,$

$12x_1 + 3x_2 \le 39.$

$x_1, x_2 \ge 0.$

2. $f = \dfrac{3x_1 - 2x_2}{x_1 + 2x_2} \to \max,$

$2x_1 + 4x_2 \le 16,$

$-4x_1 + 2x_2 \le 8,$

$x_1 + 3x_2 \ge 9.$

$x_1, x_2 \ge 0.$

3. $f = \dfrac{-5x_1 + 4x_2}{-2x_1 - 3x_2} \to \min,$

$2x_1 - 4x_2 \le 12,$

$-x_1 + 2x_2 \le 8,$

$x_1 + x_2 \ge 10.$

$x_1, x_2 \ge 0.$

4. $f = \dfrac{5x_1 + 3x_2}{x_1 + 3x_2} \to \max,$

$2x_1 + 3x_2 \ge 12,$

$-x_1 + 6x_2 \le 18,$

$x_1 - 3x_2 \le 3.$

$x_1, x_2 \ge 0.$

5. $f = \dfrac{4x_1 + 3x_2}{x_1 + 2x_2} \to \max,$

$2x_1 + 3x_2 \ge 9,$

$-x_1 + 6x_2 \le 18,$

$x_1 - 3x_2 \le 3.$

$x_1, x_2 \ge 0.$

6. $f = \dfrac{-4x_1 + 3x_2}{-2x_1 - 3x_2} \to \min,$

$2x_1 - 3x_2 \le 12,$

$-x_1 + 2x_2 \le 8,$

$x_1 + x_2 \ge 10.$

$x_1, x_2 \ge 0.$

7. $f = \dfrac{4x_1 + 3x_2}{2x_1 + 3x_2} \to \max,$

$2x_1 + 3x_2 \ge 15,$

$-x_1 + 4x_2 \le 16,$

$x_1 - 3x_2 \le 3.$

$x_1, x_2 \ge 0.$

8. $f = \dfrac{5x_1 + 3x_2}{2x_1 + 4x_2} \to \max,$

$2x_1 + 3x_2 \ge 12,$

$-x_1 + 3x_2 \le 15,$

$x_1 - 3x_2 \le 3.$

$x_1, x_2 \ge 0.$

9. $f = \dfrac{4x_1 + 3x_2}{x_1 + 2x_2} \to \max,$

$x_1 + 3x_2 \geq 12,$
$-x_1 + 4x_2 \leq 16,$
$x_1 - 3x_2 \leq 3.$
$x_1, x_2 \geq 0.$

10. $f = \dfrac{-3x_1 + 2x_2}{-2x_1 - 3x_2} \to \min,$
$3x_1 - 4x_2 \leq 12,$
$-x_1 + 2x_2 \leq 6,$
$x_1 + x_2 \geq 8.$
$x_1, x_2 \geq 0.$

11. $f = \dfrac{-4x_1 + 2x_2}{-3x_1 - 5x_2} \to \min,$
$2x_1 - 3x_2 \leq 12,$
$-2x_1 + 3x_2 \leq 6,$
$x_1 + x_2 \geq 8.$
$x_1, x_2 \geq 0.$

12. $f = \dfrac{4x_1 + 3x_2}{x_1 + 2x_2} \to \max,$
$2x_1 + 4x_2 \geq 12,$
$-2x_1 + 5x_2 \leq 15,$
$x_1 - 3x_2 \leq 3.$
$x_1, x_2 \geq 0.$

13. $f = \dfrac{5x_1 + 3x_2}{2x_1 + 3x_2} \to \max,$
$2x_1 + 5x_2 \geq 15,$
$-x_1 + 3x_2 \leq 9,$
$x_1 - 3x_2 \leq 3.$
$x_1, x_2 \geq 0.$

14. $f = \dfrac{-3x_1 + 2x_2}{-3x_1 - 5x_2} \to \min,$
$x_1 - 3x_2 \leq 9,$
$-2x_1 + 3x_2 \leq 6,$
$x_1 + x_2 \geq 8.$
$x_1, x_2 \geq 0.$

15. $f=\dfrac{4x_1+3x_2}{x_1+2x_2}\to\max$,

$x_1+4x_2\ge 12,$

$-2x_1+3x_2\le 6,$

$x_1-3x_2\le 3.$

$x_1,\ x_2\ge 0.$

16. $f=\dfrac{-3x_1+2x_2}{-3x_1-5x_2}\to\min$,

$2x_1-3x_2\le 9,$

$-2x_1+3x_2\le 12,$

$x_1+x_2\ge 10.$

$x_1,\ x_2\ge 0.$

17. $f=\dfrac{5x_1+2x_2}{2x_1+3x_2}\to\max$,

$x_1-3x_2\le 12,$

$-x_1+3x_2\le 12,$

$x_1+x_2\ge 18.$

$x_1,\ x_2\ge 0.$

Контрольные задания по задачам линейного программирования и специальным задачам линейного программирования

1. Найти минимальное и максимальное значения целевой функции $f=x_1+2x_2$ для ограничений:

   $x_1-x_2\le 4,$

   $x_2\le 5,$

   $3x_1-2x_2\ge -1,$

   $x_1-0.5x_2\le 6,$

   $x_{11},\ x_2\ge 0.$

2. По исходной задаче линейного программирования построить двойственную задачу и найти ее оптимальный план. Исходная задача имеет вид:

   $f=x_1+1.5x_2\to\max,$

   $x_1+x_2\le 6,$

   $x_1+2x_2\le 8,$

   $x_2\le 5,$

   $x_1,\ x_2\ge 0$

3. По исходной задаче линейного программирования построить двойственную задачу и найти ее оптимальный план. Исходная задача имеет вид:

   $f = 0.5x_1 + x_2 - 2 \to \min,$

   $-x_1 + 1 \geq 0,$

   $-0.5x_1 + 2 \geq 0,$

   $0.5x_1 + x_2 - 1 \geq 0,$

   $x_1, x_2 \geq 0$

4. Найти оптимальное решение задачи линейного программирования:

   $f = x_2 + x_3 - 10 \to \min,$

   $x_1 + 2x_2 + x_3 = 10,$

   $x_1 + 2x_2 - x_5 = 2,$

   $2x_1 + x_2 + x_4 = 10,$

   $x_1 + x_6 = 4$

   $x_1, x_2 \geq 0$

5. По исходной задаче линейного программирования построить двойственную задачу и найти ее оптимальный план. Исходная задача имеет вид:

   $f = 3x_1 + 8x_2 \to \max,$

   $x_1 + 4x_2 \leq 6$

   $x_1 + 2x_2 \leq 4$

   $x_1 \leq 3,$

   $x_1, x_2 \geq 0$

6. Четыре предприятия для производства продукции используют три вида сырья. Потребности в сырье каждого предприятия составляют120, 60, 180 и 110 ед. Сырье сосредоточено в трех складах с запасами 160, 140 и 170 единиц. Тарифы перевозки приведены в таблице

Склады	Предприятия				Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	7	8	1	2	160
A_2	4	6	9	8	140
A_3	9	2	4	6	170
Потребности	120	60	180	110	470

   Требуется определить оптимальный план перевозок сырья.

7. На трех складах базы сосредоточен груз 90, 70 и 140 единиц. Груз необходимо перевезти в четыре магазина в количестве 110, 50, 60 и 80 единиц. Тарифы перевозки приведены в таблице

Склады	Магазины				Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	

A_1	2	3	4	3	90
A_2	5	3	1	2	70
A_3	3	2	4	2	140
Потребности	110	50	60	80	300

Требуется определить оптимальный план перевозок сырья.

8. Тремя предприятиями производятся три вида продукции в количестве 50, 30 и 20 единиц для четырех потребителей с потребностями: 30, 30, 25 и 15 единиц. Тарифы перевозки приведены в таблице

Предприятия	Потребители				Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	1	2	4	2	50
A_2	2	3	1	5	30
A_3	3	2	4	3	20
Потребности	30	30	25	15	100

Требуется определить оптимальный план перевозок сырья.

9. Тремя предприятиями производятся три вида продукции в количестве 180, 300 и 50 единиц для пяти потребителей с потребностями: 110, 90, 120, 80 и 130 единиц. Тарифы перевозки приведены в таблице

Предприятия	Потребители					Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	7	12	4	6	5	180
A_2	1	8	6	5	4	300
A_3	6	13	8	7	3	50
Потребности	110	90	120	80	130	530

Требуется определить оптимальный план перевозок сырья.

10. Найти оптимальный план задачи дробно-линейного программирования:

$f = (4x_1 + 3x_2)/(x_1 + 3x_2) \to \max,$

$2x_1 + 3x_2 \ge 12,$

$-x_1 + 6x_2 \le 16,$

$x_1 - 3x_2 \le 3,$

$x_1, x_2 \ge 0.$

11. Найти оптимальный план задачи дробно-линейного программирования:

$f = (3x_1 - 1.5x_2)/(x_1 + 2x_2) \to \max,$

$2x_1 + 3x_2 \le 15,$

$-3x_1 + 2x_2 \le 7,$

$x_1 + 3x_2 \ge 2,$

$x_1, x_2 \ge 0.$

12. Найти оптимальный план задачи дробно-линейного программирования:

$f = (-4x_1 + 3x_2)/(-2x_1 - 3x_2) \to \max,$

$2x_1 - 3x_2 \le 12,$

$-x_1 + 2x_2 \le 9,$

$x_1 + x_2 \ge 11,$

$x_1, x_2 \ge 0.$

13. Найти оптимальный план задачи дробно-линейного программирования:

$f = (x_1 + 2x_2)/(x_1 + x_2) \to \min,$

$x_1 + 4x_2 \le 12,$

$x_1 + x_2 \ge 5,$

$6x_1 + x_2 \le 20,$

$x_1, x_2 \ge 0.$

14. Найти оптимальный план задачи параметрического программирования:

$f = 2x_1 + (2 + 4t)x_2 \to \max,$

$x_1 + x_2 \le 12,$

$x_1 - x_2 \le 10,$

$-x_1 + x_2 \le 5,$

$x_1, x_2 \ge 0,$

$t[0,10].$

15. Найти оптимальный план задачи параметрического программирования:

$f = (3 + t)x_1 + x_2 \to \max,$

$3x_1 + x_2 \le 14,$

$x_1 + x_2 \le 10,$

$2x_1 + x_2 \le 12,$

$x_1, x_2 \ge 0,$

$t[0,5].$

16. Найти оптимальный план задачи параметрического программирования:

$f = (1 + t)x_1 + (7 - t)x_2 \to \max,$

$3x_1 + x_2 \le 15,$

$x_1 + x_2 \le 10,$

$2x_1 + x_2 \le 12,$

$x_1, x_2 \ge 0,$

$t[0,5].$

17. Найти оптимальный план задачи параметрического программирования:

$$f = (2+t)x_1 + (6-t)x_2 \to \max,$$
$$3x_1 + 2x_2 \le 18,$$
$$x_1 + x_2 \le 8,$$
$$x_2 \ge 2,$$
$$x_1, x_2 \ge 0,$$
$$t[0,4].$$

5 НЕЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

В общем виде задача нелинейного программирования состоит в определении максимального (минимального) значения функции

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \tag{5.1}$$

при условии, что ее переменные удовлетворяют соотношениям

$$\begin{cases} g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \le b_i & \left(i = \overline{1,k}\right), \\ g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = b_i & \left(i = \overline{k+1, m}\right), \end{cases} \tag{5.2}$$

где f и g_i – некоторые известные функции n переменных, а b_i – заданные числа.

Процесс нахождения решения задачи нелинейного программирования с использованием ее геометрической интерпретации включает следующие этапы.

1. Находят область допустимых решений задачи.
2. Строят гиперповерхность $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = h.$
3. Определяют гиперповерхность наивысшего (наинизшего) уровня или устанавливают неразрешимость задачи из-за неограниченности функции (f) сверху (снизу) на множестве допустимых решений.
4. Находят точку области допустимых решений, через которую проходит гиперповерхность наивысшего (наинизшего) уровня, и определяют в ней значение функции (f).

Если ограничения (5.2) представляют собой только уравнения, переменные не обязательно положительны и функции (5.1) и (5.2) являются непрерывными вместе со своими частными производными, тогда для решения задачи применяют метод множителей Лагранжа.

Идея метода Лагранжа состоит в следующем. Допустим, необходимо найти такие значения переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, которые доставляли максимум (минимум) целевой функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ при условии выполнения системы ограничений $g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = b_i \quad \left(i = \overline{1,n}\right)$.

Для решения задачи вводят так называемую функцию Лагранжа

$$F(x_1, x_2, ..., x_n, \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m) = f(x_1, x_2, ..., x_n) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x_1, x_2, ..., x_n) \tag{5.3}$$

где λ_i - константы, называемые неопределенными множителями Лагранжа.

Затем находят частные производные $\partial F(f,g_i,\lambda_i)/\partial x_j$ и $\partial F(f,g_i,\lambda_i)/\partial\lambda_i$ где $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$, приравнивают их к нулю и решают систему уравнений

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F\left(f,g_i,\lambda_i\right)}{\partial x_j}=0,\ j=\overline{1,n};\\ \dfrac{\partial F\left(f,g_i,\lambda_i\right)}{\partial\lambda_i}=g_i=0,\ i=\overline{1,m}.\end{cases} \tag{5.4}$$

После этого исследуют точки, полученные в результате решения системы на максимум (минимум), поскольку условия системы являются необходимыми, но недостаточными условиями экстремума.

Пример 5.1. Найти максимальное значение функции

$$f=x_2-x_1^2+6x_1$$

при условиях

$$\begin{cases}2x_1+3x_2\le 24\\ x_1+2x_2\le 15\\ 3x_1+2x_2\le 24\end{cases}$$

$$x_2\le 4,$$

$$x_1,x_2\ge 0.$$

Решение

Так как целевая функция нелинейная, то задача является задачей нелинейного программирования.

В примере 5.1 областью допустимых решений данной задачи является многоугольник *OABC* (рисунок 5.1). Следовательно, для нахождения ее решения нужно определить такую точку многоугольника *OABC,* в которой функция f принимает максимальное значение. Построим линию уровня $f=x_2-x_1^2+6x_1=h$ где h - некоторая постоянная, и исследуем ее поведение при различных значениях h. При каждом значении h получаем параболу, которая тем выше отдалена от оси Ox_1 чем больше значение h (рисунок 5.1). Значит, функция F принимает максимальное значение в точке касания одной из парабол с границей многоугольника *OABC.* В данном случае это точка D (рисунок 8), в которой линия уровня $f=x_2-x_1^2+6x_1=13$ касается стороны *AB* многоугольника *OABC.* Координаты точки D можно найти из системы уравнений

$$\begin{cases}x_2-x_1^2+6x_1=13,\\ x_2=4.\end{cases}$$

Решая эту систему, получим $x_1^*=3;\ x_2^*=4.$. Итак, $f_{max}=13$ при $X^*=(3,4)$.

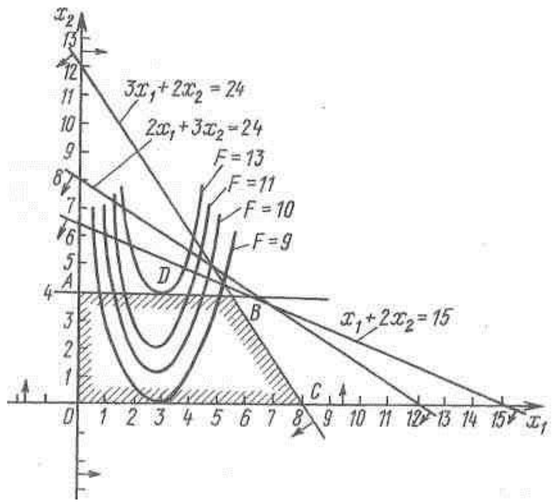


Рисунок 5.1 – Графическая интерпретация решения задачи нелинейного программирования

В задаче точка максимального значения целевой функции не является вершиной многоугольника решений. Поэтому процедура перебора вершин, которая использовалась при решении задач линейного программирования, неприменима для решения данной задачи.

Пример 5.2. Найти максимальное значение функции

$$f = 3x_1 + 4x_2$$

при условиях

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 \le 25 \\ x_1 x_2 \ge 4 \end{cases},$$

$$x_1, x_2 \ge 0.$$

Решение

Область решений задачи 5.2 изображена на рисунке 5.2. Построены две линии уровня, представляющие собой прямые. Из рисунка видно, что максимальное значение целевая функция задачи принимает в точке *E,* в которой прямая касается окружности $x_1^2 + x_2^2 = 25$.

Для определения координат точки *E* воспользуемся равенством угловых коэффициентов прямой $3x_1 + 4x_2 = h$, где h - некоторая постоянная и касательной к окружности в точке *E.*

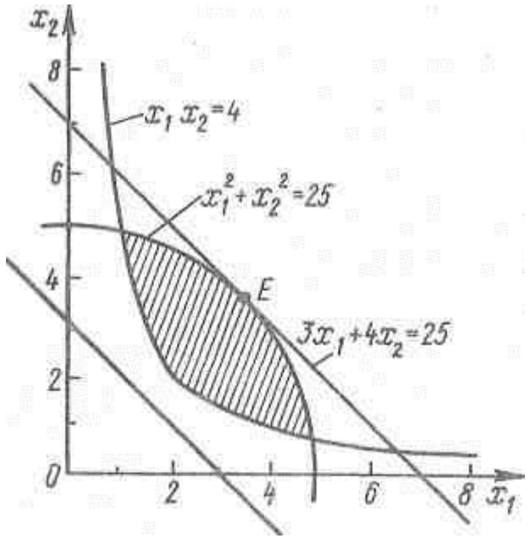


Рисунок 5.2 – Графическое решение задачи нелинейного программирования

Рассматривая x_2 , как неявную функцию, переменной x_1 , почленно дифференцируем уравнение окружности $x_1^2 + x_2^2 = 25$, получим

$$2x_1 + 2x_2x_2' = 0 \text{ или } x_2' = -x_1 / x_2.$$

Приравнивая найденное выражение числу $k = -3/4$, получаем одно из уравнений для определения координат точки *E*. В качестве второго уравнения возьмем уравнение окружности. Таким образом, для определения координат точки *E* имеем систему

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 = 0 \\ x_1^2 + x_2^2 = 25 \end{cases},$$

откуда $x_1^* = 3$, $x_2^* = 4$, $f_{max}=3^2+4^2=25$.

