Министерство сельского хозяйства РФ

ФГОУ ВО «Иркутский государственный аграрный университет

им. А.А. Ежевского»

Кафедра математики

Голышева С.П., Елтошкина Е.В.

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

Учебное пособие

Для студентов очной формы обучения направлений бакалавриата

38.03.05 – Бизнес-информатика

09.03.03 – Прикладная информатика

Иркутск – 2017

УДК 519.854(075.8)

Г 629

Рекомендовано к изданию научно-методическим советом ИрГАУ им. А.А. Ежевского (протокол № 9 от 25 мая 2015 г.)

Составители: Голышева С.П., Елтошкина Е.В.

Дискретная математика. Учебное пособие для студентов очной формы обучения направлений бакалавриата 38.03.05 – Бизнес-информатика, 09.03.03 – Прикладная информатика. – Иркутск: Изд-во ИрГАУ, 2015. – 116 с.

Рецензенты:

зав. кафедрой Математики ИрГАУ им. А.А. Ежевского, д.т.н., профессор Н.И. Овчинникова;

старший научный сотрудник ИСЗФ СО РАН, к.ф.-м.н. В.П. Грозов.

Данное учебное пособие предназначено для студентов экономического факультета очной формы обучения направлений бакалавриата ФГБОУ ВПО «Иркутский государственный аграрный университет им. А.А. Ежевского» 38.03.05 – Бизнес-информатика, 09.03.03 – Прикладная информатика.

В пособии подробно изложены разделы курса «Дискретная математика»: множества, отношения, соответствия, графики, графы. Каждый раздел сопровождается необходимым теоретическим материалом, разобранными примерами и задачами. В него включены задания контрольных работ, рассчитанных на 30 вариантов, контрольные вопросы, 50 тестовых заданий, список рекомендуемой литературы.

Содержание

Раздел 1. МНОЖЕСТВА

1.1 Множества, операции над ними

Определение 1.1. Множеством называется совокупность объектов, объединенных по определенным признакам.

Множества обозначаются прописными буквами латинского алфавита: A, B, C … .

Запись $x \in A$ означает, что элемент x ***принадлежит множеству*** A: $A = \{x\}$, если x не является элементом множества A, то пишут $x \notin A$ или $\overline{x \in A}$.

Определение 1.2. Два множества A и B считаются ***равными*** ($A = B$), если они состоят из одних и тех же элементов, в противном случае, они считаются ***неравными*** ($A \neq B$).

Определение 1.3. Множество называется ***пустым***, если оно не содержит ни одного элемента и обозначается $\varnothing$.

Будем говорить, что множество A ***включено в множество*** B, если каждый элемент множества A является элементом множества B и обозначается $A \subseteq B$. В этом случае A называется подмножеством множества B. Пустое множество является подмножеством любого множества, т.е. $\varnothing \subseteq A$.

Если $A \subseteq B$ и $A \neq B$, то будем писать: $A \subset B$ и говорить, что множество A ***строго включено в множество*** B.

Семейство всех подмножеств данного множества A называется булеаном и обозначается $P(A)$ или 2^A.

Мощностью конечного множества A будем называть число его элементов и обозначать $|A|$.

Определение 1.4. Объединением (суммой) множеств A и B называется множество C, состоящее из элементов либо множества A, либо множества B и обозначается $A \cup B$.

$$A \cup B = A + B = C = \{x \mid x \in A \;\textit{или}\; x \in B\}. \tag{1.1}$$

На рис. 1 изображена диаграмма Эйлера-Венна объединения множеств $A \cup B$.

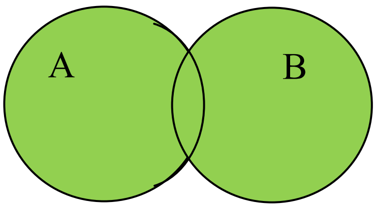


Рис 1. Объединение множеств $A \cup B$

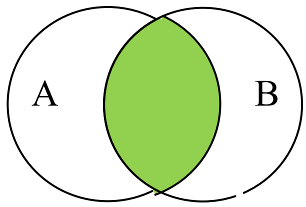


Рис 2. Пересечение множеств $A \cap B$

Определение 1.5. Пересечением (произведением) множеств A и B называется множество C, состоящее из элементов множества A и множества B, и обозначается $A \cap B$.

$$A \cap B = A \cdot B = C = \{x \mid x \in A \;\textit{и}\; x \in B\}. \tag{1.2}$$

Пересечение множеств $A \cap B$ изображено на рис. 2.

Определение 1.6. Разностью множеств A и B называется множество C, состоящее из элементов множества A и не принадлежащих множеству B.[3]

$$A \setminus B = C = \{x \mid x \in A \;\textit{и}\; x \notin B\}. \tag{1.3}$$

На рис. 3 и 4 изображены диаграммы Эйлера-Венна множеств $A \setminus B$ и $B \setminus A$ соответственно.

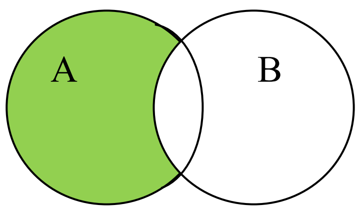


Рис 3. Разность множеств $A \setminus B$

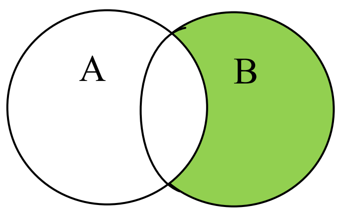


Рис 4. Разность множеств $B \setminus A$

Если все рассматриваемые множества являются подмножествами некоторого универсального множества U , то разность $U \setminus A$ называется ***дополнением*** множества A и обозначается $\overline{A}$, т.е.

$$\overline{A} = U \setminus A. \tag{1.4}$$

Определение 1.7. Симметрической разностью множеств A и B называется множество C:

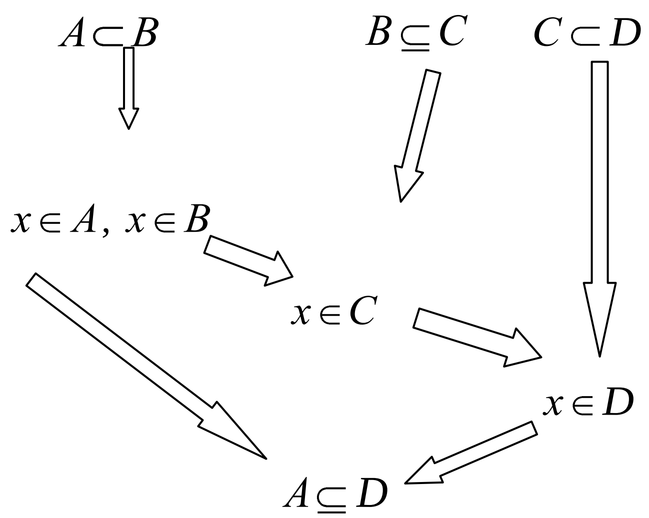
$$C = A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A). \tag{1.5}$$

Будем говорить, что множества A и B находятся ***в общем положении***, если существуют такие элементы a, $в$, c, что $a \in A,\ a \notin B,\ в \in B,\ в \notin A,\ c \in A,\ c \in B$, и обозначается $A \between B$, т.е.

$$A \between B = \{a, в, c \mid a \in A, a \notin B, в \in B, в \notin A, c \in A, c \notin B\}. \tag{1.6}$$

Пример 1.1 Справедливо ли в общем случае утверждение: «Если $A \subset B$, $B \subseteq C$, $C \subset D$, то $A \subseteq D$»?

Решение. Пусть $x \in A$. Тогда



Таким образом, утверждение справедливо.

Пример 1.2. Для универсального множества $U = \{-5, -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4, 5\}$, множества $A = \{-4, -2, 1, 3\}$, и для B, являющегося множеством корней уравнения $x^4 - 7x^3 + 6x^2 + 4x - 4 = 0$:

1. Найти множества: $A \cup B$, $B \cap A$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $A \Delta B$, $\overline{B}$, $C = (A \Delta B) \Delta A$, $P(B)$, $|P(B)|$.

2. Выяснить, какой из пяти случаев выполняется для множеств A и C: $A \subset C$, $C \subset A$, $A = C$, $A \cap C = \varnothing$, $A \subset\!\!\!\!\bigcirc\!\!\!\!\supset C$.

Решение. Сначала найдем множество корней данного уравнения. Делителями свободного члена «-4» являются: ± 1, ± 2, ± 4. Подбором убеждаемся, что $x = 1$ является корнем данного многочлена. Делим «столбиком» многочлен $x^4 - 7x^3 + 6x^2 + 4x - 4$ на $(x-1)$.

$$
\begin{array}{r|l}
-\,\dfrac{x^4 - 7x^3 + 6x^2 + 4x - 4}{x^4 - x^3} & \dfrac{x-1}{x^3 - 6x^2 + 4} \\
-\,\dfrac{-6x^3 + 6x^2}{-6x^3 + 6x^2} & \\
-\,\dfrac{4x - 4}{4x - 4} & \\
0 &
\end{array}
$$

Следовательно, $x^4 - 7x^3 + 6x^2 + 4x - 4 = (x-1)(x^3 - 6x^2 + 4)$.

Аналогично, у многочлена $x^3 - 6x^2 + 4$ делителями свободного члена «4» являются: ± 1, ± 2, ± 4. Ни один из них не является корнем уравнения $x^3 - 6x^2 + 4 = 0$.

Следовательно, $x^4-7x^3+6x^2+32x-32=(x-1)(x^3-6x^2+4)$. Таким образом, множество B найдено $B=\{\ \}$.

Тогда

$$A\cup B=\{-4,-2,1,3\},\qquad A\cap B=\{\ \},\qquad A\setminus B=\{-4,-2,3\},$$

$$B\setminus A=\varnothing,\qquad A\Delta B=\{-4,-2,3\},$$

$$\overline{B}=\{-5,-4,-3,-2,-1,2,3,4,5\},$$

$$C=(A\Delta B)\Delta A=\{-4,-2,3\}\Delta\{-4,-2,1,3\}=\varnothing\cup\{\ \}=\{\ \}.$$

$$P(B)=\{\varnothing,\{1\}\},\quad |P(B)|=2.$$

Так как нет такого набора $(a,в,c)$, то множества A и C не находятся в общем положении.

Таким образом, задача решена.

Пример 1.3. Пусть A, B, C – множества точек плоскости, причем $A=\{(x,y)|x+2<y\}$, $B=\left\{(x,y)\middle|\,x^2+y^2\le 4\right\}$, $C=\{(x,y)|\,|x|\le 2,|y|\le 2\}$. Изобразите в системе координат хОу множество $D=A\setminus(B\Delta C)$.

Решение. Множество A– множество точек плоскости, расположенных выше точек прямой $y=x+2$. Множество B представляет из себя множество точек круга радиуса $r=2$ с центром в начале координат, включающее границу круга. Поскольку неравенство $|x|\le 2$ равносильно двойному неравенству $-2\le x\le 2$, а неравенство $|y|\le 2$ – неравенству $-2\le y\le 2$, то множество C будет представлять собой множество точек, лежащих внутри и на границе квадрата со сторонами 2 единицы (рис. 5).

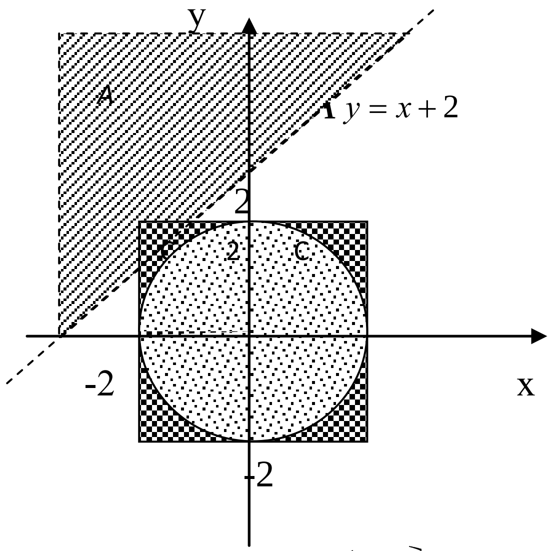


Рис. 5 Множество $(B\Delta C)$

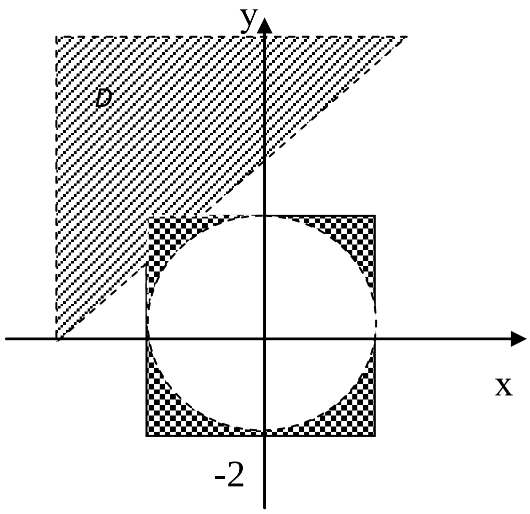


Рис. 6 Множество $D = A \setminus (B\Delta C)$

Преобразуем выражение $D = A \setminus (B\Delta C)$:

$$D = A \setminus (B\Delta C) = A \setminus \big((B \setminus C) \cup (C \setminus B)\big).$$

Построим множество $B \setminus C$, т.е. из круга B удалим точки квадрата C, получим точки, не принадлежащие краям круга, множество $B \setminus C$ будет представлять собой прорезь в виде окружности. Далее найдем множество $C \setminus B$. Оно представляет собой часть квадрата с вырезанным кругом в центре – это уголки квадрата. Объединением этих двух множеств является множество $C \setminus B$. Тогда искомое множество $D = A \setminus (B\Delta C)$ будет представлять собой множество A с вырезанным в нем верхним левым уголком квадрата (рис. 6).

Пример 1.4. Решить систему уравнений $\begin{cases} A\Delta X = B \setminus C \\ B \cap X = A \cup X \\ C \setminus X = A \setminus X \end{cases}$ относительно множества X.

Решение. Построим множества общего положения A, B, C, X, являющиеся подмножествами универсального множества U. Так как $U = \{A, B, C, X\}$, т.е. множество U состоит из 4-х элементов $(n = 4)$, то множество всех подмножеств множества U равно $P(U) = 2^n = 2^4 = 16$. Построим это множество.

№	A	B	C	X
1	0	0	0	0
2	0	0	0	1
3	0	0	1	0
4	0	0	1	1
5	0	1	0	0
6	0	1	0	1
7	0	1	1	0
8	0	1	1	1
9	1	0	0	0
10	1	0	0	1
11	1	0	1	0
12	1	0	1	1
13	1	1	0	0
14	1	1	0	1
15	1	1	1	0
16	1	1	1	1

Из построенной таблицы составим множества: универсальное множество $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16\}$, $A = \{9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16\}$, $B = \{5, 6, 7, 8, 13, 14, 15, 16\}$, $C = \{3, 4, 7, 8, 11, 12, 15, 16\}$,

$X = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16\}$.

Решим первое уравнение системы: 1) $A \Delta X = B \setminus C$.

$$A \Delta X = (A \setminus X) \cup (X \setminus A) = \{9, 11, 13, 15\} \cup \{2, 4, 6, 8\} = \{2, 4, 6, 8, 9, 11, 13, 15\}.$$

$B\setminus C=\{5,6,13,14\}$. Эти множества равны в силу первого уравнения системы, значит, списки элементов 2,4,5,8,9,11,14,15 пусты, т.е. $\{2,4,5,8,9,11,14,15\}=\varnothing$. Тогда $A=\{10,12,13,16\}$, $B=\{6,7,13,16\}$, $C=\{3,7,12,16\}$, $X=\{6,10,12,16\}$, $U=\{1,3,6,7,10,12,13,16\}$.

2. Аналогично решим второе уравнение системы $B\cap X=A\cup X$.

$B\cap X=\{6,16\}$, $A\cup X=\{6,10,12,13,16\}$. Отсюда заключаем, что $\{10,12,13\}=\varnothing$. Тогда $A=\{16\}$, $B=\{6,7,16\}$, $C=\{3,7,16\}$, $X=\{6,16\}$, $U=\{1,3,6,7,16\}$.

3. $C\setminus X=A\setminus X$.

$C\setminus X=\{3,7\}$, $A\setminus X=\varnothing$, тогда $\{3,7\}=\varnothing$. Окончательно определяем, что $A=\{16\}$, $B=\{6,16\}$, $C=\{16\}$, $X=\{6,16\}$, т.е. $X=B$, $U=\{1,6,16\}$.

Ответ: $X=\{6,16\}$.

Определение 1.8. Декартовым произведением множеств $A_1,A_2,A_3,\dots,A_n$ называется множество

$$A_1\times A_2\times A_3\times\ldots\times A_n=\left\{\left(x_1,x_2,x_3,\dots,x_n\right)\middle|\,x_i\in A_i,\ i=\overline{1,n}\right\}. \qquad (1.7)$$

Пример 1.5. Проверить справедливость равенства $\alpha: A\times(C\setminus A)=(C\times B)\Delta(B\times(A\cap C))$, если $A=\{1,2\}$, $B=\{2,3\}$, $C=\{3,2\}$.

Решение. С одной стороны, $A\times(C\setminus A)=\{1,2\}\times\{3\}=\{(1,3),(2,3)\}$.

С другой стороны,

$$(C\times B)\Delta(B\times(A\cap C))=\{(3,2),(3,3),(2,2),(2,3)\}\Delta\{(2,2),(3,2)\}$$

$$=\{(3,2),(3,3),(2,2),(2,3)\}\setminus\{(2,2),(3,2)\}\cup$$

$$\cup \left(\{(2,2),(3,2)\} \setminus \{(3,2),(3,3),(2,2),(2,3)\}\right) =$$

$$= \{(2,3),(3,3)\} \cup \varnothing = \{(2,3),(3,3)\}$$

Таким образом, равенство неверно, так как обе части его не равны.

Определение 1.9. Проекцией вектора $\overline{a} = (a_1, a_2, a_3, ..., a_n)$ на ось i называется координата a_i. [3]

Проекцией множества А векторов на ось будем называть множество проекций векторов из А на эту ось.

Графиком будем называть подмножество декартова произведения двух множеств.

Определение 1.10. Инверсией графика Р называется график

$$P^{-1} = \{(x,y) \mid (y,x) \in P\}. \qquad (1.8)$$

Определение 1.11. Композицией графиков Р и Q называется график

$$P \circ Q = \{(x,y) \mid \exists x\,((x,a) \in P \text{ и } (a,y) \in Q)\}. \qquad (1.9)$$

Пример 1.6. Дан график $P = \{(1,3),(3,2),(4,3),(1,4)\}$. Найдите: P^{-1}, $P \circ P$, $P^{-1} \circ P$, $Пр_2(P^{-1} \circ P) \times Пр_1(P \circ P)$.

Решение. По определению 1.8 имеем

$$P^{-1} = \{(3,1),(2,3),(3,4),(4,1)\}$$

$$P \circ P = \{(1,2),(4,2),(1,3)\}$$

$$P^{-1} \circ P = \{(3,4),(4,3),(4,4),(2,2),(3,3)\}$$

$$Пр_2(P^{-1} \circ P) = \{2,3,4\}$$

$$Пр_1(P\circ P)=\{1,4\}$$

$$Пр_2(P^{-1}\circ P)\times Пр_1(P\circ P)=\{(2,1),(3,1),(4,1),(2,4),(3,4),(4,4)\}.$$

Пример. 1.7. Решить уравнение $X\circ P=T$ относительно X и найти $P\circ X$ если $P=\{(4,3),(2,3),(1,4),(1,1),(4,6)\}$ и $T=\{(6,1),(3,2),(4,3),(2,2),(1,3)\}$, причем $|X|=6$, $Пр_1X=Пр_2X=\{1,2,3,4,5,6\}$.

Решение. Построим таблицу, в которой постепенно будем находить элементы множества X. Для каждой пары $(a,в)\in T$ находим пару $(x,в)\in P$ так, чтобы пара $(a,x)\in X$. Перебрав все случаи, находим только два решения данного уравнения (см. таблицы).

X	P	$X\circ P=T$
$(4,4)$	$(4,3)$	$(4,3)$
$(1,4)$	$(4,3)$	$(1,3)$
$(1,2)$	$(2,3)$	$(1,3)$
$(4,2)$	$(2,3)$	$(4,3)$
	$(1,4)$	-
$(6,1)$	$(1,1)$	$(6,1)$
	$(4,6)$	-
$(2,6)$	$(6,2)$	$(2,2)$
$(2,3)$	$(3,2)$	$(2,2)$

Итак, мы нашли всевозможные случаи множества X. Однако, множество X должно удовлетворять условию $Пр_1X=Пр_2X=\{1,2,3,4,5,6\}$.

Поэтому полученное множество разделяем на несколько множеств. $X_1 = \{(1, 4), (4, 2), (6,1), (2, 6), (3, 5), (5,3)\}$,

$X_2 = \{(1, 2), (2, 3), (4,4), (3, 5), (5, 6), (6,1)\}$.

В X_1 мы добавили недостающие пары $\{(3, 5), (5,3)\}$, а в X_2 – $\{(4,4), (3, 5), (5, 6), (6,1)\}$. Далее найдем композиции

$$P \circ X_1 = \{(4, 5), (2, 5), (1, 2), (1, 4), (4,1)\}.$$

$$P \circ X_2 = \{(4, 3), (2, 3), (1, 4), (1, 1), (4, 6)\}.$$

Таким образом, задача решена.

Контрольные вопросы

1. Что называется: множеством; декартовым произведением 2-х множеств A и B?

2. Что называется проекцией вектора $\overline{a} = (a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$ на ось i?

3. Что называется проекцией множества A векторов на ось?

4. Что называется инверсией графика P?

5. Что называется композицией графиков P и Q?

6. Что называется: объединением; пересечением; разностью; симметрической разностью двух множеств?

7. В каком случае два множества находятся в общем положении?

8. Какие множества называются: равными, пустыми.

Раздел 2. СООТВЕТСТВИЯ МЕЖДУ МНОЖЕСТВАМИ

Определение 2.1. Соответствием между множествами X и $У$ будем называть тройку объектов $Г=(X, У, G)$, где X – ***область отправления*** соответствия, $У$ – ***область прибытия*** соответствия, G – ***график*** соответствия, причем $G \subseteq X \times У$. [3]

Определение 2.2. Соответствие называется ***биекцией***, если оно всюду определено, сюръективно, функционально и инъективно.

Пример 2.1. Дано соответствие $Г=(X, У, G)$. Изобразить соответствие в виде графа и выяснить, какими из 4 основных свойств (всюду определенность, сюръективность, функциональность, инъективность) обладает $Г$. Найти образ множества A и прообраз множества B, если $X=\{a, b, c, d\}$, $У=\{1, 2, 3, 4, 5\}$, $G=\{(a, 5), (b, 3), (d, 5), (d, 4)\}$, $A=\{a, c, d\}$, $B=\{3, 5\}$.

Решение. Построим граф (рис. 7).

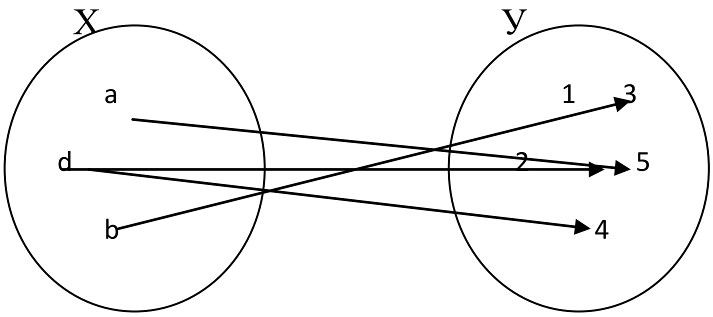


Рис. 7 Граф G

Найдем область определения соответствия $Г$: $Пр_1 G=\{a, b, d\}$. Соответствие $Г$ не всюду определено, так как $Пр_1 G=\{a, b, d\} \neq X$. Областью значений $Г$ является $Пр_2 G=\{3, 4, 5\}$. Поскольку $Пр_2 G=\{3, 4, 5\} \neq У$, соответствие не сюръективно; не функционально, так как его график содержит две пары $(d, 5)$ и $(d, 4)$ с одинаковыми первыми и различными вторыми координатами; не инъективно, так как график G содержит пар с одинаковыми вторыми и различными первыми координатами.

Найдем образ $\Gamma(A)$ и прообраз $\Gamma^{-1}(B)$.

Согласно определению, образом множества A

$$\Gamma(A)=\{y \mid (x,y)\in G \ \text{и} \ x\in A\}: \Gamma(A)=\{4,5\}.$$

Прообразом множества B : $\Gamma^{-1}(B)=\{x \mid (x,y)\in G \ \text{и} \ y\in B\}$, тогда $\Gamma^{-1}(B)=\{a,b,d\}$.

Контрольные вопросы

1. Что называется областью определения соответствия?

2. Что называется областью значений соответствия?

3. Какое соответствие называется:

- всюду определенным; функциональным; инъективным; сюръективным; биекцией?

4. Что называется: образом; прообразом множества; проекцией множества *А* векторов на ось?

Раздел 3. ОТНОШЕНИЯ НА МНОЖЕСТВЕ

Определение 3.1. Бинарным отношением на множестве A называется пара $\Phi=(A,G)$, где A – ***область задания отношения***, G – ***график отношения***, причем $G \subseteq A \times A = A^2$. [3]

Если $(x,y) \in G$, то будем писать $x\varphi y$ и говорить, что x и y ***вступают в отношение*** φ. Если x и y ***не вступают в отношение*** φ, будем писать $\overline{x\varphi y}$.

Определение 3.2. Диагональю множества A^2 называется график $\Delta_A = \{(x,x) \mid x \in A\}$. [3]

Свойства отношений

1^0. ***Рефлексивность:*** $\forall x \in A\,(x\varphi x)$.

2^0. ***Антирефлексивность:*** $\forall x \in A\,(\overline{x\varphi x})$.

3^0. ***Симметричность:*** $\forall x \in A, \forall y \in A\,(x\varphi y \to y\varphi x)$.

4^0. ***Антисимметричность:*** $\forall x \in A,\ \forall y \in A\,(x\varphi y,\ y\varphi x \to x = y)$ или равносильное определение: $\forall x \in A,\ \forall y \in A\,(x\varphi y,\ x \neq y \to \overline{y\varphi x})$.

5^0. ***Транзитивность:*** $\forall x \in A,\ \forall y \in A,\ \forall z \in A\,(x\varphi y,\ y\varphi z \to x\varphi z)$.

6^0. ***Связность:*** $\forall x \in A,\ \forall y \in A\,(x \neq y \to x\varphi y \ \textit{или}\ \ y\varphi x)$.

Определение 3.3. Отношение называется ***отношением эквивалентности***, если оно рефлексивно, симметрично и транзитивно.

Определение 3.4. Классом эквивалентности, порожденным элементом x, называется множество всех элементов из A, вступающих с x в отношение эквивалентности.

Определение 3.5. Фактор-множеством множества A по отношению эквивалентности φ называется множество всех различных классов эквивалентности, которое обозначается A/φ. [3]

Пример 3.1. Проверить для произвольных отношений $\Phi=(A,G)$ и $\Psi=(A,F)$ справедливость утверждения: «Если отношения Φ и Ψ транзитивны, то отношение $\overline{\Phi\circ\Psi}$ также транзитивно».

Решение. Пусть $A=\{a,b,d\}$ $\Phi\setminus\Psi=(A,G\setminus F)$, $G=\{(a,d),(b,d)\}$, $F=\{(d,a)\}$. Тогда

$$G\circ F=\{(a,a),(b,a)\},$$

$$\overline{G\circ F}=A^2\setminus\{(a,a),(b,a)\}=\{(a,a),(a,b),(a,d),(b,a),(b,b),(b,d),(d,a),(d,b),(d,d)\}$$

$$\setminus\{(a,a),(b,a)\}=\{(a,b),(a,d),(b,b),(b,d),(d,a),(d,b),(d,d)\}.$$

Отношение $\overline{\Phi\circ\Psi}$ не транзитивно, так как его график $\overline{G\circ F}$ содержит пары (a,a) и (b,a), но не содержит пару (a,c). Значит, в общем случае данное утверждение неверно.