Пример 5.3. По плану производства продукции предприятию необходимо изготовить 180 изделий. Эти изделия могут быть изготовлены двумя технологическими способами. При производстве x_1 изделий I способом затраты равны $4x_1 + x_1^2$ руб., а при изготовлении x_2 изделий II способом они составляют $8x_2 + x_2^2$ руб. Определить, сколько изделий каждым из способов следует изготовить, так чтобы общие затраты на производство продукции были минимальными.

Решение

Данную задачу можно решить, используя ее геометрическую интерпретацию и применяя метод множителей Лагранжа.

Математическая постановка задачи состоит в определении минимального значения функции

$$f = 4x_1 + x_1^2 + 8x_2 + x_2^2$$

при условиях

$$x_1 + x_2 = 180,$$
$$x_1, x_2 \geq 0.$$

Сначала найдем решение задачи, используя ее геометрическую интерпретацию. Областью допустимых решений исходной задачи является отрезок прямой *AB* (рисунок 5.3), а линиями уровня - окружности с центром в точке *E* (-2, -4).

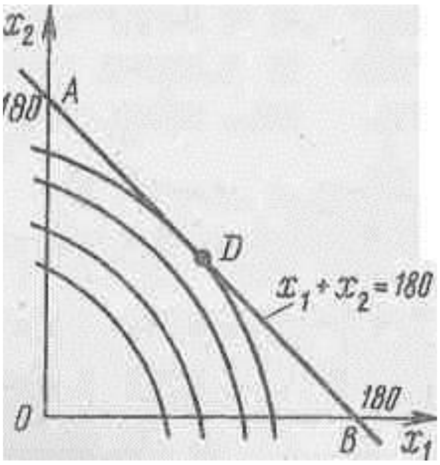


Рисунок 5.3 – К задаче определения экстремума функции методом Лагранжа

Проводя из точки *E* окружности разных радиусов, видим, что минимальное значение целевая функция принимает в точке *D*. Чтобы найти координаты этой точки, воспользуемся тем, что угловой коэффициент к окружности $4x_1 + x_1^2 + 8x_2 + x_2^2 = C$ в точке *D* совпадает с угловым коэффициентом прямой $x_1 + x_2 = 180$ и, следовательно, равен -1. Рассматривая x_2 как неявную функцию от x_1 и дифференцируя уравнение окружности, имеем

$$4 + 2x_1 + 8x_2' + 2x_2 x_2' = 0 \text{ или } x_2' = -(2 + x_1)/(4 + x_2).$$

Приравнивая полученное выражение числу -1, получаем одно из уравнений для определения координат точки *D*. Присоединяя к нему уравнение прямой, на которой лежит точка *D*, получим систему

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 2 \\ x_1 + x_2 = 180 \end{cases},$$

$x_1^* = 91;\ x_2^* = 89$. Это означает, что если предприятие изготовит 91 изделие I технологическим способом и 89 изделий II способом, то общие затраты будут минимальными и составят 17278 руб.

Решим теперь задачу, используя метод множителей Лагранжа. Найдем минимальное значение функции (f) при условии, т.е. без учета требования неотрицательности переменных. Для этого составим функцию Лагранжа

$$F\left(x_1, x_2, \lambda\right) = 4x_1 + x_1^2 + 8x_2 + x_2^2 + \lambda\left(180 - x_1 - x_2\right),$$

вычислим ее частные производные по x_1, x^2, λ и приравняем их нулю:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x_1} = 4 + 2x_1 - \lambda = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial x_2} = 8 + 2x_2 - \lambda = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda} = 180 - x_1 - x_2 = 0. \end{cases}$$

Перенося в правые части первых двух уравнений λ и приравнивая их левые части, получим

$$4 + 2x_1 = 8 + 2x_2 \text{ или } x_1 - x_2 = 2.$$

Решая последнее уравнение совместно с уравнением $x_1 + x_2 = 180$, находим $x_1^* = 91;\ x_2^* = 89$, т.е. получили координаты точки D, удовлетворяющей условиям неотрицательности. Эта точка является подозрительной на экстремум. Используя вторые частные производные, можно показать, что в точке D функция f имеет условный минимум. Этот результат и был получен выше.

Задания по разделу

1.Найти графически минимальное значения функции $9(x_1 - 5)^2 + 4(x_2 - 6)^2$ при условиях

$$\begin{aligned} &3x_1 + 2x_2 \geq 12, \\ &x_1 - x_2 \leq 6, \\ &x_2 \leq 4, \\ &x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

2.Найти графически максимальное значения функции f $=x_1x_2$ при условиях

$$\begin{aligned} &6x_1 + 4x_2 \geq 12, \\ &2x_1 + 3x_2 \leq 24, \\ &-3x_1 + 4x_2 \leq 12, \\ &x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

3. Найти графически максимальное значения функции f $=4x_1+3x_2$ при условиях

$$\begin{aligned} &x_1^2 - 2x_1 + x_2^2 - 2x_2 - 34 \leq 0, \\ &x_1 \geq 1, \\ &x_2 \geq 1. \end{aligned}$$

4. Найти графически максимальное значения функции f $=x_1x_2$ при условиях

$$x_1^2 + 2x_1 + x_2^2 - 2x_2 - 14 \ge 0,$$
$$2x_1 + x_2 \le 10,$$
$$x_1, x_2 \ge 0.$$

5. Найти графически максимальное значения функции f $=3x_1+4x_2$ при условиях

$$x_1^2 + 2x_1 \le 25,$$
$$x_1 x_2 \le 4,$$
$$x_1, x_2 \ge 0.$$

6. Найти графически максимальное значения функции f $=(x_1-4)^2+(x_2-3)^2$ при условиях

$$2x_1 + 3x_2 \ge 6,$$
$$3x_1 - 2x_2 \le 18,$$
$$-x_1 + 2x_2 \le 8,$$
$$x_1, x_2 \ge 0.$$

7. Найти графически максимальное значения функции f $=(x_1-3)^2+(x_2-4)^2$ при условиях

$$3x_1 + 2x_2 \ge 7,$$
$$10x_1 - x_2 \le 8,$$
$$-18x_1 + 4x_2 \le 12,$$
$$x_1, x_2 \ge 0.$$

8. Найти графически максимальное значения функции f $=x_1^2+x_2^2$ при условиях

$$x_1 x_2 \le 4,$$
$$x_1 + x_2 \ge 5,$$
$$x_1 \le 7,$$
$$x_2 \le 6,$$
$$x_1, x_2 \ge 0.$$

9. Найти графически максимальное значения функции f $=2x_1+x_2$ при условиях

$$x_{1_1}^2 + x_2^2 \le 16,$$
$$x_1, x_2 \ge 0.$$

10. Найти графически максимальное значения функции f $=(x_1-2)^2+(x_2-3)^2$ при условиях

$$x_1 + 2x_2 \le 12,$$
$$x_1 + x_2 \le 9,$$
$$x_1, x_2 \ge 0.$$

11.Найти графически минимальное значения функции $9(x_1-5)^2 + 4(x_2-6)^2$ при условиях

$$3x_1 + 2{,}5x_2 \geq 15,$$
$$x_1 - x_2 \leq 6,$$
$$x_2 \leq 5,$$
$$x_1, x_2 \geq 0.$$

12.Найти графически максимальное значения функции f $=x_1x_2$ при условиях

$$3x_1 + 2x_2 \geq 6$$
$$2x_1 + 3x_2 \leq 21,$$
$$-3x_1 + 4x_2 \leq 12,$$
$$x_1, x_2 \geq 0.$$

13. Найти графически максимальное значения функции f $=5x_1+4x_2$ при условиях

$$x_1^2 - 2x_1 + x_2^2 - 2x_2 - 34 \leq 0,$$
$$x_1 \geq 1,$$
$$x_2 \geq 1.$$

14. Найти графически максимальное значения функции f $=x_1x_2$ при условиях

$$x_1^2 + 2x_1 + x_2^2 - 2x_2 - 15 \geq 0,$$
$$2x_1 + x_2 \leq 9,$$
$$x_1, x_2 \geq 0.$$

15. Найти графически максимальное значения функции f $=3x_1+5x_2$ при условиях

$$x_1^2 + 2x_1 \leq 25,$$
$$x_1 x_2 \leq 4,$$
$$x_1, x_2 \geq 0.$$

16. Найти графически максимальное значения функции f $=(x_1-3)^2+(x_2-4)^2$ при условиях

$$3x_1 + 2x_2 \geq 9,$$
$$10x_1 - x_2 \leq 6,$$
$$-16x_1 + 4x_2 \leq 12,$$
$$x_1, x_2 \geq 0.$$

17. Найти графически максимальное значения функции f $=x_1^2+x_2^2$ при условиях

$$x_1 x_2 \leq 3,$$
$$x_1 + x_2 \geq 5,$$
$$x_1 \leq 7,$$
$$x_2 \leq 5{,}5,$$
$$x_1, x_2 \geq 0.$$

Задание по использования метода Лагранжа

1. Найти условный экстремум функции $f = x_1^2 + x_2^2 + x_3$ при условиях

$x_1 + x_2 + x_3 = 4,$

$2x_1 - 3x_2 = 12.$

2. Найти условный экстремум функции $f = x_1 x_2 x_3$ при условиях

$2x_1 x_2 + x_2 x_3 = 12,$

$2x_1 - x_2 = 8.$

3. Найти условный экстремум функции $f = x_1 x_2 + x_2 x_3$ при условиях

$x_1 + x_2 = 4,$

$x_2 + x_3 = 4.$

4. Найти условный экстремум функции $f = 3x_1^2 + 2x_1 + 2x_2^2 + 4x_2 x_3$ при условиях

$x_1^2 + 2x_2^2 = 19,$

$x_2 + 2x_2 x_3 = 11.$

5. Найти условный экстремум функции $f = x_1 x_2 x_3$ при условиях

$x_1 + x_2 + x_3 = 5,$

$x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_1 x_3 = 8.$

6. Найти максимальное значение функции $f = x_1^2 x_2^3 x_{3_3}^4$ при условии

$x_1 + x_2 + x_3 = 18.$

7. Найти минимальное значение функции $f = x_1 x_2 + x_2 x_3$ при условиях

$x_1 - x_2 = 2,$

$x_2 + 2x_3 = 4.$

8. Найти экстремальное значение функции $f = x_1^2 + x_2^2$ при условиях

$x_1 + x_2 = 5.$

9. Найти условный экстремум функции $f = x_1^2 + x_2^2 + x_3$ при условиях

$x_1 + x_2 + x_3 = 4,$

$3x_1 - 4x_2 = 12.$

10. Найти условный экстремум функции $f = x_1 x_2 x_3$ при условиях

$2x_1 x_2 + x_2 x_3 = 10,$

$2x_1 - x_2 = 6.$

11. Найти условный экстремум функции $f = x_1 x_2 + x_2 x_3$ при условиях

$x_1 + x_2 = 5,$

$x_2 + x_3 = 5.$

12. Найти условный экстремум функции $f = 1.5x_1^2 + x_1 + x_2^2 + 2x_2 x_3$ при условиях

$x_1^2 + 2x_2^2 = 18,$

$x_2 + 2x_2 x_3 = 11.$

13. Найти условный экстремум функции $f = x_1 x_2 x_3$ при условиях

$x_1 + x_2 + x_3 = 6,$

$x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_1 x_3 = 9.$

14. Найти максимальное значение функции $f = x_1^2 x_2^3 x_{3_3}^4$ при условии

$x_1 + x_2 + x_3 = 16.$

15. Найти минимальное значение функции $f = x_1 x_2 + x_2 x_3$ при условиях

$x_1 - x_2 = 3,$

$x_2 + 2x_3 = 5.$

16. Найти экстремальное значение функции $f = x_1^2 + x_2^2$ при условиях

$x_1 + x_2 = 6.$

17. Найти экстремальное значение функции $f = x_1^2 + 2x_2^2$ при условиях

$x_1 + x_2 = 8.$

6 ЗАДАЧИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

6.1 Задача с интервальными параметрами

Большинство реальных задач, связанных с моделированием сельскохозяйственного производства описывается множеством параметров, многие из которых является неопределенными.

Выделяют несколько различных видов неопределенностей, часть из которых связана с недостаточностью знаний о природных явлениях и процессах:

- неопределенности, связанные с недостаточными знаниями о природе (например, неизвестен точный объем полезных ископаемых в конкретном месторождении);
- неопределенности природных явлений, таких, как погода, влияющая на урожайность, на затраты и др.;
- неопределенности климатических условий, влияющих на урожайность, на затраты и др.;
- неопределенности, связанные с осуществлением действующих и проектируемых технологических процессов.

Источники неопределенной информации можно разделить на две категории: недостаточно полное знание предметной области и недостаточная информация о конкретной ситуации.

Особенно распространенными являются ситуации, когда выбор решения осуществляется в условиях рисков: существует неопределенность в виде множества частных исходов результата принятия решения, причем вероятности появления этих исходов либо определяемы тем или иным способом, либо неизвестны или не имеют смысла.

Если никаких предположений о стохастической устойчивости параметров не существует, то говорят о нестохастической неопределенности.

Когда нельзя сопоставить вероятности результатов при выборе того или иного решения, хотя возможный набор результатов известен, для оптимизации производства продукции на сельскохозяйственном предприятии можно использовать модели с интервальными параметрами в целевой функции и ограничениях:

$$f = \sum_{J=1}^{n} \tilde{c}_j x_j \to \max , \qquad (6.1)$$

$$\sum_{j=1}^{n} \tilde{a}_{ij} x_j \le (\ge) \tilde{b}_i \ \ (i = \overline{1,m}) , \qquad (6.2)$$

$$x_j \ge 0 \text{, } (j = \overline{1,n} \text{ }), \qquad (6.3)$$

где $\tilde{c}_j$, $\tilde{a}_{ij}$, и $\tilde{b}_i$ являются компактными интервалами. Другими словами, $\tilde{c}_j = \left[\bar{c}_j ,\underline{c}_j\right]$, $\tilde{a}_{ij} = \left[\bar{a}_{ij} ,\underline{a}_{ij}\right]$, $\tilde{b}_i = \left[\bar{b}_i ,\underline{b}_i\right]$, где $\bar{c}_j$, $\underline{c}_j$, $\bar{a}_{ij}$ $\underline{a}_{ij}$, $\bar{b}_i$, $\underline{b}_i$ - верхние и нижние границы соответствующих интервалов.

Следует отметить, что в моделях сложных систем для решения задач с интервальными и вероятностными параметрами можно использовать метод статистических испытаний, позволяющий случайным образом моделировать неопределенные величины и параметры, подчиненные законам распределения вероятностей. Возможность использования метода обусловлена адекватным отображением имитационных значений реальным данным. При этом на предварительном этапе необходимо оценить верхние и нижние оценки параметров, определить законы распределения, которым они подчиняются. С помощью методов имитационного моделирования можно оценить устойчивость результатов в зависимости от различной степени возмущений, влияющих на рассматриваемую систему.

Пример 6.1. Рассмотрим задачу оптимизации производства аграрной продукции на примере сельскохозяйственного предприятия Иркутского района ООО «Академия».

Запишем упрощенную модель оптимизации растениеводческой продукции. Целью задачи является максимизация дохода:

$$\mathbf{18960}x_1 + 15457x_2 + 18328x_3 + 1280x_4 + 1620x_5 \to max,$$

где x_1 – посевная площадь пшеницы, га; x_2 – посевная площадь овса, га; x_3 – посевная площадь ячменя, га; x_4 – площадь однолетних трав на силос, га; x_5 – площадь однолетних трав на зеленый корм, га. В выражении коэффициент при x_1 (стоимость реализации пшеницы с одного га) будет изменяться в заданном интервале.

Далее обозначим ограничения задачи.

В хозяйстве имеется 2000 га посевных площадей, это обозначается в правой части ограничения со знаком непревышения, коэффициент 1,1 означает дополнительную на 10% площадь зерновых для выращивания семян. Такое ограничение запишется так:

$$1{,}1x_1 + 1{,}1x_2 + 1{,}1x_3 + x_4 + x_5 \le 2000.$$

Далее запишем условие непревышения затрат на горюче-смазочные материалы:

$$1600x_1 + 1600x_2 + 1600x_3 + 1000x_4 + 300x_5 \leq 2600000$$
и ограничение затрат на оплату труда
$$450x_1 + 450x_2 + 450x_3 + 410x_4 + 160x_5 \leq 800000.$$

Затем обозначим минимальные объемы производства растениеводческой продукции, которые отражены в правых частях уравнений, коэффициенты при соответствующих переменных в левых частях обозначают урожайность культуры:

- пшеницы $15{,}8x_1 \geq 6030$;
- овса $15{,}9x_2 \geq 4000$;
- ячменя $15{,}8x_3 \geq 8000$;
- однолетних трав на силос $80x_4 \geq 3500$;
- однолетних трав на зеленый корм $90x_5 \geq 20000$.

На рис. 6.1 приведена матрица коэффициентов задачи и ее решение при помощи надстройки «Поиск решения» в табличном процессоре MS Excel.

Алгоритм использования инструмента «Поиск решения» приведен в разделе 3.4 данного учебного пособия.

На рис. 5.1 в ячейке I12 приведено значение целевой функции, а в диапазоне D15:H15 - оптимальный план производства, представляющий собой структуру посевных площадей. Иллюстрация отражения условий задачи в окне надстройки «Поиск решения» приведены на рис. 6.2.