Пример 3.2. Проверить для произвольных отношений $\Phi=(A,G)$ и $\Psi=(A,F)$ справедливость утверждения: «Если отношения Φ и Ψ рефлексивны, то отношение $\Phi\cup\Psi$ также рефлексивно».

Решение. Для рефлексивных отношений Φ и Ψ выполнены условия: $\Delta_A\subseteq G$, $\Delta_A\subseteq F$. Значит выполнено также включение: $\Delta_A\subseteq G\cup F$, а это и означает, что отношение $\Phi\cup\Psi$ также рефлексивно. Таким образом, утверждение справедливо.

Пример 3.3.

1. Выяснить, какими из свойств: рефлексивность, антирефлексивность, симметричность, антисимметричность, транзитивность, связность обладает данное отношение $\Phi=(A,G)$, если $A=\{x, y, z, \ldots t\}$ – множество шахматистов, участвующих в турнире, где каждый шахматист должен сыграть с каждым ровно три партии.

2. Выяснить, что представляет из себя отношение $\Phi\circ\Phi$, $\Phi\circ\Phi^{-1}$.

Решение. 1. Выясним, какими из свойств обладает данное отношение.

Пусть $x\varphi y$ означает, что x обыграл y по результатам личных встреч.

1^0. Отношение φ не является рефлексивным, так как исключен случай, когда шахматист обыграл бы самого себя.

2^0. Отношение φ является антирефлексивным, так как каждый шахматист не может обыграть самого себя.

3^0. Отношение φ не является симметричным, так как если в паре шахматистов (x, y) такой, что если x обыграл y, то отсюда не следует, что y обыграл x.

4^0. Отношение φ является антисимметричным, так как если в паре шахматистов (x, y) такой, что если x обыграл y, то отсюда следует, что y не обыграл x.

5^0. Отношение φ не является транзитивным, так как если в паре (x, y) x обыграл y, а в паре (y, z) y обыграл z, то отсюда не следует, что x обыграл z.

6^0. Отношение φ является связным, так как в любой паре шахматистов по результатам личных встреч выявляется победитель.

2. Выясним, что из себя представляют отношения $\Phi\circ\Phi$, $\Phi\circ\Phi^{-1}$.

По определению композиции, $x\varphi\circ\varphi y$ означает, что найдется z такой, что $x\varphi z$ и $z\varphi y$, т.е. в отношение $\Phi\circ\Phi$ будут вступать такие пары шахматистов x и y, для которых найдется шахматистов такой, что x обыграл z, а z обыграл y.

Рассуждая аналогично, получим, что в отношение $\Phi\circ\Phi^{-1}$ будут вступать такие пары x и y, для которых найдется шахматист z такой, что x обыграл z, а z проиграл y. Таким образом, график отношения $\Phi\circ\Phi^{-1}$ будут образовывать пары, составленные из шахматистов, для которых найдется хотя бы один участник, которого они оба обыграли в турнире.

Пример 3.4. Для данного отношения $\Phi = \langle\{1, 2, 3, 4\}, \{(2, 3), (4,1), (4, 2)\}\rangle$ проделать следующее:

1. Изобразить Φ графом.

2. Достроить Φ до отношения:

- эквивалентности, указать фактор-множество.

- частичного порядка, указать максимальные, минимальные элементы, а также пары несравнимых элементов.

- линейного порядка, указать наибольший и наименьший элементы.

- строгого порядка.

- строгого линейного порядка.

Замечание 3.1. Отношение достраивается с помощью введения минимально необходимого числа дополнительных ребер.

Решение. 1. Изобразим Φ графом (рис. 8).

1. Для того, чтобы достроить Φ до отношения эквивалентности Φ_1, добавим пары и обозначим полученный график через G_1.

$$G_1 = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(2,3),(4,1),(4,2),(3,2),(1,4),(2,4),(1,2),(2,1)\}.$$

Изобразим граф отношения Φ_1 (рис. 9). Укажем фактор-множество для $A = \{1, 2, 3, 4\}$ по отношению Φ_1: $A/\varphi_1 = \{\{1, 2\},\{3, 4\}\}$, индекс разбиения множества A равен 2.

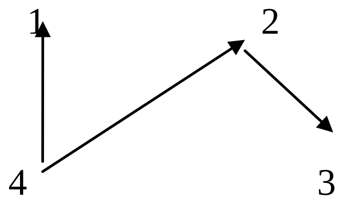


Рис. 8 Граф отношения Φ

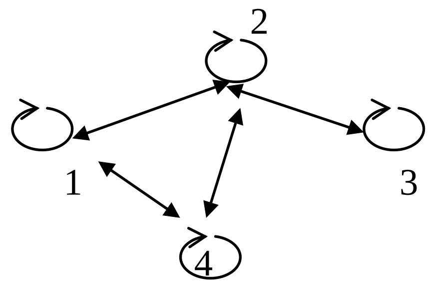


Рис. 9 Граф отношения Φ_1

3. Для того, чтобы отношение Φ являлось отношением частичного порядка Φ_2, нужно чтобы оно являлось рефлексивным, антисимметричным и транзитивным. Для этого добавим пары к графику Φ и получим новый график G_2:

$$G_2 = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(2,3),(4,1),(4,2)\}.$$

Изобразим граф Φ_2 (рис. 10). Укажем пары несравнимых элементов: $(1, 2), (1, 3), (1, 4), (4,3)$. Минимальный элемент равен 4, максимальные – 1, 2, 3.

4. Для того, чтобы отношение Φ являлось отношением линейного порядка Φ_3, необходимо, чтобы оно являлось отношением частичного порядка и связным. Для этого добавим к G_2 следующие пары и обозначим полученный график через G_3:

$$G_3 = G_2 \cup \{(1, 2), (3, 1), (3,4)\}.$$

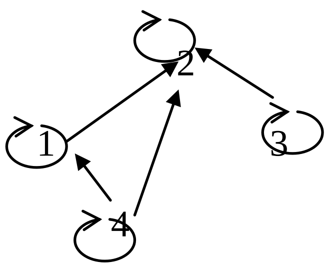
Изобразим граф отношения Φ_3 (рис. 11). Максимальные элементы – 1, 2, 4, минимальный – 3.

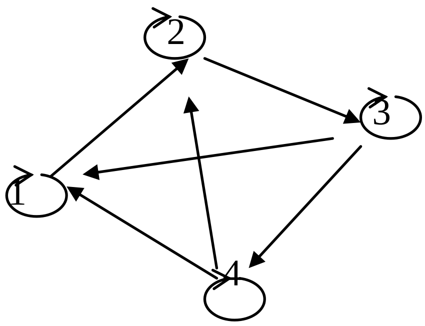
5. Данное отношение Φ является отношением строгого порядка, так что достраивать его нет необходимости.

6. Для того, чтобы отношение Φ являлось отношением строгого линейного порядка Φ_4, необходимо, чтобы оно являлось связным отношением строго порядка. Получим новый график G_4, найденный по формуле:

$$G_4 = G_3 \setminus \Delta_A = \{(1,2),(2,3),(3,1),(3,4),(4,1),(4,2)\}.$$

Изобразим граф отношения Φ_4 (рис. 12).





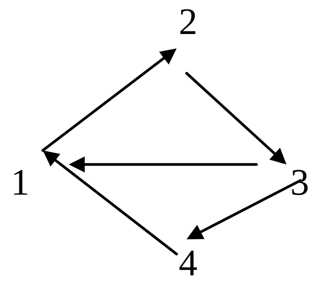


Рис. 10 Граф отношения Φ_2 Рис. 11 Граф отношения Φ_3 Рис. 12 Граф отношения Φ_4

Контрольные вопросы

1. Какое отношение называется бинарным?

2. Сформулировать свойства отношений.

3. Какое отношение называется отношением:

- частичного порядка ;

- линейного порядка;

- строгого порядка ;

- строгого линейного порядка;

- эквивалентности;

- Классом эквивалентности, порожденным элементом x;

- фактор-множеством множества A по отношению эквивалентности φ?

Раздел 4. КОМБИНАТОРИКА

4.1. Размещения, сочетания, перестановки

Комбинаторика – это раздел математики, изучающий всевозможные комбинации предметов безразличной природы заданного конечного множества.

Определение 4.1. Размещениями с повторениями называют всевозможные комбинации из n элементов по k элементов, и обозначают: $\overline{A}_n^k$.

$$\overline{A}_n^k = n^k \quad . \tag{4.1}$$

Замечание 4.1. В размещениях с повторениями элементы повторяются и порядок их расположений имеет значение.

Определение 4.2. Размещениями без повторений называют комбинации из n различных элементов по k элементов, отличающиеся либо составом, либо порядком их расположений, и обозначают: A_n^k.

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} \quad . \tag{4.2}$$

Замечание 4.2. В размещениях без повторений элементы не повторяются и порядок их расположений имеет значение.

Определение 4.3. Сочетаниями без повторений называют комбинации из n различных элементов по k, отличающиеся хотя бы одним элементом, и обозначают: C_n^k.

$$C_n^k = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!} \quad . \tag{4.3}$$

Замечание 4.3. В сочетаниях без повторений элементы не повторяются и порядок их расположений не имеет значения.

Определение 4.4. Сочетаниями с повторениями называют комбинации из n элементов по k, и обозначают: $\overline{C}_n^k$.

$$\overline{C}_n^k = C_{n+k-1}^k. \tag{4.4}$$

Определение 4.5. Перестановками без повторений называют комбинации из одних и тех же n различных элементов и отличающиеся только порядком расположений элементов, и обозначают: P_n.

$$P_n = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n. \tag{4.5}$$

Пусть имеется k_1 элементов 1-го типа, k_2 элементов 2-го типа, …, k_m элементов m -го типа, причем элементы одного и того же типа считаются неразличимыми. Количество п***ерестановок с повторениями*** выражается числом

$$P(k_1, k_2, ..., k_m) = \frac{(k_1 + k_2 + ... + k_m)!}{k_1! \cdot k_2! \cdot ... \cdot k_m!}. \tag{4.6}$$

Приведем некоторые ***свойства сочетаний***.

1^0. $C_n^0 = 1$.

Доказательство. Согласно формуле 4.3, получим $C_n^0 = \dfrac{n!}{0!n!} = 1$.

2^0. $C_n^1 = n$.

Доказательство. Аналогично, по формуле 4.3, получим

$$C_n^1 = \frac{n!}{1!(n-1)!} = \frac{(n-1)!n}{(n-1)!} = n.$$

3^0. $C_n^{n-1} = n$.

Доказательство. Аналогично, по формуле 4.3, получим $C_n^{n-1} = \frac{n!}{(n-1)!1!} = n$.

4^0. $C_n^k = C_n^{n-k}$ – свойство симметричности.

Доказательство. С одной стороны, аналогично, по формуле 4.3, получим

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

С другой стороны:

$$C_n^{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}.$$

Видим, что формулы идентичны.

5^0. $C_n^n = 1$.

*Доказательство. А*налогично, по формуле 4.3, получим $C_n^n = \frac{n!}{n!0!} = 1$.

6^0. $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$ – свойство арифметического треугольника.

Доказательство. С одной стороны, аналогично, по формуле 4.3, получим

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

С другой стороны:

$$C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1} = \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!} + \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} =$$

$$=(n-1)!\left(\frac{1}{k!(n-k-1)!}+\frac{1}{(k-1)!(n-k)!}\right)=(n-1)!\left(\frac{n-k+k}{k!(n-k)!}\right)=\frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Обе части равны, что и требовалось доказать.

$7°$. $C_n^0+C_n^1+C_n^2+...C_n^n=2^n$.

8^0. $C_n^0-C_n^1+C_n^2-...+(-1)^n\cdot C_n^n=0$.

Пример 4.1. Дано множество $M=\{a,в,c\}$. Найти: $\overline{A}_n^k$, A_n^k, C_n^k, P_n, если $k=2$.

Решение. Поскольку данное множество M состоит из 3-х элементов, то $n=3$.

Множество комбинаций размещений с повторениями будет состоять из следующих 9 элементов:

$$\{(a,в),\ (a,c),(в,a),(в,c),(c,a),(c,в),(a,a),(в,в),(c,c)\}.$$

Действительно, по формуле (4.1): $\overline{A}_3^2=3^2=9$.

Множество комбинаций размещений без повторений будет состоять из следующих 6 элементов:

$$\{(a,в),\ (a,c),(в,a),(в,c),(c,a),(c,в)\}.$$

Действительно, по формуле (4.2): $A_3^2=\dfrac{3!}{(3-2)!}=6$.

Множество комбинаций сочетаний без повторений будет состоять из следующих элементов:

$$\{(a,в),\ (a,c),\ (в,c)\}.$$

Действительно, по формуле (4.3): $C_3^2=\dfrac{3!}{2!\cdot(3-2)!}=3$.

Всевозможные перестановки из 3-х различных элементов:

$$(a, в, c),\ (a, c, в), (в, a, c), (в, a, c), (c, в, a), (c, a, в).$$

$$P_3 = 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6.$$

Пример 4.2. Сколько различных слов можно получить перестановкой букв слова «ОГОРОД» так, чтобы три буквы «о» не стояли бы рядом?

Решение. В слове «ОГОРОД» букв «О» – 3 и по одной букве «Г», «Р», «Д». Общее количество различных слов, полученных перестановкой букв слова «ОГОРОД», равно

$$P(3,1,1,1) = \frac{(3+1+1+1)!}{3! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1!} = \frac{6!}{3!} = 120.$$

Если в каком-то слове все три буквы «О» стоят рядом, то тройку «О» можно считать единым символом, и количество слов, в которых три буквы «О» стоят рядом, равно $P_4 = 4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24.$

В итоге получаем: $120 - 24 = 96.$

4.2. Бином Ньютона. Полиномиальная формула

Бином Ньютона:

$$(a+x)^n = C_n^0 \cdot a^n + C_n^1 \cdot a^{n-1}x + C_n^2 \cdot a^{n-2}x^2 + \ldots + C_n^n\, x^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot a^{n-k}x^k. \quad (4.7)$$

Полиномиальная формула:

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_m)^n = \sum_{\substack{k_i \in N_0 \\ k_1 + \ldots + k_m = n}}^{n} P(k_1, k_2, \ldots k_m) \cdot x_1^{k_1} \cdot x_2^{k_2} \cdots x_m^{k_m}, \quad (4.8)$$

где $P(k_1, k_2, \dots k_m)$ называются ***полиномиальными коэффициентами*** и определяются по формуле (4.6).

Пример 4.3. Найти наибольший член разложения бинома $(2+\sqrt{3})^{100}$.

Решение. Пусть T_k – наибольший член разложения бинома $(2+\sqrt{3})^{100}$,

$$T_k = C_{100}^{k} \cdot 2^k \cdot (\sqrt{3})^{100-k},\ T_{k-1} = C_{100}^{k-1} \cdot 2^{k-1} \cdot (\sqrt{3})^{101-k},$$

$T_{k+1} = C_{100}^{k+1} \cdot 2^{k+1} \cdot (\sqrt{3})^{99-k}$. Тогда $T_k > T_{k-1}$, $T_k > T_{k+1}$. Получим систему

неравенств: $\begin{cases} C_{100}^{k} \cdot 2^k (\sqrt{3})^{100-k} > C_{100}^{k-1} \cdot 2^{k-1} (\sqrt{3})^{101-k} \\ C_{100}^{k} \cdot 2^k (\sqrt{3})^{100-k} > C_{100}^{k+1} \cdot 2^{k+1} (\sqrt{3})^{99-k} \end{cases}$

или

$$\begin{cases} \dfrac{100!}{k!(100-k)!} \cdot 2^k (\sqrt{3})^{100-k} > \dfrac{100!}{(k-1)!(101-k)!} \cdot 2^{k-1} (\sqrt{3})^{101-k} \\ \dfrac{100!}{k!(100-k)!} \cdot 2^k (\sqrt{3})^{100-k} > \dfrac{100!}{(k+1)!(99-k)!} \cdot 2^{k+1} (\sqrt{3})^{99-k}. \end{cases}$$

Выполним в полученной системе равносильные замены: $k! = (k-1)! \cdot k$, $(k+1)! = k! \cdot (k+1)$, $2^{k-1} = \dfrac{2^k}{2}$, $2^{k+1} = 2^k \cdot 2$, $\left(\sqrt{3}\right)^{101-k} = \dfrac{\left(\sqrt{3}\right)^{101}}{\left(\sqrt{3}\right)^{k}}$, $\left(\sqrt{3}\right)^{99+k} = \left(\sqrt{3}\right)^{99} \cdot \left(\sqrt{3}\right)^{k}$, получим

$$\begin{cases} \dfrac{100!}{k!(100-k)!}\cdot\dfrac{2^k(\sqrt{3})^{100}}{(\sqrt{3})^k} > \dfrac{100!}{(k-1)!(101-k)!}\cdot\dfrac{2^k(\sqrt{3})^{101}}{2(\sqrt{3})^k} \\ \\ \dfrac{100!}{k!(100-k)!}\cdot\dfrac{2^k(\sqrt{3})^{100}}{(\sqrt{3})^k} > \dfrac{100!}{(k+1)!(99-k)!}\cdot\dfrac{2^k\cdot 2(\sqrt{3})^{99}}{(\sqrt{3})^k}. \end{cases}$$

После сокращений система примет вид:

$$\begin{cases} \dfrac{(\sqrt{3})^{100}}{k\cdot(100-k)!} > \dfrac{(\sqrt{3})^{100}\cdot(\sqrt{3})}{2\cdot(101-k)!} \\ \\ \dfrac{(\sqrt{3})^{99}\cdot(\sqrt{3})}{(100-k)!} > \dfrac{(\sqrt{3})^{99}\cdot 2}{(k+1)\cdot(99-k)!}. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{k\cdot(100-k)!} > \dfrac{\sqrt{3}}{2\cdot(100-k)!\cdot(101-k)} \\ \\ \dfrac{\sqrt{3}}{(99-k)!\cdot(100-k)} > \dfrac{2}{(k+1)\cdot(99-k)!} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{k} > \dfrac{\sqrt{3}}{2\cdot(101-k)} \\ \\ \dfrac{\sqrt{3}}{100-k} > \dfrac{2}{k+1}. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k < \dfrac{202-2k}{\sqrt{3}} \\ \\ \dfrac{100-k}{\sqrt{3}} < \dfrac{k+1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k + \dfrac{2k}{\sqrt{3}} < \dfrac{202}{\sqrt{3}} \\ \\ -\dfrac{k}{\sqrt{3}} - \dfrac{k}{2} < 0{,}5 - \dfrac{100}{\sqrt{3}} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} k\left(1+\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right) < 118{,}82 \\ \\ k\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}} - 0{,}5\right) < -58{,}33 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2{,}18k < 118{,}82 \\ \\ -1{,}09k < -58{,}33 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k < 54{,}5 \\ \\ k > 53{,}5 \end{cases}$$

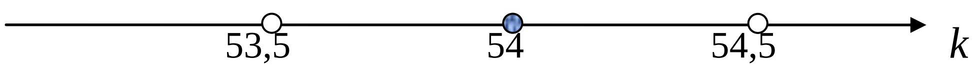


Рис. 13 Интервал значений k

Поскольку значение k натуральное, то $k=54$.

Тогда наибольший член разложения бинома $(2+\sqrt{3})^{100}$ равен $T_{54}=C_{100}^{54}\cdot 2^{54}\cdot(\sqrt{3})^{46}$.

Пример 4.4. Из данной пропорции $C_x^{y+1}:C_x^{y}:C_x^{y-1}=2:2:1$ найти x и y.

Решение. Записав данную пропорцию в виде отношений первого члена ко второму и второго к третьему и применив определение сочетания, получим:

$$\begin{cases} \dfrac{x!}{(y+1)!\cdot(x-y-1)!}:\dfrac{x!}{y!\cdot(x-y)!}=2:2 \\ \dfrac{x!}{y!\cdot(x-y)!}:\dfrac{x!}{(y-1)!\cdot(x-y+1)!}=2:1. \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{y!\cdot(y+1)\,(x-y-1)!}:\dfrac{1}{y!\cdot(x-y-1)!(x-y)}=1 \\ \dfrac{1}{(y-1)!\cdot y\,(x-y)!}:\dfrac{1}{(y-1)!\cdot(x-y)!(x-y+1)}=2. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{y+1}:\dfrac{1}{x-y}=1 \\ \dfrac{1}{y}:\dfrac{1}{x-y+1}=2. \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \dfrac{x-y}{y+1}=1 \\ \dfrac{x-y+1}{y}=2. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2y+1 \\ x-y+1=2. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=5 \\ y=2. \end{cases}$$

Проверкой убеждаемся, что пара чисел $(5;2)$ действительно является решением данной пропорции.

Пример 4.5. Найти сумму S:

$$S = 2C_{n+1}^{2} + 3C_{n+1}^{3} + 4C_{n+1}^{4} + \ldots + (n-1)C_{n+1}^{n-1}.$$

Решение.

Видно, что в выражении S не достает слагаемых: $1C_{n+1}^{1}$, $0C_{n+1}^{0}$, nC_{n+1}^{n}, $(n+1)C_{n+1}^{n+1}$. Поэтому добавим их к обеим частям выражения S. Получим

$$S + 1C_{n+1}^{1} + nC_{n+1}^{n} + (n+1)C_{n+1}^{n+1} = 0C_{n+1}^{0} + 1C_{n+1}^{1} + 2C_{n+1}^{2} + 3C_{n+1}^{3} + \ldots$$

$$+ \ldots + (n-1)C_{n+1}^{n-1} + nC_{n+1}^{n} + (n+1)C_{n+1}^{n+1}.$$

Поскольку $C_{n+1}^{1} = n+1,\ nC_{n+1}^{n} = n(n+1) = n^2 + n,\ (n+1)C_{n+1}^{n+1} = n+1$, то можем переписать последнее выражение в виде:

$$S + n + 1 + n^2 + n + n + 1 = 0C_{n+1}^{0} + 1C_{n+1}^{1} + 2C_{n+1}^{2} + 3C_{n+1}^{3} + \ldots$$

$$+ \ldots + (n-1)C_{n+1}^{n-1} + nC_{n+1}^{n} + (n+1)C_{n+1}^{n+1}$$

или

$$S + n^2 + 3n + 1 = 0C_{n+1}^{0} + 1C_{n+1}^{1} + 2C_{n+1}^{2} + 3C_{n+1}^{3} + \ldots$$

$$+ \ldots + (n-1)C_{n+1}^{n-1} + nC_{n+1}^{n} + (n+1)C_{n+1}^{n+1}. \qquad (*)$$

Применим к правой части выражения (*) 4-е свойство сочетания (свойство симметричности).

$$S + n^2 + 3n + 1 = 0C_{n+1}^{n+1} + 1C_{n+1}^{n} + 2C_{n+1}^{n-1} + 3C_{n+1}^{n-2} + \ldots$$

$$+ \ldots + (n-1)C_{n+1}^{2} + nC_{n+1}^{1} + (n+1)C_{n+1}^{0}. \qquad (**)$$

Сложив равенства (*) и (**), получим:

$$2\left(S + n^2 + 3n + 1\right) = (n+1)C_{n+1}^{0} + \ldots + (n+1)C_{n+1}^{n+1} =$$

$$=(n+1)\left(C_{n+1}^{0}+C_{n+1}^{1}+C_{n+1}^{2}+\ldots+C_{n+1}^{n+1}\right)=(n+1)\cdot 2^{n+1}$$

где $C_{n+1}^{0}+C_{n+1}^{1}+C_{n+1}^{2}+\ldots+C_{n+1}^{n+1}=2^{n+1}$ (7-е свойство сочетаний), то окончательно, после преобразований, сумма S будет равна

$$S=(n+1)\cdot 2^{n}-n^{2}-3n-1.$$

Пример 4.6.

Вычислить сумму $C_{n+1}^{1}-3C_{n+1}^{2}+5C_{n+1}^{3}+\ldots+(-1)^{n}\cdot(2n+1)C_{n+1}^{n+1},\ n\geq 0$.

Решение. Обозначим искомую сумму через S, т.е.

$$S=C_{n+1}^{1}-3C_{n+1}^{2}+5C_{n+1}^{3}+\ldots+(-1)^{n}(2n+1)C_{n+1}^{n+1}.$$

Видно, что в выражении S не достает слагаемого « $-1C_{n+1}^{0}$ ». Поэтому добавим к обеим частям S выражение «$-1C_{n+1}^{0}$». Получим

$$S-1C_{n+1}^{0}=-1C_{n+1}^{0}+C_{n+1}^{1}-3C_{n+1}^{2}+5C_{n+1}^{3}+\ldots+(-1)^{n}\cdot(2n+1)C_{n+1}^{n+1}.$$

Поскольку $C_{n+1}^{0}=1$, то можем переписать последнее выражение в виде:

$$S-1=-1C_{n+1}^{0}+C_{n+1}^{1}-3C_{n+1}^{2}+5C_{n+1}^{3}+\ldots+(-1)^{n}\cdot(2n+1)C_{n+1}^{n+1}. \qquad (*)$$

Применим к правой части выражения (*) 4-е свойство сочетания (свойство симметричности).

$$S-1=-1C_{n+1}^{n+1}+C_{n+1}^{n}-3C_{n+1}^{n-1}+5C_{n+1}^{n-2}+\ldots+(-1)^{n}\cdot(2n+1)C_{n+1}^{0}. \qquad (**)$$

Сложив равенства (*) и (**), получим:

$$2(S-1)=\left((-1)^{n}\cdot(2n+1)-1\right)C_{n+1}^{0}+\left((-1)^{n}\cdot(2n+1)-1\right)C_{n+2}^{1}+\ldots+\left((-1)^{n}(2n+1)-1\right)C_{n+1}^{n+1}$$

$$2(S-1)=\left((-1)^{n}(2n+1)-1\right)\left(C_{n+1}^{0}+C_{n+1}^{1}+C_{n+1}^{2}+\ldots+C_{n+1}^{n+1}\right)$$

Так как $C_{n+1}^0 + C_{n+1}^1 + C_{n+1}^2 + ... + C_{n+1}^{n+1} = 2^{n+1}$ (7-е свойство сочетаний), то окончательно, после преобразований, сумма S будет равна

$$S = \left((-1)^n \cdot (2n+1) - 1\right) \cdot 2^n + 1.$$

Пример 4.7. Вычислить сумму

$$-3C_n^1 - C_n^2 + C_n^3 + ... + (2n-5)C_n^n, \ \ n \geq 1.$$

Решение. Обозначим искомую сумму через S, т.е.

$$S = -3C_n^1 - C_n^2 + C_n^3 + ... + (2n-5)C_n^n.$$

Видно, что в выражении S не достает слагаемого «$-5C_n^0$». Поэтому добавим к обеим частям S выражение «$-5C_n^0$». Получим

$$S - 5C_n^0 = -5C_n^0 - 3C_n^1 - C_n^2 + C_n^3 + ... + (2n-5)C_n^n.$$

Поскольку $C_n^0 = 1$, то можем переписать последнее выражение в виде:

$$S - 5 = -5C_n^0 - 3C_n^1 - C_n^2 + C_n^3 + ... + (2n-5)C_n^n. \qquad (*)$$

Применим к правой части выражения (*) 4-е свойство сочетания (свойство симметричности).

$$S - 5 = -5C_n^n - 3C_n^{n-1} - C_n^{n-2} + C_n^{n-3} + ... + (2n-5)C_n^0. \qquad (**)$$

Сложив равенства (*) и (**), получим:

$$2(S-5) = (2n-10)C_n^n + (2n-10)C_n^{n-1} + (2n-10)C_n^{n-2} + (2n-10)C_n^{n-3} + ...$$

$$... + (2n-10)C_n^0 = (2n-10)\left(C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 + ... + C_n^0\right) = (n-5) \cdot 2 \cdot 2^n,$$

так как $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + ... + C_n^n = 2^n$ (7-е свойство сочетаний). Следовательно, сумма S будет равна

$$S=(n-5)\cdot 2^n+5.$$

Пример 4.8. Найти коэффициент при x^{35} в разложении выражения $\left(6-2x^3+x^8\right)^{15}$ по полиномиальной формуле.