I12 =СУММПРОИЗВ(D12:H12;D15:H15)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1		Расшифровка переменной		Пшеница, га	Овес, га	Ячмень, га	Однолетние травы на силос, га	Однолетние травы на зеленый корм, га			
2	№	Переменная	Ед. изм.	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Результат расчета по ограничению	Знак	Значение ограничения
3	п/п	Название ограничения		га	га	га	га	га			
4	1	Посевная площадь	га	1,1	1,1	1,1	1	1	1 978	≤	2 000
5	2	Затраты на ГСМ	руб.	1600	1600	1600	1000	300	2 600 000	≤	2 600 000
6	3	Затраты на оплату труда	руб.	450	450	450	410	160	753 688	≤	800 000
7	4	Однолетние травы на силос	ц	0	0	0	80	0	3 500	≥	3 500
8	5	Однолетние травы на зеленый корм	ц	0	0	0	0	90	20 000	≥	20 000
9	6	Пшеница	ц	15,8	0	0	0	0	12 610	≥	6 030
10	7	Овес	ц	0	15,9	0	0	0	4 000	≥	4 000
11	8	Ячмень	ц	0	0	15,8	0	0	8 000	≥	8 000
12	Целевая функция (доход)		руб.	18960	16457	18328	1280	1620	28 967 751р.	→	max
13											
14				x_1	x_2	x_3	x_4	x_5			
15				798	252	506	44	222			
16											

Рисунок 6.1 - Матрица коэффициентов задачи и ее решение

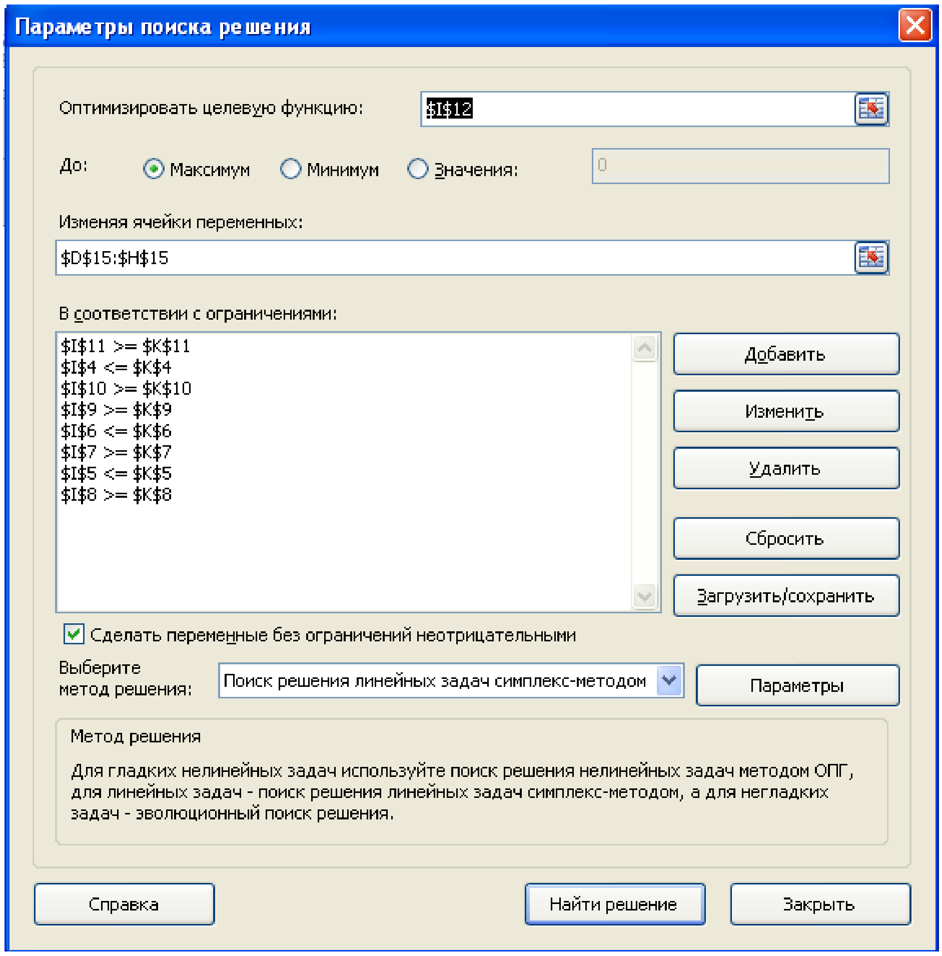


Рисунок 6.2 - Условия задачи в окне надстройки MS Execel «Поиск решения»

Как уже отмечено выше результатом решения задачи является максимум дохода. Коэффициенты в целевой функции обозначают доход от реализации продукции с единицы площади с учетом биопродуктивности культуры. При этом в современной системе рыночных отношений знакома ситуация несоответствия цен ожиданиям, они могут изменяться в большую или меньшую сторону по разным причинам. Поэтому разумно будет предположить, что доход в целевой функции может изменяться в некотором интервале.

Рассмотрим подобную ситуацию на примере изменчивости одного коэффициента в целевой функции при переменной x_1, который в исходной задаче означает реализацию пшеницы по цене 1200 руб. за центнер. Другие коэффициенты примем неизменными, чтобы не усложнять реализацию решения.

Предположим, основываясь на данных предыдущих лет, что стоимость реализации зерновых изменяется от 900 до 1200 руб. за центнер. На формирование цены влияет множество факторов, которые зачастую не поддаются точному прогнозированию. Поэтому примем, что цена на пшеницу изменяется в заданном интервале (900-1200 руб. за центнер) случайным образом. Найдем решение задачи для 10 смоделированных ситуаций изменения закупочных цен на пшеницу. Случайное изменение стоимости реализации в заданном интервале в MS Excel можно реализовать при помощи функции *СЛУЧМЕЖДУ(нижн_граница, верхн_граница)*, что можно увидеть в строке формул на рис. 6.3.

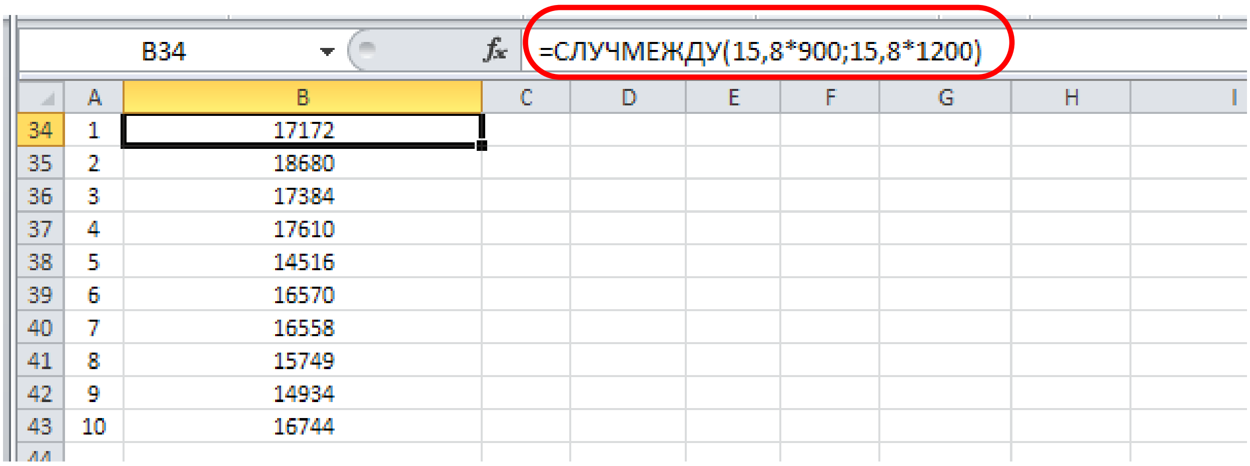
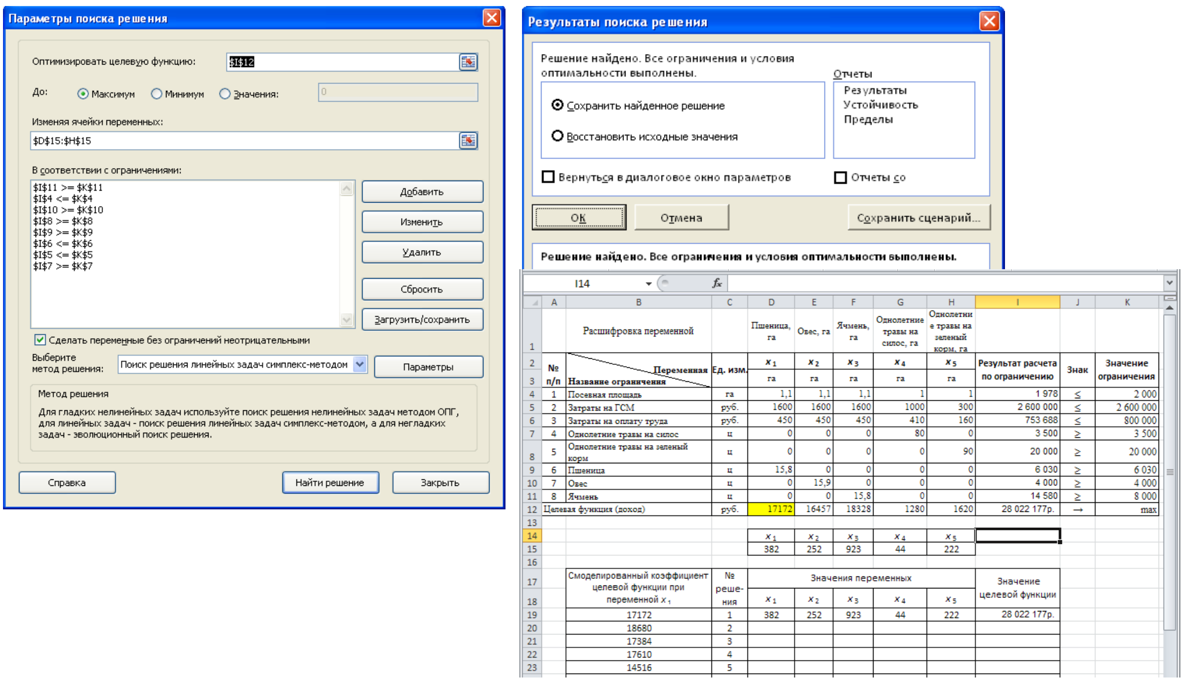


Рисунок 6.3 – Моделирование случайным образом стоимости закупочной цены на пшеницу с одного га при помощи функции *СЛУЧМЕЖДУ(нижн_граница, верхн_граница)*

На рис. 6.3 в диапазоне B34:B43 приведены смоделированные случайным образом коэффициенты целевой функции при переменной x_1. Далее, полученные в результате моделирования значения, поочередно подставляются в ячейку D12 на каждом шаге (рис. 6.4). С учетом каждого из них определяются оптимальные планы с соответствующим значением целевой функции. При этом значение коэффициента в критерии оптимальности и соответствующие ему результаты решения задачи (значение целевой функции и план производства) будем фиксировать в диапазоне B17:I28 (рис 6.4).

Шаг 1



Шаг 2

I12 | f_x | =СУММПРОИЗВ(D12:H12;D15:H15)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1		Расшифровка переменной		Пшеница, га	Овес, га	Ячмень, га	Однолетние травы на силос, га	Однолетние травы на зеленый корм, га			
2	№	Переменная	Ед. изм.	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Результат расчета	Знак	Значение
3	п/п	Название ограничения		га	га	га	га	га	по ограничению		ограничения
4	1	Посевная площадь	га	1,1	1,1	1,1	1	1	1 978	≤	2 000
5	2	Затраты на ГСМ	руб.	1600	1600	1600	1000	300	2 600 000	≤	2 600 000
6	3	Затраты на оплату труда	руб.	450	450	450	410	160	753 688	≤	800 000
7	4	Однолетние травы на силос	ц	0	0	0	80	0	3 500	≥	3 500
8	5	Однолетние травы на зеленый корм	ц	0	0	0	0	90	20 000	≥	20 000
9	6	Пшеница	ц	15,8	0	0	0	0	12 610	≥	6 030
10	7	Овес	ц	0	15,9	0	0	0	4 000	≥	4 000
11	8	Ячмень	ц	0	0	15,8	0	0	8 000	≥	8 000
12	Целевая функция (доход)		руб.	18680	16457	18328	1280	1620	28 744 286р.	→	max

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
15	798	252	506	44	222

	Смоделированный коэффициент целевой функции при переменной x_1	№ реше-ния	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Значение целевой функции
19	17172	1	382	252	923	44	222	28 022 177р.
20	18680	2	798	252	506	44	222	28 744 286р.
21	17384	3						
22	17610	4						
23	14516	5						
24	16570	6						

(Столбцы x_1–x_5 — под общим заголовком «Значения переменных».)

…

…

Шаг 10

I12 | f_x | =СУММПРОИЗВ(D12:H12;D15:H15)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1		Расшифровка переменной		Пшеница, га	Овес, га	Ячмень, га	Однолетние травы на силос, га	Однолетние травы на зеленый корм, га			
2	№	Переменная	Ед. изм.	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Результат расчета	Знак	Значение
3	п/п	Название ограничения		га	га	га	га	га	по ограничению		ограничения
4	1	Посевная площадь	га	1,1	1,1	1,1	1	1	1 978	≤	2 000
5	2	Затраты на ГСМ	руб.	1600	1600	1600	1000	300	2 600 000	≤	2 600 000
6	3	Затраты на оплату труда	руб.	450	450	450	410	160	753 688	≤	800 000
7	4	Однолетние травы на силос	ц	0	0	0	80	0	3 500	≥	3 500
8	5	Однолетние травы на зеленый корм	ц	0	0	0	0	90	20 000	≥	20 000
9	6	Пшеница	ц	15,8	0	0	0	0	6 030	≥	6 030
10	7	Овес	ц	0	15,9	0	0	0	4 000	≥	4 000
11	8	Ячмень	ц	0	0	15,8	0	0	14 580	≥	8 000
12	Целевая функция (доход)		руб.	16744	16457	18328	1280	1620	27 858 833р.	→	max

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
15	382	252	923	44	222

	Смоделированный коэффициент целевой функции при переменной x_1	№ реше-ния	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Значение целевой функции
19	17172	1	382	252	923	44	222	28 022 177р.
20	18680	2	798	252	506	44	222	28 744 286р.
21	17384	3	382	252	923	44	222	28 103 086р.
22	17610	4	382	252	923	44	222	28 189 338р.
23	14516	5	382	252	923	44	222	27 008 527р.
24	16570	6	382	252	923	44	222	27 792 427р.
25	16558	7	382	252	923	44	222	27 787 847р.
26	15749	8	382	252	923	44	222	27 479 096р.
27	14934	9	382	252	923	44	222	27 168 054р.
28	16744	10	382	252	923	44	222	27 858 833р.

(Столбцы x_1–x_5 — под общим заголовком «Значения переменных».)

Рисунок 6.4 – Результаты решения задачи при условии меняющейся цены реализации пшеницы

В результате десятикратного решения задачи в условиях изменяющейся цены на пшеницу, можно заключить, что доход сельскохозяйственного предприятия ООО «Академия» может изменяться в пределах 27 008 527-28 744 286 руб., а посевная площадь пшеницы варьирует в диапазоне 382-798 га (строки 23 и 20 на рис. 6.4).

Задачи с интервальными параметрами

1. Хозяйство производит 2 вида продукции. за единицу производства культуры А оно получает прибыль 4,5-5,5.д.е, а культуры В – 4 д.е. Площадь посевов составляет 90 га. Ограничение трудовых ресурсов соответствует 120. чел.-дней. Для обработки единицы площади культуры А необходимо 1,5-2,5. чел.-дней, а культуры В - …1..чел.- дней. Кроме того, нужно поставить на рынок не менее 30. т. продукции культуры В при урожайности 1,5-2 т/га. Требуется разделить площадь таким образом, чтобы получить максимальную прибыль.
2. Хозяйство производит 2 вида продукции. за единицу производства культуры А оно получает прибыль 3..д.е, а культуры В – 1-2 д.е. Площадь посевов составляет 50. га. Ограничение трудовых ресурсов соответствует 180.. чел.-дней. Для обработки единицы площади культуры А необходимо 4.. чел.-дней, а культуры В - …2-3..чел.- дней. Кроме того, необходимо поставить на рынок не менее …40. т. продукции культуры В при урожайности 1,5-2,5 т/га. Требуется разделить площадь таким образом, чтобы получить максимальную прибыль.
3. Хозяйство производит 2 вида продукции. за единицу производства культуры А оно получает прибыль 1,5-2..д.е, а культуры В – 3 д.е. Площадь посевов составляет 35. га. Ограничение трудовых ресурсов соответствует 120.. чел.-дней. Для обработки единицы площади культуры А необходимо 3.. чел.-дней, а культуры В – 4-5..чел.- дней. Кроме того, необходимо поставить на рынок не менее 50. т. продукции культуры А при урожайности 2-2,5…т/га. Требуется разделить площадь таким образом, чтобы получить максимальную прибыль.
4. Хозяйство производит 2 вида продукции. за единицу производства культуры А оно получает прибыль…2,5-3,5..д.е, а культуры В – 5 д.е. Площадь посевов составляет …70. га. Ограничение трудовых ресурсов соответствует …180.. чел.-дней. Для обработки единицы площади культуры А необходимо …1,5-2.. чел.-дней, а культуры В - …3..чел.-дней. Кроме того, необходимо поставить на рынок не менее 60. т. продукции культуры А при урожайности 1,4-2…т/га. Требуется разделить площадь таким образом, чтобы получить максимальную прибыль.
5. Хозяйство производит 2 вида продукции. за единицу производства культуры А оно получает прибыль 4-5…..д.е, а культуры В – 2 д.е. Площадь посевов составляет 90. га. Ограничение трудовых ресурсов соответствует 210. чел.-дней. Для обработки единицы площади культуры А необходимо …3.. чел.-дней, а культуры В - …1,5-2,5..чел.-дней. Кроме того, необходимо поставить на рынок не менее 40…. т. продукции культуры В при

урожайности 1,6-2,4…т/га. Требуется разделить площадь таким образом, чтобы получить максимальную прибыль.

6. Хозяйство производит 2 вида продукции. за единицу производства культуры А оно получает прибыль 3,5-4,5..д.е, а культуры В – 3 д.е. Площадь посевов составляет 80…. га. Ограничение трудовых ресурсов соответствует 210. чел.-дней. Для обработки единицы площади культуры А необходимо 3-4.. чел.-дней, а культуры В - …2..чел.- дней. Кроме того необходимо поставить на рынок не менее 50. т. продукции культуры В при урожайности …2-2,6 т/га. Требуется разделить площадь таким образом, чтобы получить максимальную прибыль.

7. Хозяйство производит 2 вида продукции. за единицу производства культуры А оно получает прибыль …3..д.е, а культуры В – 6-7 д.е. Площадь посевов составляет 40. га. Ограничение трудовых ресурсов соответствует 120.. чел.-дней. Для обработки единицы площади культуры А необходимо 2-3.. чел.-дней, а культуры А- 5..чел.- дней. Кроме того необходимо поставить на рынок не менее …30. т. продукции культуры В при урожайности 1,5-2 т/га. Требуется разделить площадь таким образом, чтобы получить максимальную прибыль.

8. Хозяйство производит 2 вида продукции за единицу производства культуры А оно получает прибыль …4..д.е, а культуры В – 2-3 д.е. Площадь посевов составляет 60. га. Ограничение трудовых ресурсов соответствует 150.. чел.-дней. Для обработки единицы площади культуры А необходимо …3-3,5.. чел.-дней, а культуры В - …2..чел.-дней. Кроме того, необходимо поставить на рынок не менее 30. т. продукции культуры В при урожайности 1,5-2…т/га. Требуется разделить площадь таким образом, чтобы получить максимальную прибыль.

9. Хозяйство производит 2 вида продукции за единицу производства культуры А оно получает прибыль 3.д.е, а культуры В – 4,5-5,5 д.е. Площадь посевов составляет 75 га. Ограничение трудовых ресурсов соответствует 180 чел.-дней. Для обработки единицы площади культуры А необходимо 2.. чел.-дней, а культуры В – 3-4..чел.- дней. Кроме того, нужно поставить на рынок не менее 40. т. продукции культуры А при урожайности 1,6-2,2 т/га. Требуется разделить площадь таким образом, чтобы получить максимальную прибыль.

10. Хозяйство производит 2 вида продукции. За единицу производства культуры А оно получает прибыль 4-5.д.е, а культуры В – 6 д.е. Площадь посевов составляет 35 га. Ограничение трудовых ресурсов соответствует 120 чел.-дней. Для обработки единицы площади культуры А необходимо 3.. чел.-дней, а культуры В – 4-5..чел.- дней. Кроме того, нужно поставить на рынок не менее 30. т. продукции культуры А при урожайности 1,5-2 т/га. Требуется разделить площадь таким образом, чтобы получить максимальную прибыль.

11. Хозяйство производит 2 вида продукции. За единицу производства культуры А оно получает прибыль 5.д.е, а культуры В – 2,5-3 д.е. Площадь посевов составляет 45 га. Ограничение трудовых ресурсов

соответствует 150. чел.-дней. Для обработки единицы площади культуры А необходимо 4.. чел.-дней, а культуры В – 2-3..чел.- дней. Кроме того, нужно поставить на рынок не менее 40. т. продукции культуры В при урожайности 2-2,5 т/га. Требуется разделить площадь таким образом, чтобы получить максимальную прибыль.

12. Хозяйство производит 2 вида продукции. За единицу производства культуры А оно получает прибыль 4-5.д.е, а культуры В – 7 д.е. Площадь посевов составляет 40 га. Ограничение трудовых ресурсов соответствует 120. чел.-дней. Для обработки единицы площади культуры А необходимо 2-3.. чел.-дней, а культуры В - …4..чел.- дней. Кроме того, нужно поставить на рынок не менее 30. т. продукции культуры А при урожайности 1,5-2 т/га. Требуется разделить площадь таким образом, чтобы получить максимальную прибыль.

13. Хозяйство производит 2 вида продукции. За единицу производства культуры А оно получает прибыль 1,5-2,5 .д.е, а культуры В – 4 д.е. Площадь посевов составляет 50 га. Ограничение трудовых ресурсов соответствует 90. чел.-дней. Для обработки единицы площади культуры А необходимо 1-2. чел.-дней, а культуры В - 3..чел.- дней. Кроме того, нужно поставить на рынок не менее 30 т. продукции культуры В при урожайности 1,7-2,4 т/га. Требуется разделить площадь таким образом, чтобы получить максимальную прибыль.

14. Хозяйство производит 2 вида продукции. За единицу производства культуры А оно получает прибыль 4.д.е, а культуры В – 2,5-3 д.е. Площадь посевов составляет 45 га. Ограничение трудовых ресурсов соответствует 150. чел.-дней. Для обработки единицы площади культуры А необходимо 4,5.. чел.-дней, а культуры В –3..чел.- дней. Кроме того, нужно поставить на рынок не менее 40. т. продукции культуры В при урожайности 1,5-2,5 т/га. Требуется разделить площадь таким образом, чтобы получить максимальную прибыль.

15. Хозяйство производит 2 вида продукции. За единицу производства культуры А оно получает прибыль 4,5-5,5 д.е, а культуры В – 7 д.е. Площадь посевов составляет 40 га. Ограничение трудовых ресурсов соответствует 120. чел.-дней. Для обработки единицы площади культуры А необходимо 2.. чел.-дней, а культуры В - …3-4..чел.- дней. Кроме того, нужно поставить на рынок не менее 30. т. продукции культуры А при урожайности 1,5-2 т/га. Требуется разделить площадь таким образом, чтобы получить максимальную прибыль.

16. Хозяйство производит 2 вида продукции. За единицу производства культуры А оно получает прибыль 2,0-2,5 .д.е, а культуры В – 4 д.е. Площадь посевов составляет 50 га. Ограничение трудовых ресурсов соответствует 90. чел.-дней. Для обработки единицы площади культуры А необходимо 1-2. чел.-дней, а культуры В – 3,5..чел.- дней. Кроме того, нужно поставить на рынок не менее 30 т. продукции культуры В при урожайности 1,8-2,5 т/га. Требуется разделить площадь таким образом, чтобы получить максимальную прибыль.

17. Хозяйство производит 2 вида продукции. За единицу производства культуры А оно получает прибыль 2,0-3 .д.е, а культуры В – 4 д.е. Площадь посевов составляет 50 га. Ограничение трудовых ресурсов соответствует 90. чел.-дней. Для обработки единицы площади культуры А необходимо 1-2. чел.-дней, а культуры В – 3,5..чел.- дней. Кроме того, нужно поставить на рынок не менее 30 т. продукции культуры В при урожайности 1,7-2,4 т/га. Требуется разделить площадь таким образом, чтобы получить максимальную прибыль.

6.2 Задача со случайными параметрами

Стохастическая (вероятностная) неопределенность возникает, когда неизвестные факторы статистически устойчивы и представляют собой случайные величины, для которых известны или определены законы распределения и их параметры.

Подобная ситуация описывается задачей стохастического программирования которая имеет вид:

$$f(x) = M\left(\sum_{j\in J} c_j x_j\right) \to \min(\max), \tag{6.4}$$

$$P\left\{\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_{ij} \le b_i\right\} \ge \alpha_i \ (i \in I), \tag{6.5}$$

где $f(X)$ - целевая функция, удовлетворяющий системе ограничений, x_j – искомая переменная, c_j – коэффициенты целевой функции, a_{ij} , b_i – параметры ограничений, α_i – заданная вероятность выполнения системы, P – вероятность выполнения каждого заданного ограничения.

Для планирования производства продукции может быть сформулирована другая задача, когда коэффициенты ограничений, целевой функции и правых частей условий c_j , a_{ij}, и b_i представляют собой случайные величины, связанные с вероятностью превышения P:

$$f = \sum_{J=1}^{n} c_j^P x_j \to \max, \tag{6.6}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^P x_j \le (\ge)\, b_i^P \,(i = \overline{1,m}), \tag{6.7}$$

$$x_j \ge 0, \ (j = \overline{1,n}). \tag{6.8}$$

Так как представленная задача является сложной, возможным методом ее решения является переход к детерминированному эквиваленту. В основе этого перехода лежит использование закона распределения случайной величины. В практике наиболее часто используются семейство нормальных законов распределения и гамма-распределение.

Пример 6.2 Рассмотрим решение упрощенной задачи оптимизации производства аграрной продукции со случайными параметрами для ООО «Академия». При этом условия задачи примем аналогичными примеру 5.1 за исключением целевой функции, коэффициенты при неизвестных в которой теперь не будем изменять: $12840x_1 + 15457x_2 + 18328x_3 + 1280x_4 + 1620x_5 \to max,$

и урожайности пшеницы в ограничениях, которая будет зависеть от вероятности: $y^P x_1 \geq 6030$ (здесь y^P – урожайность пшеницы, зависящая от вероятности P).

Для того чтобы определить параметр y^P в условии задачи используем многолетний ряд наблюдений урожайности пшеницы в Иркутском районе (рис. 6.5). Сначала определим среднеарифметическое значение ряда наблюдений. С этой целью в ячейке B20 введена формула «=СРЗНАЧ(B2:B18)» (использована встроенная функция MS Excel СРЗНАЧ(число1; [число2];...)). После этого для урожайности пшеницы рассчитаем модульный коэффициент, который определяется как отношение каждого значения урожайности к среднеарифметическому значению многолетнего ряда, с этой целью в ячейку C2 введена формула «=B2/$B$20», которая затем скопирована в диапазон ячеек C3:C18. Обратите внимание, что знак «$» служит для создания абсолютной ссылки на ячейку в формуле (иными словами при копировании или протягивании формулы данный аргумент не смещается).

D2 =НОРМРАСП(C2;$G$4;$G$17;1)

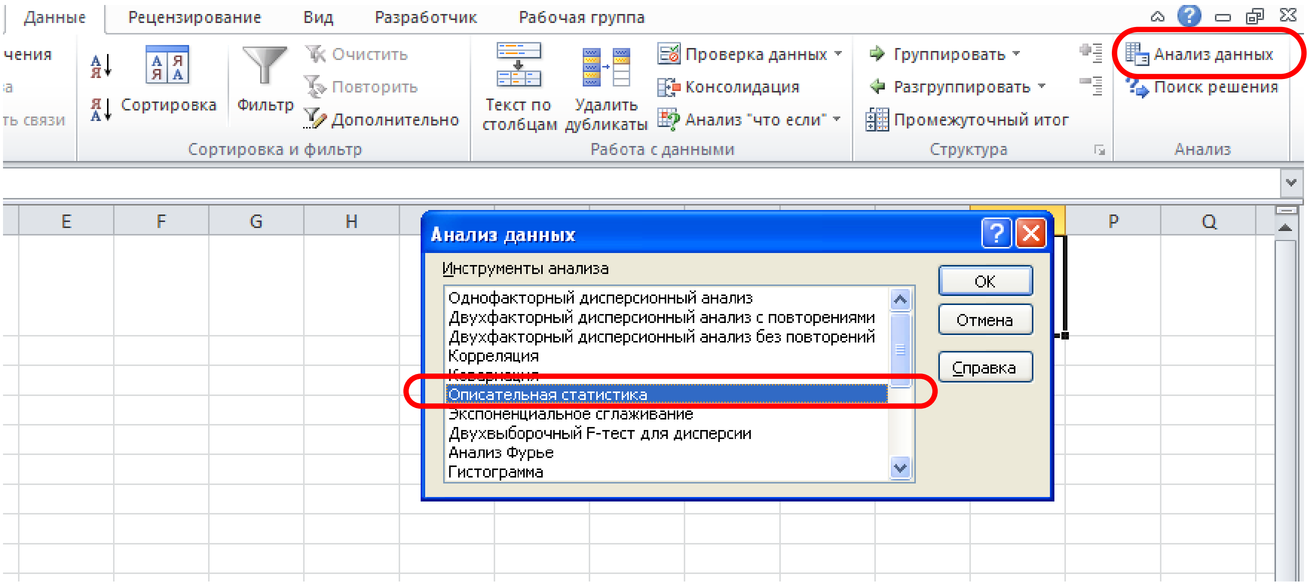
	A	B	C	D	E	F	G
1	Год	Урожайность пшеницы в Иркутском р-оне, ц/га	Модульный коэффициент, $x_i/\bar{x}$	Вероятность появления события по нормальному закону распределения			
2	1996	17,5	1,11	0,722		*Столбец1*	
3	1997	13	0,82	0,134			
4	1998	13,2	0,83	0,151		Среднее	1,007
5	1999	12,8	0,81	0,118		Стандартная ошибка	0,041
6	2000	15,3	0,97	0,405		Медиана	1,068
7	2001	10,7	0,68	0,0241		Мода	1,112
8	2002	11,8	0,75	0,0592		Стандартное отклонени	0,169
9	2003	15,2	0,96	0,390		Дисперсия выборки	0,028
10	2004	18,7	1,18	0,851		Эксцесс	-0,939
11	2005	17,8	1,12	0,758		Асимметричность	-0,590
12	2006	17,5	1,11	0,722		Интервал	0,547
13	2007	17,6	1,11	0,734		Минимум	0,680
14	2008	19,3	1,22	0,897		Максимум	1,227
15	2009	16,8	1,06	0,627		Сумма	17,112
16	2010	18	1,14	0,781		Счет	17
17	2011	15,6	0,99	0,449		Коэффициент вариации	0,17
18	2012	18,4	1,16	0,823			
19							
20	Средне-ариф-мети-ческое ряда	15,8					

Рисунок 6.5 – Определение вероятности появления события по нормальному закону распределения вероятностей для значений многолетнего ряда урожайности пшеницы в Иркутском районе

Затем для ряда урожайности пшеницы, расположенного в диапазоне ячеек B2:B18 найдем статистические параметры, используя инструмент MS Excel «Описательная статистика», расположенного на вкладке «Данные», панель инструментов «Анализ», кнопка «Анализ данных» (рис. 6.6). Результат выведен в диапазон ячеек F2:G16.

Дополнительно в ячейке G17 рассчитаем коэффициент вариации путем деления стандартного отклонения на среднее значение ряда (в ячейку G17 введена формула «=G8/G4»).

Затем в ячейку D2 введем формулу «=НОРМРАСП(C2;$G$4;$G$17;1)», которая позволяет определить вероятность появления события по нормальному закону распределения, и скопируем ее в диапазон D3: D18 (рис. 6.5). Здесь использована встроенная функция MS Excel «НОРМРАСП(x,среднее,стандартное_откл)».



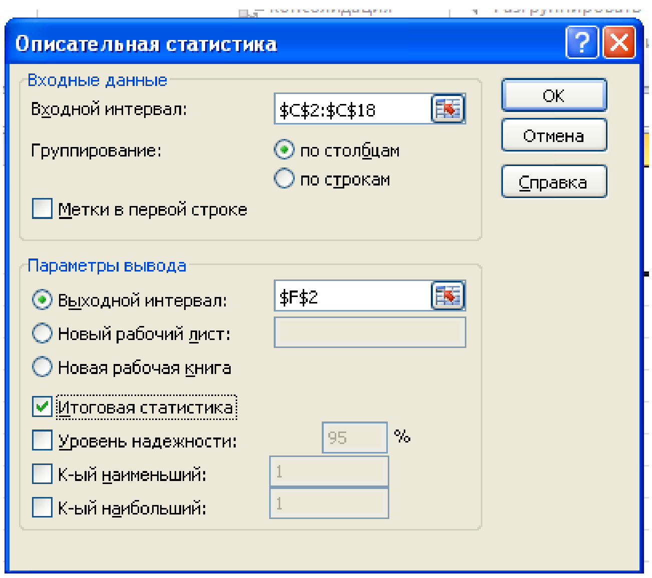


Рисунок 6.6 – Определение статистических параметров ряда модульных коэффициентов урожайности пшеницы в Иркутском районе

Как можно видеть минимальное значение урожайности в Иркутском районе за рассматриваемый период (1996-2012 гг.) составило 10,7 ц/га в 2001 г. (рис. 6.5). Согласно определению вероятности она для данного события составляет 0,0241 (ячейка D7). Это и является составляющим условия задачи.

Теперь решим задачу оптимизации производства аграрной продукции с минимальной урожайностью пшеницы (рис. 6.7 и 6.8).