Решение. Согласно полиномиальной формуле (4.8) выражение $\left(6-2x^3+x^8\right)^{15}$ примет вид

$$\left(6-2x^3+x^8\right)^{15}=\sum_{\substack{k_i\in N_0\\ k_1+k_2+k_3=15}}^{15} P(k_1,k_2,k_3)\cdot 6^{k_1}\cdot\left(-2x^3\right)^{k_2}\cdot\left(x^8\right)^{k_3}.$$

Отсюда составим систему:

$$\begin{cases}3k_2+8k_3=35\\ k_1+k_2+k_3=15\end{cases} \text{ или } \begin{cases}k_2=\dfrac{35-8k_3}{3}\\ k_1=15-(k_2+k_3)\end{cases}.$$

Составим таблицу значений k_1,k_2,k_3.

k_1	k_2	k_3
5	9	1
10	1	4

Получили 2 набора значений k_1,k_2,k_3. Следовательно, коэффициент при x^{35} будет иметь вид:

$$P(5,9,1)\cdot 6^5(-2)^9+P(10,1,4)\cdot 6^{10}(-2)=$$

$$=-\frac{2^9\cdot 6^5\cdot 15!}{5!\cdot 9!\cdot 1!}-\frac{2\cdot 6^{10}\cdot 15!}{1!\cdot 10!\cdot 4!}.$$

Контрольные вопросы

1. Что называется комбинаторикой?

2. Какие комбинации называются:

- размещения с повторениями;

- размещения без повторений;

- сочетаниями без повторений;

- сочетаниями с повторениями;

- перестановками без повторений;

- перестановками с повторениями?

3. Что называется треугольником Паскаля?

4. Как записывается полиномиальная формула?

5. Какими свойствами обладают сочетания?

4.3 Формула включений и исключений

Пусть имеется N предметов, которые могут обладать свойствами α_1, α_2, …, α_n. Обозначим через $N(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k)$ количество предметов, обладающих набором свойств α_1, α_2, …, α_k, а через $N(\overline{\alpha_1}, \overline{\alpha_2}, ..., \overline{\alpha_k})$ – количество предметов, не обладающих ни одним из свойств α_1, α_2, …, α_k. Тогда справедлива ***формула включений и исключений***:

$$N(\overline{\alpha_1}, \overline{\alpha_2}, ..., \overline{\alpha_k}) = N - N(\alpha_1) - N(\alpha_2) - ... - N(\alpha_n) + N(\alpha_1, \alpha_2) + N(\alpha_1, \alpha_3) +$$

$$+ N(\alpha_1, \alpha_3) + ... + N(\alpha_{n-1}, \alpha_n) - N(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) - ... + (-1)^n \cdot N(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \qquad (4.9)$$

Количество перестановок n различных предметов, при которых ни один предмет не стоит на своем первоначальном месте, выражается числом

$$D_n = n! \cdot \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{1}{n!} \right). \qquad (4.10)$$

Количество перестановок n различных предметов, при которых ровно k предметов стоят на своих первоначальных местах, выражается числом

$$D_{n,k} = C_n^k \cdot D_{n-k} \, . \qquad (4.11)$$

Пример 4.9. Сколько натуральных чисел от 1 до 10000 не делится ни на 3, ни на 5, ни на 7, ни на 9?

Решение. Очевидно, что если число не делится на 3, то оно не делится на 9. Поэтому деление на 9 не рассматриваем. Обозначим искомое число через N, а через $[a]$ – целую часть числа a, не превышающее число a, а также через:

α_1 – «число делится на 3»;

α_2 – «число делится на 5»;

α_3 – «число делится на 7».

Тогда

$$N(\alpha_1) = \left[\frac{10000}{3} \right] = [3333{,}3] = 3333.$$

$$N(\alpha_2) = \left[\frac{10000}{5} \right] = [2000] = 2000.$$

$$N(\alpha_3) = \left[\frac{10000}{7} \right] = [1428{,}6] = 1428.$$

$$N(\alpha_1, \alpha_2) = \left[\frac{10000}{3 \cdot 5} \right] = [666{,}67] = 666.$$

$$N(\alpha_1,\alpha_3)=\left[\frac{10000}{3\cdot 7}\right]=\left[476{,}19\right]=476.$$

$$N(\alpha_2,\alpha_3)=\left[\frac{10000}{5\cdot 7}\right]=\left[285{,}71\right]=285.$$

$$N(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\left[\frac{10000}{3\cdot 5\cdot 7}\right]=\left[95{,}24\right]=95.$$

По формуле (4,9) получим:

$$N\left(\overline{\alpha_1},\overline{\alpha_2},\overline{\alpha_3}\right)=10000-3333-2000-1428+666+476+285-95=4571.$$

Ответ: 4571.

Пример 4.10. Подсчитать количество различных перестановок цифр числа 31323132, при которых никакие 2 одинаковые цифры не идут друг за другом.

Решение. Обозначим через: $k_1=2$ – количество «1» в числе, $k_2=2$ – количество «2», $k_3=4$ – количество «3». Общее количество различных перестановок цифр числа 31323132 равно $N=P(2,\,2,\,4)=\dfrac{8!}{2!\cdot 2!\cdot 4!}=420$ (по формуле (4.6)).

Если какие-то одинаковые цифры стоят рядом, можем считать эту двойную цифру единым символом. Тогда количество перестановок, содержащих этот символ, равно $C_4^1\cdot P(1,\,2{,}4)=4\cdot\dfrac{7!}{1!\cdot 2!\cdot 4!}=420$.

Аналогично, если рядом стоит пара двойных символов, то таких перестановок получится ровно $C_4^2\cdot P(1{,}1{,}4)=6\cdot\dfrac{6!}{1!\cdot 1!\cdot 4!}=180$.

Если рядом стоят три пары двойных символов, то $C_4^3\cdot P(1,\,1,\,2)=4\dfrac{4!}{1!\cdot 1!\cdot 2!}=48$, $C_4^4\cdot P(1{,}1{,}1)=\dfrac{3!}{1!\cdot 1!\cdot 1!}=6$

Таким образом, по формуле включений и исключений получим

$$420-420+180-48+6=138.$$

Пример 4.11. Сколько существует перестановок 15 различных предметов, при которых на своих первоначальных местах окажутся ровно 5 или ровно 9 предметов?

Решение. По формуле (4.11) количество перестановок 15 предметов, при которых на своих первоначальных местах окажутся ровно 5 или 9 предметов, равно $D_{15,5}$ + $D_{15,9}$ соответственно.

$$D_{15,5}+D_{15,9}=C_{15}^{5}\cdot D_{10}+C_{15}^{9}\cdot D_{6}=$$

$$=\frac{15!}{5!\cdot 10!}\cdot 10!\left(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{5!}+\frac{1}{6!}-\frac{1}{7!}+\frac{1}{8!}-\frac{1}{9!}+\frac{1}{10!}\right)+$$

$$=\frac{15!}{9!\cdot 6!}\cdot 6!\left(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{5!}+\frac{1}{6!}\right)=\frac{15!}{5!10!}\cdot 1334961.$$

4.4 Задачи о распределениях

Пусть имеется шаров n, которые распределяются по k ящикам. Количество способов распределения для различных случаев представлено в таблице 4.4.

Таблица 4.4 Случаи распределения шаров по ящикам

№ п/п	**По виду**		**По составу**	**Формула**
	шары	ящики	ящики	
1	различимы	различимы	непусты	$U^*(n,k)=\sum\limits_{i=0}^{k-1}(-1)^i\cdot C_k^i\cdot(k-i)^n.$ (4.12)
2	различимы	различимы	есть пустые	$U(n,k)=k^n.$ (4.13)
3	различимы	неразличимы	непусты	$V^*(n,k)=\dfrac{U^*(n,k)}{k!}.$ (4.14)

4	различимы	неразличимы	есть пустые	$V(n,k)=\sum\limits_{i=1}^{k} V^*(n,i)$. (4.15)
5	неразличимы	различимы	непусты	$T^*(n,k)=C_{n-1}^{k-1}$. (4.16)
6	неразличимы	различимы	есть пустые	$T(n,k)=C_{n+k-1}^{k-1}$. (4.17)
7	неразличимы	неразличимы	непусты	$W^*(n,k)=W(n-k,k)$. (4.18)
8	неразличимы	неразличимы	есть пустые	$W(n,k)=\sum\limits_{i=1}^{k} W^*(n,i)$. (4.19)

Пример 4.12. Сколькими способами можно распределить 8 различных открыток в пяти (различимых /неразличимых конвертах, если они (не пусты/ пусты)? (Всего рассмотреть 4 случая.)

Решение. 1а) По условию конверты разные и не пусты, открытки разные. Тогда по формуле (4.12) число способов разложения открыток будет равно

$$U^*(8,5)=\sum_{i=0}^{4}(-1)^i\cdot C_5^i\cdot(5-i)^8=C_5^0\cdot 5^8-C_5^1\cdot 4^8+C_5^2\cdot 3^8-$$

$$-C_5^3\cdot 2^8+C_5^4\cdot 1^8=5^8-5\cdot 4^8+\frac{5!}{2!3!}3^8-\frac{5!}{2!3!}2^8+5=$$

$$=390625-5\cdot 65536+65610-2560+5=126000.$$

1б) Конверты различимы и пусты, тогда число способов распределения открыток, по формуле (4.13), будет равно

$$U(8,5)=5^8=390625.$$

2а) Конверты не различимы и все они должны быть не пусты, тогда число способов распределения открыток, по формуле (4.14), будет равно

$$V^*(8,5)=\frac{U^*(8,5)}{5!}=\frac{126000}{120}=1050.$$

2б) Если конверты не различимы и допускаются пустые конверты, то число способов распределения, по формуле (4.15), равно

$$V(8,5)=\sum_{i=1}^{5}V^*(8,i)=V^*(8,1)+V^*(8,2)+V^*(8,3)+V^*(8,4)+V^*(8,5)=$$

$$=\frac{U^*(8,1)}{1!}+\frac{U^*(8,2)}{2!}+\frac{U^*(8,3)}{3!}+\frac{U^*(8,4)}{4!}+1050=$$

$$=\frac{C_1^0\cdot 1^8}{1!}+\frac{(-1)^0C_2^0\cdot 2^8+(-1)^1C_2^1\cdot 1^8}{2!}+\frac{(-1)^0C_3^0\cdot 3^8+(-1)^1C_3^1\cdot 2^8+(-1)^2C_3^2\cdot 1^8}{3!}+$$

$$+\frac{(-1)^0C_4^0\cdot 4^8+(-1)^1C_4^1\cdot 3^8+(-1)^2C_4^2\cdot 2^8+(-1)^3C_4^3\cdot 1^8}{2!}+1050=$$

$$=1051+127+966+1701=3845.$$

Контрольные вопросы

1. Записать формулу включений и исключений.
2. Записать формулу включений и исключений для 3-х свойств, которыми обладают N предметов.
3. Записать формулу количества распределений n шаров по k ящикам, если:

   - шары различимы, ящики различимы и непусты;

   - шары различимы, ящики различимы, допускаются среди них пустые;

   - шары различимы, ящики неразличимы и непусты;

   - шары различимы, ящики неразличимы и допускаются среди них пустые;

   - шары неразличимы, ящики различимы и непусты;

   - шары неразличимы, ящики различимы и допускаются среди них пустые;

- шары неразличимы, ящики неразличимы и непусты;

- шары неразличимы, ящики неразличимы и допускаются среди них пустые.

4. Сколько существует перестановок n различных предметов, при которых ни один предмет не стоит на своем первоначальном месте?

5. Сколько существует перестановок n различных предметов, при которых ровно k предметов стоят на своих первоначальных местах?

Раздел 5. БУЛЕВЫ ФУНКЦИИ

Определение 5.1. Булевой функцией (бф) называется функция вида $f: E^n \to E,$ где $E = \{0, 1\}$, т.е. $f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$, принимающая значения 0, 1 и аргументы x_i, $i = \overline{1,n}$ которой принимают значения «0» или «1».

Множество всех булевых функций будем обозначать через P_2.

В таблице, задающей бф, наборы значений переменных пишут в определенном *лексикографическом* порядке, в котором набор значений x_i идет по возрастанию, т.е. начиная от «0».

Булевы функции, заданные табл. 5.1 и 5.2, будем считать *элементарными*.

Введем обозначения:

Таблица 5.1 Элементарные булевы функции

	константа «0»	константа «1»	тождественная функция	отрицание
x	$g_1(x) \equiv 0$	$g_2(x) \equiv 1$	$g_3(x) = x$	$g_4(x) = \overline{x}$
0	0	1	0	1
1	0	1	1	0

Таблица 5.2 Элементарные булевы функции

		отрицание	конъюнкция	дизъюнкция	импликация	сложение по модулю «2»	эквиваленция	штрих Шеффера	стрека Пирса	запрет
x	y	$\bar{x}$	$x \wedge y$	$x \vee y$	$x \to y$	$x + y$	$x \leftrightarrow y$	$x \mid y$	$x \downarrow y$	$x \to y$
0	0	1	0	0	1	0	1	1	1	0
0	1	1	0	1	1	1	0	1	0	0
1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	1
1	1	0	1	1	1	0	1	0	0	0

Наборы u и v значений переменных называются ***соседними по i -ой переменной***, если они отличаются только i -ой координатой, т.е имеют вид:

$$u = \left(a_1, a_2, ..., a_{i-1}, 0, a_{i+1}, ..., a_n\right); \qquad v = \left(a_1, a_2, ..., a_{i-1}, 1, a_{i+1}, ..., a_n\right).$$

Определение 5.2. Переменная x_i называется ***фиктивной переменной*** бф $f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$, если для любых наборов u, v, соседних по i -ой переменной, выполняется равенство $f(u) = f(v)$.

Некоторые законы булевой алгебры:

1. $x \cdot y = y \cdot x$ или $x \wedge y = y \wedge x$ - коммутативный закон.

2. $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ или $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$ - ассоциативный закон.

3. $x \cdot (y \vee z) = (x \cdot y) \vee (x \cdot z)$

   $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$ - дистрибутивные законы.

4. $x \cdot x = x$ или $x \wedge x = x$ - закон идемпотентности

5.

   $x \wedge 0 = 0$ (или $x \cdot 0 = 0$); $x \wedge 1 = x$(или $x \cdot 1 = x$);

   $x \vee 0 = x$ (или $x + 0 = x$); $x \vee 1 = 1$ (или $x + 1 = 1$) - законы тождества с константами.

6. $x\cdot(x\vee y)=x$; $\qquad x\vee(x\cdot y)=x$ - законы поглощения.

7. $\overline{x\wedge y}=\bar{x}\vee\bar{y}$; $\qquad \overline{x\vee y}=\bar{x}\wedge\bar{y}$ - законы де Моргана.

8. $\bar{x}\vee x=1$ - закон исключенного третьего.

9. $\bar{x}\wedge x=0$ - закон противоречия.

10. $\bar{\bar{x}}=x$ - закон двойного отрицания.

11. $\bar{x}\wedge y\vee x=y\vee x$ - правило вычеркивания.

Пример 5.1. Построить таблицу булевой функции $f(x,y,z)$, заданной формулой $f(x,y,z)=(x\vee z\to y)+z\downarrow\bar{x}$.

Решение. Построим таблицу с переменными x,y,z

x	y	z	$\bar{x}$	$x\vee z$	$x\vee z\to y=f_1$	$f_1+z=f_2$	$f_2\downarrow\bar{x}$
0	0	0	1	0	1	1	0
0	0	1	1	1	0	1	0
0	1	0	1	0	1	1	0
0	1	1	1	1	1	0	0
1	0	0	0	1	0	0	1
1	0	1	0	1	0	1	0
1	1	0	0	1	1	1	0
1	1	1	0	1	1	0	1

Контрольные вопросы

1. Что называется булевой функцией?

2. Сформулировать законы булевой функции.

3. Что называется суперпозицией функций $f_1, f_2, ..., f_m$?

4. Что называется: конъюнкцией, дизъюнкцией, импликацией, сложением по модулю «2», эквиваленцией, , штрихом Шеффера, стрелкой Пирса, запретом?

5. Сформулируйте законы булевой алгебры.

Раздел 6. ГРАФЫ

6.1 Основные понятия и определения

Теория графов применяется при анализе функционирования сложных систем, таких как сети железнодорожных дорог, телефонные и компьютерные сети, ирригационные системы. Эта теория традиционно является эффективным аппаратом формализации задач экономической и планово-производственной практики, применяется в автоматизации управления производством, в календарном и сетевом планировании.

Основное понятие – граф. Пусть V - непустое множество, $V^{(2)}$ – множество всех его двухэлементных подмножеств, $U \subset V^{(2)}$. Тогда пара (V,U) называется неориентированным графом. Элементы множества V называются вершинами графа, а элементы множества U – ребрами. Итак, $G=(V,U)$ граф – это конечное множество вершин V и множество ребер U.

Определение 6.1. Если в паре вершин v_i и v_j указано направление связи, то есть, какая из вершин является первой, то соединяющий их отрезок u_k, называют ***концевыми вершинами***. Если концевые вершины совпадают, то дугу называют ***петлей***. В графе G могут существовать дуги (ребра) с одинаковыми концевыми вершинами. Такие дуги называются ***параллельными***.

Определение 6.2. Если в графе $G=(V,U)$ все элементы множества U изображаются дугами, то граф называется ***ориентированным*** или ***орграфом***, если ребрами, то ***неориентированным.***

Определение 6.3. Два ребра называются ***смежными***, если они имеют общий конец.

Определение 6.4. Вершина v_1 и ребро u_1 называются ***инцидентными***, если v_1 является концом ребра u_1, и ***неинцидентными,*** в противном случае.

Таким образом, смежность есть отношение между однородными элементами графа, тогда как инцидентность – отношение между разнородными элементами.

Число вершин называется его ***порядком.*** Число дуг (ребер) графа G, инцидентных данной вершине, – ***степенью*** $P(v_i)$ ***вершины*** v_i. Если степень равна нулю, вершина называется ***изолированной***, а если единице – ***висячей***.

Граф можно задавать матрицей смежности, однозначно определяющая структуру графа, и матрицей инциденций. Для ориентированных и неориентированных графов можно задавать матрицу смежности вершин $P_{nxn} = (p_{ij})$, где $n-$число вершин, p_{ij} равны числу дуг, идущих из вершины v_i в вершину v_j. Ориентированный граф, не содержащий параллельные дуги, имеет бинарную матрицу смежности, состоящую из «0» и «1». Если граф неориентированный, то ему принадлежит как ребро $v_i v_j$, так и ребро $v_j v_i$, и матрица смежности будет, в таком случае, симметрической.

На рис. 17 и 18 изображены неорграф и орграф. Матрицы смежности вершин для них будут иметь вид соответственно: $P_{3x3} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $P_{3x3} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

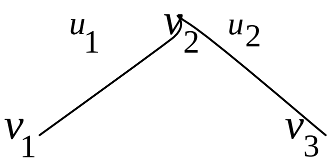


Рис. 17

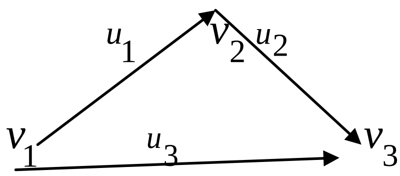


Рис. 18

Для графов можно определять и матрицу смежности дуг $Q_{mxm} = (q_{ij})$, где m – число дуг графа, причем для ориентированного графа:

$$(q_{ij}) = \begin{cases} 1, \textit{если } u_i \textit{ непосредственно предшествует дуге } u_j; \\ 0, \textit{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Замечание 1. Другими словами, $q_{ij} = 1$, если дуга u_j является, как бы, продолжением дуги u_i.

Для неориентированного графа:

$$(q_{ij}) = \begin{cases} 1, \textit{если } u_i \textit{ и } u_j \textit{ смежны;} \\ 0, \textit{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Для графов, изображенных на рис. 17 и 18, матрицы смежности дуг будут иметь вид соответственно: $Q_{2x2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $Q_{3x3} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Матрицей инциденций для ориентированного графа называется прямоугольная матрица

$$R_{nxm} = (r_{ij}) = \begin{cases} 1, \textit{ если дуга } u_j \textit{ исходит из } i-\textit{й вершины (начальная вершина)}, \\ -1, \textit{если дуга } u_j \textit{ входит в } i-\textit{ю вершину (конечная вершина)}, \\ 0, \textit{если дуга не инцидентна } i-\textit{й вершине,} \end{cases}$$

где $n-$число вершин, $m-$ число дуг.

Для неорграфа матрица инциденций имеет вид:

$$R_{nxm} = (r_{ij}) = \begin{cases} 1, \textit{ если вершина } v_i \textit{ инцидентна ребру } u_j, \\ 0, \textit{в противном случае.} \end{cases}$$

Для графов, изображенных на рис. 17 и 18, матрицы инциденций будут иметь вид соответственно:

$$R_{3x2} = \begin{array}{c|c} & u_1 u_2 \\ v_1 & \\ v_2 & \\ v_3 & \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad R_{3x2} = \begin{array}{c|c} & u_1 u_2 u_3 \\ v_1 & \\ v_2 & \\ v_3 & \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

6.2 Маршруты, цепи, циклы

Определение 6.5. Чередующаяся последовательность $v_1, u_1, v_2, u_2, \ldots, v_k, u_k, v_{k+1}$ вершин и ребер графа, такая, что $u_i = v_i v_{i+1}, i = \overline{1,k},$ называется ***маршрутом***, соединяющим вершины v_i и v_{k+1}.

Очевидно, что маршрут можно задать последовательностью вершин $v_1, v_2, \ldots, v_{k+1}$ или последовательностью ребер $u_1, u_2, \ldots, u_k$.

Определение 6.6. Маршрут называется ***цепью***, если все его ребра различны, и ***простой цепью***, если все его вершины, кроме, возможно, крайних, различны.

Определение 6.7. Гамильтоновой цепью называется простая цепь, содержащая все вершины графа.

Определение 6.8. Маршрут называется ***циклическим***, если $v_1 = v_{k+1}$.

Определение 6.9. Циклическая цепь называется ***циклом,*** а циклическая простая цепь – ***простым циклом***.

Определение 6.10. Число ребер в маршруте называется ***длиной маршрута***.

Определение 6.11. Гамильтоновым циклом называется простой цикл, содержащий все вершины графа.

Минимальная из длин циклов графа называется его ***обхватом***.

Определение 6.12. Граф называется ***связным***, если любые две его несовпадающие вершины соединены маршрутом.

6.3 Метрические характеристики графа

Рассмотрим связный граф $G=(V,U)$, пусть v_1 и v_2 – две его вершины.

Определение 6.13. Длина кратчайшего маршрута (v_1, v_2) называется ***расстоянием между вершинами*** v_1 и v_2, обозначается через $d(v_1,v_2)$.

Очевидно, что расстояние между вершинами является ***простой цепью*** и $d(v_i,v_i)=0$. Для любой вершины x величина

$$\varepsilon(v_i)=\max_{v_j\in V} d(v_i,v_j). \tag{6.1}$$

называется ***эксцентриситетом вершины*** v_i.

Определение 6.14. Максимальный из всех эксцентриситетов вершин называется ***диаметром графа*** и обозначается $d(G)$, т.е.

$$d(G)=\max_{v_i\in V}\varepsilon(v_i)=\max_{v_i\in V}\max_{v_j\in V} d(v_i,v_j). \tag{6.2}$$

Определение 6.15. Минимальный из эксцентриситетов вершин графа называется его ***радиусом*** и обозначается через $r(G)$.

$$r(G)=\min_{v_i\in V}\varepsilon(x)=\min_{v_i\in V}\max_{v_j\in V} d(v_i,v_j). \tag{6.3}$$

Определение 6.16. Вершина v_i называется ***периферийной***, если ее эксцентриситет равен диаметру графа, т.е. $\varepsilon(v_i)=d(G)$.

Определение 6.17. Простая цепь, расстояние между концами которой равно $d(G)$, т.е. $d(v_i, v_j) = d(G)$ называется ***диаметральной цепью*** и обозначается: $v_i - v_j$.

Пример 6.1. Дан граф на рис. 19. Определить $r(G) + d(G)$, периферийные вершины, диаметральные цепи, центральные вершины, центр.

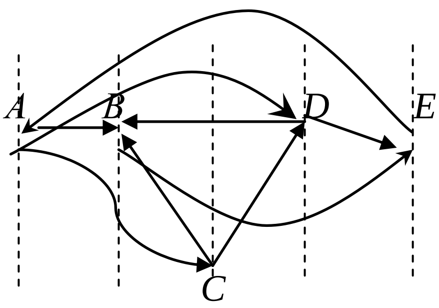


Рис. 19

Решение. Найдем расстояния между вершинами: $d(A,B) = 1$, $d(A,D) = 3$, $d(A,C) = 2$, $d(B,E) = 3$, $d(C,B) = 1$, $d(C,D) = 1$, $d(D,E) = 1$, $d(D,B) = 2$, $d(E,A) = 4$.

Выбирая максимальное значение из $d(v_i)$ вершин, исходящих из v_i, найдем эксцентриситет вершины v_i. Итак, $\varepsilon(A) = \max\limits_{v_i \in V} d(A, v_i) = \max\{1, 2, 3\} = 3$,

$\varepsilon(B) = \max\limits_{v_i \in V} d(B, v_i) = \max\{3\} = 3$, $\varepsilon(C) = \max\limits_{v_i \in V} d(C, v_i) = \max\{1, 1\} = 1$,
$\varepsilon(D) = \max\limits_{v_i \in V} d(D, v_i) = \max\{1, 2\} = 2$, $\varepsilon(E) = \max\limits_{v_i \in V} d(E, v_i) = 4$.

Тогда диаметр графа $d(G) = \max\limits_{v_i \in V} \varepsilon(v_i) = \max\{3, 1, 2, 4\} = 4$, радиус графа $r(G) = \min\limits_{v_i \in V} \varepsilon(v_i) = \min\{3, 1, 2, 4\} = 1$.

Следовательно, $r(G) + d(G) = 4 + 1 = 5$.

Поскольку $\varepsilon(E) = d(G) = 4$, то, согласно определению 6.16, вершина E является периферийной.

Диаметральную цепь образуют вершины A и E, т.к. $d(E, A) = d(G) = 4$.

Вершина C является центральной, т.к. $\varepsilon(C) = r(G) = 1$, центр графа состоит из одной вершины C.

Таким образом, задача решена.

6.4 Нахождение кратчайших путей.

Алгоритм Дейкстры[1]

Рассмотрим алгоритм нахождения кратчайшего пути между двумя заданными вершинами в ориентированной сети. Пусть $G = (V, U, \Omega)$ – ориентированный граф со взвешенными дугами. Обозначим s – вершину – начало пути t – конец пути.

Общий подход к решению задачи о кратчайшем пути был развит американским математиком Р.Беллманом[2], который предложил название ***динамическое программирование***. Задача о кратчайшем пути – частный случай задачи: найти в заданном графе пути, соединяющие две заданные вершины и доставляющие минимум или максимум некоторой аддитивной функции, определенной на путях. Чаще всего эта функция трактуется как длина пути, и задача называется задачей о кратчайших путях. Алгоритм Дейкстры – одна из реализаций этой задачи. Его часто называют алгоритмом расстановки меток. В процессе работы этого алгоритма узлам сети $v_i \in V$ приписываются числа (метки) $d(v_i)$, которые служат оценкой длины (веса) кратчайшего пути от вершины s к вершине v_i. Если вершина v_i получила на некотором шаге метку $d(v_i)$, это

---

1) Едсгер Дейкстра (1930-2002 г.г.) – нидерландский математик. 2) Ричард Эрнест Беллман (1920-1984г.г.) – американский математик

означает, что в графе G существует путь из s в v_i, имеющий вес $d(v_i)$. Метки могут находиться в двух состояниях – быть временными или постоянными. Превращение метки в постоянную означает, что кратчайшее расстояние от вершины до соответствующей вершины найдено.

Алгоритм Дейкстры содержит одно ограничение – веса дуг должны быть *положительными.* Сам алгоритм состоит из двух этапов. На первом этапе находится длина кратчайшего пути, на втором строится сам путь от вершины к вершине.

Этап 1. Нахождение длины кратчайшего пути.

Шаг 1. Присвоение вершинам начальных меток. Полагаем $d(v_1)=0^*$ и считаем эту метку постоянной (постоянные метки помечаются сверху звездочкой). Для остальных вершин $v_i \in V$, $v_i \neq s$ полагаем $d(v_i)=\infty$ и считаем эти метки временными. Пусть $\tilde{v}=s$, $\tilde{v}$ – обозначение текущей вершины.

Шаг 2. Изменение меток.