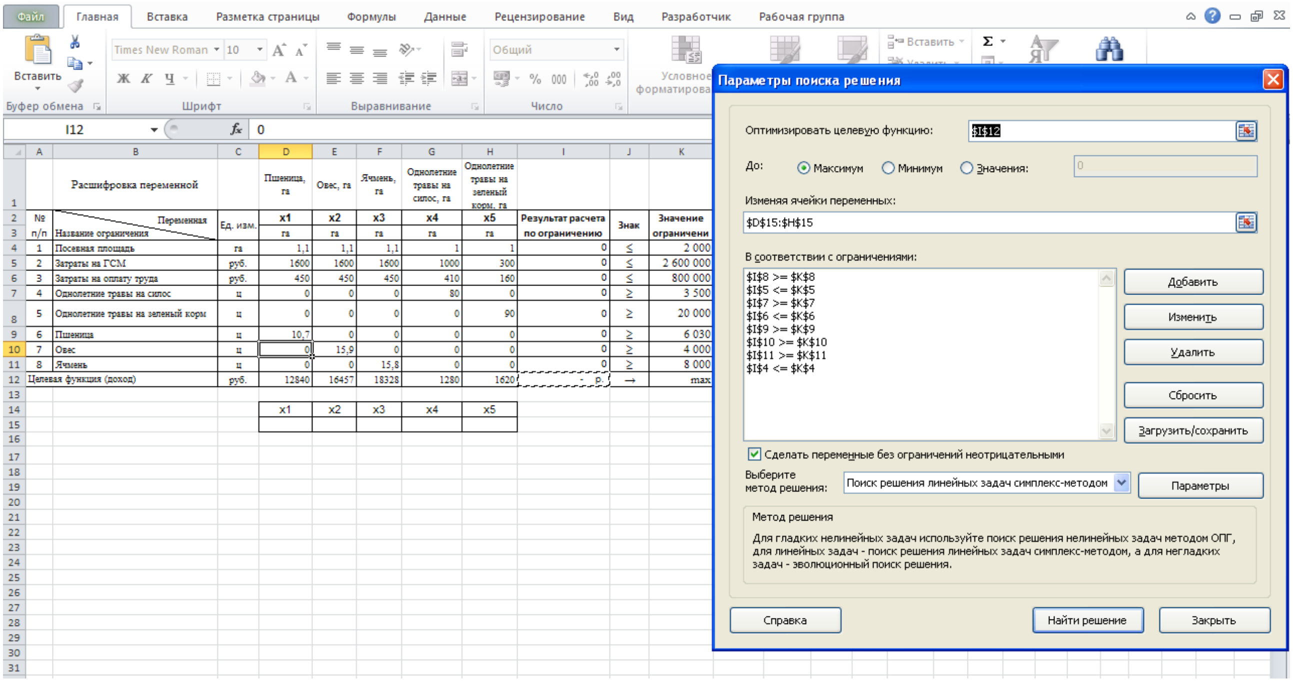
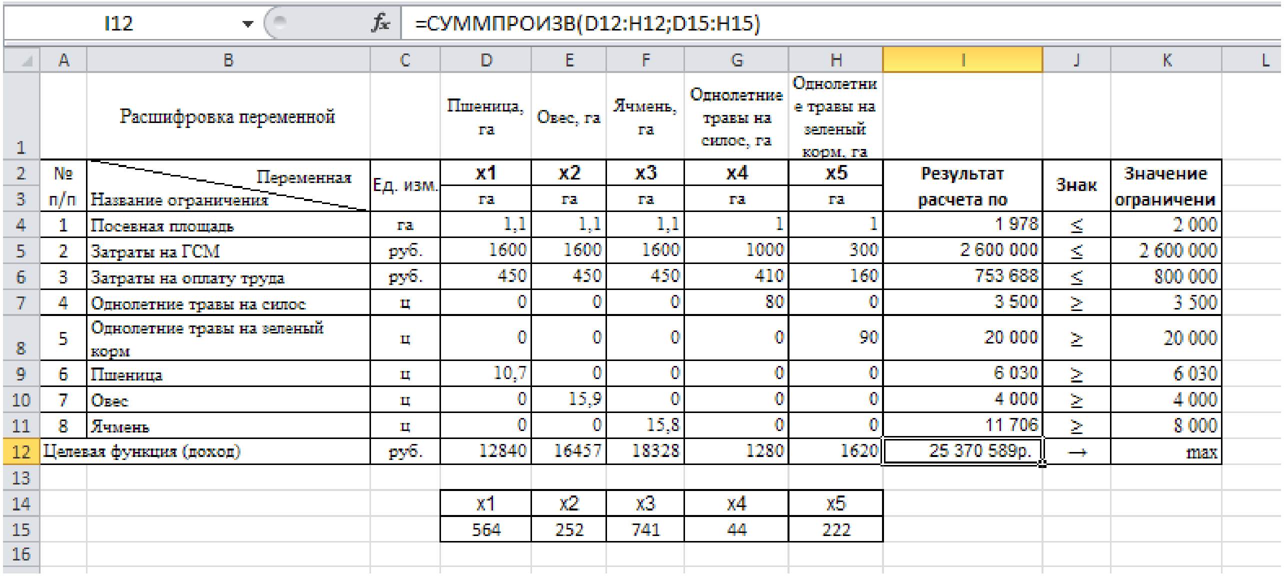


Рисунок 6.7 – Решение задачи оптимизации производства аграрной продукции со случайными параметрами



I12 =СУММПРОИЗВ(D12:H12;D15:H15)

№ п/п	Расшифровка переменной / Название ограничения	Ед. изм.	Пшеница, га x1 га	Овес, га x2 га	Ячмень, га x3 га	Однолетние травы на силос, га x4 га	Однолетние травы на зеленый корм, га x5 га	Результат расчета по	Знак	Значение ограничени
1	Посевная площадь	га	1,1	1,1	1,1	1	1	1 978	≤	2 000
2	Затраты на ГСМ	руб.	1600	1600	1600	1000	300	2 600 000	≤	2 600 000
3	Затраты на оплату труда	руб.	450	450	450	410	160	753 688	≤	800 000
4	Однолетние травы на силос	ц	0	0	0	80	0	3 500	≥	3 500
5	Однолетние травы на зеленый корм	ц	0	0	0	0	90	20 000	≥	20 000
6	Пшеница	ц	10,7	0	0	0	0	6 030	≥	6 030
7	Овес	ц	0	15,9	0	0	0	4 000	≥	4 000
8	Ячмень	ц	0	0	15,8	0	0	11 706	≥	8 000
Целевая функция (доход)		руб.	12840	16457	18328	1280	1620	25 370 589р.	→	max

x1	x2	x3	x4	x5
564	252	741	44	222

Рисунок 6.8 – Результаты решения задачи оптимизации производства аграрной продукции со случайными параметрами

В результате решения задачи оптимизации производства аграрной продукции со случайными параметрами мы получаем план производства (ячейки D15:H15), согласно которому посевная площадь пшеница составляет 564 га, овса – 252 га, ячменя – 741, однолетних трав на силос – 44 га, однолетних трав на зеленый корм – 222 га. Полученное значение целевой функции 5 370 589 руб. соответствует вероятности 0,0241.

Контрольные задания

1. Хозяйство производит 2 вида продукции. за единицу производства культуры А оно получает прибыль 5.д.е, а культуры В – 4 д.е. Площадь посевов составляет 90 га. Ограничение трудовых ресурсов соответствует 120. чел.-дней. Для обработки единицы площади культуры А необходимо 2 чел.-дней, а культуры В - …1..чел.- дней. Кроме того, нужно поставить на рынок не менее 30. т. продукции культуры В при урожайности, подчиняющейся нормальному закону с параметрами: среднее – 1,7 т/га, коэффициент вариации – 0,15. Требуется разделить площадь таким образом, чтобы получить максимальную прибыль.
2. Хозяйство производит 2 вида продукции. за единицу производства культуры А оно получает прибыль 3..д.е, а культуры В – 2 д.е. Площадь посевов составляет 50. га. Ограничение трудовых ресурсов соответствует 180.. чел.-дней. Для обработки единицы площади культуры А необходимо 4.. чел.-дней, а культуры В - …2..чел.- дней. Кроме того, необходимо поставить на рынок не менее …40. т. продукции культуры В при урожайности, подчиняющейся нормальному закону с параметрами: среднее – 1,4 т/га, коэффициент вариации – 0,18.. Требуется разделить площадь таким образом, чтобы получить максимальную прибыль.
3. Хозяйство производит 2 вида продукции. за единицу производства культуры А оно получает прибыль 2..д.е, а культуры В – 3 д.е. Площадь посевов составляет 35. га. Ограничение трудовых ресурсов соответствует 120.. чел.-дней. Для обработки единицы площади культуры А необходимо 3.. чел.-дней, а культуры В –5..чел.- дней. Кроме того, необходимо поставить на рынок не менее 50. т. продукции культуры А при урожайности, подчиняющейся гамма-распределению с параметрами: среднее – 1,5 т/га, коэффициент вариации – 0,30. Требуется разделить площадь таким образом, чтобы получить максимальную прибыль.
4. Хозяйство производит 2 вида продукции. за единицу производства культуры А оно получает прибыль…3,5..д.е, а культуры В – 5 д.е. Площадь посевов составляет …70. га. Ограничение трудовых ресурсов соответствует …180.. чел.-дней. Для обработки единицы площади культуры А необходимо …1,5.. чел.-дней, а культуры В - …3..чел.-дней. Кроме того, необходимо поставить на рынок не менее 50. т. продукции культуры А при урожайности, подчиняющейся гамма-распределению с параметрами: среднее – 1,4 т/га, коэффициент вариации – 0,28.. Требуется разделить площадь таким образом, чтобы получить максимальную прибыль.
5. Хозяйство производит 2 вида продукции. за единицу производства культуры А оно получает прибыль 4…..д.е, а культуры В – 2 д.е. Площадь посевов составляет 90. га. Ограничение трудовых ресурсов соответствует 210. чел.-дней. Для обработки единицы площади культуры А необходимо …3.. чел.-дней, а культуры В - …1,5 чел.-дней. Кроме того, необходимо поставить на рынок не менее 40…. т. продукции культуры В при урожайности, подчиняющейся нормальному закону с параметрами: среднее –

1,5 т/га, коэффициент вариации – 0,20. Требуется разделить площадь таким образом, чтобы получить максимальную прибыль.

6. Хозяйство производит 2 вида продукции. за единицу производства культуры А оно получает прибыль 4,5..д.е, а культуры В – 3 д.е. Площадь посевов составляет 80…. га. Ограничение трудовых ресурсов соответствует 210. чел.-дней. Для обработки единицы площади культуры А необходимо 3.. чел.-дней, а культуры В - …2..чел.- дней. Кроме того необходимо поставить на рынок не менее 50. т. продукции культуры В при урожайности подчиняющейся нормальному закону с параметрами: среднее – 1,9 т/га, коэффициент вариации – 0,13. Требуется разделить площадь таким образом, чтобы получить максимальную прибыль.

7. Хозяйство производит 2 вида продукции. за единицу производства культуры А оно получает прибыль …3..д.е, а культуры В – 6 д.е. Площадь посевов составляет 40. га. Ограничение трудовых ресурсов соответствует 120.. чел.-дней. Для обработки единицы площади культуры А необходимо 3.. чел.-дней, а культуры А- 5..чел.- дней. Кроме того необходимо поставить на рынок не менее …30. т. продукции культуры В при урожайности, подчиняющейся гамма-распределению с параметрами: среднее – 1,3 т/га, коэффициент вариации – 0,25.. Требуется разделить площадь таким образом, чтобы получить максимальную прибыль.

8. Хозяйство производит 2 вида продукции за единицу производства культуры А оно получает прибыль …4..д.е, а культуры В – 2 д.е. Площадь посевов составляет 60. га. Ограничение трудовых ресурсов соответствует 150.. чел.-дней. Для обработки единицы площади культуры А необходимо …3,5.. чел.-дней, а культуры В - …2..чел.-дней. Кроме того, необходимо поставить на рынок не менее 30. т. продукции культуры В при урожайности подчиняющейся гамма-распределению с параметрами: среднее – 1,5 т/га, коэффициент вариации – 0,24.. Требуется разделить площадь таким образом, чтобы получить максимальную прибыль.

9. Хозяйство производит 2 вида продукции за единицу производства культуры А оно получает прибыль 3.д.е, а культуры В –5 д.е. Площадь посевов составляет 75 га. Ограничение трудовых ресурсов соответствует 180 чел.-дней. Для обработки единицы площади культуры А необходимо 2.. чел.-дней, а культуры В – 3..чел.- дней. Кроме того, нужно поставить на рынок не менее 40. т. продукции культуры А при урожайности, подчиняющейся логнормальному закону с параметрами: среднее – 1,3 т/га, коэффициент вариации – 0,32.. Требуется разделить площадь таким образом, чтобы получить максимальную прибыль.

10. Хозяйство производит 2 вида продукции. За единицу производства культуры А оно получает прибыль 4.д.е, а культуры В – 6 д.е. Площадь посевов составляет 35 га. Ограничение трудовых ресурсов соответствует 120 чел.-дней. Для обработки единицы площади культуры А необходимо 3.. чел.-дней, а культуры В – 5..чел.- дней. Кроме того, нужно поставить на рынок не менее 30. т. продукции культуры А при урожайности, подчиняющейся логнормальному закону с параметрами: среднее – 1,6 т/га,

коэффициент вариации – 0,28. Требуется разделить площадь таким образом, чтобы получить максимальную прибыль.

11. Хозяйство производит 2 вида продукции. За единицу производства культуры А оно получает прибыль 5.д.е, а культуры В – 2 д.е. Площадь посевов составляет 45 га. Ограничение трудовых ресурсов соответствует 150. чел.-дней. Для обработки единицы площади культуры А необходимо 4.. чел.-дней, а культуры В – 2.чел.- дней. Кроме того, нужно поставить на рынок не менее 40. т. продукции культуры В при урожайности, подчиняющейся гамма-распределению с параметрами: среднее – 1,2 т/га, коэффициент вариации – 0,35.. Требуется разделить площадь таким образом, чтобы получить максимальную прибыль.

12. Хозяйство производит 2 вида продукции. За единицу производства культуры А оно получает прибыль 4.д.е, а культуры В – 7 д.е. Площадь посевов составляет 40 га. Ограничение трудовых ресурсов соответствует 120. чел.-дней. Для обработки единицы площади культуры А необходимо 3.. чел.-дней, а культуры В - …4..чел.- дней. Кроме того, нужно поставить на рынок не менее 30. т. продукции культуры А при урожайности, подчиняющейся логнормальному закону с параметрами: среднее – 1,4 т/га, коэффициент вариации – 0,25.. Требуется разделить площадь таким образом, чтобы получить максимальную прибыль.

13. Хозяйство производит 2 вида продукции. За единицу производства культуры А оно получает прибыль 2,5 .д.е, а культуры В – 4 д.е. Площадь посевов составляет 50 га. Ограничение трудовых ресурсов соответствует 90. чел.-дней. Для обработки единицы площади культуры А необходимо 2. чел.-дней, а культуры В - 3..чел.- дней. Кроме того, нужно поставить на рынок не менее 30 т. продукции культуры В при урожайности, подчиняющейся логнормальному закону с параметрами: среднее – 1,3 т/га, коэффициент вариации – 0,31.. Требуется разделить площадь таким образом, чтобы получить максимальную прибыль.

14. Хозяйство производит 2 вида продукции. За единицу производства культуры А оно получает прибыль 4.д.е, а культуры В – 2 д.е. Площадь посевов составляет 45 га. Ограничение трудовых ресурсов соответствует 150. чел.-дней. Для обработки единицы площади культуры А необходимо 4.. чел.-дней, а культуры В – 2.чел.- дней. Кроме того, нужно поставить на рынок не менее 40. т. продукции культуры В при урожайности, подчиняющейся гамма-распределению с параметрами: среднее – 1,35 т/га, коэффициент вариации – 0,30.. Требуется разделить площадь таким образом, чтобы получить максимальную прибыль.

15. Хозяйство производит 2 вида продукции. За единицу производства культуры А оно получает прибыль 4.д.е, а культуры В – 6 д.е. Площадь посевов составляет 40 га. Ограничение трудовых ресурсов соответствует 120. чел.-дней. Для обработки единицы площади культуры А необходимо 3.. чел.-дней, а культуры В - …4..чел.- дней. Кроме того, нужно поставить на рынок не менее 30. т. продукции культуры А при урожайности, подчиняющейся логнормальному закону с параметрами: среднее – 1,45 т/га,

коэффициент вариации – 0,25.. Требуется разделить площадь таким образом, чтобы получить максимальную прибыль.

16. Хозяйство производит 2 вида продукции. За единицу производства культуры А оно получает прибыль 2,5 .д.е, а культуры В – 4,5 д.е. Площадь посевов составляет 50 га. Ограничение трудовых ресурсов соответствует 90. чел.-дней. Для обработки единицы площади культуры А необходимо 2. чел.-дней, а культуры В - 3..чел.- дней. Кроме того, нужно поставить на рынок не менее 30 т. продукции культуры В при урожайности, подчиняющейся логнормальному закону с параметрами: среднее – 1,35 т/га, коэффициент вариации – 0,29.. Требуется разделить площадь таким образом, чтобы получить максимальную прибыль.

17. Хозяйство производит 2 вида продукции. За единицу производства культуры А оно получает прибыль 2 .д.е, а культуры В – 4,5 д.е. Площадь посевов составляет 40 га. Ограничение трудовых ресурсов соответствует 90. чел.-дней. Для обработки единицы площади культуры А необходимо 2. чел.-дней, а культуры В - 3..чел.- дней. Кроме того, нужно поставить на рынок не менее 30 т. продукции культуры В при урожайности, подчиняющейся логнормальному закону с параметрами: среднее – 1,4 т/га, коэффициент вариации – 0,33.. Требуется разделить площадь таким образом, чтобы получить максимальную прибыль.

7 ЗАДАЧИ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

В многокритериальных задачах используется не одна целевая функция, а их множество. Примером многокритериальной задачи может быть комплексное использование водных ресурсов водохранилища. Водопользователями и водопотребителями в этом случае могут быть энергетика, промышленные объекты, сельскохозяйственные организации, рыбное хозяйство, речной транспорт, водоснабжение, рекреация и другие. У каждого участника водохозяйственного комплекса своя цель. В некоторых случаях критерии оптимальности противоречат друг другу. В частности, задачи рыбного хозяйства в период нереста не совпадают с задачами гидроэнергетики.

Задача многокритериальной оптимизации имеет следующий вид

$$f(X) = \langle (f_1(X), f_2(X), ..., f_s(X) \rangle \to \max, \qquad (7.1)$$

$$X \in G. \qquad (7.2)$$

где $f_i(X)$ – частный критерий, X – допустимое решение в области G.

Для решения многокритериальных задач применяют различные методы достижения компромисса: линейная свертка критериев, последовательные уступки, выделения основного критерия, получение компромиссного решения для двух равнозначных критериев и др.

Рассмотрим метод последовательных уступок. В этом методе экспертным путем ранжируют цели. Сначала определяется решение согласно наиболее важному критерию. После этого значение этого критерия уменьшается на основе заданного значения уступки. Далее решается задача оптимизации с учетом второго по ранжиру критерия с учетом второй уступки. Процедуры повторяются до тех пор, пока не будет получено максимальное значение последнего критерия при условии, что значение каждого из предшествующих частных критериев отличается от соответствующего условного максимума не более чем на величину допустимой уступки по данной целевой функции. Найденное на последнем этапе решение является оптимальным.

Пример 7.1. Задача двухкритериальной оптимизации имеет вид:

$$f_1 = -x_1 + 2x_2 \to \max$$

$$f_2 = 2x_1 + x_2 \to \max$$

$$\left.\begin{array}{r} x_1 + x_2 \le 6 \\ 1 \le x_1 \le 3 \\ 1 \le x_2 \le 4 \end{array}\right\}.$$

Решить задачу методом последовательных уступок, если задана уступка по первому критерию: $\delta = 2$.

Решение

Так как коэффициенты при одних и тех же переменных в частных критериях имеют разные знаки, то в заданной области допустимых решений невозможно одновременно улучшить все частные критерии, т.е. в данном случае область компромиссов (область Парето) совпадает с областью допустимых решений.

Максимизируем функцию f_1 в области допустимых решений, т.е. решим однокритериальную задачу графическим методом (рисунок 7.1).

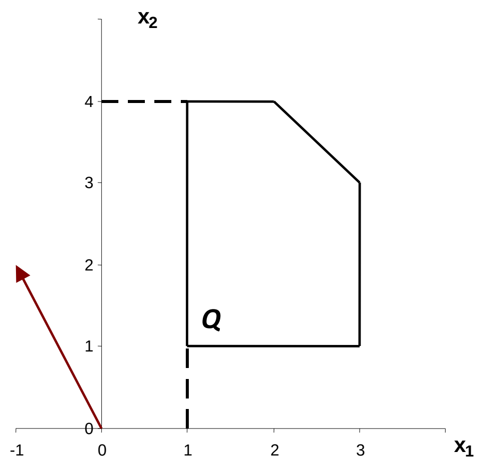


Рисунок 7.1 – К задаче многокритериальной оптимизации

Максимум функции f_1 при условиях задачи достигается в точке с координатами (1;4), так что в данном случае

$$x_1^* = 1,\, x_{12}^* = 4,\ \max f_1 = f_1^* = 7\,.$$

Переходим к максимизации функции f_2 при условиях задачи и дополнительном ограничении, позволяющем учесть, что по критерию f_1 нельзя уступать более чем на $\delta=2$. Так как f_1 - 2=5, то дополнительное ограничение будет иметь вид:

$$-x_1 + 2x_2 \ge 5\,.$$

Новую задачу также решаем графически (рисунок 7.2).

Получаем, что максимум функции f_2 при условиях достигается в точке A части Q_1 ,области Q, так что

$$x_1^{**} = 2,32;\ x_2^{**} = 3,70;\ \max \mathrm{f}_2 = f_2^* = 8,34\,.$$

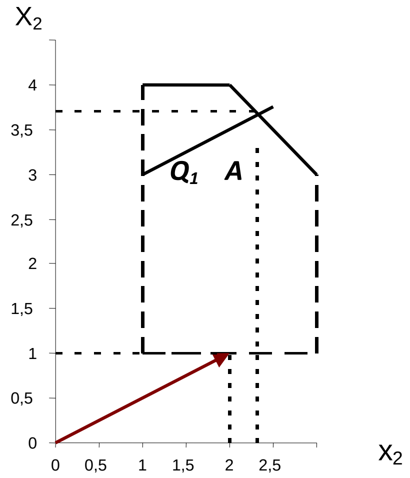


Рисунок 7.2 – Решение задачи многокритериальной оптимизации

Таким образом, оптимальное решение двухкритериальной задачи достигается при $x_1^{**} = 2{,}32,\, x_2^{**} = 3{,}70$. При этом значения частных критериев составляют:

$$f_1 = 5,\, \mathrm{f}_2 = 8{,}34\,.$$

8 ЗАДАЧИ ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Задачу о зависимости затрат на содержание и ремонт оборудования при различном времени можно рассматривать, как задачу динамического программирования, в которой в качестве системы S выступает оборудование. Состояния этой системы определяются фактическим временем использования оборудования (его возрастом) τ, т.е. описываются единственным параметром τ.

В качестве управлений выступают решения о замене и сохранении оборудования, принимаемые в начале каждого года. Обозначим через u_1 решение о сохранении оборудования, а через u_2 - решение о замене оборудования. Тогда задача состоит в нахождении такой стратегии управления, определяемой решениями, принимаемыми к началу каждого года, при которой общая прибыль предприятия за пятилетку является максимальной.

Таким образом, сформулирована исходная задача в терминах ***задачи динамического программирования***. Эта задача обладает свойствами аддитивности и отсутствия последействия. Следовательно, ее решение можно найти с помощью алгоритма решения задачи динамического программирования, реализуемого в два этапа. На первом этапе при движении от начала 5-го года к началу 1-го года для каждого допустимого состояния оборудования найдем условное оптимальное управление (решение), а на втором этапе при движении от начала 1-го года к началу 5-го года из условных оптимальных решений для каждого года составим оптимальный план замены оборудования.

В основе метода динамического программирования положен принцип оптимальности Беллмана, заключающийся в следующем: независимо от того, каким образом система оказалась в конкретном состоянии, последующие шаги должны составлять оптимальную стратегию, которая привязана к исходному состоянию.

Пример 8.1. В определенный момент времени на предприятии установлено новое оборудование. Зависимость производительности этого оборудования от времени его использования предприятием, а также зависимость затрат на содержание и ремонт оборудования при различном времени его использования приведены в таблице 8.1.

Зная, что затраты, связанные с приобретением и установкой нового оборудования, идентичного с установленным, составляют 40 тыс. руб., а заменяемое оборудование списывается, составить такой план замены оборудования в течение 5 лет, при котором общая прибыль за данный период времени максимальна.

Таблица 8.1– Зависимость затрат на содержание и ремонт оборудования при различном времени его использования

	Время, в течение которого используется оборудование (лет)					
	0	1	2	3	4	5
Годовой выпуск продукции $R(\tau)$ в стоимостном выражении, тыс.руб.	80	75	65	60	60	55
Ежегодные затраты $Z(\tau)$, связанные с содержанием и ремонтом оборудования, тыс.руб.	20	25	30	35	45	55

Решение

Так как предположили, что к началу *k-го* года $\left(k=\overline{1,5}\right)$ может приниматься только одно из двух решений - заменять или не заменять оборудование, то прибыль предприятия за k - й год составит

$$F_k\left(\tau^{(k)},u_k\right)=\begin{cases}R\left(\tau^{(k)}\right)-Z\left(\tau^{(k)}\right) & \text{при } u_1,\\ R\left(\tau^{(k)}=0\right)-Z\left(\tau^{(k)}=0\right)-C_n & \text{при } u_1,\end{cases} \quad (8.1)$$

где $\tau^{(k)}$ - возраст оборудования к началу *k-го* года $\left(k=\overline{1,5}\right)$; u_k- управление, реализуемое к началу *k-го* года; C_n - стоимость нового оборудования.

Таким образом, в данном случае уравнение Беллмана имеет вид

$$F_k\left(\tau^{(k)},u_k\right)=\max_{\tau}\begin{cases}R\left(\tau^{(k)}\right)-Z\left(\tau^{(k)}\right)+F_{k+1}\left(\tau^{(k+1)}\right),\\ R\left(\tau^{(k)}=0\right)-Z\left(\tau^{(k)}=0\right)-C_n+F_{n+1}\left(\tau^{(k)}=1\right).\end{cases} \quad (8.2)$$

Используя теперь уравнение (8.1), приступаем к нахождению решения исходной задачи. Это решение начинаем с определения условно оптимального управления (решения) для последнего (5-го) года, поэтому находим множество допустимых состояний оборудования к началу данного года. Так как в начальный момент имеется новое оборудование $\left(\tau^{(1)}=0\right)$, то возраст оборудования к началу 5-го года может составлять 1, 2, 3 и 4 года. Поэтому допустимые состояния системы на данный период времени таковы: $\tau_1^{(5)}=1;\tau_2^{(5)}=2;\tau_3^{(5)}=3;\tau_4^{(5)}=4$. Для каждого из этих состояний найдем условно оптимальное решение и соответствующее значение функции $F_5\left(\tau^{(5)}\right)$. Используя уравнение (8.2) и соотношение $F_6\left(\tau^{(k+1)}=0\right)$ (так как рассматривается последний год расчетного периода), получаем

$$F_5\left(\tau^{(5)}\right)=\max\begin{cases}R\left(\tau^{(5)}\right)-Z\left(\tau^{(5)}\right)\\ R\left(\tau^{(5)}=0\right)-Z\left(\tau^{(5)}=0\right)-C_n\end{cases}. \quad (8.3)$$

Подставляя теперь в формулу (6.1) вместо $\tau^{(5)}$ его значение, равное 1, и учитывая данные таблица 6.1 , находим

$$F_5\left(\tau^{(5)}\right)=\max\begin{Bmatrix}R\left(\tau^{(5)}=1\right)-Z\left(\tau^{(5)}=1\right)\\ R\left(\tau^{(5)}=0\right)-Z\left(\tau^{(5)}=0\right)-C_n\end{Bmatrix}=\max\begin{Bmatrix}75-25\\ 80-20-40\end{Bmatrix}=50,u^0=u_1.$$

Следовательно, условно оптимальное решение в данном случае есть u_1.

Проведем аналогичные вычисления для других допустимых состояний оборудования к началу 5-го года:

$$F_5\left(\tau_2^{(5)}\right)=\max\begin{Bmatrix}65-30\\ 80-20-40\end{Bmatrix}=35,u^0=u_1;$$

$$F_5\left(\tau_3^{(5)}\right) = \max\begin{Bmatrix} 65-35 \\ 80-20-40 \end{Bmatrix} = 25, u^0 = u_1;$$

$$F_5\left(\tau_4^{(5)}\right) = \max\begin{Bmatrix} 65-45 \\ 80-20-40 \end{Bmatrix} = 20, u^0 = u_2.$$

Полученные результаты вычислений приведены в таблице 8.2.

Таблица 8.2 - Результаты вычислений

Возраст оборудования $\tau^{(5)}$ (лет)	Значения функции $F_5\left(\tau^{(5)}\right)$, тыс. руб.	Условно оптимальное решение *u*
1	50	u_1
2	35	u_1
3	25	u_1
4	20	u_2

Рассмотрим теперь возможные состояния оборудования к началу 4-го года. Очевидно, допустимыми состояниями являются $\tau_1^{(4)} = 1; \tau_2^{(4)} = 2; \tau_3^{(4)} = 3.$ Для каждого из них определяем условно оптимальное решение и соответствующее значение функции $F_4\left(\tau^{(4)}\right)$. Для этого используем уравнение (8.2) и данные таблица 8.2. Так, в частности, для $\tau_1^{(4)} = 1$ получим

$$F_4\left(\tau_1^{(4)}\right) = \max\begin{Bmatrix} R\left(\tau^{(4)} = 1\right) - Z\left(\tau^{(4)} = 1\right) + \mathrm{F}_5\left(\tau^{(5)} = 2\right) \\ R\left(\tau^{(4)} = 0\right) - Z\left(\tau^{(4)} = 0\right) - C_n + \mathrm{F}_5\left(\tau^{(5)} = 1\right) \end{Bmatrix} = \max\begin{Bmatrix} 75-25+35 \\ 80-20-40+50 \end{Bmatrix} = 85, u^0 = u_1.$$

Аналогично находим

$$F_4\left(\tau_2^{(4)}\right) = \max\begin{Bmatrix} 65-30+25 \\ 80-20-40+50 \end{Bmatrix} = 70, u^0 = u_2.$$

$$F_4\left(\tau_3^{(4)}\right) = \max\begin{Bmatrix} 60-35+20 \\ 80-20-40+50 \end{Bmatrix} = 70, u^0 = u_2.$$

Полученные результаты вычислений записываем в таблица 8.3.

Таблица 8.3 - Результаты вычислений

Возраст оборудования $\tau^{(4)}$ (лет)	Значения функции $F_4\left(\tau^{(4)}\right)$, тыс.руб.	Условно оптимальное решение u^0
1	85	u_1
2	70	u_2
3	70	u_2

Определим теперь условно оптимальное решение для каждого из допустимых состояний оборудования к началу 3-го года. Очевидно, такими состояниями являются $\tau_1^{(3)}=1; \tau_2^{(3)}=2.$. В соответствии с уравнением (8.2) находим

$$F_3\left(\tau_1^{(3)}\right)=\max\left\{\begin{array}{l} R\left(\tau^{(3)}=1\right)-Z\left(\tau^{(3)}=1\right)+\mathrm{F}_4\left(\tau^{(4)}=2\right) \\ R\left(\tau^{(3)}=0\right)-Z\left(\tau^{(3)}=0\right)-C_n+\mathrm{F}_4\left(\tau^{(4)}=1\right) \end{array}\right\};$$

$$F_3\left(\tau_2^{(3)}\right)=\max\left\{\begin{array}{l} R\left(\tau^{(3)}=2\right)-Z\left(\tau^{(3)}=2\right)+\mathrm{F}_4\left(\tau^{(4)}=3\right) \\ R\left(\tau^{(3)}=0\right)-Z\left(\tau^{(3)}=0\right)-C_n+\mathrm{F}_4\left(\tau^{(4)}=1\right) \end{array}\right\}.$$

Используя данные первой и третьей таблиц примера, получаем

$$F_3\left(\tau_1^{(3)}\right)=\max\left\{\begin{array}{l} 75-25+70 \\ 80-20-40+85 \end{array}\right\}=120, u^0=u_1;$$

$$F_3\left(\tau_2^{(3)}\right)=\max\left\{\begin{array}{l} 65-30+70 \\ 80-20-40+85 \end{array}\right\}=105, u^0=u_2.$$

Из последнего выражения видно, что если к началу 3-го года возраст оборудования составляет 2 года, то независимо от того, будет ли принято решение u_1 или u_2, величина прибыли окажется одной и той же. Это означает, что в качестве условно оптимального решения можно взять любое, например, u_2. Полученные значения для $F_3\left(\tau^{(3)}\right)$ и соответствующие условно оптимальные решения записываем в таблицу 8.4.

Таблица 8.4- Результаты вычислений

Возраст оборудования $\tau^{(3)}$ (лет)	Значения функции $F_3\left(\tau^{(3)}\right)$, тыс. руб.	Условно оптимальное решение u^0
1	120	u_1
2	105	u_2

Наконец, рассмотрим допустимые состояния оборудования к началу 2-го года. Очевидно, на данный момент времени возраст оборудования может быть равен только лишь одному году. Поэтому предстоит сравнить лишь два возможных решения: сохранить оборудование или произвести замену. Анализ такого сравнения характеризуется данными таблицы 8.5.

Согласно условию в начальный момент установлено новое оборудование $\left(\tau_1^{(1)}=0\right)$. Поэтому проблемы выбора между сохранением и заменой оборудования не существует: оборудование следует сохранить.

Следовательно, условно оптимальным решением является u_1, а значение функции $F_1\left(\tau_1^{(1)}\right)=215$.

Таблица 8.5 - Результаты вычислений

Возраст оборудования $\tau^{(2)}$ (лет)	Значения функции $F_2\left(\tau^{(2)}\right)$, тыс.руб.	Условно оптимальное решение u^0
1	155	u_1

Таким образом, максимальная прибыль предприятия может быть равной 215 тыс. руб. Она соответствует оптимальному плану замены оборудования, который получается на основе данных таблиц в результате реализации второго этапа вычислительного процесса, состоящего в прохождении всех рассмотренных шагов с начала 1-го до начала 5-го года.

Для 1-го года решение единственно - следует сохранить оборудование. Отсюда, возраст оборудования к началу 2-го года равен одному году. Тогда в соответствии с данными последней таблицы, оптимальным решением для 2-го года является решение о сохранении оборудования. Реализация такого решения приводит к тому, что возраст оборудования к началу 3-го года становится равным двум годам. При таком возрасте оборудование в 3-м году следует заменить. После замены оборудования его возраст к началу 4-го года составит один год. Как видно из третьей таблицы, при таком возрасте оборудования его менять не следует. Поэтому возраст оборудования к началу 5-го года составит два года, т.е. менять оборудование нецелесообразно.

9 ЭКСПЕРТНОЕ ОЦЕНИВАНИЕ

9.1 Экспертные оценки

Суть всех экспертных методов — сбор, обработка сведений от достаточно представительного числа экспертов. Эксперты (от лат. *expertus* — опытный) — это компетентные лица, обладающие знаниями и способные высказать аргументированное мнение по изучаемому явлению. Экспертиза — процедура получения оценок от экспертов. Объективная оценка изучаемого явления получается в результате обобщения субъективных мнений многих экспертов. Подготовка и проведение экспертизы осуществляется по программе, включающей такие основные этапы: определение цели и задач экспертизы; формирование экспертной группы; составление опросных листов; определение способа и процедуры опроса экспертов; проведение опроса; обработка и анализ информации, полученной от экспертов.

Опыт проведения экспертных оценок с целью прогнозирования объемов спроса, потребления и товарооборота показывает, что их действенность значительно повышается, если использовать панель экспертов, т. е. отбирать экспертов из списка специально подобранных компетентных лиц, которые систематически привлекаются к участию в повторяющихся экспертных оценках подобного рода.

Опыт осуществления прогнозов рынка показывает, что наиболее эффективны два метода опроса экспертов и последующего обобщения их мнений:

а) *индивидуальный метод*, когда согласование оценок проводится в режиме, при котором каждый эксперт дает оценку независимо от других, а затем с помощью какого-либо приема эти оценки обобщаются в одну. Например, простейший способ получения подобной обобщенной оценки состоит в вычислении средней арифметической.

Индивидуальный метод прост с организационной точки зрения и экономичен, но его применение ограничено из-за недостаточной достоверности получаемых оценок, ибо на практике экспертам предлагается выбрать либо один из нескольких вариантов прогноза, либо дать собственную количественную оценку;

б) *метод Дельфи*. Этот метод обладает следующими основными особенностями: на первом этапе каждый эксперт работает изолированно от других; опрос экспертов проводится в несколько туров; после каждого тура экспертов знакомят с оценками других экспертов и их средним значением при сохранении анонимности экспертов и подробной аргументации минимального и максимального значений оценок.