Для каждой вершины v_i с временной меткой, непосредственно следующей за вершиной $\tilde{v}$, меняем ее метку в соответствии со следующим правилом:

$$d_{нов}(v_i)=min\left\{d_{стар}(v_i),\ d(\tilde{v})+\omega(\tilde{v},v_i)\right\}. \qquad (6.4)$$

Шаг 3. Превращение метки из временной в постоянную.

Из всех вершин с временными метками выбираем вершину v_i^* с наименьшим значением метки

$$d(v_j^*)=min\left\{d(v_j)\middle|\, v_j \in V,\ \ d(v_j)-временная)\right\}. \qquad (6.5)$$

Превращаем эту метку в постоянную и полагаем $\tilde{v}=v_j^*$.

Шаг 4. Проверка на завершение первого этапа.

Если $\tilde{v}=t$, то $d(\tilde{v})$ – длина кратчайшего пути от s до t. В противном случае происходит возврщение ко второму шагу.

Этап 2. Построение кратчайшего пути.

Шаг 5. Последовательный поиск дуг кратчайшего пути.

Среди вершин, непосредственно предшествующих вершине $\tilde{v}$ с постоянными метками, находим вершину v_i, удовлетворяющую соотношению

$$d(\tilde{v})=d(v_i)+\omega(v_i,\tilde{v}). \tag{6.6}$$

Включаем дугу $(v_i,\tilde{v})$ в искомый путь и полагаем $\tilde{v}=v_i$.

Шаг 6. Проверка на завершение второго этапа.

Если $\tilde{v}=s$, то кратчайший путь найден – его образует последовательность дуг, полученных на пятом шаге и выстроенных в обратном порядке. В противном случае возвращаемся к пятому шагу.

Пример 6.1. Задана весовая матрица сети. Найти минимальный путь из вершины в вершину по алгоритму Дейкстры.

$$\Omega=\begin{array}{c} \\ v_1\\ v_2\\ v_3\\ v_4\\ v_5\\ v_6 \end{array}\begin{array}{c}\begin{matrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6\end{matrix}\\ \begin{pmatrix} - & 7 & \infty & 2 & 12 & \infty\\ \infty & - & 5 & \infty & \infty & \infty\\ \infty & \infty & - & \infty & 4 & 8\\ \infty & 3 & 2 & - & 5 & \infty\\ \infty & 9 & \infty & \infty & - & 5\\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix}\end{array}.$$

Решение. На рис. 20 изображен граф по данной матрице весов. Поскольку в данном графе есть цикл между вершинами, то вершины графа нельзя упорядочить по алгоритму Фалкерсона. Итак, распишем подробно алгоритм Дейкстры.

Этап 1. Нахождение длины кратчайшего пути.

Шаг 1. Присвоение вершинам начальных меток.

Полагаем $d(v_1)=0^*$, $\tilde{v}=v_1$, все остальные метки временные, т.е. $d(v_2)=d(v_3)=d(v_4)=d(v_5)=d(v_6)=\infty$.

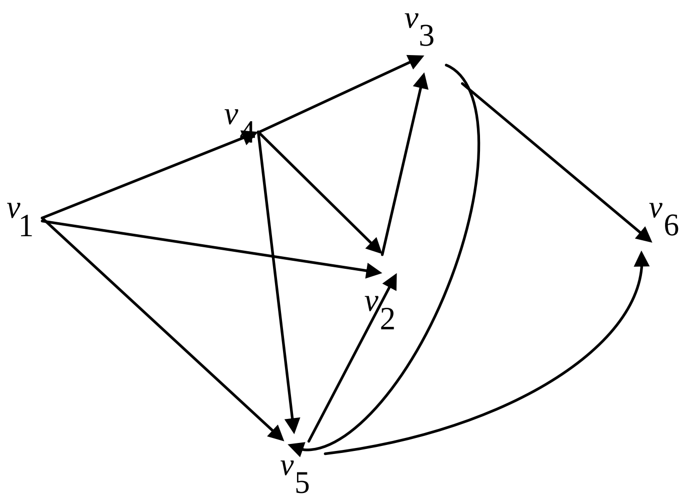


Рис. 20 Граф G

<u>1-я итерация.</u>

Шаг 2. Изменение меток.

Известно, что $\tilde{v}=v_1$. Множество вершин, непосредственно следующих за $\tilde{v}=v_1$ с временными метками $\tilde{V}=\{v_2, v_4, v_5\}$. Пересчитываем временные метки этих вершин по формуле (6.4)

$$d(v_2)=min\{\infty; 0^*+7\}=7; \qquad d(v_4)=min\{\infty; 0^*+2\}=2;$$

$$d(v_5)=min\{\infty; 0^*+12\}=12.$$

Шаг 3. Превращение метки из временной в постоянную.

Одна из временных меток превращается в постоянную. По формуле (6.5) находим

$min\{d(v_2); d(v_3); d(v_4); d(v_5); d(v_6)\} = min\{7; \infty; 2; 12; \infty\} = 2$, т.е. $d(v_4) = 2^*$ и тогда $\tilde{v} = v_4$.

Шаг 4. Проверка на завершение первого этапа.

Поскольку $\tilde{v} = v_4 \neq t = v_6$, то происходит возврат на второй шаг.

2-я итерация.

Шаг 2. Изменение меток.

Известно, что $\tilde{v} = v_4$. Множество вершин, непосредственно следующих за $\tilde{v} = v_4$ с временными метками $\tilde{V} = \{v_2, v_3, v_5\}$. Пересчитываем временные метки этих вершин по формуле (6.4)

$$d(v_2) = min\{7; 2^* + 3\} = 5; \qquad d(v_3) = min\{\infty; 2^* + 2\} = 4;$$

$$d(v_5) = min\{12; 2^* + 5\} = 7.$$

Шаг 3. Превращение метки из временной в постоянную.

Одна из временных меток превращается в постоянную. По формуле (6.5) находим

$min\{d(v_2);\ d(v_3); d(v_5); d(v_6)\} = min\{5;\ 4; 7; \infty\} = 4$, т.е. $d(v_3) = 4^*$ и тогда $\tilde{v} = v_3$.

Шаг 4. Проверка на завершение первого этапа.

Поскольку $\tilde{v} = v_3 \neq t = v_6$, то возвращаемся на второй шаг.

3-я итерация.

Шаг 2. Изменение меток.

Известно, что $\tilde{v} = v_3$. Множество вершин, непосредственно следующих за $\tilde{v} = v_3$ с временными метками $\tilde{V} = \{v_5, v_6\}$. Пересчитываем временные метки этих вершин по формуле (6.4)

$$d(v_5) = min\{7;\, 4^* + 4\} = 7;$$

$$d(v_6) = min\{\infty;\, 4^* + 8\} = 12.$$

Шаг 3. Превращение метки из временной в постоянную.

Одна из временных меток превращается в постоянную. По формуле (6.5) находим

$min\{d(v_2);\ d(v_5); d(v_6)\} = min\{5;\ 7; 12\} = 5$, т.е. $d(v_2) = 5^*$ и тогда $\tilde{v} = v_2$.

Шаг 4. Проверка на завершение первого этапа.

Поскольку $\tilde{v} = v_2 \neq t = v_6$, то возвращаемся на второй шаг.

4-я итерация.

Шаг 2. Изменение меток.

Известно, что $\tilde{v} = v_2$. Множество вершин, непосредственно следующих за $\tilde{v} = v_2$ с временными метками, $\tilde{V} = \{v_3\}$. Пересчитываем временные метки вершины по формуле (6.4)

$$d(v_3) = min\{4;\, 5^* + 5\} = 4.$$

Шаг 3. Превращение метки из временной в постоянную.

Одна из временных меток превращается в постоянную. По формуле (6.5) находим

$min\{d(v_5); d(v_6)\} = min\{7; 12\} = 7$, т.е. $d(v_5) = 7^*$ и тогда $\tilde{v} = v_5$.

Шаг 4. Проверка на завершение первого этапа.

Поскольку $\tilde{v} = v_5 \neq t = v_6$, то происходит возврат на второй шаг.

5-я итерация.

Шаг 2. Изменение меток.

Известно, что $\tilde{v} = v_5$. Множество вершин, непосредственно следующих за $\tilde{v} = v_5$ с временными метками, $\tilde{V} = \{v_2, v_6\}$. Пересчитываем временные метки этих вершин по формуле (6.4)

$$d(v_2) = min\{5; 7^* + 9\} = 5; \qquad d(v_6) = min\{12; 7^* + 5\} = 12.$$

Шаг 3. Превращение метки из временной в постоянную.

Одна из временных меток превращается в постоянную. По формуле (6.5) находим

$min\{d(v_6)\} = min\{12; 12\} = 12$, т.е. $d(v_6) = 12^*$ и тогда $\tilde{v} = v_6$.

Шаг 4. Проверка на завершение первого этапа.

Поскольку $\tilde{v} = v_6 = t$, то на этом первый этап завершен.

Этап 2. Построение кратчайшего пути.

Шаг 5. Последовательный поиск дуг кратчайшего пути.

Составим множество вершин, непосредственно предшествующих $\tilde{v} = v_6$ с постоянными метками $\tilde{V} = \{v_3, v_5\}$. Проверим для этих двух вершин выполнение равенства (6.6):

$$d(\tilde{v}) = 12 = d(v_5) + \omega(v_5, v_6) = 7^* + 5,$$

$$d(\tilde{v}) = 12 \neq d(v_3) + \omega(v_3, v_6) = 7^* + 8.$$

Следовательно, дугу (v_5, v_6) включаем в кратчайший путь; тогда $\tilde{v} = v_5$.

Шаг 6. Проверка на завершение второго этапа.

Поскольку $\tilde{v} = v_5 \neq s = v_1$, то возвращаемся на пятый шаг.

<u>*2-я итерация.*</u>

Шаг 5. Составим множество вершин, непосредственно предшествующих $\tilde{v} = v_5$ с постоянными метками $\tilde{V} = \{v_1, v_3, v_4\}$. Проверим для этих двух вершин выполнение равенства (6.6):

$$d(\tilde{v}) = 7 \neq d(v_1) + \omega(v_1, v_5) = 0^* + 12, \quad d(\tilde{v}) = 7 \neq d(v_3) + \omega(v_3, v_5) = 4^* + 7;$$

$$d(\tilde{v}) = 7 = d(v_4) + \omega(v_4, v_5) = 2^* + 5.$$

Следовательно, дугу (v_4, v_5) включаем в кратчайший путь; тогда $\tilde{v} = v_4$.

Шаг 6. Проверка на завершение второго этапа.

Поскольку $\tilde{v} = v_4 \neq s$, то второй этап не завершен.

<u>*3-я итерация.*</u>

Шаг 5. Составим множество вершин, непосредственно предшествующих $\tilde{v} = v_4$ с постоянными метками $\tilde{V} = \{v_1\}$. Проверим для этих двух вершин выполнение равенства (6.6):

$$d(\tilde{v}) = 2 = d(v_1) + \omega(v_1, v_4) = 0^* + 2.$$

Шаг 6. Проверка на завершение второго этапа.

Поскольку $\tilde{v} = v_1 = s$, то второй этап завершен.

Следовательно, дугу (v_1, v_4) включаем в кратчайший путь; тогда $\tilde{v} = v_1$.

Таким образом, кратчайший путь от вершины v_1 до v_6 найден и представляет собой следующую последовательность дуг: $(v_1,v_4)-(v_4,v_5)-(v_5,v_6)$, длина (вес) которого равна $d_{min}=2+5+5=12$.

Укажем второй способ решения данной задачи, не применяя алгоритм Дейкстры. Для этого выпишем все пути движения от вершины v_1 до v_6, найдем их длины и из них выберем минимальную.

1) $v_1 \to v_2 \to v_3 \to v_6$, $d=20$;

2) $v_1 \to v_4 \to v_2 \to v_3 \to v_6$, $d=18$;

3) $v_1 \to v_5 \to v_2 \to v_3 \to v_6$, $d=34$;

4) $v_1 \to v_5 \to v_6$, $d=17$;

5) $v_1 \to v_2 \to v_3 \to v_5 \to v_6$, $d=21$;

6) $v_1 \to v_4 \to v_3 \to v_5 \to v_6$, $d=13$;

7) $v_1 \to v_4 \to v_2 \to v_3 \to v_5 \to v_6$, $d=19$;

8) $v_1 \to v_4 \to v_5 \to v_6$, $d=12$;

Видим, что $d_{min}=12$, которой соответствует путь $v_1 \to v_4 \to v_5 \to v_6$. Ясно, что таким способом можно найти и максимальную длину. В нашем случае, $d_{мах}=34$.

6.5 Алгоритм Беллмана – Мура[1]

Если веса – произвольные числа и граф G не содержит ориентированных циклов отрицательного веса, то минимальный путь может быть найден по ***алгоритму Беллмана – Мура***, похожему на алгоритм Дейкстры и часто называют его ***алгоритм корректировки меток***. Как и в алгоритме Дейкстры, всем вершинам приписыватся метки, однако здесь нет деления меток на временные и постоянные. Корректировка меток осуществляется по старому правилу (6.4), однако выполнение условия (6.5) теперь не гарантирует, длина кратчайшего пути от s до v_j найдена, т.к. наличие в графе G дуг с отрицательными весами может уменьшить эту метку на последующих шагах. Поэтому в алгоритме Беллмана – Мура вместо процедуры превращения временной метки в постоянную формируется очередь вершин, в которых нужно проанализировать по правилу (6.4) возможности уменьшения меток вершин, не находящихся в данный момент в очереди, но достижимых из нее за один шаг. В процессе работы алгоритма одна и та же вершина может несколько раз вставать в очередь, а затем покидать ее.

Алгоритм Беллмана – Мура состоит из двух этапов. На первом находят длины кратчайших путей от вершины s до всех остальных вершин графа. Этот этап заканчивается при отсутствии вершин в очереди. Второй этап – построение кратчайшего пути от s до t – совпадает с соответствующим этапом в алгоритме Дейкстры и выполняется по формуле (6.6). Опишем подробно все шаги алгоритма.

Этап 1. Нахождение длин кратчайших путей от вершины s до всех остальных вершин графа.

Шаг 1. Присвоение начальных значений.

$d(s)=0,\ d(v_j)=\infty,\ v_j \in V,\ \tilde{v}=s,\ Q=\{\tilde{v}\}$ – множество вершин в очереди.

Шаг 2. Корректировка меток и очереди.

1 Элиаким Гастингс Мур (1862-1932) – американский математик.

Удаляем из очереди Q вершину, находящуюся в самом начале очереди. Для каждой вершины v_i, непосредственно достижимой из $\tilde{v}$, корректируем ее метку по формуле (6.4). Если при этом

$$d_{нов}(v_i) < d_{стар}(v_i), \tag{6.7}$$

то корректируем очередь вершин, иначе продолжаем перебор вершин и корректировку временных меток.

Корректировка очереди. Если вершина v_i не была ранее в очереди и не находится в ней в данный момент, то ставим ее в конец очереди. Если же v_i уже была когда-нибудь ранее в очереди или находится в данный момент, то переставляем ее в начало очереди.

Шаг 3. Проверка на завершение первого этапа. Если $Q \neq \varnothing$, то возвращаемся к началу второго шага, если же $Q = \varnothing$, то первый этап закончен, т.е. минимальные расстояния от s до всех вершин графа найдены.

Пример 6.2. Пусть граф G задан весовой матрицей Ω.

$$\Omega = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 \end{array} \\ \begin{pmatrix} - & 4 & \infty & 6 & \infty & \infty \\ \infty & - & 7 & -8 & 6 & \infty \\ \infty & \infty & - & \infty & -7 & 5 \\ \infty & \infty & 8 & - & 9 & \infty \\ \infty & 6 & \infty & \infty & - & 3 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix} \end{array}.$$

Решение. На рис. 21 изображен исходный граф по матрице весов. Рассчитаем кратчайший путь от узла v_1 до узла v_6.

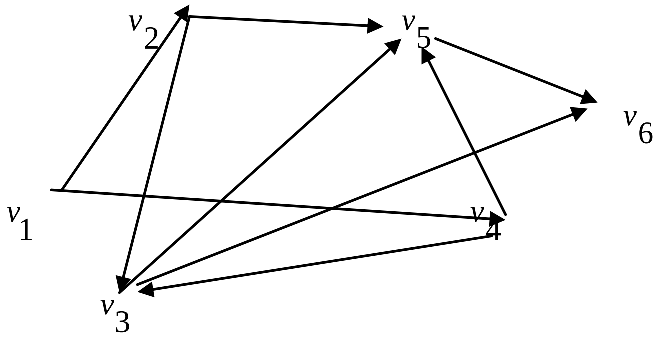


Рис. 21. Граф G

Этап 1.

Шаг 1. $\tilde{v}=v_1$, $d(\tilde{v})=d(v_1)=0^*$; $d(v_2)=d(v_3)=d(v_4)=d(v_5)=d(v_6)=\infty$, $Q=\{v_1\}$.

<u>*1-я итерация.*</u>

Шаг 2. $\tilde{v}=v_1$, $Q=Q\setminus\{v_1\}=\varnothing$; пусть $\tilde{V}$ – множество вершин, непосредственно достижимых из вершины $\tilde{v}$. $\tilde{V}=\{v_2,v_4\}$, $d(v_2)=min\{\infty,0+4\}=4$ $d_{нов}(v_2)<d_{стар}(v_2)$ $\Rightarrow$ v_2 – в конец очереди, но так как Q было пусто, то конец очереди совпал с началом.

$d(v_4)=min\{\infty,0+6\}=6$; $d_{нов}(v_4)<d_{стар}(v_4)$ $\Rightarrow$ v_4 – в конец очереди. Таким образом, $Q=\{v_2,v_4\}$.

Шаг 3. $Q=\varnothing$? Нет. Переход на начало второго шага.

<u>*2-я итерация.*</u>

Шаг 2. $\tilde{v}=v_2$, $Q=Q\setminus\{v_2\}=\{v_4\}$; $\tilde{V}=\{v_3,v_4,v_5\}$.

$d(v_3)=min\{\infty,4+7\}=11$; $d_{нов}(v_3)<d_{стар}(v_3)$ $\Rightarrow$ v_3 – в конец очереди, $Q=\{v_4,v_3\}$.

$d(v_4)=min\{6,\ 4+(-8)\}=-4$; $d_{нов}(v_4)<d_{стар}(v_4) \Rightarrow v_4$ – в начало очереди $Q=\{v_4, v_3\}$, но она уже там стоит.

$d(v_5)=min\{\infty,\ 4+6\}=10$; $d_{нов}(v_5)<d_{стар}(v_5) \Rightarrow v_5$ – в конец очереди.

Таким образом, $Q=\{v_4, v_3, v_5\}$.

Шаг 3. $Q=\varnothing$? Нет. Переход на начало второго шага.

3-я итерация.

Шаг 2. $\tilde{v}=v_4$, $Q=Q\setminus\{v_4\}=\{v_3, v_5\}$; $\tilde{V}=\{v_3, v_5\}$.

$d(v_3)=min\{11,\ -4+8\}=4$; $d_{нов}(v_3)<d_{стар}(v_3) \Rightarrow v_3$ – в начало очереди, но она уже там стоит.

$d(v_5)=min\{10,\ -4+9\}=5$; $d_{нов}(v_5)<d_{стар}(v_5) \Rightarrow v_5$ – в начало очереди.

Таким образом, $Q=\{v_5, v_3\}$.

Шаг 3. $Q=\varnothing$? Нет. Переход на начало второго шага.

4-я итерация.

Шаг 2. $\tilde{v}=v_5$, $Q=Q\setminus\{v_5\}=\{v_3\}$; $\tilde{V}=\{v_6\}$.

$d(v_6)=min\{\infty,\ 5+3\}=8$; $d_{нов}(v_6)<d_{стар}(v_6) \Rightarrow v_6$ – в конец очереди.

Таким образом, $Q=\{v_3, v_6\}$.

Шаг 3. $Q=\varnothing$? Нет. Переход на начало второго шага.

5-я итерация.

Шаг 2. $\tilde{v}=v_3$, $Q=Q\setminus\{v_3\}=\{v_6\}$; $\tilde{V}=\{v_5, v_6\}$.

$d(v_5) = min\{5;\ 4-7\} = -3$; $d_{нов}(v_5) < d_{стар}(v_5) \Rightarrow v_5$ – в начало очереди.

$Q = \{v_5, v_6\}$.

$d(v_6) = min\{8;\ 4+5\} = 8$; $d_{нов}(v_6) > d_{стар}(v_6) \Rightarrow Q = \{v_5, v_6\}$.

Шаг 3. $Q = \varnothing$? Нет. Переход на начало второго шага.

6-я итерация.

Шаг 2. $\tilde{v} = v_5$, $Q = Q \setminus \{v_5\} = \{v_6\}$; $\tilde{V} = \{v_6\}$.

$d(v_6) = min\{8;\ -3+3\} = 0$; $d_{нов}(v_6) < d_{стар}(v_6) \Rightarrow v_6$ – в начало очереди, но Q содержало только вершину v_6.

Шаг 3. $Q = \varnothing$? Нет. Переход на начало второго шага.

7-я итерация.

Шаг 2. $\tilde{v} = v_6$, $Q = Q \setminus \{v_6\} = \varnothing$.

Шаг 3. $Q = \varnothing$? Да. Первый этап завершен.

Этап 2.

Шаг 4. Полагаем $\tilde{v} = v_6$. Пусть $\tilde{V}$ – множество вершин, непосредственно предшествующих $\tilde{v}$, $\tilde{V} = \{v_3, v_5\}$.

1-я итерация.

$$d(\tilde{v}) = d(v_6) = 0 \neq d(v_3) + \omega(v_3, v_6) = 4+5;$$

$$d(\tilde{v}) = d(v_6) = 0 = d(v_5) + \omega(v_5, v_6) = -3+3.$$

Дугу (v_5, v_6) включаем в кратчайший путь, $\tilde{v} = v_5$. Возвращаемся на 4-й шаг.

2-я итерация.

$\tilde{v} = s$? Нет. $\tilde{V} = \{v_2, v_3, v_4\}$.

$$d(\tilde{v}) = d(v_5) = -3 = d(v_3) + \omega(v_3, v_5) = 4 + (-7);$$

$$d(\tilde{v}) = d(v_5) = -3 \neq d(v_2) + \omega(v_2, v_5) = 4 + 6;$$

$$d(\tilde{v}) = d(v_5) = -3 \neq d(v_4) + \omega(v_4, v_5) = -4 + 9$$

Дугу (v_3, v_5) включаем в кратчайший путь, $\tilde{v} = v_3$. Возвращаемся на 4-й шаг.

<u>3-я итерация.</u>

$\tilde{v} = s$? Нет. $\tilde{V} = \{v_2, v_4\}$.

$$d(\tilde{v}) = d(v_3) = 4 \neq d(v_2) + \omega(v_2, v_3) = 4 + 7;$$

$$d(\tilde{v}) = d(v_3) = 4 = d(v_4) + \omega(v_3, v_4) = -4 + 8;$$

Дугу (v_3, v_4) включаем в кратчайший путь, $\tilde{v} = v_4$. Возвращаемся на 4-й шаг.

<u>4-я итерация.</u>

$\tilde{v} = s$? Нет. $\tilde{V} = \{v_1, v_2\}$.

$$d(\tilde{v}) = d(v_4) = -4 \neq d(v_1) + \omega(v_1, v_4) = 0 + 6;$$

$$d(\tilde{v}) = d(v_4) = -4 = d(v_2) + \omega(v_2, v_4) = 4 + (-8);$$

Дугу (v_2, v_4) включаем в кратчайший путь, $\tilde{v} = v_2$. Возвращаемся на 4-й шаг.

<u>5-я итерация.</u>

$\tilde{v} = s$? Нет. $\tilde{V} = \{v_1\}$.

$$d(\tilde{v}) = d(v_2) = 4 = d(v_1) + \omega(v_1, v_2) = 0 + 4;$$

Дугу (v_1, v_2) включаем в кратчайший путь, $\tilde{v} = v_1$. Возвращаемся на 4-й шаг.

<u>6-я итерация.</u>

$\widetilde{v}=s$? Да. Искомый кратчайший путь от вершины v_1 до вершины v_6 состоит из следующих дуг:

$$(v_1,v_2)-(v_2,v_4)-(v_4,v_3)-(v_3,v_5)-(v_5,v_6),\quad d_{min}=0.$$

Таким образом, задача решена.

6.6 Особенности алгоритмов теории графов

Представленные алгоритмы обладают следующими свойствами:

1. Каждый алгоритм включает в себя конечное число правил и предписаний. Предполагаемые действия, которые следует выполнить над матрицами (графами) должны быть просты.
2. Число шагов в алгоритме конечно. Каждое правило выполняется пошагово.
3. Каждый следующий шаг в алгоритме зависит от результата предыдущих шагов.
4. Действие в шаге алгоритма зависит от анализа дуг, инцидентных данной вершине, или вершин, смежных с данной (свойство локальности).
5. Алгоритмы применяются либо для всех, либо для некоторого бесконечного множества графов (свойством массовости).

Контрольные вопросы

1. Что называется: графом; циклом; простым циклом; длиной маршрута; гамильтоновой цепью; простой цепью?
2. Какой граф называется: ориентированным; неориентированным; псевдографом; мультиграфом; двудольным; полным двудольным; простым; полным; гамильтоновым; связным; сильно связным;;;?

3. При каких условиях применяется: алгоритм Фалкерсона? Дейкстры? Беллмана – Мура?
4. Каковы особенности алгоритмов теории графов?
5. Какая вершина называется изолированной? висячей?
6. Какие ребра называются смежными?
7. Какие дуги называются параллельными?
8. Что называется порядком графа?
9. В каком случае вершина и ребро инцидентными?
10. Что называется гамильтоновым циклом?
11. Какой маршрут называется циклическим?
12. Что называется матрицей: смежности вершин, смежности ребер, инцидентности для орграфа и неорграфа?

Раздел 6. КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

Задание №1.

Справедливо ли утверждение: «Если $A\alpha B$, $B\beta C$ и $C\gamma D$, то $A\delta D$»?

№	α	β	γ	δ		№	α	β	γ	δ
1	$\subseteq$	$\cap$	$\subset$	$\subseteq$		**16**	$\subseteq$	$\subseteq$	$\cap$	$\subset$
2	$\cap$	$\cap$	$\subseteq$	$\cap$		**17**	$\subset$	$\cap$	$\subset$	$\cap$
3	$\subseteq$	$\subseteq$	$\cap$	$\cap$		**18**	$\cap$	$\subseteq$	$\subseteq$	$\cap$
4	$\cap$	$\subseteq$	$\cap$	$\subseteq$		**19**	$\subset$	$\subseteq$	$\subseteq$	$\subseteq$
5	$\subset$	$\subset$	$\cap$	$\subseteq$		**20**	$\cap$	$\cap$	$\subset$	$\cap$
6	$\cap$	$\cap$	$\cap$	$\subseteq$		**21**	$\cap$	$\subset$	$\subset$	$\subset$
7	$\cap$	$\subset$	$\subseteq$	$\subset$		**22**	$\subset$	$\subset$	$\cap$	$\cap$
8	$\cap$	$\cap$	$\subseteq$	$\subseteq$		**23**	$\cap$	$\cap$	$\subset$	$\subset$
9	$\cap$	$\subseteq$	$\in$	$\subset$		**24**	$\subset$	$\subset$	$\subset$	$\cap$
10	$\cap$	$\subseteq$	$\subseteq$	$\subseteq$		**25**	$\subset$	$\cap$	$\cap$	$\subset$
11	$\cap$	$\cap$	$\subset$	$\cap$		**26**	$\cap$	$\subset$	$\cap$	$\cap$
12	$\subseteq$	$\cap$	$\subseteq$	$\cap$		**27**	$\cap$	$\subset$	$\subset$	$\cap$
13	$\subseteq$	$\subseteq$	$\subseteq$	$\cap$		**28**	$\subset$	$\cap$	$\subseteq$	$\subset$
14	$\subseteq$	$\cap$	$\cap$	$\subseteq$		**29**	$\cap$	$\subset$	$\subseteq$	$\subset$
15	$\cap$	$\cap$	$\cap$	$\cap$		**30**	$\subset$	$\subseteq$	$\cap$	$\subset$

Задание №2

Для универсального множества $U=\{-5,-4,-3,-2,-1,1,2,3,4,5\}$, множества A, заданного списком, и для B, являющегося множеством корней уравнения $x^4+\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta=0$

1. найти множества: $A\cup B$, $B\cap A$, $A\setminus B$, $B\setminus A$, $A\Delta B$, $\overline{B}$, $C=(A\Delta B)\Delta A$, $P(B)$, $|P(B)|$;
2. выяснить, какой из пяти случаев выполняется для множеств A и C:

$A\subset C$, $C\subset A$, $A=C$, $A\cap C=\varnothing$, $A \between C$.