Решение о необходимости проведения последующих туров экспертизы и достоверности групповой оценки принимается, как правило, исходя из показателя согласованности мнений экспертов. В качестве такого показателя используется коэффициент вариации c_v, рассчитываемый по формуле:

$$c_v = (\sigma_y / \cdot \bar{y}), \tag{9.1}$$

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{\Sigma\left(y_i - \bar{y}\right)^2}{n}}, \tag{9.2}$$

где σ_y — среднее квадратическое отклонение оценок; $\bar{y}$ - среднее значение оценки; y_i - индивидуальная оценка каждого эксперта; n - число экспертов.

Если c_v>0.4, то это свидетельствует о больших колебаниях и ненадежности средней величины $\bar{y}$. При определении согласованности мнений экспертов c_v снижают и, как правило, считают приемлемым значение коэффициента вариации, не превышающее 0.33.

Методы средних баллов. Целочисленное программирование успешно применяется и для усреднения ответов экспертов. В теории принятия решений большое место занимают экспертные опросы. Сначала рассмотрим балльные оценки. Часто опрашиваемых просят выставить баллы объектам, изделиям, технологическим процессам, предприятиям, проектам, заявкам на выполнение научно-исследовательских работ, идеям, проблемам, программам, политикам и т.п., а затем рассчитывают средние баллы и рассматривают их как интегральные оценки, выставленные коллективом опрошенных. Какими формулами пользоваться для вычисления средних величин? Ведь видов средних величин очень много. По традиции обычно применяют среднее арифметическое. Такой способ не всегда является правильным, поскольку баллы обычно измерены в порядковой шкале. Обоснованным является использование медиан в качестве средних баллов. Однако полностью игнорировать средние арифметические нерационально из-за их привычности и распространенности. Поэтому целесообразно использовать одновременно оба метода - и метод средних арифметических рангов (баллов), и методов медианных рангов. Такая рекомендация находится в согласии с концепцией устойчивости, рекомендующей использовать различные методы для обработки одних и тех же данных с целью выделить выводы, получаемые одновременно при всех методах..

Пример сравнения восьми проектов. Рассмотрим конкретный пример применения только что сформулированного подхода. По заданию руководства фирмы анализировались восемь проектов, предлагаемых для включения в план стратегического развития фирмы. Они были обозначены следующим образом: Д, Л, М-К, Б, Г-Б, Сол, Стеф, К (по фамилиям менеджеров, предложивших их для рассмотрения). Все проекты были направлены 12 экспертам, назначенным Правлением фирмы. В приведенной ниже табл. 7.1 приведены ранги восьми проектов, присвоенные им каждым из 12 экспертов в соответствии с их представлением о целесообразности включения проекта в стратегический план фирмы (ранг 1 - самый лучший проект, который обязательно надо реализовать, ранг 2 - второй по привлекательности проект, ... , ранг 8 - наиболее сомнительный проект).

Анализируя результаты работы экспертов (табл. 7.2), члены Правления фирмы были вынуждены констатировать, что полного согласия между экспертами нет, а потому данные табл.9.1 следует подвергнуть более тщательному математическому анализу.

Таблица 9.1 - Ранги 8 проектов по степени привлекательности
для включения в план стратегического развития фирмы

№ эксперта	Д	Л	М-К	Б	Г-Б	Сол	Стеф	К
1	5	3	1	2	8	4	6	7
2	5	4	3	1	8	2	6	7
3	1	7	5	4	8	2	3	6
4	6	4	2,5	2,5	8	1	7	5
5	8	2	4	6	3	5	1	7
6	5	6	4	3	2	1	7	8
7	6	1	2	3	5	4	8	7
8	5	1	3	2	7	4	6	8
9	6	1	3	2	5	4	7	8
10	5	3	2	1	8	4	6	7
11	7	1	3	2	6	4	5	8
12	1	6	5	3	8	4	2	7

Примечание. Эксперт № 4 считает, что проекты М-К и Б равноценны, но уступают лишь одному проекту - проекту Сол. Поэтому проекты М-К и Б должны были бы стоять на втором и третьем местах и получить баллы 2 и 3. Поскольку они равноценны, то получают средний балл (2+3)/ 2 = 5/ 2 = 2,5.

Метод средних арифметических рангов. Сначала был применен метод средних арифметических рангов. Для этого, прежде всего, была подсчитана сумма рангов, присвоенных проектам (таблица 7.1). Затем эта сумма была разделена на число экспертов, в результате рассчитан средний арифметический ранг (именно эта операция дала название методу). По средним рангам строится итоговая ранжировка или упорядочение, исходя из принципа - чем меньше средний ранг, чем лучше проект. Наименьший средний ранг, равный 2,625, у проекта Б, - следовательно, в итоговой ранжировке он получает ранг 1. Следующая по величине сумма, равная 3,125, у проекта М-К, - и он получает итоговый ранг 2. Проекты Л и Сол имеют одинаковые суммы (равные 3,25), значит, с точки зрения экспертов они равноценны (при рассматриваемом способе сведения вместе мнений экспертов), а потому они должны бы стоять на 3 и 4 местах и получают средний балл (3+4)/2 = 3,5. Результаты расчетов приведены в табл.7.2.

Таблица 9.2 - Результаты расчетов по методу средних арифметических
и методу медиан для данных согласно табл. 7.1

	Д	Л	М-К	Б	Г-Б	Сол	Стеф	К
Сумма рангов	60	39	37,5	31.5	76	39	64	85
Среднее арифметическое рангов	5	3,25	3,125	2,625	6,333	3,25	5,333	7,083

Итоговый ранг по среднему арифметическому	5	3,5	2	1	7	3,5	6	8
Медианы рангов	5	3	3	2,25	7,5	4	6	7
Итоговый ранг по медианам	5	2,5	2,5	1	8	4	6	7

Итак, ранжировка по суммам рангов (или, что то же, по средним арифметическим рангам) имеет вид:

Б < М-К < {Л, Сол} < Д < Стеф < Г-Б < К . (9.3)

Здесь запись типа "А<Б" означает, что проект А предшествует проекту Б (т.е. проект А лучше проекта Б). Поскольку модели Л и Сол получили одинаковую сумму баллов, то по рассматриваемому методу они эквивалентны, а потому объединены в группу (в фигурных скобках). В терминологии математической статистики ранжировка (9.3) имеет одну связь.

Метод медиан рангов. Согласно предшествующему методу и результату (9.3) предстоит принимать решение. Однако ответы экспертов измерены в порядковой шкале, а потому для них не всегда неправомерно проводить усреднение методом средних арифметических. Надо использовать метод медиан.

Для этого надо взять ответы экспертов, соответствующие одному из проектов, например, проекту Д. Это ранги 5, 5, 1, 6, 8, 5, 6, 5, 6, 5, 7, 1. Затем их надо расположить в порядке неубывания. Получим последовательность: 1, 1, 5, 5, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 7, 8. На центральных местах - шестом и седьмом - стоят 5 и 5. Следовательно, медиана равна 5.

Медианы совокупностей из 12 рангов, соответствующих определенным проектам, приведены в предпоследней строке таблицы. (При этом медианы вычислены по обычным правилам статистики - как среднее арифметическое центральных членов вариационного ряда.) Итоговое упорядочение по методу медиан приведено в последней строке таблицы. Ранжировка (т.е. упорядочение - итоговое мнение комиссии экспертов) по медианам имеет вид:

Б < {М-К, Л} < Сол < Д < Стеф < К <Г-Б . (9.4)

Поскольку проекты Л и М-К имеют одинаковые медианы баллов, то по рассматриваемому методу ранжирования они эквивалентны, а потому объединены в группу (кластер), т.е. с точки зрения математической статистики ранжировка (9.4) имеет одну связь.

Сравнение ранжировок по методу средних арифметических и методу медиан. Сравнение ранжировок (9.3) и (9.4) показывает их близость (похожесть). Можно принять, что проекты М-К, Л, Сол упорядочены как М-К < Л < Сол, но из-за погрешностей экспертных оценок в одном методе признаны равноценными проекты Л и Сол (ранжировка (9.3)), а в другом - проекты М-К и Л (ранжировка (9.4)). Существенным является только расхождение, касающееся упорядочения проектов К и Г-Б: в ранжировке (9.3) Г-Б < К, а в ранжировке (9.4), наоборот, К < Г-Б. Однако эти проекты - наименее привлекательные из восьми рассматриваемых, и при выборе наиболее привлекательных проектов для дальнейшего обсуждения и использования на это расхождение можно не обращать внимания.

Рассмотренный пример демонстрирует сходство и различие ранжировок, полученных по методу средних арифметических рангов и по методу медиан, а также пользу от их совместного применения.

Метод согласования кластеризованных ранжировок. Проблема состоит в выделении общего нестрогого порядка из набора кластеризованных ранжировок (на статистическом языке - ранжировок со связями). Этот набор может отражать мнения нескольких экспертов или быть получен при обработке мнений экспертов различными методами. Предлагается метод согласования кластеризованных ранжировок, позволяющий «загнать» противоречия внутрь специальным образом построенных кластеров (групп), в то время как упорядочение кластеров соответствует всем исходным упорядочениям.

В различных прикладных областях возникает необходимость анализа нескольких кластеризованных ранжировок объектов. К таким областям относятся прежде всего менеджмент (особенно производственный менеджмент), экономика, экология, социология, прогнозирование, технические исследования, и т.д., особенно те их разделы, что связаны с экспертными оценками. В качестве объектов могут выступать образцы продукции, технологии, математические модели, проекты, кандидаты на должность и др. Кластеризованные ранжировки могут быть получены как с помощью экспертов, так и объективным путем, например, при сопоставлении математических моделей с экспериментальными данными с помощью того или иного критерия качества.

В настоящем пункте рассматривается метод построения кластеризованной ранжировки, согласованной (в раскрытом ниже смысле) со всеми рассматриваемыми кластеризованными ранжировками. При этом противоречия между отдельными исходными ранжировками оказываются заключенными внутри кластеров согласованной ранжировки. В результате упорядоченность кластеров отражает общее мнение экспертов, точнее, то общее, что содержится в исходных ранжировках.

В кластеры заключены объекты, по поводу которых некоторые из исходных ранжировок противоречат друг другу. Для их упорядочения необходимо провести новые исследования. Эти исследования могут быть как формально-математическими (например, вычисление медианы Кемени (см. ниже), упорядочения по средним рангам или по медианам и т.п.), так и требовать привлечения новой информации из соответствующей прикладной области, возможно, проведения дополнительных научных или прикладных работ.

Введем необходимые понятия, затем сформулируем алгоритм согласования кластеризованных ранжировок в общем виде и рассмотрим его свойства. Пусть имеется конечное число объектов, которые мы для простоты изложения будем изображать натуральными числами 1,2,3,...,k и называть «носителем». Под кластеризованной ранжировкой, определенной на заданном носителе, понимаем следующую математическую конструкцию. Пусть объекты разбиты на группы, которые будем называть кластерами. В кластере может быть и один элемент. Входящие в один кластер объекты будем заключать в фигурные скобки. Например, объекты 1,2,3,...,10 могут быть разбиты на 7 кластеров: {1}, {2,3}, {4}, {5,6,7}, {8}, {9}, {10}. В этом разбиении один кластер {5,6,7} содержит три элемента, другой - {2,3} - два, остальные пять - по одному элементу. Кластеры не имеют общих элементов, а объединение их (как множеств) есть все рассматриваемое множество объектов.

Вторая составляющая кластеризованной ранжировки - это строгий линейный порядок между кластерами. Задано, какой из них первый, какой второй, и т.д. Будем изображать упорядоченность с помощью знака <. При этом кластеры, состоящие из одного элемента, будем для простоты изображать без фигурных скобок. Тогда кластеризованную ранжировку на основе введенных выше кластеров можно изобразить так:

$A = [\ 1 < \{2,3\} < 4 < \{5,6,7\} < 8 < 9 < 10\ ]$.

Конкретные кластеризованные ранжировки будем заключать в квадратные скобки. Если для простоты речи термин "кластер" применять только к кластеру не менее чем из 2-х элементов, то можно сказать, что в кластеризованную ранжировку А входят два кластера {2,3} и {5,6,7} и 5 отдельных элементов.

Введенная описанным образом кластеризованная ранжировка является бинарным отношением на множестве {1,2,3,...,10}. Его структура такова. Задано отношение эквивалентности с 7-ю классами эквивалентности, а именно, {2,3}, {5,6,7}, а остальные состоят из оставшихся 5 отдельных элементов. Затем введен строгий линейный порядок между классами эквивалентности.

Следующее важное понятие - противоречивость. Оно определяется для четверки - две кластеризованные ранжировки на одном и том же носителе и два различных объекта - элементы того же носителя. При этом два элемента из одного кластера будем связывать символом равенства = , как эквивалентные . Пусть А и В - две кластеризованные ранжировки. Пару объектов (a, b) назовем «противоречивой» относительно А и В, если эти два элемента по-разному упорядочены в А и В, т.е. a < b в А и a > b в В (первый вариант противоречивости) либо a > b в А и a < b в В (второй вариант противоречивости). Подчеркнем, что в соответствии с этим определением пара объектов (a, b), эквивалентная хотя бы в одной кластеризованной ранжировке, не может быть противоречивой: равенство a = b не образует "противоречия" ни с a < b, ни с a > b.

В качестве примера рассмотрим две кластеризованные ранжировки

B = [{1,2} < { 3,4, 5} < 6 < 7 < 9 < {8, 10}],

C = [3 < {1, 4} < 2 < 6 < {5, 7, 8} < {9, 10}].

Совокупность противоречивых пар объектов для двух кластеризованных ранжировок А и В назовем «ядром противоречий» и обозначим S(A,B). Для рассмотренных выше в качестве примеров трех кластеризованных ранжировок А, В и С, определенных на одном и том же носителе {1, 2, 3,..., 10}, имеем

S(A,B) = [(8, 9)], S(A,C) = [(1, 3), (2,4)] ,

S(B,C) = [(1, 3), (2, 3), (2, 4), (5, 6), (8,9)] .

Как при ручном, так и при программном нахождении ядра можно в поисках противоречивых пар просматривать пары (1,2), (1,3), (1.,4), ..., (1, k), затем (2,3), (2,4), ..., (2, k), потом (3,4), ..., (3, k), и т.д., вплоть до (k-1, k).

Пользуясь понятиями дискретной математики, «ядро противоречий» можно изобразить графом с вершинами в точках носителя. При этом противоречивые пары задают ребра этого графа. Граф для S(A,B) имеет только одно ребро (одна связная компонента более чем из одной точки), для S(A,C) - 2 ребра (две связные компоненты более чем из одной точки), для S(B,C) - 5 ребер (три связные компоненты более чем из одной точки, а именно, {1, 2 , 3, 4}, {5, 6} и {8, 9}).

Предлагаемый алгоритм согласования некоторого числа кластеризованных ранжировок состоят из трех этапов. На первом выделяются противоречивые пары объектов во всех парах кластеризованных ранжировок. На втором формируются кластеры итоговой кластеризованной ранжировки (т.е. классы эквивалентности - связные компоненты графов, соответствующих объединению попарных ядер противоречий). На третьем этапе эти кластеры (классы эквивалентности) упорядочиваются. Для установления порядка между кластерами произвольно выбирается один объект из первого кластера и второй - из второго, порядок между кластерами устанавливается такой же, какой имеет быть между выбранными объектами в любой из рассматриваемых кластеризованных ранжировок. Корректность подобного упорядочивания, т.е. его независимость от выбора той или иной пары объектов, вытекает из соответствующих теорем, доказанных в статье [9]. Два объекта из разных кластеров согласующей кластеризованной ранжировки могут оказаться эквивалентными в одной из исходных кластеризованных ранжировок (т.е. находиться в одном кластере). В таком случае надо рассмотреть упорядоченность этих объектов в какой-либо другой из исходных кластеризованных ранжировок. Если же во всех исходных кластеризованных ранжировках два рассматриваемых объекта находились в одном кластере, то естественно считать (и это является уточнением к этапу 3 алгоритма), что они находятся в одном кластере и в согласующей кластеризованной ранжировке.

Результат согласования кластеризованных ранжировок A, B, C,... обозначим f(A, B, C,...). Тогда

$f(A, B) = [1<2<3<4<5<6<7<\{8, 9\}<10]$,

$f(A, C) = [\{1,3\}<\{2, 4\}<5<6<7<8<9<10]$,

$f(B, C) = [\{1,2,3,4\}<\{5,6\}<7<\{8,9\}<10]$,

$f(A, B, C) = f(B, C) = [\{1,2,3,4\} <\{5,6\}<7<\{8, 9\}<10]$.

В случае f(A, B) дополнительного изучения с целью упорядочения требуют только объекты 8 и 9. В случае f(B, C) объекты 1,2,3,4 объединились в один кластер, т.е. кластеризованные ранжировки оказались настолько противоречивыми, что процедура согласования не позволила провести достаточно полную декомпозицию задачи нахождения итогового мнения экспертов.

Рассмотрим некоторые свойства алгоритмов согласования.

1. Пусть D = f(A, B, C,...). Если $a<b$ в согласующей кластеризованной ранжировке D, то $a<b$ или $a=b$ в каждой из исходных ранжировок A, B, C, ...

2. Построение согласующих кластеризованных ранжировок может осуществляться поэтапно. В частности, f(A, B, C) = f(f(A, B), f(A, C), f(B, C)) . Ясно, что ядро противоречий для набора кластеризованных ранжировок является объединением таких ядер для всех пар рассматриваемых ранжировок.

3. Построение согласующих кластеризованных ранжировок нацелено на выделение общего упорядочения в исходных кластеризованных

ранжировках. Однако при этом некоторые общие свойства исходных кластеризованных ранжировок могут теряться. Так, при согласовании ранжировок B и C, рассмотренных выше, противоречия в упорядочении элементов 1 и 2 не было - в ранжировке B эти объекты входили в один кластер, т.е. 1 = 2, в то время как 1<2 в кластеризованной ранжировке C. Значит, при их отдельном рассмотрении можно принять упорядочение 1 < 2. Однако в f(B,C) они попали в один кластер, т.е. возможность их упорядочения исчезла. Это связано с поведением объекта 3, который "перескочил" в C на первое место и "увлек с собой в противоречие" пару (1, 2), образовав противоречивые пары и с 1, и с 2. Другими словами, связная компонента графа, соответствующего ядру противоречий, сама по себе не всегда является полным графом. Недостающие ребра при этом соответствуют парам типа (1, 2), которые сами по себе не являются противоречивыми, но "увлекаются в противоречие" другими парами.

9.2 Задача линейного программирования с экспертными оценками

С помощью приведенных выше методов в задачах моделирования сельскохозяйственного производства можно оценивать такие показатели как урожайность, материальные, трудовые затраты, себестоимость и другие.

В зависимости от целей и ожидаемых результатов можно использовать как одно количественное значение оцениваемого параметра (детерминированные модели), так и некий интервал его возможных значений (модели с интервальными параметрами). Вероятность того, что полученная экспертная оценка прогнозируемого параметра совпадет с фактическим значением практически равна нулю, поэтому целесообразным является использование в задачах моделирования производства интервальных значений этого параметра, что позволит получить диапазон наиболее вероятных исходов. При этом в последнем случае для получения множества оптимальных решений эффективным является метод статистических испытаний.

При использовании экспертных оценок возможны два подхода. При первом подходе экспертами оцениваются значение параметра или (и) его интервал. Второй подход подразумевает введение некоторого коэффициента, который характеризует степень влияния фактора(-ов) на исходный параметр. Этот коэффициент (или его интервал) и оценивается экспертами.

В работе [4] предложены модели оптимизации структуры посевных площадей, в которых введены коэффициенты влияния своевременности посева на затраты и урожайность, оцениваемые экспертами.

Сроки посева (своевременность посева) влияют на следующие параметры: объемы внесения удобрений и ядохимикатов, урожайность сельскохозяйственных культур, всхожесть, влажность, качество семян и другие.

Агрономы (эксперты) рассматривают три варианта получения продукции в зависимости от правильного определения даты посева: ранний посев, посев в оптимальные сроки и поздний посев.

При этом ранний посев по сравнению с посевом в оптимальные сроки способствует увеличению затрат на удобрение на 200% и более, ядохимикатов – не менее 300%; уменьшение урожайности на величину, превышающую 10%. Это связано с ростом болезней растений и увеличением числа вредителей. Кроме того, при позднем посеве увеличиваются затраты на сушку зерна ввиду увеличения его влажности.

Исходя из этой ситуации, в разработанных оптимизационных моделях учитывались перечисленные выше варианты посева. При этом использованы экспертные оценки зависимых параметров, которые приведены в таблице 9.3. В качестве экспертов выступали агрономы.

Таблица 9.3 – Экспертные оценки влияния своевременности посева на различные параметры модели оптимизации структуры посевных площадей для юга Восточной Сибири

Параметры	Коэффициенты влияния своевременности посева		
	Ранний посев	Посев в оптимальные сроки	Поздний посев
Затраты на гербициды	1	0	0,5
Затраты на удобрение	1	0,3	0,1
Затраты на ядохимикаты	1	0,2	0,5
Затраты на сушку зерна	0,2	0,2	1
Урожайность	0,9	1	0,95

В работе [4] приведены два варианта задач оптимизации структуры посевов - с детерминированными оценками коэффициентов влияния на параметры, с интервальными оценками этих коэффициентов. При этом интервальные оценки коэффициентов влияния посева получены также экспертами-агрономами (таблица 9.4).

Во втором варианте задачи оптимизации в отличие от первого имеет место определение не одного, а множества оптимальных вариантов решения для каждой их ситуаций посева на основе оценок экспертов. При этом используется метод Монте-Карло, позволяющий генерировать множество значений коэффициентов влияния своевременности посева, и в зависимости от этого получать диапазон оптимальных решений для каждого случая посева. Очевидно, что, в целом, наилучшие варианты решения соответствует оптимальному варианту посева, а худшие поздней или ранней дате посева.

Таблица 9.4 - Верхние и нижние оценки коэффициентов влияния своевременности посева

Ситуации посева		Ранний посев		Оптимальный посев		Поздний посев	
Границы интервалов		Нижн.	Верхн.	Нижн.	Верхн.	Нижн.	Верхн.
Коэффициенты влияния	Затраты на удобрение	0,9	1,1	0,2	0,4	0,1	0,2
	Затраты на ядохимикаты	0,9	1,1	0,1	0,3	0,4	0,6
	Затраты на сушку зерна	0,1	0,3	0,1	0,3	0,9	1
	Урожайность	0,7	0,9	0,9	1,1	0,7	0,9

В качестве урожайности сельскохозяйственных культур в последней постановке задачи рассматриваются их интервальные оценки, в качестве верхних и нижних оценок которых значения взятые из таблицы 9.4. Однако на практике урожайность можно рассматривать как случайную величину, подчиняющуюся определенному закону распределения. Поэтому предложено модернизировать, описанную в модель с интервальными параметрами, рассматривая урожайность как вероятностный параметр.

Предложенная задача оптимизации структуры посевных площадей смешанного типа, включающая как интервальные так и вероятностные параметры выглядит следующим образом.

Постановка задачи. Необходимо найти оптимальную структуру посевных площадей различных культур при различных сроках посева, удовлетворяющих потребностям хозяйства. В качестве критерия оптимальности в этой задаче использован минимум затрат на производство сельскохозяйственной продукции. Решение задачи позволяет определить: площади различных культур (групп культур), обеспечивающие производство заданного объема продукции для трех ситуаций: посев в ранние, средние и поздние сроки.

Общий вид математической модели с интервальными оценками коэффициентов влияния своевременности посева выглядит следующим образом. Минимизируются суммарные затраты на возделывание культур одного предприятия:

$$f(x)=\sum_{i\in M}\sum_{j\in N} w_{ij}x_j+\sum_{i\in M}\sum_{j\in N}\tilde{k}_{ij}v_{ij}x_j \to \min\ , \qquad (9.5)$$

где $\underline{\tilde{k}}_{ij} \le \tilde{k}_{ij} \le \overline{\tilde{k}}_{ij}$ при ограничениях:

1) по использованию земельных угодий

$$\sum_{j\in N} x_j \le B\ ; \qquad (9.6)$$

2) по предельным площадям отдельных групп культур

$$x_j \le \bar{b}_j \quad (j \in N)\ ; \qquad (9.7)$$

3) по потребности в продукции каждой культуры

$$\sum_{j\in N} a_{ij}^p x_j \ge A_i\ (i \in M)\ ; \qquad (9.8)$$

4) по использованию трудовых ресурсов

$$\sum_{j\in N} b_{ij}x_j \le V_i \quad (i \in M)\ ; \qquad (9.9)$$

5) по использованию материальных ресурсов

$$\sum_{j\in N} w_{ij}x_j+\sum_{j\in N} k_{ij}v_{ij}x_j \le W_i \quad (i \in M)\ ; \qquad (9.10)$$

6) неотрицательности переменных

$$x_j \ge 0\ \ (j \in N)\ . \qquad (9.11)$$

При записи экономико-математической модели использованы следующие обозначения: j - индекс сельскохозяйственной культуры; i - индекс групп операций (например, посевные операции, операции по уходу за посевом, уборочные операции); a_{ij}^p – урожайность j-ой культуры при i операциях, соответствующий некоторой вероятности p; $\underline{\tilde{k}}_{ij}$ и $\overline{\tilde{k}}_{ij}$ - нижние и верхние границы интервальных оценок коэффициентов влияния затрат на i-ю группу операций возделывания 1 га j-ой культуры; b_{ij} – объем затрат труда на i-ю группу операций возделывания 1 га j-ой культуры; w_{ij} – постоянные затраты на i-ю группу операций возделывания 1 га j-ой культуры; v_{ij} – переменные затраты на i-ю группу операций возделывания 1 га j-ой культуры; k_{ij} – коэффициент влияния своевременности посева на затраты i-й группы операций возделывания 1 га j-ой культуры; x_j – искомая площадь j-ой культуры; $\bar{b}_j$ - максимальная площадь, отведенная на культуру j; B – общая площадь, отведенная на посевы; A_j – потребность в продукции j-й культуры; V_i – максимальный объем трудовых ресурсов, отведенных на i-ю группу операций возделывания; W_i – максимальной количество материальных ресурсов, необходимых для i-ой группу операций возделывания; N – множество культур; M — множество групп операций.

Предложенная задача оптимизации структуры посевных площадей смешанного типа была решена для предприятия УНПП «Семена». Согласно ограничениям использовались интервальные оценки таких параметров как затраты на внесение удобрений, ядохимикатов и сушку семян. Урожайности культур рассматривались как вероятностные величины, подчиняющиеся нормальному закону распределения. При этом эти параметры моделировались с помощью метода статистических испытаний. В этом случае результатом является множество решений, из которых особый интерес имеет минимальные, средние и максимальные значения целевой функции и соответствующих им переменных.

В таблице 9.5 приведены результаты решения задачи оптимизации структуры посевных площадей для УНПП «Семена» с интервальными и вероятностными оценками параметров, зависящих от своевременности посева.

Таблица 9.5 - Результаты решений задачи оптимизации структуры посевных площадей для УНПП «Семена» с интервальными и вероятностными оценками параметров

Значения	Показа-тели	Культуры								Затраты, всего, руб
		Зерновые культуры	Овощные	Картофель	Кормовые корнеплоды	Однолетние травы на сено	Однолетние травы на зеленый корм, сенаж	Многолетние травы на сено	Многолетние травы на зеленый корм, сенаж	
Максима-льные	Затраты на 1 га, руб.	410,8	612,7	574,93	70,71	49,3	399,4	493,0	92,2	2642108
	Площади, га	5343,3	7,6	14,06	10,00	120,0	650,0	534,3	150,0	
Минима-льные	Затраты на 1 га, руб.	405,5	608,4	574,49	70,35	48,5	397,7	491,4	91,7	2597089
	Площади, га	5159,6	4,1	7,53	10,00	120,0	390,7	286,0	150,0	
Средние	Затраты на 1 га, руб.	407,9	610,4	574,69	70,51	48,9	398,6	492,3	92,0	2615931
	Площади, га	5262,1	5,4	9,91	10,00	120,0	636,1	376,5	150,0	
Расхож-дение (макс. от мин.), %	Затраты на 1 га, руб.	1,3%	0,71 %	0,08%	0,51%	1,7%	0,44%	0,32%	0,58%	4,7%
	Площади, га	3,6%	86,8 %	86,8%	0,0%	0,0%	66,4%	86,8%	0,00%	

Согласно таблице 9.5 расхождение общих затрат на производство при наименьшем и наибольшем значениях целевой функции составляет 4,7%. При этом удельные затраты на 1 га для разных культур колеблются незначительно от 0,08 до 1,7%. Искомые площади для кормовых корнеплодов и многолетних трав на сено не изменяются, однако в значительной степени этот показатель варьируют для остальных культур (от 3,6 до 86,8%).

Помимо приведенных задач оптимизации структуры посевных площадей экспертные оценки применимы и для других задач, в том числе оптимизации сочетания отраслей и оптимизации структуры производства с учетом экстремальных природных явлений.

Темы докладов и рефератов

1. Классификация мнений экспертов и проверка согласованности.
2. Формирование итогового мнения комиссии экспертов.
3. Экспертные технологии оценки эффективности рекламы.
4. Метод фокус-групп.
5. Использование экспертных технологий при разработке управленческих решений.
6. Использование экспертных технологий для управления качеством.
7. Соотношение экспертных и расчетных методов в инвестиционном менеджменте.
8. Возможности использования экспертных оценок в задачах математического программирования.
9. Прикладные аспекты использования экспертных оценок.
10. Достоинства и недостатки экспертных оценок.

Задачи к разделу

1. Построить и решить задачу линейного программирования с экспертной оценкой по предложенному варианту.
2. Построить и решить задачу с интервальными параметрами, учитывая экспертные оценки, по предложенному варианту.
3. Построить и решить задачу с вероятностными параметрами, учитывая экспертные оценки, по предложенному варианту.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 Акулич И.Л. Математическое программирование в примерах и задачах. Учеб. пособие. – 2-е изд., испр. И доп. – М.: Высш. Шк., 1993. – 336 с.

2 Асалханов П.Г. Прогнозирование и планирование агротехнологических операций для природно-климатических зон региона /П.Г. Асалханов, Я.М. Иваньо. – Иркутск: Изд-во ИрГСХА, 2014. – 164 с.

3 Афанасьев, В.Н. Анализ временных рядов и прогнозирование: учеб. / В. Н. Афанасьев, М. М. Юзбашев. – М. : Финансы и статистика, 2001. – С. 11-17.

4 Барсукова М.Н. Оптимизационные модели планирования производства стабильных сельскохозяйственных предприятий /М.Н. Барсукова, Я.М. Иваньо. – Иркутск: Изд-во ИрГСХА, 2011. –. -160 с.

5 Белякова, А.Ю.. Вероятностные модели экстремальных гидрологических явлений в задачах оптимизации сельскохозяйственного производства [Текст] /А.Ю. Белякова, Я.М. Иваньо. – Иркутск: Изд-во ИрГСХА, 2009. – 151 с.

6 Бережная, Е.В. Математические методы моделирования экономических систем: учеб. пособие / Е. В. Бережная, В. И. Бережной. - М.: Финансы и статистика, 2003. - 432 с.

7 Бузина Т.С. Оптимизация взаимодействия участников в региональных агропромышленных кластерах. Монография /Т.С. Бузина, Я.М. Иваньо. – Иркутск: Изд-во: Иркутский ГАУ, 2015. – 145 с. (вклад 0,5).

8 Вашукевич Е.В. Математические модели аграрного производства с вероятностными характеристиками засух и гидрологических событий /Е.В. Вашукевич, Я.М. Иваньо. – Иркутск: Изд-во ИрГСХА, 2012. – 150 с.

9 Гаврилов А.И. Региональная экономика и управление / А.И. Гаврилов. – М.: ЮНИТИ, 2002. – 239 с.

10 Гусев Б.П. Модель оптимизации сельскохозяйственного и промышленного производства в бассейне реки Ангара / Б.П. Гусев // Тезисы докладов международной конференции «Проблемы оптимизации и экономические приложения». – Омск, 1997, с. 54.

11 Гусев Б.П. Об одной эколого-экономико-математической модели функционирования региона со стохастическим характером общих водных ресурсов/ Б.П. Гусев // Математическое моделирование в сельскохозяйственном производстве: Тр. XII Байкальской международной конференции «Методы оптимизации и их приложения». - Иркутск: Изд-во ИрГСХА, 2001. - Т.8. - С.36-41.

12 Дегтярев Ю. Н. Методы оптимизации / Ю. Н. Дегтярев. – М.: Сов. радио, 1980. – 273 с.

13 Ермаков С. П., Захарова О.Д. Демографическое развитие России в первой половине XXI века (методические подходы и предварительные результаты прогноза). ИСПИ РАН. М., 2000. С. 70.

14 Зуховицкий С.И., Авдеева Л.И. Линейное и выпуклое программирование. М.: Наука, 1967.

15 Иваньо Я.М. Оптимизационные модели аграрного производства в решении задач оценки природных и техногенных рисков. Монография /Я.М. Иваньо, С.А. Петрова. – Иркутск: Изд-во Иркутского ГАУ, 2015. – 180 с. (вклад 0,5)

16 Иваньо Я.М. Решение задач управления аграрным производством в условиях неполной информации / Я.М. Иваньо [и др.]; под редакцией Я.М. Иваньо. – Иркутск, 2012. -199 с.

17 Иваньо, Я.М. Моделирование природных событий для управления народно-хозяйственными объектами региона / Я.М. Иваньо, Н.В. Старкова – Иркутск: Изд-во ИрГСХА, 2011. – 160 с.

18 Коваленко Н.Я. Экономика сельского хозяйства. Курс лекций/ Н.Я. Коваленко. –М.: ТАНДЕМ, 1998. – 427 с.

19 Кравченко, Р. Г. Математическое моделирование экономических процессов в сельском хозяйстве / Р. Г. Кравченко. - М. : Колос, 1978. - 465 с.

20	Лотов В. А. Введение в экономико-математическое моделирование / В. А. Лотов. - М. : Наука, 1984. - 392 с.

21	Моделирование и управление процессами регионального развития / под ред. С.Н. Васильева – М:. ФИЗМАЛИТ, 2001. – 432с.

22	Прудников А. Г. О классификации методов прогнозирования урожайности / А. Г. Прудников // Экономика сел. хоз-ва. - 1983. - № 10. - С. 72-75.

23	Статистика с применением Excel : учеб. пособие / под ред. Я. М. Иваньо, А. Ф. Зверева. – Иркутск : ИрГСХА, 2004. – 109 с.

24	Экономико-математические методы и прикладные модели : учеб. пособие для вузов / В. В. Федосеев [и др.] ; под ред. В. В. Федосеева. – М. : ЮНИТИ, 1999. – 391 с.

25	 Tintner G. A stochastic linear programming with application to agricultural economics. // «Proc. Of the 2-th Symposium in L.P.», v.1, National Bureau of Standarts, 1955, p. 197 – 227.

Иваньо Ярослав Михайлович

Математическое моделирование

Учебное пособие

Лицензия на издательскую деятельность
ЛР № 070444 от 11.03.98 г.
Подписано в печать 29.06.2016 г.
Тираж 300 экз.

ISBN 978-5-91777-172-4

Издательство ФГБОУ ВО Иркутский ГАУ
664038 Иркутская обл., Иркутский район,
пос. Молодежный