№	A	α	β	γ	δ	№	A	α	β	γ	δ
1	$\{-1,3,4\}$	1	-12	-28	-16	**16**	$\{-4,-3,2,3\}$	-3	-3	7	6
2	$\{-1,1,2\}$	7	13	-3	-18	**17**	$\{-5,1,2,3\}$	-7	12	4	-16
3	$\{-2,1,3,4\}$	-2	-12	18	27	**18**	$\{-3,-1,2,4\}$	-1	-7	13	-6
4	$\{-3,1,2,3\}$	0	-17	36	-20	**19**	$\{-2,1,2,3\}$	-4	3	4	-4
5	$\{-4,1,2,4\}$	0	-11	-18	-8	**20**	$\{-3,1,2,3\}$	-5	-3	13	10
6	$\{-5,-1,4,5\}$	3	-9	-23	-12	**21**	$\{-4,3,4,5\}$	-11	39	-49	20
7	$\{-3,-1,3,4\}$	-2	-7	20	-12	**22**	$\{-3,1,2,3,4\}$	-6	8	6	-9
8	$\{-4,-2,1,2\}$	0	-11	18	-8	**23**	$\{-5,-2,-1,1,2\}$	-3	-2	12	-8
9	$\{-3,-1,3,5\}$	3	-7	-15	18	**24**	$\{-3,2,3,4\}$	0	-9	-4	12
10	$\{-3,-1,1,5\}$	5	1	-21	-18	**25**	$\{-3,-2,-1,4\}$	-4	-10	28	-15
11	$\{-2,1,3,4\}$	2	-7	-20	-12	**26**	$\{-2,2,3,4\}$	3	-3	-7	6
12	$\{-3,-1,3,4\}$	-2	-15	-4	20	**27**	$\{-3,-1,2,4\}$	1	-12	4	16
13	$\{-5,-1,2,3\}$	-5	1	21	-18	**28**	$\{-5,-1,2,3\}$	-2	-4	2	3
14	$\{-4,-3,1,5\}$	1	-7	-13	-6	**29**	$\{-4,-2,3,5\}$	-4	-2	12	9
15	$\{-5,-1,4,3\}$	6	0	-22	15	**30**	$\{-5,-2,1,4\}$	3	1	-3	-2

Задание №3

Пусть A , B , C – множества точек плоскости, координаты которых удовлетворяют условиям (см. таблицу). Изобразите в системе координат хоу множество D, полученное из множеств A, B, C по указанному соотношению.

№		Условия	№		Условия
1	A	$x^2+y^2-8y\le 0$	**16**	A	$x^2+y^2+12y\le 0$
	B	$x^2+2y+1\ge 0$		B	$\lvert x\rvert>3,\ \lvert y\rvert>5$
	C	$\lvert x\rvert\le 7,\ -3\le y\le 2$		C	$x<y$
	D	$A\setminus((A\cup B)\Delta C)$		D	$A\cap B\cap C$
2	A	$y-\dfrac{2}{x}\le 0$	**17**	A	$x^2+y^2-36\le 0$
	B	$x^2+y^2-9\le 0$		B	$2y-5x-6\le 0$
	C	$\lvert x\rvert\le 1,\ \lvert y\rvert\le 2$		C	$x^2+y^2-9\le 0$
	D	$(A\cap B)\setminus C$		D	$B\cap((A\setminus B)\cup C)$
3	A	$0\le y\le 2\sqrt{x}$	**18**	A	$0\le y\le 2x-5$
	B	$-2\le x\le 6,$ $-3\le y\le 1$		B	$-2\le x<5,\ -2\le y\le 1$
	C	$x^2+y^2-10x\le 0$		C	$x^2+y^2-16x\le 0$
	D	$(A\cup B)\setminus C$		D	$(A\Delta B)\Delta(C\setminus A)$
4	A	$\lvert x\rvert\le 4,\ \lvert y\rvert\le 1$	**19**	A	$\lvert x\rvert\le 6,\ \lvert y\rvert<2$
	B	$\lvert x\rvert<3,\ \lvert y\rvert\le 5$		B	$\lvert y\rvert\le 1,\ \lvert y\rvert\le 2$
	C	$x^2+y^2-2y\le 0$		C	$x^2+y^2-8y<0$
	D	$A\cup B\cup(C\setminus B)$		D	$((A\cup B)\Delta C)\cap B$

5	A	$-x^2+2y-1\le 0$	**20**	A	$x^2+y-2\ge 0$
	B	$x^2+y+3\ge 0$		B	$3x-y+4\ge 0$
	C	$x+y>0$		C	$y>-1$
	D	$(A\cap B)\setminus C\cup A$		D	$(A\Delta B)\setminus C$
6	A	$y-\frac{1}{x}\le 0$	**21**	A	$\lvert x\rvert<4$, $\lvert y\rvert\le 5$
	B	$y-\frac{4}{x}\ge 0$		B	$y+2x\ge 4$
	C	$x^2+y^2-4y\le 0$		C	$y-\sqrt{x}\le 0$
	D	$((A\cap B)\setminus C)\cap C$		D	$(A\setminus(B\cap C))\cap A$
7	A	$x^2+y^2-4x+2y\le 0$	**22**	A	$x^2+y-1\le 0$
	B	$x^2+y^2-4x\le 0$		B	$x^2+y^2+4y\le 0$
	C	$\lvert x\rvert\le 5$, $\lvert y\rvert\le 2$		C	$y\ge x+3$
	D	$((A\cup B)\Delta C)\setminus A$		D	$(A\Delta B)\cap(C\setminus B)$
8	A	$-x^2+y+1\le 0$	**23**	A	$x^2-y-5\ge 0$
	B	$0\le y\le 5x-2$		B	$x+y\ge 2$
	C	$x^2+y^2-2x-2y\le 0$		C	$\lvert x\rvert\le 3$, $\lvert y\rvert\le 2$
	D	$((A\cap B)\Delta C)\Delta A$		D	$(A\Delta B)\setminus(A\cap C)$
9	A	$x^2+y-3\le 0$	**24**	A	$x^2+y-2>0$
	B	$x^2+y^2-6y\le 0$		B	$x^2+y^2\le 9$
	C	$x>0$		C	$x<y+1$
	D	$A\setminus(B\cup C)$		D	$(A\setminus B)\cap C$
10	A	$x^2+y^2-9\le 0$	**25**	A	$\lvert x\rvert\le 1$, $\lvert y\rvert\le 4$
	B	$\lvert y\rvert\le 4$, $-6\le x\le 1$		B	$x^2+y^2\le 6y$

	C	$y<0$		C	$y>2$
	D	$(A\Delta B)\setminus C$		D	$(A\cup C)\cap(B\setminus C)$
11	A	$x-y>0$	**26**	A	$y\geq cosx$
	B	$x+y<0$		B	$x<-0{,}5$
	C	$x^2+y^2\leq 4$		C	$y>-3$
	D	$(A\Delta B)\cup C$		D	$((A\Delta B)\cap C)\setminus B$
12	A	$x^2+y-6\leq 0$	**27**	A	$-x^2+y+1\geq 0$
	B	$\lvert x\rvert>2$, $\lvert y\rvert>2$		B	$\lvert x\rvert\leq 3$, $-4\leq y\leq 3$
	C	$x<y$		C	$x^2+y^2\leq y$
	D	$A\cap B\cap C$		D	$(A\cup B)\setminus(C\setminus A)$
13	A	$y\leq sinx$	**28**	A	$-x^2+y-5\leq 0$
	B	$y>0{,}5$		B	$-x^2+y+4\geq 0$
	C	$y>-2$		C	$x^2+y^2\leq 5$
	D	$(A\Delta B)\cap C$		D	$(A\cap B)\setminus C$
14	A	$x<y+3$	**29**	A	$y-\frac{1}{x}\leq 0$
	B	$x>y-3$		B	$x^2+y^2-10x\leq 0$
	C	$\lvert x\rvert<5$, $\lvert y\rvert<2$		C	$\lvert x\rvert\leq 4$, $\lvert y\rvert\leq 2$
	D	$(A\cap B)\setminus C$		D	$A\cap(B\setminus C)$
15	A	$y+\frac{5}{x}\leq 0$	**30**	A	$1\leq x\leq 6$, $-3\leq y\leq 2$
	B	$y-\frac{4}{x}\geq 0$		B	$0\leq y\leq\sqrt{x}+1$
	C	$y\geq -2$		C	$x^2-8y+y^2\leq 0$
	D	$(A\cap B)\setminus C$		D	$((A\Delta B)\Delta C)\cap A$

Задание №4

Решить систему уравнений относительно множества X.

№	система	№	система	№	система
1	$\begin{cases} A \cup X = B \cap X \\ A \cap X = B \cup X \\ \overline{A} \setminus X = C \setminus A \end{cases}$	**2**	$\begin{cases} A \setminus X = X \setminus B \\ X \setminus A = C \setminus X \\ \overline{C \cup X} = X \setminus A \end{cases}$	**3**	$\begin{cases} A \cap X = B \setminus X \\ X \setminus A = C \cup B \\ X \setminus C = A \cup B \end{cases}$
4	$\begin{cases} A \cup X = B \setminus X \\ A \setminus B = C \cup X \\ \overline{A} \setminus C = X \setminus A \end{cases}$	**5**	$\begin{cases} A \cup X = B \Delta \overline{C} \\ X \setminus C = A \cup X \\ \overline{B \cap X} = C \setminus B \end{cases}$	**6**	$\begin{cases} B \setminus C = A \Delta X \\ C \setminus X = A \setminus B \\ C \cap X = A \cap B \end{cases}$
7	$\begin{cases} B \setminus X = A \cap C \\ C \setminus X = C \setminus B \\ X \setminus C = A \cup B \end{cases}$	**8**	$\begin{cases} B \cup X = B \cap C \\ A \cup C = C \cap X \\ X \cup B = A \cap C \end{cases}$	**9**	$\begin{cases} C \cap X = B \cap A \\ C \setminus X = \overline{A \cup B} \\ \overline{A} = A \setminus B \end{cases}$
10	$\begin{cases} \overline{B \cap X} = X \cap C \\ B \cap C = B \setminus X \\ A \setminus (B \cup C) = \overline{C} \setminus B \end{cases}$	**11**	$\begin{cases} X \setminus C = A \setminus B \\ A \setminus \overline{C} = \overline{X \cap C} \\ (B \setminus X) \setminus A = A \setminus C \end{cases}$	**12**	$\begin{cases} C \cup X = A \setminus B \\ A \cap B = X \cup C \\ B \setminus \overline{A} = X \cap C \end{cases}$
13	$\begin{cases} C \setminus X = A \setminus B \\ A \cup \overline{C} = X \cap C \\ X \cup \overline{B} = X \cap \overline{B} \end{cases}$	**14**	$\begin{cases} A \cup X = C \cap X \\ B \cap X = A \cup X \\ \overline{B} \setminus X = \overline{A} \setminus B \end{cases}$	**15**	$\begin{cases} A \setminus X = X \setminus C \\ X \setminus B = A \setminus X \\ \overline{C} \cap \overline{X} = C \setminus X \end{cases}$
16	$\begin{cases} B \cap X = A \setminus X \\ X \setminus B = A \cup X \\ X \setminus A = \overline{C} \cup B \end{cases}$	**17**	$\begin{cases} A \cup X = C \setminus X \\ X \setminus B = A \cup X \\ \overline{B} \setminus A = X \setminus B \end{cases}$	**18**	$\begin{cases} B \cup X = C \Delta \overline{A} \\ X \setminus A = B \cup X \\ \overline{C \cap X} = A \setminus B \end{cases}$
19	$\begin{cases} C \setminus A = B \Delta X \\ B \setminus X = C \setminus A \\ A \cap X = B \cap C \end{cases}$	**20**	$\begin{cases} C \setminus X = B \cap A \\ \overline{B} \setminus X = A \setminus C \\ X \setminus A = X \cup C \end{cases}$	**21**	$\begin{cases} C \cup X = C \cap A \\ B \cup A = A \cap X \\ \overline{B} \cup C = X \cap A \end{cases}$
22	$\begin{cases} C \cap X = C \cap B \\ A \setminus X = \overline{C \cup B} \\ \overline{B} = B \setminus C \end{cases}$	**23**	$\begin{cases} \overline{C \cap X} = X \cap A \\ B \cap C = C \setminus X \\ A \setminus (C \cup A) = A \setminus C \end{cases}$	**24**	$\begin{cases} X \setminus A = \overline{B} \setminus C \\ B \setminus A = \overline{X \cap A} \\ (C \setminus X) \setminus B = B \setminus A \end{cases}$

25	$\begin{cases} A\cup X=B\setminus C \\ X\cap C=A\cup C \\ C\setminus B=X\cap A \end{cases}$	**26**	$\begin{cases} A\setminus X=X\setminus B \\ C\cup\overline{A}=A\cap X \\ X\cup\overline{C}=X\cap\overline{C} \end{cases}$	**27**	$\begin{cases} C\setminus X=X\setminus B \\ X\setminus A=B\setminus X \\ \overline{A\cup X}=X\setminus C \end{cases}$
28	$\begin{cases} A\cup X=\overline{A}\setminus X \\ X\setminus A=B\cup X \\ \overline{C}\setminus B=X\setminus C \end{cases}$	**29**	$\begin{cases} B\setminus X=C\cap B \\ C\setminus X=B\setminus A \\ X\setminus B=X\cup\overline{C} \end{cases}$	**30**	$\begin{cases} A\cup X=C\setminus B \\ A\cap C=A\cup B \\ A\setminus C=X\cap\overline{B} \end{cases}$

Задание №5

Проверить справедливость равенства α для множеств $A=\{1,2\}$, $B=\{2,3\}$, $C=\{1,3\}$.

№	α
1	$A\times B=(A\times(C\setminus B))\cup(A\times(C\cap B))$
2	$B\times C=(A\times(C\cap A))\cup(B\times C)$
3	$B\times(A\Delta C)=(A\times(C\cup A))\setminus(B\times(C\cap B))$
4	$B\times C=(C\times(C\setminus B))\cup(A\times C)$
5	$A\times(B\cap C)=(A\times B)\cup(A\times(C\setminus B))$
6	$A\times(C\cup B)=(A\times C)\Delta(A\times(C\cap B))$
7	$A\cup C=(A\setminus(C\cup B))\cap(A\times C)$
8	$A\times(C\cap(B\setminus C))=(A\times C)\Delta(A\times(C\cap B))$
9	$A\times(C\cap B)=(A\times C)\setminus(A\times(C\cap B))$
10	$C\times(B\cup A)=(A\times(B\Delta C))\cup(A\times(B\cap C))$
11	$A\times B=(A\times(C\cap B))\setminus(A\times(B\setminus C))$
12	$A\times(A\cap B)=(A\times C)\setminus(A\times(C\setminus B))$
13	$A\cup(B\times C)=(A\times(B\cup C))\setminus(A\times(B\Delta C))$
14	$C\times(C\setminus B)=(A\times(B\cup C))\setminus(A\times C)$

15	$C\times A=(B\times(A\setminus C))\cup(B\times(A\cap B))$
16	$C\times A=(B\times(A\cap C))\cup(B\times A)$
17	$B\times A=(B\times A)\cup(C\times(A\setminus C))$
18	$C\times(A\cup B)=(B\times(A\setminus C))\cup(B\times C)$
19	$C\times A=(C\times A)\cap(B\times(A\cup B))$
20	$A\times(A\setminus C)=(B\times A)\setminus(B\times(A\cap C))$
21	$A\times C=(B\times(A\cup C))\setminus(B\times(C\setminus A))$
22	$C\times(A\cap B)=(B\times A)\setminus(B\times(A\setminus C))$
23	$A\times(B\setminus C)=(B\times A)\Delta(B\times(A\cap C))$
24	$C\times(A\setminus B)=(B\times(A\cup C))\setminus(B\times C)$
25	$A\times B=(C\times(B\setminus A))\cup(C\times(B\cap A))$
26	$A\times(B\cap C)=(C\times(B\cap A))\cup(C\times B)$
27	$B\times(A\setminus B)=(C\times(A\cup B))\setminus(C\times(A\cap B))$
28	$C\Delta B=(C\times(B\setminus A))\cup(C\times B)$
29	$B\times(A\cup C)=(C\times A)\cup(C\times(B\setminus A))$
30	$B\times(A\setminus C)=(C\times A)\Delta(C\times(A\cap B))$

Задание №6

Для данного графика P найти: P^{-1}, $P\circ P$, $P^{-1}\circ P$, $Пр_2(P^{-1}\circ P)\times Пр_1(P\circ P)$.

1	$\{(1,2),(4,2),(2,3),(3,3)\}$	**2**	$\{(1,5),(5,2),(2,2),(1,2),(1,3)\}$
3	$\{(4,2),(4,4),(1,2),(1,3),(3,4)\}$	**4**	$\{(0,2),(0,3),(0,3),(1,2),(2,3)\}$

5	$\{(1,2),(1,3),(3,1),(2,2),(3,2)\}$	**6**	$\{(a,b),(a,c),(d,b),(c,d),(b,c)\}$
7	$\{(3,3),(3,2),(2,1),(1,2),(3,1)\}$	**8**	$\{($[illegible]$,b),(d,d),(a,b),(c,a),(c,d)\}$
9	$\{(0,1),(1,1),(1,0),(0,0),(2,1)\}$	**10**	$\{(a,a),(b,c),(c,a),(b,b),(c,b)\}$
11	$\{(5,4),(2,4),(4,4),(3,2),(5,3),(4,2)\}$	**12**	$\{(c,c),(c,b),(b,b),(a,c)$ $(a,b),(a,a)\}$
13	$\{(1,1),(1,2),(2,1),(2,3),(3,1),(3,2)\}$	**14**	$\{(e,a),(a,a),(e,e),(e,b),(b,a)\}$
15	$\{(1,3),(3,1),(3,3),(2,2),(1,2),(1,4)\}$	**16**	$\{(b,f),(f,f),(b,d),(d,d),$ $(c,b),(f,c)\}$
17	$\{(3,8),(8,4),(4,4),(3,4),(8,3),(4,3)\}$	**18**	$\{(a,a),(a,b),(b,c),(c,a),(c,b),(b,b)\}$
19	$\{(0,2),(2,3),(3,3),(3,2),(3,0),(0,0)\}$	**20**	$\{(a,c),(c,a),(b,b),(a,b),(a,d),(a,a)\}$
21	$\{(c,g),(g,d),(d,g),(d,d),(g,c),(d,c)\}$	**22**	$\{(e,b),(b,c),(c,c),(c,e),(e,e),(e,c)\}$
23	$\{(a,f),(f,b),(b,b),(a,b),(a,a),(f,f)\}$	**24**	$\{(e,b),(e,c),(e,e),(a,b),(b,c),(c,c)\}$
25	$\{(x,y),(x,z),(y,y),(z,y),(z,z),(y,z)\}$	**26**	$\{(y,y),(t,t),(x,y),(z,x),(z,t),(z,z)\}$
27	$\{(x,y),(y,z),(z,x),(y,y),(z,z)\}$	**28**	$\{(z,z),(z,y),(y,y),(x,y),(z,x),(x,z$
29	$\{($[illegible]$,x),(x,x),(x,t),(t,t),(y,x)\}$	**30**	$\{(w,t),(y,t),(t,t),(z,y),(w,z),(y,y)\}$

Задание №7

Для данных графиков P и T решить, относительно графика X, уравнение $X \circ P = T$ при условии, что $|X| = 6$, $Пр_1 X = Пр_2 X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Для каждого найденного X указать $P \circ X$.

№	P	T
1	{([illegible],2),(1,3),(4,2),(2,3),(3,3)}	{([illegible],5),(5,2),(2,2),(1,1),(1,3)}
2	{([illegible],2),(4,4),(1,2),(3,1),(3,4)}	{([illegible],2),(0,3),(0,0),(1,2),(2,3)}
3	{([illegible],2),(2,3),(3,1),(2,2),(3,2)}	{([illegible],1),(3,3),(1,3),(2,2)}
4	{([illegible],3),(3,2),(2,2),(1,2),(3,1)}	{([illegible],3),(3,1),(2,2),(1,1),(2,1)}
5	{([illegible],1),(1,1),(1,5),(5,2),(2,1)}	{([illegible],1),(1,1),(1,2),(5,2),(2,6)}
6	{([illegible],4),(2,4),(4,4),(3,2),(5,3)}	{([illegible],4),(2,3),(4,3),(2,2),(5,3)}
7	{([illegible],1),(1,2),(2,3),(3,1),(3,2)}	{([illegible],1),(2,2),(4,3),(4,1),(3,2)}
8	{([illegible],3),(3,1),(2,2),(1,2),(1,4)}	{([illegible],3),(4,1),(2,2),(5,2),(1,4)}
9	{([illegible],3),(6,4),(4,4),(6,3),(4,3)}	{([illegible],1),(2,6),(4,3),(6,1),(5,2)}
10	{([illegible],2),(2,3),(3,3),(3,5),(6,5)}	{([illegible],1),(1,2),(4,3),(4,1),(3,2)}
11	{([illegible],3),(3,2),(2,5),(5,1),(3,2)}	{([illegible],1),(5,2),(1,3),(1,1),(3,2)}
12	{([illegible],4),(3,4),(4,1),(3,1),(1,3)}	{([illegible],1),(1,2),(2,4),(3,1),(3,2)}
13	{([illegible],6),(2,4),(6,4),(3,2),(5,3)}	{([illegible],1),(1,2),(5,3),(3,1),(6,2)}
14	{([illegible],5),(1,4),(4,4),(3,2),(5,4)}	{([illegible],5),(1,3),(2,3),(3,1),(3,2)}
15	{(2,4),(4,5),(1,2),(5,3)}	{([illegible],4),(2,4),(6,4),(3,2),(6,3)}
16	{([illegible],4),(2,5),(4,4),(3,2),(6,3)}	{([illegible],4),(2,4),(4,4),(3,2),(5,6)}
17	{([illegible],4),(2,3),(4,4),(6,2),(5,3)}	{([illegible],4),(2,4),(6,4),(3,6),(5,3)}
18	{([illegible],4),(2,4),(4,6),(3,2),(6,3)}	{([illegible],4),(5,4),(1,1),(3,2),(5,3)}
19	{([illegible],1),(2,4),(4,5),(3,2),(5,3)}	{([illegible],4),(2,4),(4,6),(3,2),(6,3)}
20	{([illegible],4),(2,4),(4,1),(3,2),(5,5)}	{([illegible],4),(6,4),(2,4),(3,2),(5,3)}
21	{([illegible],4),(2,4),(4,6),(3,2),(5,3)}	{([illegible],4),(2,4),(4,4),(3,6),(5,3)}

22	$\{5,5\},\{(2,3),(4,4),(3,2),(5,3)\}$	$\{6,1\},\{(2,4),(4,6),(3,2),(6,3)\}$
23	$\{4,4\},\{(2,4),(6,4),(3,2),(5,6)\}$	$\{6,4\},\{(2,6),(4,4),(3,2),(6,3)\}$
24	$\{5,4\},\{(6,4),(4,1),(3,2),(5,6)\}$	$\{4,4\},\{(2,4),(1,4),(6,2),(5,6)\}$
25	$\{2,4\},\{(2,5),(4,4),(3,2),(5,3)\}$	$\{1,1\},\{(2,1),(1,4),(3,2),(5,3)\}$
26	$\{1,4\},\{(2,4),(3,4),(3,2),(5,3)\}$	$\{1,5\},\{(2,5),(4,4),(3,2),(5,3)\}$
27	$\{2,2\},\{(2,6),(5,4),(3,2),(5,3)\}$	$\{6,4\},\{(2,4),(4,1),(1,2),(5,3)\}$
28	$\{1,4\},\{(5,4),(6,4),(3,2),(5,3)\}$	$\{6,4\},\{(2,4),(1,4),(3,1),(5,3)\}$
29	$\{2,4\},\{(2,1),(4,4),(5,2),(1,3)\}$	$\{1,5\},\{(2,5),(1,4),(3,2),(5,6)\}$
30	$\{1,4\},\{(5,4),(6,4),(1,2),(5,5)\}$	$\{1,4\},\{(2,5),(5,4),(5,5),(5,6)\}$

Задание №8

Дано соответствие $Г=(X,У,G)$. Изобразить соответствие в виде графа. Выяснить, какими из 4 свойств (всюду определенность, сюръективность, функциональность, инъективность) обладает $Г$. Найти образ множества A и прообраз множества B при данном соответствии.

№	X	$У$	G	A	B
1	$\{a,b,c,d,e\}$	$\{1,2,3\}$	$\{(a,2),(b,3),(c,1),(d,2),(e,1)\}$	$\{c,e\}$	$\{2,3\}$
2	$\{a,b,c,d\}$	$\{1,2,3,4\}$	$\{(a,4),(b,3),(c,2)\}$	$\{a,b\}$	$\{1,3\}$
3	$\{a,b,c,d\}$	$\{1,2,3,4,5\}$	$\{(a,3),(b,5),(c,4),(d,1)\}$	$\{a,c\}$	$\{1,4,3\}$
4	$\{a,b,c,d,e\}$	$\{1,2,3,4\}$	$\{(d,1),(b,2),(e,4),(a,3)\}$	$\{b,c\}$	$\{1,2,5\}$
5	$\{a,b,c,d,e\}$	$\{1,2,3\}$	$\{(a,3),(b,2),(c,1),(e,3)\}$	$\{e,c\}$	$\{2,3,1\}$
6	$\{a,b,c,d\}$	$\{1,2,3,4\}$	$\{(a,2),(b,3),(c,1),(a,4)\}$	$\{a,b\}$	$\{1,5\}$
7	$\{a,b,c,d,e\}$	$\{1,2,3,4,5\}$	$\{(a,5),(b,3),(d,1),(e,2)\}$	$\{a,e\}$	$\{1,3,5\}$

8	$\{a,b,c,d\}$	$\{1,2,3,4\}$	$\{(a,5),(b,1),(c,3),(d,1)\}$	$\{a,c\}$	$\{2,3\}$
9	$\{a,b,c\}$	$\{1,2,3,4,5\}$	$\{(a,2),(b,4),(c,5),(a,3)\}$	$\{a,b\}$	$\{1,3,4\}$
10	$\{a,b,c\}$	$\{1,2,3\}$	$\{(a,1),(a,2),(b,2),(c,5)\}$	$\{a,c\}$	$\{2,3,5\}$
11	$\{a,b,c,d\}$	$\{1,2,3,4,5\}$	$\{(a,2),(c,1),(d,4),(c,3)\}$	$\{b,c\}$	$\{1,2,3\}$
12	$\{a,b,c,d,e\}$	$\{1,2,3,4\}$	$\{(c,1),(b,5),(c,3),(d,2)\}$	$\{a,c\}$	$\{2,3,5\}$
13	$\{a,b,c,d\}$	$\{1,2,3\}$	$\{(a,1),(b,1),(c,3),(b,2)\}$	$\{b,d\}$	$\{2,3,5\}$
14	$\{a,b,c,d\}$	$\{1,2,3,4\}$	$\{(a,4),(b,3),(c,3),(d,1),(b,2)\}$	$\{a,b\}$	$\{1,3,4\}$
15	$\{a,b,c,d\}$	$\{1,2,3,4\}$	$\{(a,1),(b,2),(a,3),(c,3)\}$	$\{a,b\}$	$\{1,2,4\}$
16	$\{a,b,c,d,e\}$	$\{1,2,3\}$	$\{(a,2),(b,1),(d,3),(e,2)\}$	$\{a,b\}$	$\{1,2,5\}$
17	$\{a,b,c,d\}$	$\{1,2,3,4\}$	$\{(a,2),(b,3),(c,2),(d,3)\}$	$\{a,c\}$	$\{1,4,5\}$
18	$\{a,b,c,d\}$	$\{1,2,3,4\}$	$\{(a,3),(c,4),(d,1),(c,1)\}$	$\{c,d\}$	$\{2,3,5\}$
19	$\{a,b,c\}$	$\{1,2,3,4,5\}$	$\{(a,1),(b,5),(c,4),(b,3)\}$	$\{a,b\}$	$\{1,2,5\}$
20	$\{a,b,c,d\}$	$\{1,2,3,4\}$	$\{(a,1),(b,3),(a,2),(c,2)\}$	$\{a,b\}$	$\{2,3,5\}$
21	$\{a,b,c,d\}$	$\{1,2,3\}$	$\{(a,3),(b,3),(c,1),(d,5)\}$	$\{c,d\}$	$\{2,4,5\}$
22	$\{a,b,c,d\}$	$\{1,2,3\}$	$\{(a,1),(b,3),(c,2),(a,2)\}$	$\{c,d\}$	$\{1,4,5\}$
23	$\{a,b,c,d\}$	$\{1,2,3,4\}$	$\{(a,3),(b,3),(c,1),(d,2)\}$	$\{a,b\}$	$\{2,4,5\}$
24	$\{a,b,c\}$	$\{1,2,3,4\}$	$\{(a,1),(b,3),(c,1),(d,2)\}$	$\{a,c\}$	$\{1,3,5\}$
25	$\{a,b,c,d,e\}$	$\{1,2,3\}$	$\{(a,3),(b,3),(c,1),(d,2)\}$	$\{a,d\}$	$\{3,5\}$
26	$\{a,b,c,d\}$	$\{1,2,3,4\}$	$\{(a,3),(b,3),(c,1),(d,2)\}$	$\{c,e\}$	$\{1,5\}$
27	$\{a,b,c,d,e\}$	$\{1,2,3,4,5\}$	$\{(a,2),(b,3),(c,1),(d,2)\}$	$\{a,e\}$	$\{2,4\}$
28	$\{a,b,c,d\}$	$\{1,2,3,4\}$	$\{(a,1),(b,3),(c,1),(d,2)\}$	$\{b,e\}$	$\{1,2,4,5\}$
29	$\{a,b,c\}$	$\{1,2,3,4,5\}$	$\{(a,3),(b,2),(c,1),(d,5)\}$	$\{a,e\}$	$\{3,4,5\}$

30	$\{a,b,c\}$	$\{1,2,3\}$	$\{(a,3),(e,3),(c,1),(d,5)\}$	$\{c,d\}$	$\{4,5\}$

Задание №9

Проверить для произвольных отношений Ф = (A,G) и Ψ = (A,F) справедливость утверждения: «Если отношения Ф и Ψ обладают свойством α, то отношение Т также обладает свойством α».

Обозначения: 1- рефлексивность, 2- антирефлексивность, 3- симметричность, 4- антисимметричность, 5- транзитивность, 6- связность.

№	α	Т	№	α	Т	№	α	Т
1	2	$\Phi \cup \Psi$	**11**	3	$\Phi \circ \Psi$	**21**	5	$\Phi \setminus \Psi$
2	2	$\Phi \cap \Psi$	**12**	4	Φ^{-1}	**22**	5	$\Phi \Delta \Psi$
3	2	$\Phi \setminus \Psi$	**13**	4	$\Phi \cup \Psi$	**23**	5	$\Phi \circ \Psi$
4	2	$\Phi \Delta \Psi$	**14**	4	$\Phi \cap \Psi$	**24**	5	Φ^{-1}
5	2	$\Phi \circ \Psi$	**15**	4	$\Phi \setminus \Psi$	**25**	6	$\Phi \cup \Psi$
6	3	Φ^{-1}	**16**	4	$\Phi \Delta \Psi$	**26**	6	$\Phi \cap \Psi$
7	3	$\Phi \cup \Psi$	**17**	4	$\Phi \cap \Psi$	**27**	6	$\Phi \setminus \Psi$
8	3	$\Phi \cap \Psi$	**18**	5	Φ^{-1}	**28**	6	$\Phi \Delta \Psi$
9	3	$\Phi \setminus \Psi$	**19**	5	$\Phi \cup \Psi$	**29**	6	$\Phi \circ \Psi$
10	3	$\Phi \Delta \Psi$	**20**	5	$\Phi \cap \Psi$	**30**	6	Φ^{-1}

Задание №10

1. Выяснить, какими из свойств: рефлексивность, антирефлексивность, симметричность, антисимметричность, транзитивность, связность обладает данное отношение Ф = (A,G).

2. Выяснить, что представляет из себя отношение $Ф \circ Ф$, $Ф \circ Ф^{-1}$.

3. Построить на конечном множестве отношение, обладающее таким же набором свойств, что и данное. Изобразить его графом и аналитически.

№	A	G
1	множество студентов вашего вуза	$x \varphi y \Leftrightarrow$ x, y учатся на одном курсе
2	множество прямоугольников на плоскости	$x \varphi y \Leftrightarrow$ сторона x меньше стороны y
3	множество квадратов на плоскости	$x \varphi y \Leftrightarrow$ сторона x больше стороны y
4	студенты ИрГАУ	$x \varphi y \Leftrightarrow$ x и y – студенты 1 курса
5	студенты 1 курса ИрГАУ	$x \varphi y \Leftrightarrow$ x и y состоят в одной группе
6	прямые на плоскости	$x \varphi y \Leftrightarrow x \cap y = \varnothing$
7	прямые на плоскости	$x \varphi y \Leftrightarrow x \cap y = M(x; y)$
8	N	$x \varphi y \Leftrightarrow$ x и y имеют одинаковый остаток при делении на 5
9	P(N)	$A \varphi B \Leftrightarrow \lvert A\rvert = \lvert B\rvert$
10	R	$x \varphi y \Leftrightarrow 10-2x > y^2$
11	$\{(a_1, a_2, \ldots, a_n),\ a_i \in \{0, 1\}\}$	$x \varphi y \Leftrightarrow$ x и y отличаются только в одной координате
12	R^2	(a, b) $\Leftrightarrow$ x=z или y=t
13	R	$x \varphi y \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1$

14	жители России на начало этого года	x φ y ⇔ x младше y
15	$[0,4]$	x φ y ⇔ x >2y+1
16	R	x φ y ⇔ x и y имеют одинаковую целую часть
17	N	x φ y ⇔ $(x \cdot y)$ кратно 2
18	P(U) , где U - множество точек плоскости	A φ B ⇔ A $A \infty B$ (в общем положении)
19	жители России на начало этого года	x φ y ⇔ x – сестра для y
20	$[0,2]$	x φ y ⇔ x+y < 1
21	N^2	(x,y) φ (z,t) ⇔ xt=yz
22	N	x φ y ⇔ (x - y) кратно 2
23	непрерывные на $[0,1]$ функции	x φ y ⇔ [x] =y
24	Множество студентов общежития 5 «г» ИрГАУ	x φ y ⇔ масса тела x равна массе тела y
25	жители России на начало этого года	x φ y ⇔ x – отец для y
26	Z_+	x φ y ⇔ x =2y-2
27	читатели библиотеки ИрГАУ	x φ y ⇔ x и y прочитали одну и ту же книгу
28	множество концентрических окружностей на плоскости XoY	$x\varphi y \Leftrightarrow r(x) > r(y)$
29	векторы на плоскости	$x\varphi y \Leftrightarrow \lvert\overline{x}\rvert < \lvert\overline{y}\rvert$
30	Множество людей с именем «Владимир»	x φ y ⇔ рост x больше роста y

Задание №11

Для данного отношения $\Phi = \langle \{1, 2, 3, 4, 5\}, G \rangle$ проделать следующее:

1. Изобразить Φ графом.

2. Достроить Φ до отношения:

- эквивалентности, указать фактор-множество.

- частичного порядка, указать максимальные, минимальные элементы, а также пары несравнимых элементов.

- линейного порядка, указать максимальный и минимальный элементы.

- строгого порядка.

- строгого линейного порядка.

Замечание. Отношение достраивается с помощью введения минимально необходимого числа дополнительных ребер.

№	G	№	G
1	$(1,3),(4,3),(1,5)$	**2**	$(1,3),(5,3),(1,5),(2,3)$
3	$(4,3),(1,3),(1,5),(2,4)$	**4**	$(1,3),(2,3),(4,5)$
5	$(5,3),(1,3),(1,5),(2,1)$	**6**	$(1,3),(4,5),(1,5),(2,1)$
7	$(3,5),(1,3),(1,4),(2,3)$	**8**	$(1,3),(4,3),(1,5),(1,4)$
9	$(4,3),(4,3),(1,5)$	**10**	$(1,2),(4,2),(1,5)$
11	$(5,3),(4,3),(1,5)$	**12**	$(4,1),(4,2),(5,1),(1,5)$
13	$(2,3),(2,4),(1,5)$	**14**	$(1,3),(4,3),(1,2)$
15	$(1,5),(4,5),(1,2)$	**16**	$(1,3),(4,3),(1,4)$
17	$(4,1),(4,2),(1,5),(3,2)$	**18**	$(2,3),(5,3),(1,4),(1,3)$
19	$(4,3),(5,3),(4,5),(1,3)$	**20**	$(1,3),(2,3),(4,5)$

21	$(1,5),(3,4),(5,2),(5,3)$	**22**	$(1,4),(4,3),(1,5),(1,2)$
23	$(2,3),(1,3),(1,5)$	**24**	$(1,2),(1,3),(1,4)$
25	$(1,3),(4,3),(1,4)$	**26**	$(2,1),(2,3),(2,4)$
27	$(1,2),(4,3),(1,5),(2,1)$	**28**	$(3,1),(3,2),(3,4)$
29	$(1,3),(4,3),(1,5),(4,1)$	**30**	$(4,1),(4,3),(4,5)$

Задание №12

Найти наибольший член разложения бинома $(a+в)^n$.

№	*a*	*в*	*n*	№	*a*	*b*	*n*	№	*a*	*b*	*n*
1	$\sqrt{5}$	-3	18	**11**	$\sqrt{13}$	-3	23	**21**	$\sqrt{10}$	4,8	17
2	$\sqrt{3}$	2	27	**12**	4	$\sqrt{13}$	30	**22**	2,8	$\sqrt{7}$	25
3	$\sqrt{5}$	8	15	**13**	$\sqrt{7}$	1,5	25	**23**	$\sqrt{3}$	2,9	17
4	3	$\sqrt{6}$	10	**14**	3	$\sqrt{3}$	14	**24**	2,8	$\sqrt{6}$	18
5	$\sqrt{7}$	-1	25	**15**	$\sqrt{5}$	7	18	**25**	$\sqrt{7}$	3,5	12
6	3	$\sqrt{10}$	40	**16**	2,2	$\sqrt{7}$	16	**26**	2,3	$\sqrt{8}$	13
7	$\sqrt{11}$	10	18	**17**	$\sqrt{6}$	2,5	16	**27**	$\sqrt{7}$	2,7	17
8	3	$\sqrt{12}$	13	**18**	7,5	$\sqrt{11}$	14	**28**	1,5	$\sqrt{13}$	16
9	$\sqrt{8}$	8	11	**19**	$\sqrt{10}$	3,3	16	**29**	$\sqrt{5}$	2,3	18
10	4	$\sqrt{3}$	18	**20**	4,2	$\sqrt{8}$	9	**30**	6,2	$\sqrt{10}$	22

Задание №13

Из данной пропорции найти $\dfrac{(x+3y)^2}{xy}$.

№	Пропорция
1	$C_{x+1}^{y+1}:C_{x+1}^{y}:C_{x+1}^{y-1}=5:4:2.$
2	$C_{x+1}^{y+2}:C_{x+1}^{y+1}:C_{x+1}^{y}=28:12:3.$
3	$C_{x}^{y+1}:C_{x}^{y}:C_{x}^{y-1}=3:3:2.$
4	$C_{x+1}^{y+1}:C_{x+1}^{y}:C_{x+1}^{y-1}=6:3:1.$
5	$C_{x}^{y+2}:C_{x}^{y+1}:C_{x}^{y}=42:35:20.$
6	$C_{x}^{y+1}:C_{x}^{y}:C_{x}^{y-1}=72:45:20.$
7	$C_{x+1}^{y+2}:C_{x+1}^{y+1}:C_{x+1}^{y}=3:4:3.$
8	$C_{x}^{y+2}:C_{x}^{y+1}:C_{x}^{y}=14:10:5.$
9	$C_{x+2}^{y-2}:C_{x+2}^{y+1}:C_{x+2}^{y}=5:6:3$
10	$C_{x+1}^{y+2}:C_{x+1}^{y+1}:C_{x+1}^{y}=28:24:15.$
11	$C_{x}^{y+2}:C_{x}^{y+1}:C_{x}^{y}=42:35:20.$
12	$C_{x+1}^{y+1}:C_{x+1}^{y}:C_{x+1}^{y-1}=15:5:1.$
13	$C_{x}^{y+2}:C_{x}^{y+1}:C_{x}^{y}=3:5:5.$
14	$C_{x}^{y+1}:C_{x}^{y}:C_{x}^{y-1}=15:24:28.$
15	$C_{x+1}^{y+2}:C_{x+1}^{y+1}:C_{x+1}^{y}=2:4:5.$
16	$C_{x}^{y+2}:C_{x}^{y+1}:C_{x}^{y}=7:7:5.$
17	$C_{x+1}^{y+1}:C_{x+1}^{y}:C_{x+1}^{y-1}=2:3:3.$
18	$C_{x+1}^{y+2}:C_{x+1}^{y+1}:C_{x+1}^{y}=6:7:6.$
19	$C_{x}^{y+1}:C_{x}^{y}:C_{x}^{y-1}=14:8:3.$
20	$C_{x+1}^{y+1}:C_{x+1}^{y}:C_{x+1}^{y-1}=5:5:3.$
21	$C_{x}^{y+2}:C_{x}^{y+1}:C_{x}^{y}=5:3:1.$
22	$C_{x}^{y+1}:C_{x}^{y}:C_{x}^{y-1}=1:7:21.$
23	$C_{x+1}^{y+2}:C_{x+1}^{y+1}:C_{x+1}^{y}=5:6:5.$
24	$C_{x}^{y+2}:C_{x}^{y+1}:C_{x}^{y}=42:35:20.$
25	$C_{x+1}^{y+1}:C_{x+1}^{y}:C_{x+1}^{y-1}=14:7:2.$
26	$C_{x+1}^{y+2}:C_{x+1}^{y+1}:C_{x+1}^{y}=45:20:6.$

27	$C_x^{y+1}:C_x^y:C_x^{y-1}=6:14:21.$		**28**	$C_{x+1}^{y+1}:C_{x+1}^y:C_{x+1}^{y-1}=55:22:6.$
29	$C_x^{y+2}:C_x^{y+1}:C_x^y=24:9:2.$		**30**	$C_x^{y+1}:C_x^y:C_x^{y-1}=3:4:3.$

Задание №14

Преобразовать сумму S, применив свойства сочетаний.

№	S
1	$2C_n^2-4C_n^3+6C_n^4+...+(-1)^n(2n-2)C_n^n.$
2	$2C_{n+1}^2+4C_{n+1}^3+6C_{n+1}^4+...+(2n)C_{n+1}^{n+1}$
3	$-4C_{n+2}^2-7C_{n+2}^3-10C_{n+2}^4+...+(2-3n)C_{n+2}^n$
4	$7C_n^1+11C_n^2+15C_n^3+...+(4n+3)C_n^n$
5	$-1C_{n+1}^0+2C_{n+1}^1+5C_{n+1}^2+...+(3n-4)C_{n+1}^{n-1}$
6	$-4C_{n+1}^2-5C_{n+1}^3-6C_{n+1}^4-...-(n+3)C_{n+1}^{n+1}$
7	$3C_{n+1}^2+5C_{n+1}^3+7C_{n+1}^4+..+(2n+1)C_{n+1}^{n+1}$
8	$2C_{n+1}^2+7C_{n+1}^3+12C_{n+1}^4+...+(5n-3)C_{n+1}^{n+1}$
9	$7C_{n+2}^2+11C_{n+2}^3+15C_{n+2}^4+...+(4n+3)C_{n+2}^{n+1}$
10	$-5C_n^0+8C_n^1-11C_n^2+...+(-1)^{n-1}(3n-1)C_n^{n-2}$
11	$-3C_n^1+11C_n^2-19C_n^3+...+(-1)^n(8n-5)C_n^n$

12	$4C_{n+1}^2+12C_{n+1}^3+36C_{n+1}^4+...+(4\cdot 3^{n-1})C_{n+1}^{n+1}$
13	$-9C_{n+1}^2-8C_{n+1}^3-7C_{n+1}^4-...-(n+8)C_{n+1}^{n+1}$
14	$5C_{n+1}^2+10C_{n+1}^3+15C_{n+1}^4+...+(5n)C_{n+1}^{n+1}$
15	$-4C_n^1+C_n^2+9C_n^3+...+(5n-9)C_n^n$
16	$-4C_{n+1}^2+2C_{n+1}^3+8C_{n+1}^4+...+(6n-10)C_{n+1}^{n+1}$
17	$-2C_n^0-5C_n^1-8C_n^2-...-(3n-1)C_n^{n-1}$
18	$-1C_{n+2}^3+7C_{n+2}^4+15C_{n+2}^5+...+(8n-9)C_{n+2}^{n+2}$
19	$1C_n^1+7C_n^2+13C_n^3+...+(6n-5)C_n^n$
20	$1C_{n+2}^0+3C_{n+2}^1+5C_{n+2}^2+...+(2n-1)C_{n+2}^{n-1}.$
21	$-1C_{n+2}^1+4C_{n+2}^2-7C_{n+2}^3+...+(-1)^n(3n-2)C_{n+2}^n$
22	$-2C_{n+2}^1+7C_{n+2}^2+16C_{n+2}^3+...+(9n-11)C_{n+2}^n$
23	$3C_{n-1}^3+5C_{n-1}^4+7C_{n-1}^5+...+(2n-5)C_{n-1}^{n-1}$
24	$13C_{n-1}^2+15C_{n-1}^3+17C_{n-1}^4+...+(2n+7)C_{n-1}^{n-1}$
25	$5C_{n-1}^3+7C_{n-1}^4+9C_{n-1}^5+...+(2n-3)C_{n-1}^{n-1}$
26	$-1C_{n-1}^1+C_{n-1}^2+3C_{n-1}^3+...+(2n-5)C_{n-1}^{n-1}$
27	$11C_{n-2}^3+13C_{n-2}^4+15C_{n-2}^5+...+(2n+1)C_{n-2}^{n-2}$

28	$5C_{n-1}^{1}+4C_{n-1}^{2}+3C_{n-1}^{3}+...+(7-n)C_{n-1}^{n-1}$
29	$8C_{n-1}^{2}+9C_{n-1}^{3}+10C_{n-1}^{4}+...+(n+5)C_{n-1}^{n-1}$
30	$8C_{n-1}^{0}+15C_{n-1}^{1}+22C_{n-1}^{2}+...+(7n+1)C_{n-1}^{n-1}$

Задание №15

В разложении указанного выражения P найти коэффициент при x^k.

№	k	P	№	k	P
1	25	$\left(x^3-5x^2+1\right)^{15}$	**2**	35	$\left(2x^7-5+x^8\right)^{24}$
3	97	$\left(2+x^7-5x^2\right)^{34}$	**4**	106	$\left(6+x^{10}-5x^7\right)^{20}$
5	82	$\left(5-2x^9-5x^4\right)^{18}$	**6**	77	$\left(12-3x^4-x^8\right)^{16}$
7	134	$(x^7-2+x^5)^{26}$.	**8**	64	$(1+x^{14}-x^4)^{15}$.
9	69	$(x^7-x^3+3)^{22}$.	**10**	12	$(5-x-x^3)^{10}$.
11	47	$(1+x^7-x^2)^{25}$.	**12**	47	$(2+x^{10}-x^4)^{11}$.
13	116	$(3+x^{14}+x^6)^{20}$.	**14**	28	$(3+x^3+x^9)^9$.
15	35	$(x^7+3-x^2)^{16}$.	**16**	59	$(2-x^2+x^9)^{29}$.
17	28	$(2+x^6-x^2)^9$.	**18**	63	$(1+x^{10}-x^4)^{18}$.
19	26	$(3-x^2+x^5)^{12}$.	**20**	61	$(2-x^4+x^7)^{16}$.

21	117	$(4+x^{18}+x^4)^{28}$.		**22**	19	$(7-x+x^4)^{14}$.
23	49	$(1-x^4+x^6)^{14}$.		**24**	154	$(2-x^5-x^7)^{32}$.
25	47	$(3+x^5-x^3)^{16}$.		**26**	123	$(x^{14}+x^8-3)^{15}$.
27	41	$(x^3+3-x^4)^{13}$.		**28**	37	$(2+x^2-x^8)^{15}$.
29	136	$(2-x^6+x^{14})^{23}$.		**30**	301	$(x^{10}-3+x^{14})^{31}$.

Задание №16

Сколько натуральных чисел от 1 до 10000 не делится ни на α, ни на β, ни на γ, ни на δ?

№	α	β	γ	δ
1	4	5	11	7
2	2	3	17	5
3	3	4	5	13
4	6	7	3	2
5	5	11	9	4
6	3	4	5	13
7	2	3	5	7
8	3	7	4	11
9	11	3	2	10
10	11	13	5	4

№	α	β	γ	δ
11	7	13	5	3
12	11	5	2	9
13	3	8	15	7
14	13	11	5	3
15	3	5	2	13
16	11	5	3	2
17	17	2	3	7
18	2	5	7	17
19	3	2	10	17
20	13	2	3	7

№	α	β	γ	δ
21	2	5	7	13
22	2	7	5	13
23	11	7	2	3
24	3	11	5	4
25	4	13	19	3
26	19	5	7	2
27	5	2	7	8
28	11	3	17	5
29	4	3	5	19
30	23	2	29	7

Задание №17

Подсчитать количество различных перестановок цифр данного числа α, при которых никакие n одинаковых цифр не идут друг за другом.

№	n	α	№	n	α	№	n	α
1	3	412444522	**11**	2	55612651	**21**	2	49954512
2	2	68568757	**12**	2	74734276	**22**	3	376365363
3	2	12499248	**13**	3	239992921	**23**	2	425345234
4	3	323312252	**14**	2	789714894	**24**	3	177217212
5	2	467496679	**15**	3	133414134	**25**	2	5343534
6	3	532332252	**16**	2	5652622	**26**	2	525663154
7	2	38344118	**17**	2	491292518	**27**	2	13453431
8	2	7895681	**18**	2	5352366	**28**	3	93395339
9	2	4435636	**19**	3	11887181	**29**	2	37444753
10	3	38843483	**20**	2	65656373	**30**	2	82555824

Задание №18

Сколько существует перестановок n различных предметов, при которых на своих первоначальных местах окажутся ровно k или ровно m предметов?

№	n	k	m	№	n	k	m	№	n	k	m
1	9	5	2	**11**	17	10	4	**21**	14	10	4
2	8	3	7	**12**	12	6	5	**22**	8	5	3

3	7	2	3
4	12	4	3
5	13	8	3
6	10	7	2
7	8	4	3
8	9	3	5
9	10	9	3
10	8	7	5

13	9	5	3
14	11	2	4
15	12	9	2
16	10	5	4
17	9	2	3
18	8	6	3
19	11	5	4
20	9	3	6

23	12	8	6
24	9	5	2
25	7	2	5
26	10	8	6
27	13	10	3
28	16	14	6
29	15	9	13
30	12	10	3

Задание №19

Сколькими способами можно распределить n различных открыток в k

1) различных;

2) неразличимых конвертов, если:

а) все конверты непусты;

б) допускаются пустые конверты. (Всего рассмотреть 4 случая.)

№	n	k
1	12	5
2	9	6
3	10	7
4	11	8
5	8	2
6	13	9

№	n	k
7	15	8
8	12	7
9	7	3
10	10	3
11	11	5
12	13	4

№	n	k
13	12	4
14	9	5
15	14	2
16	16	3
17	9	4
18	10	6

№	n	k
19	15	3
20	12	3
21	11	4
22	9	5
23	10	7
24	13	8

№	n	k
25	17	9
26	15	5
27	10	4
28	12	6
29	12	5
30	16	4

Задание №20

Найти общее решение рекуррентного соотношения 5-го порядка

$$f(n+5)-af(n+4)-bf(n+3)-cf(n+2)-df(n+1)-ef(n)=0$$

№	*a*	*b*	*c*	*d*	*e*
1	2	10	-8	-33	-18
2	-11	-30	22	95	-75
3	2	6	-4	-13	-6
4	9	-26	20	24	-32
5	3	5	-27	32	-12
6	6	-11	2	12	-8
7	7	-7	-19	16	20
8	15	-83	205	-216	80
9	5	-2	-14	3	9
10	5	-4	-16	32	-16
11	-2	9	22	-4	-24
12	-2	11	40	44	16
13	-6	-6	16	15	-18
14	1	14	-6	-45	-27
15	2	17	-70	92	-40

№	*a*	*b*	*c*	*d*	*e*
16	-1	11	29	26	8
17	0	18	-4	-57	-36
18	4	3	-34	52	-24
19	2	11	-40	44	-16
20	-2	10	8	-33	18
21	-6	-6	20	39	18
22	-4	3	34	52	24
23	3	13	-11	-24	20
24	6	-6	-20	39	-18
25	4	0	-14	17	-6
26	-6	-5	16	12	-16
27	0	19	-34	-12	40
28	8	-12	-2	13	-6
29	11	-23	47	24	36
30	7	5	-35	-4	28

Задание №21

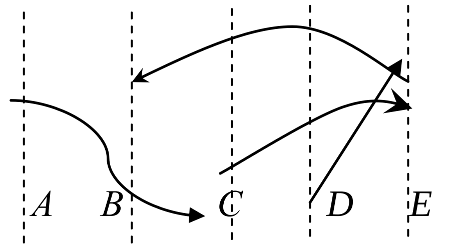
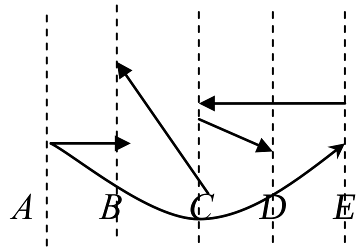
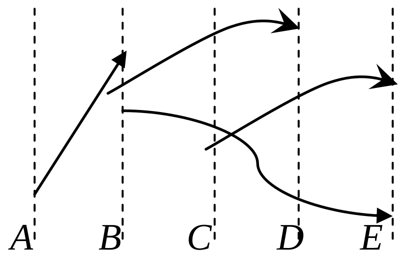
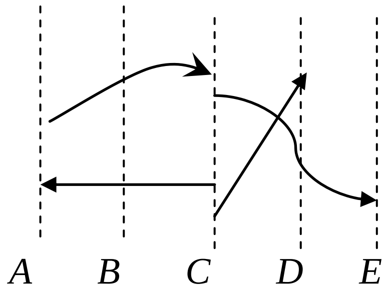
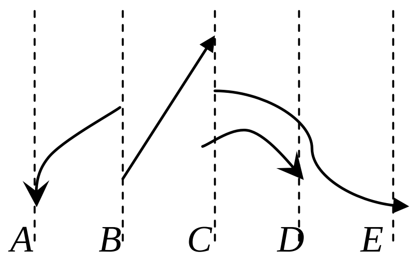
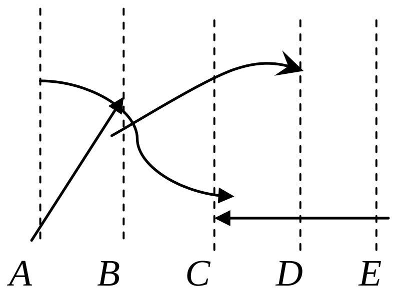
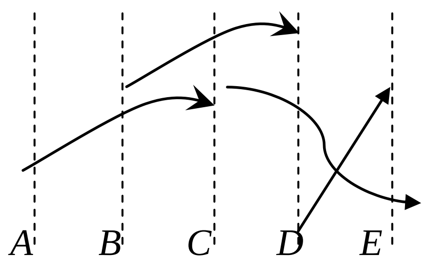
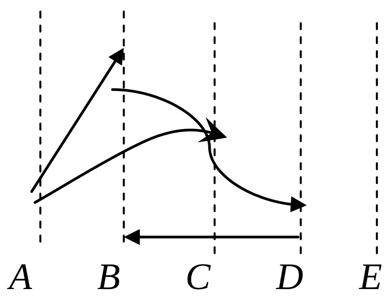
Построить таблицу значений данной булевой функции $f(x,y,z)$.

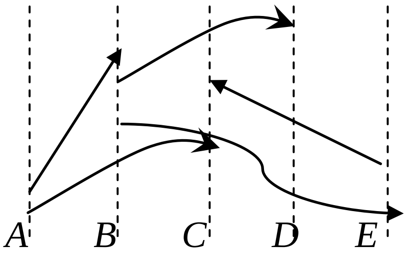
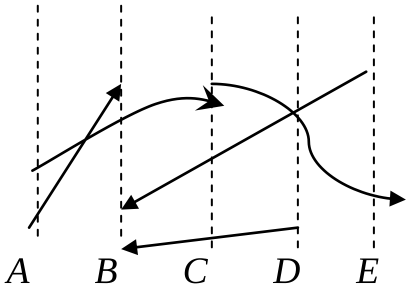
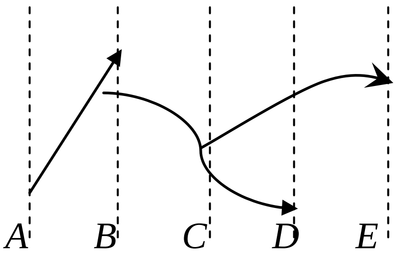
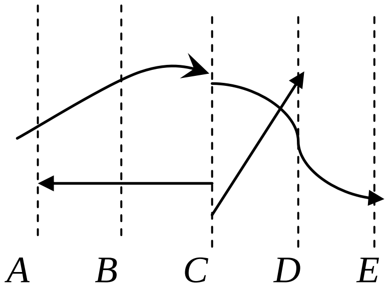
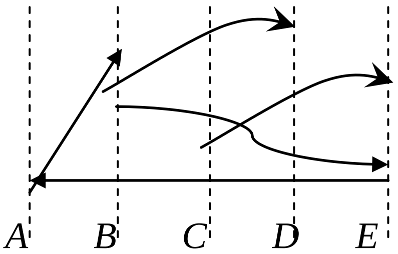
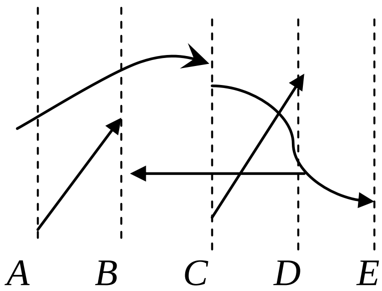
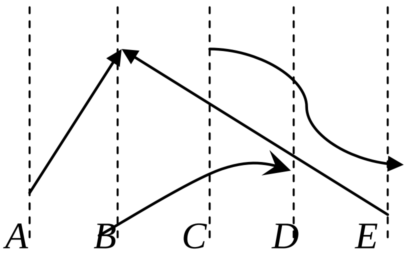
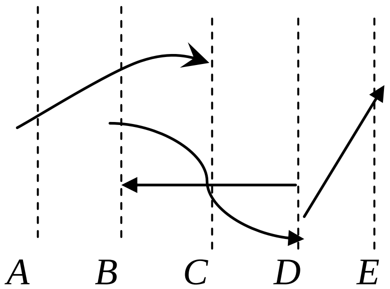
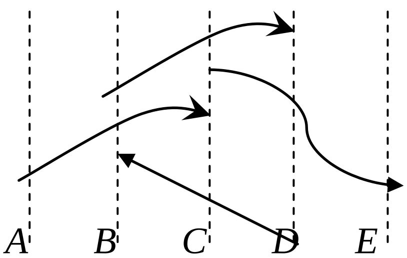
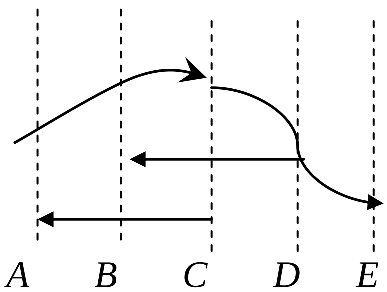
№	$f(x,y,z)$	№	$f(x,y,z)$
1	$(x\leftrightarrow y)\vee z)\wedge\bar{x}$	**2**	$(\bar{x}\vee y)\to\overline{(x\wedge z)}\leftrightarrow\bar{x}\,\vert y$
3	$((x\downarrow z)\leftrightarrow y)\vee z\wedge\bar{x}$	**4**	$\bar{x}\wedge y\to y\vee z\leftrightarrow\bar{x}$
5	$((\overline{y\to z})\leftrightarrow x+(z\wedge\bar{x}))$	**6**	$\bar{x}\wedge y\leftrightarrow y\vee\left(z\downarrow\bar{x}\right)$
7	$((\overline{y\wedge z})\to\bar{z}\downarrow x\vee y$	**8**	$(\bar{x}\vee y\to y)\downarrow z\leftrightarrow\bar{x}$
9	$(x+\overline{(y\vee z)})\wedge\bar{x}$	**10**	$\overline{\bar{x}\wedge y}\to y\wedge(z\leftrightarrow\bar{x})$
11	$(\bar{x}\wedge y)\to\overline{(y\vee z)}\leftrightarrow\bar{x}$	**12**	$\bar{x}\vee y\to(y\,\vert z\leftrightarrow\bar{x})$
13	$(\bar{x}\wedge y)\to\overline{(y\to z)}+\bar{\bar{x}}$	**14**	$\bar{x}\wedge y\to y\vee z\leftrightarrow\bar{x}\wedge x+y$
15	$(\bar{x}\wedge(y\to\overline{(y\vee z)})\leftrightarrow\bar{x}$	**16**	$y+\bar{x}\wedge y\to y\vee z\leftrightarrow\bar{x}$
17	$(\bar{z}\vee y\to x)\vee\overline{(y\vee z)}\downarrow\bar{x}$	**18**	$z\downarrow\bar{x}\wedge y\to(x\vee z\leftrightarrow\bar{x})$
19	$(\bar{x}\wedge z)+\overline{(y\vee z)}\to\bar{x}$	**20**	$(\bar{x}\wedge y)\to z+z\leftrightarrow\bar{x}+z$
21	$\overline{(\bar{x}\,\vert y)}\to\overline{\overline{(y\vee z)}}\vee\bar{x}$	**22**	$\overline{x\to y}\wedge\bar{y}+z$
23	$(\bar{x}\wedge y)\vee x\to\overline{(y\downarrow z)}\leftrightarrow\bar{x}$	**24**	$\bar{x}\wedge(y+z\to y)\vee z\leftrightarrow\bar{x}$
25	$(\bar{x}\wedge y\vee z)\to\overline{(y\vee z)}\,\vert\bar{x}$	**26**	$\overline{(z\wedge\bar{x})}\wedge y\to(y\vee z\leftrightarrow\bar{x})$
27	$\overline{(\bar{z}\vee y)}\to\overline{(y\vee z)}\leftrightarrow\bar{x}$	**28**	$\overline{y\vee x}\wedge y+z\to y\vee z\leftrightarrow\bar{y}$

29	$(\bar{x}\wedge y\vee z)+\overline{(y\vee z)}\downarrow\bar{z}$	**30**	$x+\bar{x}\wedge y\to y\vee(x\leftrightarrow\overline{z\vee x})$

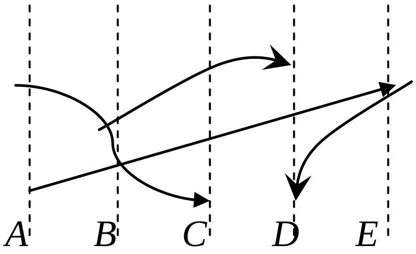
Задание №22

На рис. дан граф G. Определить $2r(G)+3d(G)$, периферийные вершины, диаметральные цепи, центральные вершины, центр.

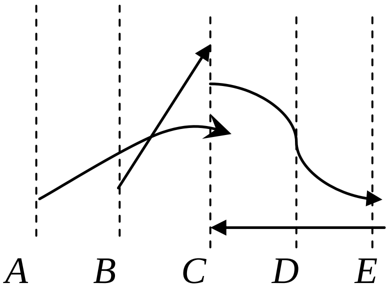
1. 	2. 
3. 	4. 
5. 	6. 
7. 	8. 

9. 	10. 
11. 	12. 
13. 	14. 
15. 	16. 
17. 	18. 

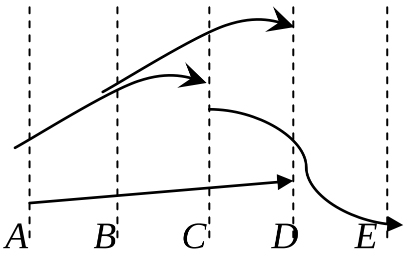
19.



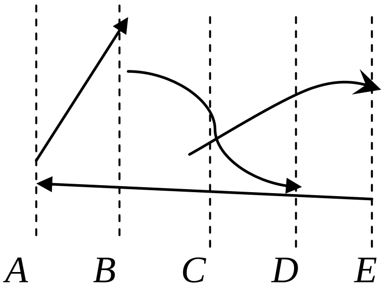
20.



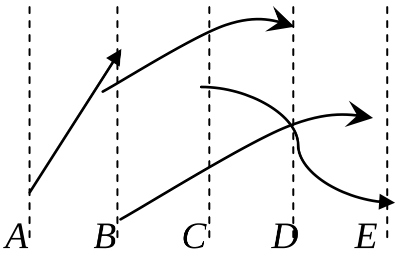
21.



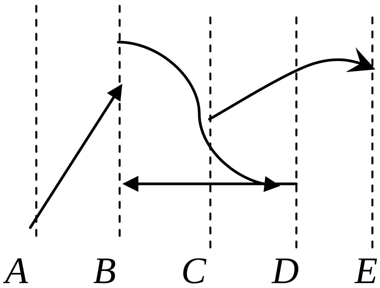
22.



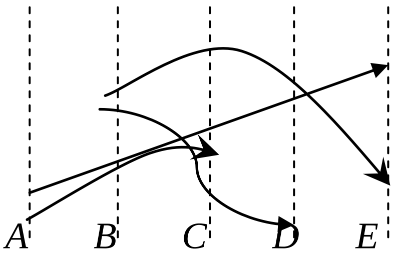
23.



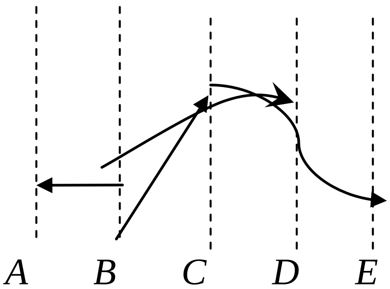
24.



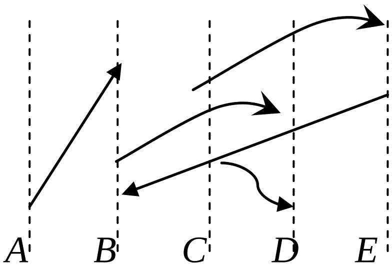
25.



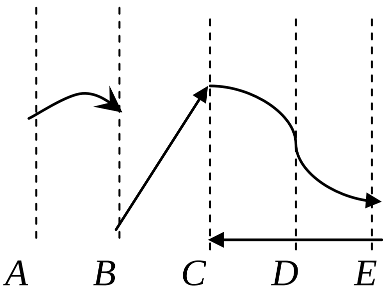
26.



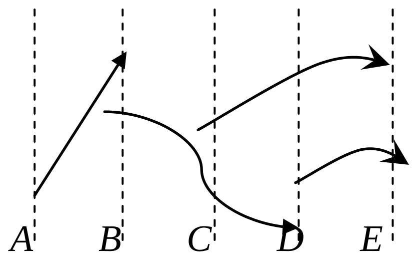
27.



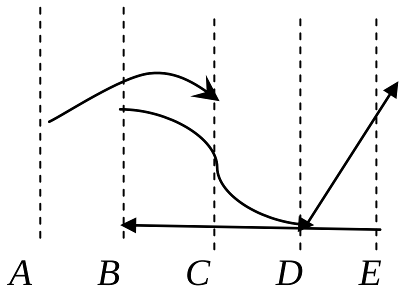
28.



29.



30.



Задание №23

По заданной матрице весов Ω графа G найти величину минимального пути и сам путь от вершины $s = x_1$ до вершины $t = x_6$ или $t = x_7$ по алгоритму Дейкстры, а затем величину максимального пути и сам путь между теми же вершинами:

1)
$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{array} & \begin{pmatrix} - & 5 & 10 & 13 & \infty & \infty \\ \infty & - & 8 & 9 & 13 & \infty \\ \infty & \infty & - & 5 & 3 & 6 \\ \infty & \infty & \infty & - & 8 & 10 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & - & 9 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix} \end{array}$$

2)
$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{array} & \begin{pmatrix} - & 11 & \infty & 14 & 15 & \infty \\ \infty & - & 13 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & - & \infty & \infty & 13 \\ \infty & 7 & 11 & - & 9 & \infty \\ \infty & 11 & 10 & \infty & - & 14 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix} \end{array}$$

3)
$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{array} & \begin{pmatrix} - & 5 & 8 & 7 & 18 & \infty \\ \infty & - & 11 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & - & \infty & \infty & 17 \\ \infty & 10 & 12 & - & 6 & \infty \\ \infty & 7 & 8 & \infty & - & 11 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix} \end{array}$$

4)
$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{array} & \begin{pmatrix} - & 6 & 8 & 11 & 10 & \infty \\ \infty & - & \infty & 9 & 7 & 15 \\ \infty & 8 & - & 7 & 4 & 11 \\ \infty & \infty & \infty & - & 6 & 7 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & - & 9 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix} \end{array}$$

5) $$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{array} & \begin{pmatrix} - & \infty & 11 & 15 & 7 & \infty & \infty \\ \infty & - & \infty & \infty & 14 & 18 & \infty \\ \infty & 9 & - & 13 & 7 & 11 & 22 \\ \infty & \infty & \infty & - & \infty & 11 & 16 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & - & 8 & 23 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - & 19 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix} \end{array}$$

6) $$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{array} & \begin{pmatrix} - & 5 & 6 & 9 & \infty & \infty \\ \infty & - & \infty & 3 & \infty & 14 \\ \infty & 3 & - & 3 & 4 & 16 \\ \infty & \infty & \infty & - & \infty & 4 \\ \infty & \infty & \infty & 3 & - & 8 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix} \end{array}$$

7) $$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{array} & \begin{pmatrix} - & 7 & 9 & \infty & 11 & \infty \\ \infty & - & \infty & 6 & \infty & 13 \\ \infty & 6 & - & 5 & 6 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & - & \infty & 7 \\ \infty & 4 & \infty & 6 & - & 8 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix} \end{array}$$

8) $$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{array} & \begin{pmatrix} - & 7 & 15 & \infty & 14 & \infty \\ \infty & - & 7 & 16 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & - & 19 & \infty & 21 \\ \infty & \infty & \infty & - & \infty & 17 \\ \infty & 13 & 14 & 15 & - & 18 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix} \end{array}$$

9) $$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{array} & \begin{pmatrix} - & 10 & 12 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & - & 11 & 9 & \infty & 19 \\ \infty & \infty & - & \infty & 10 & \infty \\ \infty & \infty & 13 & - & 11 & 10 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & - & 6 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix} \end{array}$$

10) $$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{array} & \begin{pmatrix} - & 7 & 19 & 20 & \infty & 15 & \infty \\ \infty & - & \infty & 11 & 6 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & - & 6 & 9 & \infty & 16 \\ \infty & \infty & \infty & - & 8 & 8 & 13 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & - & 5 & 15 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - & 14 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix} \end{array}$$

11) $$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{array} & \begin{pmatrix} - & 7 & 2 & \infty & 13 & \infty \\ \infty & - & \infty & \infty & 6 & \infty \\ \infty & 2 & - & 1 & 3 & 11 \\ \infty & \infty & \infty & - & \infty & 5 \\ \infty & \infty & \infty & 3 & - & 5 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix} \end{array}$$

12) $$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{array} & \begin{pmatrix} - & 10 & 11 & 6 & \infty & \infty \\ \infty & - & 13 & 8 & 11 & 17 \\ \infty & \infty & - & 5 & 6 & 15 \\ \infty & \infty & \infty & - & 7 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & - & 9 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix} \end{array}$$

13) $$\begin{array}{c|cccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\ \hline x_1 & - & 6 & \infty & 9 & 12 & \infty \\ x_2 & \infty & - & 6 & \infty & \infty & \infty \\ x_3 & \infty & \infty & - & \infty & \infty & 6 \\ x_4 & \infty & 4 & 8 & - & 6 & 14 \\ x_5 & \infty & 7 & 5 & \infty & - & 10 \\ x_6 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{array}$$

14) $$\begin{array}{c|cccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\ \hline x_1 & - & 4 & 9 & 8 & \infty & \infty \\ x_2 & \infty & - & 2 & \infty & \infty & \infty \\ x_3 & \infty & \infty & - & \infty & \infty & 3 \\ x_4 & \infty & 2 & 4 & - & 6 & \infty \\ x_5 & \infty & 2 & \infty & \infty & - & 3 \\ x_6 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{array}$$

15) $$\begin{array}{c|ccccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ \hline x_1 & - & 5 & \infty & 10 & 8 & 12 & \infty \\ x_2 & \infty & - & 7 & \infty & 4 & 9 & \infty \\ x_3 & \infty & \infty & - & 5 & \infty & 6 & 11 \\ x_4 & \infty & \infty & \infty & - & \infty & \infty & 14 \\ x_5 & \infty & \infty & 6 & \infty & - & 13 & 21 \\ x_6 & \infty & \infty & \infty & 8 & \infty & - & 9 \\ x_7 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{array}$$

16) $$\begin{array}{c|cccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\ \hline x_1 & - & 6 & 9 & 13 & 12 & \infty \\ x_2 & \infty & - & 5 & 9 & 6 & \infty \\ x_3 & \infty & \infty & - & 6 & \infty & 15 \\ x_4 & \infty & \infty & \infty & - & 8 & 9 \\ x_5 & \infty & \infty & \infty & \infty & - & 8 \\ x_6 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{array}$$

17) $$\begin{array}{c|cccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\ \hline x_1 & - & 8 & 10 & \infty & \infty & \infty \\ x_2 & \infty & - & 10 & 9 & 12 & \infty \\ x_3 & \infty & \infty & - & 10 & 12 & 7 \\ x_4 & \infty & \infty & \infty & - & 9 & 13 \\ x_5 & \infty & \infty & \infty & \infty & - & 11 \\ x_6 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{array}$$

18) $$\begin{array}{c|cccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\ \hline x_1 & - & 11 & 14 & \infty & \infty & \infty \\ x_2 & \infty & - & 8 & 10 & 15 & \infty \\ x_3 & \infty & \infty & - & 11 & 16 & 20 \\ x_4 & \infty & \infty & \infty & - & \infty & 12 \\ x_5 & \infty & \infty & \infty & 11 & - & 14 \\ x_6 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{array}$$

19) $$\begin{array}{c|cccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\ \hline x_1 & - & 9 & 7 & 13 & \infty & \infty \\ x_2 & \infty & - & \infty & \infty & 15 & \infty \\ x_3 & \infty & 5 & - & \infty & \infty & \infty \\ x_4 & \infty & 6 & 7 & - & 8 & 10 \\ x_5 & \infty & \infty & \infty & \infty & - & 12 \\ x_6 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{array}$$

20) $$\begin{array}{c|ccccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ \hline x_1 & - & \infty & 9 & \infty & \infty & \infty & \infty \\ x_2 & \infty & - & \infty & 11 & 5 & 10 & \infty \\ x_3 & \infty & 4 & - & 3 & 6 & 7 & \infty \\ x_4 & \infty & \infty & \infty & - & \infty & \infty & 5 \\ x_5 & \infty & \infty & \infty & 7 & - & 5 & 18 \\ x_6 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - & 4 \\ x_7 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{array}$$

21) $\begin{array}{c|cccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\ \hline x_1 & - & 4 & 8 & \infty & \infty & \infty \\ x_2 & \infty & - & \infty & 3 & \infty & 10 \\ x_3 & \infty & 3 & - & 4 & 3 & \infty \\ x_4 & \infty & \infty & \infty & - & \infty & 4 \\ x_5 & \infty & 2 & \infty & 5 & - & 7 \\ x_6 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{array}$

22) $\begin{array}{c|cccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\ \hline x_1 & - & 5 & 4 & \infty & 10 & \infty \\ x_2 & \infty & - & \infty & 8 & \infty & 13 \\ x_3 & \infty & 6 & - & 5 & 8 & \infty \\ x_4 & \infty & \infty & \infty & - & \infty & 8 \\ x_5 & \infty & \infty & \infty & 4 & - & 10 \\ x_6 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{array}$

23) $\begin{array}{c|cccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\ \hline x_1 & - & 12 & 10 & \infty & 11 & \infty \\ x_2 & \infty & - & \infty & 10 & 7 & 15 \\ x_3 & \infty & 8 & - & 7 & 10 & \infty \\ x_4 & \infty & \infty & \infty & - & \infty & 11 \\ x_5 & \infty & \infty & \infty & 6 & - & 12 \\ x_6 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{array}$

24) $\begin{array}{c|cccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\ \hline x_1 & - & 15 & 10 & \infty & \infty & \infty \\ x_2 & \infty & - & \infty & \infty & 12 & 18 \\ x_3 & \infty & 10 & - & 9 & 12 & 19 \\ x_4 & \infty & \infty & \infty & - & \infty & 13 \\ x_5 & \infty & \infty & \infty & 11 & - & 14 \\ x_6 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{array}$

25) $\begin{array}{c|ccccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ \hline x_1 & - & \infty & 7 & 12 & \infty & 10 & \infty \\ x_2 & \infty & - & \infty & \infty & 6 & 13 & \infty \\ x_3 & \infty & 5 & - & 4 & 5 & 6 & \infty \\ x_4 & \infty & \infty & \infty & - & \infty & \infty & 4 \\ x_5 & \infty & \infty & \infty & 8 & - & 5 & 9 \\ x_6 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - & 6 \\ x_7 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{array}$

26) $\begin{array}{c|cccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\ \hline x_1 & - & 7 & 8 & 13 & \infty & \infty \\ x_2 & \infty & - & 9 & 7 & 12 & \infty \\ x_3 & \infty & \infty & - & 6 & 7 & 8 \\ x_4 & \infty & \infty & \infty & - & 9 & 17 \\ x_5 & \infty & \infty & \infty & \infty & - & 10 \\ x_6 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{array}$

27) $\begin{array}{c|cccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\ \hline x_1 & - & 4 & 5 & 10 & 11 & \infty \\ x_2 & \infty & - & 11 & 3 & 5 & \infty \\ x_3 & \infty & \infty & - & 6 & 7 & 18 \\ x_4 & \infty & \infty & \infty & - & 6 & \infty \\ x_5 & \infty & \infty & \infty & \infty & - & 8 \\ x_6 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{array}$

28) $\begin{array}{c|cccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\ \hline x_1 & - & 8 & \infty & 5 & 10 & \infty \\ x_2 & \infty & - & 7 & \infty & \infty & \infty \\ x_3 & \infty & \infty & - & \infty & \infty & 8 \\ x_4 & \infty & 4 & 6 & - & 5 & 11 \\ x_5 & \infty & 5 & 5 & \infty & - & 3 \\ x_6 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{array}$

$$29)\quad \begin{array}{cc} & \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{matrix} & \begin{pmatrix} - & \infty & 3 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & - & \infty & 4 & 6 & 8 \\ \infty & 8 & - & 5 & 6 & 12 \\ \infty & \infty & \infty & - & 5 & 7 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & - & 3 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix} \end{array}$$

$$30)\quad \begin{array}{cc} & \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \end{matrix} \\ \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{matrix} & \begin{pmatrix} - & 3 & 5 & \infty & 4 & \infty & \infty \\ \infty & - & \infty & 8 & \infty & 9 & 15 \\ \infty & \infty & - & 4 & 6 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & - & \infty & 7 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 8 & - & 3 & 11 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - & 8 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix} \end{array}$$

Задание №24

По заданной матрице весов Ω графа G найти минимальный путь по алгоритму Беллмана-Мура между начальной вершиной $s = x_1$ и конечной вершиной $t = x_6$ или $t = x_7$:

$$1)\quad \begin{array}{cc} & \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \end{matrix} \\ \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{matrix} & \begin{pmatrix} - & 15 & \infty & 12 & 10 & \infty & \infty \\ \infty & - & 4 & -6 & 2 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & - & \infty & -4 & 2 & -3 \\ \infty & \infty & 10 & - & 7 & \infty & 9 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & - & -5 & 5 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - & 6 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix} \end{array}$$

$$2)\quad \begin{array}{cc} & \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \end{matrix} \\ \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{matrix} & \begin{pmatrix} - & 3 & \infty & 7 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & - & 5 & \infty & 5 & 11 & \infty \\ \infty & \infty & - & -4 & -6 & 5 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & - & 8 & 6 & 4 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & - & 6 & 10 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - & -3 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix} \end{array}$$

$$3)\quad \begin{array}{cc} & \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \end{matrix} \\ \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{matrix} & \begin{pmatrix} - & 2 & \infty & \infty & 4 & \infty & \infty \\ \infty & - & \infty & \infty & \infty & 10 & \infty \\ \infty & 2 & - & 3 & 6 & \infty & \infty \\ \infty & -7 & \infty & - & \infty & \infty & 4 \\ \infty & -4 & \infty & 8 & - & \infty & 11 \\ \infty & \infty & \infty & -3 & -5 & - & 3 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix} \end{array}$$

$$4)\quad \begin{array}{cc} & \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \end{matrix} \\ \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{matrix} & \begin{pmatrix} - & 3 & 8 & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & - & \infty & 7 & \infty & 10 & \infty \\ \infty & 4 & - & \infty & 7 & 6 & 10 \\ \infty & \infty & -5 & - & \infty & \infty & 4 \\ \infty & -9 & \infty & 12 & - & 6 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - & -5 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix} \end{array}$$

5) $$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{array} & \begin{pmatrix} - & 8 & 7 & 11 & \infty & \infty \\ \infty & - & -10 & 7 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & - & \infty & 6 & \infty \\ \infty & \infty & 5 & - & \infty & 8 \\ \infty & \infty & \infty & -6 & - & 7 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix} \end{array}$$

6) $$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{array} & \begin{pmatrix} - & -3 & 7 & \infty & 8 & \infty & \infty \\ \infty & - & 5 & 11 & \infty & 13 & \infty \\ \infty & \infty & - & -5 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & - & \infty & 6 & 4 \\ \infty & \infty & 7 & 9 & - & -6 & 12 \\ \infty & \infty & 8 & \infty & \infty & - & 5 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix} \end{array}$$

7) $$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{array} & \begin{pmatrix} - & 4 & 7 & 14 & -6 & 11 & \infty \\ \infty & - & -3 & 10 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & - & \infty & -8 & 7 & 10 \\ \infty & \infty & \infty & - & \infty & \infty & 3 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & - & 5 & \infty \\ \infty & 12 & \infty & 5 & \infty & - & 6 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix} \end{array}$$

8) $$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{array} & \begin{pmatrix} - & \infty & 6 & 9 & 5 & \infty & \infty \\ \infty & - & \infty & \infty & 7 & 10 & \infty \\ \infty & 3 & - & \infty & \infty & \infty & 12 \\ \infty & \infty & \infty & - & \infty & -7 & \infty \\ \infty & \infty & -6 & 8 & - & 4 & 8 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - & 5 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix} \end{array}$$

9) $$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{array} & \begin{pmatrix} - & \infty & 8 & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & - & \infty & \infty & -6 & 10 & 12 \\ \infty & 4 & - & -4 & \infty & -7 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & - & \infty & \infty & 3 \\ \infty & \infty & 7 & 10 & - & 6 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 8 & \infty & - & 5 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix} \end{array}$$

10) $$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{array} & \begin{pmatrix} - & 6 & 11 & 5 & \infty & \infty \\ \infty & - & \infty & 6 & 7 & 6 \\ \infty & -5 & - & \infty & 6 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & - & -4 & 5 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & - & 7 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix} \end{array}$$

11) $$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{array} & \begin{pmatrix} - & 4 & \infty & 15 & 8 & \infty & \infty \\ \infty & - & 5 & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & - & \infty & 9 & \infty & 7 \\ \infty & \infty & 4 & - & 10 & -6 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & - & 7 & 16 \\ \infty & -18 & 7 & \infty & \infty & - & 6 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix} \end{array}$$

12) $$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{array} & \begin{pmatrix} - & 6 & 12 & 16 & 3 & \infty & \infty \\ \infty & - & 5 & \infty & \infty & 13 & \infty \\ \infty & \infty & - & -5 & \infty & \infty & 9 \\ \infty & \infty & \infty & - & \infty & \infty & 6 \\ \infty & -7 & \infty & \infty & - & 5 & 15 \\ \infty & \infty & 8 & \infty & \infty & - & 6 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix} \end{array}$$

$$13)\quad \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{array} & \begin{pmatrix} - & 3 & 11 & \infty & 10 & \infty & \infty \\ \infty & - & -5 & 15 & \infty & 18 & \infty \\ \infty & \infty & - & 7 & -7 & 8 & 9 \\ \infty & \infty & \infty & - & 10 & 8 & 5 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & - & 7 & 21 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - & -6 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix} \end{array}$$

$$14)\quad \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{array} & \begin{pmatrix} - & \infty & 9 & 10 & 11 & \infty & \infty \\ \infty & - & 6 & \infty & 8 & 9 & \infty \\ \infty & \infty & - & \infty & -7 & \infty & 12 \\ \infty & \infty & -4 & - & \infty & \infty & 5 \\ \infty & \infty & \infty & 14 & - & 5 & 11 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - & 6 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix} \end{array}$$

$$15)\quad \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{array} & \begin{pmatrix} - & 7 & \infty & -8 & \infty & \infty \\ \infty & - & 13 & -9 & 10 & \infty \\ \infty & \infty & - & 3 & -4 & -2 \\ \infty & \infty & \infty & - & 9 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & - & 8 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix} \end{array}$$

$$16)\quad \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{array} & \begin{pmatrix} - & 3 & \infty & \infty & \infty & 7 & \infty \\ \infty & - & \infty & 8 & 5 & -10 & \infty \\ \infty & 4 & - & 3 & 6 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & - & \infty & \infty & -5 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & - & 6 & 13 \\ \infty & \infty & 7 & 6 & \infty & - & 4 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix} \end{array}$$

$$17)\quad \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{array} & \begin{pmatrix} - & 6 & 15 & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & - & 5 & \infty & 11 & 18 & 20 \\ \infty & \infty & - & -4 & -10 & 7 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & - & \infty & 8 & 5 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & - & 7 & 16 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - & -6 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix} \end{array}$$

$$18)\quad \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{array} & \begin{pmatrix} - & \infty & 5 & \infty & 6 & \infty & \infty \\ \infty & - & \infty & \infty & 5 & \infty & \infty \\ \infty & 4 & - & 6 & -6 & 8 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & - & 9 & \infty & 7 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & - & 7 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & -5 & \infty & - & 8 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix} \end{array}$$

$$19)\quad \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{array} & \begin{pmatrix} - & \infty & \infty & 15 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & - & 6 & \infty & 7 & 11 & \infty \\ \infty & \infty & - & \infty & \infty & -7 & \infty \\ \infty & -8 & \infty & - & \infty & 5 & 6 \\ \infty & \infty & 5 & 9 & - & 4 & 18 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - & 6 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix} \end{array}$$

$$20)\quad \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{array} & \begin{pmatrix} - & 6 & 9 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & - & \infty & 6 & \infty & \infty \\ \infty & -4 & - & 5 & 8 & 10 \\ \infty & \infty & \infty & - & -5 & 7 \\ \infty & 2 & \infty & \infty & - & 4 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix} \end{array}$$

$$21)\quad \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{array} & \begin{pmatrix} - & \infty & -11 & \infty & 5 & \infty & \infty \\ \infty & - & \infty & 12 & 8 & 15 & \infty \\ \infty & 5 & - & 17 & -9 & 12 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & - & \infty & \infty & 5 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & - & 16 & 27 \\ \infty & \infty & \infty & -8 & \infty & - & 8 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix} \end{array}$$

$$22)\quad \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{array} & \begin{pmatrix} - & \infty & 15 & \infty & 9 & 22 & \infty \\ \infty & - & \infty & \infty & 7 & \infty & \infty \\ \infty & -6 & - & 4 & -7 & -8 & 9 \\ \infty & \infty & \infty & - & \infty & \infty & 5 \\ \infty & \infty & \infty & 9 & - & 8 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 11 & \infty & - & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix} \end{array}$$

$$23)\quad \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{array} & \begin{pmatrix} - & 4 & \infty & 10 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & - & 6 & 12 & 8 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & - & 5 & -8 & 9 & 11 \\ \infty & \infty & \infty & - & \infty & -7 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & - & 7 & 13 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - & 4 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix} \end{array}$$

$$24)\quad \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{array} & \begin{pmatrix} - & \infty & \infty & \infty & 6 & \infty & \infty \\ \infty & - & 3 & \infty & \infty & 9 & \infty \\ \infty & \infty & - & -4 & 6 & -8 & 8 \\ \infty & \infty & \infty & - & \infty & \infty & 3 \\ \infty & 7 & \infty & 9 & - & 4 & 15 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - & 7 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix} \end{array}$$

$$25)\quad \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{array} & \begin{pmatrix} - & 7 & \infty & 6 & \infty & \infty \\ \infty & - & 9 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & - & \infty & \infty & 8 \\ \infty & -6 & 4 & - & 10 & \infty \\ \infty & 8 & -5 & \infty & - & 6 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix} \end{array}$$

$$26)\quad \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{array} & \begin{pmatrix} - & 5 & 9 & \infty & 7 & 10 & \infty \\ \infty & - & \infty & 13 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & -6 & - & 4 & -8 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & - & \infty & \infty & 4 \\ \infty & \infty & \infty & 10 & - & 5 & 15 \\ \infty & \infty & \infty & 8 & -7 & - & 5 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix} \end{array}$$

$$27)\quad \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{array} & \begin{pmatrix} - & 5 & \infty & 15 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & - & 6 & \infty & -8 & 13 & \infty \\ \infty & \infty & - & 4 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & 10 & \infty & - & -9 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 7 & \infty & - & \infty & 12 \\ \infty & \infty & \infty & 7 & 6 & - & 5 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix} \end{array}$$

$$28)\quad \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{array} & \begin{pmatrix} - & \infty & 12 & \infty & \infty & 15 & \infty \\ \infty & - & 6 & 10 & 7 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & - & \infty & 10 & -8 & 13 \\ \infty & \infty & \infty & - & \infty & \infty & 5 \\ \infty & \infty & \infty & 11 & - & 7 & 16 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - & 6 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix} \end{array}$$

$$
29)\quad \begin{array}{c|c}
 & \begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \end{array} \\
\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{array} &
\begin{pmatrix}
- & 6 & \infty & \infty & 12 & \infty & \infty \\
\infty & - & 4 & 10 & \infty & 15 & \infty \\
\infty & \infty & - & 4 & \infty & \infty & \infty \\
\infty & \infty & \infty & - & \infty & \infty & 6 \\
\infty & -8 & 7 & 11 & - & -6 & \infty \\
\infty & \infty & -8 & 7 & \infty & - & 5 \\
\infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & -
\end{pmatrix}
\end{array}
\qquad
30)\quad \begin{array}{c|c}
 & \begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \end{array} \\
\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{array} &
\begin{pmatrix}
- & 7 & 5 & \infty & 9 & \infty \\
\infty & - & -8 & 4 & \infty & \infty \\
\infty & \infty & - & 3 & 6 & \infty \\
\infty & \infty & \infty & - & \infty & 8 \\
\infty & \infty & \infty & -4 & - & 6 \\
\infty & \infty & \infty & \infty & \infty & -
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

Раздел 7. ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ

1. Дано универсальное множество *U*={1,2,3,4} и в нем подмножества *A*={*x*| *x* < 5}, *B*={2, 4}, *C*={1, 3,4}. Множество $A \cup B$ имеет вид…

1) $\{1, 2, 3, 4\}$. 2) $\{1, 3, 4\}$. 3) $\{3, 4\}$.

2. Дано универсальное множество *U*={3,4,5,6,7} и в нем подмножества *A*={*x*| *x* <6}, *B*={2,4,5,7}, *C*={1,3,5,7}. Декартово произведение $D \times C$, где $D = (C \cap B) \setminus A$ имеет вид…

1) $\{(7,1), (7,2), (7,3), (7,4)\}$.

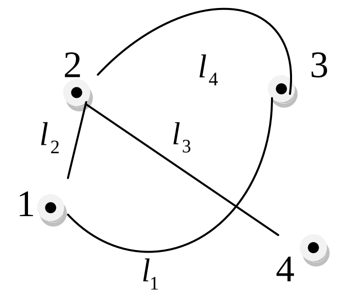
2) $\{(7,1), (7,5), (7,3), (7,7)\}$.

3) $\{(7,1), (7,2), (7,3)\}$.

3. Количество всевозможных перетановок букв в слове «молоко» равно…

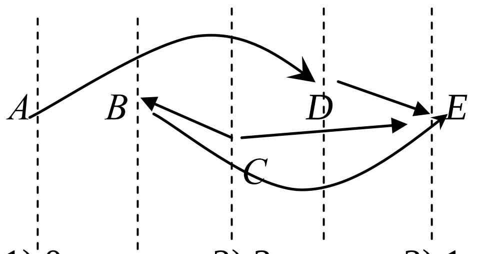
1) 24; 2) 720; 3) 120 .

4. Графу, изображенному на рисунке, соответствует матрица смежности вершин...



$$1)\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \qquad 2)\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \qquad 3)\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

5. Радиус графа, изображенного на рис., равен…



1) 0; 2) 3; 3) 1.

6. Для данных графиков $P=\{(1,3),(3,4),(1,2)\}$ и $Q=\{(2,1),(5,4),(6,2)\}$ композиции $P\circ Q$ соответствует ...

1) $\{(1,1),(3,5)\}$; 2) $\{(1,2),(3,5)\}$; 3) $\{(1,1)\}$.

7. Количество неизоморфных деревьев с 6 вершинами равно…

1) 3; 2) 25; 3) 84.

8. Количество неизоморфных связных графов с 5 вершинами и 4 ребрами равно…

1) 1 ; 2) 15; 3) 25.

9. Количество неизоморфных связных графов с 5 вершинами и 5 ребрами равно…

1) 5 ; 2) 10; 3) 15 .

10. Ребра графа, имеющие общий конец, называются…

1. смежными.

2. параллельными.

3. изолированными.

11. Диаметр графа, изображенного на рис. задания 5, равен…

1) 1 ; 2) 0; 3) 3.

12. Количество ребер в полном графе равно…

1) 5; 2) C_n^2; 3) четное.

13. Граф, не содержащий петель и параллельных дуг, называется …

1. простым;
2. двудольным;
3. неориентированным.

14. Периферийными вершинами графа, изображенного на рис. задания 5, являются…

1) *A, B*; 2) *C, B, E*; 3) *D,E,C*.

15. У плоского графа число граней равно…

1) 7; 2) C_n^2; 3) четное.

16. Диаметральная цепь графа, изображенного на рис. задания 5, имеет вид…

1) *A-D и B-E*; 2) *C-B*; 3) *D-E,C-A*.

17. Центром графа, изображенного на рис. задания 5, является вершина…

1) *C*; 2) *E*; 3) *D*.

18. Для функции $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ фиктивными переменными называются функции…

1. если $f(0,0,...,0) = 0$;
2. если от них не зависит значение функции;
3. если они принимают нулевое значение.

19. Центральной вершиной графа, изображенного на рис. задания 5, является…

1) A; 2) E; 3) D.

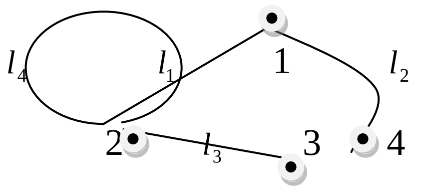
20. Формула называется тождественно-истинной, если…

1. принимает истинность при любом наборе значений аргументов;

2. принимает истинность только на тождественных наборах;

3. принимает истинность на половине наборов значений аргументов;

21. Матрица смежности вершин для графа, изображенного на рис., имеет вид…

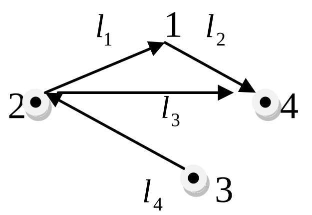


1) $P_{4x4} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; 2) $P_{4x4} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; 3) $P_{4x4} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

22. Матрица смежности ребер для графа, изображенного на рис. задания 21, имеет вид…

1) $Q_{3x3} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; 2) $Q_{3x3} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; 3) $Q_{3x3} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

23. Матрица инциденций для графа, изображенного на рис., имеет вид…



1) $R_{4x4} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$; 2) $R_{4x4} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$; 3) $R_{4x4} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

24. Матрица инциденций для графа, изображенного на рис. задания 21, имеет вид…

1) $R_{4x4} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; 2) $R_{4x4} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; 3) $R_{4x4} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

25. Количество всех подмножеств множества $\{1, 3, 5, 6\}$ равно…

1) 9; 2) 6; 3) 16.

26. В группе из 18 человек 5 человек увлекаются театром, 10 человек увлекаются спортом и 4 человека увлекаются и театром, и спортом. Сколько человек в группе не увлекаются ни театром, ни спортом?

1) 7; 2) 14; 3) 3.

27. В группе из 17 человек английский язык изучают 10 человек, французский язык изучают 6 человек и оба языка изучают 2 человека. Сколько человек в группе не изучает ни английский, ни французский языки?

1) 2; 2) 1; 3) 3.

28. Высказывание: «Число 15 делится на 3 и не делится на 8», может быть записано логической формулой…

1) $A \vee \overline{B}$; 2) $\overline{A \wedge B}$; 3) $A \wedge \overline{B}$.

29. Таблицей истинности логического высказывания $\overline{A} \wedge B$ является…

1)

A	B	$\overline{A} \wedge B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

2)

A	B	$\overline{A} \wedge B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

3)

A	B	$\overline{A} \wedge B$
0	*0*	*0*
0	*1*	*1*
1	*0*	*0*
1	*1*	*0*

30. Даны множества $M_1 = \{1, 2\}$, $M_2 = \{m, n\}$, $M_3 = \{e, f\}$. Тогда множество

$M = \{(1, e, m), (1, e, n), (1, f, m), (1, f, n), (2, e, m), (2, e, n), (2, f, m), (2, f, n)\}$

является прямым произведением…

1) $M_1 \times M_2 \times M_3$; 2) $M_1 \times M_3 \times M_2$;

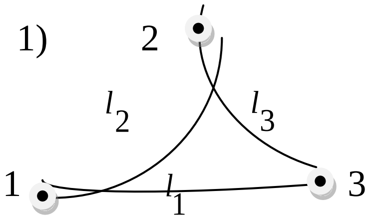
3) $M_2 \times M_3 \times M_1$; 4) $M_2 \times M_1 \times M_3$.

31. Если «словом» считать любую комбинацию букв, то количество комбинаций, полученных перестановкой букв в слове «ОКНО», равно…

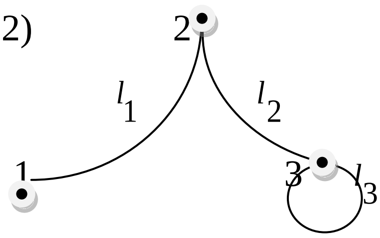
1) 11; 2) 12; 3) 24.

32. Матрицей инцидентности $R_{3x3} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ задан граф…

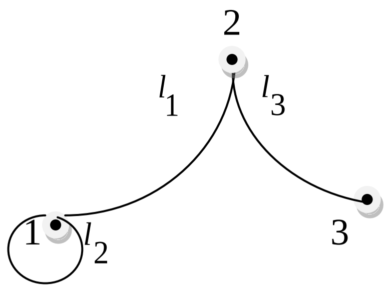
1)



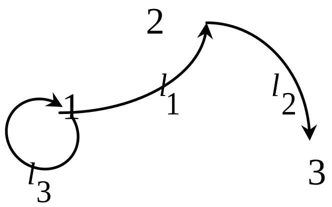
2)



3)



33. Матрица смежности дуг графа, изображенного на рис., имеет вид…

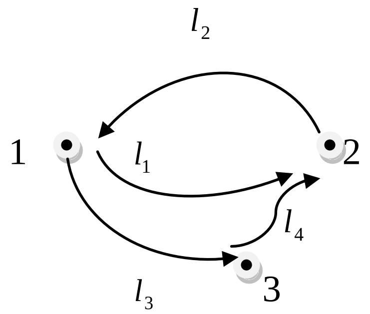


1) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

34. Высказывание: «Если студент не занимается, то он не сдает экзамен», может быть записано логической формулой…

1) $\overline{A} \to \overline{B}$; 2) $\overline{A \to B}$; 3) $\overline{A} \sim \overline{B}$.

35. Графу, изображенному на рисунке, соответствует матрица инциденций I…

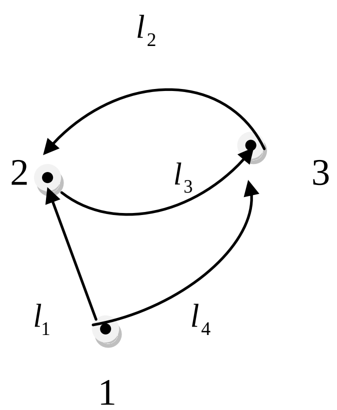


1) $I = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$; 2) $I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$;

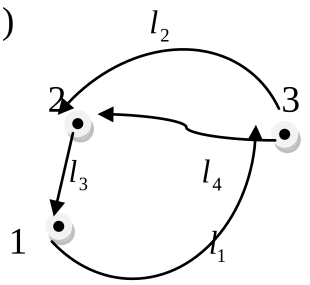
3) $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

36. Матрице смежности дуг $Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ соответствует орграф…

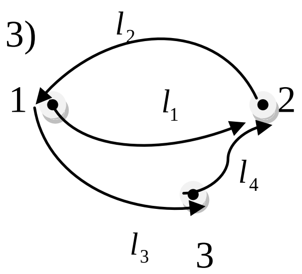
1)



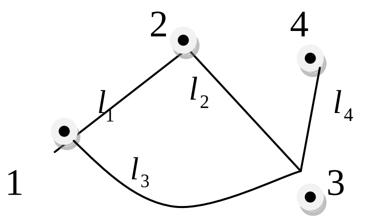
2)



3)



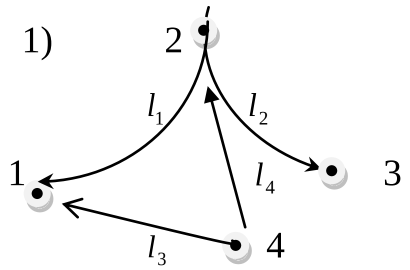
37. Матрица смежности дуг графа, изображенного на рисунке, имеет вид…



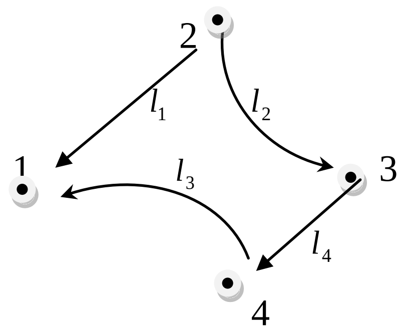
1) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

38. Матрице смежности вершин $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ соответствует орграф, изображенный на рис…

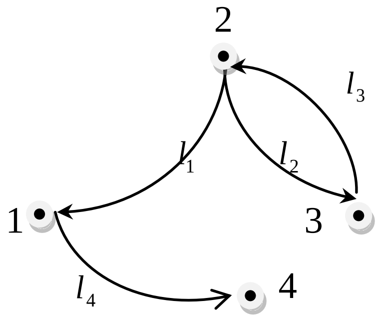
1)



2)



3)



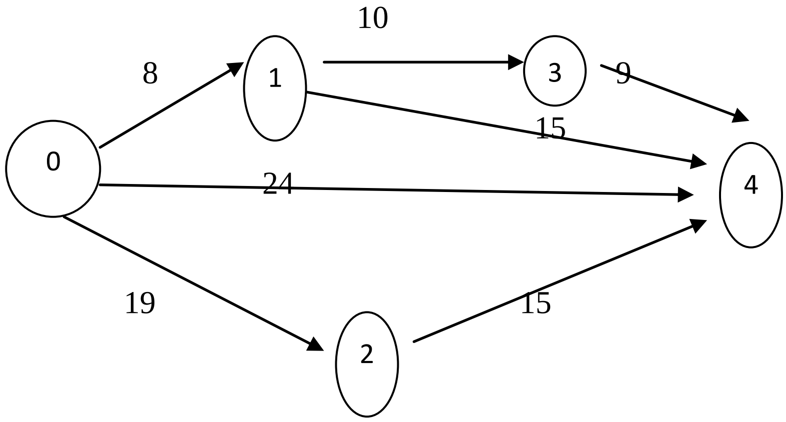
39. Граф является псевдографом, если …

1. ребра имеют направление;

2. содержит кратные ребра;

3. имеет петлю.

40. Для сетевого графика, изображенного на рисунке, критический путь имеет…



1) $l_3 : 0 \to 4$.   2) $l_1 : 0 \to 2 \to 4$.

3) $l_4 : 0 \to 1 \to 3 \to 4$.

41. Таблица истинности логического высказывания f имеет вид:

x	y	f
0	0	0
0	1	1
1	0	0
1	1	0

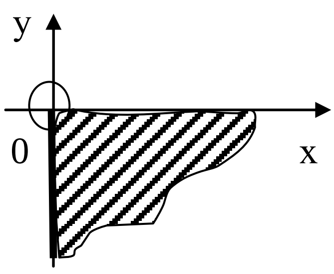
Тогда совершенная коньюнктивная нормальная форма функции f имеет вид…

1) $f(x,y) = (x \vee y)(\bar{x} \vee y)(\bar{x} \vee \bar{y})$;   2) $f(x,y) = \bar{x} \cdot y$;

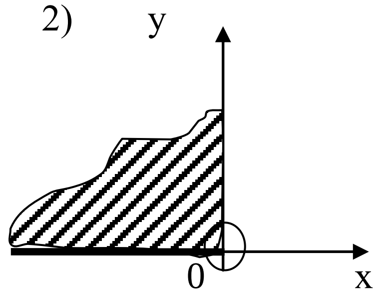
3) $f(x,y) = (\bar{x} \vee \bar{y})(x \vee \bar{y})(x \vee y)$.

42. Даны множества $M_1 = \{a \in R, a \geq 0\}$, $M_2 = \{в \in R, в < 0\}$. Тогда прямым произведением $M_1 \times M_2$ является область, изображенная на рисунке…

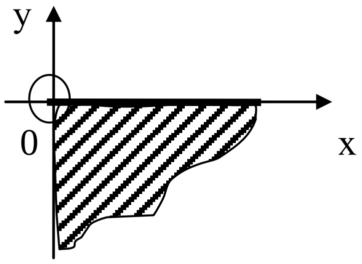
1)



2)



3)

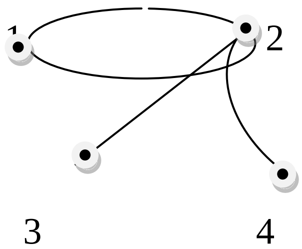


43. Количество способов распределения трех первых мест в олимпиаде по математике среди 7 участников, равно…

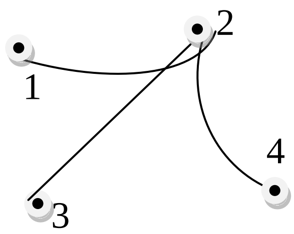
1) 1000; 2) 120; 3) 35.

44. Неориентированным графом с множеством вершин $V = \{1, 2, 3, 4\}$ и ребер $U = \{(1,2),(2,3),(2,4),(2,2),(3,3)\}$ является…

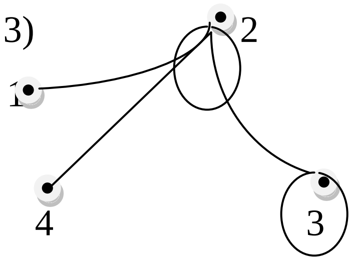
1)



2)



3)



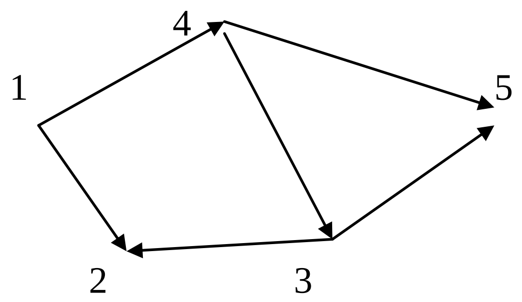
45. Даны два простых высказывания: A – «Сегодня на ужин будет плов», B – «Сегодня на ужин будет яичница». Тогда логической формулой $A \vee B$ записывается выражение…

1) «Сегодня на ужин будет плов и яичница».

2) «Сегодня на ужин будет плов или яичница».

3) «Если сегодня на ужин будет плов, то будет и яичница».

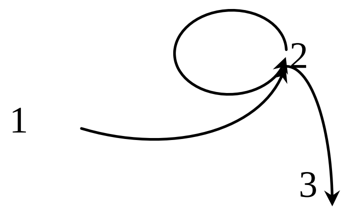
46. Для ориентированного графа, изображенного на рисунке, полный путь может иметь вид…



1) $l: 1 \to 4 \to 5$. 2) $l: 1 \to 5$.

3) $l: 1 \to 2 \to 4 \to 5$.

47. Матрица смежности вершин графа G, изображенного на рисунке, имеет вид…



1) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

48. Сколько различных чисел можно получить, переставляя цифры числа 12332453?

1) 1060; 2) 1120; 3) 3360.

49. Проекция множества $A = \{(1, 2), (1, 3), (2, 3), (3, 4)\}$ на первую координату равна…

1) $\{1, 2, 3\}$; 2) $\{2, 3, 4\}$; 3) $\{1, 2, 3, 4\}$.

50. Число вершин графа называется…

1) порядком; 2) степенью вершины; 3) длиной маршрута.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Основная литература

1. Кузнецов О. П. Дискретная математика для инженера / О. П. Кузнецов. – 5-е изд., стер. – СПб. : Лань, 2007. – 395 с.

2. Осипова В. А. Основы дискретной математики: учеб. пособие для студентов вузов, обучающихся по направлению подгот. "Экономика" : рек. УМО / В. А. Осипова. - М. : ФОРУМ : ИНФРА-М, 2013. - 159 с.

Дополнительная литература

1. Баврин И. И. Дискретная математика: учеб. для вузов / И. И. Баврин. – М. : Высш. шк., 2007. – 200 с.

2. Кургалин С.Д. Задачи по дискретной математике [Текст] / Сергей Дмитриевич Кургалин, Сергей Викторович Борзунов, Светлана Николаевна Синицина. - Электрон. текстовые дан. - Воронеж: Издательско-полиграфический центр Воронежского государственного университета, 2011. - 71 с. - Режим доступа: http://rucont.ru/efd/226838

3. Тишин В.В. Дискретная математика в примерах и задачах. – СПб.: БХВ-Петербург, 2008. – 352 с.

4. Шапорев С.Д. Дискретная математика. Курс лекций и практических занятий. – СПб.: БХВ-Петербург, 2009. – 400 с.

5. Шевелев Ю. П. Сборник задач по дискретной математике (для практических занятий в группах): учеб. пособие для студентов, обучающихся по направлению подгот. бакалавров 010400.62 "Прикладная математика и информатика" : рек. Сиб. региональным учеб.-метод. центром / Ю. П. Шевелев, Л. А. Писаренко, М. Ю. Шевелев. - СПб. : Лань, 2013. - 523 с. ХР(1)

Голышева Светлана Павловна

Елтошкина Евгения Валерьевна

Дискретная математика

Учебное пособие

Для студентов очной формы обучения направлений бакалавриата

38.03.05 – Бизнес-информатика, 09.03.03 – Прикладная информатика

Компьютерный набор и верстка Голышевой С.П., Елтошкиной Е.В.

Редактор Тесля В.И.

Лицензия ЛР № 070444 от 11.03.98 г.

Подписано к печати

Формат 60×84. Печ. 7,25п. л. Тираж 20 экз.

664038, Иркутская обл., Иркутский р-он, п. Молодежный

ФГБОУ ВПО «Иркутский государственный аграрный университет им. А.А. Ежевского»